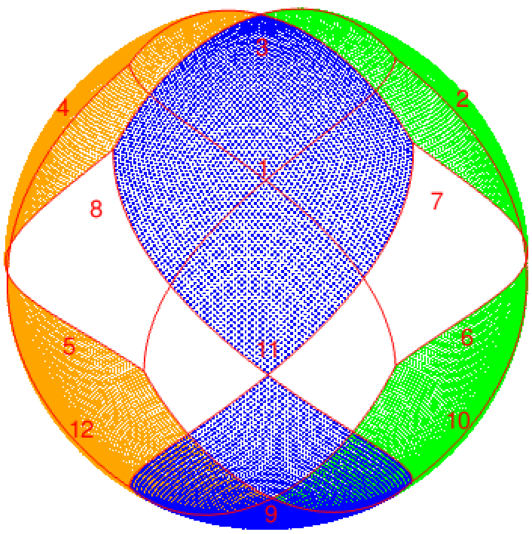
Approximation der Präzisionsmatrix

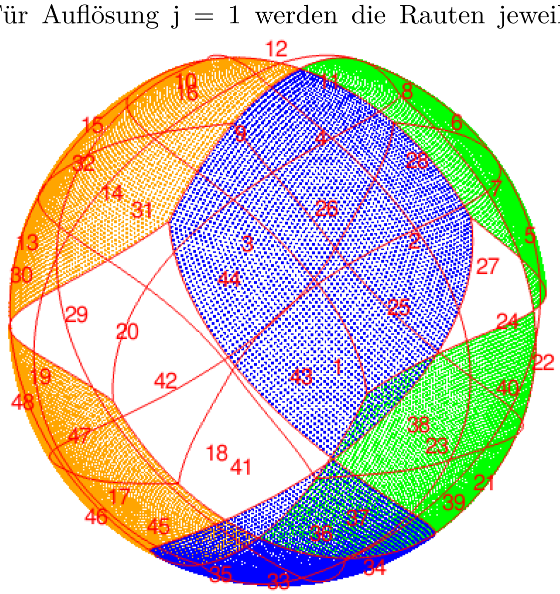
Healpix Daten Format

Varriierende Anzahl an ersten Nachbarn als Artfeakt des Healpix-Format.

In der niedrigsten Auflösung wird die Kugeloberfläche in 12 rautenförmige Basis Pixel unterteilt:



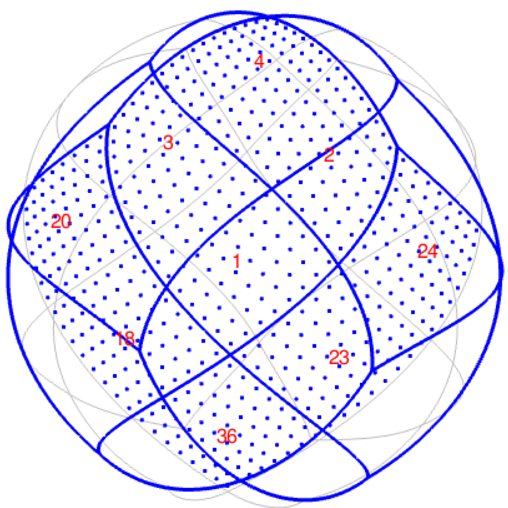
Für Auflösung j = 1 werden die Rauten jeweils in 4 kleinere Rauten unterteilt und neu nummeriert:

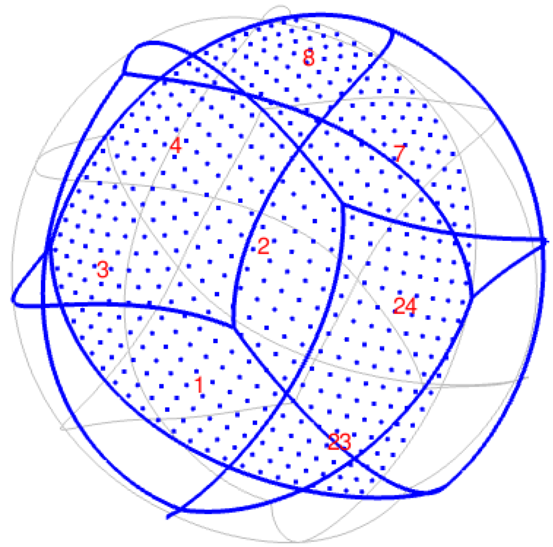


Daraus ergeben sich zwei mögliche Anzahlen an ersten Nachbarn: 7 oder 8. Wobei die Anzahl der Pixel mit 7 Nachbarn konstant 24 ist für alle Auflösungen (Außer für Auflösung = 0).

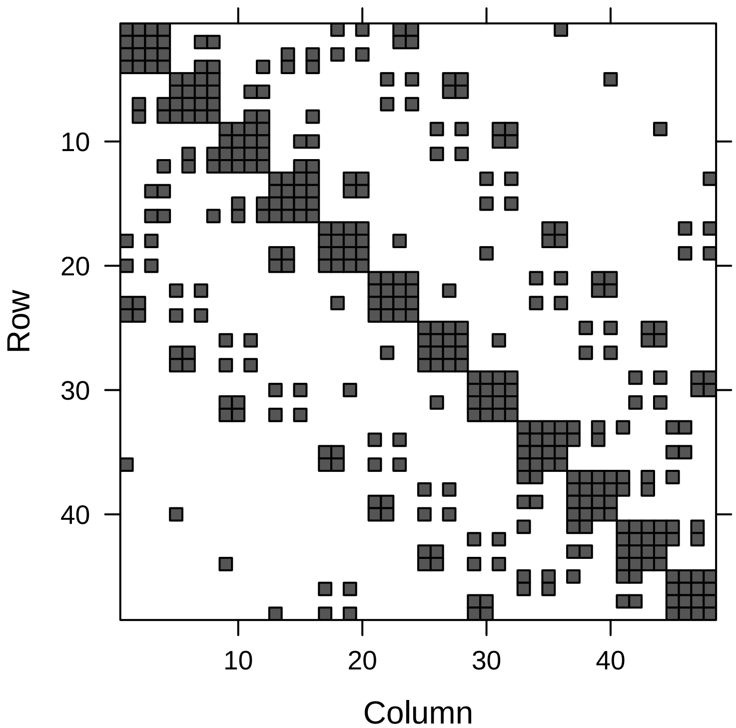
Es gilt nside = 2^j und n_pixel = $12 * nside^2$

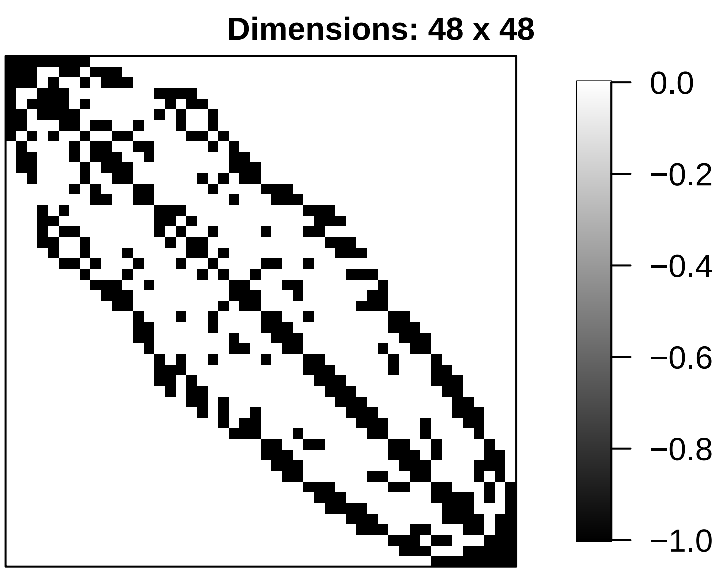
Erste Nachabrn für Pixel 1 und Pixel 2 bei Auflösung 1:





Die Präzisionmatrix für Auflösung 1 Die Präzisionsmatrix hat folgende Struktur und kann zur Bandmatrix umgeordnet werden.





Rang der Präzisionsmatrix:

```
## [1] 48
```

```
## [1] 45
```

Parametriserung:

Der räumliche Prozess soll als CAR-Prozess modelliert werden:
$x_{\delta,s} = \Sigma_{s' \in \partial(s)} w_{ss'} x_{\delta,s'} + \epsilon_s = -\frac{1}{q_{ss}} \Sigma_{s':s' \sim s} q_{ss'} x_{\delta,s'} + \epsilon_s$
$\epsilon_s \sim^{iid} N(0, \kappa_s^{-1})$
$w_{ss'} = -\frac{q_{ss'}}{q_{ss}}$
mit $x_\delta := GMRF$

Die gemeinsame Dichte des GMRF ist implizit durch die n full-conditionals spezifiziert.
$x_{\delta,s} | x_{\delta,-s} \sim N(\Sigma_{s':s' \neq s} w_{ss'} x_{\delta,s'}, \kappa_s^{-1})$ für alle s = 1, . . . , n

Die Präzisionsmatrix $Q = (q_{ss'})$ hat also folgende Elemente:

$$q_{ss'} = \begin{cases} \kappa_s = \theta_1 & s = s' \\ -\kappa_s w_{ss'} = -\kappa_s - \frac{q_{ss'}}{q_s s} = q_{ss} \frac{q_{ss'}}{q_{ss}} = \theta_{ss'} & s \neq s' \end{cases}$$

(2m + 1) x (2m + 1) Fenster definiert Nachbarschaft:

$$\mathbb{E}(x_{\delta,s} | x_{\delta,-s}) = -\frac{1}{\theta_{00}} \Sigma_{i'j' \neq 00} \theta_{i'j'} x_{\delta,ss'} = \frac{1}{\theta_1} \begin{bmatrix} & \circ \bullet \circ & & \bullet \circ \bullet \\ \theta_2 & \bullet \circ \bullet & + \ \theta_3 & \circ \circ \circ \\ & \circ \bullet \circ & & \bullet \circ \bullet \end{bmatrix}$$

$Prec(\delta_{m,ij} | \delta_{m,-ij}) = \theta_{oo} = \theta_1$

Das GMRF ist durch 3 Parameter spezifiziert.

$$\theta_1 \begin{bmatrix} & \frac{\theta_3}{\theta_1} \\ 1 & \frac{\theta_2}{\theta_1} \end{bmatrix}$$

Approximation der marginalen Posteriori der Parameter mittels INLA und rgeneric:

Das Modell ist wohl definiert für θ_1, θ_2 $\theta_3 \in (\frac{1}{\lambda_{min}}, \frac{1}{\lambda_{max}})$ mit λ_i = Eigenwert von Nachbarschaftsmatrix W. Skalierung um Autokorrelationsparameter < 1 zu halten:

$\frac{W}{\lambda_m ax}$

Implementierung mit rgeneric folgt Kapitel 11.3 aus Bayesian Inference with INLA.

Das GRF (Materie-Dichte-Kontrast-Feld) ist durch das Healpix-Format schon diskretisiert.

CAR.model <- inla.rgeneric.define(inla.rgeneric.CAR.model, W = W)

f.car <- obs ~ 1 + f(id_x, model = CAR.model)

m.car <- inla(f.car, data = df_sky, family = "gaussian")

summary(m.car)

```
##
## Call:
##    c("inla.core(formula = formula, family = family, contrasts = contrasts,
```

```
##    ", " data = data, quantiles = quantiles, E = E, offset = offset, ", "
##    scale = scale, weights = weights, Ntrials = Ntrials, strata = strata,
##    ", " lp.scale = lp.scale, link.covariates = link.covariates, verbose =
##    verbose, ", " lincomb = lincomb, selection = selection, control.compute
##    = control.compute, ", " control.predictor = control.predictor,
##    control.family = control.family, ", " control.inla = control.inla,
##    control.fixed = control.fixed, ", " control.mode = control.mode,
##    control.expert = control.expert, ", " control.hazard = control.hazard,
##    control.lincomb = control.lincomb, ", " control.update =
##    control.update, control.lp.scale = control.lp.scale, ", "
##    control.pardiso = control.pardiso, only.hyperparam = only.hyperparam,
##    ", " inla.call = inla.call, inla.arg = inla.arg, num.threads =
##    num.threads, ", " blas.num.threads = blas.num.threads, keep = keep,
##    working.directory = working.directory, ", " silent = silent, inla.mode
##    = inla.mode, safe = FALSE, debug = debug, ", " .parent.frame =
##    .parent.frame)")
## Time used:
##     Pre = 1.54, Running = 1.3, Post = 0.0148, Total = 2.86
## Fixed effects:
##              mean    sd 0.025quant 0.5quant 0.975quant mode kld
## (Intercept)    0 0.001     -0.001        0      0.001   NA   0
##
## Random effects:
##   Name     Model
##     id_x RGeneric2
##
## Model hyperparameters:
##                                              mean       sd 0.025quant  0.5quant
## Precision for the Gaussian observations  2.33e+05 5.89e+04  137165.17  2.27e+05
## Theta1 for id_x                          1.23e+01 2.49e-01      11.84  1.23e+01
## Theta2 for id_x                         -4.41e-01 1.43e+00      -3.36 -3.98e-01
##                                         0.975quant mode
## Precision for the Gaussian observations   3.68e+05   NA
## Theta1 for id_x                           1.28e+01   NA
## Theta2 for id_x                           2.25e+00   NA
##
## Marginal log-Likelihood:  206.76
##  is computed
## Posterior summaries for the linear predictor and the fitted values are computed
## (Posterior marginals needs also 'control.compute=list(return.marginals.predictor=TRUE)')
```

head(marg.prec)

```
##        x y
## [1,] Inf 0
## [2,] Inf 0
## [3,] Inf 0
## [4,] Inf 0
## [5,] Inf 0
## [6,] Inf 0
```

head(marg.rho)

```
##              x         y
## [1,] 0.9999898  682.8267
## [2,] 0.9999903 1340.8675
```

```
## [3,] 0.9999906 1992.1869
## [4,] 0.9999908 2641.9908
## [5,] 0.9999910 3291.9130
## [6,] 0.9999911 3942.3779
```

Oder: Bestimmung der Paramter Werte per Minimierung eines Diskrepanzmaß zwischen GRF und GMRF z.B. Kullback-Leibler Diskrepanz

$\theta^* = argmin_{\theta \in \Theta_\infty^+} D(\pi(x;\theta), \pi(z))$

In **Gaussian Markov Random Fields: Theory and Applications** Kapitel 5.1.2 wird dies für Präzisionsmatrizen, die die Struktur einer Toeplitz- oder (Block) circulant Matrix besitzen erläutert. Für diese Präzisionsmatrizen lässt sich das Optimierungsproblem anhand der Basis ρ der Korrelationsfunktion des GRF und der Basis $\rho(\theta)$ der Präzisionsmatrix des GMRF definieren: $\theta^* = argmin_{\theta \in \Theta_\infty^+} ||\rho - \rho(\theta)||_w^2$
Problem: Aufgrund des Healpix Formats hat die Präzisionsmatrix nicht die Struktur einer Toeplitzmatrix oder einer (Block) circulant Matrix.
Idee: GRF ist isotrop, also: Zu erst werden die Pixel neu durchnummeriert, sodass die Pärzisionsmatrix, die Struktur einer Toeplitz-Matrix besitzt. Wobei diese Struktur nicht ganz erreicht wird, da die Anzahl der Nachbarn variiert. Die Toeplitz-Matrix kann mit einer (Block) Circulant Präzisionsmatrix defniert auf einem Tours approximiert werden. Der Fehler der Approximation ist in zwei Dimensionen vernachlässigbar. Es werden zwei verschiedene Basen definiert, eine für 8 und eine für 7 Nachbarn. Dann werden per Minimierung des Diskrepanzmaß die Paramter für die Basen bestimmt und den jeweiligen Einträgen in der Päzisionsmatrix zugeteilt.