Graphenisomorphie in quasipolynomieller Zeit
Der Algorithmus von László Babai

Yussuf Kassem Benjamin Deutz

28. Juli 2017

Zusammenfassung

Dieses Dokument ist im Rahmen des Kurses „Panorama der Mathematik - Seminar über Fehler“ im an der Freien Universität Berlin im Sommersemester 2017 entstanden. Es beinhaltet die Ausarbeitung eines Vortrags vom 10. Juli 2017 zum Thema „Graphenisomorphie in quasipolynomieller Zeit“. Dabei wird insbesondere die zeitliche Abfolge der Ereignisse nach der Ankündigung Babais einen quasipolynomiellen Algorithmus gefunden zu haben dargestellt. Das Ziel besteht darin, die Vortragsstruktur und die Inhalte des Themas abzubilden.

1 Definitionen

In diesem Kapitel werden wir die Einstiegsdefinitionen und Notationen festhalten, die für den Vortrag zentral sind.

Definition 1 *Ein Graph G ist ein geordnetes Paar (V, E). Dabei ist V eine Menge, deren einzelnen Elemente wir Knoten nennen. E ist die Menge aller Kanten. Jede Kante besteht aus 2 verschiedenen Knoten.*

Definition 2 *Gegeben seien zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$. Dann gilt $G \cong G' \Leftrightarrow \exists \varphi : V \to V'$ ist eine bijektive Abbildung, für die gilt: $\{v, w\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E'$. Wir sagen dann, dass G und G' isomorph zueinander sind. Wir nennen φ einen Isomorphismus.*

Diese Definitionen werden im Folgenden an zwei Beispielen anschaulich gemacht. Dazu schauen wir uns zuerst die beiden Graphen in Abbildung 1 an. Durch die Angabe einer Abbildung φ kann man erkennen, dass es sich um zwei isomorphe Graphen handelt. Die Abbildung φ ist im Folgenden angegeben.

$$\varphi = \begin{cases} \varphi(a) = 1, \varphi(b) = 6, \varphi(c) = 8, \varphi(d) = 3 \\ \varphi(g) = 5, \varphi(h) = 2, \varphi(i) = 4, \varphi(j) = 7 \end{cases}$$

Ein weiteres Beispiel zeigt, dass zwei Graphen, obwohl sie sich auf den ersten Blick vielleicht recht ähnlich sehen, nicht unbedingt isomorph sein müssen. In Abbildung 2 sehen wir ebenfalls zwei Graphen. Beide haben 5 Knoten und 6 Kanten. Um nun argumentieren zu können, warum diese beiden Graphen nicht isomorph sind, brauchen wir eine neue Definition.

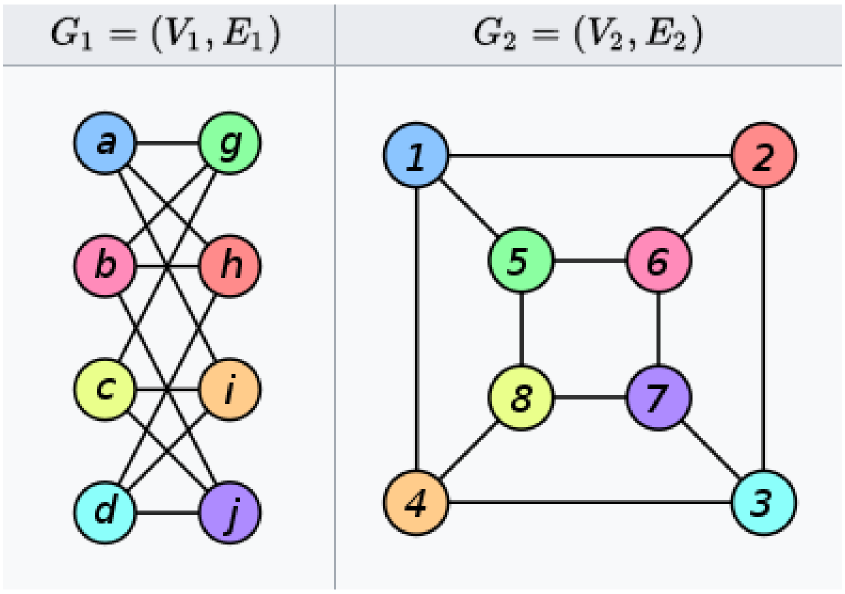

Abbildung 1: Zwei isomorphe Graphen

Definition 3 *Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Wir definieren*

$$d_G(v) := \sum_{e \in E, v \in e} 1.$$

Wir nennen $d_G(v)$ den Grad von v. Anders ausgedrückt ist der Grad also die Anzahl aller Kanten, die v mit anderen Knoten verbinden.

Es ist offensichtlich, dass bei einer isomorphen Abbildung Knoten mit Grad x auf Knoten mit Grad x abgebildet werden müssen. Wenn wir die Grade aller Knoten in den beiden Graphen betrachten, bemerken wir, dass beide Graphen 3 Knoten mit Grad 2 und 2 Knoten mit Grad 3 besitzen. Im linken Graphen sind die beiden Knoten mit Grad 3, nämlich c und d, miteinander verbunden. Im rechten Graphen allerdings sind die beiden Knoten mit Grad 3 nicht verbunden. Dieses Argument reicht aus, um zu zeigen, dass die beiden Graphen nicht isomorph sein können.

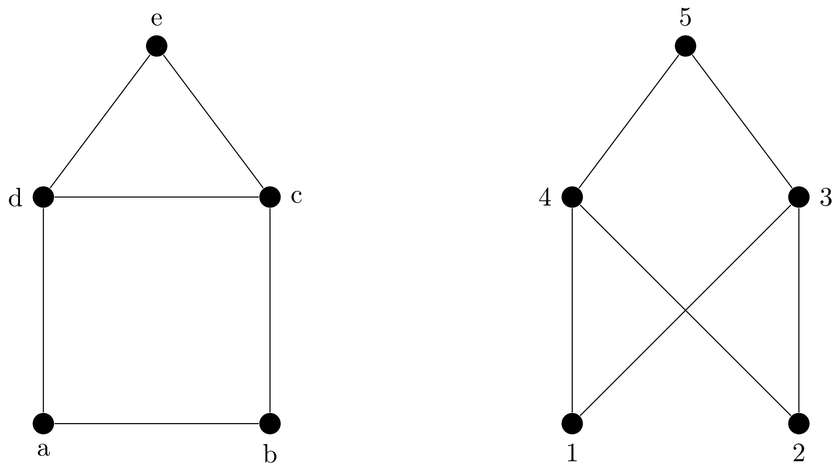

Abbildung 2: Zwei nicht isomorphe Graphen

2 László Babai

László Babai ist ein

3 Geschichte der Graphenisomorphie

In diesem Teil möchten wir einen kleinen historischen Überblick über Ergebnisse im Bereich der Graphenisomorphie geben. Dies schließt die neuesten Erkenntnisse Babais mit ein.

3.1 Historisches

3.2 Babais Durchbruch

Im September 2015

4 Kapitel zu Johnsongraphen und Färbung

Den Johnson Graph in Abbildung **??** brauchen wir sicherlich noch irgendwo...

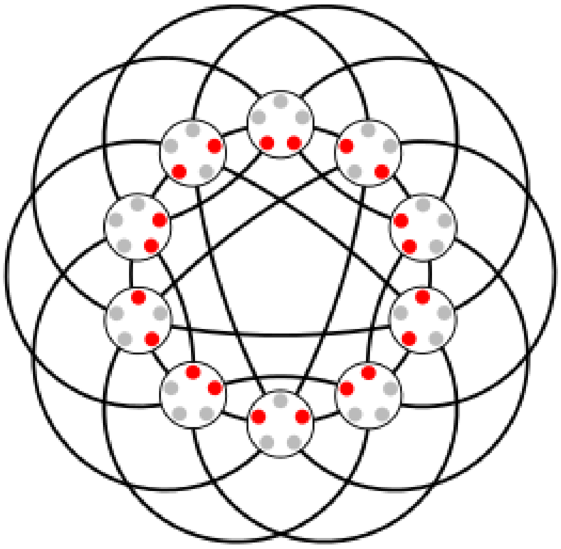

Abbildung 3: Der Johnson-Graph $J(5,2)$

5 Einordnung in die Komplexitätsklassen

Literatur

[1] Lamport, L., "LaTeX- A Document Preparation System", Addison-Wesley, 1998.

[2] Fillioque R. and Heliotrope, B., *Why Fermat's last theorem is really a lemma,* American Mathematical Weekly, Vol. 7, No. 1, pp 115-116, 1998.