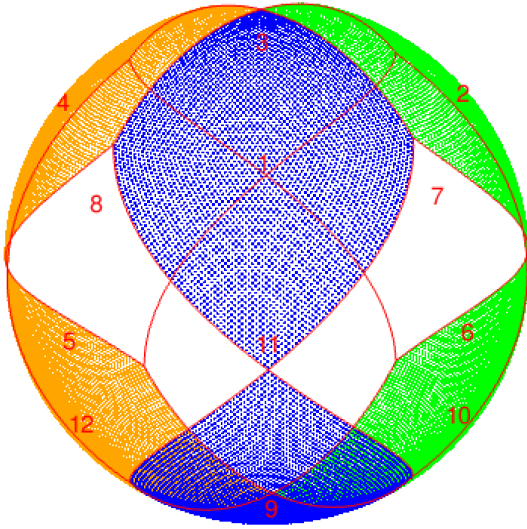


Approximation der Präzisionsmatrix

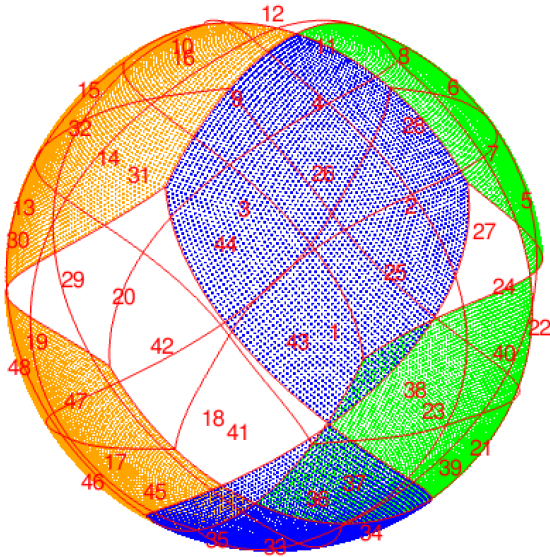
Healpix Daten Format

Varriierende Anzahl an ersten Nachbarn als Artefakt des Healpix-Format.

In der niedrigsten Auflösung wird die Kugeloberfläche in 12 rautenförmige Basis Pixel unterteilt:



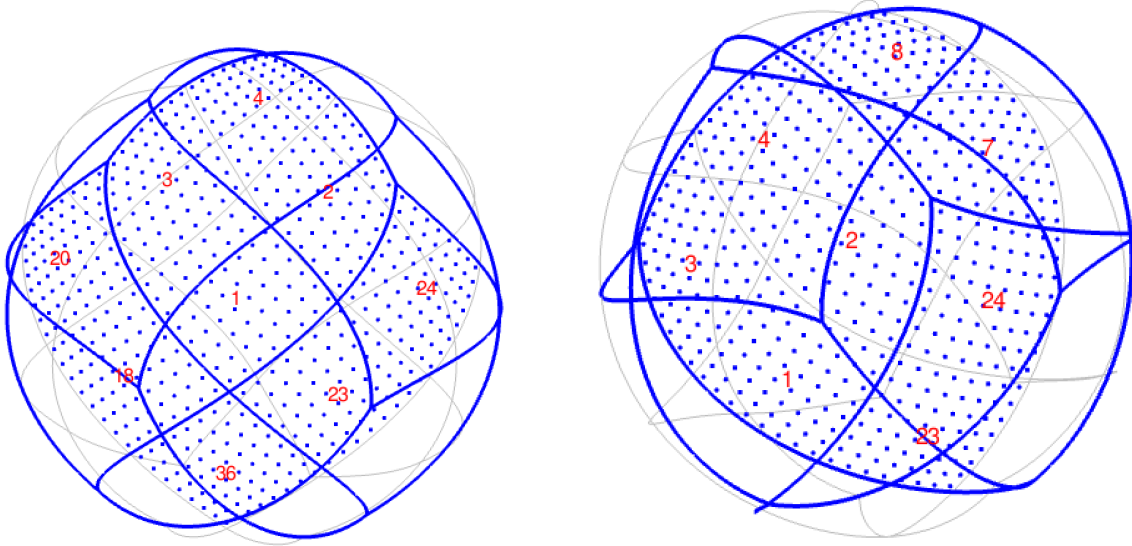
Für Auflösung $j = 1$ werden die Rauten jeweils in 4 kleinere Rauten unterteilt und neu nummeriert:



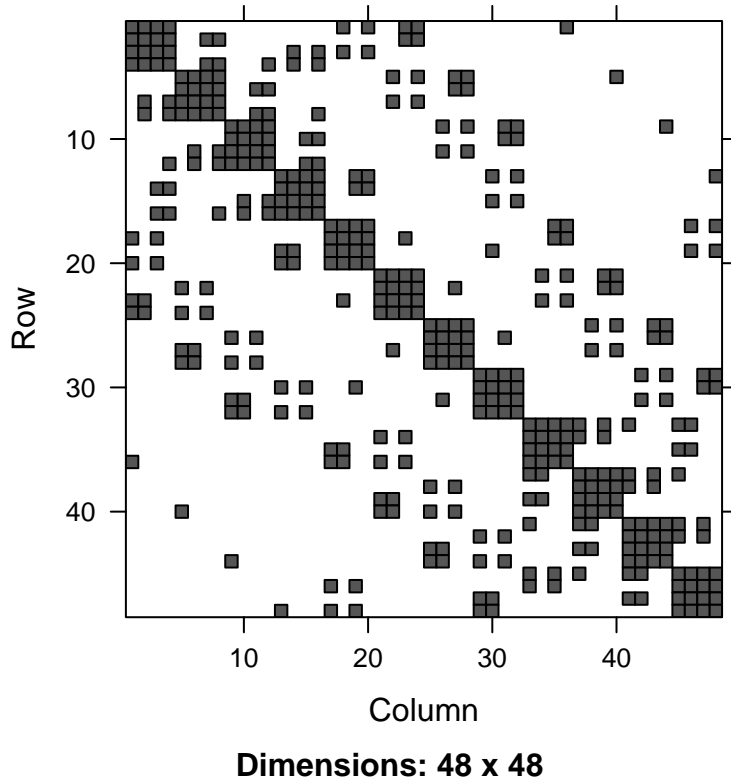
Daraus ergeben sich zwei mögliche Anzahlen an ersten Nachbarn: 7 oder 8. Wobei die Anzahl der Pixel mit 7 Nachbarn konstant 24 ist für alle Auflösungen (Außer für Auflösung = 0).

Es gilt $n_{side} = 2^j$ und $n_{pixel} = 12 * n_{side}^2$

Erste Nachbarn für Pixel 1 und Pixel 2 bei Auflösung 1:



Die Präzisionsmatrix für Auflösung 1 Die Präzisionsmatrix hat folgende Struktur.



Rang der Präzisionsmatrix: # TODO: Check ist Präzisionsmatrix SPD?

[1] 48

[1] 45

Parametrisierung der Präzisionsmatrix -> Hyperparameter des hierarchischen Modells:

Der räumliche Prozess soll als CAR-Prozess modelliert werden:

$$x_{\delta,s} = \sum_{s' \in \partial(s)} w_{ss'} x_{\delta,s'} + \epsilon_s = -\frac{1}{q_{ss}} \sum_{s': s' \sim s} q_{ss'} x_{\delta,s'} + \epsilon_s$$

$$\epsilon_s \sim^{iid} N(0, \kappa_s^{-1})$$

$$w_{ss'} = -\frac{q_{ss'}}{q_{ss}}$$

mit $x_{\delta} := \text{GMRF}$

Die gemeinsame Dichte des GMRF ist implizit durch die n full-conditionals spezifiziert.

$$x_{\delta,s} | x_{\delta,-s} \sim N(\sum_{s': s' \neq s} w_{ss'} x_{\delta,s'}, \kappa_s^{-1}) \text{ für alle } s = 1, \dots, n$$

Die Präzisionsmatrix $Q = (q_{ss'})$ hat also folgende Elemente:

$$q_{ss'} = \begin{cases} \kappa_s = \theta_1 & s = s' \\ -\kappa_s w_{ss'} = -\kappa_s - \frac{q_{ss'}}{q_{ss}} = q_{ss} \frac{q_{ss'}}{q_{ss}} = \theta_{ss'} & s \neq s' \end{cases}$$

$(2m + 1) \times (2m + 1)$ Fenster definiert Nachbarschaft:

$$\mathbb{E}(x_{\delta,s} | x_{\delta,-s}) = -\frac{1}{\theta_{00}} \sum_{i'j' \neq 00} \theta_{i'j'} x_{\delta,ss'} = \frac{1}{\theta_1} \begin{bmatrix} \circ & \bullet & \circ & & \\ \theta_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \circ & \bullet & \circ & & \\ & & & \bullet & \circ & \bullet \\ & & & \bullet & \circ & \bullet \end{bmatrix}$$

$$Prec(\delta_{m,ij} | \delta_{m,-ij}) = \theta_{oo} = \theta_1$$

Das GMRF ist durch 3 Parameter spezifiziert.

$$\theta_1 \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1} \\ \frac{\theta_2}{\theta_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

TODO: Im Car Modell, das per generischer Funktion mit INLA modelliert werden alle ersten Nachbarn (diagonale und gerade) mit dem selben Parameter (θ_2) parametrisiert. Wie kann das zu der oben gezeigten Parametrisierung (θ_2 und θ_3) erweitert werden.?

Approximation der marginalen Posteriori der Parameter mittels INLA und rgeneric:

Das Modell ist wohl definiert für $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (\frac{1}{\lambda_{min}}, \frac{1}{\lambda_{max}})$ mit λ_i = Eigenwert von Nachbarschaftsmatrix W . Skalierung um Autokorrelationsparameter < 1 zu halten:

$$\frac{W}{\lambda_{max}}$$

Implementierung mit rgeneric folgt Kapitel 11.3 aus Bayesian Inference with INLA.

TODO Muss auf die Matter-Density-Karten von FLASK auch Gaussian Noise drauf gesampelt werden? Die Modellannahme für GMRF geht von Gaussian Noise aus.

Das GRF (Materie-Dichte-Kontrast-Feld) ist durch das Healpix-Format schon diskretisiert.

```
CAR.model <- inla.rgeneric.define(inla.rgeneric.CAR.model, W = W)
```

```
f.car <- obs ~ 1 + f(id_x, model = CAR.model)
```

```
m.car <- inla(f.car, data = df_sky, family = "gaussian")
```

```
summary(m.car)
```

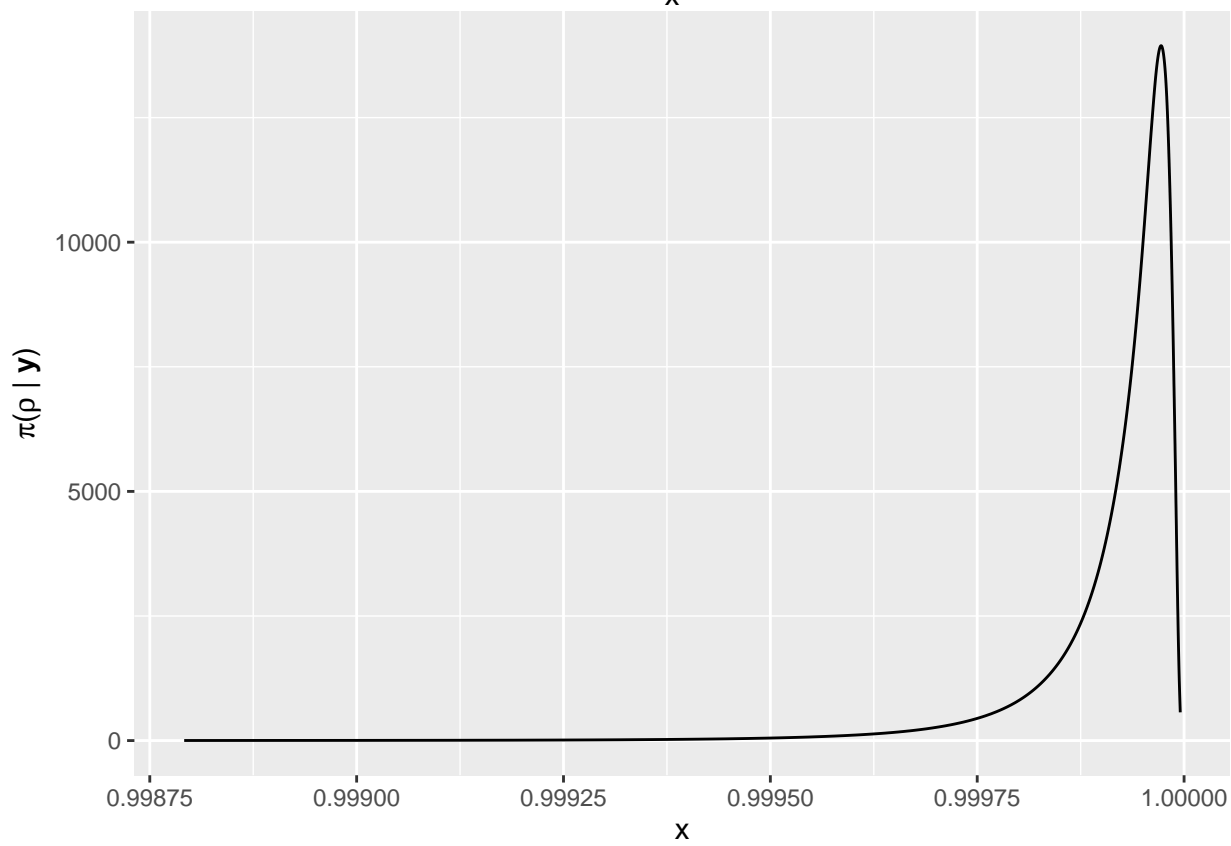
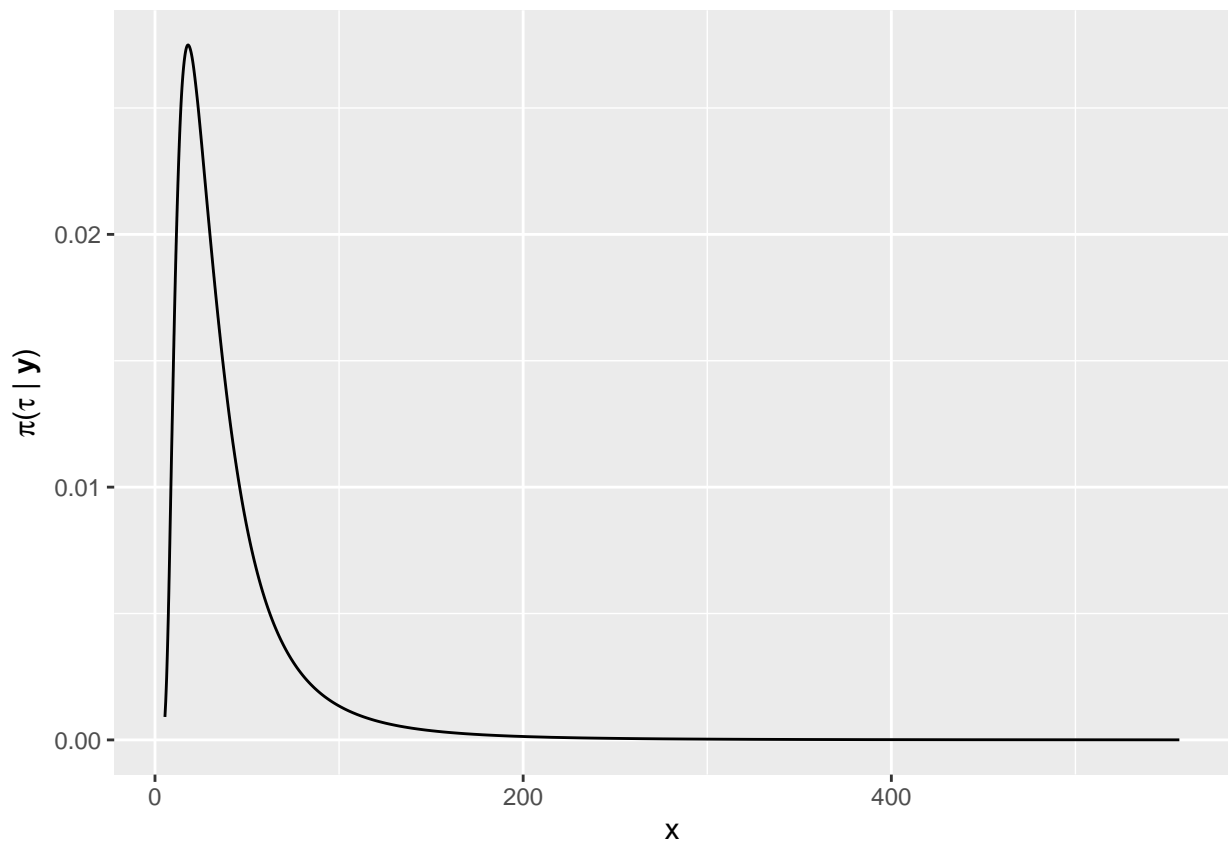
```
##
## Call:
## inla.core(formula = formula, family = family, contrasts = contrasts,
## " data = data, quantiles = quantiles, E = E, offset = offset, "
## scale = scale, weights = weights, Ntrials = Ntrials, strata = strata,
## " lp.scale = lp.scale, link.covariates = link.covariates, verbose =
## verbose, " lincomb = lincomb, selection = selection, control.compute
## = control.compute, " control.predictor = control.predictor,
## control.family = control.family, " control.inla = control.inla,
## control.fixed = control.fixed, " control.mode = control.mode,
```

```

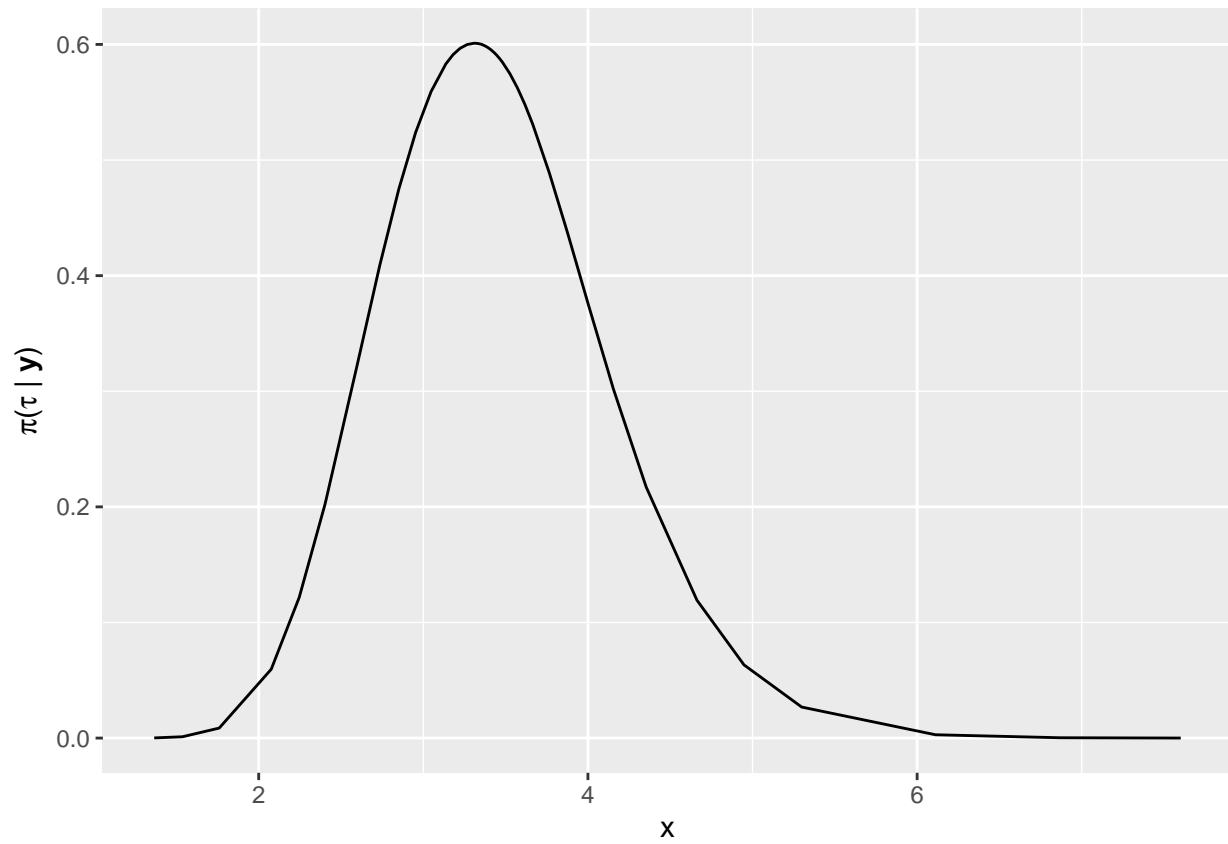
## control.expert = control.expert, ", " control.hazard = control.hazard,
## control.lincomb = control.lincomb, ", " control.update =
## control.update, control.lp.scale = control.lp.scale, ", "
## control.pardiso = control.pardiso, only.hyperparam = only.hyperparam,
## ", " inla.call = inla.call, inla.arg = inla.arg, num.threads =
## num.threads, ", " blas.num.threads = blas.num.threads, keep = keep,
## working.directory = working.directory, ", " silent = silent, inla.mode
## = inla.mode, safe = FALSE, debug = debug, ", " .parent.frame =
## .parent.frame)")
## Time used:
## Pre = 1.37, Running = 1.56, Post = 0.0222, Total = 2.96
## Fixed effects:
##          mean      sd 0.025quant 0.5quant 0.975quant mode kld
## (Intercept) -8.309 0.079      -8.464   -8.309      -8.153   NA    0
##
## Random effects:
## Name      Model
## id_x RGeneric2
##
## Model hyperparameters:
##          mean      sd 0.025quant 0.5quant
## Precision for the lognormal observations 3.445 0.689      2.25    3.394
## Theta1 for id_x          9.773 0.850      7.99    9.808
## Theta2 for id_x          0.017 1.836     -3.50   -0.023
##          0.975quant mode
## Precision for the lognormal observations      4.95   NA
## Theta1 for id_x          11.34   NA
## Theta2 for id_x          3.83   NA
##
## Marginal log-Likelihood: 349.54
## is computed
## Posterior summaries for the linear predictor and the fitted values are computed
## (Posterior marginals needs also 'control.compute=list(return.marginals.predictor=TRUE)')

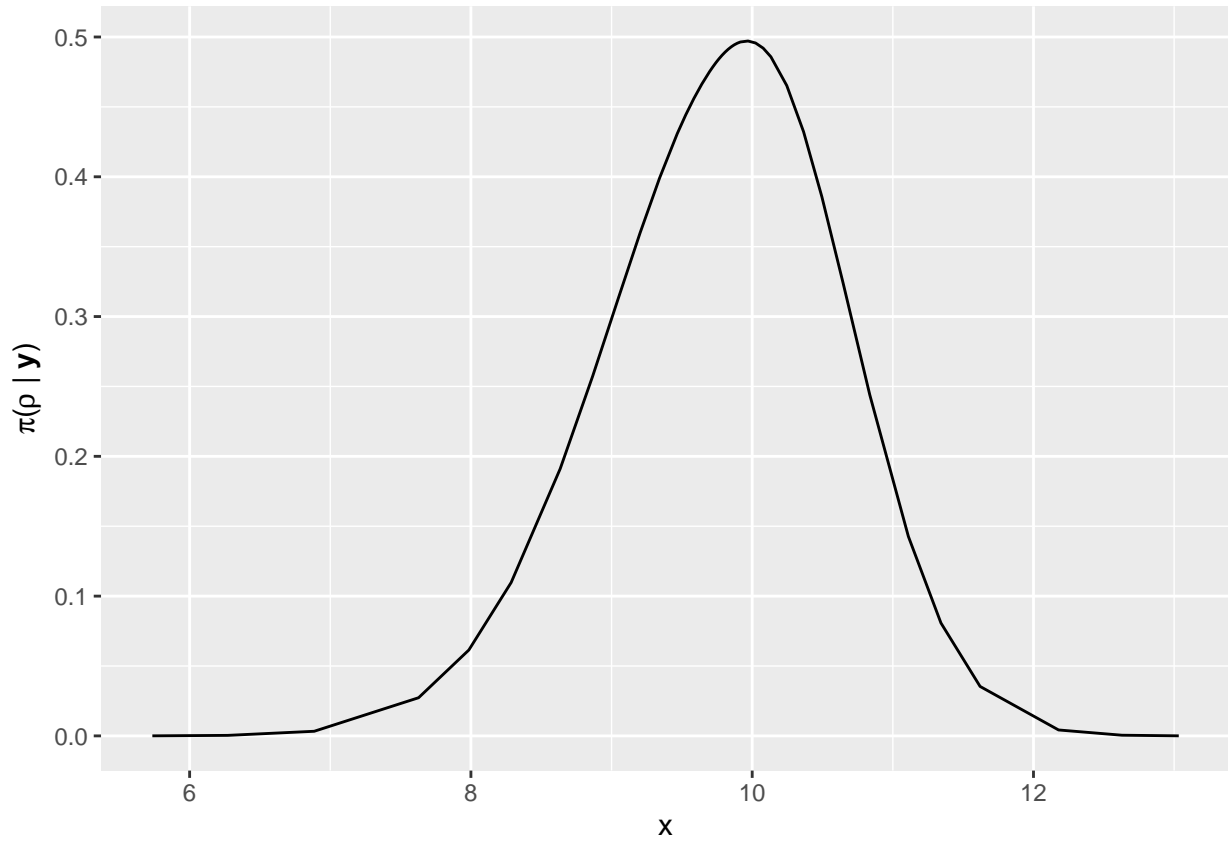
```

Darstellung con posterior marginals für Hyperparameter: Präzisionsparameter und rho.
Umgewandelt in Modell Repräsentation: TODO: Welche Repräsentation ist für uns relevant?



Darstellung von posterior marginals für Hyperparameter: Präzisionsparameter und rho. In interner Repräsentation:

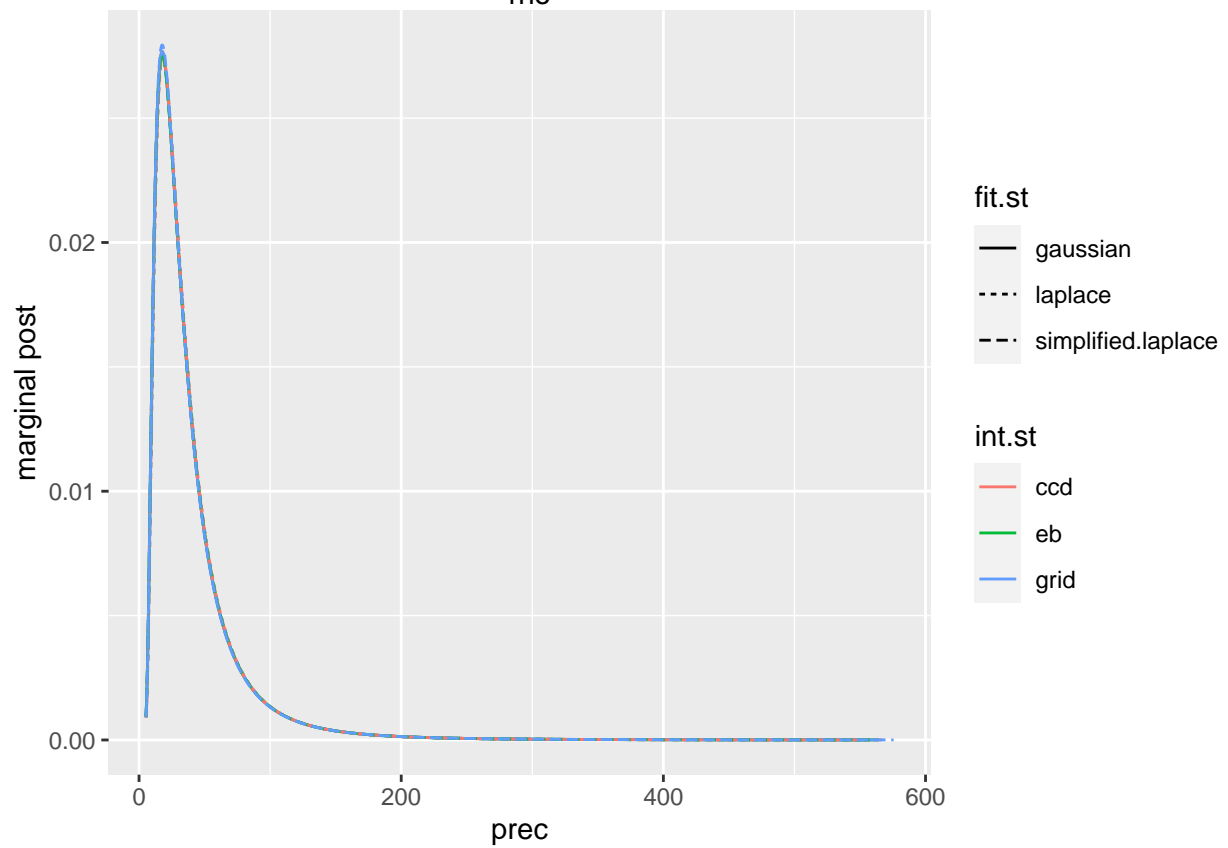
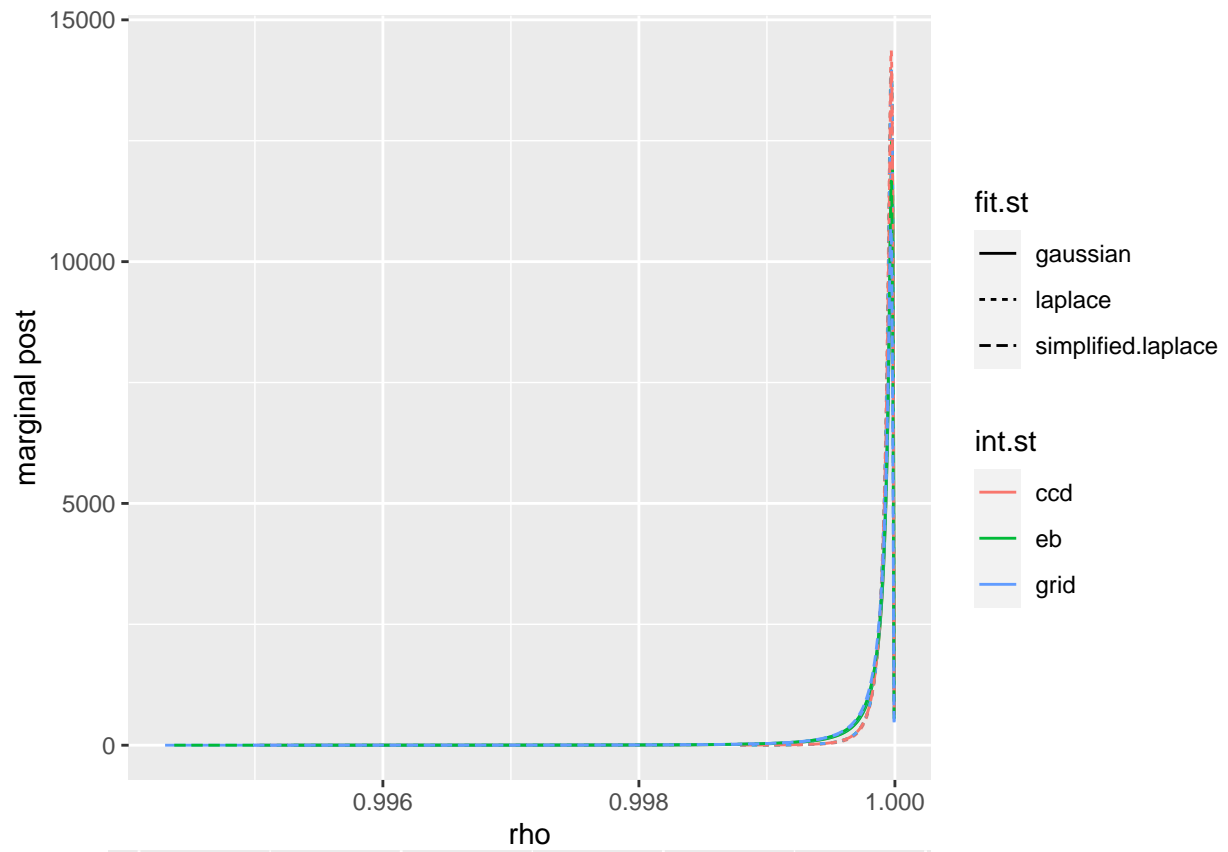




Unterschiedliche Approximations und Integral Strategien können verglichen werden anhand von unterschiedlichen Metriken

model	dic	waic	cpo
gaussian with ccd	-715.7040	-715.9839	-357.9920
gaussian with grid	-715.7094	-715.9722	-357.9811
gaussian with eb	-717.6379	-717.5774	-358.7883
simplified.laplace with ccd	-715.6525	-715.9353	-357.9704
simplified.laplace with grid	-715.6848	-715.9609	-357.9791
simplified.laplace with eb	-717.6228	-717.5683	-358.7871
laplace with ccd	-715.6498	-715.9324	-357.9689
laplace with grid	-715.6745	-715.9451	-357.9710
laplace with eb	-717.6219	-717.5666	-358.7863

Darstellung der posteriori marginals der unterschiedlichen Strategien in Modell Repräsentation



sampling aus posterior marginals der Hyperparameter