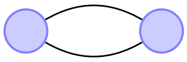
Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klasse 6/7

Zirkelzettel vom 16. Juni 2015

Für diesen Zirkel haben Graphen zwischen zwei Knoten höchstens eine Kante. Nicht erlaubt ist also folgender Graph:

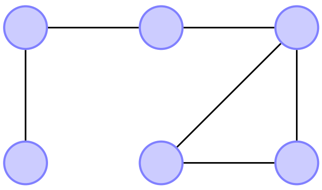


Ein *Kreis* in einem Graphen ist ein Kantenzug mit gleichem Anfangs- wie Endpunkt, der keine Kante mehrfach benutzt. Ein *Wald* ist ein Graph, der keine Kreise enthält. Ein *Baum* schließlich ist ein zusammenhängender Wald.

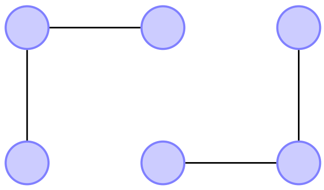
Aufgabe 1.

Welche der folgenden Graphen sind Wälder? Welche sind Bäume?

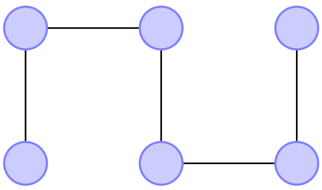
a)



b)



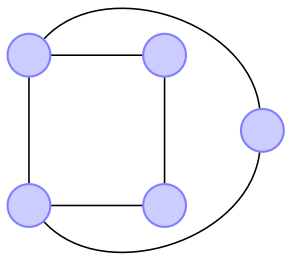
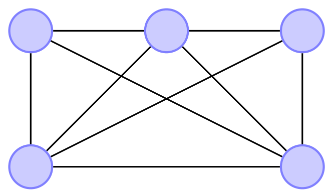
c)



Ein *Spannbaum* in einem Graphen ist ein Baum, der alle Knoten des Graphen enthält.

Aufgabe 2.

Finde Spannbäume in folgenden Graphen:

a)  b) 

Aufgabe 3.

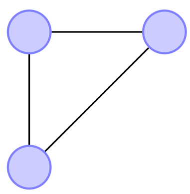
Warum hat jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum?

Eine *Kostenfunktion* ordnet jeder Kante e einen Wert c_e zu. Wir wollen einen Spannbaum mit minimalen Kosten (also einen *minimalen Spannbaum*) finden. Man kann sich die Situation folgendermaßen vorstellen: Die Knoten des Graphen sind Städte, die alle an ein gemeinsames Stromnetz angebunden werden sollen. Die Kosten einer Kante sind die Kosten für die jeweilige Verbindung der beiden Städte. Wir wollen alle Städte miteinander verbinden, und das so günstig wie möglich. Dieses Ziel wird mit einem minimalen Spannbaum erreicht.

Wenn nichts anderes gesagt wird, soll hier n die Anzahl der Knoten und m die Anzahl der Kanten bezeichnen. Wir beginnen mit zwei Beobachtungen:

- *Falls $m \geq n$ ist, gibt es mindestens einen Kreis.* Diese Aussage wird mit einem Beweisverfahren begründet, das sich *vollständige Induktion* nennt. Die Idee dabei ist, dass man die Behauptung für kleine Zahlen leicht beweisen kann und dass man aus der Aussage für eine Zahl n auch schon auf die Aussage für $n+1$ schließen kann. Dann kann man sich sozusagen „hochhangeln": Die Aussage gilt für $n = 1$, also muss sie auch für $n = 1+1 = 2$ gelten, also auch für $n = 2+1 = 3$ und so weiter. Dieses Verfahren wird in der Mathematik sehr häufig eingesetzt und ist meistens nützlich, wenn Aussagen über alle natürlichen Zahlen bewiesen werden sollen.

  Wie sieht das in unserer Situation konkret aus? Nun, für $n = 1$ und $n = 2$ tritt der Fall $m \geq n$ überhaupt nicht auf, da keine Kante von einem Knoten zu sich selbst und keine zwei Kanten zwischen zwei verschiedenen Knoten verlaufen dürfen. Die einzige Möglichkeit, wie $m \geq n$ für $n = 3$ erfüllt sein kann, ist folgende:

  In diesem Graphen gibt es offensichtlich einen Kreis.

Nun nehmen wir an, dass die Aussage für Graphen mit $n-1$ Knoten schon wahr ist und wir einen Graphen G mit n Knoten und $m \geq n$ Kanten gegeben haben. Wir müssen jetzt zeigen, dass G einen Kreis hat. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann existiert ein Knoten vom Grad 1. (Man kann nämlich von einem beliebigen Knoten entlang einem beliebigen Kantenzug loslaufen. Wenn man darauf achtet, keine Kante doppelt zu benutzen, dann kommt man schließlich an einem Knoten an, von dem aus man nicht weiterlaufen kann. Da es keinen Kreis gibt, muss das bedeuten, dass die einzige Kante, die an den Knoten grenzt, diejenige ist, mit der man in den Knoten hineingelaufen ist. Wir haben also einen Knoten vom Grad 1 gefunden.) Der Graph G', der entsteht, wenn man diesen Knoten und seine Kante aus G herausnimmt, hat $n-1$ Knoten und $m-1$ Kanten und daher einen Kreis.

- *Falls $m \leq n-2$ ist, ist der Graph unzusammenhängend.* Auch diese Aussage wird mit vollständiger Induktion bewiesen: Für $n = 1$ kann nicht $m \leq n-2$ sein, und für $n = 2$ und $m = 0$ ist es klar, dass der Graph nicht zusammenhängt. Im allgemeinen Fall haben wir wieder einen Graphen G mit $m \leq n-2$ gegeben und nehmen an, er wäre zusammenhängend. Indem wir jeweils eine Kante aus jedem auftretenden Kreis entfernen, bleibt der Graph zusammenhängend und wird kreisfrei. Die Bedingung $m \leq n-2$ bleibt natürlich auch wahr, da m ja nur kleiner wird, wenn man Kanten entfernt. Daher existiert wieder ein Knoten vom Grad 1, wie vorher ist der Graph G' unzusammenhängend, und damit ist auch G unzusammenhängend.

Aufgabe 4.

Beweise, dass jeder Spannbaum in einem Graph mit n Knoten genau $n-1$ Kanten haben muss.

Es gibt jetzt eine weitere Beobachtung: Für einen minimalen Spannbaum T gelten folgende Aussagen:

- Falls e eine Kante ist, die nicht in T liegt, dann hat $T+e$ einen Kreis K und e ist die teuerste Kante auf K.
- Falls e eine Kante in T ist, dann hat $T-e$ zwei Komponenten und e ist die billigste Kante, die diese beiden Komponenten verbindet.

Diese Beobachtung führt zu folgendem Algorithmus:

Eingabe: Graph G mit Kostenfunktion
Ausgabe: Minimaler Spannbaum T in G

$S \leftarrow$ alle Knoten, keine Kanten, $T \leftarrow G$
while $S \neq T$ **do**
  Wende eine der folgenden Regeln an:
  - *Regel 1:* Wähle Komponente C von S und Kante $e \in T$, $e \notin S$, die aus C hinausführt und unter diesen Kanten minimales Gewicht hat. Setze $S \leftarrow S + e$.
  - *Regel 2:* Wähle Kreis K von T und Ecke $e \in K$, $e \notin S$ mit maximalem Gewicht. Setze $T \leftarrow T - e$.

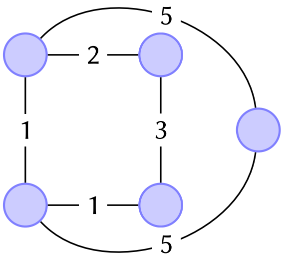
end while
return T

Nun muss man nur noch überprüfen, dass dieser Algorithmus tatsächlich korrekt arbeitet. Dazu überlegt man sich, dass in jedem Schritt ein minimaler Spannbaum existiert, der „zwischen“ S und T liegt. Wenn am Ende dann $S = T$ ist, dann muss T (bzw. S) also schon selbst ein minimaler Spannbaum sein.

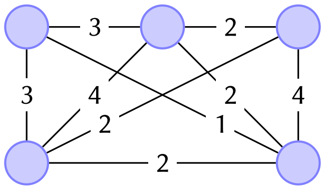
Aufgabe 5.

Finde minimale Spannbäume in folgenden Graphen:

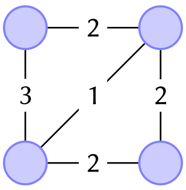
a)



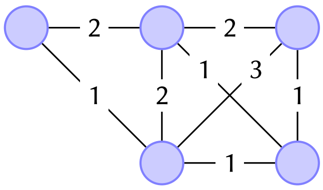
b)



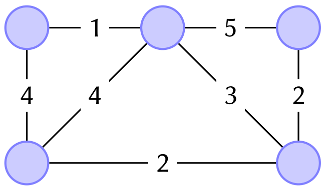
c)



d)



e)



f)