

Mémoire de stage

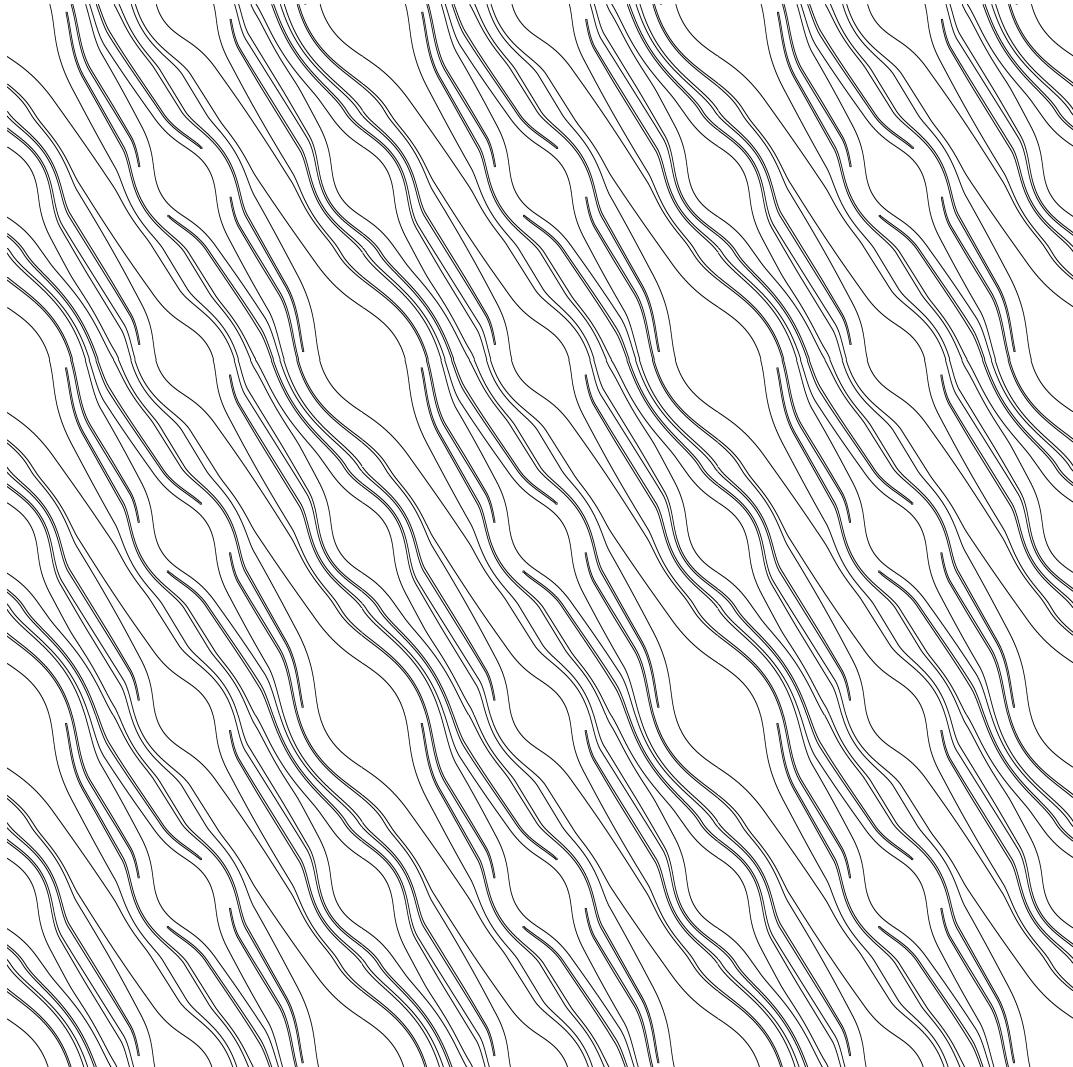
Propriété de Wada et visualisation
des attracteurs étranges

Bence Béky
Directeur : Yves Coudène

Master de mathématiques
parcours probabilités et statistiques

IRMAR
Université de Rennes 1

2009 mars–juin



Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions deux systèmes dynamiques, que nous visualisons par ordinateur, en commentant les images en détail.

Le premier système est appelé l'attracteur de Plykin. On démontre rigoureusement que ses bassins d'attraction forment des lacs de Wada. Ils sont visualisés par ordinateur et l'influence des paramètres du système est étudiée sur les images.

Le deuxième système est le pendule de Hubbard. On calcule son équation et on étudie les applications de Poincaré associées. Il s'agit d'un système complexe non-linéaire, on se contentera d'étudier ce système par le biais de méthode numérique. Les images de l'article de Hubbard sont recalculées, et d'autres images sont présentées afin de mieux comprendre le comportement du système.

On étudie la dynamique dans l'espace des paramètres. Pour certaines valeurs des paramètres, on montre l'existence d'un répulseur en inversant le temps dans l'équation du pendule.

La partie du code qui sert à résoudre l'EDO numériquement est donnée en annexe.

Abstract

In this Master thesis, two dynamical systems are studied, they are visualized by the means of computer generated images, which are commented on in detail.

The first system is known as the Plykin attractor. We give a rigorous proof of the fact that its attraction basins form lakes of Wada. Computer-generated images are shown and the effect of tuning the parameters of the system is investigated.

The second system is Hubbard's pendulum. Its governing equation is derived and the associated Poincaré mappings are studied. This is a complicated non-linear system, we restrict our studies to numerical analysis. Images from Hubbard's article are reproduced, and other images are generated to better understand the behavior of the system.

The dynamics of the parameter space is investigated. For certain values of the parameters, the existence of a repellor is shown by reversing time in the equation of the pendulum.

The portion of the source code responsible for solving the ODE is presented.

Remerciements

Ce travail n'aurait été possible sans le soutien et l'amitié des professeurs, bibliothécaires et secrétaires de l'Institut de Recherche Mathématiques de Rennes qui m'ont guidé dans ce labyrinthe universitaire qui m'apparaît toujours étranger sans leur aide.

Je remercie vivement tous les enseignants de la deuxième année de Master d'éveiller mon intérêt aux branches variées de la théorie des probabilité et des systèmes dynamiques.

Je tiens particulièrement à remercier Yves Coudène d'avoir accepté volontiers d'être mon directeur malgré des difficultés additionnelles présentées par mon niveau de français. Avec sa patience infinie, nous avons pourtant réussi à concentrer notre attention sur les mathématiques.

Je suis également reconnaissant au gouvernement français et à la Fondation Michel Métivier pour leur aide financière et administrative. Ma profonde gratitude va à Jean-Pierre Conze qui a géré ma candidature à la Fondation.

Table des matières

0	Introduction	9
1	Propriété de Wada d'attracteur de Plykin	10
1.1	Le chat d'Arnold	10
1.2	Ses points périodiques	11
1.3	Les bassins d'attraction	12
1.4	L'attracteur de Plykin	15
1.5	Propriété de Wada	17
1.6	Connexité des bassins d'attraction	19
2	Visualisation d'attracteur de Plykin	21
2.1	Les points fixes hyperboliques	21
2.2	Les bassins d'attraction	21
2.3	En variant les paramètres	22
3	Le pendule original de Hubbard	26
3.1	L'équation	26
3.2	L'application de Poincaré	26
3.3	Les assertions de Hubbard	27
3.4	Visualisation	28
3.5	Les points fixes hyperboliques	31
4	Étude plus détaillée du pendule d'Hubbard	32
4.1	Le signe des valeurs propres	32
4.2	Évolution vers le passé	32
4.3	Les feuilles instables des points hyperboliques	35
5	Variation des paramètres	37
5.1	Espace des paramètres	37
5.2	Le cas non chaotique	38
5.3	Attracteurs	38
6	Conclusion	41
A	Annexe : le code	42

0 Introduction

Dans ce mémoire, j'étudie deux systèmes dynamiques, et je les visualise par ordinateur, en expliquant ce qu'on voit sur les images et ce que cela implique.

L'intérêt de premier système, ce qu'on appelle l'attracteur de Plykin, est motivé par l'article [3] par Yves Coudène. Dans la section 1, je pars des raisonnements de son cours afin d'élaborer une démonstration rigoureuse de la propriété de Wada de ce système.

J'utilise un ordinateur pour visualiser ces bassins d'attraction dans section 2. Je recalcule les images de [3] avec un code que j'ai écrit. J'en profite aussi pour modifier les paramètres du système et pour étudier leur influence.

Le deuxième système est le pendule de John Hubbard, qu'il présente dans l'article [5]. Il s'agit d'un pendule forcé amorti. Dans la section 3, je calcule son équation, et j'étudie les applications de Poincaré du système que je vais utiliser. Je recalcule les images qui se trouvent dans l'article à l'aide d'un code que j'ai écrit moi-même. La partie du code qui sert à modéliser le pendule est dans l'annexe A.

Je continue d'explorer ce système dans la section 4 où d'autres images avec des colorations différentes sont présentées. Je les exploite pour étudier les valeurs propres, la limite de la linéarisation et les feuilles instables des points hyperboliques qui se trouvent sur la frontière accessible des bassins d'attraction.

Finalement, dans la section 5, je joue avec les paramètres du pendule et je découvre qu'il existe d'autres comportements. Il est possible que le système ne soit pas chaotique pour certains paramètres, ou même qu'il ne possède aucun point fixe attractif. Dans ce cas, je montre qu'il existe un répulseur, que je visualise.

1 Propriété de Wada d'attracteur de Plykin

Les lacs de Wada sont trois ensembles ouverts connexes disjoints du plan qui possèdent tous les trois la même frontière : tout point qui appartient à la frontière d'un des ouverts se trouve aussi sur la frontière des deux autres ouverts. Le premier exemple fut publié par Brouwer en 1910 [1]. Un autre exemple fut présenté par Kunizō Yoneyama en 1917 [2], qui crédita sa découverte à son professeur Takeo Wada, ce qui explique l'appellation.

Plus généralement, nous dirons qu'une famille d'ouverts dans un espace topologique possède la propriété de Wada si leurs frontières coïncident. De plus, s'ils sont tous connexes par arc, on les appelle des lacs de Wada.

Le fait que les bassins d'attraction introduits dans [3] sont des lacs de Wada était déjà connu. Tout de même, cette assertion mérite d'être démontrée rigoureusement afin que nous comprenions mieux leur structure.

On s'inspire du raisonnement dans [4] qui traite le cas d'un seul point fixe attractif. On étudie le cas de quatre points fixes attractifs en examinant la relation entre les quatre bassins d'attraction, pour démontrer la propriété de Wada. Ensuite, on prouve que les bassins d'attraction sont connexes par arc, pour justifier qu'ils forment des lacs de Wada.

1.1 Le chat d'Arnold

Introduisons l'anneau quotient $\mathbf{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Considérons l'application donnée par la multiplication par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sur le tore \mathbf{T}^2 , aussi connue comme l'application du chat d'Arnold. Elle a un seul point fixe, c'est l'origine. Introduisons la notation :

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

pour le nombre d'or. La matrice A admet deux valeurs propres λ^2 et λ^{-2} . Les vecteurs propres associés sont :

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

et on peut diagonaliser la matrice A comme suit :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou (x, y) pour le même point du tore. Également, le produit

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sera éventuellement noté par $A(x, y)$. De plus, x dénotera parfois un élément de \mathbf{T} , parfois un nombre réel, le représentant dans $[0, 1[$ de la classe d'équivalence qui appartient à \mathbf{T} , ou encore un point du tore \mathbf{T}^2 . Nous n'emploierons cet abus de notation que lorsque aucune ambiguïté n'est possible.

1.2 Ses points périodiques

Notons la suite de Fibonacci par F_i :

$$F_{-1} = 1, F_0 = 0, F_1 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, F_{k+2} := F_k + F_{k+1}.$$

Proposition 1.1 Pour tout n entier naturel on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Démonstration Nous raisonnons par récurrence.

L'initialisation de la récurrence : pour $n = 0$ on a

$$A^0 = \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hérédité : pour k entier naturel, on suppose que l'équation (1) est vrai pour $n = k$. Alors

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F_{2k+1} + F_{2k} & F_{2k+1} + F_{2k} \\ 2F_{2k} + F_{2k-1} & F_{2k} + F_{2k-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_{2k+1} + F_{2k+2} & F_{2k+2} \\ F_{2k} + F_{2k+1} & F_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2(k+1)+1} & F_{2(k+1)} \\ F_{2(k+1)} & F_{2(k+1)-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est, en fait, l'équation (1) pour $n = k + 1$.

Étudions maintenant les points périodiques de l'application donnée par A , i.e. les points fixes des puissances de A . Soit (x, y) dans le tore un point périodique de A de période $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{T}^2} \\ \begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{T}^2} \\ \begin{pmatrix} F_{2n+1} - 1 & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{T}^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Notons

$$D_n := \det \begin{pmatrix} F_{2n+1} - 1 & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Si $D_n \neq 0$, alors l'équation (2) admet $|D_n|$ solutions sur le tore \mathbf{T}^2 .

$$|D_n| = |(F_{2n+1} - 1)(F_{2n-1} - 1) - F_{2n}^2| = F_{2n-1} + F_{2n+1} - 2$$

utilisant $F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$.

Pour $n = 0$, $A^n = \text{Id}$, $D_n = 0$ et chaque point du tore \mathbf{T}^2 est fixe. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \neq 0$ et on a $F_{2n-1} + F_{2n+1} - 2$ points périodiques de période n .

Pour déterminer les points périodiques, nous résolvons le système en ajoutant un multiple entier d'une ligne à une autre. Par exemple, pour $n = 3$, on a la matrice des coefficients

$$\begin{pmatrix} F_7 - 1 & F_6 \\ F_6 & F_5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

qui nous dit que (x, y) est un point fixe de A^3 si et seulement si $4x = 0, 4y = 0 \pmod{\mathbf{T}}$. Donc ces points fixes sont $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\} \times \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, qui forment un réseau orthogonal. Ce n'est pas le cas en générale.

1.3 Les bassins d'attraction

Introduisons maintenant une perturbation qui fera de l'origine un point fixe attractif et qui rendra les trois points périodiques suivants attractifs :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = AP_3, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = AP_1, \quad P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = AP_2 \pmod{\mathbf{T}^2}.$$

Notons l'origine par O . Nous utiliserons un changement de variables qui envoie tous les points O, P_1, P_2 et P_3 sur O :

$$\begin{aligned} x_2 &= x - \frac{1}{2} \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ y_2 &= y - \frac{1}{2} \left\lfloor 2y + \frac{1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ note la partie entière par défaut. Observons que les valeurs réelles x_2 et y_2 seront les mêmes pour tous les représentants $x, y \in \mathbb{R}$ d'un point du tore \mathbf{T}^2 . Il s'agit d'une transformation $\mathbf{T}^2 \rightarrow [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^2$.

Pour tous points (x_A, y_A) et (x_B, y_B) de \mathbb{R}^2 , la distance entre leurs projetés sur le tore est défini par :

$$d((x_A, y_A), (x_B, y_B)) = \min \{d_{\mathbb{R}^2}((x_A + k_1, y_A + k_2), (x_B, y_B)) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

où $d_{\mathbb{R}^2}$ dénote la distance euclidienne.

Introduisons aussi

$$\begin{aligned} r &= d(\cdot, O) \\ r_1 &= d(\cdot, P_1) \\ r_2 &= d(\cdot, P_2) \\ r_3 &= d(\cdot, P_3). \end{aligned}$$

Notons $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto (1-r^2)^2 \mathbf{1}_{[-1,1]}(r)$ qui est une bosse différentiable avec une dérivée continue.

Maintenant nous pouvons définir l'application $f : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A(x, y) + \\ &+ \frac{p_1}{1+\lambda^2} k\left(\frac{r}{a}\right) \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{p_2}{1+\lambda^2} \left(k\left(\frac{r_1}{b}\right) + k\left(\frac{r_2}{b}\right) + k\left(\frac{r_3}{b}\right) \right) \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec les paramètres $a, b > 0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Pour que cette application soit bien définie sur le tore \mathbf{T}^2 , nous prendrons des représentants x et y dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Les paramètres a et b contrôlent les rayons des perturbations, tandis que p_1 et p_2 déterminent leurs amplitudes. Nous verrons que ces quatre termes peuvent rendre les points O, P_1, P_2 et P_3 attractifs.

En choisissant les paramètres tels que $a + b \leq \frac{1}{2}$ et $b \leq \frac{1}{4}$, nous pouvons garantir qu'au maximum un des quatre exemplaires de k prend une valeur non nulle, parce que leurs supports, les quatre boules $B(O, a), B(P_1, b), B(P_2, b)$ et $B(P_3, b)$ seront disjoints. De plus, $b \leq \frac{1}{4}$ nous garantit la continuité de x_2 et y_2 sur le support de $k(\frac{r_i}{b})$, et par conséquent, celle de f .

Choisissons $p_1, p_2 \in]-\lambda^2, 1-\lambda^2[=]-\lambda-1, -\lambda[$.

Proposition 1.2 *Le point O est un point fixe attractif de l'application f .*

Démonstration Dans un disque de rayon a autour de O , on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A(x, y) + \frac{p_1}{1+\lambda^2} k\left(\frac{r}{a}\right) \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 + p_1 k\left(\frac{r}{a}\right) & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $k(0) = 1$ et $k'(0) = 0$, les valeurs propres de $D_O f$ sont $\lambda^2 + p_1 \in]0, 1[$ et $\lambda^{-2} \in]0, 1[$. Par conséquent, O est un point fixe attractif.

Proposition 1.3 *Les points P_1 , P_2 et P_3 sont des points fixes attractifs de l'application f^3 .*

Démonstration Dans un disque de rayon b autour du point P_1 , on a :

$$f(x, y) = A(x, y) + \frac{p_2}{1+\lambda^2} k\left(\frac{r_1}{b}\right) \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On a aussi :

$$\frac{dx_2}{dx} = 1, \quad \frac{dy_2}{dy} = 1$$

alors les valeurs propres de $D_{P_1} f$ sont $\lambda^2 + p_2 \in]0, 1[$ et $\lambda^{-2} \in]0, 1[$. Il en va de même pour $D_{P_2} f$ et $D_{P_3} f$. Nous concluons que P_1 , P_2 et P_3 sont des points fixes attractifs de f^3 .

Définition Soit U_0 le bassin d'attraction du point O pour l'application f . Soient respectivement U_1 , U_2 et U_3 les bassins d'attraction des points P_1 , P_2 et P_3 pour l'application f^3 .

Proposition 1.4 *Pour tout point (x, y) du tore, nous avons :*

$$f((x, y) + \mathbb{R}\mathbf{e}_u) \subset f(x, y) + \mathbb{R}\mathbf{e}_u.$$

Démonstration Pour chaque point (u, v) du tore, on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 u + \lambda v \\ \lambda u + v \end{pmatrix} = (\lambda u + v) \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = (\lambda u + v) \sqrt{1+\lambda^2} \mathbf{e}_u$$

et $f(x, y) - A(x, y)$ admet une telle forme, alors

$$f(x, y) - A(x, y) \in \mathbb{R}\mathbf{e}_u.$$

De plus, pour tout t réel :

$$f((x, y) + t\mathbf{e}_u) - A((x, y) + t\mathbf{e}_u) \in \mathbb{R}\mathbf{e}_u$$

donc

$$f((x, y) + t\mathbf{e}_u) - f(x, y) \in \mathbb{R}\mathbf{e}_u.$$

Proposition 1.5 *f admet un point fixe $p = t_0 \mathbf{e}_u$ avec $t_0 \in]0, a[$ tel que $[0, t_0] \mathbf{e}_u \subset U_0$.*

Démonstration Définissons la fonction $h_0 : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+, t \mapsto \lambda^2 t + p_1 t k\left(\frac{t}{a}\right) \geq 0$. Alors on a pour tout t réel dans l'intervalle $[0, a]$:

$$f(t\mathbf{e}_u) = h(t)\mathbf{e}_u$$

donc les points fixes de h_0 correspondent à ceux de f le long de \mathbf{e}_u . $h_0(0) = 0$, $h'_0(0) = \lambda^2 + p_1 \in]0, 1[$, $h_0(a) = \lambda^2 a > a$ et h_0 est continue, alors il existe un point fixe minimal t_0 de la fonction h_0 dans $]0, a[$. Soit $p = t_0 \mathbf{e}_u$.

Pour chaque valeur t dans l'intervalle $[0, t_0[$, $h_0(t) \leq t$. Alors la suite $h_0^n(t)$ est décroissante, donc converge vers un point fixe de h_0 dans $[0, t_0[$, qui doit être 0. Par conséquent, $t\mathbf{e}_u \in U_0$ pour t dans $[0, t_0[$ quelconque.

Proposition 1.6 f^3 admet un point fixe $q = P_1 + t_1 \mathbf{e}_u$ avec $t_1 \in]0, b[$ tel que $P_1 + [0, t_1[\mathbf{e}_u \subset U_1$. De plus,

$$\begin{aligned} f(q) &= P_2 + t_1 \mathbf{e}_u, & P_2 + [0, t_1[\mathbf{e}_u &\subset U_2 \\ f^2(q) &= P_3 + t_1 \mathbf{e}_u, & P_3 + [0, t_1[\mathbf{e}_u &\subset U_3. \end{aligned}$$

Démonstration Soit $h_1 : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, t \mapsto \lambda^2 t + p_2 t k\left(\frac{t}{b}\right) \geq 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, b], f(P_1 + t\mathbf{e}_u) &= P_2 + h_1(t)\mathbf{e}_u \\ f(P_2 + t\mathbf{e}_u) &= P_3 + h_1(t)\mathbf{e}_u \\ f(P_3 + t\mathbf{e}_u) &= P_1 + h_1(t)\mathbf{e}_u. \end{aligned}$$

De plus, $h_1(0) = 0$, $h'_1(0) = \lambda^2 + p_2 \in]0, 1[$, $h_1(b) = \lambda^2 b > b$ et h_1 est continue, alors il existe un point fixe minimal t_1 de h_1 dans $]0, b[$. Soit $q = P_1 + t_1 \mathbf{e}_u$ qui est alors un point fixe.

En ce qui concerne $P_1 + [0, t_1[\mathbf{e}_u \subset U_1$, observons d'abord que l'ensemble image de h_1 restreinte à $[0, t_1]$ est $[0, t_1]$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, t_1], f(P_1 + t\mathbf{e}_u) &= P_2 + h_1(t)\mathbf{e}_u \\ f^2(P_1 + t\mathbf{e}_u) &= P_3 + h_1^2(t)\mathbf{e}_u \\ f^3(P_1 + t\mathbf{e}_u) &= P_1 + h_1^3(t)\mathbf{e}_u. \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons utiliser le même argument que dans la démonstration de la proposition 1.5.

Proposition 1.7 $B(O, t_0) \subset U_0$.

Démonstration On se place dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_s)$:

$$B(O, t_0) = \{u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_s \mid u, v \in \mathbb{R}, u^2 + v^2 < t_0^2\}.$$

Pour toutes valeurs réelles u, v avec $u^2 + v^2 < t_0^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_s) &= \left(\lambda^2 + p_1 k\left(\frac{r}{a}\right)\right) u\mathbf{e}_u + \lambda^{-2} v\mathbf{e}_s \\ |f(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_s)|^2 &= \left|\lambda^2 + p_1 k\left(\frac{r}{a}\right)\right|^2 u^2 + \lambda^{-4} v^2. \end{aligned}$$

Rappelons que $r < t_0$, alors

$$\begin{aligned} k\left(\frac{r}{a}\right) &\in \left]k\left(\frac{t_0}{a}\right), 1\right] \\ \lambda^2 + p_1 k\left(\frac{r}{a}\right) &\in \left[\lambda^2 + p_1, \lambda^2 + p_1 k\left(\frac{t_0}{a}\right)\right] \subset]0, 1[\end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout point $(u, v) \neq (0, 0)$, nous avons $|f(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_s)| < |u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_s|$.

Choisissons un point $a \in B(O, t_0) \setminus \{O\}$ et un réel $\varepsilon \in]0, |a|[$ quelconques. Considérons la couronne fermée

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{T}^2 \mid \varepsilon \leq r \leq |a|\}.$$

La fonction

$$\frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|}$$

est continue sur C et bornée supérieurement strictement par 1. Posons :

$$\mu := \sup_{(x, y) \in C} \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|} < 1.$$

De plus,

$$|(x, y)| < \varepsilon \implies |f(x, y)| < \varepsilon.$$

Prenons $n = \left\lceil \log_\mu \frac{\varepsilon}{|a|} \right\rceil$. Alors nous avons

$$\forall m \geq n, |f^m(a)| \leq \varepsilon.$$

Cet argument marche pour ε quelconque, si bien que $f^n(a)$ tend vers O pour tout $a \in B(O, t_0) \setminus \{O\}$. Donc on a $B(O, t_0) \subset U_0$.

Proposition 1.8 $B(P_1, t_1) \subset U_1$, $B(P_2, t_1) \subset U_2$, $B(P_3, t_1) \subset U_3$.

Démonstration Même raisonnement que pour la démonstration de la proposition 1.7, avec f^3 au lieu de f .

1.4 L'attracteur de Plykin

Définition Introduisons la notation :

$$K := \mathbf{T}^2 \setminus (U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3).$$

Le compact K est composé des points qui ne sont pas attirés par O, P_1, P_2 et P_3 . L'ensemble K est appelé l'attracteur de Plykin. Il est bien un attracteur par rapport à l'application f^{-1} .

La figure 1 montre l'ensemble K en gris, avec les quatre points fixes attractifs, les directions \mathbf{e}_u et \mathbf{e}_s , les points p, q et ses itérés, et la boule $B(P_2, t_1)$.

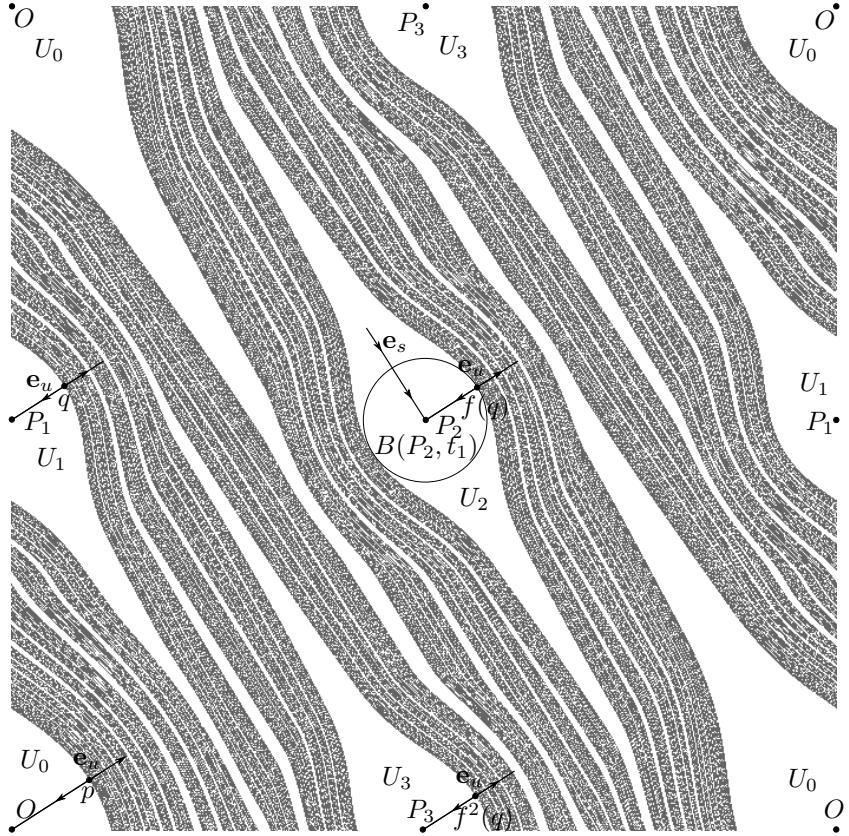
Proposition 1.9 *Dans l'ensemble K , la différentielle de l'application f dans la direction \mathbf{e}_u est uniformément supérieure à 1.*

Démonstration Au point $x = ue_u + ve_s$ dans K , on a :

$$\begin{aligned} df_x \cdot \mathbf{e}_u &= \lambda^2 + p_1 \left(k \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{u^2}{ra} k' \left(\frac{r}{a} \right) \right) + \\ &+ p_2 \left(k \left(\frac{r_1}{b} \right) + \frac{u_1^2}{r_1 b} k' \left(\frac{r_1}{b} \right) + k \left(\frac{r_2}{b} \right) + \frac{u_2^2}{r_2 b} k' \left(\frac{r_2}{b} \right) + k \left(\frac{r_3}{b} \right) + \frac{u_3^2}{r_3 b} k' \left(\frac{r_3}{b} \right) \right) \end{aligned}$$

où u_1, u_2 et u_3 sont les premières coordonnées dans la base $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_s)$ des vecteurs les plus courts qui joignent les points P_1, P_2, P_3 respectivement à x .

Si $x \notin B(O, a) \cup B(P_1, b) \cup B(P_2, b) \cup B(P_3, b)$, on a $d_x f_1 \cdot \mathbf{e}_u = \lambda^2 > 1$.

FIGURE 1 – $p_1 = p_2 = -2, 2, a = 0, 3, b = 0, 2$. K en gris, U_i en blanc.

Si $x \in B(O, a)$, alors

$$df_x \cdot \mathbf{e}_u = \lambda^2 + p_1 \left(k \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{u^2}{ra} k' \left(\frac{r}{a} \right) \right) \geq \lambda^2 + p_1 k \left(\frac{t_0}{a} \right) = 1$$

parce que $r \geq t_0$ dans K . L'égalité est réalisée si et seulement si $r = t_0$ et $u = 0$. Il s'agit des points $\pm t_0 \mathbf{e}_s$, qui n'appartiennent pas à K , car leurs itérés sont de la forme $\pm \lambda^{-2n} t_0 \mathbf{e}_s$ et donc convergent vers O .

Si $x \in B(P_i, b)$ pour $i = 1, 2$ ou 3 , alors

$$df_x \cdot \mathbf{e}_u = \lambda^2 + p_2 \left(k \left(\frac{r_i}{b} \right) + \frac{u_i^2}{r_i b} k' \left(\frac{r_i}{b} \right) \right) \geq \lambda^2 + p_2 k \left(\frac{t_1}{b} \right) = 1$$

parce que $r_i \geq t_1$ dans K . L'égalité est réalisée si et seulement si $r_i = t_1$ et $u_i = 0$. Il s'agit des points $P_i \pm t_1 \mathbf{e}_s$, qui n'appartiennent pas à K , car leurs itérés par f^3 sont de la forme $P_i \pm \lambda^{-6n} t_1 \mathbf{e}_s$ et donc convergent vers P_i .

Nous avons l'inégalité stricte sur tout K . $df \cdot \mathbf{e}_u$ est continue sur K qui est fermé. On en déduit :

$$\inf_{x \in K} d_x f_1 \cdot \mathbf{e}_u = c > 1.$$

Proposition 1.10 $p + \mathbb{R}^+ \mathbf{e}_u \subset W^{su}(p)$. Par conséquent, l'ensemble $W^{su}(p)$ est dense dans le tore \mathbf{T}^2 .

Démonstration Définissons $h_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t\mathbf{e}_u) = h_0(t)\mathbf{e}_u.$$

C'est bien possible d'après la proposition 1.4 et unique parce que λ est irrationnel. De plus, h_0 est continue et différentiable parce que f est continue et différentiable. Remarquons que cette h_0 prolonge la fonction qui intervient dans la démonstration de la proposition 1.5.

Rappelons que $h_0(t_0) = t_0$ et $h'_0(t_0) > 1$. Le point t_0 est un point fixe répulsif de h_0 . Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $p + [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\mathbf{e}_u \subset W^{su}(p)$.

Nous raisonnons par l'absurde. Soit

$$t_3 = \inf\{t > t_0 \mid t\mathbf{e}_u \notin W^{su}(p)\} < \infty.$$

On a $t_3 \geq t_0 + \varepsilon > t_0$.

L'ensemble $W^{su}(p)$ est invariante par f , si bien que :

$$\forall t > t_0, t\mathbf{e}_u \in W^{su}(p) \iff h_0(t)\mathbf{e}_u \in W^{su}(p)$$

ce qui implique $h_0(t_3) = t_3$ et donc $h'_0(t_3) < 1$.

Aussi, $t_3\mathbf{e}_u$ est un point fixe qui ne peut pas être O, P_1, P_2 ou P_3 car λ est irrationnel. Alors $t_3\mathbf{e}_u$ appartient à K . La proposition 1.9 implique que $h'_0(t_3) > 1$. C'est absurde.

Proposition 1.11

$$\begin{aligned} q + \mathbb{R}^+ \mathbf{e}_u &\subset W_{f^3}^{su}(q) \\ f(q) + \mathbb{R}^+ \mathbf{e}_u &\subset W_{f^3}^{su}(f(q)) \\ f^2(q) + \mathbb{R}^+ \mathbf{e}_u &\subset W_{f^3}^{su}(f^2(q)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$W_{f^3}^{su}(q), \quad W_{f^3}^{su}(f(q)), \quad W_{f^3}^{su}(f^2(q))$$

sont dense dans \mathbf{T}^2 .

Démonstration Nous définissons $h_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(P_1 + t\mathbf{e}_u) = P_1 + h_1(t)\mathbf{e}_u$$

qui prolonge h_1 dans la démonstration de la proposition 1.6 la même façon que h_0 était prolongée dans la démonstration précédente. Alors nous pouvons utiliser le même argument que dans la démonstration précédente.

1.5 Propriété de Wada

Proposition 1.12 Pour $i = 0, 1, 2, 3$, et $\varrho > 0$ quelconque, il existe δ dans l'intervalle $]0, \varrho[$ tel que $p + \delta\mathbf{e}_u \in U_i$. Pareil pour $q, f(q), f^2(q)$ au lieu de p .

Démonstration Comme $p + \mathbb{R}^+ \mathbf{e}_u$ est dense, il rencontre U_i , i.e. il existe $t > 0$ tel que $p + t\mathbf{e}_u \in U_i$. On a $p + t\mathbf{e}_u \in W^{su}(p)$, alors il existe un entier naturel n tel que $f^{-n}(p + t\mathbf{e}_u) \in p +]0, \varrho[\mathbf{e}_u$. Soit δ tel que $f^{-n}(p + t\mathbf{e}_u) = p + \delta\mathbf{e}_u$. U_i est invariant par f alors $p + \delta\mathbf{e}_u$ y appartient.

Pour $q, f(q)$ ou $f^2(q)$, il faut utiliser un des points P_1, P_2, P_3 respectivement au lieu de O et considérer les itérés négatifs de f^3 au lieu de f .

Proposition 1.13 Soit $x \in K$, $\varepsilon > 0$ quelconques. Alors $x + [-\varepsilon, \varepsilon]\mathbf{e}_u$ rencontre U_0, U_1, U_2 et U_3 .

Démonstration Considérons d'abord les itérés du segment $x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u$. $\mathbb{R}^+\mathbf{e}_u$ est dense, alors on peut trouver $M > 0$ tel que $[0, M]\mathbf{e}_u$ rencontre tous les disques de rayon t_0 . Prenons $N = \lfloor \log_c \frac{M}{\varepsilon} \rfloor$ avec la constante $c > 1$ donnée par la proposition 1.9. Si $f^n(x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u)$ est contenu dans K pour tout $n = 0, 1, 2, \dots, N$, alors

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N, N+1\}, f^n(x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u) = f^n(x) + [0, c_n]\mathbf{e}_u$$

avec des constantes $c_n \geqslant c^n \varepsilon$. Par contre, $c_{N+1} > M$, alors $f^{N+1}(x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u)$ rencontre $B(O, t_0)$ et donc sort de K . En tout cas, $x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u$ a un itéré qui sort de K . Comme K est invariante par f , $x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u$ n'est pas tout entière contenu dans K .

Alors $x + [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u$ rencontre U_i avec $i = 0, 1, 2$ ou 3 . Par le même argument, $x - [0, \varepsilon]\mathbf{e}_u$ rencontre U_0, U_1, U_2 ou U_3 . Étudions d'abord le cas où il rencontre U_0 .

Soit $\alpha, \beta \in]0, \varepsilon]$ tel que $x - \alpha\mathbf{e}_u \in U_0$, $x + \beta\mathbf{e}_u \in U_i$. Soit

$$\varrho = \frac{\min(t_0, d(p, P_1), d(p, P_2), d(p, P_3))}{2}.$$

Alors $p - \varrho\mathbf{e}_u + [-\varrho, \varrho]\mathbf{e}_s$ est contenu dans $B(O, t_0)$, donc dans U_0 . Voyons la figure 2.

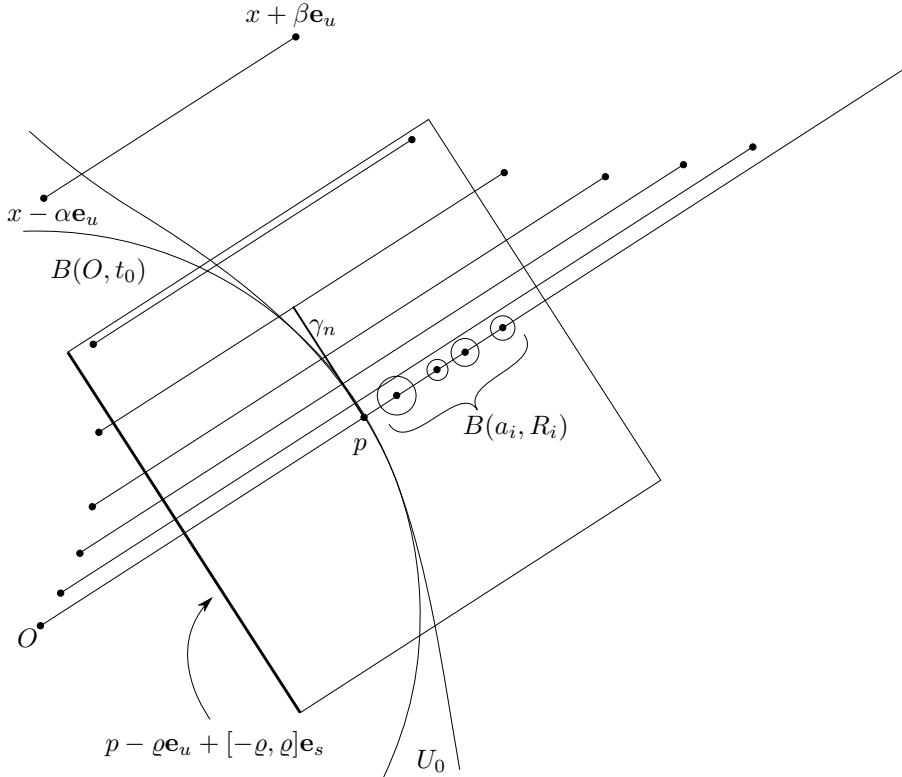


FIGURE 2 – Les itérés de $x + [-\alpha, \beta]\mathbf{e}_u$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x - \alpha \mathbf{e}_u) &= O \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x - \alpha \mathbf{e}_u) - O) \cdot \mathbf{e}_s &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x) - (O + t_0 \mathbf{e}_u)) \cdot \mathbf{e}_s &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x) - p) \cdot \mathbf{e}_s &= 0.\end{aligned}$$

Notons $\gamma_n := (f^n(x) - p) \cdot \mathbf{e}_s$. Alors il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, $\gamma_n < \varrho$. $f^n(x)$ n'appartient pas à U_0 , alors $f^n(x + [-\alpha, \beta] \mathbf{e}_u)$ sort de U_0 . $f^n(x - \alpha \mathbf{e}_u)$ tend vers O qui n'est pas contenu dans la carré $p + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_s + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_u$. Par conséquent, il existe $N_2 > N_1$ tel que pour tout $n > N_2$, $f^n(x + [-\alpha, \beta] \mathbf{e}_u)$ et $p - \varrho \mathbf{e}_u + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_s$ se croisent.

$f^n(x + \beta \mathbf{e}_u)$ tend vers P_i , qui n'est pas contenu dans la carré $p + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_s + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_u$, alors il existe $N_3 > N_2$ tel que pour tout $n > N_3$, $f^n(x + [-\alpha, \beta] \mathbf{e}_u)$ et $p + \varrho \mathbf{e}_u + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_s$ se croisent. Par conséquent, $p + \gamma_n \mathbf{e}_s + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_u$ est entièrement contenu dans $f^n(x + [-\alpha, \beta] \mathbf{e}_u)$.

Par la proposition 1.12, il existe quatre points a_0, a_1, a_2 et a_3 dans $p +]0, \varrho[\mathbf{e}_u$ qui appartiennent aux bassins d'attraction U_0, U_1, U_2 et U_3 respectivement. Ces ensembles sont ouverts, alors il existe des boules autour ces quatre points qui sont contenues dans les bassins d'attraction respectifs :

$$\begin{aligned}B(a_0, R_0) &\subset U_0 \\ B(a_1, R_1) &\subset U_1 \\ B(a_2, R_2) &\subset U_2 \\ B(a_3, R_3) &\subset U_3.\end{aligned}$$

Comme γ_n tend vers 0, il existe $n > N_3$ tel que $\gamma_n < \min(R_0, R_1, R_2, R_3)$. Alors $f^n(x + [-\alpha, \beta] \mathbf{e}_u)$ contient $p + \gamma_n \mathbf{e}_s + [-\varrho, \varrho] \mathbf{e}_u$ qui rencontre les quatre boules, et donc les quatre bassins d'attraction. Ils sont invariantes par f , alors $x + [-\alpha, \beta] \mathbf{e}_u$ les rencontre aussi, ce qui termine la preuve.

Dans le cas où $x - [0, \varepsilon] \mathbf{e}_u$ rencontre U_1, U_2 ou U_3 , on utilise le même argument avec les itérés par f^3 , avec les points $q, f(q)$ ou $f^2(q)$ au lieu de p , et avec ϱ choisi convenablement.

Pour chaque $i = 0, 1, 2, 3$, ∂U_i est contenu dans K parce que U_0, U_1, U_2 et U_3 sont disjoints et ouverts. Aussi K est contenu dans ∂U_i par la proposition 1.13.

Corollaire 1.14 *On a la propriété de Wada :*

$$K = \partial U_0 = \partial U_1 = \partial U_2 = \partial U_3.$$

1.6 Connexité des bassins d'attraction

Soit M un variété différentiable. Soit $\varphi : M \rightarrow M$ une application \mathcal{C}^1 et inversible. Rappelons la définition de point fixe attractif :

Définition Un point fixe $P \in M$ est dit attractif s'il existe une boule $B(P, r)$ autour de P telle que

- (a) elle contient sa propre image par φ :

$$\varphi(B(P, r)) \subset B(P, r),$$

(b) et chaque point dans cette boule tend vers P :

$$\forall x \in B(P, r) : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = P.$$

L'ensemble U des points dans M qui tendent vers P est appelé son bassin d'attraction :

$$U = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = P\}.$$

Remarquons que l'orbite de chaque point x dans le bassin d'attraction entre dans la boule $B(P, r)$ finalement. Alors le bassin d'attraction est l'union dénombrable des préimages de cette boule. La partie (a) de la définition implique que cette suite des préimages est croissante :

$$B(P, r) \supset \varphi^{-1}(B(P, r)) \supset \varphi^{-2}(B(P, r)) \supset \varphi^{-3}(B(P, r)) \supset \dots$$

Proposition 1.15 *Le bassin d'attraction U d'un point fixe attractif P par rapport à l'application φ est connexe par arc.*

Démonstration Soient x et y deux points dans le bassin d'attraction U . Soit $B(P, r)$ la boule qui satisfait les conditions de la définition du point fixe attractif. D'après la définition du bassin d'attraction, il existe deux entiers n et m tels que les itérés $\varphi^n(x)$ et $\varphi^m(y)$ sont contenus dans cette boule. Tous les itérés suivants de x et y y sont aussi contenus par (a). Soit $N = \max(n, m)$. Donc $\varphi^N(x)$ et $\varphi^N(y)$ tombent dans $B(P, r)$.

Cette boule est connexe par arc, considérons l'arc qui relie $\varphi^N(x)$ à $\varphi^N(y)$. Cet arc et ces deux points sont contenus dans le bassin d'attraction U , qui est invariant par φ . Par conséquent, leurs N -ième préimages y sont également contenus. Il s'agit d'un arc qui relie les points x et y . Or un tel arc existe pour toute paire de points dans U , qui est, par conséquent, connexe par arc.

Corollaire 1.16 *Les bassins d'attraction U_0, U_1, U_2 et U_3 forment des lacs de Wada.*

2 Visualisation d'attracteur de Plykin

Les images dans [3] étaient calculées à l'aide du logiciel **Fractint**, qui fournit un moyen facile et accessible de visualiser des bassins d'attractions et des attracteurs. Néanmoins, ce n'est que l'écriture d'un programme qui garantit une compréhension profonde. De plus, des fonctions compilées demandent beaucoup moins de temps d'exécution.

Toutes les images présentées dans ce mémoire étaient calculées par un code écrit en **C**, compilée par **gcc 4.3.3**. Pour enregistrer des images, la bibliothèque **libpng 1.2.27** était utilisée. La manipulation des matrices, et la résolution des équations différentielles dans les sections suivantes étaient possibles grâce à la bibliothèque **gsl 1.12** (GNU Scientific Library).

2.1 Les points fixes hyperboliques

Rappelons que $p = O + t_0 \mathbf{e}_u$ est un point fixe hyperbolique, et t_0 est la largeur du bassin d'attraction U_0 dans le sens suivant : c'est le rayon le plus grand d'une boule autour de O qui est tout entière contenue dans U_0 :

$$t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid B(O, t) \subset U_0\}.$$

La valeur de t_0 est le seul point fixe de la fonction h_0 dans l'intervalle $]0, a[$. Donc on a :

$$\begin{aligned} t_0 &= \lambda^2 t_0 + p_1 t_0 k\left(\frac{t_0}{a}\right) \\ 1 - \lambda^2 &= p_1 k\left(\frac{t_0}{a}\right) \\ k\left(\frac{t_0}{a}\right) &= \frac{1 - \lambda^2}{p_1} \\ \left(1 - \left(\frac{t_0}{a}\right)^2\right)^2 &= \frac{1 - \lambda^2}{p_1} \\ \left(\frac{t_0}{a}\right)^2 &= 1 - \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{p_1}} \\ t_0 &= a \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{p_1}}}. \end{aligned}$$

Pareillement on a :

$$t_1 = b \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{p_2}}}.$$

2.2 Les bassins d'attraction

La figure 1 de la section précédente et les images de cette section représentent le tore entier \mathbf{T}^2 . Les quatre sommets du carré correspondent au même point, l'origine.

Pour chaque point du tore, on itère jusqu'à tomber dans un petit voisinage autour de O , P_1 , P_2 ou P_3 , ou atteindre un nombre fixé d'itérations. Si on n'atteint aucun voisinage, on considère le point initial comme un point de K . Si on les atteint, on le colore en fonction du nombre d'itérations nécessaires et du bassin d'attraction.

Le nombre maximal d'itérations est choisi égal à 12 et les voisinages autour des points fixes attractifs sont des disques de rayon $r_0 = 0,01$. Les valeurs des t_0 et t_1 sont calculées afin de vérifier que les boules $B(O, r_0)$, $B(P_1, r_0)$, $B(P_2, r_0)$, $B(P_3, r_0)$ sont bien contenues dans les bassins d'attraction respectifs.

L'ensemble K est coloré en noir et les bassins d'attraction de O , P_1 , P_2 et P_3 sont colorés en blanc, vert, bleu et rouge respectivement. Plus le nombre d'itérations partant d'un point pour atteindre le petit disque est élevé, plus sa coloration est sombre.

Sur la figure 3, on voit la structure générale de l'ensemble K . Rappelons qu'il est d'intérieur vide. De plus, comme les quatre bassins d'attraction sont connexes par arc, ils s'en-trelacent partout sur le tore. Donc on voit des régions connexes par arc d'une seule couleur qui correspondent aux différents bassins d'attraction, et un ensemble où un mélange de points de couleurs différentes apparaît. Ces points se situent au voisinage de K .

Observons maintenant les points fixes attractifs. On voit les disques de rayon r_0 autour de chacun d'eux, ce sont les régions aux nuances les plus claires. Ils sont entourés par leurs premières préimages, un peu plus sombres, en forme d'ellipse. Les proportions des demi-axes par rapport au rayon des disques correspondent aux inverses des valeurs propres de Df aux points fixes. Ces valeurs propres sont :

$$\begin{aligned}\lambda^{-2} &\approx 0,382 \\ \lambda^2 + p_1 = \lambda^2 + p_2 &\approx 0,418\end{aligned}$$

qui sont proche l'un de l'autre, alors les préimages ont des formes proche de cercles.

N'oublions pas que ce n'est qu'une approximation, les préimages ne prennent une forme d'ellipse qu'à la limite quand le rayon r_0 tend vers zéro. Pour une application linéaire, les deuxième, troisième préimages sont aussi des ellipses. Le longueur de leurs demi-axes sont les carrés et cubes d'inverses des valeurs propres. Cependant, on voit que plus nous sommes loin des points fixes attractifs, plus les formes des préimages itérés deviennent déformées.

2.3 En variant les paramètres

Considérons la figure 4. Les paramètres p_1 et p_2 ne sont pas changés, par contre, a est augmenté jusqu'à 0,45 et b est diminué jusqu'à 0,05 afin qu'on puisse étudier leur influence. Comme t_0 et t_1 sont proportionnels à a et à b respectivement, on voit que U_0 se dilate tandis que U_1 , U_2 et U_3 se rétrécissent par rapport à la figure 3.

Sur la figure 5, on voit l'effet des amplitudes p_1 et p_2 des perturbations. On retourne aux valeurs $a = 0,3$ et $b = 0,2$ de la figure 3, par contre, les amplitudes sont variées à $p_1 = -1,7$ et $p_2 = -2,6$. Les valeurs propres de $D_O f$ et $D_{P_i} f$ associées à \mathbf{e}_u sont

$$\begin{aligned}\lambda^2 + p_1 &\approx 0,918 \approx 1 \\ \lambda^2 + p_2 &\approx 0,018 \ll 1.\end{aligned}$$

Celui ne change pas seulement les largeurs t_0 et t_1 des bassins d'attraction, mais leurs formes également. Ce qui est le plus visible, c'est les formes des préimages, particulièrement celle des premières, qui ressemblent le plus à des ellipses. Autour de P_i , ces ellipses sont allongées le long de \mathbf{e}_u , parce que c'est la direction associée à la valeur propre dont l'inverse est plus grand. Par contre, autour de O , cette ellipse est allongée le long de \mathbf{e}_s . Observons que $\lambda^2 + p_1$ est si proche de 1 qu'on ne voit pas la différence des demi-petits axes des préimages successives. En fait, le nombre maximal d'itération devait être augmenté jusqu'à 100 pour bien dessiné tout U_0 . Voyons la figure 7 pour étudier le comportement des itérés négatifs de r_0 par h . Celle-ci explique pourquoi les premiers 12, même 20 itérés ne sont pas suffisants pour dessiner U_0 .

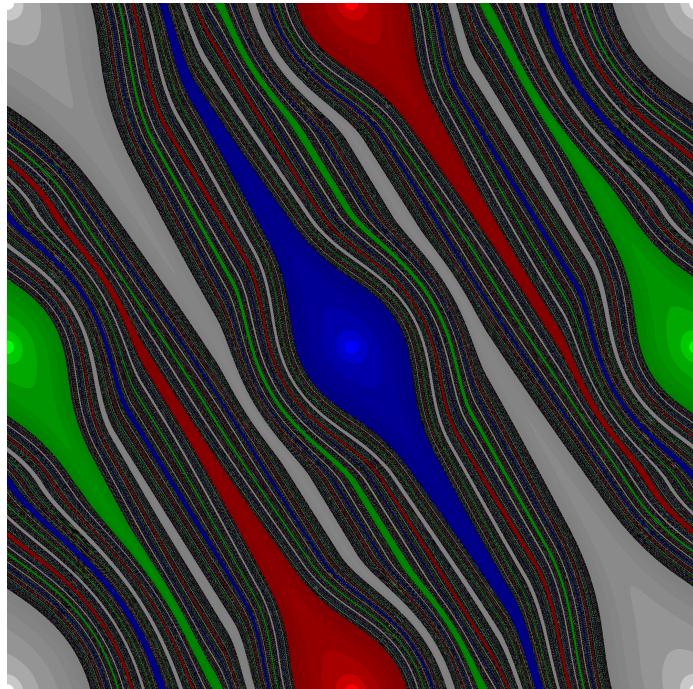


FIGURE 3 – $p_1 = p_2 = -2,2, a = 0,3, b = 0,2, t_0 = 0,1132, t_1 = 0,07547$

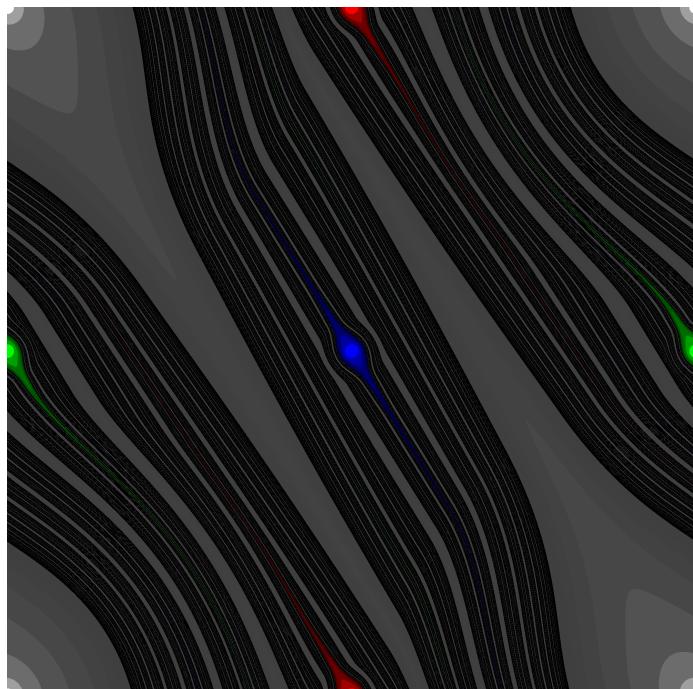


FIGURE 4 – $p_1 = p_2 = -2,2, a = 0,45, b = 0,05, t_0 = 0,1698, t_1 = 0,01887$

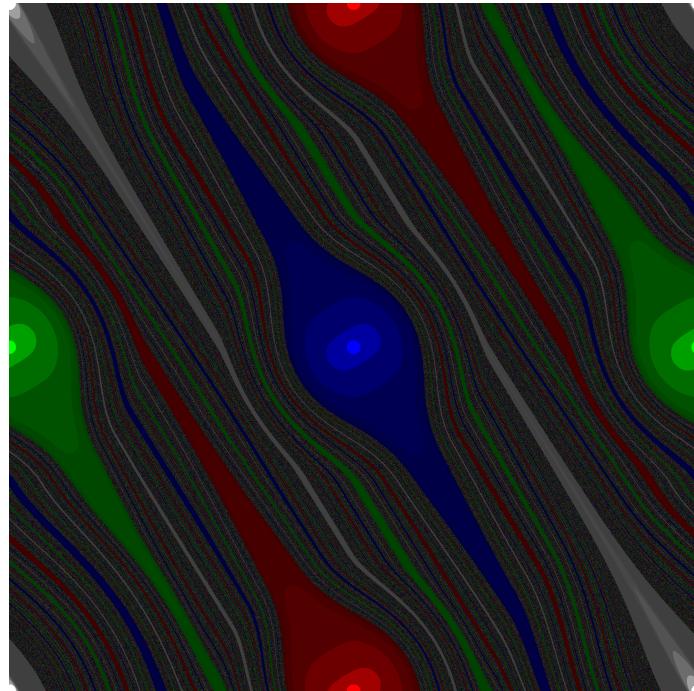


FIGURE 5 – $p_1 = -1,7, p_2 = -2,6, a = 0,3, b = 0,2, t_0 = 0,04687, t_1 = 0,09190$

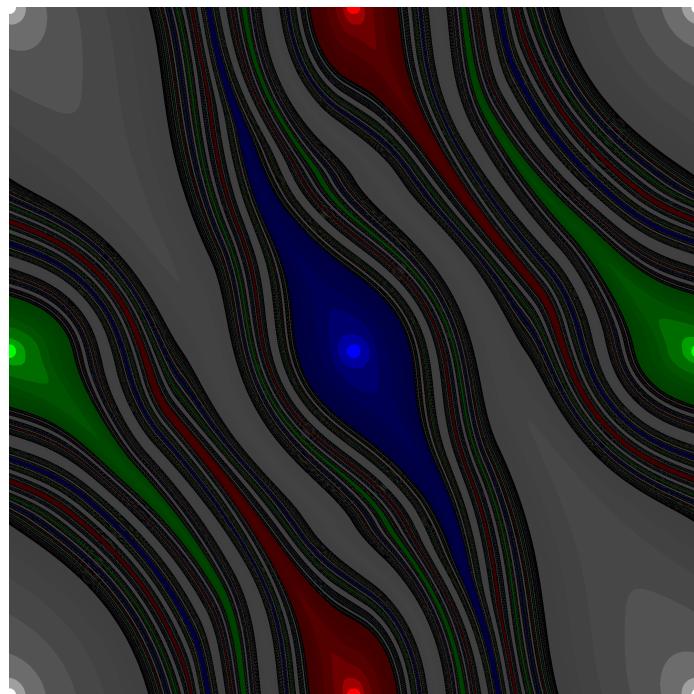


FIGURE 6 – $p_1 = p_2 = -2,2, a = 0,5, b = 0,25, t_0 = 0,1887, t_1 = 0,09434$

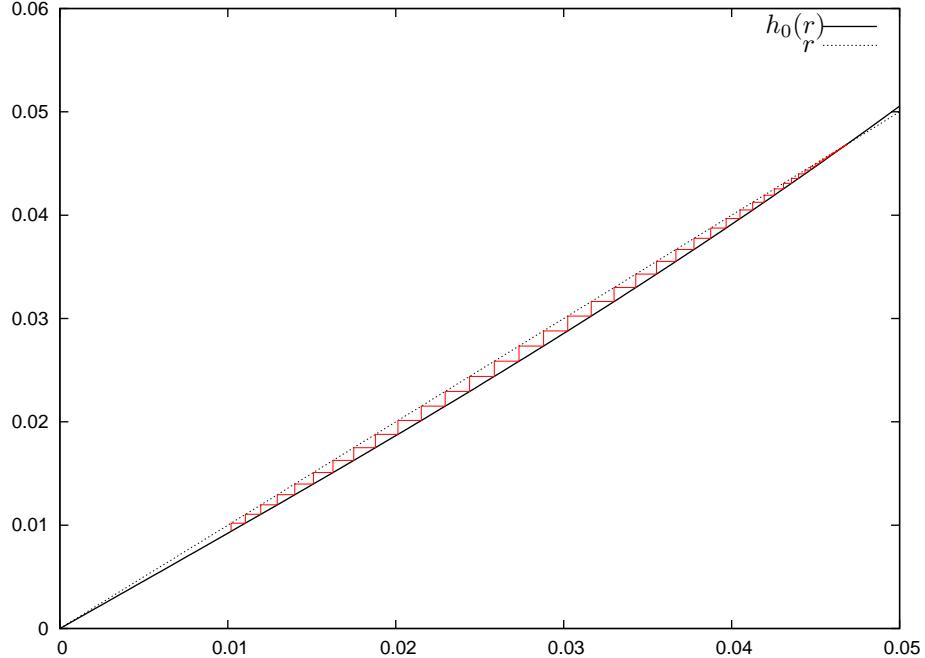


FIGURE 7 – $h_0^{-n}(r_0)$ avec $p_1 = -1,7, a = 0,3, t_0 = 0,04687$

En ce qui concerne les autres images, on peut s’assurer que les bassins d’attraction sont représentés précisément, ou du moins aussi bien que nécessité par la résolution d’image. C’est que si on n’itère pas assez, la région qui appartient au bassin d’attraction mais qui n’est pas couverte par l’union du nombre fini de préimages du disque sera coloré en noir, et c’est bien visible.

Finalement, la figure 6 présente une situation où a, b ne satisfont pas les conditions imposées dans la sous-section 1.3. Ils sont réglés à $a = 0,5, b = 0,25$. De cette façon, $b \leq \frac{1}{4}$ est toujours vrai pour assurer la continuité, par contre, $a + b > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et alors la boule $B(O, a)$ intersecte toutes les trois boules $B(P_i, b)$.

On a $t_0 = 0,1887$ et $t_1 = 0,09434$. Par contre, comme $B(O, a)$ intersecte $B(P_1, t_1)$ et $B(P_3, t_1)$. De plus, les points $q = P_1 + t_1 \mathbf{e}_u$ et $P_3 + t_1 \mathbf{e}_u$ eux-mêmes sont contenus dans $B(O, a)$, on ne peut pas être sûr qu’ils appartiennent à la même orbite par rapport à l’application f . Il est possible également que la boule $B(P_1, t_1)$ ne soit pas contenu dans le bassin U_1 et la boule $B(P_3, t_1)$ ne soit pas contenu dans le bassin U_3 .

De la même façon, il est possible que $P_2 + t_1 \mathbf{e}_u$ ne soit pas un point fixe de l’application f , et que la boule $B(P_2, t_1)$ ne soit pas contenu dans U_1 , bien que les boules $B(O, a)$ et $B(P_2, t_1)$ soient disjointes. C’est parce que les itérés des points proches du point P_2 , même en dehors de la boule $B(O, a)$, visitent les voisinages des points P_3 et P_1 , où ils peuvent tomber dans cette boule. Le raisonnement des propositions 1.6 et 1.8 est alors pris en défaut.

3 Le pendule original de Hubbard

L'équation différentielle d'un pendule forcé amorti est étudiée par Hubbard dans [5]. Cet article fut publié en 1999. Dès lors, l'évolution des ordinateurs permet de calculer les images représentant les bassins d'attraction beaucoup plus vite, qui fait possible la visualisation pour une variété des paramètres.

Dans cette section, on recalcule l'image des bassins d'attraction publiée dans l'article ci-dessus, et on commence à les étudier en cherchant les points hyperboliques qui sont mentionnés dans l'article.

3.1 L'équation

On étudie un pendule pesant simple avec une force harmonique et un amortissement linéaire. Soit m la masse de l'objet, l la longueur du fil, u le temps, $\varphi(u)$ l'angle de déviation par rapport à la position verticale basse en fonction du temps, A^* l'amplitude et ω^* la fréquence angulaire de la force harmonique, et d^* le coefficient du frottement. Alors l'équation différentielle ordinaire qui dirige le pendule est la suivante :

$$ml \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} = -mg \sin \varphi(u) + A^* \cos \omega^* u - d^* \varphi(u).$$

Introduisons $t = u\sqrt{\frac{g}{l}}$, le temps en unité de période propre de petite déviation du pendule. C'est un paramétrage naturel du temps.

$$ml \left(\frac{dt}{du} \right)^2 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -mg \sin \varphi(t) + A^* \cos \left(\sqrt{\frac{l}{g}} \omega^* t \right) - d^* \varphi(t).$$

En divisant par mg on obtient :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\sin \varphi(t) + \frac{A^*}{mg} \cos \left(\sqrt{\frac{l}{g}} \omega^* t \right) - \frac{d^*}{mg} \varphi(t).$$

Finalement on introduit $A = \frac{A^*}{mg}$, $\omega = \sqrt{\frac{l}{g}} \omega^*$, $d = \frac{d^*}{mg}$ pour se retrouver avec l'équation :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\sin \varphi(t) + A \cos \omega t - d \varphi(t). \quad (3)$$

Notons que le système est symétrique par rapport à translation de φ par 2π , c'est à dire, si $\varphi(t)$ est une solution, alors $\varphi'(t) = \varphi(t) + 2k\pi$ est aussi une solution pour tout k entier.

Les paramètres étudiés dans [5] sont $A = 1$, $\omega = 1$ et $d = 0,1$. On étudie ce cas dans cette section, et on varie les paramètres A et d dans la section suivante, mais on se restreint à $\omega = 1$.

3.2 L'application de Poincaré

Une section de Poincaré est un espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui représente les états possibles $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ du pendule à un temps fixé t . La section de Poincaré est aussi appelée espace des phases. Comme le temps t est sans dimension, φ et $\dot{\varphi}$ ont la même dimension. Alors on peut se servir de la métrique euclidienne :

$$d((\varphi_1, \dot{\varphi}_1), (\varphi_2, \dot{\varphi}_2)) = \sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2}.$$

Remarquons que même si cette comparaison entre la position et la vitesse semble naturelle, c'est un choix arbitraire de $\frac{u}{t}$ et on aurait pu choisir d'autres métriques de la forme :

$$d_\mu((\varphi_1, \dot{\varphi}_1), (\varphi_2, \dot{\varphi}_2)) = \sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \mu(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2}$$

avec $\mu > 0$. Ceux-ci changerait des valeurs propres et des vecteurs propres de Df en général sans modifier la topologie.

On définit l'application de Poincaré $f_{t_0, t_1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. A chaque état initial $(\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0))$ sur la section de Poincaré correspondant au temps $t = t_0$, on associe l'état $(\varphi(t_1), \dot{\varphi}(t_1))$ que le système atteint au temps $t = t_1$ si $t_1 > t_0$, ou bien l'état d'où le système devrait partir au temps $t = t_1$ si $t_1 < t_0$. Alors on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad f_{t_0, t_0} &= \text{Id} \\ \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad f_{t_0, t_1} \circ f_{t_1, t_2} &= f_{t_0, t_2} \\ \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f_{t_0+2k\pi, t_1+2k\pi} &= f_{t_0, t_1} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (f_{0, 2\pi})^k = f_{0, 2\pi} \circ f_{2\pi, 4\pi} \circ \dots \circ f_{2(k-1)\pi, 2k\pi} = f_{0, 2k\pi}.$$

C'est à dire, si la différence $t_1 - t_0$ est un multiple entier de 2π , alors l'itération de f correspond à l'évolution prolongée du système. C'est parce que la force est 2π -périodique.

Remarquons que la force n'est pas seulement 2π -périodique, mais aussi π -antipériodique :

$$\forall t \in \mathbb{R} : A \cos t = -A \cos(t + \pi).$$

Alors on peut définir la fonction $f^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0)) \mapsto (\varphi(\pi), -\dot{\varphi}(\pi))$ qui est la racine carré de la fonction $f_{0, 2\pi}$ au sens où $f^* \circ f^* = f_{0, 2\pi}$. On n'utilise pas cette application, elle n'est présentée ici que pour montrer que la 2π -périodicité n'est pas la symétrie la plus élémentaire de ce système dynamique.

Pour visualiser le comportement du système, on s'occupe de $f \equiv f_{0, 2\pi}$. Remarquons qu'il est possible de se concentrer sur une autre application, par exemple $f_{\Delta t, 2\pi + \Delta t}$ avec $\Delta t \in [0, 2\pi[$ quelconque. Par contre, l'équation (3) est lipschitzienne, f_{t_0, t_1} est continue et inversible pour tout t_0, t_1 , alors les propriétés qu'on voit sur une section de Poincaré apparaîtront de la même manière sur une autre. Il s'agit des propriétés comme la transitivité, périodicité, attractivité, hyperbolique ou propriété de Wada.

3.3 Les assertions de Hubbard

Hubbard présente les démonstrations dans son article [5], même si elles ne sont pas rigoureuses, comme d'habitude dans la revue *Monthly*. Ce qui est le plus intéressant, c'est qu'il démontre que les bassins d'attraction ont la propriété de Wada.

Aussi il énonce qu'aucun point fixe ou orbite périodique ne peut être répulsif. C'est parce que selon le chapitre 8 de [6], f contracte l'aire dans l'espace des phases par un facteur de $e^{-d \cdot 2\pi} < 1$ à cause de l'amortissement.

Son article, comme ce mémoire, présent aussi des résultats de calcul numérique, qui peuvent suggérer des assertions. Il s'agit de propositions qui semblent évidentes selon les images, mais qui ne sont pas démontrées :

- Il existe un état d'équilibre stable, i.e. un point fixe attractif P de f . $P \approx (4,236, 0,393)$.
(Selon la simulation numérique, ce n'est pas forcément vrai pour certaines valeurs des paramètres A et d , c.f. la section 5.)

- Il existe quatre points fixes hyperboliques dans la frontière du bassin d'attraction du point P , dont les feuilles stables constituent sa frontière accessible. Leurs feuilles instables s'allongent jusqu'à P . (On verra que selon les paramètres, il est possible que le système ne soit pas chaotique. Dans ce cas là, on n'a pas de propriété de Wada, il n'y a que deux points hyperboliques dans la frontière du bassin d'attraction de P , et toute cette frontière est accessible.)

Les bassins d'attraction sont ouverts et disjoints, si bien que le complémentaire de leur réunion n'est pas vide. Par contre, on ne sait pas s'il existe des points qui n'appartiennent à aucun bassin d'attraction, ni à leur frontière commune.

Remarquons qu'il est bien possible de présenter des démonstrations rigoureuses basées sur un approche numérique. L'article [7] s'intéresse au pendule de Hubbard de cette façon.

3.4 Visualisation

On utilise toujours le GNU Scientific Library pour des calculs scientifiques. Comme la plupart des logiciels de résolution d'EDOs, celui de cette bibliothèque ne peut traiter que les systèmes d'ordre un. Alors on introduit une variable auxiliaire $\psi = \dot{\varphi}$ pour transformer (3) en deux équations d'ordre un.

Une méthode de Runge–Kutta–Fehlberg d'ordre (4, 5) est employée avec une tolérance absolue de 10^{-6} . C'est une méthode de pas adoptif, le pas initial est choisi égal à 10^{-6} mais croît vite jusqu'à à peu près 0,2 dans la plupart des cas.

Pour engendrer une image, tout d'abord on itère depuis un point initial arbitraire jusqu'à ce que la distance entre un itéré et le suivant soit inférieure à 0,01 pour dix itérés subséquents. Il est toujours possible qu'on ne tombe pas sur l'état d'équilibre qu'on veut, que ce qu'on trouve ne soit pas d'état d'équilibre, ou même qu'on ne trouve jamais un tel itéré. De tout façon, on peut vérifier sur l'image si on a trouvé un point avec un bassin d'attraction assez grand, ce qu'on cherchait. Donc le point trouvé est considéré comme l'approximation numérique de $P + (2k\pi, 0)$ pour un k entier.

Pour visualiser les bassins d'attraction, on prend pour chaque pixel d'image l'état initial correspondant et on itère jusqu'à ce qu'on arrive dans une boule de rayon r autour de l'état d'équilibre déterminé ci-dessus, ou dans une boule autour du point avec l'angle φ différent par un multiple entier de 2π de cet état d'équilibre, ou jusqu'à ce qu'on atteigne la limite sur le nombre d'itérations. La symétrie discrète de translation implique qu'on va voir d'autres bassins d'attraction qui sont les décalés de celui de P .

D'abord on présente l'image 8 avec des pixels colorés selon leur bassin d'attraction : trois bassins sont représentés en rouge, blanc et vert, tous les autres sont noir. Observons qu'on voit des pixels vert même tout à gauche d'image, ainsi que des pixels rouge tout à droite. Afin que la propriété de Wada se réalise, il est nécessaire pour les bassins de s'entrelacer et de s'allonger arbitrairement loin.

Regardons maintenant la figure 9 qui nous montre ces trois bassins sur une région plus grande de la section de Poincaré. Observons que les bassins sont allongés vers le bas à gauche et vers le haut à droit. On l'explique par ce que si on a une vitesse initiale importante (en bas), il est plus probable qu'on tourne plusieurs fois avant d'arriver à un état d'équilibre. Donc sa position φ sera plus grande. Par conséquent, parmi les points initiaux avec une vitesse plus grande, ceux avec une position plus petite vont appartenir au même bassin d'attraction. Pareillement, si la vitesse initiale est négative avec une valeur absolue grande, on arrive plus probablement à un état d'équilibre avec une position φ plus petite.



FIGURE 8 – Bassins d’attraction du pendule de Hubbard. Horizontale : $\varphi(0)$ de 0 à gauche jusqu’à $6 \cdot 2\pi$ à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de -4 en haut jusqu’à 5 en bas.

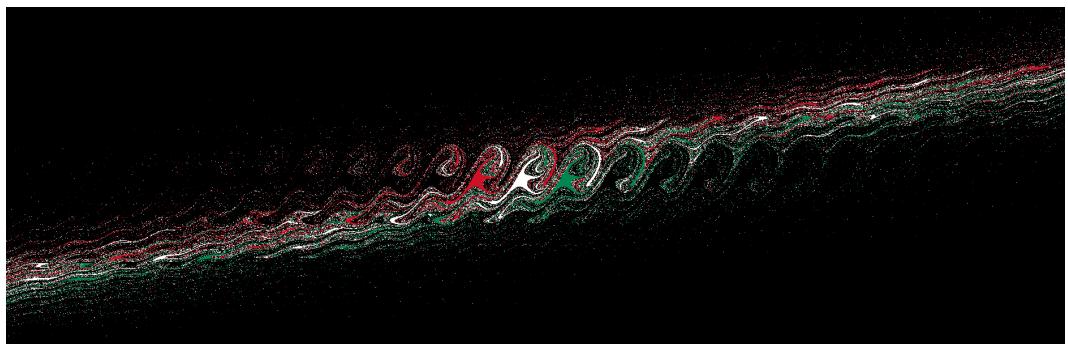


FIGURE 9 – Bassins d’attraction du pendule de Hubbard. Horizontale : $\varphi(0)$ de 0 à gauche jusqu’à $24 \cdot 2\pi$ à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de -15 en haut jusqu’à 15 en bas.

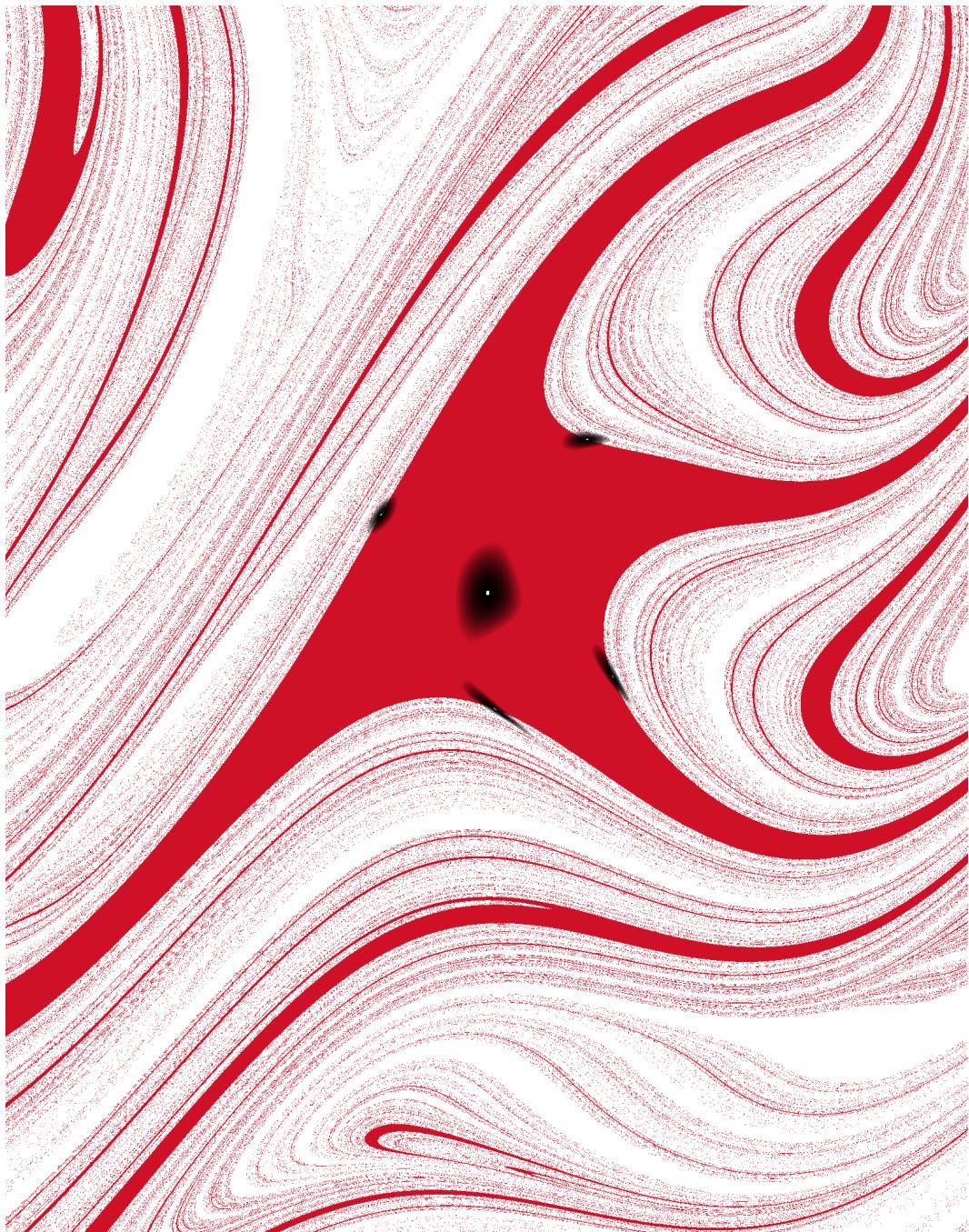


FIGURE 10 – Bassins d’attraction du pendule de Hubbard avec P et les quatre points hyperboliques de période 2. Horizontale : $\varphi(0)$ de $4,23 - \pi$ à gauche jusqu’à $4,23 + \pi$ à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de -2 en haut jusqu’à 3 en bas.

3.5 Les points fixes hyperboliques

Hubbard indique dans son article [5] qu'il existe quatre points hyperboliques sur la frontière du bassin d'attraction, comme les points hyperboliques $p, -p, q, -q, f(q)$ etc. de l'attracteur de Plykin dans la première partie de ce mémoire. Par contre, dans le cas du pendule, il sont tous de période deux, c'est à dire il sont des points fixes par rapport à l'application f^2 . Pour les visualiser, on colore d'abord un bassin d'attraction en rouge et tous les autres en blanc. Ensuite, on calcule la distance entre chaque point et son deuxième itéré. Si cette distance $d(x, f^2(x))$ est inférieure à 0,1, on colore le point plus sombre, avec une brillance proportionnelle à la distance jusqu'à 0,005. Si elle est inférieure à 0,005, on colore le pixel en blanc. Regardons la figure 10.

On voit cinq régions sombres, chacune avec une petite tache blanche au milieu. Ces taches correspondent aux points fixes de f^2 . Celui au milieu est l'état d'équilibre P , qui est un point fixe attractif. La forme de la région autour de P correspond à celle de la préimage d'un disque, qu'on verra plus tard.

Les quatre autres points fixes sont des points hyperboliques, leurs feuilles stables constituent la frontière accessible du bassin d'attraction de P . En recalculant l'image avec une coloration selon $d(x, f(x))$, on vérifie qu'ils ne sont pas des points fixes de f mais seulement de f^2 , ils sont donc de période 2.

4 Étude plus détaillée du pendule d'Hubbard

Dans cette section, on continue d'étudier le même système dynamique en utilisant des autres colorations pour mieux comprendre sa structure.

4.1 Le signe des valeurs propres

Exammons le comportement des préimages d'une boule autour de P . On choisit le rayon d'être $r = 0,1$ qui est assez grand, afin que la boule soit bien visible. Pour être capable de dire si la boule est alternée par l'application f^{-1} , on la colore avec des teintes cycliques en fonction de l'angle. Les pixels en dehors sont colorés selon l'angle du premier itéré qui tombe dans la boule. Voyons la figure 11.

On voit la boule et ses préimages. Plus précisément, ce sont les ensembles

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \inf\{k \in \mathbb{N} : f^k(x) \in B(P, r)\} = n\} &= \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} B(P, r) & \text{si } n = 0 \\ f^{-n}(B(P, r)) \setminus f^{-n+1}(B(P, r)) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \end{aligned}$$

qu'on voit avec une coloration continue. Il est important de noter que l'image $f(B(P, r))$ est incluse $B(P, r)$, ce qui n'est pas forcément vrai pour tout choix de rayon r ou des paramètres A, d .

On voit tout de suite que les préimages sont alternées par environ π , avec leurs orientations préservées. Ceci implique que les valeurs propres de $D_P f$ sont négatives. Aussi, ceci explique pourquoi les points hyperboliques sur la frontière accessible du bassin d'attraction ne peuvent pas être des points fixes mais doivent être périodique de période 2.

La forme triangulaire de la première préimage montre qu'une approximation linéaire de f autour de P n'est plus valable pour une distance aux environs de r .

La figure 12 nous montre une région plus petite avec des préimages de la boule du rayon $r = 0,01$. Ici f^{-1} ne diffère pas beaucoup de son approximation linéaire, les premières préimages ont la forme d'une ellipse.

4.2 Évolution vers le passé

Rappelons l'équation (3) :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\sin \varphi(t) + A \cos \omega t - d\varphi(t).$$

La plupart des logiciels de résolution ne sont pas capable d'itérer vers le passé. Pour chercher les solutions dans le passé, on introduit la variable du temps en sens inverse $v := -t$. Donc on a

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(-t) \\ \frac{d\varphi(v)}{dv} &= \frac{dt}{dv} \cdot \frac{d\varphi(-t)}{dt} = -\dot{\varphi}(-t) \\ \frac{d^2\varphi(v)}{dv^2} &= \left(\frac{dt}{dv} \right)^2 \cdot \frac{d^2\varphi(-t)}{dt^2} = \ddot{\varphi}(-t). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation différentielle par rapport à v devient :

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2} = -\sin \varphi(v) + A \cos \omega v + d\varphi(v).$$

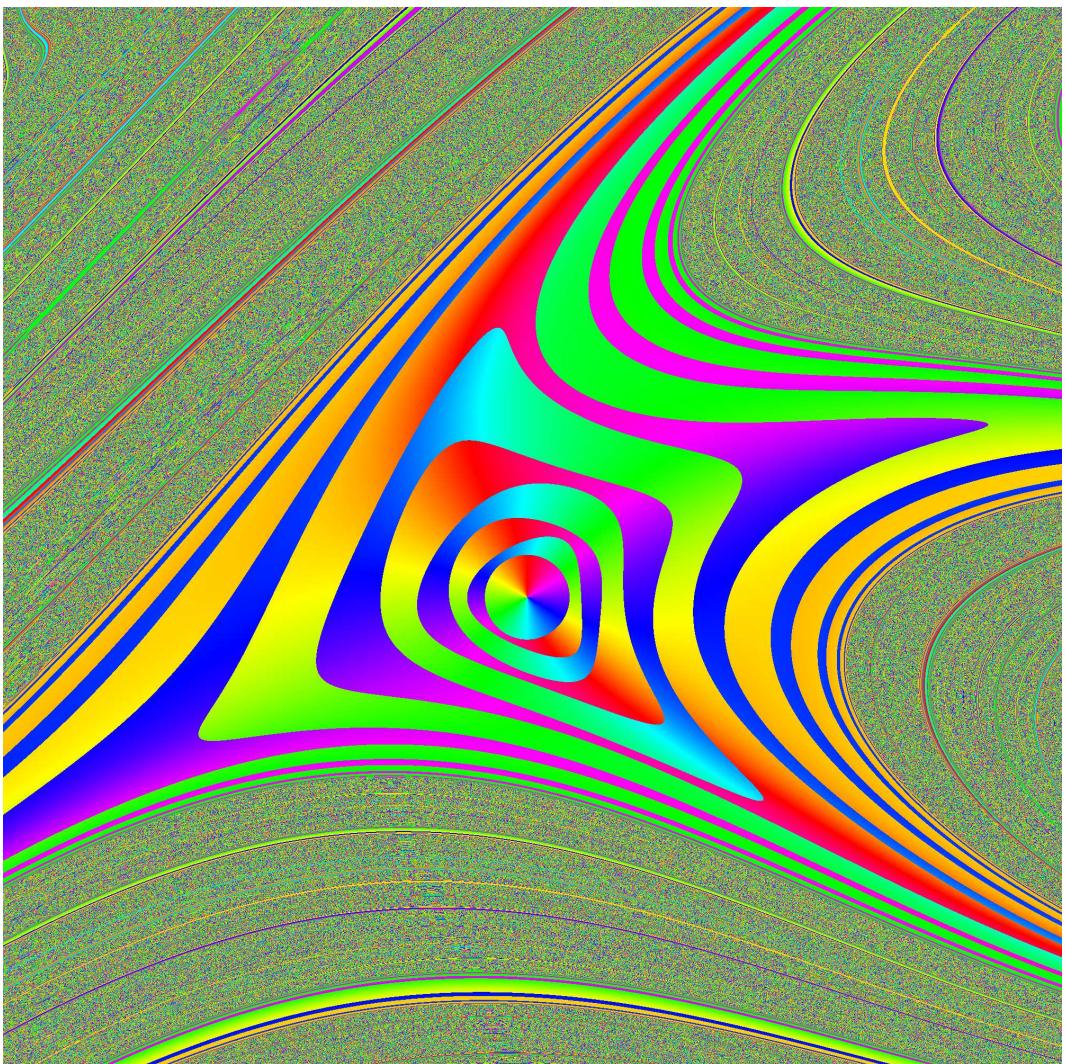


FIGURE 11 – Préimage de la boule $B(P, 0, 1)$ coloré selon l'angle. Horizontale : $\varphi(0)$ de 3,0 à gauche jusqu'à 5,5 à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de -1,0 en haut jusqu'à 1,5 en bas.

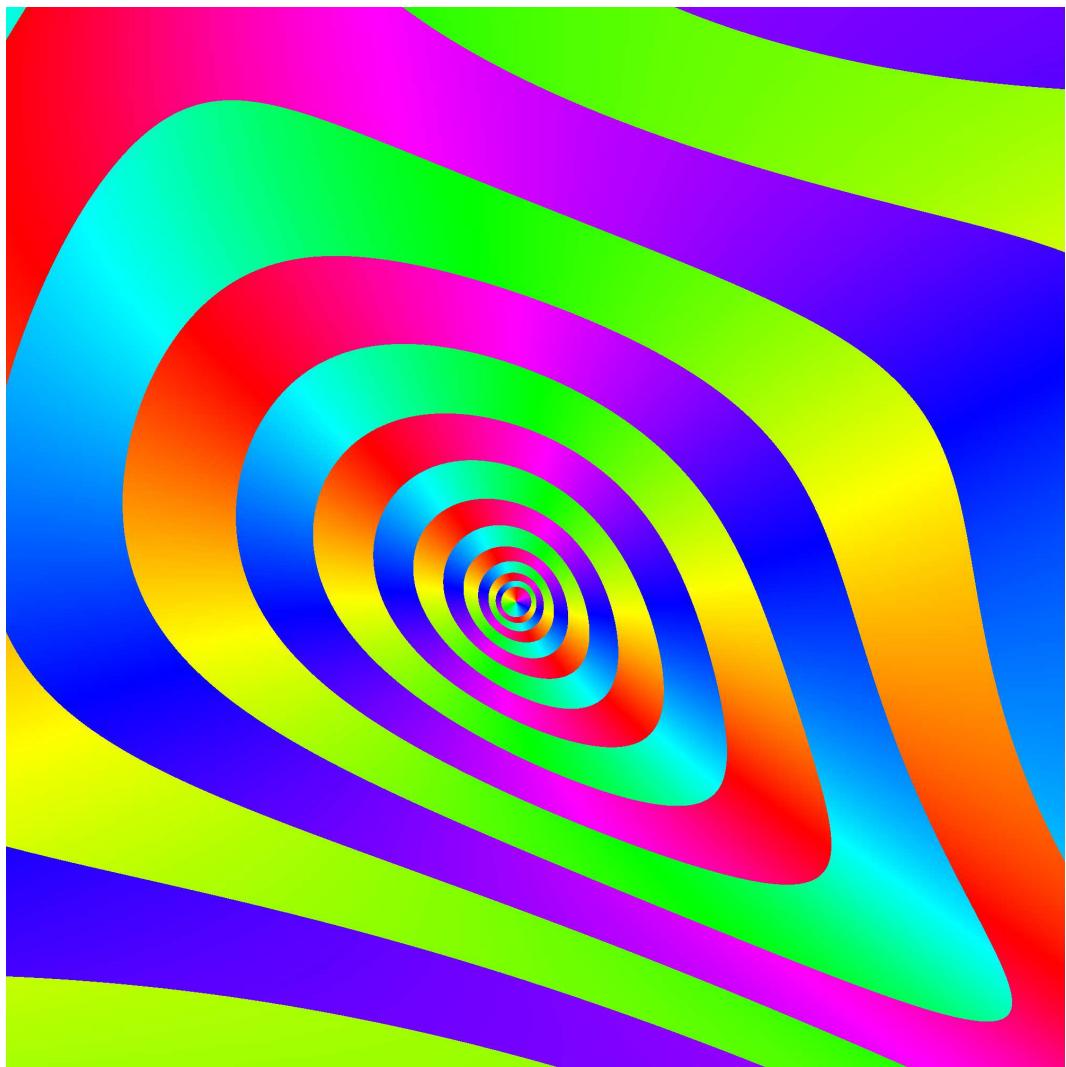


FIGURE 12 – Préimage de la boule $B(P, 0,01)$ coloré selon l'angle. Horizontale : $\varphi(0)$ de 3,9 à gauche jusqu'à 4,6 à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de 0,0 en haut jusqu'à 0,7 en bas.

On peut donc facilement utiliser le même code pour calculer l'évolution du système vers le passé. Il faut partir du point $(\varphi(0), -\dot{\varphi}(0))$ et utiliser $-d$ au lieu de d . Ce qu'on va obtenir numériquement pour $(\varphi(2\pi), \dot{\varphi}(2\pi))$ sera en fait $(\varphi(-2\pi), -\dot{\varphi}(-2\pi))$ pour les paramètres originaux, c'est à dire la valeur de l'application f^{-1} .

4.3 Les feuilles instables des points hyperboliques

La plupart des points convergent vers $P + 2k\pi$ si on les itère vers l'avenir. Par contre, vers le passé, il n'existe pas de points fixes attractifs à cause de l'amortissement. De plus, la plupart des points divergent vers l'infini positif ou négatif par rapport à l'angle ainsi qu'à la vitesse parce que le frottement négatif transmet l'énergie au pendule. Le but de cette sous-section est de visualiser la vitesse de cette divergence. A cette fin on s'intéresse au nombre d'itération de la fonction f^{-1} nécessaire pour sortir d'une certaine région, par exemple un intervalle de φ ou $\dot{\varphi}$. On a choisi de déterminer le nombre d'itérations jusqu'à ce que la vitesse d'itéré $\dot{\varphi}(2n\pi)$ sorte de l'intervalle $[-R, R]$ avec $R = 50$. Plus le nombre d'itérations est élevé, plus le point est sombre sur la figure 13. De plus, un bassin d'attraction est coloré en rouge afin qu'on puisse comparer sa position à celle des feuilles instables.

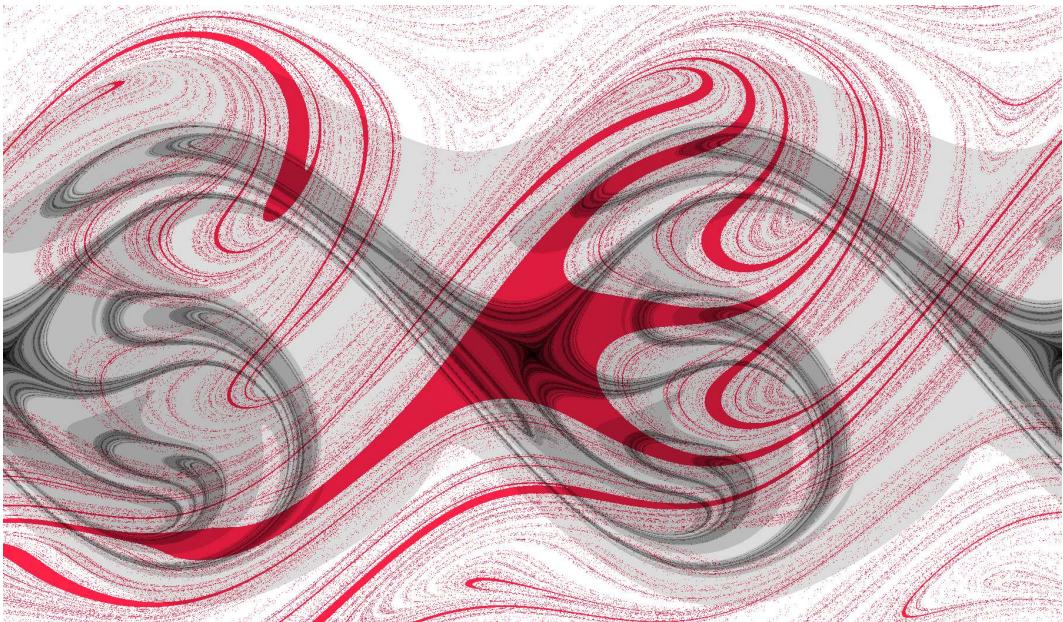


FIGURE 13 – Nombre d'itérations de f^{-1} nécessaires pour sortir du cylindre $\mathbb{R} \times [-R, R]$ avec $R = 50$, de 5 (blanc) jusqu'à 26 (noir). Horizontale : $\varphi(0)$ de $4,24 - 2\pi$ à gauche jusqu'à $4,24 + 2\pi$ à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de $-3,0$ en haut jusqu'à $3,0$ en bas. De plus, un bassin d'attraction est coloré en rouge.

Étudions d'abord la structure des points sombres. P est un point fixe attractif de f , alors les points dans son voisinage nécessite beaucoup d'itérations de f^{-1} avant de s'éloigner. C'est le carré noir qu'on voit autour de P . De plus, les points dans une feuille instable d'un point hyperbolique converge vers ce point par f^{-1} par définition, c'est pourquoi on les voit en noir eux aussi.

En ce qui concerne la relation entre la forme du bassin d'attraction et celle du carré autour de P , rappelons que selon l'image 11, les points qui se trouvent dans le voisinage de P , dans les directions a peu près horizontale et verticale, sont envoyés par f^{-1} dans les bras allongés du bassin. Ils sont donc emportés plus loin par le même nombre d'itérations que ceux plus proche des directions des feuilles instables des points hyperboliques, ils sortent donc de l'intervalle $[-R, +R]$ plus vite.

Regardons maintenant la figure 14 où la brillance des points dépend toujours de nombre d'itération de f^{-1} jusqu'à sortir du même intervalle. Ils sont teintés en rouge s'ils dépassent R et en vert s'ils dépassent $-R$. $R = 50$ est assez grand, donc on peut supposer que les points en rouge convergent vers ∞ pour le temps négatif, et ceux en vert convergent vers $-\infty$. Ces deux bassins d'attractions sont ouverts, leur frontière contient les feuilles instables.



FIGURE 14 – Nombre d'itérations de f^{-1} nécessaires pour sortir du cylindre $\mathbb{R} \times [-R, R]$ avec $R = 50$, de 5 (le plus clair) jusqu'à 26 (noir). Horizontale : $\varphi(0)$ de $4,24 - 2\pi$ à gauche jusqu'à $4,24 + 2\pi$ à droit. Verticale : $\varphi(0)$ de $-3,0$ en haut jusqu'à $3,0$ en bas. De plus, les points sont colorés en vert ou en rouge selon le signe d'infini où ils convergent pour le temps négatif.

5 Variation des paramètres

Dans cette section, on étudie l'influence des paramètres sur les propriétés du système. On distingue trois comportements différents : le système peut être chaotique comme celui dont on s'est occupé dans les deux sections précédentes, ou chaotique avec ou sans point fixe attractif (état d'équilibre de pendule).

5.1 Espace des paramètres



FIGURE 15 – Carte dans l'espace des paramètres. Rouge – pas de point fixe attractif, blanc – bassins d'attraction chaotique, vert – non chaotique. Horizontale : d de 0 à gauche jusqu'à 1 à droit. Verticale : A de 0 en bas jusqu'à 7 en haut.

Les paramètres que nous modifions dans l'équation (3) sont A et d . Une valeur négative

de A correspond à une autre section de Poincaré avec des propriétés équivalentes selon la remarque de la sous-section 3.2. Une valeur négative de d correspond à l'évolution du système vers le passé selon la sous-section 4.2. Donc on se restreint à des valeurs positives pour A et d .

D'abord on examine s'il existe un état d'équilibre pour les valeurs données des paramètres. On part de chacun des points $\{-1, 0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et on itère pendant au plus 255 périodes. On cherche dix itérés successifs avec des différences de moins de 0,001. Si on les trouve, on les considère comme un état d'équilibre. Sinon, on présume qu'il n'existe pas de tel état, et on colore le pixel correspondant de l'espace des paramètres en rouge.

Après, on commence à augmenter la position initiale $\varphi(0)$ par des pas de 0,005 jusqu'à ce qu'on tombe dans un bassin d'attraction d'un autre point fixe. Ceci correspond à se déplacer vers la droite sur la section Poincaré. Ensuite on fait encore 1000 pas, chacun de 0,0001, et on compte combien de fois on change de bassin d'attraction. Si ce nombre est strictement inférieur à 5, on considère que le système n'est pas chaotique et on colore le point correspondant en vert dans l'espace des paramètres. Sinon, c'est dit chaotique et on le colore en blanc. Regardons la figure 15.

Évidemment ce n'est pas une méthode précise, mais elle peut déjà donner une idée des régions où on observe des comportements différents. Néanmoins, on peut pas être sûr que la frontière entre la région blanche et la région verte soit vraiment lisse, ni que la frontière entre la région rouge et la région blanche ait vraiment cette structure fine qui apparaît sur la figure.

Observons d'abord que la frontière à gauche est toute rouge. Selon [6], l'application f conserve l'aire dans l'espace des phases si $d = 0$, si bien qu'aucun point fixe ne peut être attractif. Les deux bras en rouge correspondent à une résonance où la plupart des trajectoires sont probablement transitives.

La frontière basse est toute verte. C'est parce que si le frottement est trop grand par rapport à l'amplitude de la force, le pendule ne peut pas faire un tour entier pour la plupart des conditions initiales.

En résumé :

- blanc : système chaotique avec un point fixe attractif, comme dans l'exemple original de Hubbard. On a la propriété de Wada.
- vert : système non chaotique, mais toujours avec un point fixe attractif. Les bassins d'attraction semblent n'avoir pas de structure complexe.
- rouge : aucun point fixe attractif trouvé. Les trajectoires sont périodiques, transitives ou divergentes.

5.2 Le cas non chaotique

Étudions un système dans la région verte de la figure 15 : soit $A = 4,0$, $d = 0,4$. La figure 16 montre la structure des bassins d'attraction dans ce cas. On voit nettement que bien qu'ils s'entrelacent d'une façon qui ressemble à celle de l'exemple de Wada, ce n'est pas le cas. En fait, la frontière de chaque bassin est accessible en entier, et se compose de deux parties, chacune est partagée avec le bassin d'attraction voisin. La feuille stable de chaque point hyperbolique sur la frontière sépare l'espace des phases en deux, donc on ne peut pas avoir la propriété de Wada.

5.3 Attracteurs

Dans le cas sans point fixe attractif (dans la région rouge de la figure 15), on peut trouver des répulseurs par rapport à l'application f , qui sont bien des attracteurs par rapport à f^{-1} .



FIGURE 16 – Bassins d’attraction dans le cas $A = 4,0$, $d = 04$. Horizontale : $\varphi(0)$ de 0 à gauche jusqu’à $12 \cdot 2\pi$ à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de -12 en haut jusqu’à 12 en bas.

On part du point $(1, 3)$ choisi arbitrairement, et on l’itère par l’application f^{-1} . On ne prend pas en compte les cent premiers itérés, et on dessine les mille itérés suivants. On voit que ces itérés s’accumulent sur une courbe. Les expériences avec d’autres points initiaux montrent que cette courbe ne dépend pas du choix des conditions initiales.

Trois attracteurs sont présentés ici, avec $d = 0,57$ sur la figure 17, $d = 0,25$ sur la figure 18 et $d = 0,06$ sur la figure 19. On a $A = 2,9$ dans chacun des cas. Observons que la diminution de l’amortissement les rend de plus en plus compliqués.

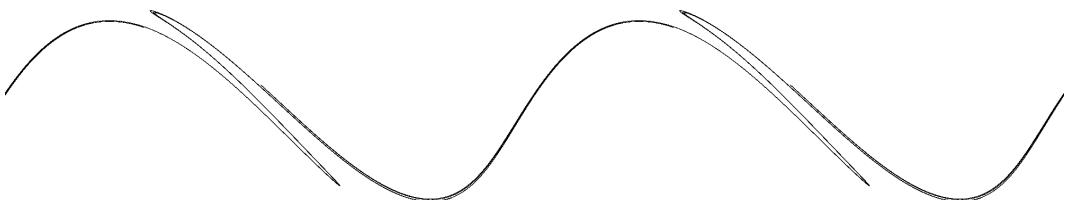


FIGURE 17 – Attracteur de f^{-1} avec $A = 2,9$, $d = 0,57$. Horizontale : $\varphi(0)$ de 0 à gauche jusqu’à 2π à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de $0,4$ en haut jusqu’à $2,1$ en bas.

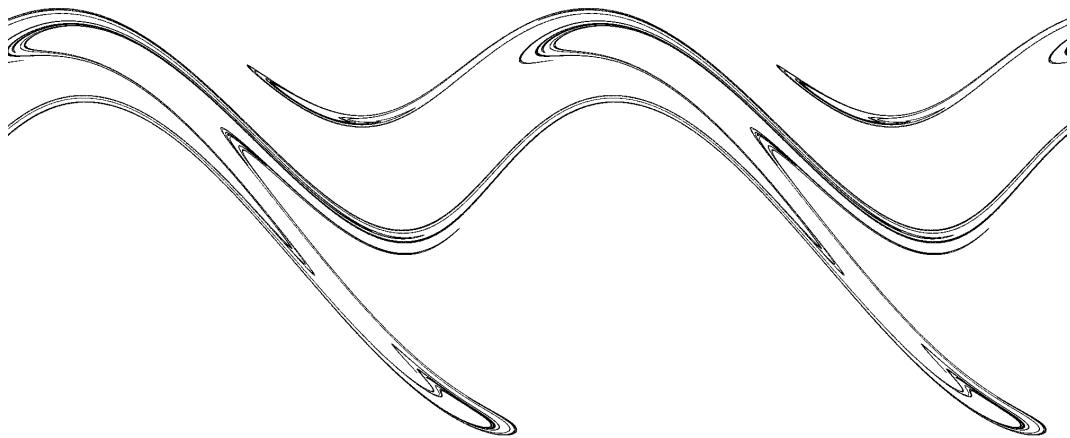


FIGURE 18 – Attracteur de f^{-1} avec $A = 2,9$, $d = 0,25$. Horizontale : $\varphi(0)$ de 0 à gauche jusqu'à 2π à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de $-0,6$ en haut jusqu'à $3,2$ en bas.

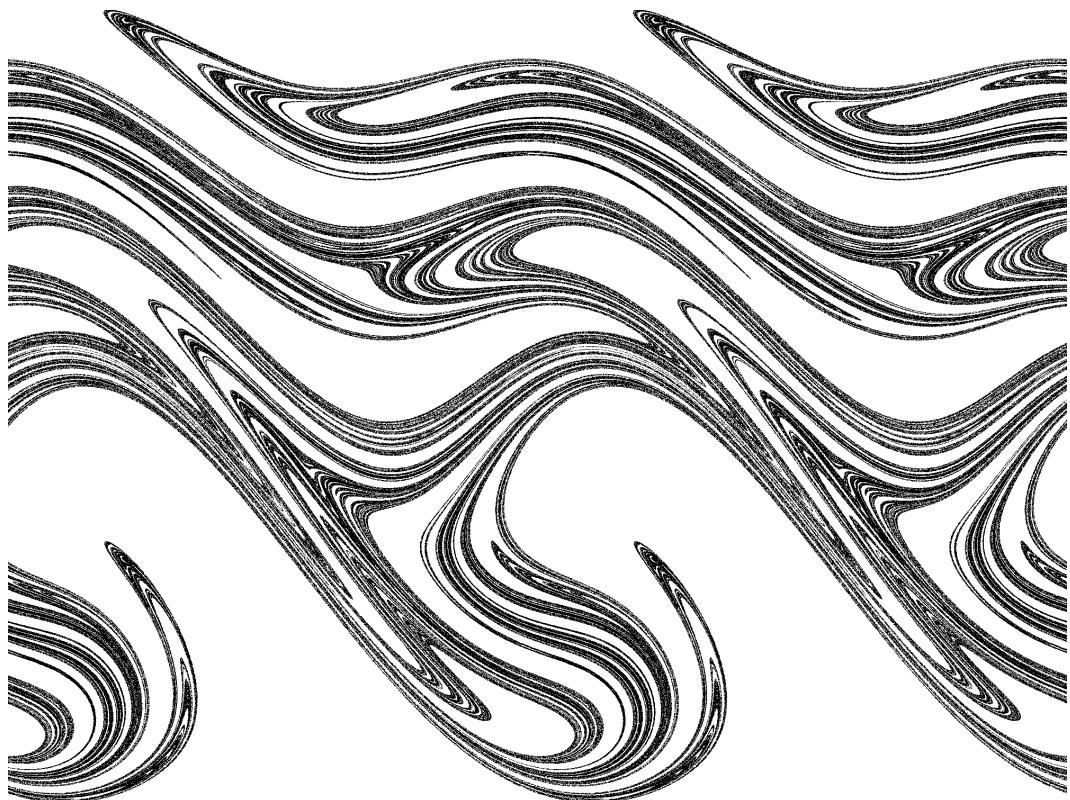


FIGURE 19 – Attracteur de f^{-1} avec $A = 2,9$, $d = 0,06$. Horizontale : $\varphi(0)$ de 0 à gauche jusqu'à 2π à droit. Verticale : $\dot{\varphi}(0)$ de $-3,0$ en haut jusqu'à $4,0$ en bas.

6 Conclusion

En ce qui concerne l'attracteur de Plykin, son comportement est bien compris. L'attracteur possède de nombreuses propriétés qui se prêtent à une étude détaillée. La signification des paramètres apparaît clairement sur les images.

Par contre, on comprend mal le pendule de Hubbard. Le système est non-linéaire, il résiste à tous mes essais en vue de trouver une approximation linéaire pour calculer les valeurs propres ou pour vérifier l'hyperbolicité uniforme. C'est malgré tout comme ceci que l'on doit commencer son analyse.

Il reste des questions ouvertes : est-ce que le complémentaire de la réunion des bassins d'attraction de $P + (2k\pi, 0)$ est d'intérieur vide ? Est-ce que les feuilles instables sont denses ? Est-ce qu'elles sont bornées ? Est-ce qu'il existe d'autres points de période deux ou des points fixes sur la frontière accessible à partir d'un bassin d'attraction ? Est-ce qu'il existe d'autres points fixes attractifs ?

La section 5 soulève encore des questions : est-ce qu'il existe une équation fermée pour les régions des paramètres sur l'image 15 ? Est-ce qu'il existe toujours un répulseur dans la région rouge ? Est-ce qu'il existe un tel répulseur dans les autres régions ?

N'oublions pas qu'il y a un troisième paramètre, ω , qu'on peut varier. Celà peut donner un système avec un comportement différent.

Les expériences numériques suggère un certain nombre de réponses à ces questions. En même temps, il est nécessaire d'adopter une approche rigoureuse.

A Annexe : le code

On présente ici la partie du code qui cherche l'état d'équilibre. Pour la condition initiale correspondant à chaque pixel, il détermine aussi le bassin d'attraction, le nombre d'itérations, l'angle et le rayon du premier itéré qui tombe dans le petit disque.

```
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_math.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_odeiv.h>
#include <gsl/gsl_sf.h>

#define M_2PI 6.28318530717958647692

struct struct_pendulum_params {
    double amplitude;
    double friction;
    double omega;
};

// la dérivée
int pendulum (double t, const double y[], double f[], void *params) {
    struct struct_pendulum_params pendulum_params = \
        *(struct struct_pendulum_params *)params;
    f[0] = y[1];
    f[1] = pendulum_params.amplitude*gsl_sf_cos(pendulum_params.omega*t) \
        - pendulum_params.friction*y[1] - gsl_sf_sin(y[0]);
    return GSL_SUCCESS;
}

// la matrice jacobienne
int jacobian (double t, const double y[], double *dfdy, double dfdt[], \
    void *params) {
    struct struct_pendulum_params pendulum_params = \
        *(struct struct_pendulum_params *)params;
    gsl_matrix_view dfdy_mat = gsl_matrix_view_array (dfdy, 2, 2);
    gsl_matrix * m = &dfdy_mat.matrix;
    gsl_matrix_set (m, 0, 0, 0.0);
    gsl_matrix_set (m, 0, 1, 1.0);
    gsl_matrix_set (m, 1, 0, -gsl_sf_cos(y[0]));
    gsl_matrix_set (m, 1, 1, -pendulum_params.friction);
    dfdt[0] = 0.0;
    dfdt[1] = - pendulum_params.omega * pendulum_params.amplitude \
        * gsl_sf_sin(pendulum_params.omega*t);
    return GSL_SUCCESS;
}

int main (void) {
    // des coefficients dans l'équation de Hubbard
```

```

struct struct_pendulum_params pendulum_params;
pendulum_params.amplitude = 1.0;
pendulum_params.friction  = 0.1;
pendulum_params.omega     = 1.0;

// parametres du fractal
double Tstep = 1*M_2PI;
double Tmax = 255*M_2PI;
double threshold = gsl_pow_2 (0.01);
int Ysize = 800;
double Ytop = -4.0;
double Ybottom = 5.0;
double Ypixelstep = (Ybottom-Ytop)/Ysize;
int Xsize = 400;
double Xleft = 0.0;
double Xright = M_2PI;
double Xpixelstep = (Xright-Xleft)/Xsize;

// tableaux pour des résultats
double *fractalbasin, *fractaliter, *fractalradius, *fractalangle;
fractalbasin = calloc (Xsize*Ysize, sizeof (double));
fractaliter = calloc (Xsize*Ysize, sizeof (double));
fractalradius = calloc (Xsize*Ysize, sizeof (double));
fractalangle = calloc (Xsize*Ysize, sizeof (double));

// ODE algorithm
const gsl_odeiv_step_type * T = gsl_odeiv_step_rkf45;
// fonction d'évolution. parametre: dimension
gsl_odeiv_evolve * e = gsl_odeiv_evolve_alloc (2);
// adaptive step size control object. parametres: abs_tol, rel_tol
// adaptive step size control object. parameters: abs_tol, rel_tol
gsl_odeiv_control * c = gsl_odeiv_control_y_new (1e-6, 0.0);
// fonction du pas. parametres: algorithme, dimension
gsl_odeiv_step * s = gsl_odeiv_step_alloc (T, 2);
// initialiser le systeme EDO
gsl_odeiv_system sys = {pendulum, jacobian, 2, &pendulum_params};

// chercher l'état d'équilibre
double t = 0.0, t1 = 0.0;
double h = 1e-6;
double y[2] = { 4, 0 };
double Yprev[2];
int within = 0;

while (within < 10 && t1 < Tmax) {
    Yprev[0] = y[0];
    Yprev[1] = y[1];
    t1 = t + Tstep;
    while (t < t1) gsl_odeiv_evolve_apply (e, c, s, &sys, &t, t1, &h, y);
    if (gsl_pow_2(y[0]-Yprev[0])+gsl_pow_2(y[1]-Yprev[1]) < threshold) {

```

```

        within++;
    } else {
        within = 0;
    }
}

// si aucun point fixe trouvé
if (t1 >= Tmax) return 1;

// sauvegarder l'état d'équilibre
double Yeq = y[0];
double Ydoteq = y[1];

// calculer le fractal
int Xcounter, Ycounter;
for (Ycounter=0; Ycounter<Ysize; Ycounter++) {
    for (Xcounter=0; Xcounter<Xsize; Xcounter++) {
        t = 0.0, t1 = 0.0;
        h = 1e-6;
        y[0] = Xleft + Xpixelstep*Xcounter;
        y[1] = Ytop + Ypixelstep*Ycounter;
        while (t<Tmax && gsl_pow_2 (gsl_sf_angle_restrict_symm (y[0]-Yeq)) \
            + gsl_pow_2(y[1]-Ydoteq) > threshold) {
            t1 = t1 + Tstep;
            while (t<t1) gsl_odeiv_evolve_apply (e, c, s, &sys, &t, t1, &h, y);
        }
        // bassin d'attraction, Z
        *(fractalbasin+Ycounter*Xsize+Xcounter) = floor((y[0]-Yeq)/M_2PI+0.5);
        // nombre d'itérations, N
        *(fractaliter+Ycounter*Xsize+Xcounter) = floor(t1/M_2PI+0.5);
        // rayon quand tomber dans le disque la première fois, [0,threshold]
        *(fractallradius+Ycounter*Xsize+Xcounter) = sqrt ((gsl_pow_2 \
            (gsl_sf_angle_restrict_symm(y[0]-Yeq)) + gsl_pow_2(y[1]-Ydoteq)) \
            / threshold);
        // angle quand tomber dans le disque la première fois, [0,2pi]
        *(fractangle+Ycounter*Xsize+Xcounter) = \
            atan2 (gsl_sf_angle_restrict_symm(y[0]-Yeq), (y[1]-Ydoteq)) + M_PI;
    }
}

// nettoyage
gsl_odeiv_evolve_free (e);
gsl_odeiv_control_free (c);
gsl_odeiv_step_free (s);

free (fractalbasin); free (fractaliter);
free (fractallradius); free (fractangle);

return 0;
}

```

Références

- [1] Luitzen Egbertus Jan Brouwer : Zur Analysis Situs. *Mathematische Annalen*, volume 68, number 3, pp. 422–434 (1910).
- [2] K. Yoneyama : Theory of continuous sets of points. *Tohoku Mathematical Journal*, volume 11, pp. 43–158 (1917).
- [3] Yves Coudène : Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems. *Notices of the AMS*, volume 53, number 1, pp. 8–13 (2006).
- [4] Yves Coudène : Théorie ergodique et systèmes dynamiques. Les notes du cours de même titre. (2008) <http://perso.univ-rennes1.fr/yves.coudene/dea-cours-v2.pdf>
- [5] John H. Hubbard : The Forced Damped Pendulum : Chaos, Complication and Control. *The American Mathematical Monthly*, volume 106, number 8, pp. 741–758 (1999)
- [6] John H. Hubbard, Beverly West : Differential Equations, a dynamical systems approach, volume II, Springer Verlag (1994).
- [7] Balázs Báinhelyi, Tibor Csendes, Barnabás M. Garay, László Hatvani : A computer-assisted proof of Σ_3 -chaos in the forced damped pendulum equation. *SIAM J Applied Dynamical Systems*, volume 7, number 3, pp. 843–867 (2008).