Morphologie Mathématique

Master Informatique
Rachid JENNANE

POLYTECH
ORLÉANS
École polytechnique de l'Université d'Orléans

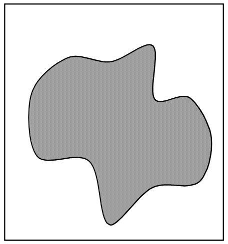
POLYTECH
UNIVERSITE D'ORLEANS

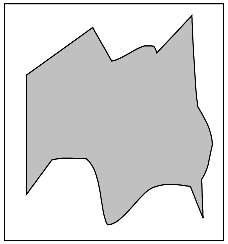
Morphologie mathématique

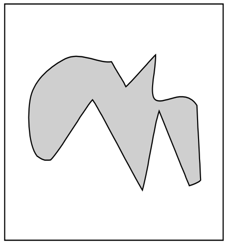
- La morphologie mathématique consiste à comparer les objets d'une image relativement à un autre objet de forme connue : l'élément structurant
- En quelque sorte, chaque élément structurant fait apparaître l'objet sous un aspect différent
- Fondamentalement, la morphologie mathématique utilise des opérations ensemblistes pour transformer les images

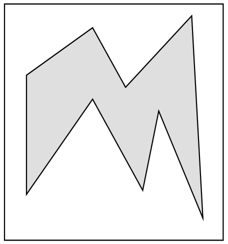
1.1 – Transformations ensemblistes

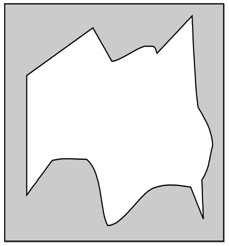
- Soient deux ensembles X et Y, on dispose des opérations classiques suivantes :

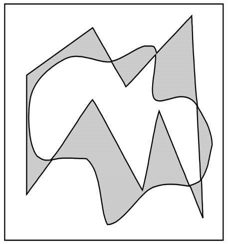

Ensemble X


Union $X \cup Y$


Intersection $X \cap Y$

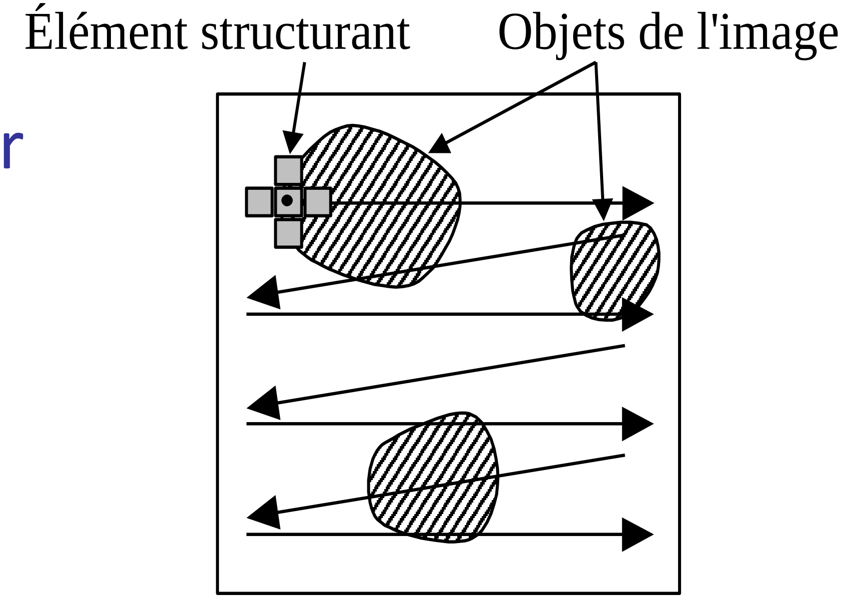

Ensemble Y


Complémentation
$((X \cup Y)^C)_Z = (X \cup Y)^C \cap Z$
$(x \in (X \cup Y)^C \Leftrightarrow x \notin (X \cup Y))$


Différence symétrique
$X / Y = X \cup Y - X \cap Y$

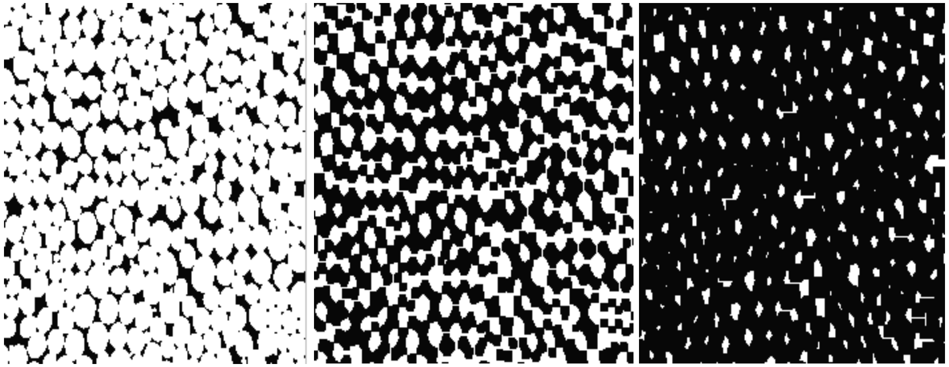
1.2 – Transformations en tout ou rien

- Soit un élément B de géométrie connue (muni d'une origine) appelé élément structurant
- B est déplacé de manière à ce que son origine passe par tous les pixels de l'image
- Pour chaque pixel, on pose une question relative à l'union, l'intersection, ou l'inclusion de B
- La réponse est positive ou négative, d'où le nom de transformation en tout ou rien



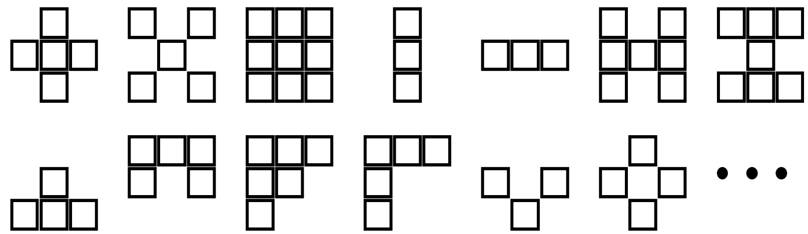
1.2 – Transformations en tout ou rien

- La morphologie mathématique consiste à comparer les objets de l'image que l'on souhaite analyser à un élément structurant
- Chaque élément structurant fait alors apparaître l'objet sous des formes différentes
- L'ensemble des points correspondant à des réponses positives ou négatives forme un nouvel ensemble qui constitue l'image transformée

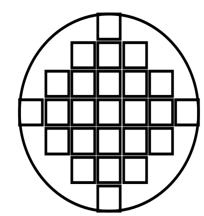


1.3 – Choix d'un élément structurant

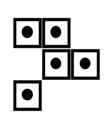
- Critères de sélection d'un élément structurant :
  - forme, direction, taille ($\Rightarrow$ efficacité)
  - Tous ces critères dépendent des objets à analyser
- Exemples :



- Problèmes
  - géométrie de l'échantillonnage (quantification induite par la distance inter-pixel)



  - Choix d'une origine



1.4 – Caractéristiques des transformations tout ou rien

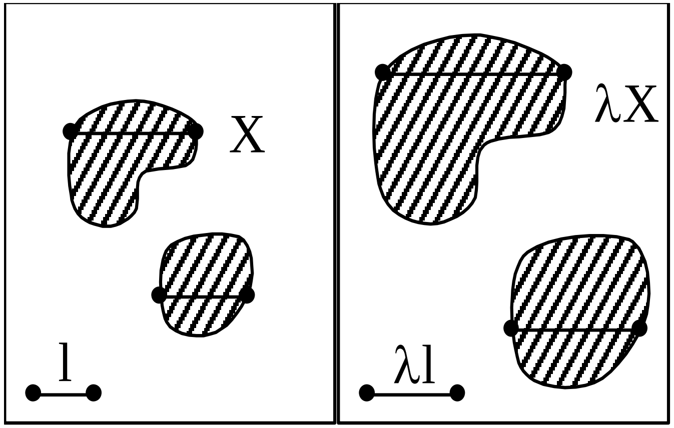
- Invariance par translation
  - Soit X_k le translaté de X selon le vecteur k
  - T est invariante par translation si et seulement si :

$$T(X_k) = [T(X)]_k$$

- Compatibilité avec les homothéties
  - Soit λX un ensemble homothétique de X et T_λ une transformation dépendant de λ
  - T est compatible avec les homothéties si et seulement si :

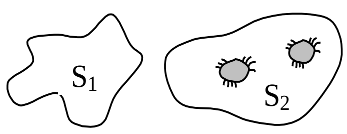
$$T_\lambda(\lambda X) = \lambda\, T(X)$$

  - Ex : extraction des cordes d'un ensemble X. Il est équivalent d'extraire les cordes d'unité sur X, ou d'extraire les cordes d'unité λ sur λX en les réduisant d'un rapport 1/ λ

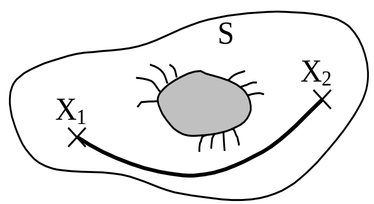


1.5 – Rappels de topologie

- Connexité
  - On dit qu'un ensemble X est connexe si, à toute paire de points X_1 et X_2 appartenant à X, on peut faire correspondre au moins un chemin inclus dans X

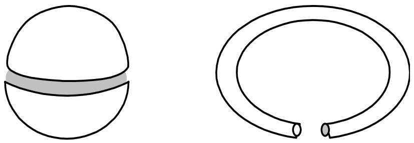


Pas de chemin entre S_1 et S_2

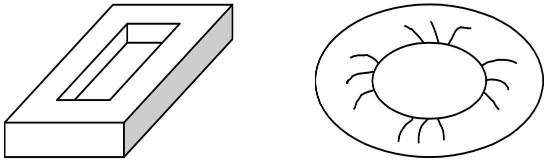


Chemin X_1 X_2 sur S

- Genre d'une surface
  - On appelle genre d'une surface g(s) le nombre maximal de coupures que l'on peut faire dans une surface de telle façon que la surface obtenue soit encore connexe


Sphère : genre 0 Tore : genre 1

- Surfaces homéomorphes
  - Deux surfaces S_1 et S_2 sont homéomorphes si, en déformant de manière continue l'une des surfaces, on peut tendre vers la forme de la seconde surface



1.5 – Rappels

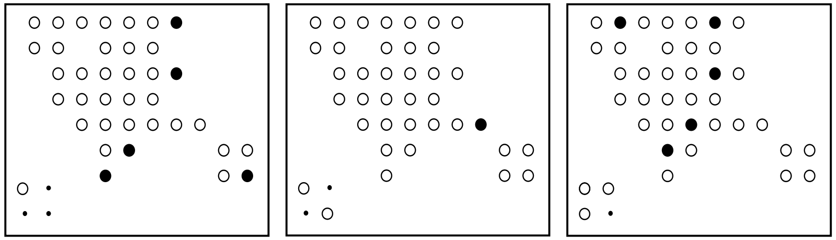
- Nombre de connexité Nc(x)
  - Déf1 : $N_c(X) = \sum_{i=0}^{N-1}\left[1 - g_i(S_i)\right]$
    - N : nombre total de surfaces Si délimitant l'ensemble X
    - gi : genre des surfaces Si
  - Déf2 : $N_c(X) = n - h$
    - n : nombre de sous-ensembles connexes
    - h : nombre de « trous » dans ces sous-ensembles
  - Ex : Sphère : g=0, Nn=1
  - Torre : g=1, Nn = 0

- Estimation du nombre de connexité des images numériques
  - Pour un graphe hexagonal :

$$N_c(X) = N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} \bullet & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Pour un graphe carré :

$$N_c(X) = N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Avec ●=1 et ○=0, $N_c(X) = 5 + 1 - 5 = 1$

1.5 – Propriétés des transformations tout ou rien

- Propriétés algébriques
  - T est une transformation croissante si et seulement si :

    $$X \subset Y \Rightarrow T(X) \subset T(Y)$$

  - T est une transformation extensive si et seulement si :

    $$X \subset T(X)$$

  - Inversement, T est anti-extensive si et seulement si :

    $$T(X) \subset X$$

  - T est une transformation idempotente si et seulement si :

    $$T\,[T(X)] = T(X)$$

  Ex : Tamisage d'une poudre

- Propriétés topologiques
  - Transformation homotopique : une transformation est dite homotopique si elle ne modifie pas le nombre de connexité. On a alors :

    $$Nc[T(X)] = Nc[X]$$

  - Préservation du nombre de connexité : une transformation préserve la connexité si, X étant connexe, T(X) est connexe

2.1 – Érosion sur images binaires

- Soient un ensemble X et un élément structurant B_x centré en x. B_x est déplacé de telle sorte que son centre occupe successivement toutes les positions x de l'espace.
- On note $E^B(X)$ l'ensemble Y érodé de X tel que :

$$E^B(X) = Y = \{ x : B_x \subset X \}$$

- On note aussi :

$$Y = X \ominus B^T$$

où B^T est le transposé de B, c'est à dire son symétrique par rapport à son origine

- Algorithme

  Pour tous les points de l'image $I_I(i,j)$

  Calculer le ET des voisins dans B

  Si (ET=1) alors image $I_F(i,j)=I_I(i,j)$

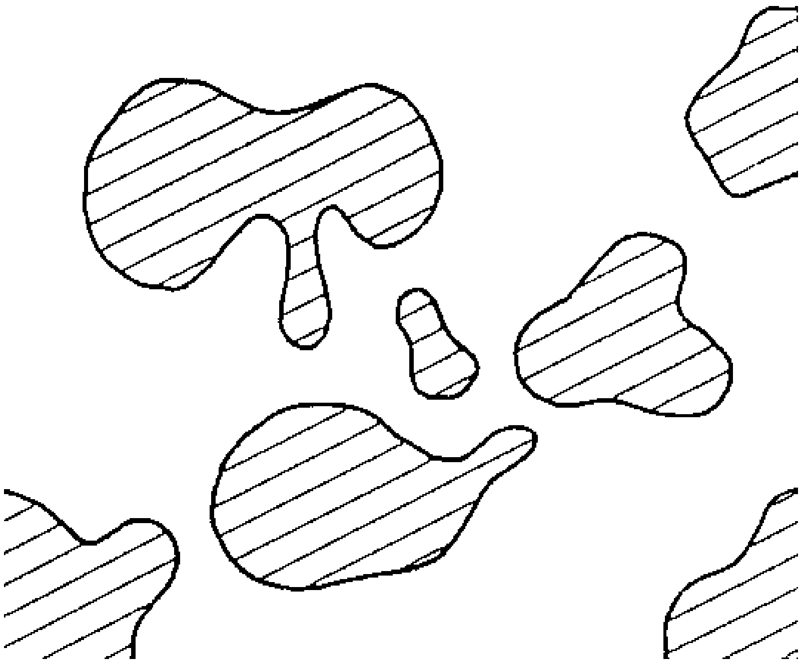
  sinon image $I_F(i,j)=0$

  fin Si

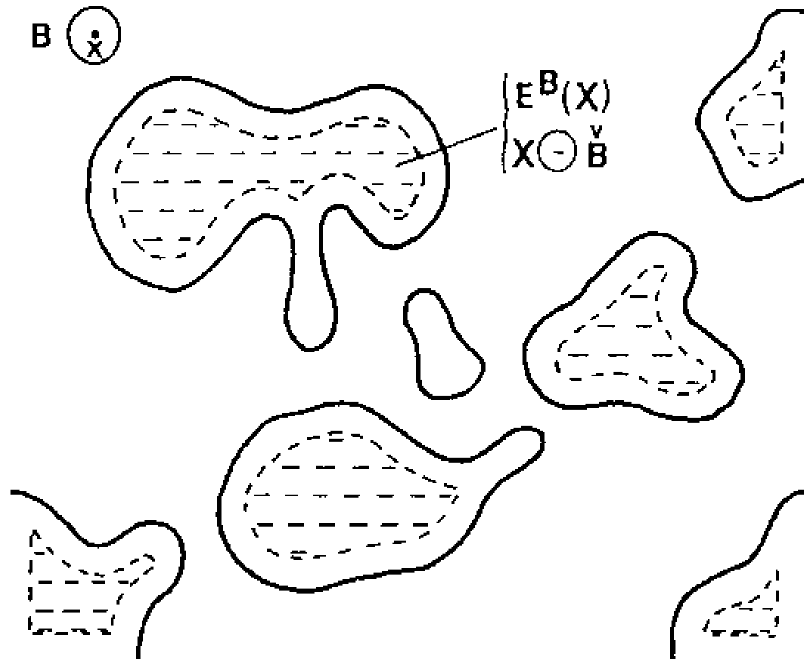
  fin Pour

- Applications
  - Comptage d'éléments (cellules) : érodé ultime

2.1 – Exemple d'érosion



Ensemble X d'objets



Érosion de X par un élément structurant circulaire

2.1 – Érosion sur images à niveaux de gris

- L'érosion d'images à niveaux de gris est définie de la manière suivante :

  EB(f(x)) = f1(x) = inf { f(x) : x $\in$ Bx}

- Ainsi, pour construire la fonction érodée par un élément structurant plan, il suffit d'attribuer à chaque point du domaine Bx la valeur inférieure que prend f(x) dans ce domaine
- On note aussi :

  $$f1(x) = f(x) \ominus BT$$

  où, comme précédemment, BT est le transposé de B

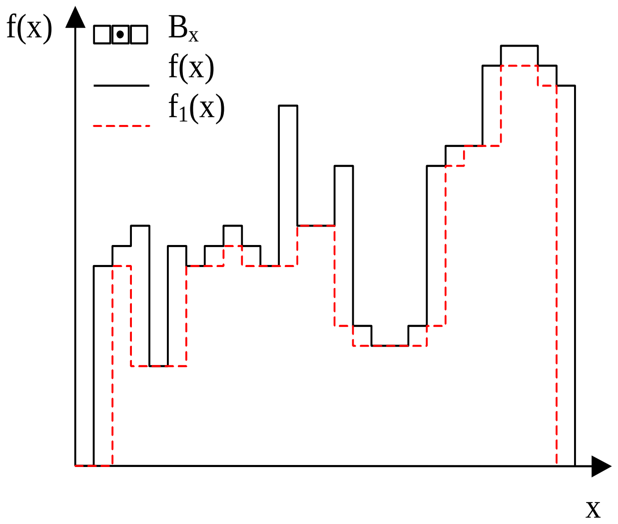
- Algorithme

  Pour tous les points de l'image II(i,j)

  Rechercher le minimum dans le voisinage de X centré en (i,j)

  Affecter cette valeur à image IF(i,j)

  fin Pour



2.2 – Dilatation sur images binaires

- Soient un ensemble X et un élément structurant B_x centré en x. B_x est déplacé de telle sorte que son centre occupe successivement toutes les positions x de l'espace.
- De la même manière que pour l'érosion, on note $D^B(X)$ l'ensemble Y dilaté de X tel que :

$$D^B(X) = Y = \{ x : B_x \cap X \neq \emptyset \}$$

- On note aussi :

$$Y = X \oplus B^T$$

où B^T est le transposé de B, ou son symétrique par rapport à son origine

- Algorithme

  Pour tous les points de l'image $I_I(i,j)$

  Calculer le OU des voisins dans B

  Si (OU=1) alors image $I_F(i,j)=I_I(i,j)$

  sinon image $I_F(i,j)=0$

  fin Si

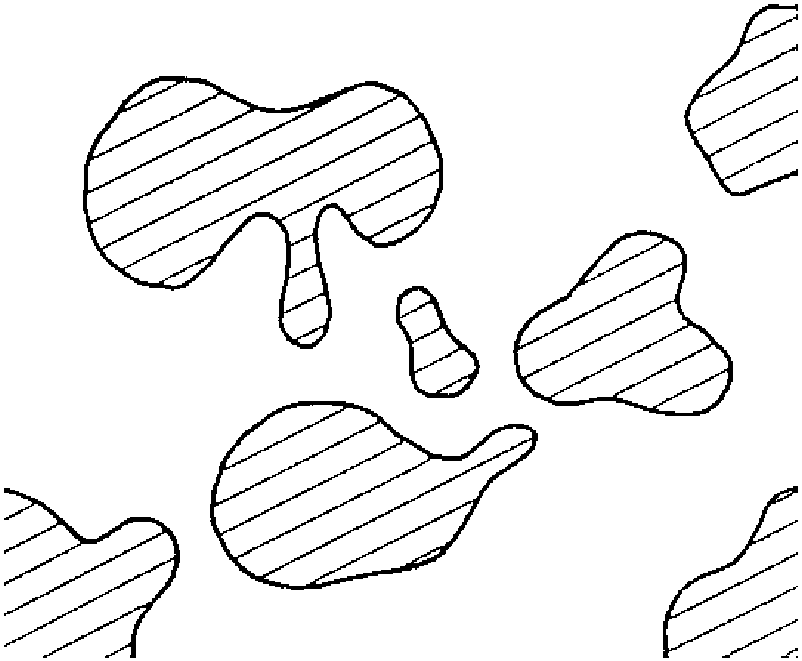
  fin Pour

- Remarque
  - Erosion et dilatation ne sont pas indépendantes :

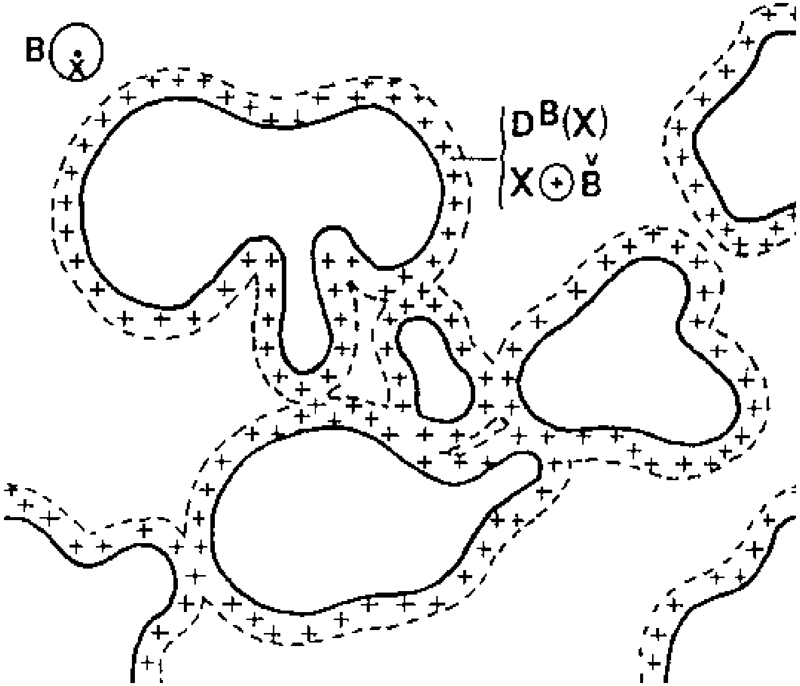
$$X \oplus B^T = (X^C \ominus B_T)^C$$

- Applications

2.2 – Exemple de dilatation



Ensemble X d'objets



Dilatation de X par un élément structurant circulaire

2.2 – Dilatation sur images à niveaux de gris

- La dilatation d'image à niveaux de gris est définie de la manière suivante :

$DB(f(x)) = f1(x) = \sup \{ f(x) : x \in Bx\}$

- Ainsi, pour construire la fonction dilatée par un élément structurant plan, il suffit d'attribuer à chaque point du domaine Bx la valeur supérieure que prend f(x) dans ce domaine
- On note aussi :

$$f1(x) = f(x) \oplus BT$$

où, comme précédemment, BT est le transposé de B

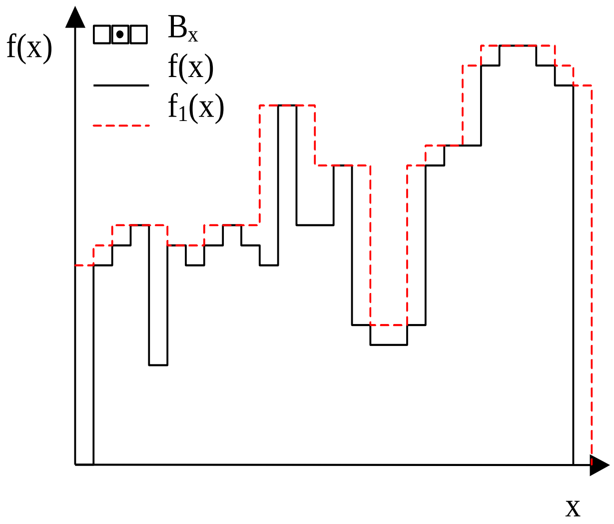
- Algorithme

Pour tous les points de l'image II(i,j)

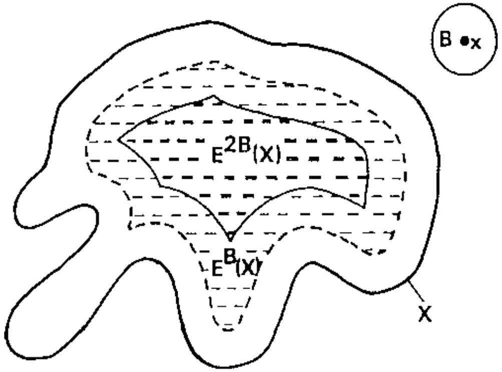
Rechercher le maximum dans le voisinage de X centré en (i,j)

Affecter cette valeur à image IF(i,j)

fin Pour

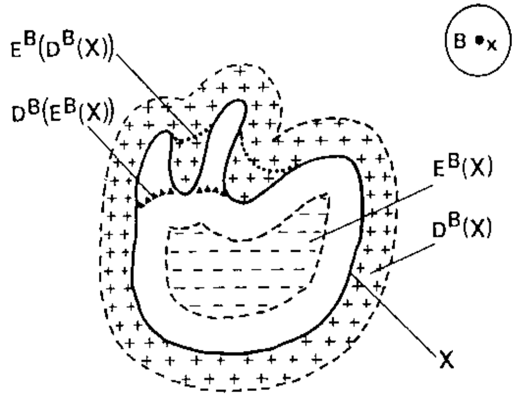


2.3 – Propriétés de l’érosion et de la dilatation

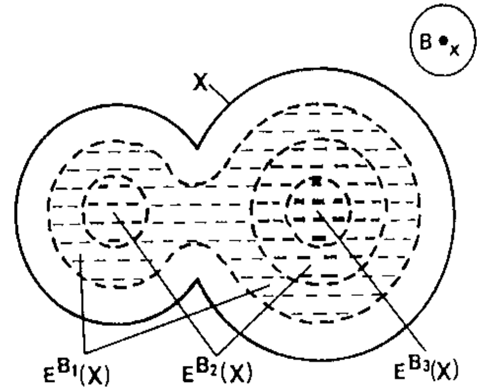


Propriété d’inclusion et d’itérativité de l’inclusion pour l’érosion :

$B \subset B' \Rightarrow E^{B'}(X) \subset E^{B}(X)$

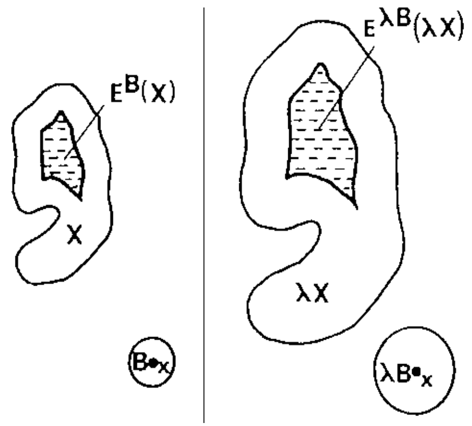


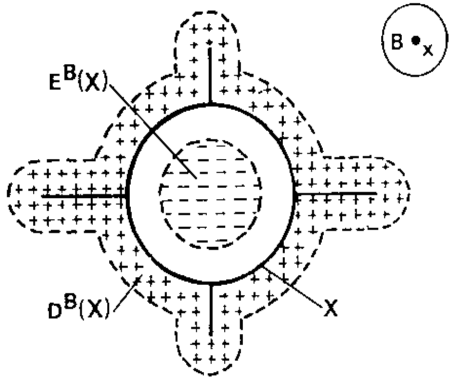
Exemple montrant qu’un ensemble érodé puis dilaté est inclus dans l’ensemble dilaté puis érodé par le même B_x

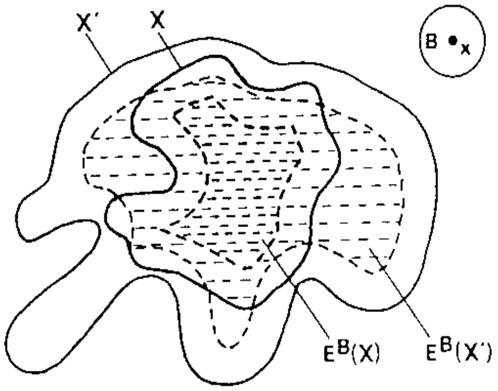


Exemple montrant que l’érosion n’est pas une transformation homotopique

2.3 – Propriétés de l’érosion et de la dilatation







Propriétés d’homothétie pour l’érosion et la dilatation

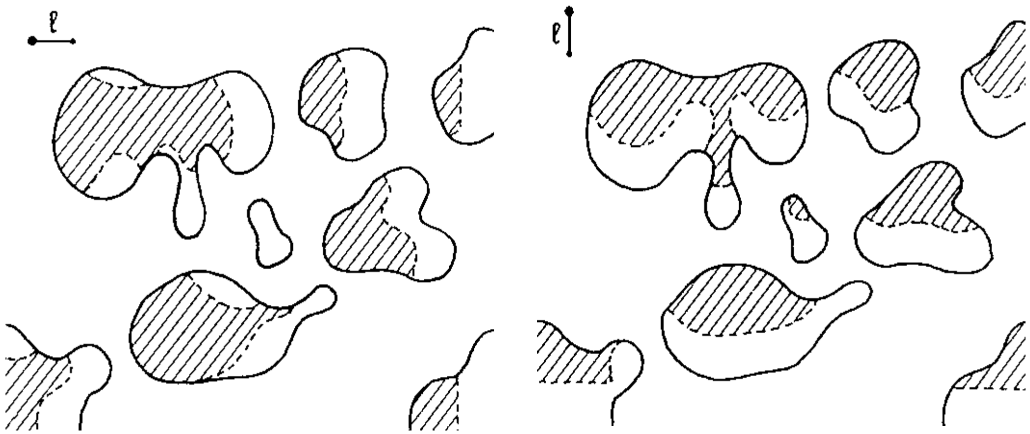
Condition de continuité pour l’érosion et la dilatation (érosion discontinue, dilatation continue)

Propriété de croissance dans le cas de l’érosion :

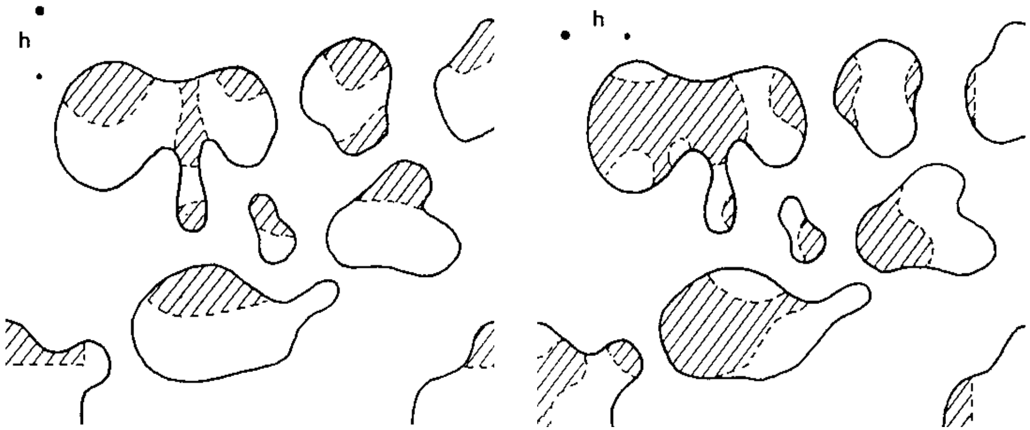
si $X \subset X'$

alors $E^B(X) \subset E^B(X')$

2.4 – Influence de l'élément structurant



Érosion d'un ensemble X d'objets par un segment de droite, dans deux directions orthogonales



Érosion d'un ensemble d'objets X par un bi-point, dans deux directions différentes

3.1 – Ouverture

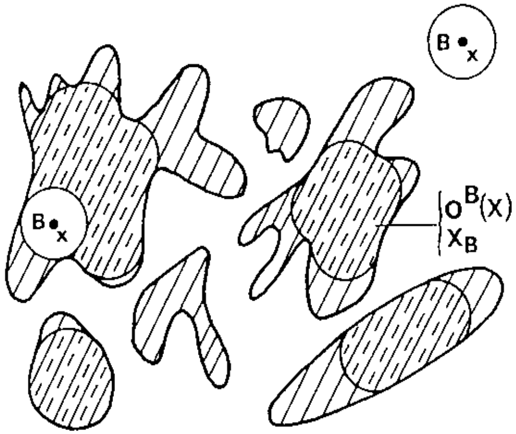
- Définition
  - On définit l'ouverture comme une érosion suivie d'une dilatation

$$OB(X) = DBT[EB(X)]$$

$$\text{ou } OB(X) = (X \ominus BT) \oplus B$$

- Applications : suppression de détails sans déformation
  - Coupe les isthmes
  - Supprime îles et caps étroits
  - Arase les pics

- Propriétés de l'ouverture
  - $O^B(X)$ est croissante, idem-potente et anti-extensive



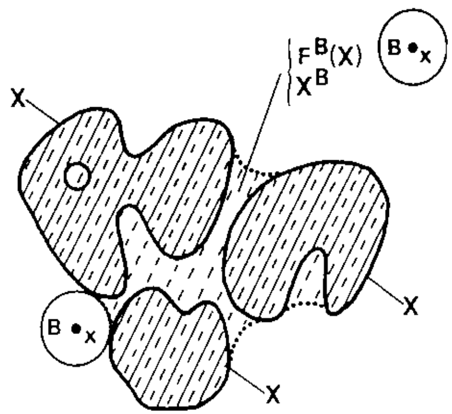
Ouverture d'un ensemble d'objets X par un élément structurant circulaire

3.2 – Fermeture

- Définition
  - On définit la fermeture comme une dilatation suivie d'une érosion

    FB(X) = EBT[DB(X)]

    ou FB(X) = (X ⊕ BT) ⊖ B
- Applications : suppression de détails sans déformation
  - Bouche les canaux étroits
  - Supprime lacs et golfes étroits
  - Ferme les vallées



Fermeture d'un ensemble d'objets X par un élément structurant circulaire

3.3 – Comparaisons

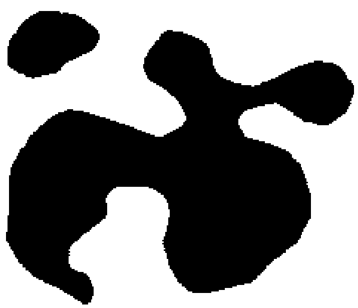
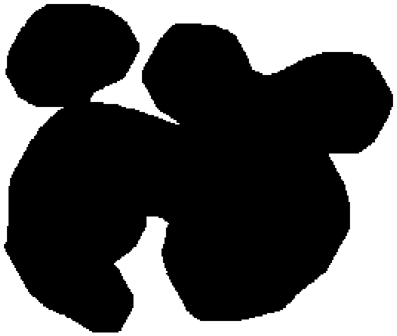


Image originale

Érosion

Ouverture



Dilatation

Fermeture

4 – Filtres morphologiques

- Il est possible de combiner ouverture et fermeture successivement :

$$\left.\begin{matrix} OF \\ FO \end{matrix}\right\} \text{idempotence}$$

$$\left.\begin{matrix} FOF \\ OFO \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{construction de} \\ \text{filtres médians}\end{matrix}$$

- Extraction des pics

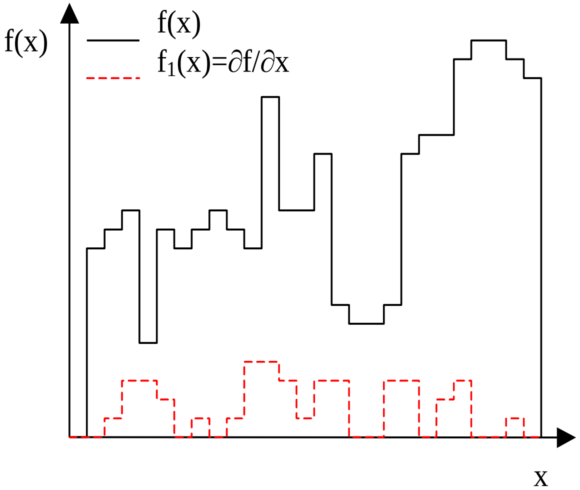
$$Tf(x) = f(x) - O^{\lambda B} f(x)$$

- Extraction des vallées

$$Tf(x) = F^{\lambda B} f(x) - f(x)$$

- Gradients morphologiques

$$g(x) = \frac{D^{\lambda B} f(x) - E^{\lambda B} f(x)}{2}$$



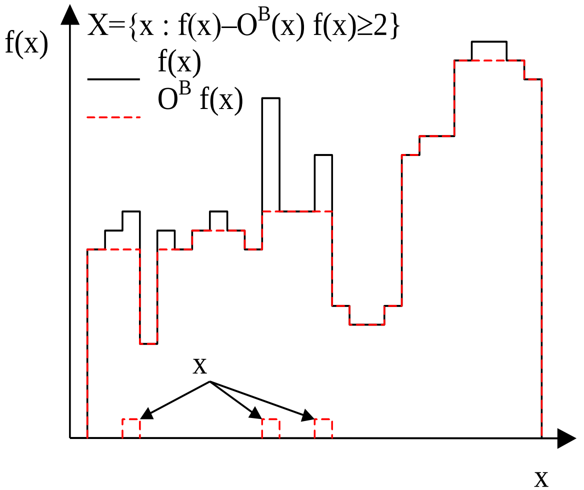
4 – Filtres morphologiques

- La transformation « chapeau haut de forme » extrait les sommets puis réalise un seuillage

$$X = \{x : f(x) - O^{\lambda B} f(x) \geq t\}$$

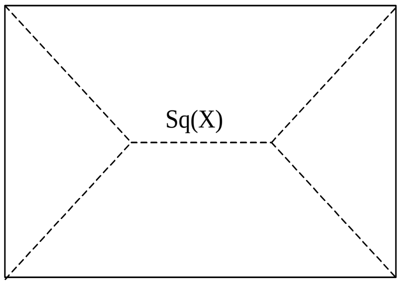
- Avantage :
  - Insensibilité aux faibles variations de niveaux de gris
- Applications : extraction
  - Chromatine des noyaux
  - Fissures de sol, etc.

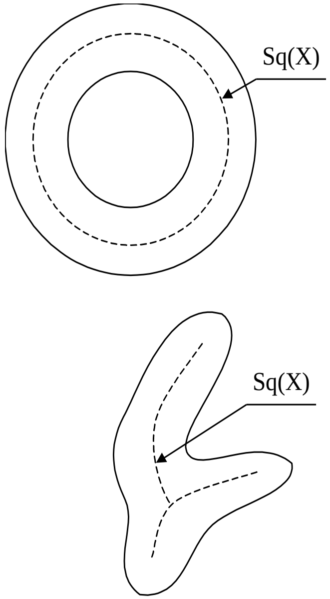
- Ne sont conservées dans l'image que les portions « entrant dans le chapeau » et dépassant son sommet



5 – Squelettes

- Une représentation simplifiée de la forme d'un objet peut être faite à l'aide d'une forme stylisée qui rappelle celle de l'objet
- Lorsque cette forme stylisée représente l'ossature sur laquelle l'objet est construit, on parle de squelette
- La morphologie mathématique permet de déterminer automatiquement ce genre de forme à partir de l'objet binarisé





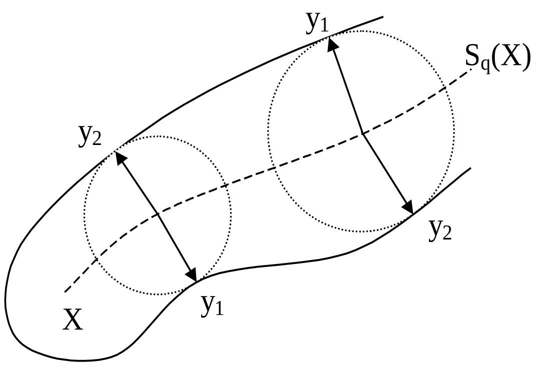
- Applications (empruntées à la géographie)
  - Ligne de partage des eaux
  - Bassins versants
  - Lignes de crête
  - Sommets-rivières

5.1 – Squelettes internes : définitions

- Soient un ensemble X et sa frontière ∂x. Un point s de X appartiendra au squelette de X, noté $S_q(X)$, si la distance euclidienne de s à ∂x est atteinte en au moins deux points distincts de X :

  $$s \in S_q(X) \Leftrightarrow \exists y_1, y_2 \in \partial x,\ y_1 \neq y_2, \text{ tel que } d(s,\partial x) = d(s,y_1) = d(s,y_2)$$

- $S_q(X)$ peut être défini aussi comme étant l'ensemble des centres des boules maximales B contenues dans X



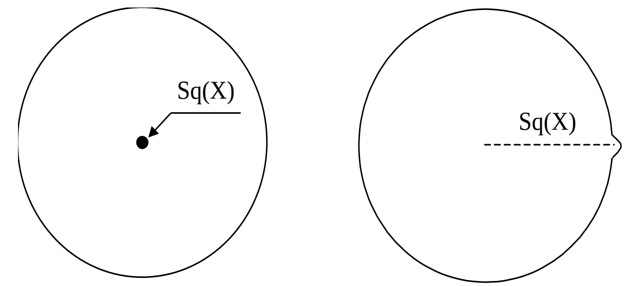
- Définition par analogie avec les feux de prairie
- Le squelette peut aussi s'exprimer en terme d'érosion et d'ouverture

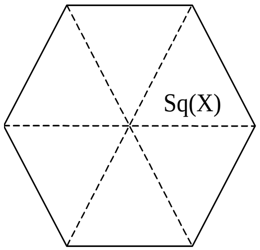
$$Sq(X) = \bigcup_{\lambda>0} \bigcap_{\mu>0} \left[E^{\lambda B}(X) / O^{\mu B}(E^{\lambda B}(X)) \right]$$

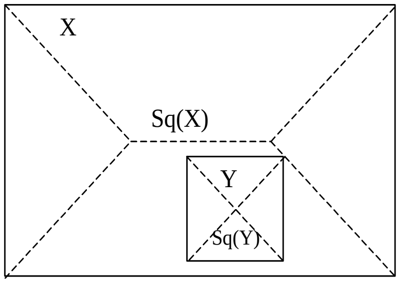
5.3 – Squelettes : propriétés

- La squelettisation est une transformation
  - Anti-extensive : $Sq(X) \subset X$
  - Idempotente : $Sq\ (Sq\ (X)) = Sq\ (X)$
  - Ni croissante, ni décroissante :

    $X \subset Y$ n'implique pas $Sq(X) \subset Sq(Y)$
- Elle possède une mauvaise continuité
  - Une modification minime de l'image entraîne une modification importante du squelette







5.4 – Squelettes : points singuliers

- Mauvaises propriétés du squelette

⇒ nécessité de réaliser des post-traitements afin de
  - détecter les points particuliers du squelette
  - décider si les segments associés sont significatifs

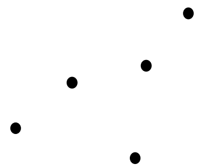
- Cette opération est appelée ébarbulage

- Il est nécessaire de déterminer les points singuliers du squelette (points extrêmes, triples, multiples ou isolés)
- Une distance faible entre deux points singuliers indique un segment peu significatif de la forme globale de l'objet, qui doit être éliminé

5.4 – Squelettes : points singuliers

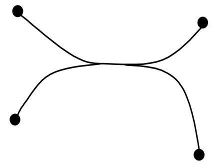
- Détection des points singuliers :

Points isolés



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

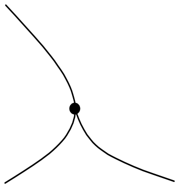
Points extrêmes



$$\begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \bullet & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les rotations

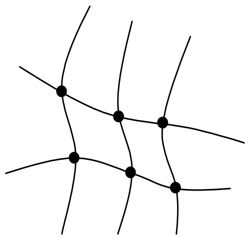
Points triples



$$\begin{pmatrix} \bullet & 0 & \bullet \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et les rotations

Points multiples



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'autres configs

- La réduction d'information réalisée par les squelettes, tout en conservant les éléments essentiels des objets, compense largement les mauvaises propriétés de cette transformation

5.5 Squelettes par zone d'influence

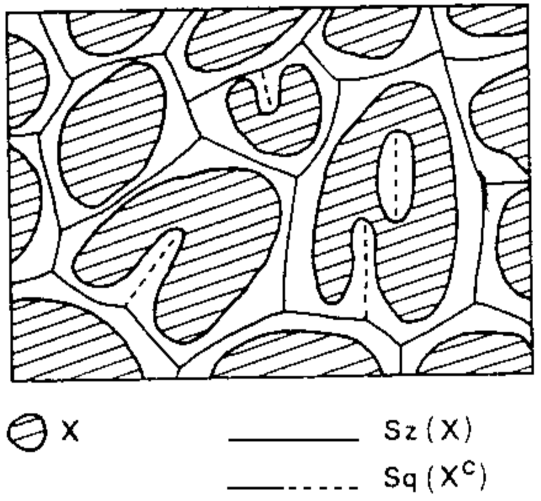
- Soit un ensemble X constitué de particules
- A chaque particule X_i, on peut associer une zone d'influence Y_i telle que tous les points y formant Y_i soient plus proches des X_i que n'importe quel autre X_j, $j \neq i$. On a :

$$Sz(X) = \bigcup_i (Y_i)^C$$

avec

$$Y_i = \bigcup_i \left[y : d(y, x_i) < d(y, x_j), j \neq i \right]$$

- La squelette par zone d'influence (skiz) Sz(X) partage l'image en séparant chaque sous-ensemble non connexe par une frontière ($d(y,x_i) = d(y,x_j)$)



- Sz(X) est un sous espace du squelette complémentaire :

$Sz(X) \subset Sq(X^C)$