Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klasse 6/7

Zirkelzettel vom 21. Juli 2015

Gibt es eine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist, also eine Zahl x mit $x^2 = 2$ (so eine Zahl nennt man *(Quadrat-)Wurzel* von 2 und schreibt sie als $\sqrt{2}$)? Falls $x = \frac{m}{n}$ ein Bruch ist, also m und n natürliche Zahlen sind, dann folgt

$$\frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

beziehungsweise (wenn man beide Seiten mit n^2 multipliziert)

$$m^2 = 2n^2.$$

In der Primfaktorzerlegung von m^2 kommt die 2 mit einer geraden Potenz vor, da jede 2 in der Primfaktorzerlegung von m quadriert wird. Genauso kommt die 2 in der Primfaktorzerlegung von n^2 mit einer geraden Potenz vor, also kommt sie in der Primfaktorzerlegung von $2n^2$ mit einer ungeraden Potenz vor. Das kann aber nicht sein, weil ja $2n^2 = m^2$ ist. Also erfüllt kein Bruch $x = \frac{m}{n}$ die Gleichung $x^2 = 2$.

Wir können aber versuchen, Annäherungen für $\sqrt{2}$ zu finden. Beispielsweise ist $1^2 = 1$ kleiner als 2, aber $2^2 = 4$ größer als 2, also muss $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen. Genauere Annäherungen sind folgende:

$$\begin{gathered}
1{,}4^2 = 1{,}96 < 2,\ 1{,}5^2 = 2{,}25 > 2 \rightsquigarrow \sqrt{2} \in [1{,}4; 1{,}5] \\
1\ 41^2 = 1{,}9881 < 2,\ 1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2 \rightsquigarrow \sqrt{2} \in [1{,}41; 1{,}42] \\
1{,}414^2 = 1{,}999396 < 2,\ 1{,}415^2 = 2{,}002225 > 2 \rightsquigarrow \sqrt{2} \in [1{,}414; 1{,}415]
\end{gathered}$$

Indem man so weitermacht, kann man $\sqrt{2}$ als unendlichen Dezimalbruch, beginnend mit $1{,}414\ldots$, auffassen.

An der Stelle $\sqrt{2}$ haben die rationalen Zahlen (also die Menge aller Brüche) also eine Lücke, die man mit dieser Konstruktion füllen kann. Wir bezeichnen die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche mit $\mathbb{R}$. Das sind die sogenannten *reellen Zahlen*. Beispiele für reelle Zahlen sind natürlich alle rationale Zahlen, aber eben auch zum Beispiel $\sqrt{2}$. Die reellen Zahlen, die nicht rational sind, sich also nicht als Bruch schreiben lassen, heißen *irrationale Zahlen*. Wir haben also gerade gesehen, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Die Aufgaben beschäftigen sich mit weiteren irrationalen Zahlen, wobei die Anzahl der Sternchen $*$ die Schwierigkeit der Aufgabe angibt: Je mehr Sternchen, desto schwieriger.

Aufgabe 1.

Welche der folgenden Zahlen sind rational, lassen sich also als Bruch schreiben?

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{4}$

c) $\sqrt{p}$, wobei p eine Primzahl ist

d) $\sqrt{n}$, wobei n keine Quadratzahl ist

Aufgabe 2. $(*)$

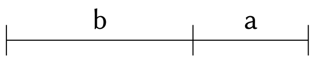
Berechne die ersten 3 Nachkommastellen von $\sqrt{3}$ (ohne Taschenrechner)!

Aufgabe 3.

$\sqrt[3]{12}$ ist eine reelle Zahl, die die Gleichung $(\sqrt[3]{12})^3 = 12$ erfüllt. Ist $\sqrt[3]{12}$ rational?

Aufgabe 4. a) $(* * *)$ Überlege dir, dass folgende Aussage wahr ist: *Seien x und y positive reelle Zahlen. Dann hört Euklids Algorithmus genau dann auf (er „terminiert“), wenn x ein rationales Vielfaches von y ist, also $x = qy$ für eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ gilt.*

b) $(**)$ Der *goldene Schnitt* φ ist das Verhältnis $\frac{b}{a}$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{b+a}{b} = \varphi = \frac{b}{a}$ ist.



Zeige, dass der euklidische Algorithmus mit b und $b+a$ nicht terminiert. Folgere daraus, dass φ irrational ist.

Aufgabe 5. $(* * *)$

Sei $x \in \mathbb{Q}$ eine rationale Lösung der Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0, \qquad (\heartsuit)$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen seien. Sei außerdem $x = \frac{k}{l}$ eine vollständig gekürzte Darstellung von x, also $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(k, l) = 1$. Zeige, dass dann gilt:

a) k ist ein Teiler von a_0

b) l ist ein Teiler von a_n

Tipp: Multipliziere die Gleichung ($\heartsuit$) mit l^n. k und l sind Teiler der rechten Seite (da steht 0), also müssen sie auch Teiler der linken Seite sein.

Aufgabe 6. $(**)$

Der goldene Schnitt φ wurde in Aufgabe 4b) definiert.

a) Überlege dir, dass φ die Gleichung $\varphi^2 = 1 + \varphi$ erfüllt.

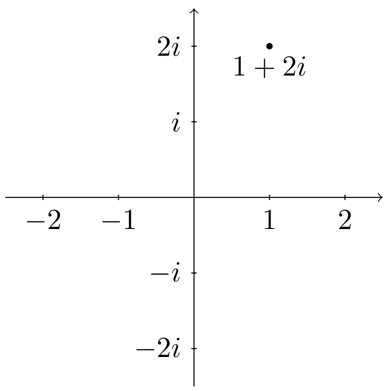
b) Forme diese Gleichung um, um zu zeigen, dass φ auch $1 + \varphi - \varphi^2 = 0$ erfüllt.

c) Verwende Aufgabe 5, um zu zeigen, dass φ irrational ist.

Aufgabe 7. $(*)$

Warum ist das Quadrat jeder reellen Zahl positiv? Kann man also die Gleichung $x^2 = -1$ für reelle Zahlen lösen?

Die letzte Aufgabe zeigt, dass man auch mit reellen Zahlen an gewisse Grenzen stößt, da man nicht jede Gleichung lösen kann. Man kann über dieses Problem hinwegkommen, indem man einfach eine neue Zahl i einführt, die $i^2 = -1$ erfüllt. Die Zahl i kann nicht auf der Zahlengerade liegen, sondern liegt sozusagen „neben ihr". Eine *komplexe Zahl* ist dann die Summe von Vielfachen von i und einer reellen Zahl, also etwa eine Zahl wie $\varphi + \sqrt{2} \cdot i$, wobei φ der goldene Schnitt aus Aufgabe 4b) ist. Man bezeichnet die Menge der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C}$. Eine Möglichkeit, sich komplexe Zahlen vorzustellen, ist die sogenannte *Zahlenebene*:



Komplexe Zahlen sind dann Punkte in der Zahlenebene. Quadrieren verdoppelt dann einfach den Winkel zu den positiven reellen Zahlen: -1 hat einen Winkel von $180°$ und wird auf $360°$ (also auf die positiven reellen Zahlen) abgebildet. i hat einen Winkel von $90°$ und wird auf $180°$, also auf eine negative reelle Zahl (nämlich -1) abgebildet. Es stellt sich heraus, dass man in den komplexen Zahlen nicht nur die Gleichung $x^2 = -1$ lösen kann, sondern sogar viel mehr Gleichungen, nämlich alle Polynomgleichungen

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0,$$

wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ sein muss. Die Forderung $n \geq 1$ ist wichtig, weil man sonst die Gleichung $a_0 = 0$ hätte, die natürlich für $a_0 \neq 0$ keine Lösung besitzen kann (die Variable x kommt ja noch nicht einmal vor).