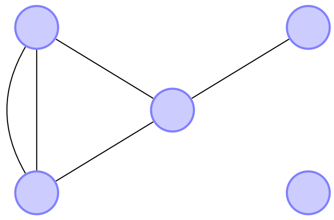
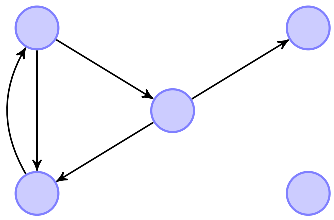
Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klasse 6/7

Zirkelzettel vom 12. Mai 2015

Ein *Graph* besteht aus *Ecken* und aus *Kanten*, die je zwei Ecken verbinden. Das schaut zum Beispiel so aus:



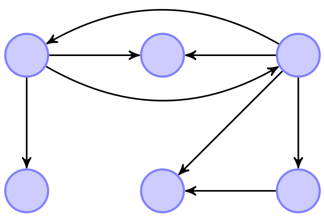
Bei einem *gerichteten Graphen* haben die Kanten eine Richtung:



Der *Grad* einer Ecke ist die Anzahl der angrenzenden Kanten. Der *Eingangsgrad* ist die Anzahl der Kanten, die in der Ecke enden. Der *Ausgangsgrad* ist die Anzahl der Kanten, die in der Ecke beginnen.

Aufgabe 1.

Bestimme Grad, Eingangsgrad und Ausgangsgrad von jeder Ecke in dem folgenden gerichteten Graphen:



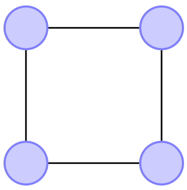
Aufgabe 2.

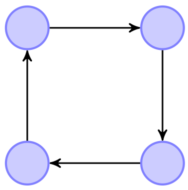
Finde eine Formel, um den Grad einer Ecke durch ihren Eingangs- und ihren Ausgangsgrad zu berechnen.

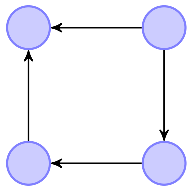
Ein *Kantenzug* ist eine Folge von Kanten, sodass der Endpunkt einer Kante immer gleich dem Anfangspunkt der nächsten Kante ist. Ein Kantenzug heißt *geschlossen*, falls die erste und die letzte Ecke übereinstimmen. Ein *eulerscher Spaziergang* ist ein Kantenzug, bei dem jede Kante genau einmal verwendet wird.

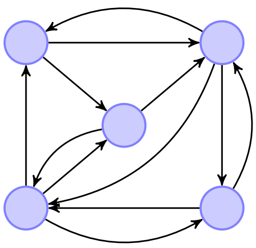
Aufgabe 3.

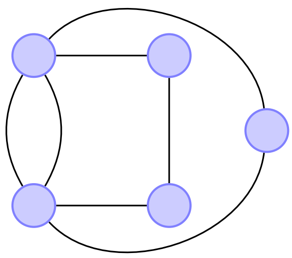
In welchem der folgenden Graphen gibt es einen geschlossenen eulerschen Spaziergang? Wenn es keinen gibt, warum nicht?

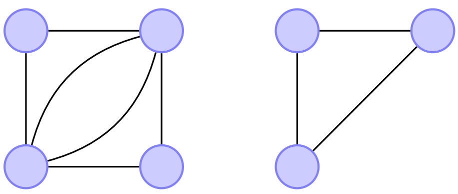
a) 

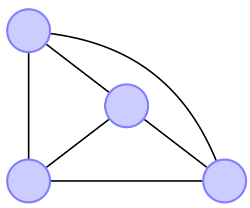
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn man zwei Ecken immer durch einen Kantenzug verbinden kann.

Satz. *Euler 1736, Hierholzer 1873*

Für zusammenhängende Graphen gibt es das folgende einfache Kriterium für die Existenz von geschlossenen eulerschen Spaziergängen:

- Ein zusammenhängender ungerichteter Graph hat genau dann einen eulerschen Spaziergang, wenn alle Grade seiner Ecken gerade sind.
- Ein zusammenhängender gerichteter Graph hat genau dann einen eulerschen Spaziergang, wenn für jede Ecke Eingangs- und Ausgangsgrad übereinstimmen.

Beweis. Beide Teile haben nahezu den gleichen Beweis. Einmal ist es klar, dass die Bedingungen jeweils notwendig sind, weil der Kantenzug jede Ecke, in die er hineinführt, auch wieder verlässt.

Das Kriterium ist aber auch hinreichend: Um das zu sehen, wählen wir einen Kantenzug, bei dem jede Kante höchstens einmal verwendet wird, und zwar einen mit maximaler Länge unter solchen Kantenzügen. Wir nennen den Kantenzug einmal K. Die erste Ecke von K nennen wir a und die letzte b.

Wenn $a \neq b$ wäre, dann würde der Kantenzug einmal öfter in b hineinlaufen als hinaus, also gäbe es aufgrund der Gradbedingungen einer Kante, die von K nicht benutzt wird und die aus b hinausläuft. Wir könnten also K um diese Kante verlängern, was ein Widerspruch dazu wäre, dass K schon maximale Länge hat. Also muss $a = b$ und der Kantenzug geschlossen sein.

Angenommen, es gäbe jetzt eine Kante k, die nicht von K verwendet wird. Da der Graph zusammenhängend ist, finden wir auch eine Kante $\tilde{k}$, die zwar nicht von K verwendet wird, die aber an K angrenzt. Wir können also, da K geschlossen ist, erst $\tilde{k}$ und dann K durchlaufen, und hätten wieder einen längeren Kantenzug gefunden, im Widerspruch zu der Maximalität von K. Also muss K schon alle Kanten enthalten und ist daher ein geschlossener eulerscher Spaziergang. □

Aufgabe 4.

Was ist das Kriterium dafür, dass es (nicht geschlossene) eulersche Spaziergänge in einem Graphen gibt?

Diese Aufgabe lässt sich folgendermaßen lösen: Sei K ein nicht geschlossener eulerscher Spaziergang von a nach b. Dann kann man eine Kante von b nach a zu dem Graphen hinzufügen, und diese Kante nach K durchlaufen. So erhält man in dem neuen Graphen einen geschlossenen eulerschen Spaziergang. Dabei wurden der Eingangsgrad von a und der Ausgangsgrad von b um 1 erhöht. Jeder geschlossene eulersche Spaziergang in dem neuen Graphen ist dann auch wieder ein eulerscher Spaziergang in dem alten Graphen, der von a nach b läuft. Es gibt also in dem alten Graphen genau dann eulersche Spaziergänge, wenn es in dem neuen Graphen geschlossene eulersche Spaziergänge gibt. Das heißt:

Satz.

Man hat folgende Kriterien für die Existenz nicht notwendig geschlossener eulerscher Spaziergänge in einem Graphen:

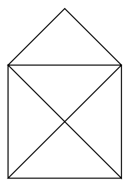
- Ein zusammenhängender ungerichteter Graph hat genau dann einen eulerschen Spaziergang von a nach b, wenn alle Knoten außer a und b geraden Grad und wenn a und b entweder beide ungeraden Grad haben oder $a = b$ ist und a geraden Grad hat.
- Ein zusammenhängender gerichteter Graph hat genau dann einen eulerschen Spaziergang von a nach b, wenn für alle Knoten außer a und b Eingangs- und Ausgangsgrad übereinstimmen, und wenn entweder für a der Ausgangsgrad um 1 höher als der Eingangsgrad und für b der Eingangsgrad um 1 höher als der Ausgangsgrad ist, oder wenn $a = b$ ist und der Eingangsgrad von a gleich dem Ausgangsgrad von a ist.

Aufgabe 5.

Wie könnte man mit dem Beweis des Satzes von Euler und Hierholzer einen eulerschen Spaziergang finden?

Aufgabe 6.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Haus vom Nikolaus in einem Zug zu zeichnen:



Die Graphentheorie hilft hier, um zu sehen, dass es nur Wege von links unten nach rechts unten oder von rechts unten nach links unten geben kann. Die Wege von rechts unten nach links unten sind Spiegelungen von Wegen von links unten nach rechts unten, das heißt, man muss nur die Wege von links unten nach rechts unten zählen und das Ergebnis mit 2 multiplizieren. Die Wege kann man jetzt mit Fallunterscheidungen zählen; es sind 44 Wege, also insgesamt 88 Möglichkeiten, das Haus vom Nikolaus zu zeichnen.

Aufgabe 7.

Kann man in folgendem Stadtplan von Königsberg durch die Stadt laufen und dabei jede Brücke genau einmal überqueren?