Penroseparkettierungen

Julia Hörmann

Technische Universität München

Seminar: Kombinatorische und Algebraische Strukturen in der Geometrie

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
Dipl.-Inf. Martin von Gagern

im Sommersemester 2010

Einleitung

Eine Penroseparkettierung ist eine nicht periodische Parkettierung einer Ebene.
Man versteht unter einer Parkettierung im Raum E^n eine abzählbare Familie von geschlossenen Mengen, den Kacheln, wobei sich die Kacheln nicht überlappen dürfen und zusammen die ganze Ebene ergeben. Nicht periodisch bedeutet, dass die Parkettierung nicht translationsinvariant ist. Im periodischen Fall könnte man die gesamte Ebene um einen bestimmten Faktor in eine Richtung verschieben und würde deckungsgleich mit der ursprünglichen Ebene sein. Dies ist bei einer nicht periodischen Parkettierung nicht möglich (Abbildung 1).

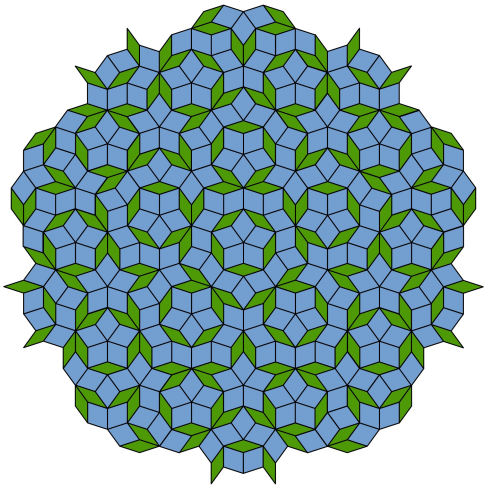

Abbildung 1: Nichtperiodische Parkettierung

Geschichte

Giri-Kacheln

In der islamischen Kultur gab es im 13 Jh. nach Christus fünf verschiedene Kacheln, die zu nicht periodischen Parkettierungen gelegt wurden. Diese Girih-Kacheln (Abbildung 2) bestehen aus einem regulären Zehneck, einen regulären Fünfeck, einer Raute, einem lang gezogenen Sechseck und einem nicht konvexen Sechseck in Form einer Fliege. Ein bekanntes Beispiel für eine nicht periodische Parkettierung der islamischen Kultur findet man im Darb-i Imam Schrein in Isfahan im Iran (Abbildung 3), eine andere schöne Parkettierung im Seljuk Mama Hatun Mausoleum in Tercan in der Türkei. Diese Parkettierungen wurden aber erst vor wenigen Jahren von Peter Lu mit nicht periodischen Pflasterungen in Verbindung gebracht.

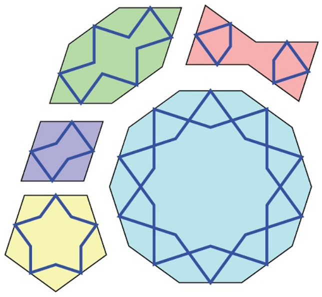

Abbildung 2: Girih-Kacheln

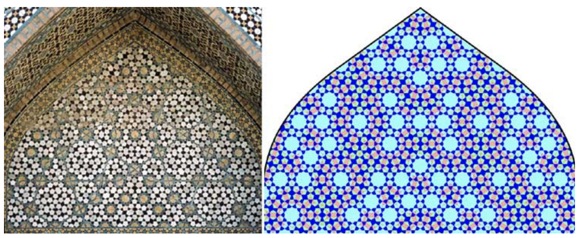

Abbildung 3: Darb-i Imam Schrein in Isfahan, Iran

Kepler

Anfang des 17. Jahrhunderts beschäftigte sich Kepler mit nicht periodischen Parkettierungen. Er fand eine Parkettierung (Abbildung 4) über die er schrieb, dass wenn man sie weiter fortsetzen würde, zwangsläufig gewisse Unregelmäßigkeiten im Parkett zugelassen werden müssten.

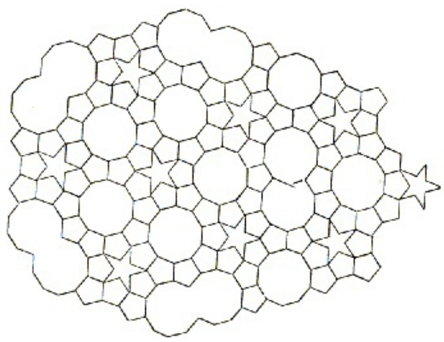

Abbildung 4: Keplers nichtperiodische Parkettierung

Penrose

Im Jahr 1974 fand Roger Penrose verschiedene nicht periodische Parkettierungen, die Penroseparkettierungen. Der große Unterschied zu seinen Parkettierungen und denen von Kepler liegt vor allem darin, dass Penroseparkettierungen die gesamte Ebene ausfüllen, während Kepler schon nach einigen Kacheln aufgab (Abbildung 5). Eine zweite wichtige Eigenschaft, die Penrose entdeckte, war, dass diese Parkettierungen Substitutionsparkettierungen sind. Würde man bei Keplers Parkettierung die Zehnecke noch weiter unterteilen und die Parkettierung über die gesamt Ebene fortsetzen, so würde man zur ersten Penroseparkettierung kommen.

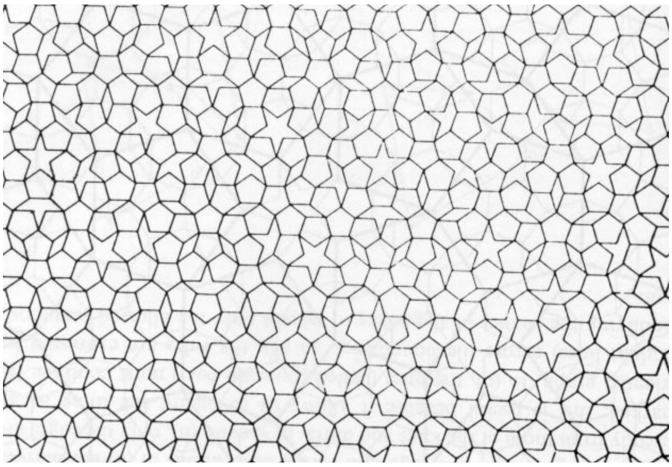

Abbildung 5: Erste nicht periodische Parkettierung von Penrose

Penroseparkettierungen

Substitutionparktettierungen

Jede Penroseparkettierung ist also eine Substitutionsparkettierung. Sie lässt sich nicht nur wie im Beispiel von Keplers Parkettierungen in verschiedene Kacheln zerlegen, die möglicherweise noch nicht im Parkett vorkommen. Es ist auch möglich, wenn eine Parkettierung vorliegt, die bestimmten Ausgangskacheln verwendet, diese Parkettierung zu zerlegen und zwar in Kacheln, die nur die Formen der Ausgangskacheln haben. Im Bild (Abbildung 6) sieht man zum Beispiel wie ein Fünfeck in weitere Fünfecke zerlegt wird und Sterne in weitere Sterne. Die Kacheln der kleinern Generation können auch über die Kanten der großen Kacheln zusammenhängen. Dies sieht man in Abbildung 6 am Beispiel der Rauten.

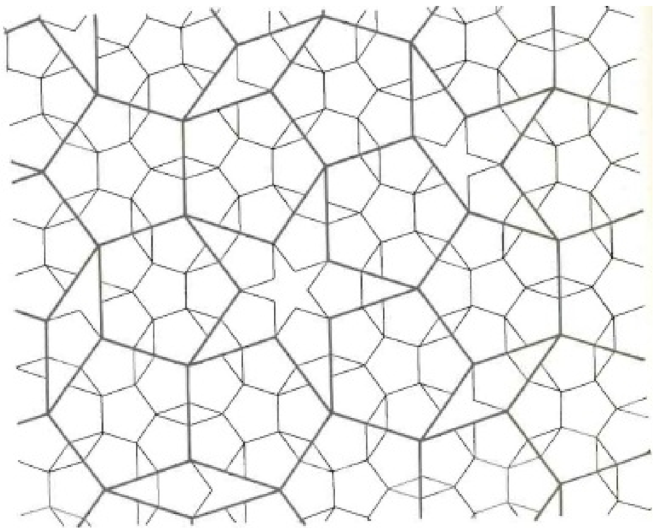

Abbildung 6: Substitutionsparkettierung

Kite and Dart

Penrose erkannte weiter, dass es möglich ist eine nicht periodische Parkettierung zu konstruieren, wenn nur zwei verschiedene Ausgangskachelen verwendet werden. Ein Beispiel hierfür sind die Kites and Darts. Es ist jedoch nicht erlaubt ist, diese willkürlich aneinander zu legen, sondern es müssen bestimmte Regeln eingehalten werden. Diese Regeln werden Matching Rules genannt.
Eine Aneinanderlegung ist nur erlaubt, wenn auch die Farben der Ecken übereinstimmen.

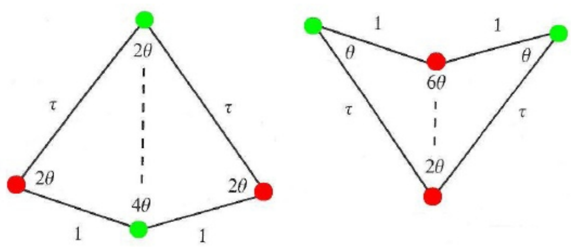

Abbildung 7: Kite and Dart

Rauten

Von einer Parkettierung aus Kites and Darts kann man wiederum durch Substitution zu zwei Rauten gelangen, die ebenfalls die Parkettierung nicht periodisch pflastern. Diese beiden Rauten haben die Eigenschaft (auch die Kites and Darts), dass ihre Winkel alle Vielfache von $\theta = \pi / 5$ sind.

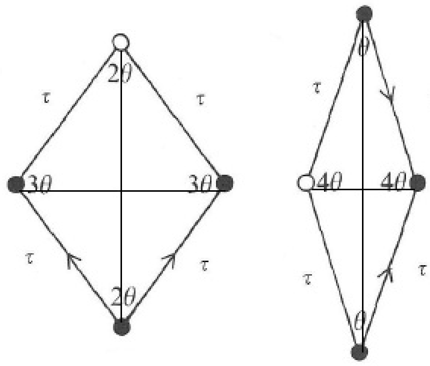

Abbildung 8: Die T Raute links und die t Raute rechts

Matching Rules

Auch bei diesen beiden Ausgangskachelen gibt es verschiedene Regeln, die eingehalten werden müssen. Die Ecken können verschiedene Farben haben, es können Pfeile auf den Kanten sein, die übereinstimmen müssen und es kann die Form der Kacheln ein wenig verändert sein. Es dürfen nur genau die Kacheln aneinander gelegt werden, die auch aneinander passen. Eine andere Möglichkeit ist, auf den Kacheln Linien einzuzeichnen, die gerade über die Kacheln fortgesetzt werden müssen (Abbildung 9).

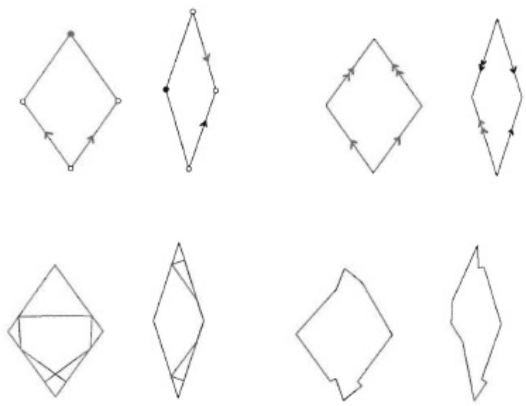

Abbildung 9: Matching Rules

Vertex Atlas

Diese Regeln arbeiten jedoch nicht automatisch. Das heißt es könnte sein, dass man zu einer Konstruktion gelangt, die nicht weiter fortsetzbar ist. Diese Pflasterung nennt man lokal legal. Um sie weiter zu vergrößern muss man einige Kacheln entfernen. Eine Konstruktion die auch fortgesetzt werden kann nennt man global legal.

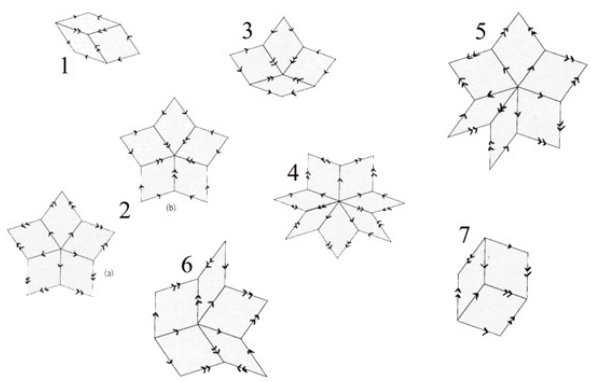

Abbildung 10: Die sieben verschiedenen Vertex Stars

Man nennt die Rauten, die sich eine Ecke teilen, also alle Rauten um eine Ecke, einen Vertex Star.
Es gibt nur 7 verschiedene global legale Vertex Stars. Alle zusammen nennt man den Vertex Atlas (Abbildung 10). Das heißt man findet in einer Penroseparkettierung nur diese sieben verschiedene Vertex Stars. Um dies zu beweisen müsste man straight forward alle Möglichkeiten durchprobieren, das heißt jede dieser sieben Vertex Stars prüfen, ob er auch weiter fortgesetzt werden kann und zwar nur mit anderen Vertex Stars von diesen sieben.

Vertex Atlas aus Voronoï-Zellen

Diese sieben Ecken können auch anders definiert werden. Wenn man die Ecken in einer Penroseparkettierung betrachtet als eine Delone Menge, dann kann man um jede dieser Ecken eine Voronoï-Zelle legen. Es entstehen dann genau sieben verschiede Zellen. Nun kann man auch diese als Ausgangskacheln nehmen und eine Parkettierung konstruieren, wobei aber nur Kanten aneinander gelegt werden dürfen, die auch dieselbe Länge besitzen (Abbildung 11).

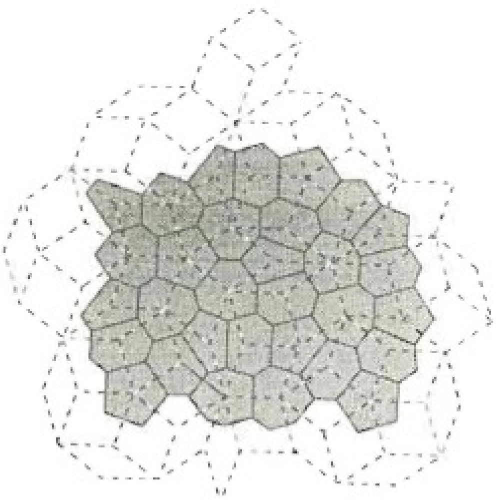

Abbildung 11: Konstruktion durch Voronoï-Zellen

Konstruktionsmethoden

Up-down-Generaton

Eine andere Konstruktionsmöglichkeit einer Penroseparkettierung ist die Up-down Generation. Diese beruht wieder auf dem Prinzip der Substitution. Zur Vereinfachung bezeichnet man die dicke Raute als T Raute und die schmale als t Raute (Abbildung 8). Die T Raute lässt sich zerlegen in zwei T Rauten und einer t Raute der kleineren Generation (Abbildung 13). Die t Raute kann man hingegen zerlegen in eine T Raute und eine t Raute (Abbildung 13).

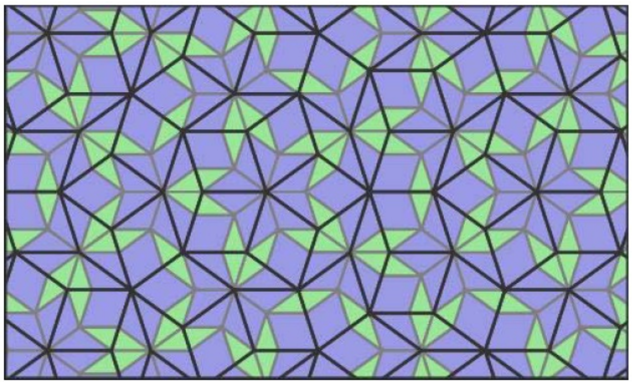

Abbildung 12: Zerlegung einer Penroseparkettierung

In einer Formel sieht dies so aus: T'=2T+t und t'=T+t. Dazu kann man sich folgende Matrix definieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix kann man herauslesen, dass es in einer Parkettierung $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ mehr T Rauten gibt als t Rauten. Was genau der goldene Schnitt ist.

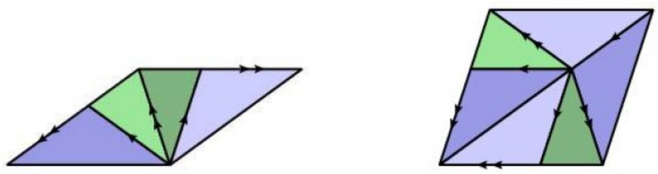

Abbildung 13: Zerlegung der Rauten

Wenn man diese Rauten zerlegt erhält man nur halbe Rauten, das heißt Dreiecke die zusammengesetzt die kleineren Rauten ergeben. Deshalb ist es sinnvoller nicht mehr von Rauten auszugehen, sondern von Dreiecken. So erhält man insgesamt vier verschiedene Dreiecke, da man noch die Matching Rules mitberücksichtigen muss. Dabei sind die zwei Dreieck der selben Form spiegelverkehrt.

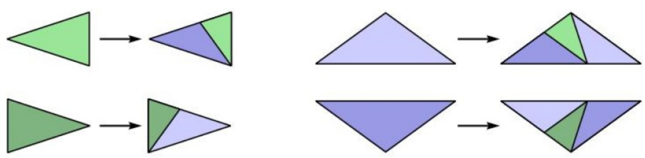

Abbildung 14: Dekomposition

Das Zerlegen der Rauten oder der Dreiecke ist immer eindeutig, das heißt es gibt nur eine einzige Möglichkeit die Dreiecke um eine Generation zu verkleinern.

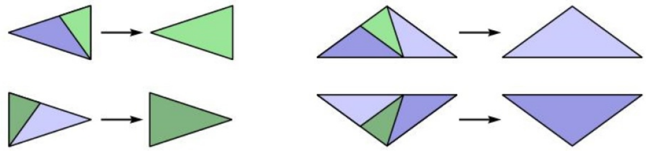

Abbildung 15: Komposition

Umgekehrt gibt es aber mehrere Möglichkeiten ein Dreieck zu vergrößern. Geht man zum Beispiel von einem hellgrünen Dreieck aus (Abbildung 15). Da es im ersten und im zweiten Fall in dem Bild vorkommt, hat man zwei Möglichkeiten dieses zu vergrößern. Zum einen kann man durch hinzufügen eines dunkelblauen Dreiecks wiederum ein hellgrünes Dreieck erzeugen, zum anderen kann man ein dunkelblaues und ein hellblaues Dreieck hinzufügen und erhält ein hellblaues Dreieck von der höheren Generation.

Man kann den verschieden Vergrößerungsschritten verschiedene Bezeichnungen geben, also verschiedene Funktionen, welche die verschiedenen Schritte ausführen.

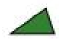

Abbildung 16: Ausgangsdreieck

Um eine Penroseparkettierung zu konstruieren die eine Fläche bedeckt, genügt es ein Folge aufzuschreiben, die aus den verschieden Funktionen besteht. Diese Funktionenfolge wird uns immer die Vergrößerung definieren, die ausgeführt werden soll. Bedeckt das größte Dreiecke, also der letzte Schritt der Folge, die gesamte Fläche, falls die Fläche endlich ist, so verkleinert man die Dreiecke wieder. Die Anzahl der Schritte die Dreiecke zu verkleinern ist genauso groß wie die Anzahl der Funktionen, welche die Dreiecke vergrößern. Dies ist alles wohl definiert, da das Verkleinern eindeutig ist. Ist die Fläche nicht endlich, kann man einfach eine unendliche Funktionenfolge definieren, sodass die Parkettierung die gesamte Fläche ausfüllt.

Abbildung 17: Erster Vergrößerungsschritt

Abbildung 18: Zweiter Vergrößerungsschritt

Aus dieser Konstruktionsmethode lässt sich ein wichtiger Satz beweisen: Es gibt unabzählbar viele nicht kongruente Penroseparkettierungen der Ebene.
Um dies zu beweisen definiert man eine Funktionenfolge. Durch Up-Down Generation erzeugt uns die Funktionenfolge eine Penroseparkettierung, die auch eindeutig ist, da Dekomposition eindeutig ist. Also definiert eine Funktionenfolge eine eindeutige Penroseparkettierung. Umgekehrt gilt dies nicht, da eine Penroseparkettierung von verschieden Funktionenfolgen erzeugt werden kann.
Die Frage ist nun wie hängen die Funktionenfolgen, welche die selbe Penroseparkettierung erzeugen,voneinander ab. Die Antwort ist einfach, wenn sie ab einer gewissen Term nur identische Folgenglieder haben. Das heißt bis zu einem endlichen Term können

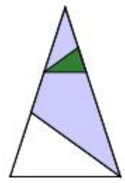

Abbildung 19: Dritter Vergrößerungsschritt

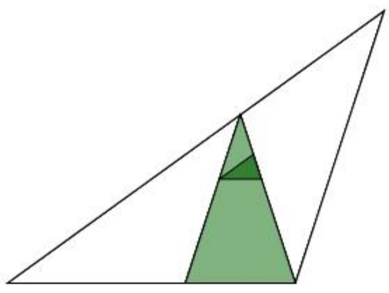

Abbildung 20: Vierter Vergrößerungsschritt

sie verschieden sein, aber danach stimmen sie überein.
Dies kann man sagen, denn sei eine weitere Parkettierung definiert durch die Funktionenfolge, wo die ersten unterschiedlichen Glieder gestrichen werden. Diese Parkettierung kann man eindeutig zerlegen und erhält so für beide Funktionenfolgen die selbe Parkettierung. Umgekehrt kann man sagen, dass wenn zwei Funktionenfolgen dieselbe Penroseparkettierung erzeugen, dass die beiden Ausgangsdreiecke der Folgen nur endlich weit voneinander entfernt sein dürfen, da nach endlich vielen Schritten ein Dreieck beide Ausgangsdreiecke enthalten muss und ab diesem Dreieck sind die Funktionenfolgen identisch.
Nun kann man alle Funktionenfolgen, die eine identische Penroseparkettierung definieren, also alle, die ab einem Term übereinstimmen, einer Äquivalenzklasse zuordnen. Von jeder dieser Äquivalenzklassen nimmt man einen Vertreter und schreiben ihn auf eine Liste. Durch das Kantorsche Diagonalisierungsprinzip kann man sagen, dass die Liste nie vollständig sein wird, da man immer neue Folgen finden kann, die nicht auf der Liste sind.
Dies beweist den Satz.

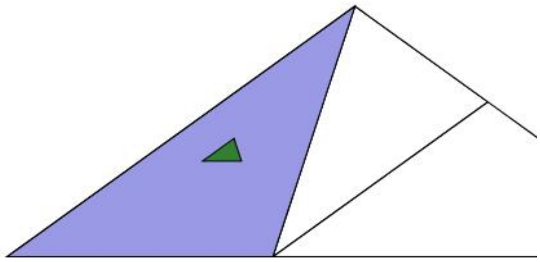

Abbildung 21: Fünfter Vergrößerungschritt

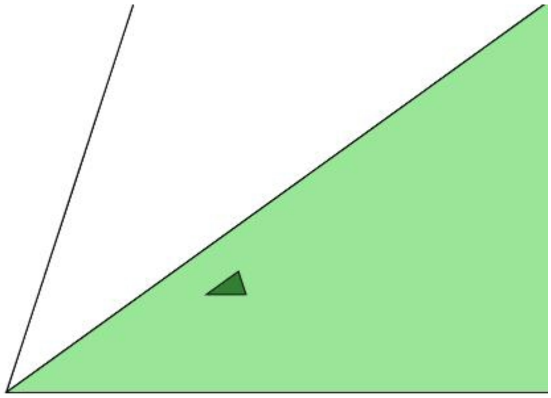

Abbildung 22:Sechster Vergrößerungsschritt

Pentagridmethode

Eine weitere Methode ist die Pentagrid-Methode. Betrachtet man eine Penroseparkettierung genauer, stellt man fest, dass man Bänder durch die Parkettierung legen kann, so dass die Rauten immer parallele Kanten besitzen (Abbildung 27). Das heißt, da die Rauten parallele Kanten haben und immer zwei Rauten eine solche Kante sich teilen, ziehen sich die parallelen Linien über die gesamte Parkettierung fort. Es gibt genau fünf verschiedene solcher paralleler Linien.

Um diese zu definieren kann man einfach eine Gerade durchziehen, die senktrecht auf diesen parallelen Kanten steht (Abbildung 23). Führt man dies bei Allen durch, erhält man eine Konstruktion von fünf Familien von parallelen Linien. Diese Familien nennt man Grid und da es in diesem Fall genau fünf sind nennt man diese Konstruktion einen Pentagrid (Abbildung 24).

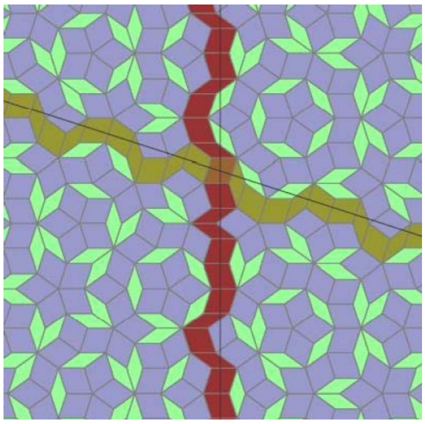

Abbildung 23: Bänder und senkrechte Linien zu den parallelen Kanten

Dieses Pentagrid kann man nun noch einfacher definieren und zwar wenn man eine Familie von parallelen Linien definiert durch den Vektor, der senkrecht darauf steht. Also erhält man am Schluss nur fünf Vektoren die im Falle des Pentagrids genau in die

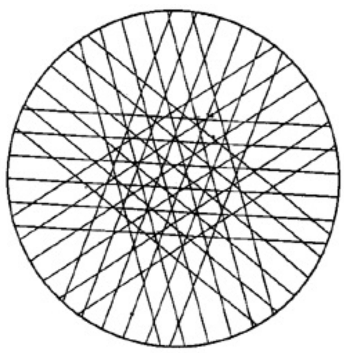

Abbildung 24: Pentagrid

Ecken eines regulären Pentagons zeigen. Man muss aber noch einen Verschiebungsvektor definieren, da beim Pentagrid keine drei Geraden sich in einem Punkt schneiden dürfen. Dieser verschiebt die einzelnen Familien von parallelen Geraden um einen bestimmten Wert.

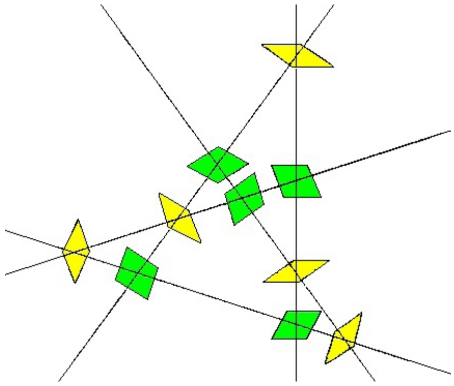

Abbildung 25: Konstruktion der Rauten an den Schnittpunkten

Ausgehend von den parallelen Geraden erhält man die Penroseparkettierung indem man die Schnittpunkte im Pentagrid genauer betrachtet. Je nachdem wie sich die Linien schneiden erhält man verschiedene Rauten, die man zusammenschieben muss um die Penroseparkettierung zu erhalten. Im Bild (Abbildung 25) sieht man ein Beispiel einer Konstruktion. In Abbildung 25 sind die noch nicht zusammenhängenden Rauten von Abbildung 24 vergrößert und zusammen geschoben worden.

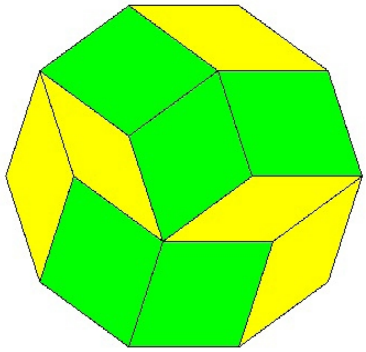

Abbildung 26: Zusammenschieben der Rauten aus der Schnittpunktkonstruktion von Abbildung 25

Geht man jetzt noch weiter dann kann man den Zwischenräumen zwischen den einzelnen parallelen Linien ganze Zahlen zuordnen (Abbildung 27). Macht man dies bei allen 5 verschiedenen Familien von parallelen Geraden, dann hat am Ende jede Fläche im Pentagrid die von verschiedenen Geraden eingeschlossen wird 5 Zahlen. Addiert man diese 5 Zahlen erhält man als Summe nur die Zahl 1,2,3,4 oder 5 bilden.
Bei einem bestimmten Verschiebungsvektor, bei dem die Einträge die Summe ½ bilden, kommen nur die Zahlen 1 bis 4 vor. Der Verschiebunsvektor der die Summe ½ bildet garantiert uns auch, dass unsere Duale Parkettierung eine Penroseparkettierung ist.

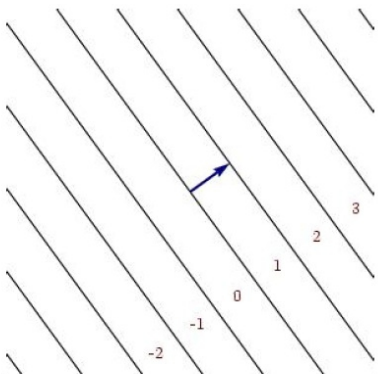

Abbildung 27: Beispiel der Beschriftung zwischen den parallelen Geraden

Projektionsmethode

Die letzte Konstruktionsmethode ist die Projektionsmethode. Dies ist die Pentagridmethode ins 5-dimensionale übersetzt. Die Vektoren, welche die parallelen Geraden definieren sind nun die 5 Basisvektoren im 5-dimensionalen und der Verschiebungvektor wird zum Translationsvektor.

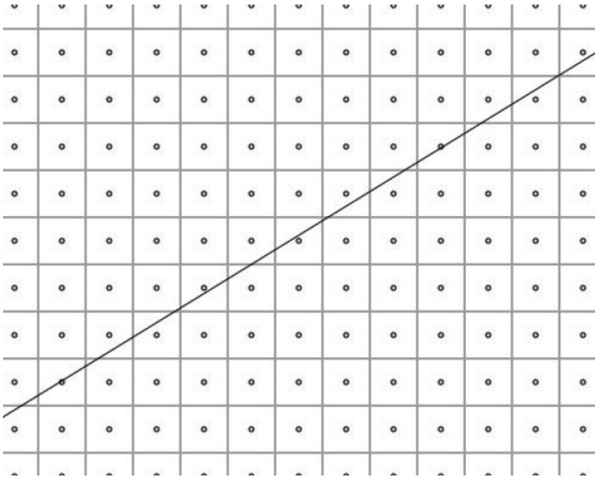

Abbildung 28: Gerade in Punktegitter mit Voronoï-Zellen

Den 5-dimensionalen Raum stattet man nun mit Gitterpunkten aus und zwar gehören alle Punkte, also 5 Tupel von Zahlen ins Gitter, bei denen die einzelnen Einträge nur aus ganzen Zahlen bestehen. Um dies anschaulicher darzustellen, betrachtet man es im zweidimensionalen. In diesen Raum legt man eine Ebene, oder im zweidimensionalen Fall eine Gerade.
Die Ebene und die Gerade müssen bestimmte Bedingungen erfüllen, das heißt in einem bestimmten Winkel hineingelegt werden. Nun betrachtet man nur die Gitterpunkte, von denen die Voronoï-Zelle (Abbildung 28) die Gerade schneidet und projizieren diese Punkte orthogonal auf die Gerade oder im 5-dimensionalen Fall auf die Ebene (Abbildung 29).

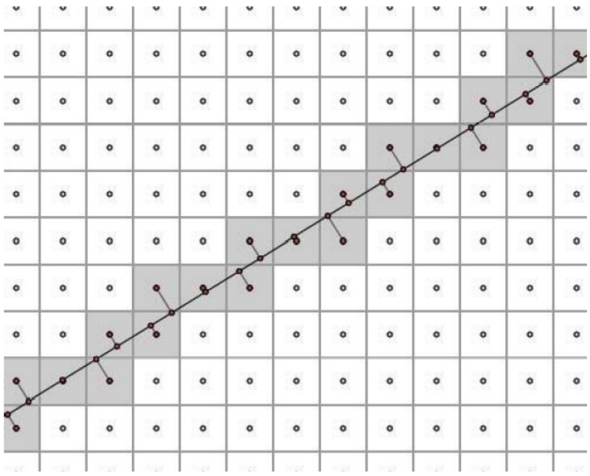

Abbildung 29: Projektion der Punkte auf die Gerade

Die Schnittpunkte mit der Ebene stellen die Ecken der Rauten dar, jetzt müssen alle Punkte, die an die Voronoï-Zellen angrenzen, auf der Ebene verbunden werden und man erhält die Penroseparkettierung. Im zweidimensionalen sind die Punkt auf der Gerade die Enden der zweidimensionalen Kacheln.

Quasikristalle in der Natur

Penroseparkettierung sind jedoch nicht nur mathematisch attraktiv, sondern sie kommen auch in der Natur vor. Zirka 10 Jahre nachdem Penrose die Parkettierung gefunden hat, hat man erstmals durch Röntgenstrukturanalyse auch nichtperiodische Muster in der Natur entdeckt. Dies sind vor allem Aluminiumlegierungen, die sehr stark erhitzt und dann sehr schnell wieder abgekühlt wurden, sodass sich keine periodischen Kristallmuster bilden konnten. Man nennt solche Kristalle mit nichtperiodischen Mustern Quasikristallen. Sie sind aber nur metastabil, das heißt würde man sie noch mal erhitzten und langsam abkühlen lassen würden sich wieder periodische Kristallmuster bilden.

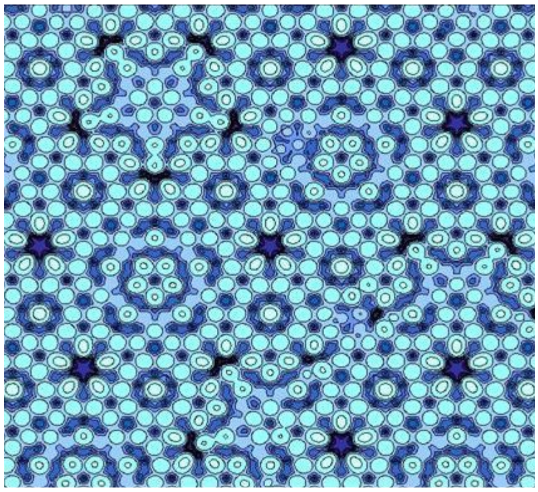

Abbildung 30: Atommodell eines Ag-Al Quasikrisall

Quellen:

[1] SENECHAL MARJORIE, Quasicrystals and Geometry,Cambridge University Press, 1996, p. 160 to 200.

[2] AUSTIN DAVID, Penrose Tilings Tied up in Ribbons, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons, 09.06.2010

Quellen der Bilder:

[3] HWANG ERIC, Penrose Tilings and Quasicrystals, http://intendo.net/penrose/images.html, 30.06.2010

[4] „Penrose Tiling“, http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling, 30.06.2010

[5] „Girih tiles“, http://en.wikipedia.org/wiki/Girih_tiles, 30.06.2010

[6] AUSTIN DAVID, Penrose Tilings Tied up in Ribbons, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons, 30.06.2010

[7] „On de Bruijn Grids and Tilings“, http://www.mathpages.com/home/kmath621/kmath621.htm, 30.06.2010

[8] BREUER J., MÄURER T., MÜLLER M., Penrose-Parkettierungen, TU Dresden, HS Geometrie WS 07/08 (Prof. Weiß), 2007/2008

[9] DAMBECK HOLGER, Moschee-Baumeister waren westlichen Mathematikern 500 Jahre voraus, http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,468108,00.html, 30.06.2010