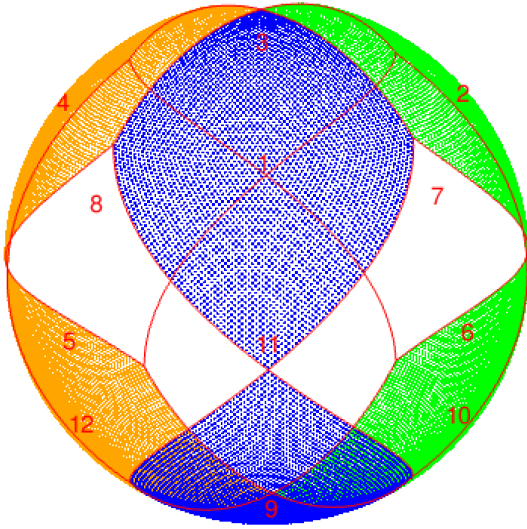


# Approximation der Präzisionsmatrix

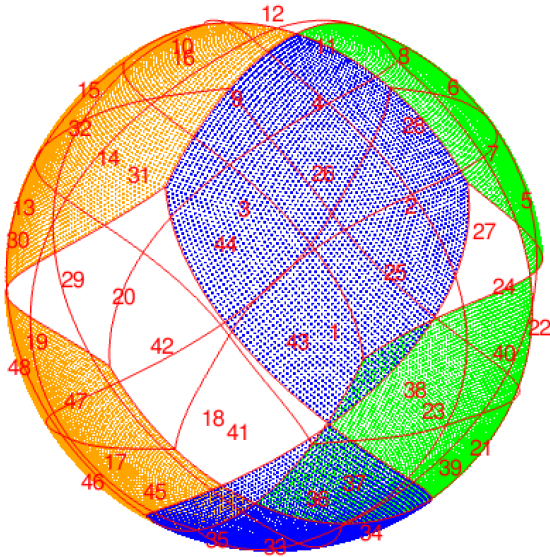
## Healpix Daten Format

Varriierende Anzahl an ersten Nachbarn als Artefakt des Healpix-Format.

In der niedrigsten Auflösung wird die Kugeloberfläche in 12 rautenförmige Basis Pixel unterteilt:



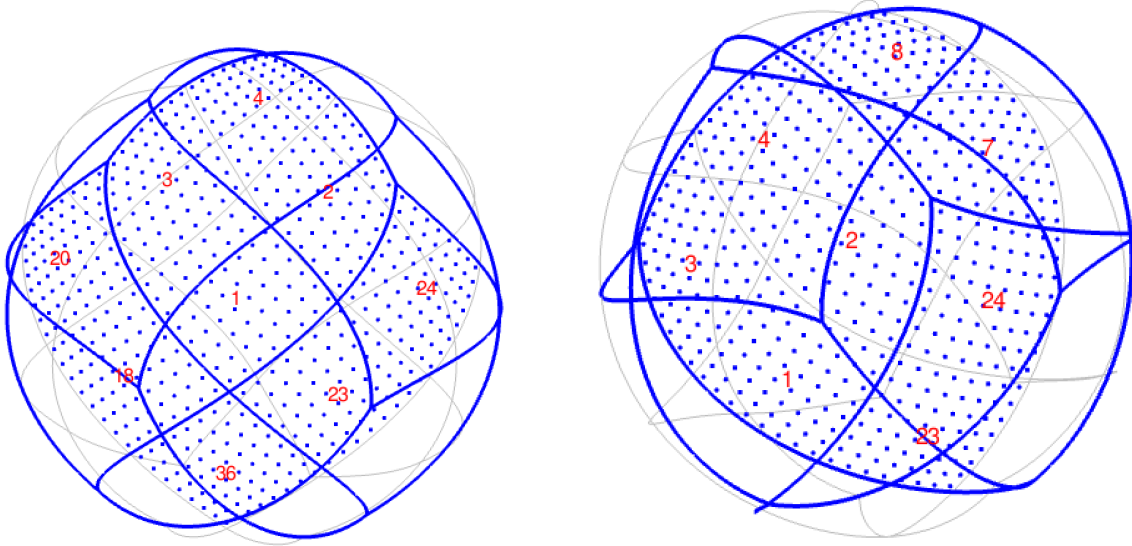
Für Auflösung  $j = 1$  werden die Rauten jeweils in 4 kleinere Rauten unterteilt und neu nummeriert:



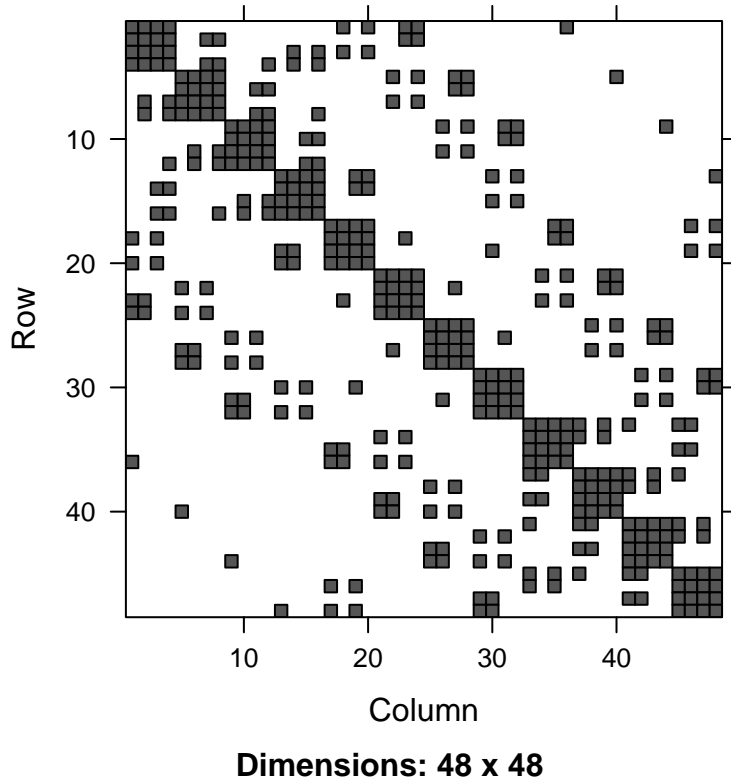
Daraus ergeben sich zwei mögliche Anzahlen an ersten Nachbarn: 7 oder 8. Wobei die Anzahl der Pixel mit 7 Nachbarn konstant 24 ist für alle Auflösungen (Außer für Auflösung = 0).

Es gilt  $n_{side} = 2^j$  und  $n_{pixel} = 12 * n_{side}^2$

Erste Nachbarn für Pixel 1 und Pixel 2 bei Auflösung 1:



Die Präzisionsmatrix für Auflösung 1 Die Präzisionsmatrix hat folgende Struktur.



Rang der Präzisionsmatrix: # TODO: Check ist Präzisionsmatrix SPD?

## [1] 48

## [1] 45

**Parametrisierung der Präzisionsmatrix -> Hyperparameter des hierarchischen Modells:**

*Der räumliche Prozess soll als CAR-Prozess modelliert werden:*

$$x_{\delta,s} = \sum_{s' \in \partial(s)} w_{ss'} x_{\delta,s'} + \epsilon_s = -\frac{1}{q_{ss}} \sum_{s': s' \sim s} q_{ss'} x_{\delta,s'} + \epsilon_s$$

$$\epsilon_s \sim^{iid} N(0, \kappa_s^{-1})$$

$$w_{ss'} = -\frac{q_{ss'}}{q_{ss}}$$

mit  $x_{\delta} := \text{GMRF}$

*Die gemeinsame Dichte des GMRF ist implizit durch die n full-conditionals spezifiziert.*

$$x_{\delta,s} | x_{\delta,-s} \sim N(\sum_{s': s' \neq s} w_{ss'} x_{\delta,s'}, \kappa_s^{-1}) \text{ für alle } s = 1, \dots, n$$

Die Präzisionsmatrix  $Q = (q_{ss'})$  hat also folgende Elemente:

$$q_{ss'} = \begin{cases} \kappa_s = \theta_1 & s = s' \\ -\kappa_s w_{ss'} = -\kappa_s - \frac{q_{ss'}}{q_{ss}} = q_{ss} \frac{q_{ss'}}{q_{ss}} = \theta_{ss'} & s \neq s' \end{cases}$$

$(2m + 1) \times (2m + 1)$  Fenster definiert Nachbarschaft:

$$\mathbb{E}(x_{\delta,s} | x_{\delta,-s}) = -\frac{1}{\theta_{00}} \sum_{i'j' \neq 00} \theta_{i'j'} x_{\delta,ss'} = \frac{1}{\theta_1} \begin{bmatrix} \circ & \bullet & \circ & & & \\ \theta_2 & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \circ & \bullet & \circ & & & \\ & & & \bullet & \circ & \bullet \\ & & & & \bullet & \circ & \bullet \end{bmatrix}$$

$$Prec(\delta_{m,ij} | \delta_{m,-ij}) = \theta_{oo} = \theta_1$$

Das GMRF ist durch 3 Parameter spezifiziert.

$$\theta_1 \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1} \\ \frac{\theta_2}{\theta_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

**TODO:** Im Car Modell, das per generischer Funktion mit INLA modelliert werden alle ersten Nachbarn (diagonale und gerade) mit dem selben Parameter ( $\theta_2$ ) parametrisiert. Wie kann das zu der oben gezeigten Parametrisierung ( $\theta_2$  und  $\theta_3$ ) erweitert werden.?

## Approximation der marginalen Posteriori der Parameter mittels INLA und rgeneric:

Das Modell ist wohl definiert für  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (\frac{1}{\lambda_{min}}, \frac{1}{\lambda_{max}})$  mit  $\lambda_i$  = Eigenwert von Nachbarschaftsmatrix  $W$ . Skalierung um Autokorrelationsparameter  $< 1$  zu halten:

$$\frac{W}{\lambda_{max}}$$

**Implementierung mit rgeneric folgt Kapitel 11.3 aus Bayesian Inference with INLA.**

**TODO** Muss auf die Matter-Density-Karten von FLASK auch Gaussian Noise drauf gesampelt werden? Die Modellannahme für GMRF geht von Gaussian Noise aus.

Das GRF (Materie-Dichte-Kontrast-Feld) ist durch das Healpix-Format schon diskretisiert.

```
CAR.model <- inla.rgeneric.define(inla.rgeneric.CAR.model, W = W)
```

```
f.car <- obs ~ 1 + f(id_x, model = CAR.model)
```

```
m.car <- inla(f.car, data = df_sky, family = "gaussian")
```

```
summary(m.car)
```

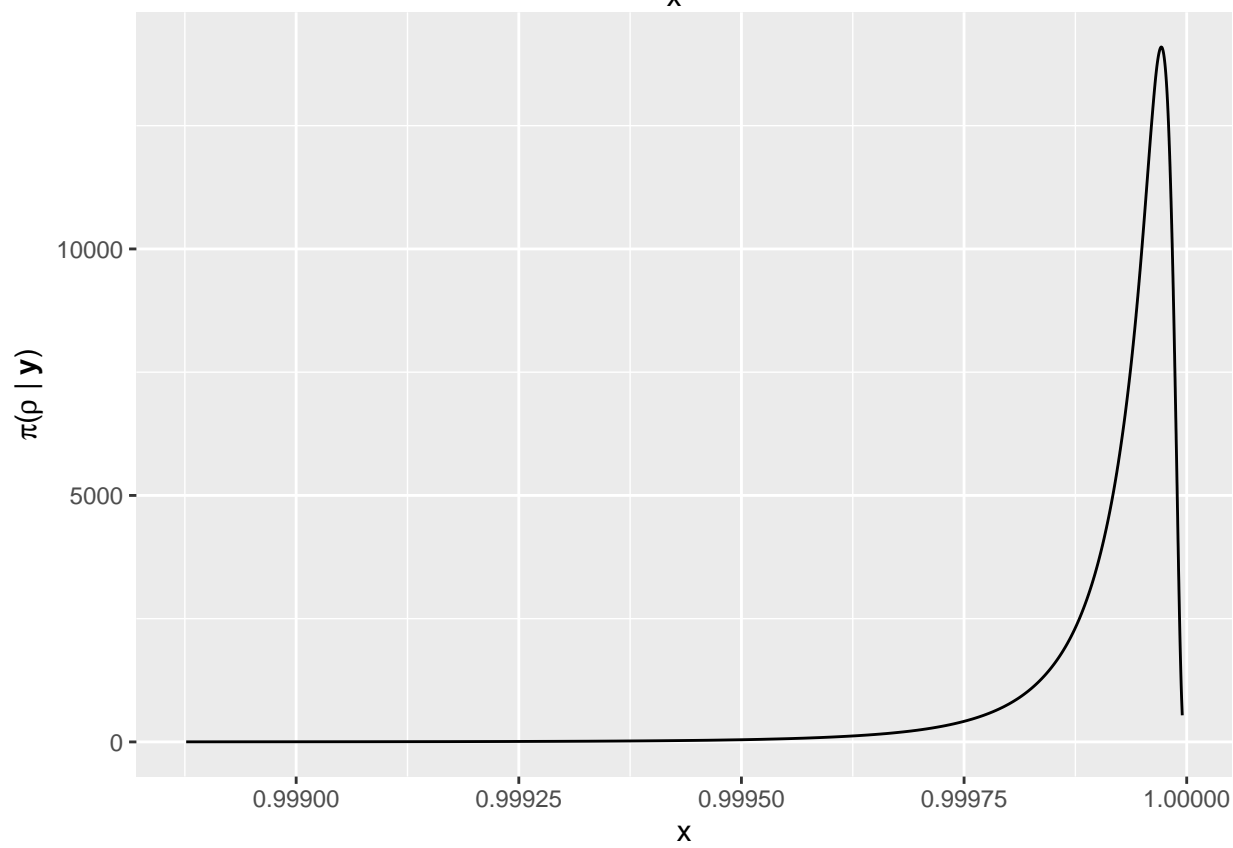
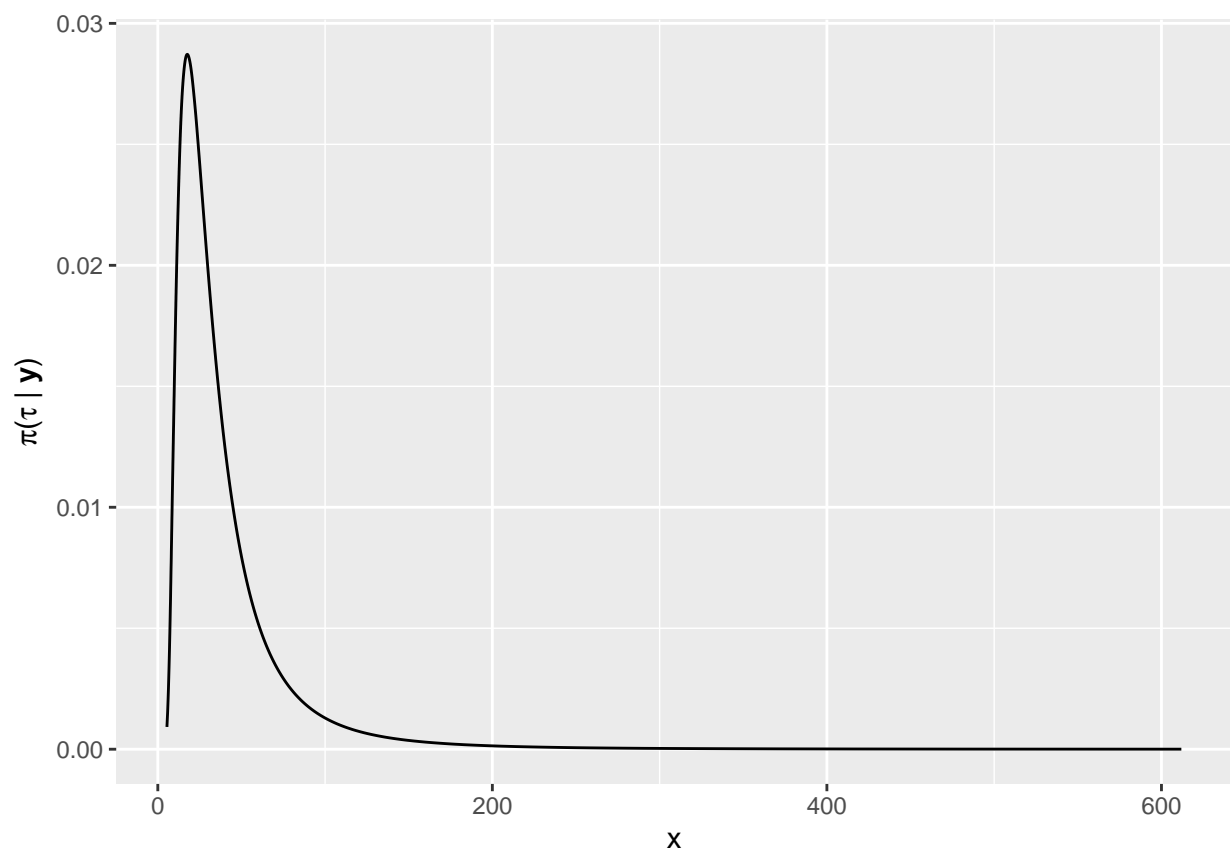
```
##
## Call:
## inla.core(formula = formula, family = family, contrasts = contrasts,
## data = data, quantiles = quantiles, E = E, offset = offset, " , "
## scale = scale, weights = weights, Ntrials = Ntrials, strata = strata,
## " , " lp.scale = lp.scale, link.covariates = link.covariates, verbose =
## verbose, " , " lincomb = lincomb, selection = selection, control.compute
## = control.compute, " , " control.predictor = control.predictor,
## control.family = control.family, " , " control.inla = control.inla,
## control.fixed = control.fixed, " , " control.mode = control.mode,
```

```

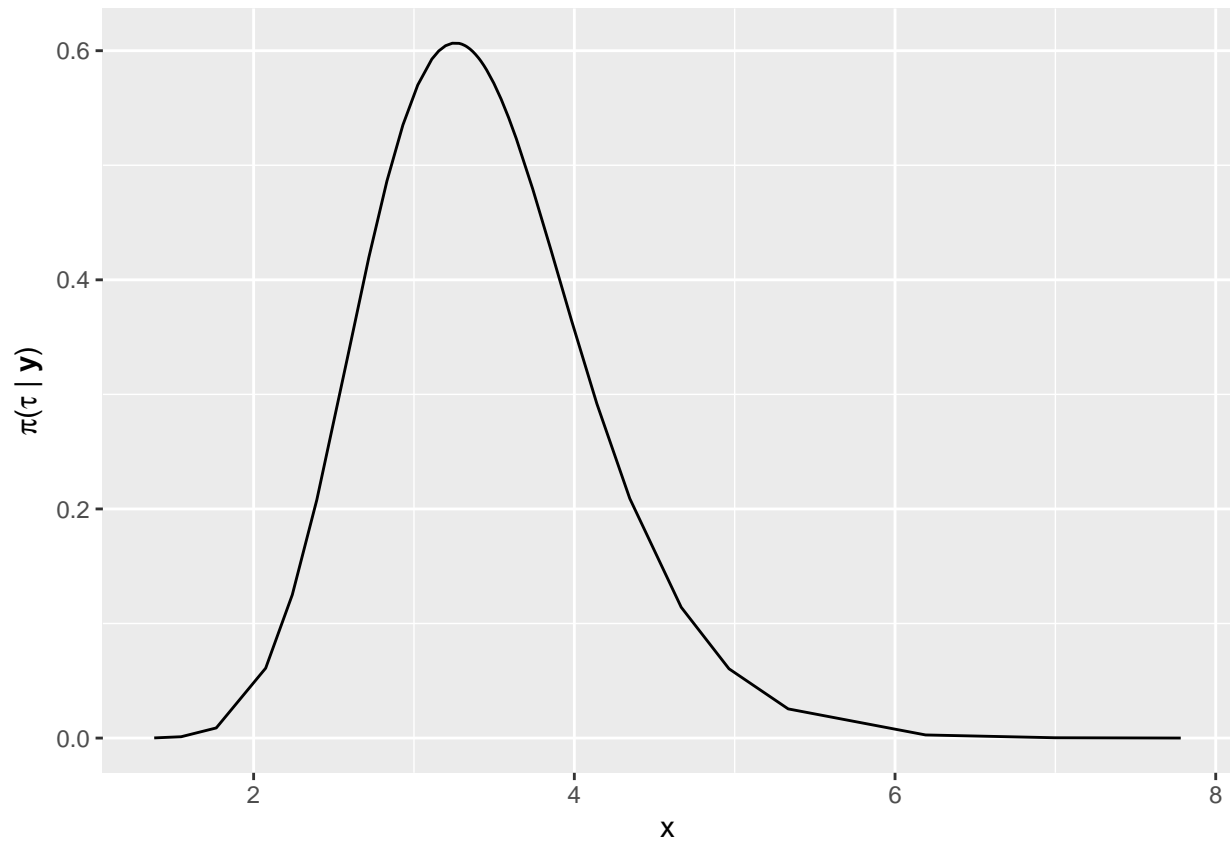
## control.expert = control.expert, ", " control.hazard = control.hazard,
## control.lincomb = control.lincomb, ", " control.update =
## control.update, control.lp.scale = control.lp.scale, ", "
## control.pardiso = control.pardiso, only.hyperparam = only.hyperparam,
## ", " inla.call = inla.call, inla.arg = inla.arg, num.threads =
## num.threads, ", " blas.num.threads = blas.num.threads, keep = keep,
## working.directory = working.directory, ", " silent = silent, inla.mode
## = inla.mode, safe = FALSE, debug = debug, ", " .parent.frame =
## .parent.frame)")
## Time used:
## Pre = 1.37, Running = 1.6, Post = 0.0228, Total = 3
## Fixed effects:
##      mean      sd 0.025quant 0.5quant 0.975quant mode kld
## (Intercept) -8.309 0.079      -8.464   -8.309      -8.153   NA    0
##
## Random effects:
##   Name      Model
##   id_x RGeneric2
##
## Model hyperparameters:
##                                mean      sd 0.025quant 0.5quant
## Precision for the lognormal observations  3.427 0.694      2.24    3.367
## Theta1 for id_x                        9.779 0.827      8.04    9.816
## Theta2 for id_x                       -0.055 2.058     -4.07   -0.078
##                                0.975quant mode
## Precision for the lognormal observations      4.96   NA
## Theta1 for id_x                        11.30   NA
## Theta2 for id_x                        4.13   NA
##
## Marginal log-Likelihood: 349.61
## is computed
## Posterior summaries for the linear predictor and the fitted values are computed
## (Posterior marginals needs also 'control.compute=list(return.marginals.predictor=TRUE)')

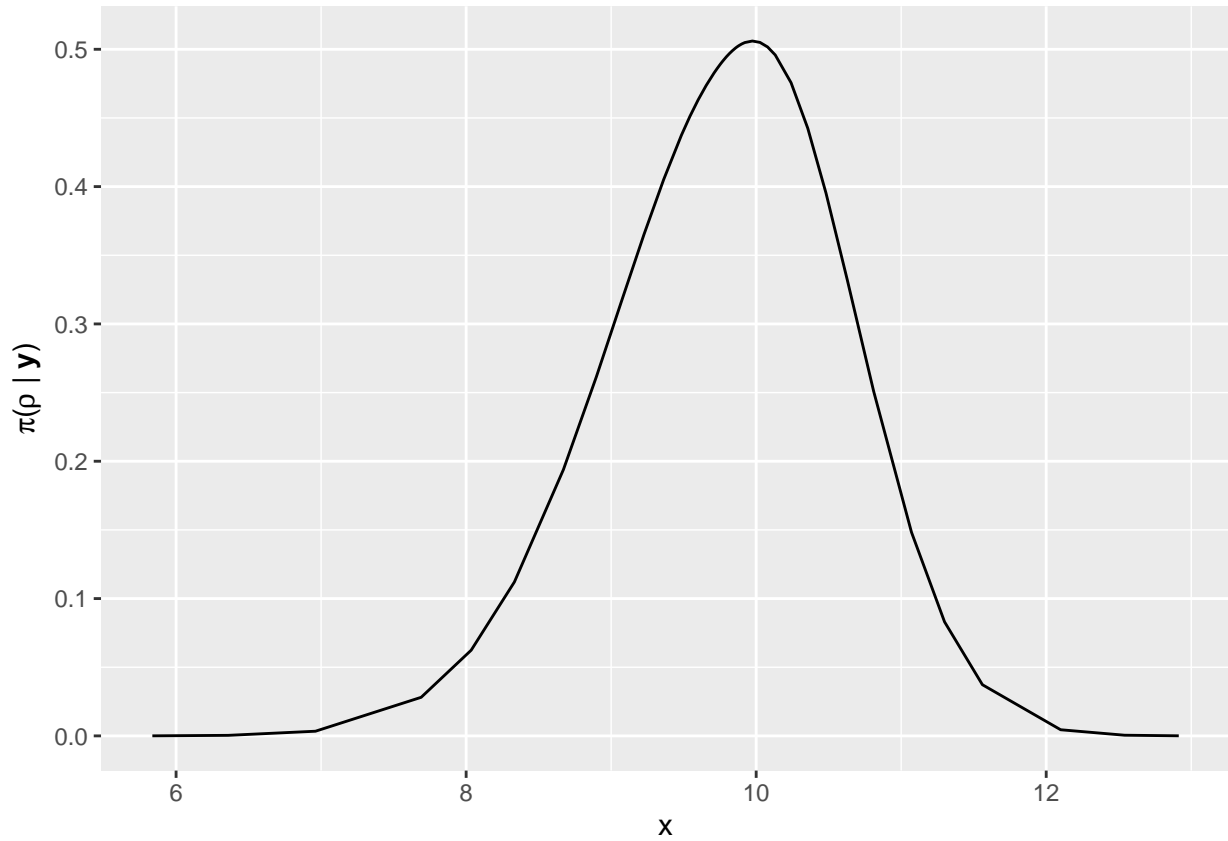
```

Darstellung con posterior marginals für Hyperparameter: Präzisionsparameter und rho.  
Umgewandelt in Modell Repräsentation: **TODO:** Welche Repräsentation ist für uns relevant?



Darstellung von posterior marginals für Hyperparameter: Präzisionsparameter und rho. In interner Repräsentation:



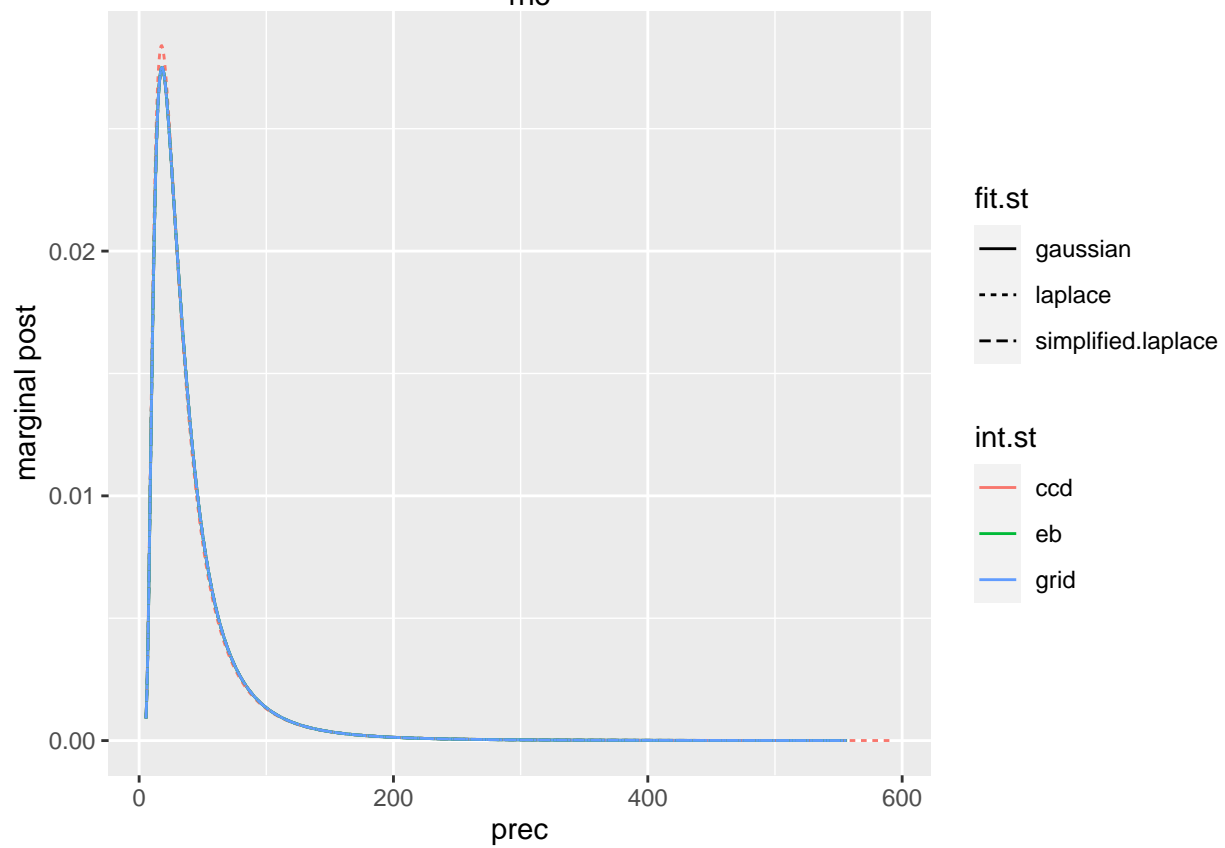
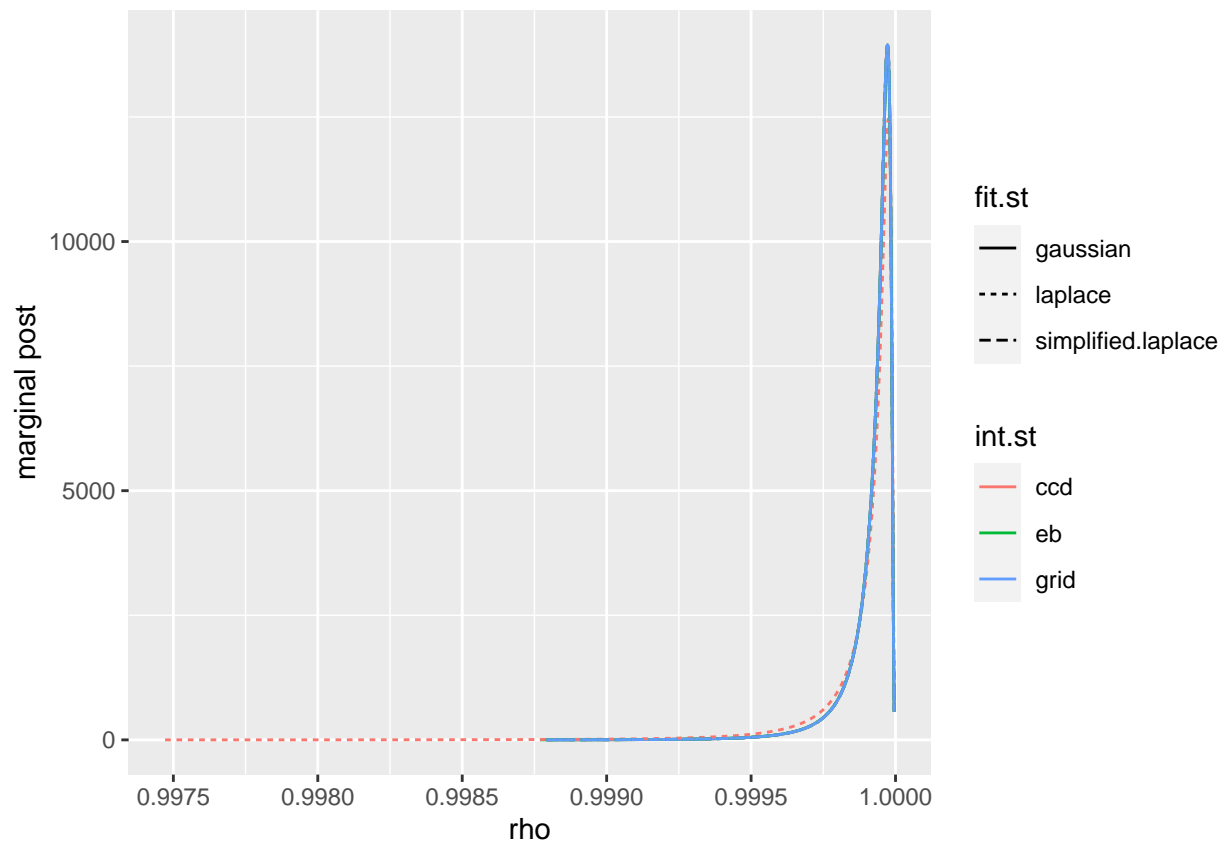


Unterschiedliche Approximations und Integral Strategien können verglichen werden anhand von unterschiedlichen Metriken

model	dic	waic	cpo
gaussian with ccd	-715.6665	-715.9424	-357.9705
gaussian with grid	-715.6890	-715.9524	-357.9710
gaussian with eb	-717.6361	-717.5741	-358.7866
simplified.laplace with ccd	-715.6525	-715.9353	-357.9704
simplified.laplace with grid	-715.6745	-715.9451	-357.9710
simplified.laplace with eb	-717.6219	-717.5666	-358.7863
laplace with ccd	-715.6930	-715.9881	-357.9969
laplace with grid	-715.6745	-715.9451	-357.9710
laplace with eb	-717.6219	-717.5666	-358.7863

Darstellung der posteriori marginals der unterschiedlichen Strategien in Modell Repräsentation





sampling aus posterior marginals der Hyperparameter