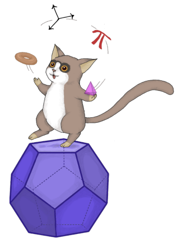
Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klasse 6/7



Zirkelzettel vom 3. Februar 2015

Schauen wir uns folgenden Beweis an: *Auf jeden Fall ist* $-2 = -2$ *und daher auch* $4-6 = 1-3$ *sowie* $4 - 6 + \frac{9}{4} = 1 - 3 + \frac{9}{4}$. *Mit der zweiten binomischen Formel erhält man, dass* $(2 - \frac{3}{2})^2 = 4 - 6 + \frac{9}{4}$ *und* $(1 - \frac{3}{2})^2 = 1 - 3 + \frac{9}{4}$ *ist. Also muss* $(2 - \frac{3}{2})^2 = (1 - \frac{3}{2})^2$ *gelten. Das ist der Fall, wenn* $2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}$ *ist. Es folgt* $2 = 1$.

Was ist falsch an diesem Beweis? (Oder müssen wir akzeptieren, dass $2 = 1$ ist. Das wäre dann aber noch nicht die schlimmste Konsequenz: Wenn man jetzt auf beiden Seiten 1 abzieht, dann erhält man $1 = 0$. Bei der Multiplikation mit einer beliebigen Zahl x folgt $x = 0$. Also sind alle Zahlen gleich.)

Das Problem ist ein logischer Fehler: Es ist zwar wahr, dass $(2 - \frac{3}{2})^2 = (1 - \frac{3}{2})^2$ ist, wenn $2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}$ gilt. Die Umkehrung stimmt aber nicht: Nur weil $(2 - \frac{3}{2})^2 = (1 - \frac{3}{2})^2$ ist (das ist wahr, denn beide Seiten ergeben $\frac{1}{4}$), muss nicht $2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}$ sein (auf der linken Seite steht $+\frac{1}{2}$, und auf der rechten $-\frac{1}{2}$). Diese Art von Fehler ist so beliebt, dass er sogar einen Namen hat, nämlich *Bejahung des Konsequens*.

Da logische Fehler einfach und schnell passieren, wollen wir feststellen, wie wir die Gültigkeit eines Arguments überprüfen können. Dazu betrachten wir nicht notwendigerweise mathematische, sondern auch alltägliche Argumente. Ein Beispiel ist das Folgende:

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.
Der Motor läuft.

Benzin ist im Tank.

Die zwei Sätze über dem horizontalen Strich sind die sogenannten *Prämissen*: Wir nehmen an, dass die Prämissen wahre Aussagen sind. Ob das tatsächlich der Fall ist, soll uns im Rahmen der logischen Untersuchungen nicht interessieren; allerdings ist es in der Praxis natürlich wichtig, dass die Prämissen tatsächlich wahr sind. Der Satz unter dem Strich heißt *Konklusion*: Das ist eine Aussage, deren Wahrheit mit Hilfe der Prämissen bewiesen werden soll. Man kann den Strich als eines der Wörter „also“ oder „folglich“ interpretieren.

Es gibt zwei wichtige Beobachtungen bei der Untersuchung solcher Argumente. Erstens gibt es Wörter, die eine Information ausdrücken; sie kommen üblicherweise in einem Argument mehrfach vor. Zweitens gibt es Wörter, die die Informationen verknüpfen: sogenannte *logische Ausdrücke*. Färbt man in dem obigen Argumente gleiche Informationen mit der gleichen Farbe und logische Ausdrücke mit rot ein, dann ergibt sich:

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.
Der Motor läuft.

Benzin ist im Tank.

Betrachten wir die zwei folgenden Argumente:

Bello ist ein Hund oder er bellt nicht.
Bello bellt.

Bello ist ein Hund.

Das reguläre Vieleck A hat drei bis sechs Ecken oder sein Innenwinkel ist nicht ein Teiler von $360°$.
Der Innenwinkel von A ist ein Teiler von $360°$.

A hat drei bis sechs Ecken.

Wenn man die drei bisherigen Argumente anschaut, sieht man, dass alle eine Gemeinsamkeit haben: Sie sind alle drei von der Form

Grün oder braun nicht.
Braun.

Grün.

Wir sagen, sie haben *dieselbe logische Form*.

Aufgabe 1.

Finde noch zwei weitere Argumente mit derselben logischen Form wie die Argumente bisher.

Wir wollen konkretisieren, was eine logische Form ist. Dazu gibt es vier Schritte, die man bei einem beliebigen Argument durchführen kann. Diese Schritte will ich bei dem Argument mit Bello verdeutlichen.

Im ersten Schritt werden *gleiche Argumente mit dem exakt gleichen Wortlaut ausgedrückt* (soweit das grammatikalisch möglich ist). In dem Bello-Argument bedeutet das, dass „er bellt" in der ersten Prämisse durch den Wortlaut „Bello bellt" ersetzt wird:

Bello ist ein Hund oder Bello bellt nicht.
Bello bellt.

Bello ist ein Hund.

Im zweiten Schritt *werden Informationen durch Satzkonstanten abgekürzt*. Das bedeutet, dass wir die grünen Aussage „Bello ist ein Hund" mit dem Buchstaben A abkürzen und die Aussage „Bello bellt" mit B:

$A :=$ „Bello ist ein Hund", $B :=$ „Bello bellt"

A oder B nicht.
B.

A.

Das Zeichen $:=$ bedeutet dabei, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird. Dagegen würde $=:$ bedeuten, dass die Seite rechts vom Gleichheitszeichen durch das definiert wird, was links steht.

Im dritten Schritt werden die *Satzkonstanten durch Satzvariablen* ersetzt:

p oder q nicht.
q.
---
p.

Die Zeichen p und q stehen jetzt nicht mehr für eine *konkrete* Aussage, sondern für eine *beliebige* Aussage. Man könnte also jetzt p überall durch die Aussage „Benzin ist im Tank" und q durch die Aussage „Der Motor läuft" ersetzen und würde unser erstes Argument erhalten.

Im vierten Schritt werden jetzt noch die *logischen Ausdrücke durch Symbole ersetzt*:

$p \vee \neg q$.
q.
---
p.

Dabei kann man die Symbole für die logischen Ausdrücke aus folgender Tabelle entnehmen:

logischer Ausdruck	Symbol
nicht p bzw. p nicht	$\neg p$
p oder q	$p \vee q$
p und q	$p \wedge q$
wenn p, dann q	$p \rightarrow q$
p genau dann, wenn q	$p \leftrightarrow q$

Aufgabe 2.

Führe die vier Schritte bei folgendem Argument durch:

Willi nimmt die Treppen oder er nimmt den Aufzug zu seiner Wohnung.
Wenn er die Treppen nimmt, wird er oben müde sein.
Wenn er den Aufzug nimmt, wird er den Beginn seiner Lieblingsserie verpassen.

Willi wird oben müde sein oder den Beginn seiner Lieblingsserie verpassen.

Lösung. Beim ersten Schritt wird „er nimmt den Aufzug zu seiner Wohnung" zu „er nimmt den Aufzug", „Willi nimmt die Treppen" zu „er nimmt die Treppen" und „Willi wird oben müde sein" zu „er wird oben müde sein". Außerdem wird in der Konklusion noch „er wird" eingefügt. Das Wort „dann", das bisher nicht explizit vorkam, wird ebenfalls eingefügt.

Er nimmt die Treppen oder er nimmt den Aufzug.
Wenn er die Treppen nimmt, dann wird er oben müde sein.
Wenn er den Aufzug nimmt, dann wird er den Beginn seiner Lieblingsserie verpassen.

Er wird oben müde sein oder er wird den Beginn seiner Lieblingsserie verpassen.

Im zweiten Schritt erhalten wir

$A :=$ „Er nimmt die Treppen“, $B :=$ „Er nimmt den Aufzug“,
$C :=$ „Er wird oben müde sein“, $D :=$ „Er wird den Beginn seiner Lieblingsserie verpassen“.

A oder B.
Wenn A, dann C.
Wenn B, dann D.

C oder D.

Der dritte Schritt ergibt

p oder q.
Wenn p, dann r.
Wenn q, dann s.

---

r oder s.

Im vierten Schritt schließlich erhalten wir die logische Form

$$\begin{array}{l} p \vee q. \\ p \to r \\ q \to s \\ \hline r \vee s. \end{array}$$

Aufgabe 3.

Finde ein Argument mit einer weiteren logischen Form.

Wie können wir jetzt herausfinden, ob beispielsweise die logische Form

$$\begin{array}{l} p \vee q. \\ p \to r \\ q \to s \\ \hline r \vee s. \end{array}$$

ein gültiges Argument ergibt? Dazu nehmen wir an, dass alle Aussagen, die wir untersuchen wollen, entweder wahr oder falsch (und nicht beides gleichzeitig) sind. Dann können wir die Bedeutung der logischen Ausdrücke präzisieren: Beispielsweise ist die Aussage $\neg p$ („nicht p“) wahr, wenn p falsch ist, und falsch, wenn p war ist. Die Aussage $p \wedge q$ („p und q“) ist wahr, wenn p und q beide wahr sind, und ansonsten falsch. Das lässt sich durch *Wahrheitstafeln* folgendermaßen darstellen:

p	$\neg p$
w	f
f	w

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Auf der linken Seite des Doppelstrichs werden alle vorkommenden Aussagenvariablen aufgeführt. Jede kann unabhängig von den anderen wahr oder falsch sein. Dabei wird „wahr“ durch w und „falsch“ durch f abgekürzt.

Aufgabe 4.

Stelle die Wahrheitstafeln für $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ auf.

Lösung.

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Das präzisiert die Bedeutung von „oder“, „wenn, dann“ und „genau dann, wenn“. Die Aussage „p oder q“ ist nach der ersten Tabelle genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen p oder q wahr ist (also auch, wenn beide wahr sind). Die Aussage „wenn p, dann q“ ist nach der mittleren Tabelle immer wahr, außer wenn p falsch und q trotzdem wahr ist. Schließlich ist die Aussage „p genau dann, wenn q“ wahr, wenn p und q beide wahr oder beide falsch sind.

Jetzt sind wir so weit, dass wir Argumentationsformen auf deduktive Korrektheit, also Korrektheit im Sinne der Logik, überprüfen können. Zunächst überprüfen wir die Korrektheit unseres Bello-Arguments vom Anfang, also des Arguments der Form

$$\begin{array}{l} p \vee (\neg q) \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Dazu stellen wir eine Wahrheitstafel mit allen vorkommenden logischen Ausdrücken auf, also mit p, q und $p \vee (\neg q)$. Der letzte Ausdruck ist selbst noch einmal zusammengesetzt, sodass wir auch noch $\neg q$ zur Analyse brauchen. Zusammen erhalten wir die folgende Wahrheitstafel:

p	q	$\neg q$	$p \vee (\neg q)$
w	w	f	w
w	f	w	w
f	w	f	f
f	f	w	w

Da wir annehmen, dass die Prämissen wahr sind, können wir alle Zeilen, bei denen $p \vee (\neg q)$ oder q falsch ist, wegstreichen. Übrig bleibt nur noch eine Zeile:

p	q	$\neg q$	$p \vee (\neg q)$
w	w	f	w
~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~
~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~
~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~

In dieser Zeile ist die Konklusion p allerdings wahr, sodass das Argument gültig ist: Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist auf jeden Fall auch die Konklusion wahr.

Ein weiteres Beispiel ist folgende Argumentationsform:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

Die fertige Wahrheitstabelle schaut folgendermaßen aus:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
w	w	w	w	w	w
~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~
~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~
~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~
f	w	w	w	w	w
~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

Auch hier ist die Konklusion wieder in allen übriggebliebenen Zeilen wahr und das Argument daher gültig. Es sagt aus, dass der logische Ausdruck „→“ *transitiv* ist, dass man also aus Zwischenschritten bestehende Implikationen zusammensetzen kann.

Aufgabe 5.

Überprüfe folgende Argumentationsformen auf deduktive Korrektheit:

a) **Modus ponens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

b) **Modus tollens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

c) **Verneinung des Antezedens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

d) **Disjunktiver Syllogismus**

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

e) **Bejahung des Konsequens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

f) **Reductio ad absurdum**

$$\begin{array}{l} \neg p \to (q \land \neg q) \\ \hline p \end{array}$$

Es bleibt zu sagen, dass die Annahme, dass alle Aussagen entweder wahr oder falsch sind, ein Axiom sind, das nicht weiter begründet werden kann. Tatsächlich gibt es auch Formen von formaler Logik, die diese Annahme nicht verwenden; man sagt auch, dass der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* oder das *tertium non datur* in diesen Arten von Logik nicht gilt.

Unabhängig davon haben wir nur die sogenannte *Aussagenlogik* untersucht. In der *Prädikatenlogik* werden Aussagen der Art „Alle Hunde sind Säugetiere“ genauer untersucht: Der Gegenstand der Prädikatenlogik sind Aussagen, die für *alle* oder *einige* Objekte eines bestimmten Typs erfüllt sind.