



Technische Universität Graz
Institut für Festigkeitslehre
Kopernikusgasse 24/I
8010 Graz

Benedikt Daum

Anisotrope Plastizität nach Hill für kleine
Verzerrungen mit finiten Elementen

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs

Technische Universität Graz
Fakultät Maschinenbau

Studienrichtung:
Mechatronik im Maschinenbau

Betreuer: Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Ulz
Beurteiler: O.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian C. Celigoj

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	II
Symbolverzeichnis	III
Danksagung	IV
Kurzfassung/Abstract	IV
I FE-Methode	1
1 Anmerkungen zur FE-Methode	1
1.1 Voigt'sche Notation	1
1.2 Grundlegende Gleichungen	2
2 Elemente	3
2.1 Viereckiges Scheibenelement der Lagrange Klasse	3
2.2 Sechsseitiges Volumenelement der Lagrange Klasse	4
3 Beispiel: Kirschproblem	6
3.1 Analytische Lösung	6
3.2 FE-Lösung	7
II Plastizität allgemein	12
4 Rheologische Modelle	12
4.1 Grundelemente	12
4.2 Kombinationen	14
5 Modellannahmen	15
5.1 Kleine Verformungen	15
5.2 Ideale Plastizität	15
5.3 Fließbedingung	15
5.4 Hooke'sches Gesetz	16
5.5 Drucker'sches Postulat	17
5.6 Prandtl-Reuß Gleichungen	18
5.7 Wertebereiche für Fließfunktion und plastischen Konsistenzparameter . . .	18
5.8 Plastische Inkompressibilität	19
6 Eigenschaften plastischer Probleme	20
6.1 Pseudozeit als Lastparameter	20
6.2 Gegenüberstellung: Linear - Nichtlinear	21
6.3 Pfadabhängigkeit	21

7 Lösungsverfahren nichtlinearer Probleme	23
7.1 Gleichgewicht in inkrementeller Form	23
7.2 Euler-Verfahren	24
7.3 Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren	27
7.4 Newton-Raphson-Verfahren	30
8 Materialtangente	32
8.1 Differentielle Materialtangente	32
8.2 Algorithmenkonsistente Materialtangente	33
III Isotrope Plastizität nach von Mises	37
9 Eigenschaften der von Mises-Plastizität	37
9.1 Von Mises-Fließfunktion im Hauptnormalspannungsraum	37
9.2 Von Mises-Fließfunktion im Hauptnormalverzerrungsraum	37
9.3 Inkompresabilität der von Mises-Plastizität	39
9.4 Von Mises-Fließfunktion in Voigt'scher Notation	39
9.5 Ableitungen der von Mises-Fließbedingung	40
10 Entwicklung des Lösungsalgorithmus	41
10.1 Radial-Return Algorithmus und Spannungsinkrement	41
10.2 Materialtangente für die von Mises-Fließbedingung	45
10.3 Gesamtalgorithmus für die von Mises-Fließfunktion	46
11 Beispiel: Kugel unter Innenverschiebung	48
11.1 Analytische Lösung	48
11.2 FE-Lösung	48
11.3 Vergleich	53
12 Beispiel: Traglast	53
12.1 Analytische Lösung	53
12.2 FE-Lösung	54
IV Anisotrope Plastizität nach Hill	56
13 Eigenschaften der Hill-Plastizität	56
13.1 Ansatz der Hill-Fließfunktion	56
13.2 Hill-Fließfunktion in Voigt'scher Notation	57
13.3 Orthotropie	58
13.4 Hill-Fließfunktion im Hauptnormalspannungsraum	59
13.5 Ableitungen der Hill-Fließbedingung	59
13.6 Inkompresibilität der Hill-Plastizität	60

14 Sonderfälle der orthotropen Plastizität	62
14.1 Von Mises-Plastizität als Sonderfall der Hill-Plastizität	62
14.2 Kubische Symmetrie	63
14.3 Transverse Isotropie	65
15 Entwicklung des Lösungsalgorithmus	67
15.1 General-Return Algorithmus und Spannungsinkrement	67
15.2 Materialtangente für die Hill-Fließbedingung	68
15.3 Gesamタルgorithmus für die Hill-Fließfunktion	69
16 Beispiel: kubisch symmetrisches, dickwandiges Rohr unter Innenverschiebung	70
17 Beispiel: kubisch symmetrisches, dickwandiges Rohr unter Innenverschiebung mit verdrehter Lage der Orthotropiehauptachsen	73

Abbildungsverzeichnis

1	Viereckiges Lagrange-Scheibenelement in Referenzkonfiguration	4
2	Sechsseitiges Lagrange-Volumenelement in Referenzkonfiguration	5
3	Kirschproblem	6
4	Kirschproblem: Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über r für $\varphi = \frac{\pi}{2}$	7
5	Kirschproblem: Normalspannung σ_{rr} über r für $\varphi = \frac{\pi}{2}$	8
6	Kirschproblem: Normalspannung σ_{xx}	9
7	Kirschproblem: Normalspannung σ_{yy}	10
8	Kirschproblem: Schubspannung σ_{xy}	11
9	Feder	12
10	Reiber	13
11	Dämpfer	13
12	Feder - Reiber Parallelanordnung	14
13	Feder - Reiber Reihenanordnung	14
14	Idealisierung der Plastizität	15
15	Allgemeine Fließfläche im Hauptnormalspannungsraum	17
16	Zustandsänderungen im Hauptnormalspannungsraum	18
17	Gegenüberstellung linear - nichtlinear	20
18	Pfadabhängigkeit im einachsigen Spannungszustand	22
19	Materialsekante	24
20	Explizites Euler'sches Polygonzugverfahren	26
21	Graphische Darstellung des Euler-Algorithmus	26
22	Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren - Iterationen	28
23	Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren - zwei Inkremente	29
24	Newton-Raphson-Verfahren	31
25	Graphische Darstellung des Newton-Raphson-Algorithmus	31
26	Von Mises-Fließfläche im Hauptnormalspannungsraum	38
27	Hauptnormalspannungsraum und Hauptnormalverzerrungsraum	38
28	Versuchsspannung	42
29	Größen des Radial-Return Algorithmus im Hauptnormalspannungsraum	43
30	Radial-Return Iterationsprozess	45
31	Gesamタルgorithmus für die von Mises-Fließfunktion	47
32	Hohlkugel unter Innenverschiebung	49
33	Vernetzung	50
34	Äquivalente plastische Verzerrung κ	51
35	Normierte Vergleichsspannung σ_V/σ_F	52
36	Radialverschiebung u über Radius r	53
37	Ausbreitung der plastischen Zone bis zum Erreichen der Traglast	54
38	Ausbreitung der plastischen Zone in der FE-Rechnung	55
39	Hill-Fließfläche im Hauptnormalspannungsraum	61
40	Kubisch symmetrischer Quader	63
41	Transvers isotroper Quader	65
42	Größen des General-Return Algorithmus im Hauptspannungsraum	68
43	Dickwandiges Rohr unter Innenverschiebung	70
44	Orthotropiehauptachsen parallel zum globalen Koordinatensystem	71
45	Orthotropiehauptachsen verdreht zum globalen Koordinatensystem	71
46	FE-Lösung, parallel	72
47	FE-Lösung, gedreht	74

Symbolverzeichnis

Teil I, FE-Methode

\mathbf{T}_i	Transformationsmatrix in ein um die Achse i gedrehtes System
\mathbf{f}^{int}	Vektor der inneren Knotenkräfte
\mathbf{B}^m	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
\mathbf{r}_k^m	Ortsvektor des k -ten Gaußpunkts des m -ten Elements in der Referenzkonfiguration
\mathbf{J}^m	Jacobi Matrix (Funktionalmatrix)
\bar{V}^m	m -tes Elementvolumen der Referenzkonfiguration
\mathbf{K}	Gesamtsteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}^m	Steifigkeitsmatrix des m -ten Elements
\mathbf{C}^m	Materialtangente des m -ten Elements
$N_{i,j}, N_{i,j,k}$	Formfunktion des Knotens i, j, k
r, s, t	Koordinaten in der Referenzkonfiguration
l_a^b	a -tes Lagrange-Polynom vom Grad b
$\hat{\mathbf{u}}$	Knotenpunktsverschiebung
w_k	Gewichtungsfaktor der numerischen Integration

Teil II, Plastizität allgemein

λ	Plastischer Konsistenzparameter
η	Dynamische Viskosität
\mathcal{F}	Fließfunktion
\mathbf{C}_{el}	Elastische Materialtangente
\mathbf{V}	Verzerrungstensor
\mathbf{f}^{ext}	Vektor der äußeren Knotenkräfte
Ψ	Residuum
n	Index der Lastinkremente (dh. Lasterhöhungen)
$n + 1$	Laufendes Inkrement
i	Index der Iterationen (dh. Wiederholungen) des Gleichgewichts
$i + 1$	Laufende Iteration
t	Pseudozeit, Lastparameter

Teil III, Isotrope Plastizität nach von Mises

σ_F	Fließspannung (Streckgrenze)
\mathbf{M}	Matrix der von Mises-Koeffizienten

Teil IV, Anisotrope Plastizität nach Hill

\mathbf{H}	Matrix der Hill-Koeffizienten
F, G, H, L, M, N	Hill-Koeffizienten
X, Y, Z, R, S, T	Normal- und Schubspannungsstreckgrenzen.
\mathbf{D}_i	Drehmatrix um die Achse i

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand vorwiegend im Sommersemester 2010 am Institut für Festigkeitslehre der TU Graz. Ich möchte an dieser Stelle allen Mitarbeitern des Institutes für die anregende und kollegiale Arbeitsumgebung danken. Besonderer Dank gebührt Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Ulz für die uneigennützige und fachkundige Unterstützung.

Kurzfassung

Ziel dieser Diplomarbeit war die Entwicklung eines Programmes zur Lösung anisotroper, ideal plastischer Probleme mithilfe der Finite-Elemente-Methode. Die Implementierung erfolgte objektorientiert in der Entwicklungsumgebung MATLAB.

Die vorliegende Arbeit ist so strukturiert, dass einer kurzen Einführung der benötigten Zusammenhänge der linearen FE-Methode und der verwendeten Elemente eine allgemeine Darstellung elasto-plastischer Probleme folgt. Dabei werden möglichst allgemein Modellierung, Eigenschaften und Lösungsmethoden der idealen Plastizität behandelt. Der Lösungsalgorithmus des erstellten Programmes wird zuerst anhand der isotropen von Mises-Plastizität erarbeitet und anschließend auf die anisotrope Hill-Plastizität erweitert. Abschließend folgt eine Untersuchung der Eigenschaften der anisotropen Plastizität.

Abstract

The objective of this diploma thesis was the development of a program to solve anisotropic, ideal plastic problems by finite elements. This program has been implemented in the development environment MATLAB.

As an introduction the fundamentals of the linear finite element method and the implemented elements are presented. Then follows a general presentation of ideal elasto-plastic problems, their properties, modelling and solution techniques. The solution algorithm is first developed for the isotropic von Mises-plasticity and then applied to the anisotropic Hill-plasticity. Finally, some properties of the Hill-plasticity are investigated.

Teil I

FE-Methode

Für die in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungen wurde ein FE-Programm entwickelt. Auf Einzelheiten der linearen FE-Methode kann hier nicht weiter eingegangen werden, es werden jedoch die verwendeten Elemente kurz vorgestellt und einige grundlegende Gleichungen, soweit später darauf Bezug genommen wird, angeführt. Anschließend wird zur Verifizierung der Funktionalität der Implementierung der linearen FE-Methode ein Beispiel mit bekannter analytischer Lösung diskutiert.

1 Anmerkungen zur FE-Methode

1.1 Voigt'sche Notation

Gleichungen werden in dieser Arbeit zum überwiegenden Teil in Voigt'scher Notation angeschrieben, es wird jedoch, wo dies zweckmäßig erscheint, auch auf die Indexschreibweise zurückgegriffen. Die Voigt'sche Notation wird dazu verwendet, um Matrizeneinträge in Vektoreinträge bzw. Tensoren 4. Stufe in Matrizen umzuordnen. Die Umordnung einer symmetrischen Matrix \mathbf{A} in einen Spaltenvektor \mathbf{a} erfolgt gemäß Gleichung (1).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Voigt'sche Notation}} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{12} \\ a_{23} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Voigt führt die nach ihm benannte Notation in der Quelle [11] ein.

Es werden auch noch Transformationen um die drei Koordinatenachsen benötigt werden. Die dazugehörigen Transformationsmatrizen der Voigt'schen Notation für die Drehung um φ um x bzw. y bzw. z lauten:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & \sin(2\varphi) & 0 \\ 0 & \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & -\sin(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & -1/2 \sin(2\varphi) & 1/2 \sin(2\varphi) & 0 & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & 0 & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & \sin(2\varphi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2(\varphi) & 0 & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & -\sin(2\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 1/2 \sin(2\varphi) & 0 & -1/2 \sin(2\varphi) & 0 & 0 & \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & \sin(2\varphi) & 0 & 0 \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & -\sin(2\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 \sin(2\varphi) & 1/2 \sin(2\varphi) & 0 & \cos(2\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (4)$$

1.2 Grundlegende Gleichungen

Es werden nun einige grundlegende Gleichungen der FE-Methode zur späteren Verwendung angeführt. Die Indizierung elementgebundener bzw. gaußpunktgebundener Größen mit entsprechenden Indizes erfolgt nur soweit dies die Lesbarkeit nicht allzu sehr einschränkt. Das Argument \mathbf{r}_k^m der \mathbf{B} -Matrix wird zur besseren Übersicht meist ebenfalls ausgelassen.

$m \dots$ Elementnummer
 $k \dots$ Gaußpunktnummer

Die globale Assemblierung der inneren Knotenpunktskräfte \mathbf{f}^{int} ist in analytischer Form durch Gleichung (5) und für die numerische Integration durch Gleichung (6) gegeben.

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m(\mathbf{r}^m)]^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}^m) \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m \quad (5)$$

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_m \sum_k w_k [\mathbf{B}^m(\mathbf{r}_k^m)]^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}_k^m) \det(\mathbf{J}_k^m) \quad (6)$$

$\mathbf{r}_k^m \dots$ Lage des Gaußpunkts k $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}_k^m) \dots$ Spannung im Gaußpunkt k
 $w_k \dots$ Integrationsgewicht k $\mathbf{J}_k^m \dots$ Jacobi-Matrix im Gaußpunkt k

Die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix \mathbf{B} stellt den Zusammenhang zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Verzerrungen her Gleichung (7):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{u}}^m \quad (7)$$

Die \mathbf{C} -Matrix beinhaltet das Materialgesetz und verknüpft die Verzerrungen mit den Spannungen. Die \mathbf{C} -Matrix wird auch Materialtangente genannt.

$$\boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^m \boldsymbol{\varepsilon}^m(\mathbf{r}) \quad \mathbf{C}^m = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8)$$

Die Gesamtsteifigkeit des Problems ist in Gleichung (9) für die analytische Integration und in Gleichung (10) für die numerische Integration gegeben.

$$\mathbf{K} = \sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m(\mathbf{r}^m)]^T \mathbf{C}^m \mathbf{B}^m(\mathbf{r}^m) \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \sum_m \sum_k w_k [\mathbf{B}^m(\mathbf{r}_k^m)]^T \mathbf{C}^m \mathbf{B}^m(\mathbf{r}_k^m) \det(\mathbf{J}_k^m) \quad (10)$$

2 Elemente

In den Berechnungsbeispielen dieser Arbeit wurden ausschließlich Lagrange-Elemente 1. und 2. Ordnung verwendet. Der Aufbau der Lagrange-Elemente wird hier kurz vorgestellt. Näheres zur linearen FE-Methode und Elementtypen findet man in Quelle [13]. Die Basis der Lagrange-Elemente ist das Lagrange-Polynom, aus denen die Formfunktionen der Elemente zusammengesetzt werden (Gleichung (11)).

$$l_a^b(\xi) = \prod_{\substack{c=0 \\ c \neq a}}^b \frac{\xi - \xi_c}{\xi_a - \xi_c} \quad (11)$$

$$\frac{\partial l_a^b}{\partial \xi} = \left[\prod_{\substack{c=0 \\ c \neq a}}^b \frac{1}{\xi_a - \xi_c} \right] \left[\sum_{\substack{c=0 \\ c \neq a}}^b \prod_{\substack{d=0 \\ d \neq a, d \neq c}}^b \xi - \xi_d \right] \quad (12)$$

2.1 Viereckiges Scheibenelement der Lagrange Klasse

Die Elementknoten der Lagrange-Elemente sind gitterförmig angeordnet, und werden durch die Indizes i, j bezeichnet. Für jeden Knoten (i, j) gibt es eine Formfunktion $N_{i,j}(r, s)$ die im Knoten (i, j) den Wert 1 und in allen anderen Knoten den Wert 0 annimmt (vergl. Abbildung 1). Diese Formfunktion erhält man durch Multiplikation zweier Lagrange-Polynome mit Stützstellen in den Knotenpunkten entlang der $r = const.$ bzw. $s = const.$ Richtung der Referenzkonfiguration (Gleichung (13)).

$$N_{i,j}(r, s) = l_i^m(r) l_j^n(s) \quad (13)$$

Aus den Formfunktionen wird die Interpolationsmatrix \mathbf{H} gebildet. In Voigt'scher Notation hat sie die Form gemäß Gleichung (14), wobei der Knotenpunktverschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}$ gemäß Gleichung (15) geordnet ist.

$$\mathbf{H}(r, s) = \begin{bmatrix} N_{0,0}(r, s) & 0 & \dots & N_{m,n}(r, s) & 0 \\ 0 & N_{0,0}(r, s) & \dots & 0 & N_{m,n}(r, s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_{0,0} \quad v_{0,0} \quad \dots \quad u_{m,n} \quad v_{m,n}]^T \quad (15)$$

Die \mathbf{B} -Matrix lautet somit:

$$\mathbf{B}(r, s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{0,0}}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_{m,n}}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{0,0}}{\partial s} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{m,n}}{\partial s} \\ \frac{\partial N_{0,0}}{\partial s} & \frac{\partial N_{0,0}}{\partial r} & \frac{\partial N_{m,n}}{\partial s} & \frac{\partial N_{m,n}}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (16)$$

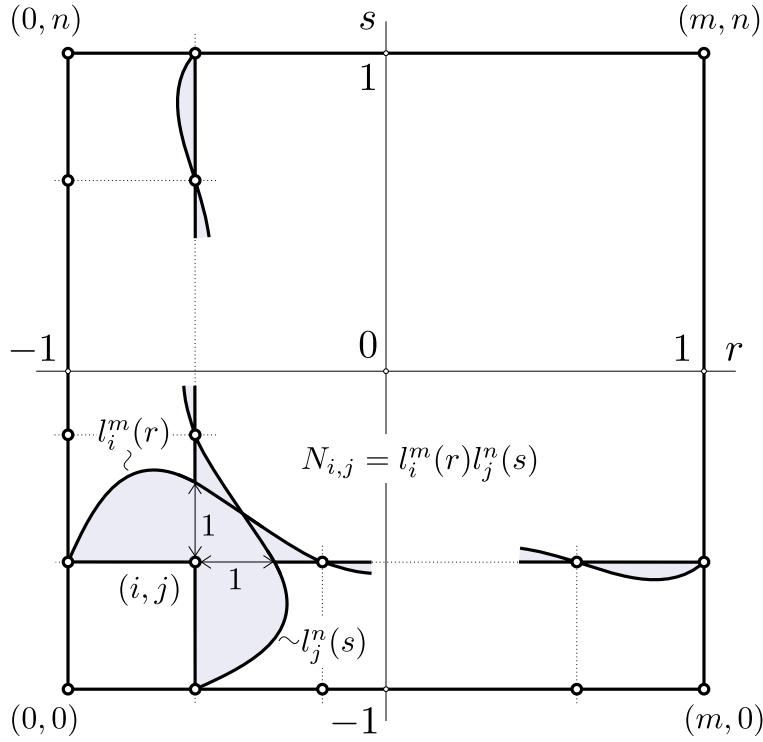


Abbildung 1: Viereckiges Lagrange-Scheibenelement in Referenzkonfiguration mit Formfunktionen

2.2 Sechsseitiges Volumenelement der Lagrange Klasse

Die Formfunktionen des sechsseitigen Lagrange-Volumenelements ergeben sich in analoger Weise zum Scheibenelement aus Abschnitt 2.1. Es muss lediglich ein weiteres Lagrange-Polynom für die dritte Dimension hinzugefügt werden (vergl. Abbildung 2, nur das zusätzliche Polynom $l_l^p(t)$ dargestellt).

$$N_{i,j,k}(r, s, t) = l_i^m(r)l_j^n(s)l_k^p(t) \quad (17)$$

Analog zu Gleichung (14):

$$\mathbf{H}(r, s, t) = \begin{bmatrix} N_{0,0,0}(r, s, t) & 0 & 0 \\ 0 & N_{0,0,0}(r, s, t) & 0 \\ 0 & 0 & N_{0,0,0}(r, s, t) \\ & & & N_{m,n,p}(r, s, t) & 0 & 0 \\ & & & 0 & N_{m,n,p}(r, s, t) & 0 \\ & & & 0 & 0 & N_{m,n,p}(r, s, t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_{0,0,0} \ v_{0,0,0} \ w_{0,0,0} \ \dots \ u_{m,n,p} \ v_{m,n,p} \ w_{m,n,p}]^T \quad (19)$$

Analog zu Gleichung (16):

$$\mathbf{B}(r, s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial t} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial t} \\ \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial s} & \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial r} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial s} & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial t} & \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial s} & & 0 & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial t} & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial s} \\ \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_{0,0,0}}{\partial s} & & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_{m,n,p}}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (20)$$

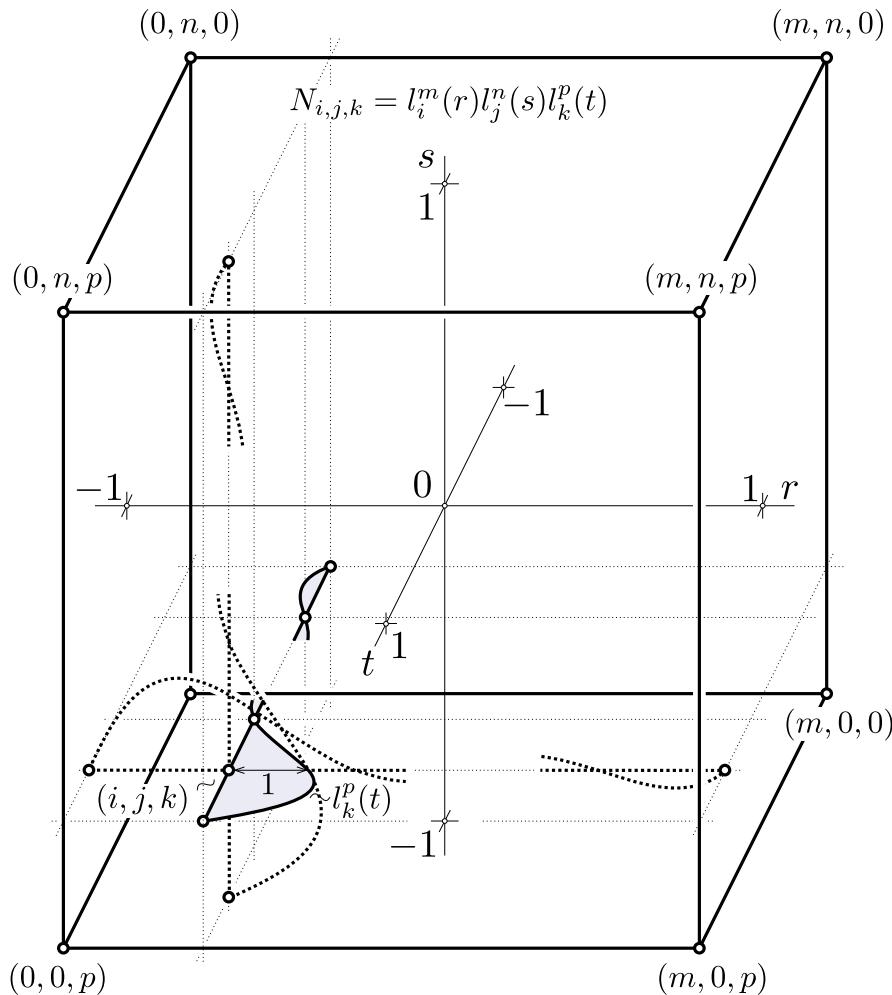


Abbildung 2: Sechsseitiges Lagrange-Volumenelement in Referenzkonfiguration mit Formfunktionen

3 Beispiel: Kirschproblem

Vor dem Einstieg in die nichtlinearen Probleme der Plastizität wurde das entwickelte FE-Programm durch Vergleich mit Problemen mit bekannter Lösung verifiziert. Im Folgenden wird die Gegenüberstellung der FE-Lösung mit der analytischen Lösung des sogenannten Kirschproblems vorgestellt. Dabei wird die Spannungsverteilung in einer als unbegrenzt ausgedehnt gedachten Scheibe mit kreisförmigem Loch bestimmt.

3.1 Analytische Lösung

Aufgabenstellung: Man bestimme die, durch eine kreisförmige Bohrung gestörte, Spannungsverteilung einer in $x = \pm\infty$ mit der Zugstreckenlast p belasteten, unendlich ausgedehnten Scheibe. Die Scheibendicke betrage h .

Die analytische Lösung dieses Problems ist in den Gleichungen (22) bis (23) angegeben ([4], Seite 142):

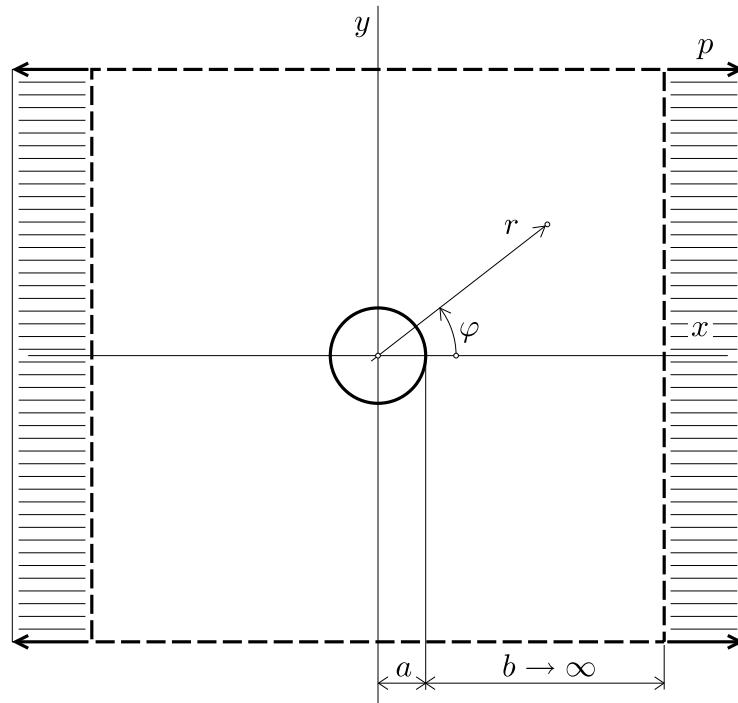


Abbildung 3: Kirschproblem

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2h} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi) \right) \quad (21)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p}{2h} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi) \right) \quad (22)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{p}{2h} \left(-1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin(2\varphi) \quad (23)$$

3.2 FE-Lösung

Für die FE-Rechnung kann nur eine endlich ausgedehnte Scheibe modelliert werden, da die Spannungen mit zunehmendem Radius jedoch schnell abklingen, kann dies als Näherung akzeptiert werden. Zahlenwerte:

$$a = 25 \text{ mm} \quad p = 1 \text{ MPa}$$

$$b = 150 \text{ mm} \quad h = 1 \text{ mm}$$

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen die aus den Gaußpunkten in die Knoten extrapolierten Spannungen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ für den Winkel $\varphi = \pi/2$. Die Schubspannung $\sigma_{r\varphi}$ ist unter diesem Winkel Null. Aufgrund dieser Extrapolation, des Diskretisierungsfehlers und des Modellierungsfehlers durch die endlich ausgedehnte Scheibe, entstehen größere Abweichungen von der analytischen Lösung. Der Wert für σ_{rr} bei $r = 25$ in Abbildung 5 ist ein Artefakt.

Die Abbildungen 6 bis 8 wurden mit dem Postprocessing Programm *GiD* erstellt.

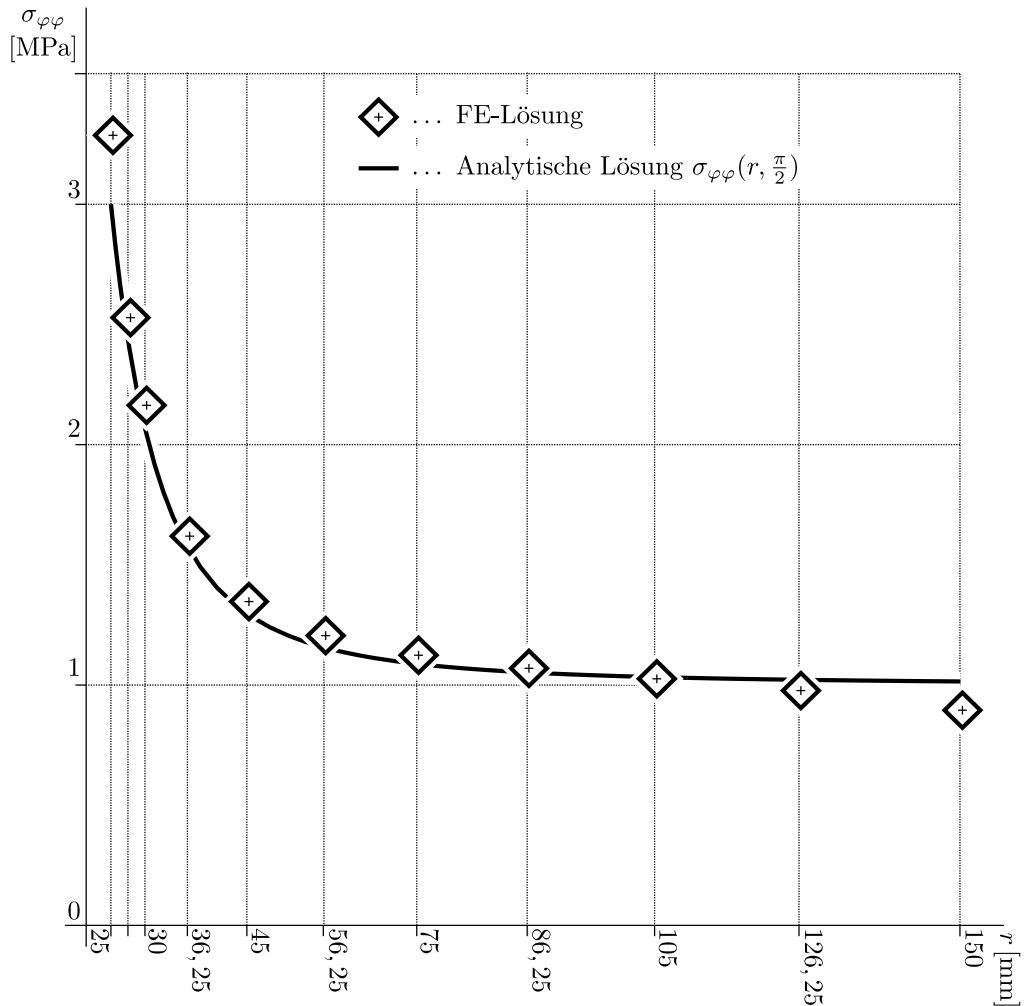


Abbildung 4: Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über r für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

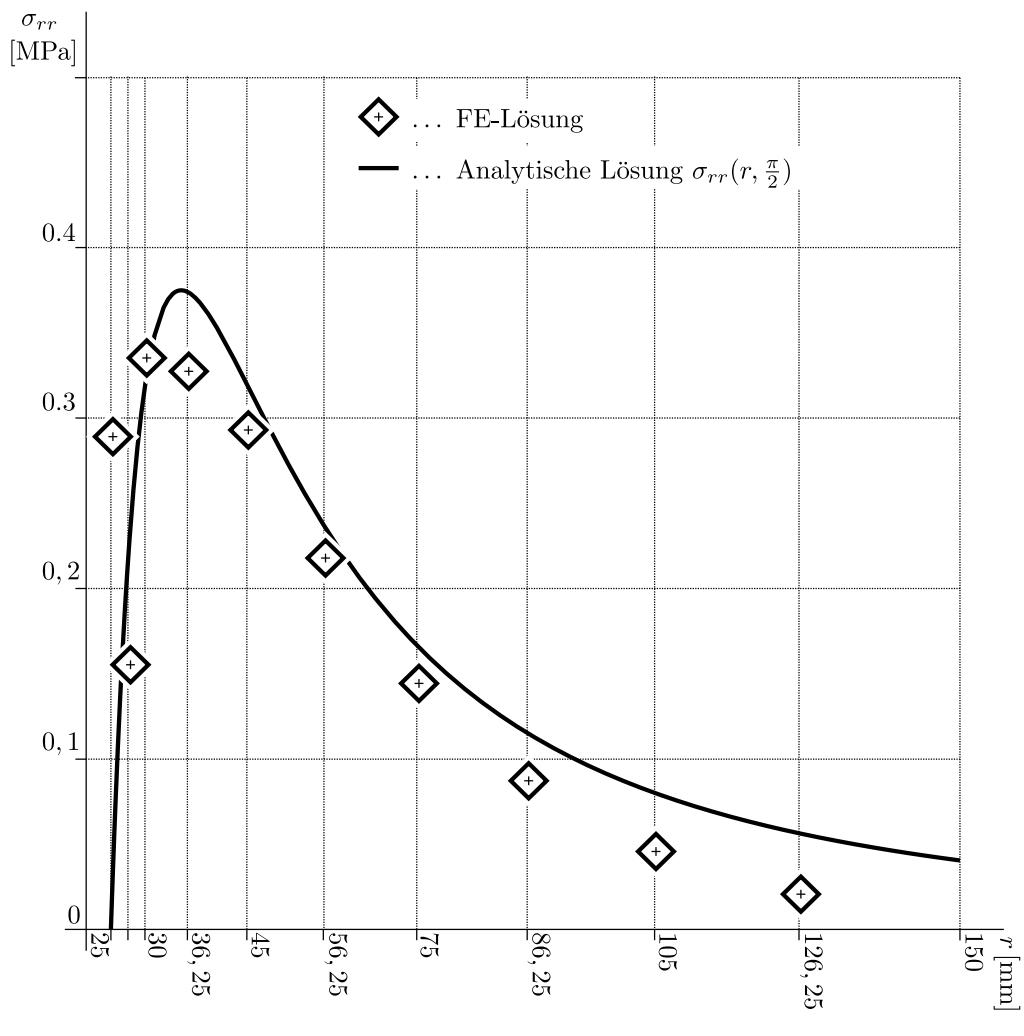


Abbildung 5: Normalspannung σ_{rr} über r für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

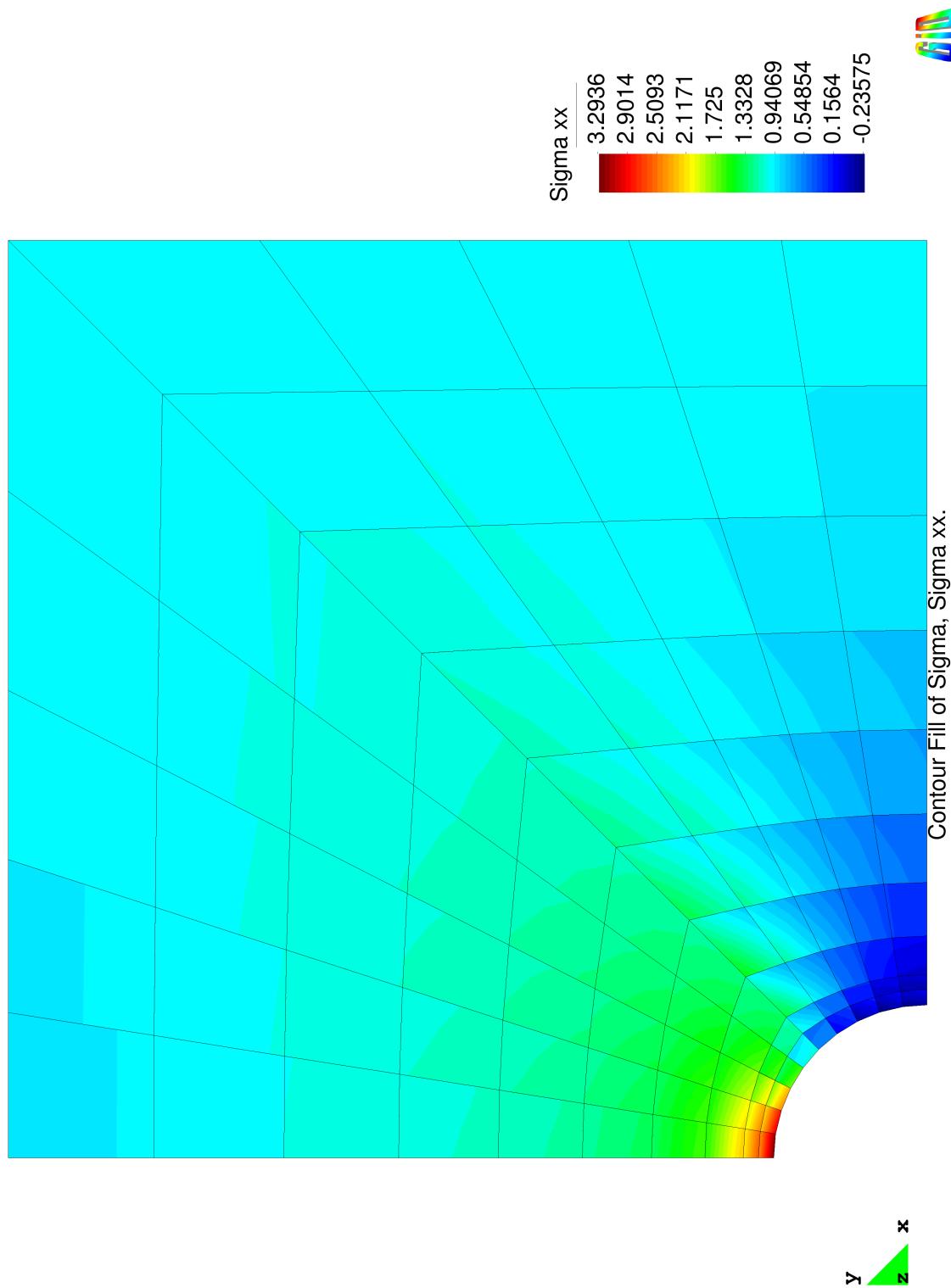


Abbildung 6: Normalspannung σ_{xx}

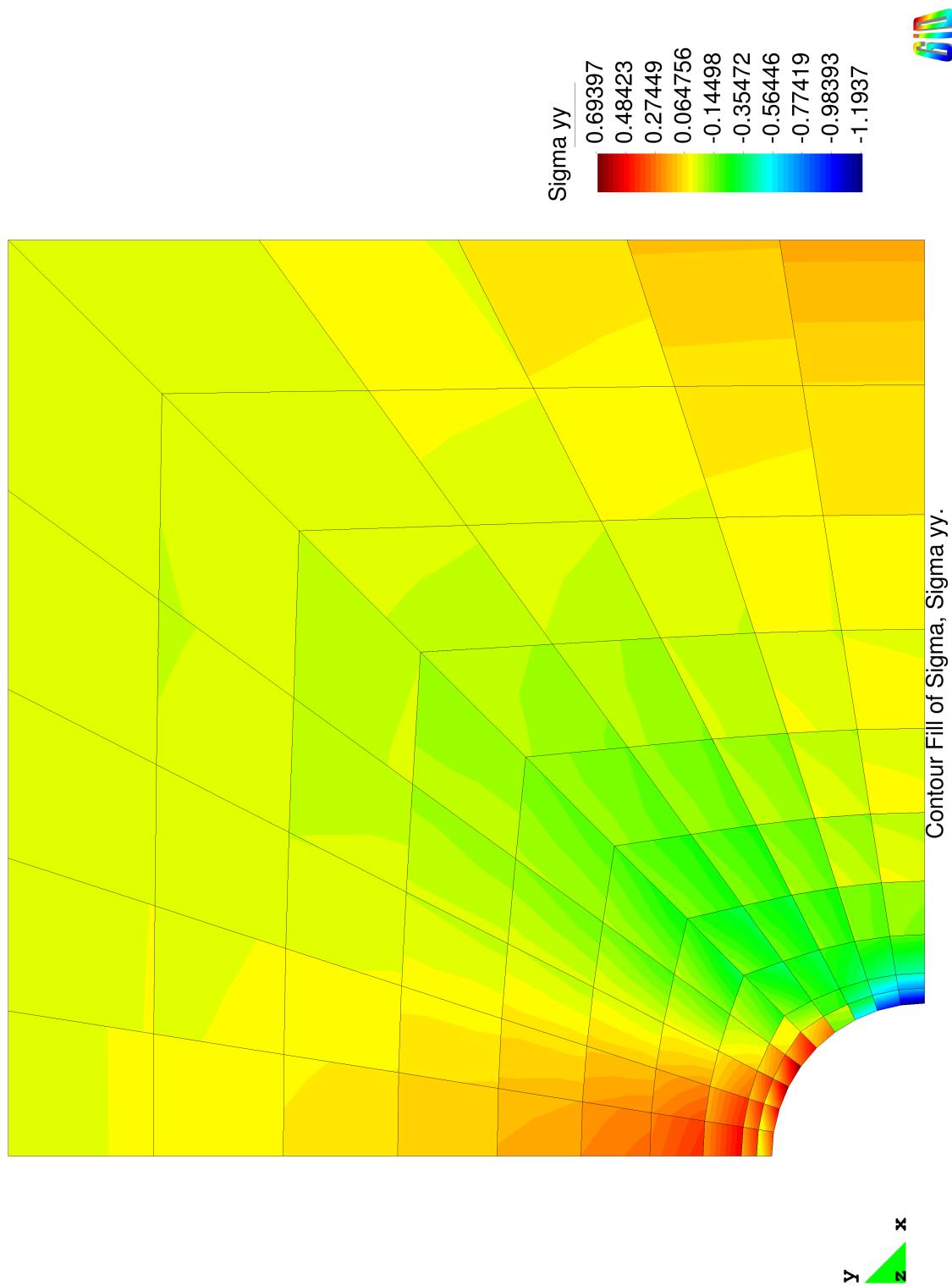


Abbildung 7: Normalspannung σ_{yy}

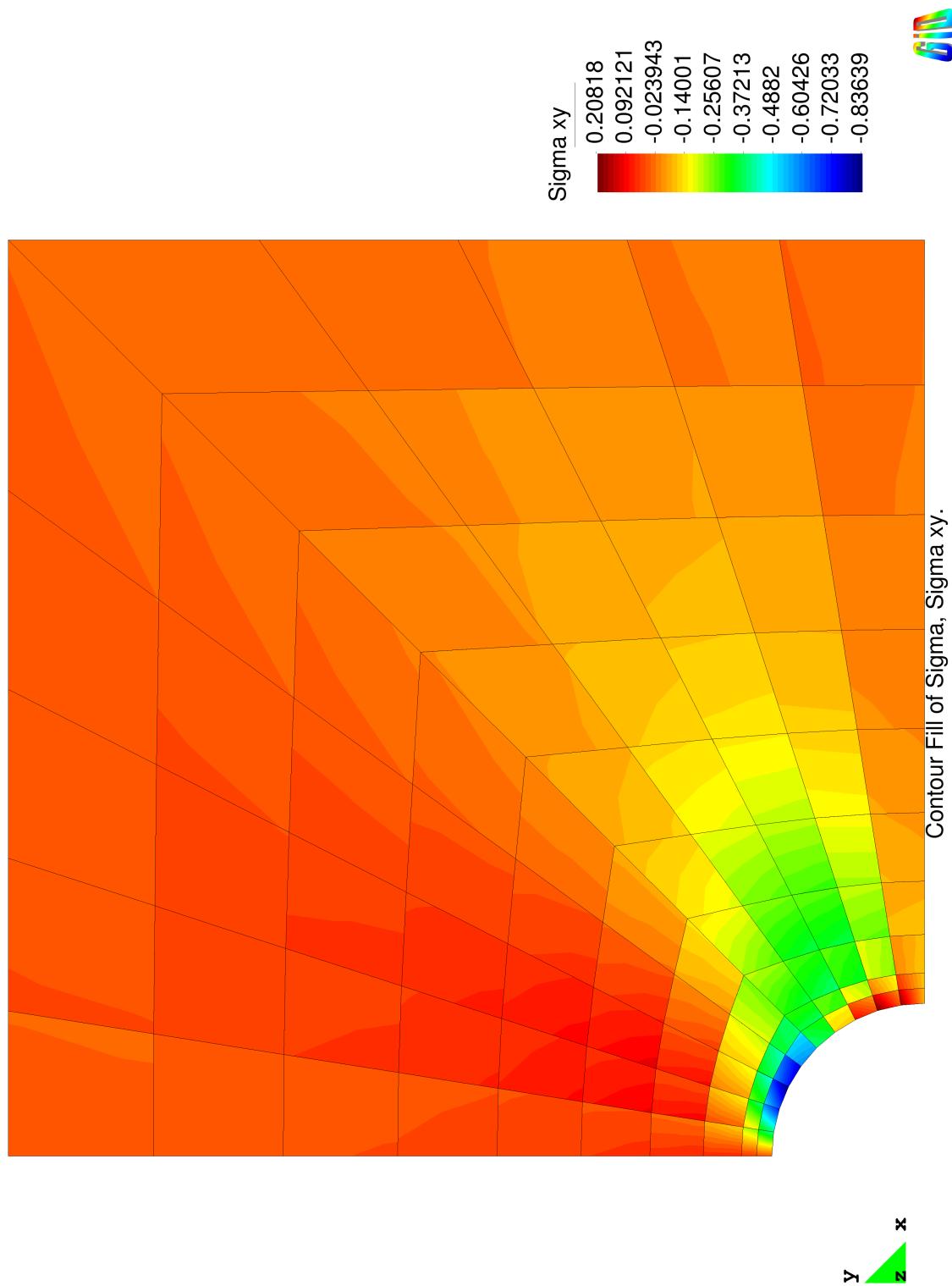


Abbildung 8: Schubspannung σ_{xy}

Teil II

Plastizität allgemein

In diesem Teil werden Eigenschaften und Lösungsansätze, die allen Plastizitätsproblemen gemeinsam sind, vorgestellt, soweit dies ohne die Bezugnahme auf eine bestimmte Fließfunktion möglich ist.

4 Rheologische Modelle

Rheologische Modelle veranschaulichen das Materialverhalten im einachsigen Spannungszustand. Durch die verschiedenen Grundelemente und ihre Kombinationen können die Materialeigenschaften, insbesondere das Verhalten bei plastischer Verformung, idealisiert nachgebildet werden. In den zu den einzelnen Modellen angegebenen Sinnbildern bezeichnet ε eine Verzerrung und σ eine Spannung.

4.1 Grundelemente

Ist die unter Last auftretende Verschiebung vollständig reversibel, dh. das Material kehrt nach Entlastung in den Ausgangszustand zurück, liegt rein elastisches Verhalten vor. Besteht außerdem ein linearer Zusammenhang zwischen Verschiebung und wirksamer Kraft wird dies als **linear elastisches Materialverhalten** bezeichnet. Eine lineare Feder gehorcht diesem Zusammenhang und wird als dessen Sinnbild verwendet (Abbildung 9). Elastisches Verhalten ist konservativ, die gesamte zugeführte mechanische Energie ist wiedergewinnbar. Der Spannungs-Verzerrungszusammenhang ist eindeutig und umkehrbar, es gibt keine Pfadabhängigkeit.

Es gilt das Hooke'sche Gesetz (vergl. Abschnitt 5.4).

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}$$

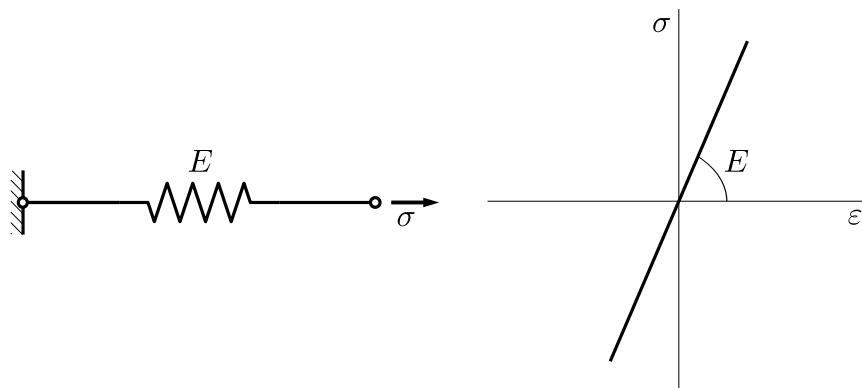


Abbildung 9: Feder

Bei **ideal-plastischem Materialverhalten** bleibt eine wirksame Kraft bis zu einer bestimmten Grenze ohne Wirkung. Erst nach Überschreiten eines Schwellwertes erfolgt eine Verschiebung bei gleichbleibender Kraft. Bei Entlastung bleibt die erfolgte Verschiebung zurück. Als Sinnbild dient ein gewichtsbelasteter Reibkontakt, kurz: Reiber (Abbildung 10).

Plastisches Verhalten ist dissipativ, die gesamte zugeführte mechanische Energie bewirkt eine Temperaturerhöhung. Der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang ist nicht eindeutig umkehrbar, der Zustand hängt vom durchlaufenen Pfad ab.

Es gilt das Drucker'sche Postulat (vergl. Abschnitt 5.5):

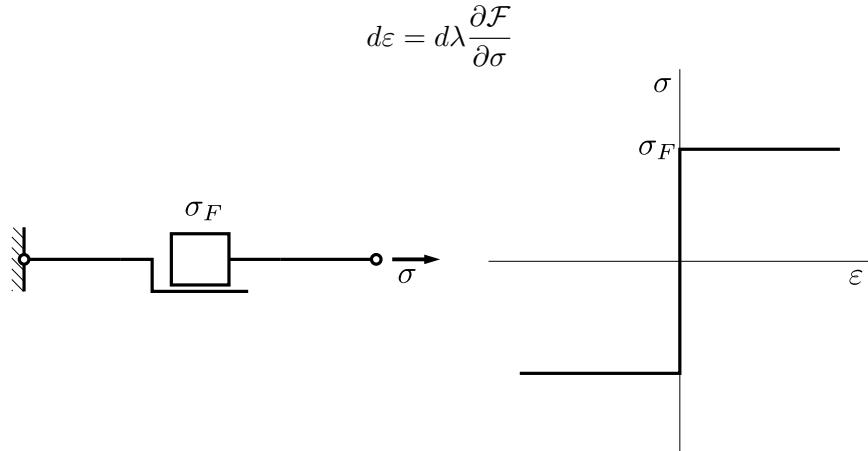


Abbildung 10: Reiber

Viskoses Materialverhalten bedeutet, dass einer Verschiebung ein verschiebungsgeschwindigkeitsproportionaler Widerstand entgegen steht. Dieses Verhalten entspricht dem eines Newton'schen Fluids und wird durch einen Dämpfer symbolisiert (Abbildung 11). Viskoses Verhalten wird im Folgenden nicht weiter betrachtet, und sei hier nur der Vollständigkeit halber angeführt. Es gilt:

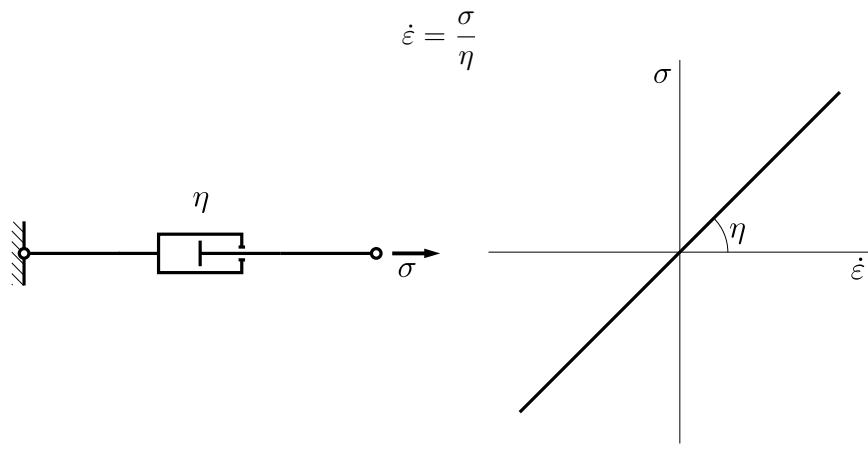


Abbildung 11: Dämpfer

4.2 Kombinationen

Um reale Materialien modellieren zu können, werden die einzelnen Grundelemente miteinander kombiniert. Für zwei Elemente besteht prinzipiell die Möglichkeit der Reihen- oder Parallelanordnung

Lineare Elastizität/ideale Plastizität in Parallelanordnung: Die Parallelanordnung bewirkt, dass in beiden Elementen die gleiche Verschiebung erfolgt, während sich die Gesamtkraft aus den Einzelkräften zusammensetzt.

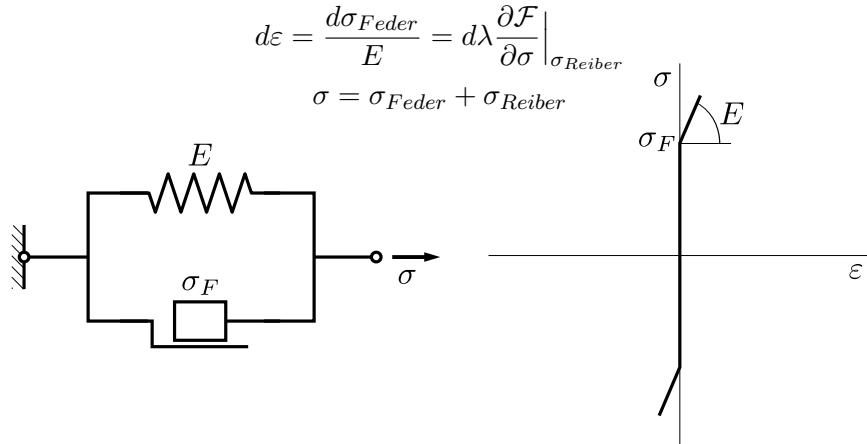


Abbildung 12: Feder - Reiber Parallelanordnung

Lineare Elastizität/ideale Plastizität in Reihenanordnung: Aufgrund der Reihenanordnung herrscht in beiden Elementen die gleiche Spannung (Kraft), während sich die Dehnung (Verschiebung) aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammensetzt. Wie in Abschnitt 5.2 noch gezeigt werden wird, entspricht dieses Modell grob dem Verhalten von Metallen. Im Weiteren werden die Begriffe “ideale Plastizität” und “lineare Elastizität/ideale Plastizität in Reihenanordnung” synonym verwendet und alle kommenden Betrachtungen beziehen sich auf dieses Modell.

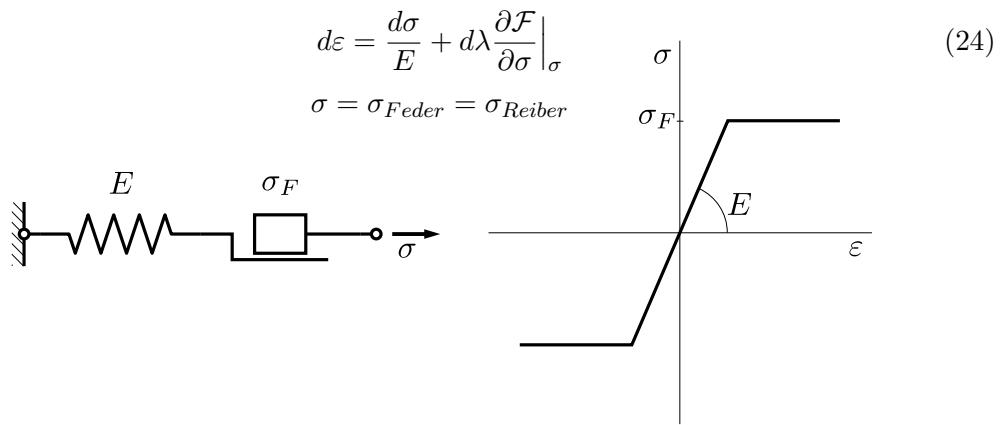


Abbildung 13: Feder - Reiber Reihenanordnung

5 Modellannahmen

5.1 Kleine Verformungen

Es wird vorausgesetzt, dass alle Verzerrungen klein bleiben, also keine geometrische Nichtlinearität auftritt. Sämtliche Nichtlinearitäten werden durch das Materialgesetz hervorgerufen.

5.2 Ideale Plastizität

Im Zugversuch kann das Materialgesetz, also der Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung, für den einachsigen Spannungszustand experimentell ermittelt werden. Die realen Zusammenhänge sind komplex, daher müssen für die mathematische Behandlung grobe Vereinfachungen getroffen werden.

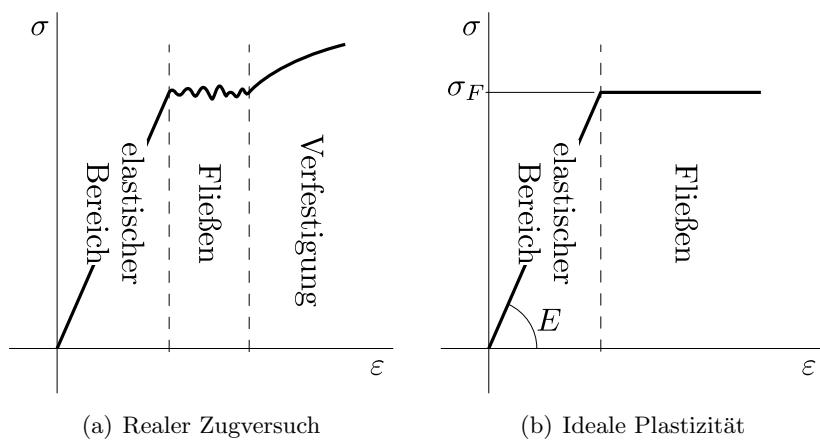


Abbildung 14: Idealisierung der Plastizität

Bei idealer Plastizität wird der reale Zugversuch in zwei Gebiete unterteilt. Unterhalb der Fließspannung σ_F wird angenommen, dass sich das Material rein elastisch verhält. Nach Erreichen der Fließspannung verformt sich das Material bei gleich bleibender Spannung plastisch. Eine Verfestigung, also eine Abhängigkeit der Fließspannung σ_F von der bereits erfolgten plastischen Verzerrung, wird nicht modelliert. Durch diese stückweise lineare bzw. konstante Definition des Materialgesetzes, ergibt sich ein insgesamt nichtlineares Materialgesetz. Ideale Plastizität entspricht dem rheologischen Modell der linearen Elastizität/idealen Plastizität in Reihenanordnung. Nähere Informationen in den Quellen ([6], Seite 32 ff.)/([7], Seite 1 ff.).

5.3 Fließbedingung

Es muss nun ein Kriterium gefunden werden, um festzustellen, ob ein Spannungszustand elastische oder plastische Verformungen hervorruft: die Fließbedingung. Mit einer geeignet gewählten Funktion \mathcal{F} , der Fließfunktion, wird folgende Gesetzmäßigkeit aufgestellt (Gleichung (25)).

$$\begin{aligned}\mathcal{F} < 0 &\dots \text{elastisch} \\ \mathcal{F} = 0 &\dots \text{plastisch}\end{aligned}\tag{25}$$

Ist der Wert von \mathcal{F} kleiner Null, erfolgt die Verformung elastisch, ist der Wert von \mathcal{F} gleich Null, tritt plastische Verformung ein. Positive Werte für \mathcal{F} treten aufgrund der Definition nicht auf. Somit wurde eine Fließbedingung erstellt, die den elastischen vom plastischen Bereich trennt.

\mathcal{F} wird in dieser Arbeit als Funktion der Spannungen $\mathcal{F}(\sigma_{ij})$ ausgedrückt. Es besteht jedoch gleichberechtigt die Möglichkeit \mathcal{F} in den Verzerrungen auszudrücken, $\mathcal{F}(\varepsilon_{ij})$. Vergl. dazu Abschnitt 9.2.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sigma_{ij}) &\dots \text{Fließfunktion} \\ \mathcal{F} = 0 &\dots \text{Fließbedingung}\end{aligned}$$

Für den Fall des einachsigen Spannungszustandes ist dieser Zustand durch eine einzige skalare Spannung vollständig beschrieben. Der Wert der Spannung kann direkt mit der Fließspannung verglichen werden. Fließen kann in Folge positiver oder negativer Spannung eintreten, daher muss das Vorzeichen zum Beispiel durch Quadrieren beseitigt werden.

$$1d: \quad \mathcal{F} = \sigma^2 - \sigma_F^2 \quad (26)$$

Für den Fall des allgemeinen Spannungszustandes muss eine Vergleichsspannungshypothese herangezogen werden. Die Vergleichsspannungshypothese ist eine Modellannahme, die das Verhalten eines bestimmten Materials mehr oder weniger gut abbildet, und sich vergleichsweise leicht mathematisch behandeln lässt. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Vergleichsspannungshypothesen untersucht: Die Hypothese nach von Mises für isotrope Plastizität und die Hypothese nach Hill für anisotrope Plastizität. Die Hypothese nach von Mises wird Teil III dieser Arbeit zugrunde gelegt, die Hypothese nach Hill Teil IV. Beide Hypothesen werden im jeweiligen Abschnitt genauer behandelt.

Die Fließbedingung hat unabhängig von der verwendeten Fließfunktion im allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand die Form von Gleichung (27).

$$3d: \quad \mathcal{F}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}) = 0 \quad (27)$$

Im Hauptachsensystem(HAS) sind die Schubspannungen $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ und die Fließfunktion nimmt die folgende Form an:

$$3d \text{ HAS: } \mathcal{F}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) = 0 \quad (28)$$

Die Fließfunktion ist in einem Hauptachsensystem also nur mehr eine Funktion von drei unabhängigen Variablen, die Fließbedingung $\mathcal{F} = 0$ kann nun als Fläche im dreidimensionalen Hauptnormalspannungsraum aufgefasst und dargestellt werden (Abbildung 15). Die Fläche $\mathcal{F} = 0$ umschließt ein Volumen, das sämtliche mögliche elastische Spannungszustände umfasst. Spannungszustände bei denen plastische Verformung eintritt liegen auf der Oberfläche $\mathcal{F} = 0$ selbst. Spannungszustände außerhalb des Fließzyinders können wegen $\mathcal{F} \leq 0$ nicht auftreten.

5.4 Hooke'sches Gesetz

Im elastischen Bereich gelte das Hooke'sche Gesetz

$$d\varepsilon_{el} = \mathbf{C}_{el}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} \quad (29)$$

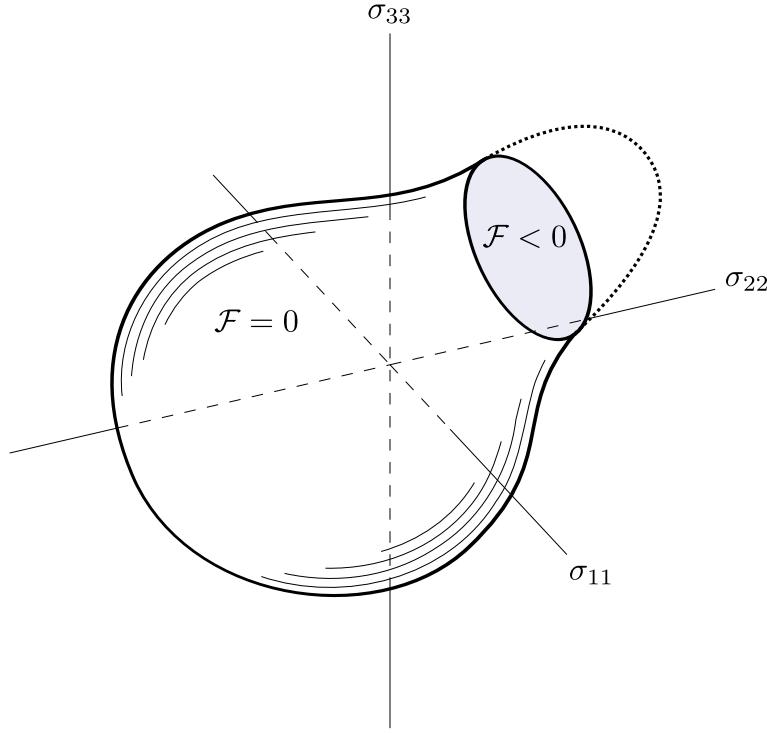


Abbildung 15: Allgemeine Fließfläche im Hauptnormalspannungsraum

$$\mathbf{C}_{el}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{bmatrix} \quad (30)$$

5.5 Drucker'sches Postulat

Das Drucker'sche Postulat besagt, dass das Material der plastischen Verformung immer Widerstand entgegengesetzt, es also keine Bereiche im σ/ε -Diagramm gibt, die eine negative Steigung aufweisen. Diese Annahme ist verträglich mit den in Abschnitt 5.2 bereits getroffenen Idealisierungen, in der Natur jedoch nicht in jedem Punkt gegeben. Vergl. die Schwankungen der Kennlinie in Abbildung 14(a) im Bereich des Fließens. Diese Annahme führt auf hier nicht dargestellte Weise (vergl. [3]) zu einem Zusammenhang zwischen der partiellen Ableitung der Fließfunktion und den plastischen Verzerrungen (Gleichung (31)).

$$d\varepsilon_{pl} = d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (31)$$

$d\lambda$ bezeichnet einen vorläufig noch unbekannten Proportionalitätsfaktor und wird plasti scher Konsistenzparameter genannt. Er kann nur positive Werte annehmen (vergl. 5.7).

5.6 Prandtl-Reuß Gleichungen

Die Annahme der Additivität der elastischen bzw. plastischen Anteile der Verzerrung geht auf Prandtl und Reuß zurück. Diese Annahme ist kompatibel mit dem rheologischen Modell der Reihenschaltung aus linearer Elastizität/idealer Plastizität gemäß Abschnitt 4.2. Für nähere Informationen vergl. Quellen [9] und [10].

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} \quad (32)$$

Durch Einsetzen des Hooke'schen Gesetzes und des Drucker'schen Postulats erhält man die Prandtl-Reuß Gleichungen (Gleichung (33)).

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{el}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (33)$$

5.7 Wertebereiche für Fließfunktion und plastischen Konsistenzparameter

Betrachtet man einen elastischen Belastungsvorgang, gefolgt von einer plastischen Belastung und anschließender Entlastung im Hauptnormalspannungsraum, erkennt man, dass λ und \mathcal{F} nicht gleichzeitig beliebige Werte annehmen können (Abbildung 16).

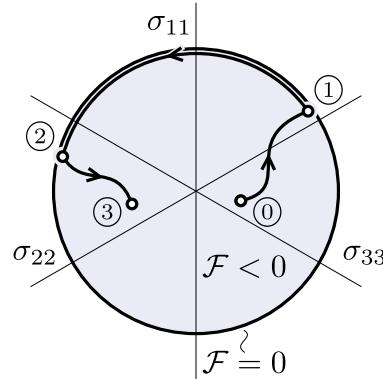


Abbildung 16: Zustandsänderungen im Hauptnormalspannungsraum

$\textcircled{0} \rightarrow \textcircled{1}$	$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$	$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$
elastische Belastung	plastische Belastung	elastische Entlastung
$d\lambda = 0$	$d\lambda > 0$	$d\lambda = 0$
$\mathcal{F} < 0$	$\mathcal{F} = 0$	$\mathcal{F} < 0$
$d\mathcal{F} > 0$	$d\mathcal{F} = 0$	$d\mathcal{F} < 0$

(34)

Zusammengefasst gilt also im elastischen Bereich:

$$d\lambda = 0 \quad \mathcal{F} < 0 \quad d\mathcal{F} \neq 0 \vee d\mathcal{F} = 0 \quad (35)$$

und im plastischen Bereich:

$$d\lambda > 0 \quad \mathcal{F} = 0 \quad d\mathcal{F} = 0 \quad (36)$$

5.8 Plastische Inkompressibilität

Experimente haben gezeigt, dass bei plastischer Verformung die plastischen Volumenänderungen im Verhältnis zu den elastischen Volumenänderungen klein bleiben ([12], Seite 237). Es wird daher vereinfachend angenommen, dass der plastische Anteil der Verzerrungen isochor ist (Gleichung (37), vergl Abschnitt 9.3 und Abschnitt 13.6).

$$de^{pl} = \text{tr}(\mathbf{V}^{pl}) \quad \mathbf{V}^{pl} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{xx} & d\varepsilon_{xy} & d\varepsilon_{xz} \\ d\varepsilon_{yx} & d\varepsilon_{yy} & d\varepsilon_{yz} \\ d\varepsilon_{zx} & d\varepsilon_{zy} & d\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^{pl} \dots \text{Matrixschreibweise}$$

$$de^{pl} = d\varepsilon_{xx}^{pl} + d\varepsilon_{yy}^{pl} + d\varepsilon_{zz}^{pl} \stackrel{!}{=} 0 \quad (37)$$

6 Eigenschaften plastischer Probleme

Die Fließbedingung (Gleichung (82)) ist eine nichtlineare Gleichung in den Spannungen. Um diese nichtlineare Zwangsbedingung erfüllen zu können, muss die lineare Finite Elemente Methode angepasst werden. Die Verzerrungen werden nach wie vor als klein vorausgesetzt, die geometrische Linearität bleibt daher erhalten (vergl. Abschnitt 5.1). Das Prinzip, das hier genutzt werden soll um nichtlineare Probleme zu lösen, besteht darin, den nichtlinearen Zusammenhang durch mehrere lineare Schritte zu approximieren.

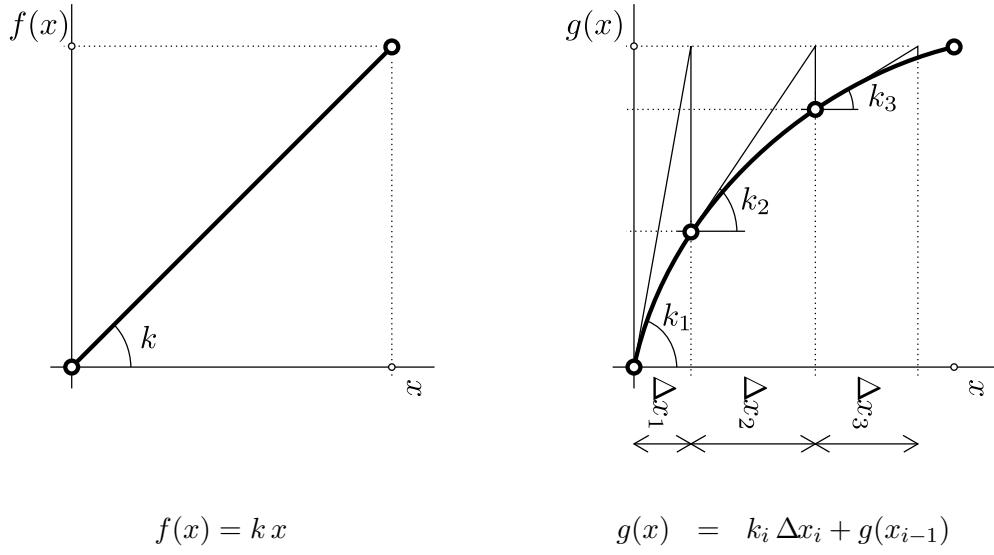


Abbildung 17: Gegenüberstellung linear - nichtlinear

6.1 Pseudozeit als Lastparameter

Die FE-Methode geht vom Prinzip der virtuellen Arbeit (Gleichung (38)) aus.

$$\delta W^{int}(t) + \delta W^{inertia}(t) + \delta W^{ext}(t) = 0 \quad (38)$$

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf den statischen Sonderfall, damit sind alle Zeitableitungen Null und deshalb $\delta W^{inertia}(t) = 0$. Physikalisch kann dies erreicht werden, wenn die Last nur sehr langsam aufgebracht wird, sich also alle Größen nur sehr langsam mit der Zeit t ändern.

$$\delta W^{int}(t) + \delta W^{ext}(t) = 0 \quad (39)$$

Im daraus resultierenden quasistatischen Sonderfall, dient die Zeit t nur mehr dazu, als Parameter die einzelnen Lastzustände voneinander zu unterscheiden.

6.2 Gegenüberstellung: Linear - Nichtlinear

In der FE-Methode werden die virtuellen Arbeiten durch die Knotenpunktsverschiebungen ausgedrückt.

$$\delta W^{int}(t) = -\delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^{int}(t) \quad \delta W^{ext}(t) = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^{ext}(t)$$

Nach Elimination der Testfunktion folgt die Gleichgewichtsbedingung (Gleichung 40).

$$-\mathbf{f}^{int}(t) + \mathbf{f}^{ext}(t) = 0 \quad (40)$$

Bei **linearen** Problemen kann eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} bestimmt werden. Sie ist konstant und unabhängig von der Knotenpunktsverschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ bzw. der Zeit t . Das Gleichungssystem (41) kann sofort nach $\hat{\mathbf{u}}$ aufgelöst werden (42).

$$\mathbf{f}^{int}(t) = \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}(t) \quad \mathbf{K} = \sum_m \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = const$$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}^{ext}(t) \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^{ext}(t) \quad (42)$$

Um den **nichtlinearen** Zwangsbedingungen der Plastizität genügen zu können, muss die Steifigkeit von der erfolgten Knotenpunktsverschiebung abhängen. Die Steifigkeit der Struktur hängt davon ab, ob zum gegebenen Zeitpunkt (Lastparameter) t die elastische oder die plastische Materialtangente \mathbf{C} gilt. \mathbf{C} ist also von $\hat{\mathbf{u}}$ abhängig.

$$\mathbf{f}^{int}(t) = \tilde{\mathbf{K}}(t) \hat{\mathbf{u}}(t) \quad \tilde{\mathbf{K}}(t) = \sum_m \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}(t) \mathbf{B} dV \quad \mathbf{C}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{u}}(t))$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{u}}(t)) \hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}^{ext}(t) \quad (43)$$

Das Gleichungssystem kann nun nicht mehr explizit nach $\hat{\mathbf{u}}$ aufgelöst werden.

6.3 Pfadabhängigkeit

Die Lösung plastischer Probleme ist pfadabhängig. Die Lösung hängt davon ab, welche Zustände vorher durchlaufen wurden. Abbildung 18 verdeutlicht dies für den einachsigen Spannungszustand. Wird eine Reihenschaltung aus Feder und Reiber gemäß Abbildung 13 zuerst einer aufgeprägten Verschiebung um ε_a unterworfen, und dann entlastet, gelangt man zum Punkt ①. Erfolgt allerdings zuerst eine Verschiebung auf ε_b und anschließend eine Verschiebung auf ε_a , also in Summe dieselbe Verschiebung, gelangt man nach der Entlastung zum Punkt ②.

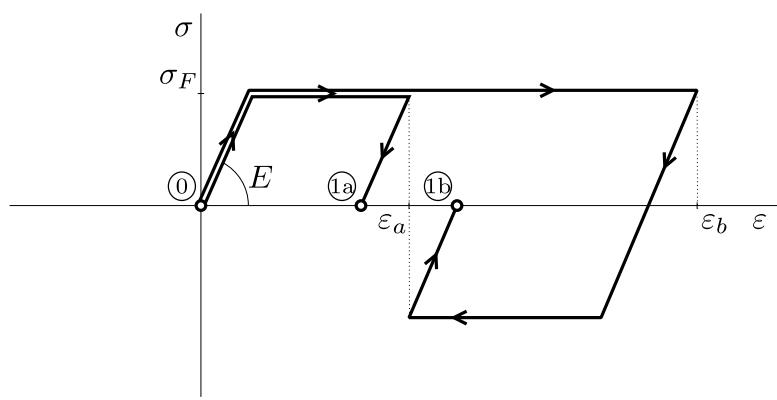


Abbildung 18: Pfadabhängigkeit im einachsigen Spannungszustand

7 Lösungsverfahren nichtlinearer Probleme

In diesem Abschnitt werden, aufeinander aufbauend, drei allgemeine Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme vorgestellt. Neben dem eigentlichen Newton-Raphson-Verfahren, das in dieser Arbeit ausschließlich zum Lösen der Beispiele benutzt wurde, werden im Sinne der Übersicht auch zwei andere Verfahren präsentiert, die gewissermaßen als Vorstufe des Newton-Raphson-Verfahrens gelten können. Der Aufbau dieses Abschnitts lehnt sich an Quelle ([14], Kapitel 7) an.

7.1 Gleichgewicht in inkrementeller Form

Die Gleichgewichtsbedingung (Gleichung 40) gilt für alle Zeiten t , auch für $t + \Delta t$.

$$-\mathbf{f}^{int}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t) = 0$$

$$\mathbf{f}^{int}(t + \Delta t) = \mathbf{f}^{int}(t) + \Delta\mathbf{f}^{int}\Big|_t^{t+\Delta t}$$

$\mathbf{f}^{int}(t)$ kann mit Gleichung (5) aus den Elementspannungen bestimmt werden:

$$\mathbf{f}^{int}(t) = \sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m]^T \boldsymbol{\sigma}(t) \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m$$

$$\Delta\mathbf{f}^{int}\Big|_t^{t+\Delta t} = \sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m]^T \Delta\boldsymbol{\sigma}\Big|_t^{t+\Delta t} \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m$$

Das Spanningsinkrement $\Delta\boldsymbol{\sigma}|_t^{t+\Delta t}$ kann durch eine Materialsekante $\mathbf{C}|_t^{t+\Delta t}$ ausgedrückt werden. Sie entsteht durch Linearkombination der Materialtangentialen $\mathbf{C}|_t$ und $\mathbf{C}|_{t+\Delta t}$ (Abbildung 19). Die Berechnung der Materialtangentialen wird in Abschnitt 8 behandelt, sie werden vorläufig als bekannt angenommen. Der Gewichtungswert θ ist unbekannt, und wird vom verwendeten Lösungsverfahren willkürlich festgelegt.

$$\mathbf{C}\Big|_t^{t+\Delta t} = (1 - \theta) \mathbf{C}\Big|_t + \theta \mathbf{C}\Big|_{t+\Delta t} \quad (44)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}\Big|_t^{t+\Delta t} = \mathbf{C}\Big|_t^{t+\Delta t} \mathbf{B} \Delta\hat{\mathbf{u}}\Big|_t^{t+\Delta t} = \mathbf{C}\Big|_t^{t+\Delta t} \mathbf{B} (\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}(t))$$

Durch Rücksinsetzen in die Gleichgewichtsbedingung erhält man nun eine Bestimmungsgleichung für $\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{f}^{int}\Big|_t^{t+\Delta t} &= \underbrace{\sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m]^T \mathbf{C}^m\Big|_t^{t+\Delta t} \mathbf{B}^m \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m}_{=\mathbf{K}\Big|_t^{t+\Delta t}} (\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}(t)) \\ \mathbf{f}^{int}(t + \Delta t) &= \mathbf{f}^{int}(t) + \mathbf{K}\Big|_t^{t+\Delta t} (\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}(t)) \\ -\mathbf{f}^{int}(t) - \mathbf{K}\Big|_t^{t+\Delta t} (\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}(t)) + \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t) &= 0 \\ \hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &= \left(\mathbf{K}\Big|_t^{t+\Delta t}\right)^{-1} (\mathbf{f}^{int}(t) - \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t)) + \hat{\mathbf{u}}(t) \end{aligned} \quad (45)$$

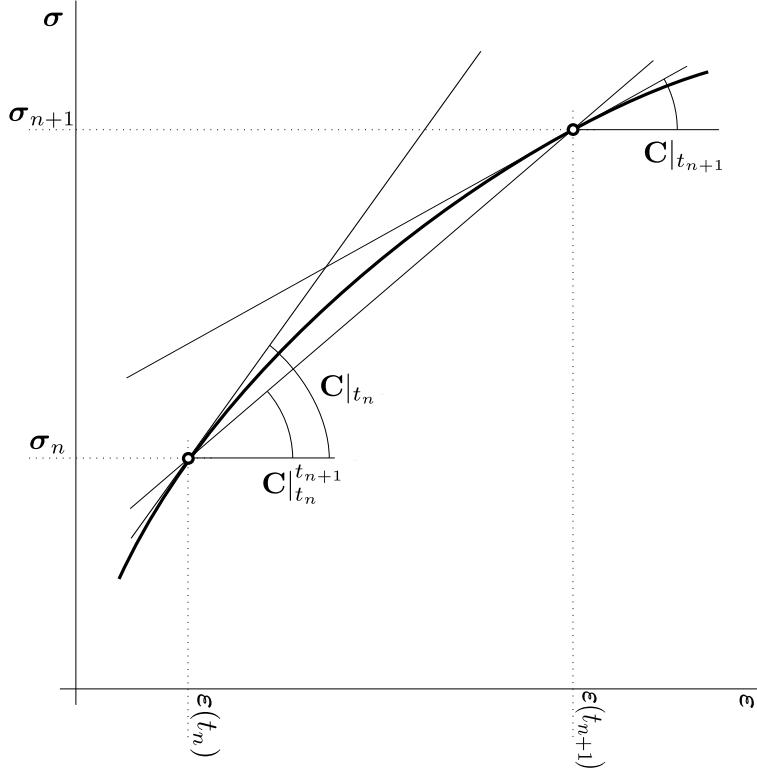


Abbildung 19: Materialsekante

7.2 Euler-Verfahren

Im vorherigen Abschnitt wurde die Materialsekante $\mathbf{C}|_t^{t+\Delta t}$ als Linearkombination der Materialtangenten $\mathbf{C}|_t$ und $\mathbf{C}|_{t+\Delta t}$ eingeführt (Gleichung (44)). Der Gewichtungsfaktor θ blieb dabei offen. Mit der Definition von $\mathbf{K}|_t^{t+\Delta t}$ folgt:

$$\mathbf{K}|_t^{t+\Delta t} = \sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m]^T \mathbf{C}^m|_t^{t+\Delta t} \mathbf{B}^m \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}|_t^{t+\Delta t} &= (1 - \theta) \underbrace{\left(\sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m]^T \mathbf{C}^m|_t \mathbf{B}^m \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m \right)}_{=: \mathbf{K}|_t} + \\ &\quad + \theta \underbrace{\left(\sum_m \int_{\bar{V}^m} [\mathbf{B}^m]^T \mathbf{C}^m|_{t+\Delta t} \mathbf{B}^m \det(\mathbf{J}^m) d\bar{V}^m \right)}_{=: \mathbf{K}|_{t+\Delta t}} \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}|_{t+\Delta t}$ zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ hängt von der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}(t+\Delta t)$ zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ab. Gleichung (45) ist daher eine implizite Gleichung in $\hat{\mathbf{u}}(t+\Delta t)$.

Wird jedoch willkürlich der Gewichtungsfaktor $\theta = 0$ gesetzt, erhält man eine explizite Näherungslösung für $\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$, die besonders einfach berechnet werden kann. Diese Vorgehensweise entspricht einer direkten Integration nach dem expliziten Euler'schen Polygonzugverfahren (Abbildung 20).

Die Berechnung von $\mathbf{C}|_t$ bleibt vorerst offen. Eine allgemeine Behandlung, unabhängig von der verwendeten Fließfunktion, erfolgt in Abschnitt 8.2, die fließfunktionsspezifischen Materialtangentialen werden in Abschnitt 10.2 bzw. in Abschnitt 15.2 vorgestellt. Die folgenden Erläuterungen sind davon unabhängig, und beziehen sich allgemein auf Lösungsverfahren für nichtlineare Probleme.

$$\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \doteq \left(\mathbf{K} \Big|_t \right)^{-1} \left(\mathbf{f}^{int}(t) - \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t) \right) + \hat{\mathbf{u}}(t) \quad (47)$$

In der numerischen Berechnung werden nun die unbekannten Lösungswerte $\hat{\mathbf{u}}(t)$ durch bereits berechnete Näherungslösungen $\hat{\mathbf{u}}_n$ ersetzt um zu einer weiteren Näherung $\hat{\mathbf{u}}_{n+1}$ zu gelangen. So kann ausgehend von einem bekannten Startwert $\hat{\mathbf{u}}(0) \equiv \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$ eine Folge von Näherungslösungen $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots$ für eine gegebene Folge $t = t_1, t_2, \dots$ berechnet werden. Ein solcher Zeitschritt Δt bewirkt eine Änderung der äußeren Last, und wird im Folgenden als Inkrement bezeichnet und tief gestellten indiziert.

$\mathbf{X}_n \quad n \dots n\text{-te Lasterhöhung, (Inkrement)}$

Da nach einigen Rechenschritten das Kräftegleichgewicht $\mathbf{f}_n^{int} \doteq \mathbf{f}_n^{ext}$ bei Beginn des Eulerschrittes nicht mehr exakt erfüllt ist, entsteht eine bleibende Abweichung der Näherungslösung \mathbf{f}_n^{int} zur exakten Lösung $\mathbf{f}^{int}(t_n)$ (vergl. Abbildung 20, dort ist dieser Schritt von $n = 2$ auf $n = 3$ durchgeführt).

Die numerisch berechneten Näherungswerte werden nicht mehr mit dem Argument t bezeichnet, sondern mit dem Index n . Die wahren Werte führen weiter das Argument t .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(0) &\equiv \hat{\mathbf{u}}_0 &= \mathbf{0} & \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t) &= \mathbf{f}_{n+1}^{ext} & \dots & \text{gegeben} \\ \hat{\mathbf{u}}(t) &\equiv \hat{\mathbf{u}}(t_n) &\doteq \hat{\mathbf{u}}_n & \mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}(t_n)) &\doteq \mathbf{f}_n^{int} &= \mathbf{f}_n^{ext} \\ \hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &\equiv \hat{\mathbf{u}}(t_{n+1}) &\doteq \hat{\mathbf{u}}_{n+1} & \mathbf{K}|_t &\equiv \mathbf{K}|_{t_n} &= \mathbf{K}_n \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{K}_n^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{int} - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} \right) + \hat{\mathbf{u}}_n \quad (48)$$

Die direkte Integration durch das explizite Euler'sche Polygonzugverfahren ist einfach und erfordert nur einen geringen Aufwand in der numerischen Berechnung, da der Schritt zum nächsten Inkrement allein durch Auswerten der Gleichung 48 berechnet werden kann. Die direkte Integration bringt den Nachteil mit sich, dass die Gleichgewichtsbedingung (Gleichung (40)) nicht exakt erfüllt wird. Nach dem Inkrement $n + 1$ verbleibt das Residuum Ψ_{n+1} (Gleichung (49)).

$$\begin{aligned} \text{exakt: } -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}(t_{n+1})) + \mathbf{f}_{n+1}^{ext} &= 0 \\ \text{Euler'sches Polygonzugverfahren: } -\mathbf{f}_{n+1}^{int} + \mathbf{f}_{n+1}^{ext} &=: \Psi_{n+1} \end{aligned} \quad (49)$$

Die Fließbedingung $\mathcal{F} \leq 0$ wird bei vorhandener Plastifizierung ebenfalls nicht exakt erfüllt. Die Fließbedingung geht in die über t veränderliche Materialtangente ein. Da die veränderliche Materialtangente aber durch eine über Δt konstante Materialsekante ersetzt wurde, wird die Fließbedingung im Allgemeinen nicht exakt eingehalten.

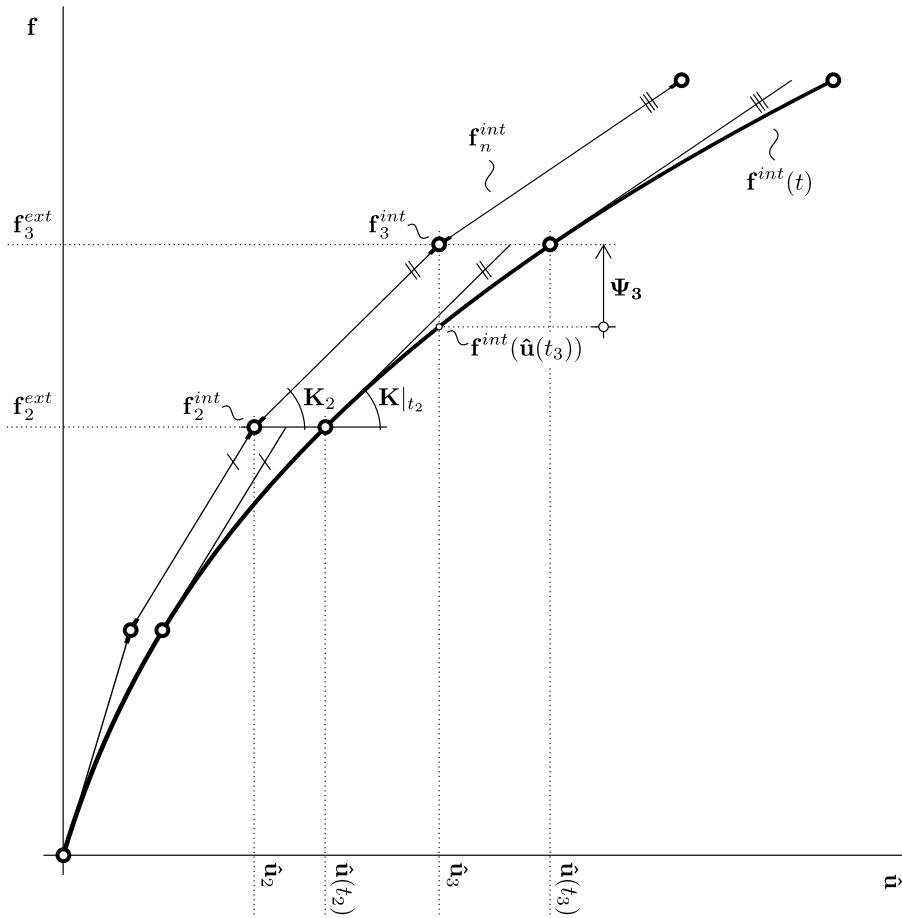


Abbildung 20: Explizites Euler'sches Polygonzugverfahren

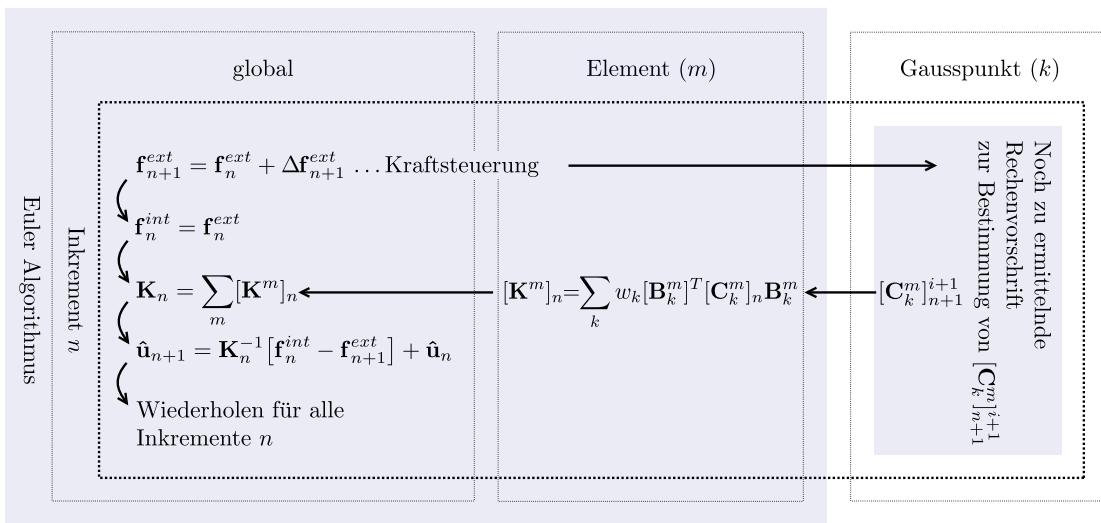


Abbildung 21: Graphische Darstellung des Euler-Algorithmus

7.3 Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren

Das Euler'sche Polygonzugverfahren ermöglicht die Berechnung des Verschiebungskrementes mit sehr geringem rechnerischen Aufwand, bietet jedoch keine Möglichkeit zur Bewertung der Genauigkeit der Näherungslösung. Nimmt man einen höheren Berechnungsaufwand in Kauf, kann, durch wiederholtes Auswerten der Gleichung (48) für das selbe Lastinkrement, das Eulerverfahren zum modifizierten Newton-Raphson-Verfahren weiterentwickelt werden. Das Newton-Raphson-Verfahren, sowohl modifiziert als auch unmodifiziert (Abschnitt 7.4), erlaubt die Vorgabe einer oberen Schranke für das verbleibende Ungleichgewicht Ψ .

$$\mathbf{X}_n^i \quad \begin{array}{l} n \dots n\text{-te Lasterhöhung (Inkrement)} \\ i \dots i\text{-te Wiederholung (Iteration)} \end{array}$$

Geht man von einem Gleichgewichtszustand n aus, gilt $\mathbf{f}_n^{int} = \mathbf{f}_n^{ext}$. Wird nun die äußere Last \mathbf{f}_n^{ext} für das nächste Inkrement aufgebracht, ergibt sich vor Durchführung des Euler-Schrittes das Ungleichgewicht Ψ_n^1 . Führt man nun einen Schritt des Euler-Verfahrens durch, gelangt man zu einer ersten Näherung für die Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}_n^1$ (Gleichung (50)). Im Euler-Verfahren würde nun ausgehend von diesem Ungleichgewichtszustand das nächste Lastinkrement durchgeführt. Man kann jedoch wieder zu einem (Nahe-)Gleichgewichtszustand gelangen, wenn man eine Möglichkeit hat, unabhängig vom modifizierten Newton-Raphson-Algorithmus eine neue Näherung für \mathbf{f}^{int} für die neue Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}_n^1$ zu finden.

Die Berechnung von $\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_n^1)$ erfolgt aus den Spannungssinkrementen. Die Vorgehensweise dafür ist spezifisch für das vorliegende nichtlineare Problem und wird in Abschnitt 10.1 für den isotropen Fall und in Abschnitt 15.1 für den anisotropen Fall behandelt. Im Zusammenhang mit dem allgemeinen Lösungsverfahren für nichtlineare Probleme, die in diesem Abschnitt dargestellt werden, wird $\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_n^1)$ als bekannt angenommen.

Die Abbildungen 22 und 23 zeigen eine vollständige Iteration bzw. zwei Inkremente des Verfahrens.

$$i = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) = \Psi_{n+1}^1 \\ \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \mathbf{K}_n^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_n) - \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) \right)}_{-\Psi_{n+1}^1} + \hat{\mathbf{u}}_n \end{array} \right. \quad (50)$$

$$i = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1) + \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) = \Psi_{n+1}^2 \\ \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^2 = \mathbf{K}_n^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1) - \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) \right)}_{-\Psi_{n+1}^2} + \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \end{array} \right. \quad (51)$$

\vdots

$$i \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i) + \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) = \Psi_{n+1}^{i+1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{K}_n^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i) - \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) \right)}_{-\Psi_{n+1}^{i+1}} + \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i \end{array} \right. \quad (52)$$

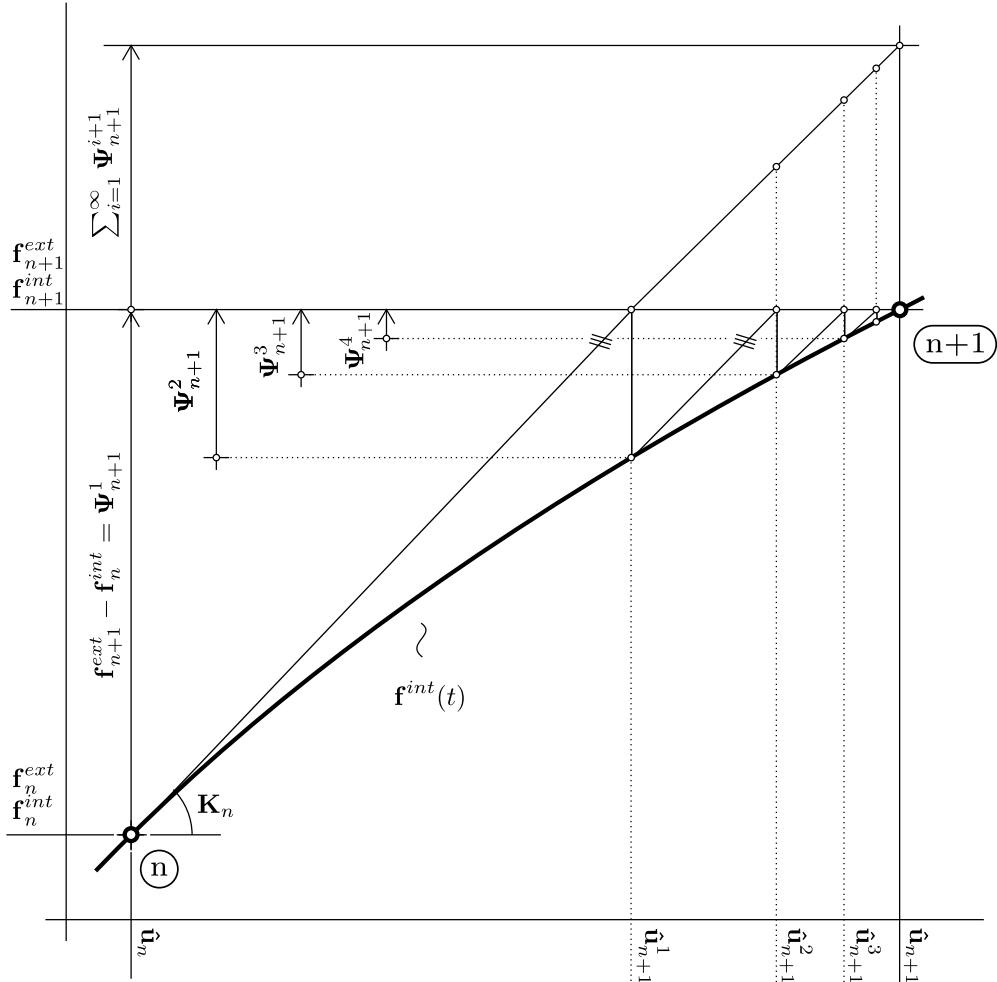


Abbildung 22: Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren - Iterationen

Auf diese Weise kann durch wiederholtes Ausrechnen von $\hat{\mathbf{u}}$ und Aktualisieren von \mathbf{f}^{int} (Gleichungen (50) bis (52)) das Residuum Ψ beliebig verkleinert werden. Das Residuum Ψ kann als nichtausbalancierte Kraftdifferenz zwischen Aktionskraftvektor und Reaktionskraftvektor verstanden werden. Daraus wird ein Maß für die Güte der Näherungslösung W_{unb} entwickelt. W_{unb} wird gebildet aus dem Skalarprodukt des Residuums Ψ mit den Knotenpunktsverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$. Es ist daher eine Energie.

$$[W_{unb}]_{n+1}^{i+1} = [\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} - \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i]^T \Psi_{n+1}^{i+1} \quad (53)$$

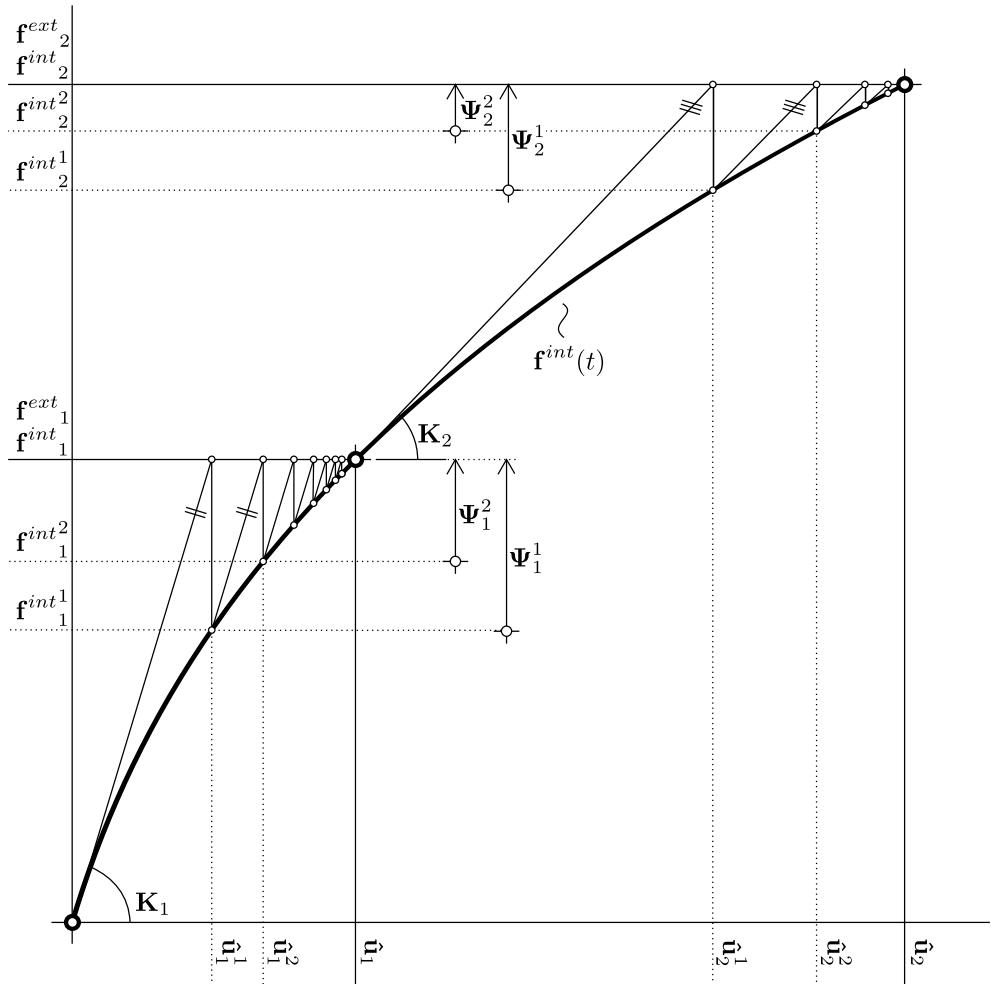


Abbildung 23: Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren - zwei Inkremente

7.4 Newton-Raphson-Verfahren

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, kann durch Iteration das Residuum beliebig verkleinert werden, allerdings kann der Rechenaufwand dafür sehr hoch sein. Das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren verwendet für alle Iterationen eines Inkrements immer die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_n der 0-ten Iteration, obwohl sich die Steifigkeit nach jeder Iteration ändert. Das bedeutet zwar einen geringen Rechenaufwand für die Assemblierung und Invertierung der Steifigkeitsmatrix, da dies nur ein einziges Mal für das gesamte Inkrement durchgeführt werden muss, jedoch bleibt dadurch die Konvergenzgeschwindigkeit zum Gleichgewichtszustand schlecht. Wird hingegen nach jeder Iteration i eine aktualisierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{n+1}^{i+1} berechnet, gelangt man zum eigentlichen Newton-Raphson-Verfahren. Das Newton-Raphson-Verfahren bietet quadratische Konvergenzgeschwindigkeit und kann gegebenenfalls trotz höheren Rechenaufwandes innerhalb einer Iteration, aufgrund der niedrigeren Gesamtzahl an Iterationen, schneller zum Nahegleichgewicht führen. Alle nichtlinearen Beispiele wurden mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst.

Der Ablauf des Verfahrens bleibt derselbe wie in Abschnitt 7.3 geschildert, es braucht nur in den Gleichungen (54) bis (56) \mathbf{K}_n durch \mathbf{K}_{n+1}^{i+1} ersetzt zu werden. Der Algorithmus wird in Abbildung 25 graphisch aufbereitet dargestellt.

$$i = 0 \quad \begin{cases} -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) = \Psi_{n+1}^1 \\ \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \left(\mathbf{K}_{n+1}^1 \right)^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_n) - \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) \right)}_{-\Psi_{n+1}^1} + \hat{\mathbf{u}}_n \end{cases} \quad (54)$$

$$i = 1 \quad \begin{cases} -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1) + \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) = \Psi_{n+1}^2 \\ \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^2 = \left(\mathbf{K}_{n+1}^2 \right)^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1) - \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) \right)}_{-\Psi_{n+1}^2} + \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \end{cases} \quad (55)$$

\vdots

$$i \quad \begin{cases} -\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) + \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) = \Psi_{n+1}^{i+1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \left(\mathbf{K}_{n+1}^{i+1} \right)^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{f}^{int}(\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^i) - \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1}) \right)}_{-\Psi_{n+1}^{i+1}} + \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} \end{cases} \quad (56)$$

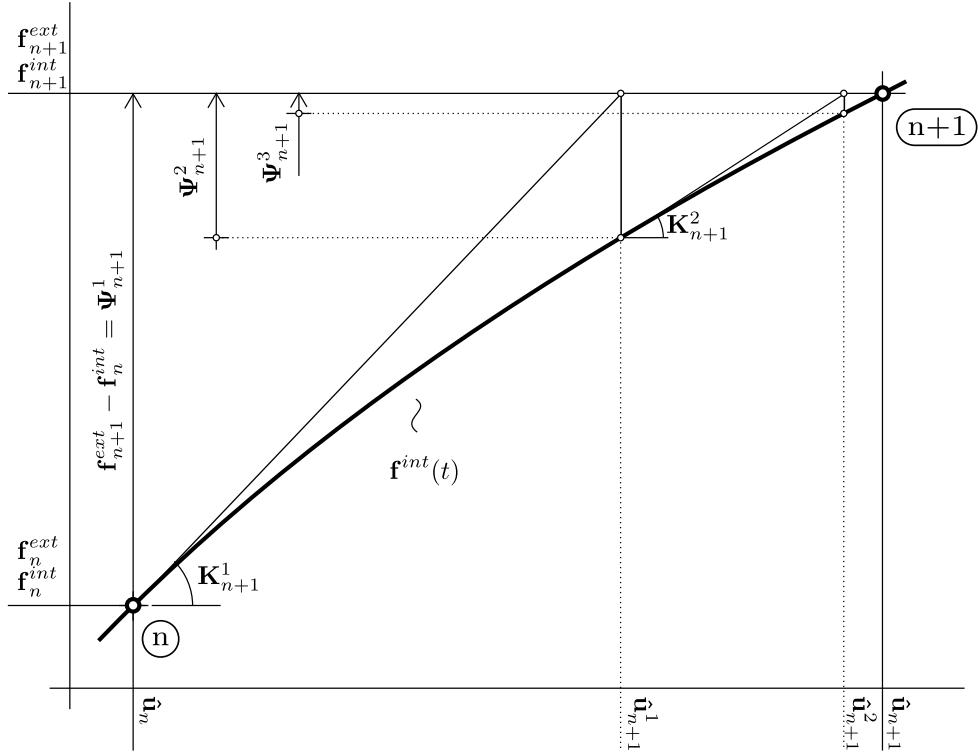


Abbildung 24: Newton-Raphson-Verfahren

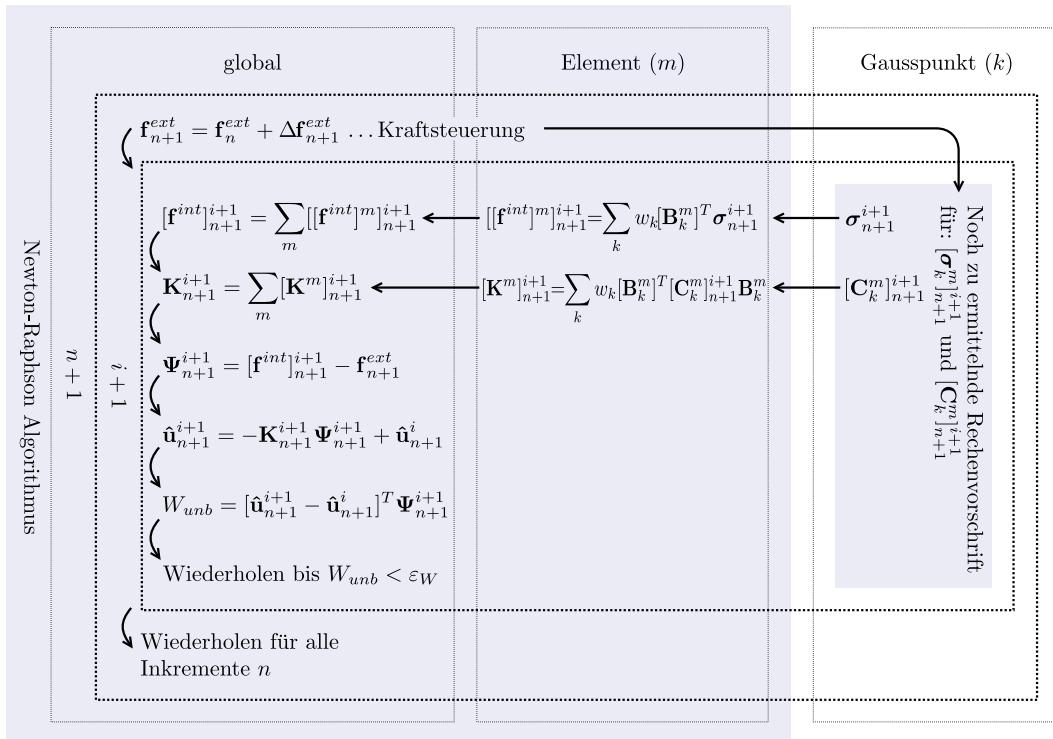


Abbildung 25: Graphische Darstellung des Newton-Raphson-Algorithmus

8 Materialtangente

Bereits im Abschnitt über die Lösungsverfahren der nichtlinearen Probleme (Abschnitt 7) musste die Materialtangente \mathbf{C} eingeführt werden. Die Bestimmung der Materialtangente blieb dabei offen. Es wurde lediglich festgelegt, dass \mathbf{C} zum Zeitpunkt t und nicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aufgestellt wird, um ein explizites Verfahren zu erhalten. In diesem Abschnitt wird nun zuerst zu Vergleichszwecken die differentielle Materialtangente eingeführt, bevor dann anschließend die für den tatsächlichen Algorithmus benötigte algorithmenkonsistente Materialtangente abgeleitet wird.

In diesem Abschnitt wird noch nicht auf eine spezielle Fließfunktion zurückgegriffen, alle Ableitungen werden für eine allgemeine Fließfunktion \mathcal{F} durchgeführt.

8.1 Differentielle Materialtangente

Die Materialtangente \mathbf{C} entspricht dem Zusammenhang zwischen einer differentiellen Verzerrung und einer differentiellen Spannung (Gleichungen (57) und (58)).

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\sigma} \quad (57)$$

$$\mathbf{C} := \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} \mathbf{C}_{el} : d\lambda = 0 \\ \mathbf{C}_{pl} : d\lambda > 0 \end{cases} \quad (58)$$

Die Materialtangente im elastischen Bereich \mathbf{C}_{el} kann aus dem Hooke'schen Gesetz gewonnen werden (vergl. Gleichung (30)). Es verbleibt die Materialtangente im plastischen Bereich \mathbf{C}_{pl} .

Aus der Prandtl-Reuß Gleichung und dem totalen Differential der Fließbedingung entsteht ein Gleichungssystem, aus dem $d\lambda$ eliminiert werden kann.

Prandtl-Reuß (Gleichung (33)):

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{el}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda$$

Fließbedingung (Gleichung (36)):

$$d\mathcal{F} = 0 = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T d\boldsymbol{\sigma}$$

Auflösen der Prandtl-Reuß Gleichung nach $d\boldsymbol{\sigma}$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{el} \left(d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \right) \quad (59)$$

Einsetzen der Gleichung (59) und auflösen nach $d\lambda$

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \\
 d\lambda &= \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} d\boldsymbol{\varepsilon} \\
 d\boldsymbol{\sigma} &= \underbrace{\left[\mathbf{C}_{el} - \mathbf{C}_{el} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \right]}_{\mathbf{C}_{pl}} d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{60}
 \end{aligned}$$

Differentielle Materialtangente: (vergl. ([14], Gleichung (7.67)))

$$\mathbf{C}_{pl} = \mathbf{C}_{el} - \frac{\mathbf{C}_{el} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el}}{\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{C}_{el} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \tag{61}$$

Gleichung (61) könnte nun für eine gegebene Fließfunktion weiter ausgewertet werden. Die differentielle Materialtangente ist für die praktische Berechnung jedoch bedeutungslos, da beim anzuwendenden algorithmischen Lösungsverfahren (vergl. Abschnitt 7) keine infinitesimalen Verzerrungs- bzw. Spannungszuwächse vorliegen, sondern endlich ausgedehnte. Gleichung (61) dient deshalb nur zu Vergleichszwecken für den Grenzfall gegen Null strebender Verzerrungs- bzw. Spannungsdifferenzen

8.2 Algorithmenkonsistente Materialtangente

Da, wie bereits erwähnt, bei einer algorithmischen Lösung keine infinitesimalen Größen sondern endliche Differenzen auftreten, wird die algorithmenkonsistente (dh. zum Algorithmus passende) Materialtangente \mathbf{C}^* auch durch endliche Differenzen definiert. An die Stelle der Gleichungen (57) und (58) treten die Gleichungen (63) und (62).

$$d(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \Delta\boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} d(\Delta\boldsymbol{\sigma}) \tag{62}$$

$$\mathbf{C}^* := \frac{\partial \Delta\boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} \mathbf{C}_{el} : d\lambda = 0 \\ \mathbf{C}_{pl}^* : d\lambda > 0 \end{cases} \tag{63}$$

Die algorithmenkonsistente Materialtangente muss für eine bestimmte Iteration i aufgestellt werden, da im Newton-Raphson-Verfahren die Steifigkeitsmatrix nach jeder Iteration neu assembliert wird.

$$d(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1}) = \underbrace{\frac{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1})}{\partial(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1})}}_{\mathbf{C}_{n+1}^{*i+1}} d(\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}) \tag{64}$$

Die Ableitung der algorithmenkonsistenten Materialtangente erfolgt wieder aus der Prandtl-Reuß Gleichung und der Fließfunktion, wobei in den Gleichungen (65) und (66) neben den Unbekannten $\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$ auch noch die von $\boldsymbol{\sigma}$ abhängigen Größen \mathcal{F} und $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$ auftreten.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{el}^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_n}^{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (65)$$

$$0 = \mathcal{F} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_n}^{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (66)$$

Zur Berechnung werden die im Iterationsschritt veränderlichen Größen \mathcal{F} und $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$ wieder durch Linearkombination der Zustände am Anfang und am Ende der Iteration zusammengesetzt, wobei die Gewichtungsfaktoren η_1, η_2 wieder unbekannt sind, und in weiterer Folge willkürlich festgelegt werden.

$$\mathcal{F} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_n}^{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} = (1 - \eta_1) \mathcal{F} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_n} + \eta_1 \mathcal{F} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (67)$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_n}^{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} = (1 - \eta_2) \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_n} + \eta_2 \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (68)$$

Aus Gründen der Stabilität des Lösungsverfahrens, auf die hier nicht eingegangen werden kann, wird an dieser Stelle der Auswertezzeitpunkt an das Ende der Iteration gelegt. Es liegt dann mit den Gleichungen (69) und (70) ein implizites Gleichungssystem in $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}|_i^{i+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1}|_i^{i+1}$ vor. Dieses Gleichungssystem wird in Abschnitt 10.1 und 15.2 für eine konkret vorliegende Fließfunktion gelöst werden, um das Spannungsinkrement $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}|_i^{i+1}$ tatsächlich zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 \\ \eta_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{el}^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (69)$$

$$0 = \mathcal{F} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (70)$$

Zur besseren Übersicht werden nun einige Abkürzungen eingeführt:

$$\mathcal{F}_{n+1}^{i+1} := \mathcal{F} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} := \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad \left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2} \right]_{n+1}^{i+1} := \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{el}^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \quad (71)$$

$$0 = \mathcal{F}_{n+1}^{i+1} \quad (72)$$

Nun kann, durch Bilden der totalen Differenziale und anschließende Elimination von $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$, die algorithmenkonsistente Materialtangente aufgestellt werden.

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (73)$$

$$\begin{aligned} d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1} &= \frac{\partial}{\partial\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}} \left[\mathbf{C}_{el}^{-1} \Delta\sigma_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}} \left[\mathbf{C}_{el}^{-1} \Delta\sigma_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \\ d\Delta\epsilon_{n+1}^{i+1} &= \left[\mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2} \right]_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1} + \left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}} \left[\mathcal{F}_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1} + \frac{\partial}{\partial\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}} \left[\mathcal{F}_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \\ 0 &= \left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (75)$$

Einführung einer weiteren Abkürzung $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} := \mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2} \right]_{n+1}^{i+1} \quad (76)$$

Auflösen der Gleichung (74) nach $d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}$:

$$d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1} = \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[d\Delta\epsilon_{n+1}^{i+1} - \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \right] \quad (77)$$

Multiplikation der Gleichung (77) von links mit $\left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T$:

$$\underbrace{\left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T d\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}}_{= 0 \text{ Gl.(75)}} = \left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[d\Delta\epsilon_{n+1}^{i+1} - \left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \right] \quad (78)$$

Auflösen nach $d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$:

$$\left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right] d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} = \left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} d\Delta\epsilon_{n+1}^{i+1} \quad (79)$$

$$d\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} = \frac{\left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1}}{\left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]} d\Delta\epsilon_{n+1}^{i+1} \quad (80)$$

Rückeinsetzen in Gleichung (77):

$$d\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} = \left[\left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} - \frac{\left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right] \otimes \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1}}{\left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]} \right] d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1}$$

Algorithmenkonsistente Materialtangente: (vergl. ([14], Seite 243))

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} &:= \mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right]_{n+1}^{i+1} \\ \mathbf{C}^{*i+1}_{n+1} &= \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} - \frac{\left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right] \otimes \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1}}{\left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]} \end{aligned} \quad (81)$$

Teil III

Isotrope Plastizität nach von Mises

Die Vergleichsspannungshypothese nach von Mises geht von der Annahme aus, dass Fließen des Werkstoffs eintritt, wenn die Oktaederschubspannung einen kritischen Wert erreicht. Diese Annahme ist äquivalent mit der Annahme von Huber und Hencky, dass Fließen nur in Folge des deviatorischen Anteils des Spannungszustandes eintritt, während der hydrostatische Anteil ohne Wirkung auf das Fließen bleibt.

Im **III** Teil dieser Arbeit werden nun die allgemeinen, für die Plastizität erarbeiteten Gesetzmäßigkeiten auf die konkrete Fließfunktion nach von Mises übertragen und einige Eigenschaften der von Mises-Plastizität vorgestellt. Im Anschluss daran wird dann der Lösungsalgorithmus für diese Art der Plastizität entwickelt.

Die Fließfunktion nach von Mises für den allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand lautet ([8], Seite 181).

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2\sigma_F^2} \left[(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) \right] - 1 \quad (82)$$

9 Eigenschaften der von Mises-Plastizität

9.1 Von Mises-Fließfunktion im Hauptnormalspannungsraum

Im Hauptachsensystem(HAS) nimmt die Fließfunktion folgende Form an:

$$\text{HAS: } \mathcal{F} = \frac{1}{2\sigma_F^2} \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \right] - 1 \quad (83)$$

Die Fließbedingung $\mathcal{F} = 0$ kann nun für die konkret vorliegende Fließfunktion im Hauptnormalspannungsraum dargestellt werden (Abbildung **26**). Die Gleichung $\mathcal{F} = 0$ beschreibt die Mantelfläche eines Zylinders mit Rotationsachse in Richtung der Raumdiagonalen $[1 \ 1 \ 1]^T$, den Fließzylinder. Elastische Spannungszustände liegen im Inneren des Fließzylinders, plastische auf der Oberfläche.

9.2 Von Mises-Fließfunktion im Hauptnormalverzerrungsraum

Fließfunktionen können auch in den Verzerrungen formuliert werden, es tritt dabei jedoch die Besonderheit auf, dass die Fließfläche sich beim Fließen im Hauptnormalverzerrungsraum verschiebt. Dies sei hier kurz dargestellt, im Folgenden wird jedoch nur mehr die Formulierung in den Spannungen verwendet.

Im Modell der idealen Plastizität gemäß Abschnitt **5.2** ist jedem elastischen Spannungszustand durch das elastische Materialgesetz in eindeutiger Weise ein Verzerrungszustand zugeordnet. Daher kann die Grenzfläche $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_\sigma$ in eine Grenzfläche $\mathcal{F}_{\varepsilon_0}$ umgerechnet werden, solange keine plastischen Verformungen auftreten. Plastische Verzerrungen können im Hauptnormalverzerrungsraum direkt dargestellt werden, und bewirken eine Verschiebung des Fließzylinders im Verzerrungsraum, da stets $\mathcal{F}_\varepsilon \leq 0 \ \forall \varepsilon$ gelten muss (Abbildung **27**).

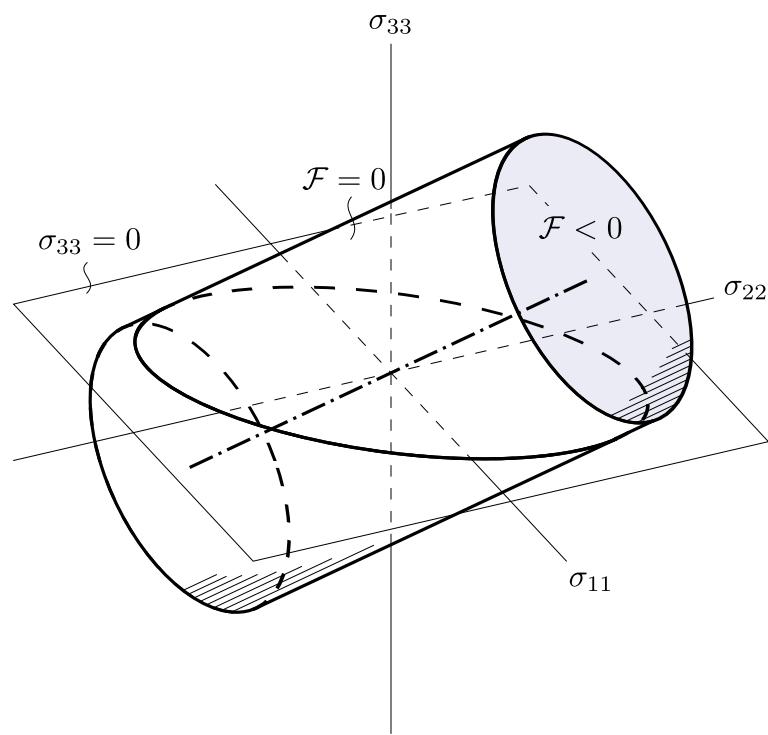


Abbildung 26: Von Mises-Fließfläche im Hauptnormalspannungsraum

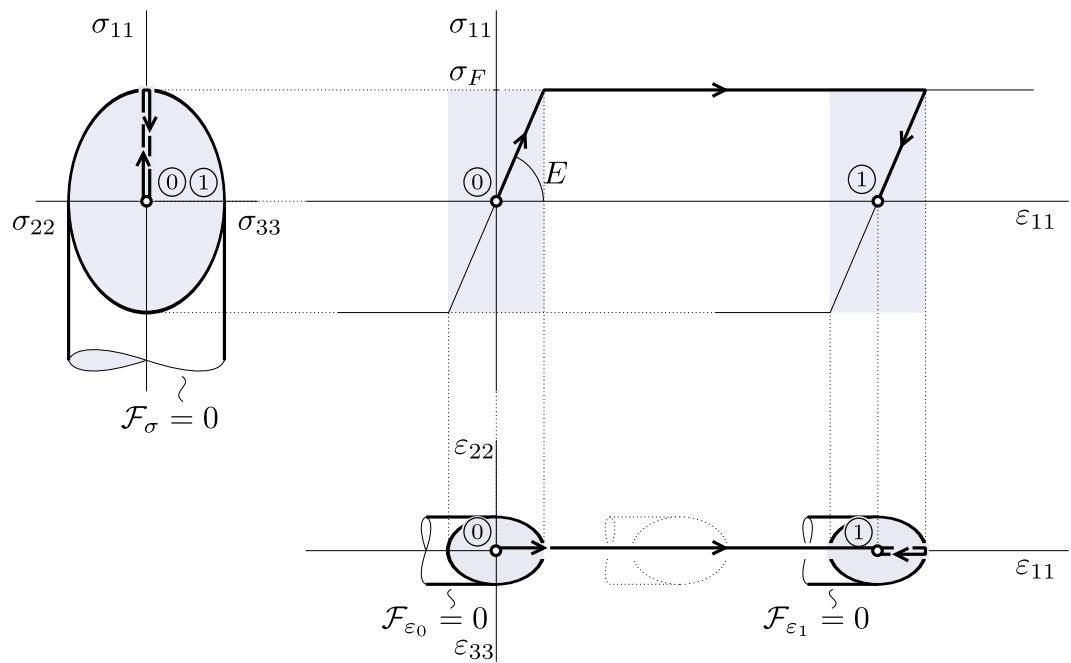


Abbildung 27: Hauptnormalspannungsraum und Hauptnormalverzerrungsraum

9.3 Inkompressibilität der von Mises-Plastizität

In Abschnitt 5.8 wurde die Annahme getroffen, dass plastische Verformungen isochor bleiben. Nun soll gezeigt werden, dass die von Mises-Fließbedingung in keinem Widerspruch zu dieser Annahme steht.

$$\begin{aligned}
 de^{pl} &= \text{tr}(\mathbf{V}^{pl}) & \mathbf{V}^{pl} &= \begin{bmatrix} d\varepsilon_{xx} & d\varepsilon_{xy} & d\varepsilon_{xz} \\ d\varepsilon_{yx} & d\varepsilon_{yy} & d\varepsilon_{yz} \\ d\varepsilon_{zx} & d\varepsilon_{zy} & d\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^{pl} \dots \text{Matrixschreibweise} \\
 de^{pl} &= d\varepsilon_{xx}^{pl} + d\varepsilon_{yy}^{pl} + d\varepsilon_{zz}^{pl} \\
 d\varepsilon_{xx}^{pl} &= d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{xx}} & d\varepsilon_{yy}^{pl} &= d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{yy}} & d\varepsilon_{zz}^{pl} &= d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{zz}} \\
 \mathcal{F} &= \frac{1}{2\sigma_F^2} \left[(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) \right] - 1 \\
 d\varepsilon_{xx}^{pl} &= \frac{d\lambda}{2\sigma_F^2} \left[2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})(-1) + 2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \right] \\
 d\varepsilon_{yy}^{pl} &= \frac{d\lambda}{2\sigma_F^2} \left[2(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) + 2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(-1) \right] \\
 d\varepsilon_{zz}^{pl} &= \frac{d\lambda}{2\sigma_F^2} \left[2(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(-1) + 2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \right] \\
 de^{pl} &= \frac{d\lambda}{\sigma_F^2} \left[-\sigma_{zz} + \sigma_{xx} + \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \right] \\
 &\quad + \frac{d\lambda}{\sigma_F^2} \left[+\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right] \\
 &\quad + \frac{d\lambda}{\sigma_F^2} \left[-\sigma_{yy} + \sigma_{zz} + \sigma_{zz} - \sigma_{xx} \right] \\
 de^{pl} &\equiv 0
 \end{aligned} \tag{84}$$

9.4 Von Mises-Fließfunktion in Voigt'scher Notation

Zur kompakten Darstellung wird eine Form der von Mises-Fließfunktion in Voigt'scher Notation benötigt (Gleichung (85)). Durch Ausmultiplizieren überzeugt man sich leicht von der Äquivalenz zu Gleichung (82).

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} - 1 \tag{85}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]^T \tag{86}$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sigma_F^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{87}$$

9.5 Ableitungen der von Mises-Fließbedingung

Außer der Fließfunktion selbst werden noch ihre ersten beiden Ableitungen benötigt. Die Ableitung wird an dieser Stelle zur späteren Verwendung durchgeführt.
Erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} - 1 \right) && \xrightarrow{\text{Indexnotation}} & \mathcal{F}_{,\sigma_i} &= \left(\sigma_a M_{ab} \sigma_b - 1 \right)_{,\sigma_i} \\
 \mathcal{F}_{,\sigma_i} &= \underbrace{\sigma_{a,\sigma_i}}_{\delta_{ia}} M_{ab} \sigma_b + \sigma_a M_{ab} \underbrace{\sigma_{b,\sigma_i}}_{\delta_{bi}} \\
 &\quad \mathcal{F}_{,\sigma_i} = \delta_{ia} M_{ab} \sigma_b + \sigma_a M_{ab} \delta_{bi} && & & (88) \\
 &\quad \mathcal{F}_{,\sigma_i} = M_{ib} \sigma_b + \sigma_a M_{ai} \\
 \mathcal{F}_{,\sigma_i} &= 2M_{ia} \sigma_a && \xrightarrow{\text{Voigt'sche Notation}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= 2\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}
 \end{aligned}$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) && \xrightarrow{\text{Indexnotation}} & \mathcal{F}_{,\sigma_i \sigma_j} &= \left(2M_{ia} \sigma_a \right)_{,\sigma_j} \\
 \mathcal{F}_{,\sigma_i \sigma_j} &= 2M_{ia} \underbrace{\sigma_{a,\sigma_j}}_{\delta_{aj}} && & & (89) \\
 \mathcal{F}_{,\sigma_i \sigma_j} &= 2M_{ij} && \xrightarrow{\text{Voigt'sche Notation}} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} &= 2\mathbf{M}
 \end{aligned}$$

10 Entwicklung des Lösungsalgorithmus

In Teil II wurde bereits der größte Teil der zum Lösen eines plastischen Problems notwendigen Theorie erarbeitet. In diesem Teil wird nun konkret die Fließfunktion nach von Mises vorgegeben, in die bereits vorhandenen Gleichungen eingesetzt und ein Lösungsalgorithmus entwickelt.

10.1 Radial-Return Algorithmus und Spannungsinkrement

Wie bereits bei den Lösungsverfahren nichtlinearer Probleme erwähnt, (Abschnitt 7.3 für das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren, in gleicher Weise auch für das reguläre Newton-Raphson-Verfahren) muss \mathbf{f}^{int} nach jeder Iteration neu bestimmt werden, um das verbleibende Residuum ermitteln zu können. Die inneren Kräfte können gemäß Gleichung (6) aus den Elementspannungen berechnet werden. Die Elementspannungen liegen nur in den Gaußpunkten des Elementes vor, auf eine entsprechende Indizierung mit dem Elementindex m bzw. dem Gaußpunktindex k wird jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

$$[\mathbf{f}^{int}]_{n+1}^{i+1} = \sum_m \sum_k [\mathbf{B}^m(\mathbf{r}_k^m)]^T [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}_k^m)]_{n+1}^{i+1} \det(\mathbf{J}_k^m)$$

In einem ersten Schritt werden die Verzerrungen gemäß Gleichung (7) aus den durch das Lösungsverfahren berechneten neuen Knotenpunktsverschiebungen ermittelt.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{B}[\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} - \hat{\mathbf{u}}_n] \quad (90)$$

Anschließend wird die sogenannte Versuchsspannung $[\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1}$ berechnet. Diese Versuchsspannung ist für den Fall, dass keine Plastifizierung stattfindet auch die neue Spannung nach der Iteration.

$$[\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} := \mathbf{C}_{el}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} + \boldsymbol{\sigma}_n \quad (91)$$

Der Wert der Fließfunktion für diese Versuchsspannung bestimmt die weitere Vorgehensweise. Ist $\mathcal{F} < 0$, liegt der neue Spannungszustand noch im Inneren des von der Fließfläche umschlossenen Volumens und ist zulässig. Wenn \mathcal{F} Null übersteigt, ist der neue Spannungszustand nicht zulässig und muss modifiziert werden (Abbildung 28).

$$\mathcal{F} = [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1}]^T \mathbf{M} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \begin{cases} < 0 : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} = [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1}, \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} = 0 \\ \geq 0 : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \text{ und } \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \text{ aus Radial-Return Alg.} \end{cases}$$

Liegt $[\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1}$ nun tatsächlich außerhalb der Fließfläche, muss der Plastische Konsistenzparameter $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$ einen Wert größer Null annehmen, um wieder zu einem zulässigen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}$ zu gelangen (vergl. Abschnitt 5.7 bzw. Abbildung 16). Die Bestimmung von $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$ erfolgt algorithmisch, und wird als Radial-Return Algorithmus bezeichnet.

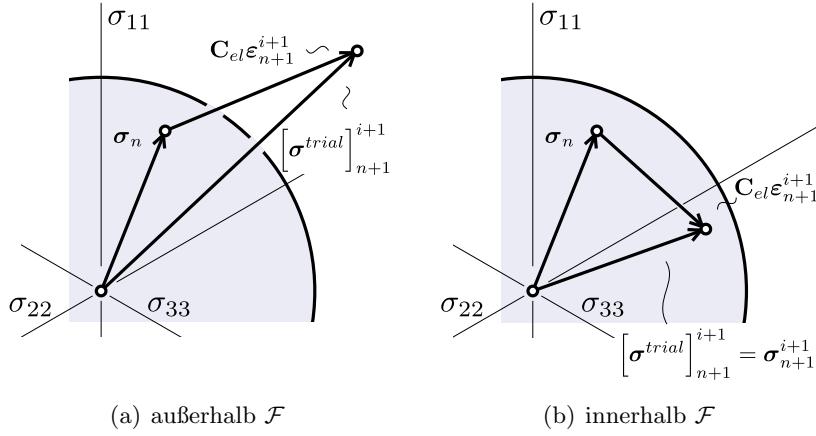


Abbildung 28: Versuchsspannung

Das zu lösende Gleichungssystem wird durch die Gleichungen (71) (Prandtl-Reuß) und (72) (Fließbedingung) gebildet.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{el}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1} \underbrace{\frac{2\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}}{\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1}}} \quad (92)$$

$$0 = \underbrace{\mathcal{F}_{n+1}^{i+1}}_{\left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} - 1} \quad (93)$$

Gleichungssystem:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{el}^{-1} \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_n \right] + 2\Delta \lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \quad (94)$$

$$0 = \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} - 1 \quad (95)$$

Auflösen der Gleichung (94) nach $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}$ liefert die Spannung am Ende der laufenden Iteration als Funktion des noch unbekannten plastischen Konsistenzparameters (Gleichung (96)):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{el} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} + \boldsymbol{\sigma}_n &= \left[\mathbf{1} + 2\Delta \lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{C}_{el} \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} &= \left[\mathbf{1} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1} 2\mathbf{C}_{el} \mathbf{M} \right]^{-1} \underbrace{\left[\mathbf{C}_{el} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} + \boldsymbol{\sigma}_n \right]}_{= [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \text{ Gl. (91)}} \\ &= [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (96)$$

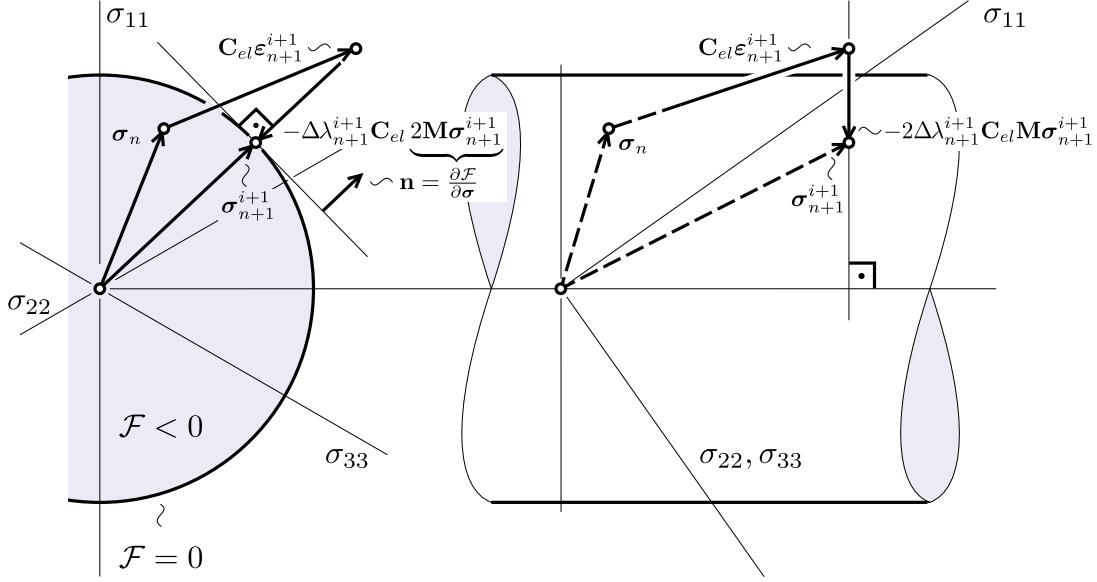


Abbildung 29: Größen des Radial-Return Algorithmus im Hauptnormalspannungsraum

Der Vektor $\mathbf{C}_{el}\mathbf{M}\sigma_{n+1}^{i+1}$ bewirkt eine Korrektur des unzulässigen Spannungszustandes $[\sigma^{trial}]_{n+1}^{i+1}$ zurück auf die Fließfläche. Der Skalierungsfaktor $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$ wird so bestimmt, dass die Fließfunktion (Gleichung (95)) erfüllt ist.

Im Hauptnormalspannungsraum gilt:

$$\mathbf{CM}\sigma_{n+1}^{i+1} = \frac{E}{1+\nu}\mathbf{M}\sigma_{n+1}^{i+1} \quad (97)$$

Mithilfe der Beziehung in Gleichung (97) erkennt man, dass der Korrekturvektor orthogonal zur Fließfläche \mathcal{F} steht. Die Korrektur erfolgt also in radialem Richtung, daher die Bezeichnung „Radial-Return“.

$$\left. \begin{aligned} -2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}\mathbf{C}_{el}\mathbf{M}\sigma_{n+1}^{i+1} &= -2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}\frac{E}{1+\nu}\mathbf{M}\sigma_{n+1}^{i+1} \\ \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} = 2\mathbf{M}\sigma_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \right\} -2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}\mathbf{C}_{el}\mathbf{M}\sigma_{n+1}^{i+1} \parallel \mathbf{n} \quad (98)$$

Es verbleibt also noch die Bestimmung des Skalierungsfaktors des Korrekturterms $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$, sodass die Spannung σ_{n+1}^{i+1} auf der Fließfläche zu liegen kommt. σ_{n+1}^{i+1} ist durch die Gleichung (96) gegeben und soll die Fließbedingung (Gleichung (95)) erfüllen.

Durch Einsetzen der Gleichung (96) in Gleichung (95) erhält man daher eine implizite Gleichung in $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$.

$$0 = \left[\left[\mathbf{1} + 2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-1} [\sigma^{trial}]_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{M} \left[\mathbf{1} + 2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-1} [\sigma^{trial}]_{n+1}^{i+1} - 1 \quad (99)$$

Um die Gleichung (99) nach $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$ zu lösen, wird das skalare Newton-Verfahren (Gleichung (100)) angewandt, dadurch wird eine weitere innere Iteration j innerhalb der

Iteration i durchgeführt.

$$x^{j+1} = -\frac{f(x^j)}{f'(x^j)} + x^j \quad (100)$$

Dem Funktionswert des Newton-Verfahrens entspricht der Wert der Fließfunktion:

$$\begin{aligned} f(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j}) &:= \underbrace{\left[\left[\mathbf{1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j} 2\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \right]^T}_{=: \mathbf{a}} \\ &\quad \mathbf{M} \left[\mathbf{1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j} 2\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} - 1 \quad (101) \end{aligned}$$

$$f(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j}) = \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} - 1 \quad (102)$$

Ableiten der Gleichung (102) nach $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j}$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} &= \underbrace{\left[\frac{d\mathbf{a}}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} \right]^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{M} \left[\frac{d\mathbf{a}}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} \right]}_{=: \mathbf{b}} \\ \mathbf{b} &:= \frac{d\mathbf{a}}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} = (-1) \left[\mathbf{1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j} 2\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-2} 2\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \\ &\quad \frac{df}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} = \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a} &= [\mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a}]^T = [\mathbf{M} \mathbf{a}]^T [\mathbf{b}^T]^T = \mathbf{a}^T \mathbf{M}^T \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b} \\ &\quad \frac{df}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} = 2\mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{a} \\ \frac{df}{d(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j})} &= (-4) \left[\mathbf{1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j} 2\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-2} \mathbf{C}_{el}\mathbf{M} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \\ &\quad \mathbf{M} \left[\mathbf{1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1,j} 2\mathbf{C}_{el}\mathbf{M} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \quad (103) \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (101) und (103) kann der Newton-Algorithmus, laut Gleichung (100) durchgeführt werden. Der Startwert für $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,0}$ beträgt Null. Der Wert der Fließbedingung dient als Abbruchbedingung. Die Iteration wird solange fortgeführt, bis der Betrag von \mathcal{F} die Genauigkeitskonstante $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ unterschreitet (Abbildung 30).

$$|\mathcal{F}(\Delta\lambda_{n+1}^{i+1,i+1})| < \varepsilon_{\mathcal{F}} \quad (104)$$

Das gesuchte Spannungssinkrement ergibt sich dann aus Gleichung (96) mit dem berechneten Wert $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1}$.

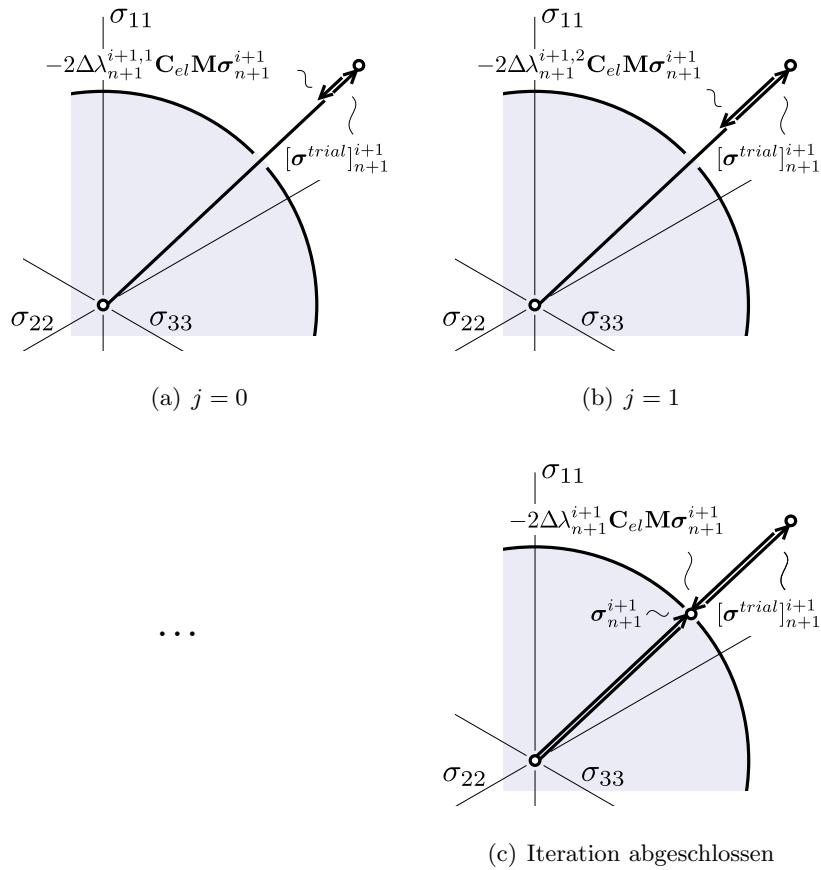


Abbildung 30: Radial-Return Iterationsprozess

10.2 Algorithmenkonsistente Materialtangente für die von Mises-Fließbedingung

Da die Fließfunktion nun konkret vorliegt, kann Gleichung (81) weiter ausgewertet werden.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} &:= \mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \sigma^2} \right]_{n+1}^{i+1}}_{2\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} &:= \mathbf{C}_{el}^{-1} + 2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{M}\end{aligned}\quad (105)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$$

$$\mathbf{C}^{*i+1} = \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} - \frac{2\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}}{\underbrace{\left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]} \otimes \underbrace{\left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T}_{\left[\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1} \right]^T} \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1}}}_{2[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}]^T \mathbf{M}} \quad (106)$$

$$\mathbf{C}^{*i+1} = \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} - \frac{\left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \otimes \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{M} \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1}}{\left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{M} \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (107)$$

10.3 Gesamtalgorithmus für die von Mises-Fließfunktion

In Abbildung 31 ist der Ablauf des Gesamtalgorithmus graphisch dargestellt.

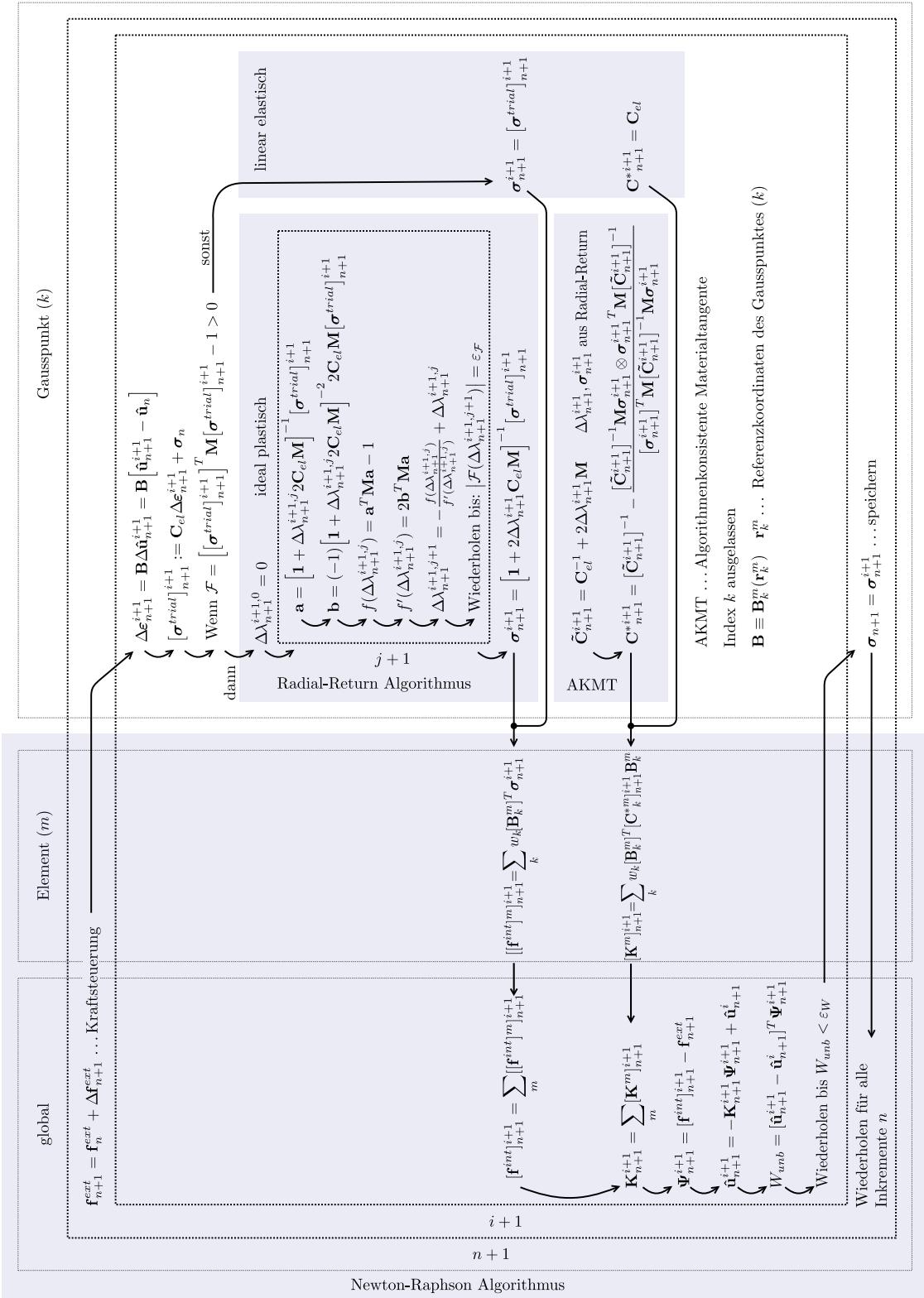


Abbildung 31: Gesamタルゴリズム für die von Mises-Fließfunktion

11 Beispiel: Kugel unter Innenverschiebung

Für einige geometrisch einfache Probleme existieren analytische Lösungen. Beispielsweise liegt bei einer rotationssymmetrisch belasteten Kugel nur ein einziger Verschiebungsfreiheitsgrad vor und das Verschiebungsfeld kann durch Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden. Anhand dieser bekannten Lösungen soll nun die Rechnung des im Rahmen dieser Diplomarbeit erstellten FE-Programms verifiziert werden.

11.1 Analytische Lösung

Die Radialverschiebung einer Hohlkugel, zufolge einer auf der Innenseite aufgeprägten Verschiebung, soll als Funktion des Radius berechnet werden (Abbildung 32). Die Quellen ([2], Seite 51 ff.), ([6], Seite 109 ff.) geben eine Lösung für die Verschiebung zufolge eines Innendrucks p an. Da für die FE-Rechnung eine Innenverschiebung leichter zu modellieren ist, wird die dazu korrespondierende Innenverschiebung berechnet.

$$u(r) = \begin{cases} u_{el}(r) : \mathcal{F} < 0 \\ u_{pl}(r) : \mathcal{F} = 0 \end{cases} \quad (108)$$

$$u_{el}(r) = \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4G} \left(\frac{b}{r} \right)^3 \right) \left(\frac{c}{b} \right)^3 \frac{2r\sigma_F}{3} \quad (109)$$

$$u_{pl}(r) = \left(\left(\frac{1}{2G} + \frac{2}{3K} \right) \left(\frac{c}{r} \right)^3 - \frac{2}{3K} \right) \frac{r\sigma_F}{3} + \left(2\sigma_F \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p + \frac{2\sigma_F}{3} \right) \frac{r}{3K} \quad (110)$$

Angabe:

$$u(a) = u_a = 0.1 \text{ mm}$$

Parameter:

$$\begin{aligned} a &= 50 \text{ mm} & E &= 200 \text{ GPa} & G &= \frac{E}{2(1+1\nu)} \\ b &= 150 \text{ mm} & \nu &= 0.3 & K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \\ \sigma_F &= 100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$u(a) = u_a \quad u_{el}(c) = u_{pl}(c)$$

Korrespondierende Größen:

$$c = 94.38 \text{ mm} \quad p = 177.1 \text{ MPa}$$

11.2 FE-Lösung

Die Abbildungen 33 bis 35 wurden mit dem Postprocessing Programm *Gid* erstellt. Abbildung 34 zeigt die äquivalente plastische Verzerrung κ , als skalares Maß für den Grad der plastischen Verformung.

$$\text{Kappa} = \kappa := \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{pl}^T \varepsilon_{pl}} \quad (111)$$

Abbildung 35 zeigt einen durch σ_F normierten Wert der Vergleichsspannung σ_V

$$\text{Sigma_V} = \left(\frac{\sigma_V}{\sigma_F} \right)^2 \quad (112)$$

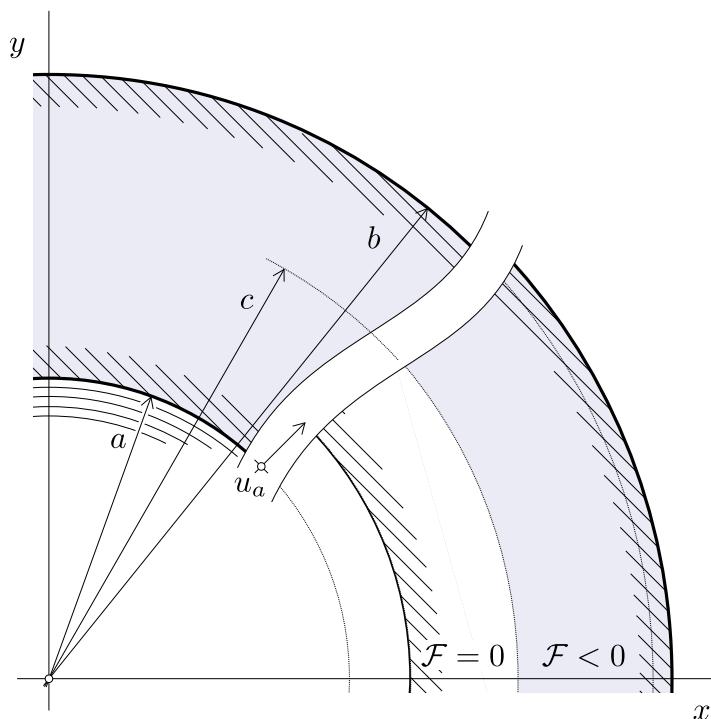


Abbildung 32: Hohlkugel unter Innenverschiebung

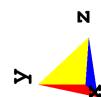
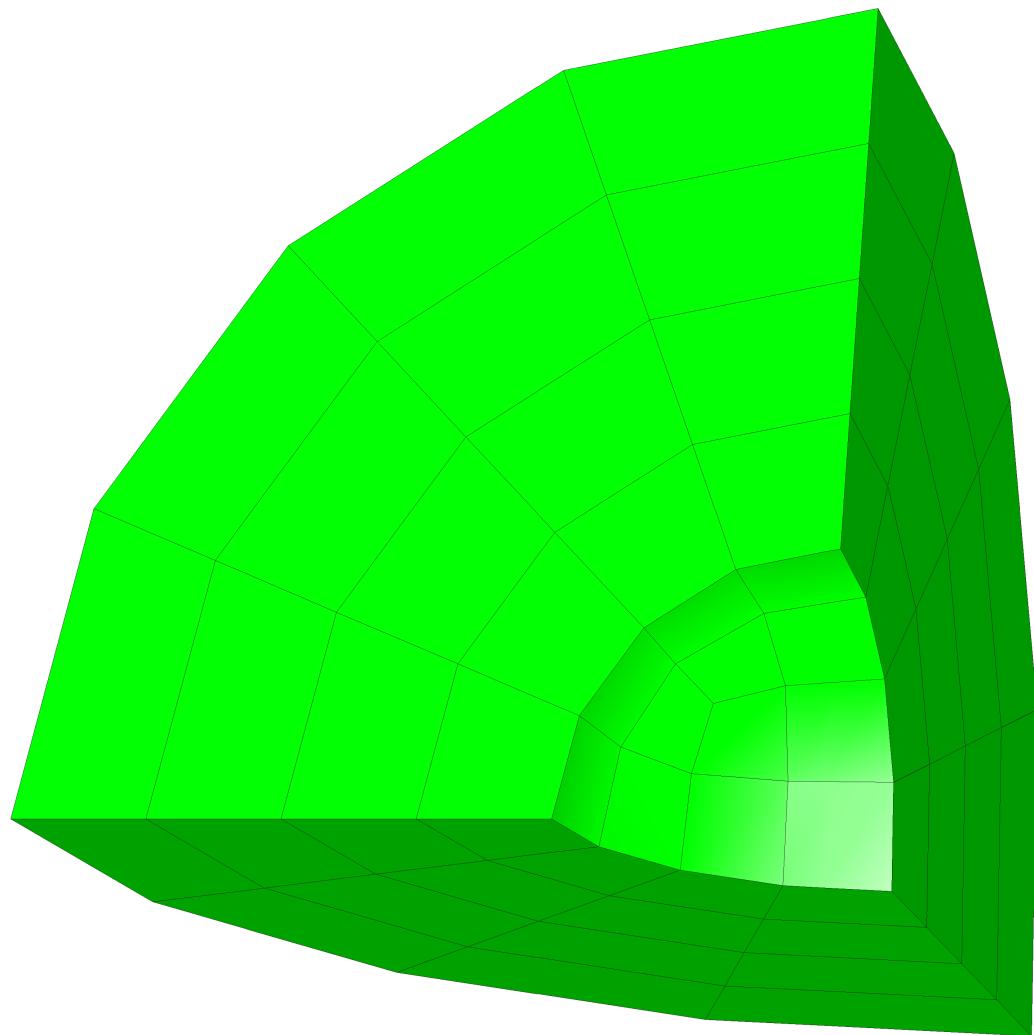


Abbildung 33: Vernetzung

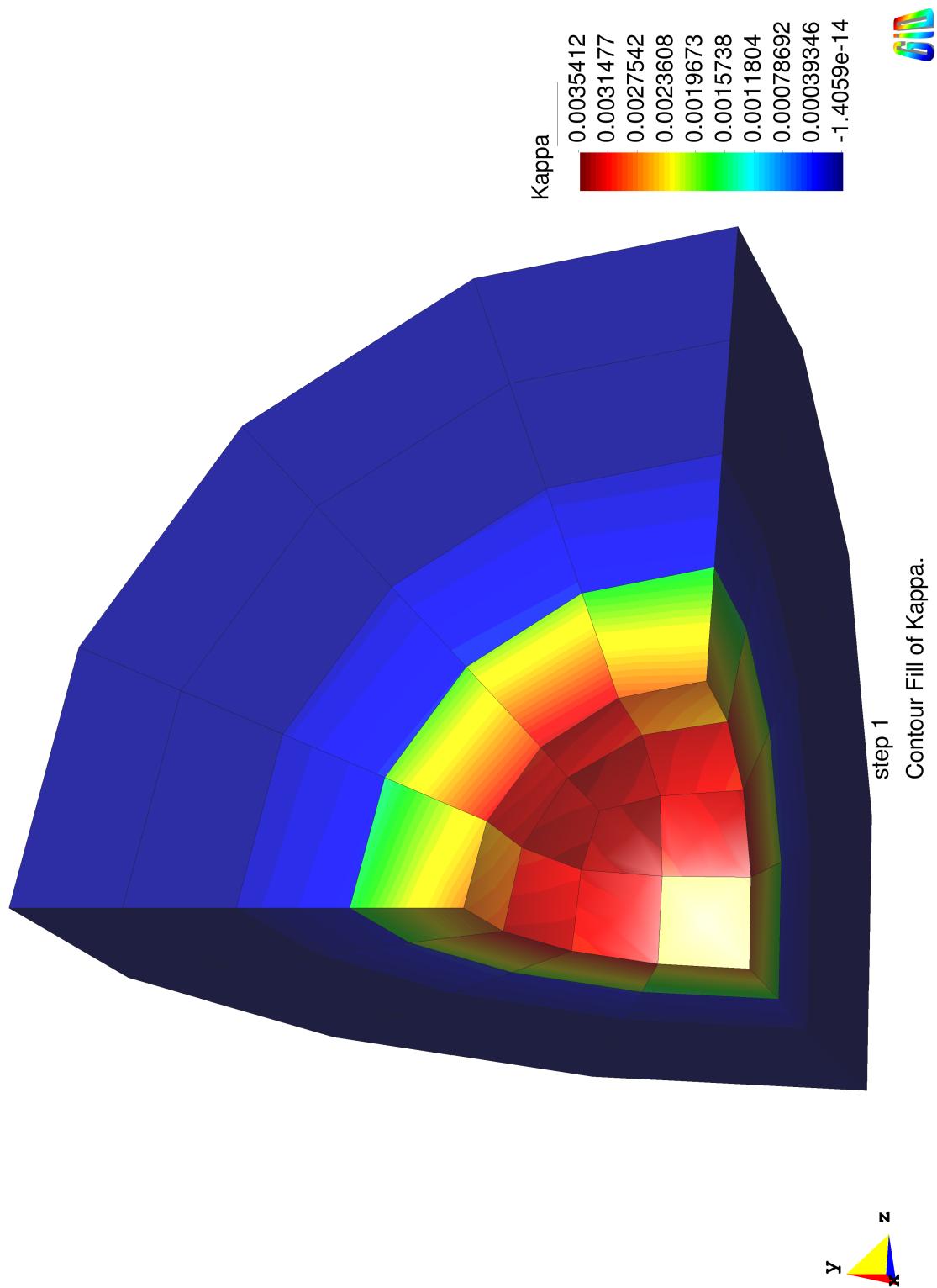


Abbildung 34: Äquivalente plastische Verzerrung κ

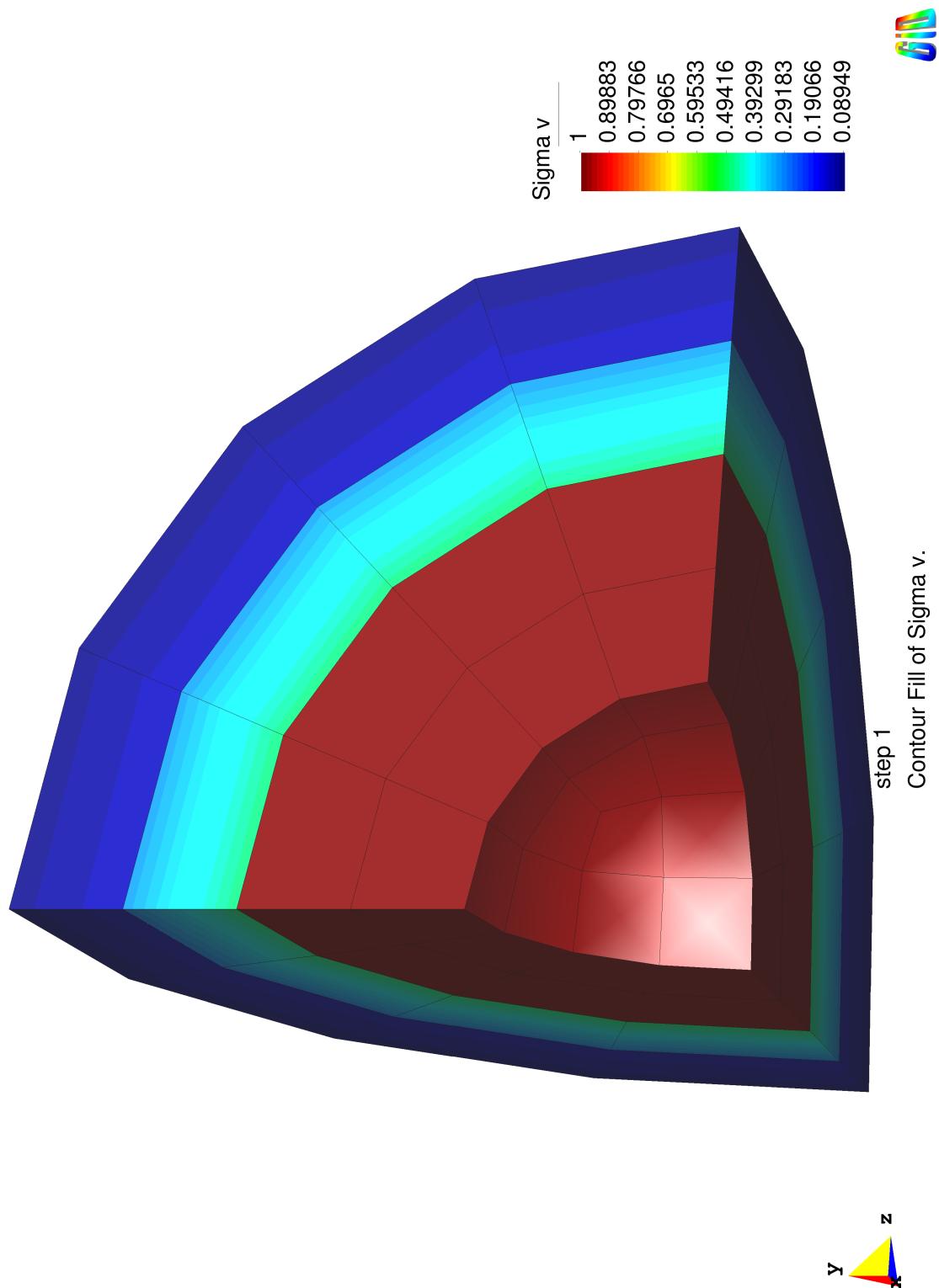


Abbildung 35: Normierte Vergleichsspannung σ_V/σ_F

11.3 Vergleich

In Abbildung 36 sind die Knotenpunktsverschiebungen und die analytische Lösung aus Abschnitt 11.1 über den Radius aufgetragen. Trotz der groben Vernetzung erhält man bereits eine hohe Übereinstimmung.

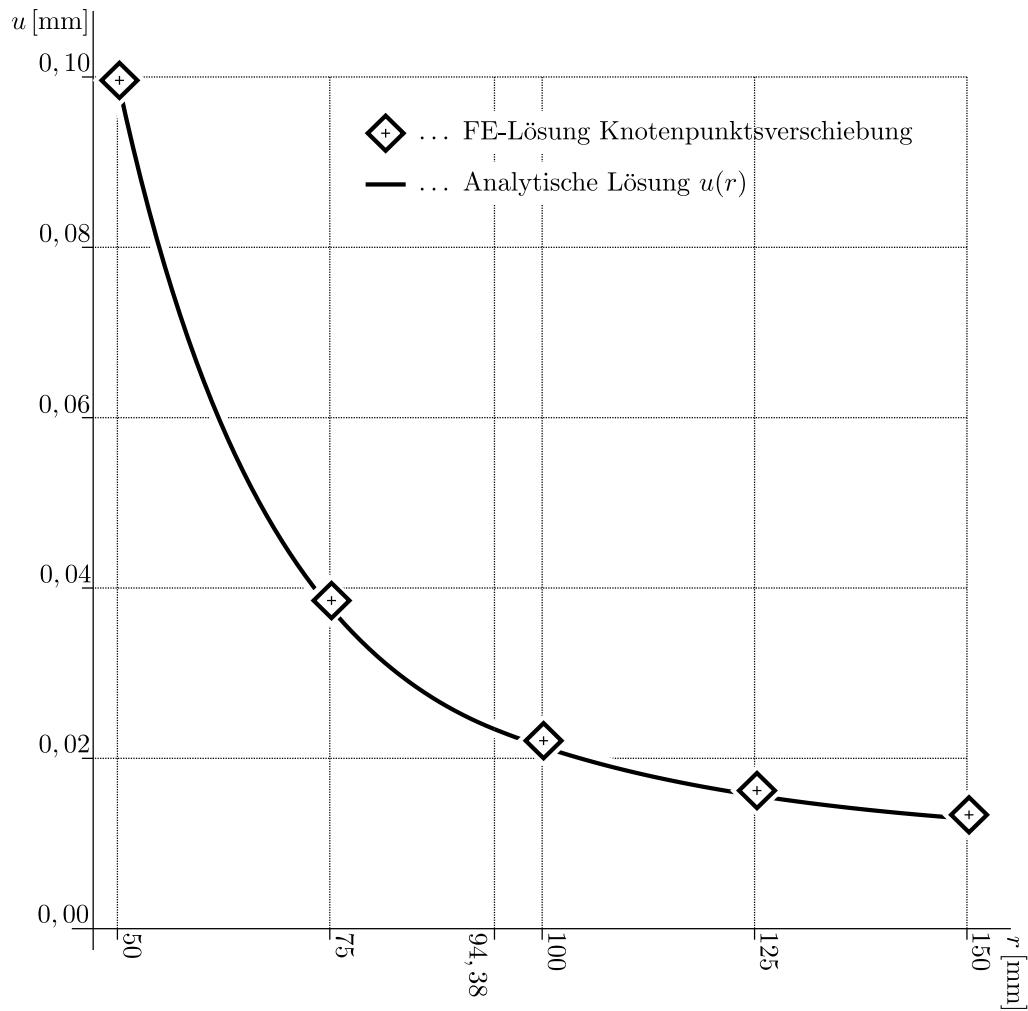


Abbildung 36: Radialverschiebung u über Radius r

12 Beispiel: Traglast

Kachanov ([6], Seite 107 f.) gibt eine analytische Beschreibung der Ausbreitung der plastischen Zone in einem auf Biegung beanspruchten Balken an. Dies soll numerisch nachgerechnet werden.

12.1 Analytische Lösung

Ein Balken wird mit der Einzelast $P = \alpha P_T$ belastet. P_T bezeichnet die Traglast bei vollständiger Plastifizierung des Querschnitts und α ist ein Skalierungsfaktor der am Be-

ginn der Plastifizierung den Wert $\frac{2}{3}$ und bei Erreichen der Traglast den Wert 1 annimmt. Die Funktion $\zeta(x)$ beschreibt die Grenzkurve zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich für einen gegebenen Traglastfaktor α .

$$\zeta(\alpha, x) = \pm \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - 2\alpha \frac{x}{l}\right)} \quad (113)$$

Parameter:

$$l = 200 \text{ mm} \quad h = 20 \text{ mm}$$

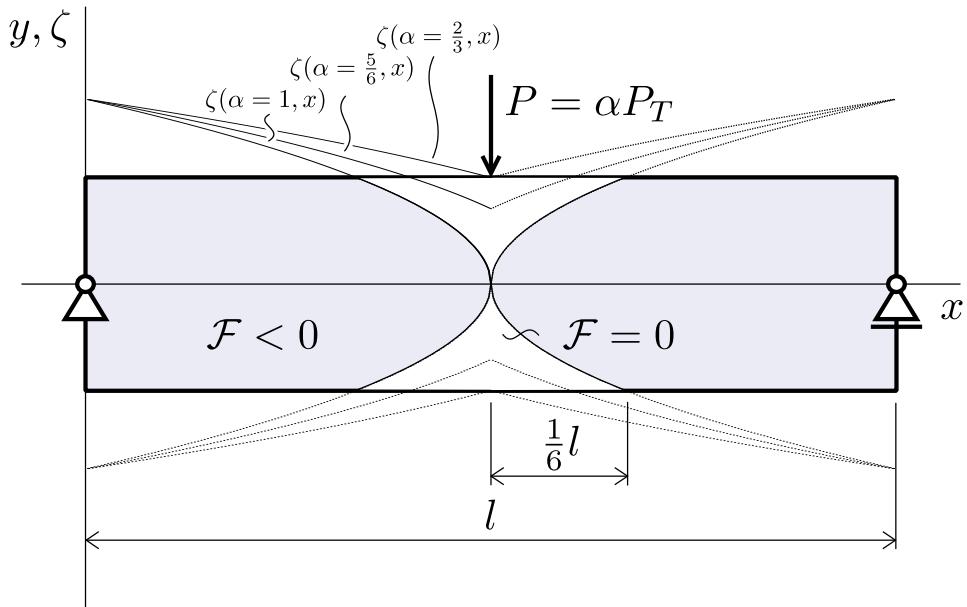


Abbildung 37: Ausbreitung der plastischen Zone bis zum Erreichen der Traglast

12.2 FE-Lösung

Der Balken wurde in der FE-Rechnung als Scheibe im ebenen Verzerrungszustand modelliert. Um Shearlocking-Effekte gering zu halten, wurde der Querschnitt aus Elementen 2. Ordnung aufgebaut. Außerdem wurde teilweise die Newton-Côtes-Integration anstelle der Gauß-Integration verwendet, um die Integrationspunkte an den Rand des Elements zu legen. In Abbildung 38 sind Knoten durch Kreise und Integrationspunkte durch Rauten symbolisiert. Plastifizierte Integrationspunkte sind rot ausgefüllt dargestellt.

Die plastifizierten Integrationspunkte liegen innerhalb des durch $\zeta(\alpha, x)$ (punktierter Linie) vorgegebenen Bereichs, jedoch verhält sich die FE-Rechnung steifer und die Plastifizierung tritt später ein. Daher ist bei $\alpha = 1$ in der FE-Rechnung noch ein elastischer Kern vorhanden.

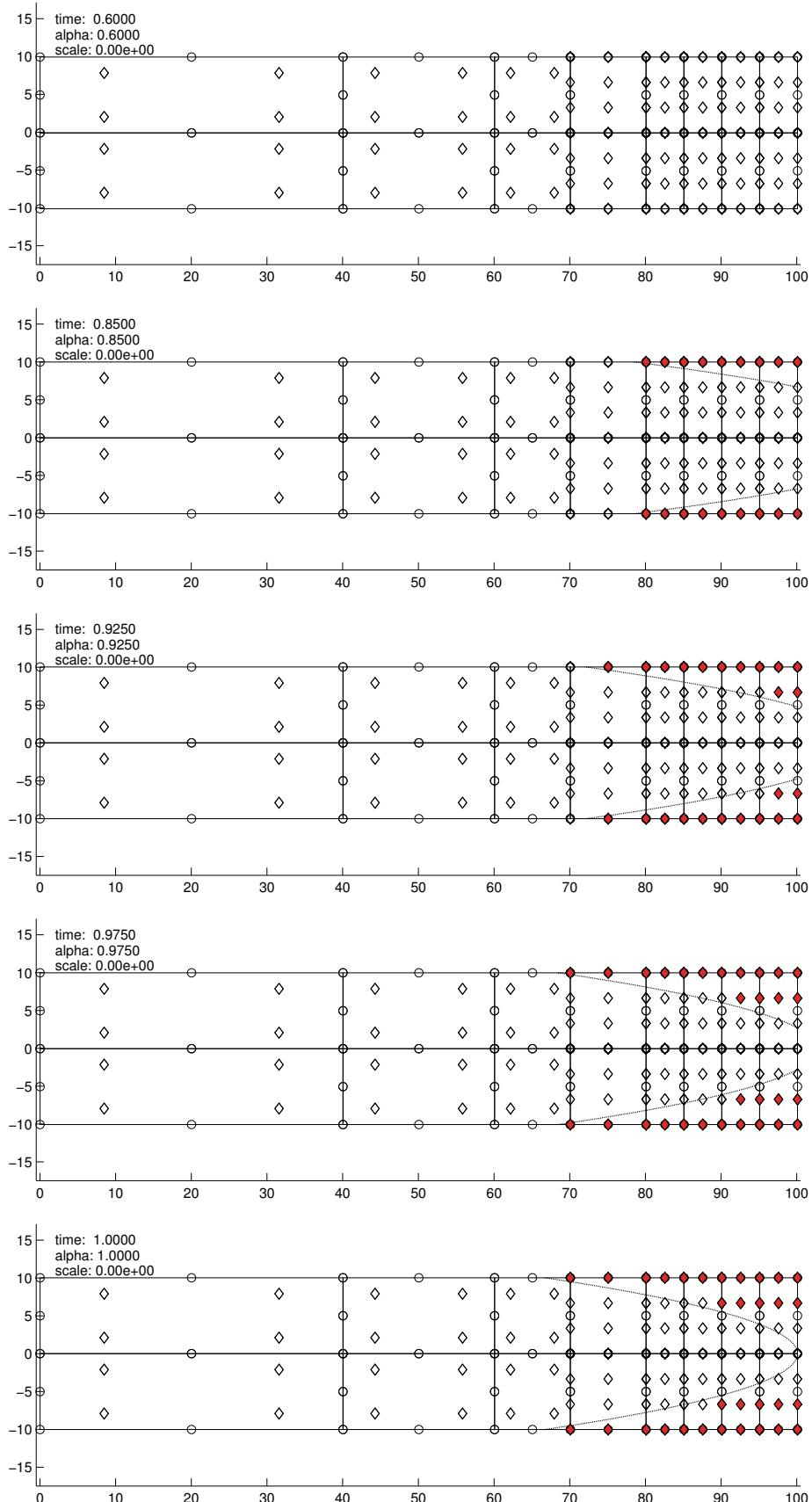


Abbildung 38: Ausbreitung der plastischen Zone in der FE-Rechnung

Teil IV

Anisotrope Plastizität nach Hill

Einige Phänomene der Plastizität können durch die isotrope von Mises-Plastizität nicht modelliert werden. Die Annahme, dass alle Verformungsrichtungen gleichberechtigt sind, ist mit fortschreitender plastischer Deformierung oft nicht mehr aufrechtzuerhalten. So werden beispielsweise bei polykristallinen metallischen Werkstoffen die Körner in die Richtung der größten Spannung gestreckt und es bilden sich Vorzugsrichtungen aus ([5], Seite 317).

Diese Anisotropieerscheinungen spielen meist nur im plastischen Bereich eine nennenswerte Rolle, führen dort jedoch zu deutlichen Abweichungen vom isotropen Modell ([7], Seite 27).

Es war das Ziel dieser Arbeit ein FE-Programm zu entwickeln, das diese anisotropen Phänomene mithilfe des von R. Hill eingeführten Plastizitätsmodells nachbildet.

13 Eigenschaften der Hill-Plastizität

Die Hill-Plastizität berücksichtigt die Wirkung von Vorzugsrichtungen auf das Materialverhalten, beschränkt sich jedoch auf den Fall, dass diese Richtungen senkrecht zueinander stehen. Im Raum können bis zu drei Vorzugsrichtungen vorhanden sein. Sie werden als Hauptachsen der Anisotropie bezeichnet. Die Wirkung der Anisotropie wird in einer neuen Fließfunktion, der Hill-Fließfunktion, berücksichtigt.

13.1 Ansatz der Hill-Fließfunktion

Fließfunktionen können sehr allgemein in der Form von Gleichung (114) (Indexnotation) angesetzt werden.

$$\mathcal{F} = K_0 + K_{ij}\sigma_{ij} + \underbrace{K_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}}_{\text{Quadratisches Glied}} + K_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots = 0 \quad (114)$$

Die Hill-Fließfunktion beschränkt sich, wie auch die von Mises-Fließfunktion, auf das quadratische Glied. Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors ergeben sich auch im K -Tensor Symmetrien.

$$K_{ijkl} = K_{jikl} \quad K_{ijkl} = K_{ijlk} \quad (115)$$

Da die Reihenfolge der Summation keine Rolle spielt, gilt auch:

$$K_{ijkl} = K_{klij} \quad (116)$$

Damit verbleiben noch 21 unabhängige Parameter. Durch die Annahme, dass der hydrostatische Spannungszustand keinen Einfluss auf das Fließen hat, reduziert sich die Anzahl der Parameter weiter auf sechs ([7], Seite 27ff.). Der Tensor für den diese Annahmen getroffen wurden, wird nun, zur Unterscheidung vom Tensor des allgemeinen Ansatzes K_{ijkl} , mit H_{ijkl} bezeichnet.

Die Darstellung des H_{ijkl} Tensors in Voigt'scher Notation ist durch Gleichung (122) gegeben. Nach Durchführung der Summation und Zusammenfassung der Koeffizienten der gleichen Spannungskomponenten verbleiben diese sechs Parameter in Gleichung (114). Sie werden nach Hill mit F, G, H, L, M, N bezeichnet (Gleichung (117)).

$$\mathcal{F} = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2(L\sigma_{yz}^2 + M\sigma_{zx}^2 + N\sigma_{xy}^2) - 1 \quad (117)$$

Diese sechs Hill-Koeffizienten F, G, H, L, M, N können durch sechs andere, voneinander unabhängige Parameter ausgedrückt werden. Im allgemeisten Fall der Anisotropie sind die drei Normalfließspannungen voneinander unabhängig. Außerdem sind die drei Schubfließspannungen sowohl untereinander als auch zu den Normalfließspannungen unabhängig. Die Gleichungen (118) und (119) drücken die Hill-Koeffizienten durch diese Fließspannungen aus.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{X^2} = G + H \\ \frac{1}{Y^2} = H + F \\ \frac{1}{Z^2} = F + G \end{array} \right\} \begin{array}{ll} 2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} & X \dots \text{Fließnormalspannung in } x\text{-Richtung} \\ 2G = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} & Y \dots \text{Fließnormalspannung in } y\text{-Richtung} \\ 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} & Z \dots \text{Fließnormalspannung in } z\text{-Richtung} \end{array} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} 2L &= \frac{1}{R^2} & R \dots \text{Fließschubspannung in der } yz\text{-Ebene} \\ 2M &= \frac{1}{S^2} & S \dots \text{Fließschubspannung in der } zx\text{-Ebene} \\ 2N &= \frac{1}{T^2} & T \dots \text{Fließschubspannung in der } xy\text{-Ebene} \end{aligned} \quad (119)$$

13.2 Hill-Fließfunktion in Voigt'scher Notation

Da im Abschnitt 13.1 die Hill-Fließfunktion, gleich wie die von Mises-Fließfunktion, nur mit den quadratischen Glied der Spannungen angesetzt wurde, ergibt sich ein ähnlicher Aufbau der beiden Fließfunktionen. Die von Mises-Fließbedingung hat jedoch nur einen einzigen Parameter σ_F zur Abbildung des Materialverhaltens, die Hill-Fließfunktion hingegen hat sechs Parameter F, G, H, L, M, N . Anstelle der fixen Zahlenwerte in Gleichung (87) sind nun Materialparameter getreten.

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} - 1 \quad (120)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]^T \quad (121)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H+F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \quad (122)$$

13.3 Orthotropie

Aufgrund der bereits erwähnten Einschränkung, dass die drei Hauptachsen der Anisotropie zueinander senkrecht stehen müssen, kann die Hill-Plastizität den allgemeineren Fall der Anisotropie, bei denen die Lage der Hauptachsen zueinander nicht bestimmt ist, nicht abbilden. Es kann hier also nur der Sonderfall der Anisotropie mit drei zueinander orthogonalen Hauptachsen, die Orthotropie, behandelt werden.

E. Becker und W. Bürger definieren: „Orthotropie liegt vor bei Invarianz des Materialgesetzes gegen Drehungen um 180° um drei paarweise orthogonale materielle Drehachsen“ ([1], Seite 183). Es soll nun gezeigt werden, dass die Hill-Fließfunktion diese Definition erfüllt.

Für den Winkel π nehmen die Transformationsmatrizen aus Gleichung (2) bis (4) folgende Form an:

$$\mathbf{T}_x(\varphi = \pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_y(\varphi = \pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_z(\varphi = \pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{T}_i^{-1} \quad \begin{array}{l} \mathbf{T}_i \dots \text{Transformationsmatrix} \\ \mathbf{D}_i \dots \text{Drehmatrix} \end{array} \quad i = x, y, z$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_i^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$$

$$\mathcal{F} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^T \mathbf{T}_i^T \mathbf{H} \mathbf{T}_i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$$

Es genügt die Betrachtung des Terms $\mathbf{T}_i^T \mathbf{H} \mathbf{T}_i$. Nach Durchführung der Matrixmultiplikationen stellt man fest, dass $\mathbf{T}_i^T \mathbf{H} \mathbf{T}_i$ und \mathbf{H} gleich sind.

$$\mathbf{T}_i^T \mathbf{H} \mathbf{T}_i (\varphi = \pi) = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H+F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} = \mathbf{H} \quad (123)$$

$$\mathbf{T}_x^T \mathbf{H} \mathbf{T}_x = \mathbf{T}_y^T \mathbf{H} \mathbf{T}_y = \mathbf{T}_z^T \mathbf{H} \mathbf{T}_z = \mathbf{H}$$

Die Hill-Plastizität ist also orthotrop.

$$\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_x) = \mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_y) = \mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_z) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})$$

13.4 Hill-Fließfunktion im Hauptnormalspannungsraum

Natürlich kann auch die Hill-Fließfunktion im Hauptspannungsraum dreidimensional visualisiert werden. Die Fließfläche erscheint im Hauptspannungsraum als Zylinder mit elliptischer Grundfläche (nicht als Kreiszylinder). Die Umrisszeugenden der Fließfläche sind wieder parallel zur Raumdiagonalen.

$$\text{HAS: } \mathcal{F} = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - 1 \quad (124)$$

Abbildung 39 zeigt eine Hill-Fließfläche im Vergleich zur von Mises-Fließfläche.

13.5 Ableitungen der Hill-Fließbedingung

Die Ableitungen nach den Spannungen der Hill-Fließbedingung erfolgt analog zu Abschnitt 9.5. Anstelle der Matrix \mathbf{M} tritt die Matrix \mathbf{H} .

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 2\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \quad (125)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = 2\mathbf{H} \quad (126)$$

13.6 Inkompressibilität der Hill-Plastizität

Wie schon in Abschnitt 9.3 für die von Mises-Plastizität wird nun die Inkompressibilität der Hill-Plastizität nachgewiesen.

$$de^{pl} = \text{tr}(\mathbf{V}^{pl}) \quad \mathbf{V}^{pl} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{xx} & d\varepsilon_{xy} & d\varepsilon_{xz} \\ d\varepsilon_{yx} & d\varepsilon_{yy} & d\varepsilon_{yz} \\ d\varepsilon_{zx} & d\varepsilon_{zy} & d\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^{pl} \dots \text{Matrixschreibweise}$$

$$de^{pl} = d\varepsilon_{xx}^{pl} + d\varepsilon_{yy}^{pl} + d\varepsilon_{zz}^{pl}$$

$$d\varepsilon_{xx}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{xx}} \quad d\varepsilon_{yy}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{yy}} \quad d\varepsilon_{zz}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{zz}}$$

$$\mathcal{F} = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2(L\sigma_{yz}^2 + M\sigma_{zx}^2 + N\sigma_{xy}^2) - 1$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx}^{pl} &= d\lambda \left[2G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})(-1) + 2H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \right] \\ d\varepsilon_{yy}^{pl} &= d\lambda \left[2F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) + 2H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(-1) \right] \\ d\varepsilon_{zz}^{pl} &= d\lambda \left[2F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(-1) + 2G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de^{pl} &= d\lambda \left[-2G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) + 2H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \right. \\ &\quad \left. + 2F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) - 2H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \right. \\ &\quad \left. - 2F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) + 2G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \right] \end{aligned}$$

(127)

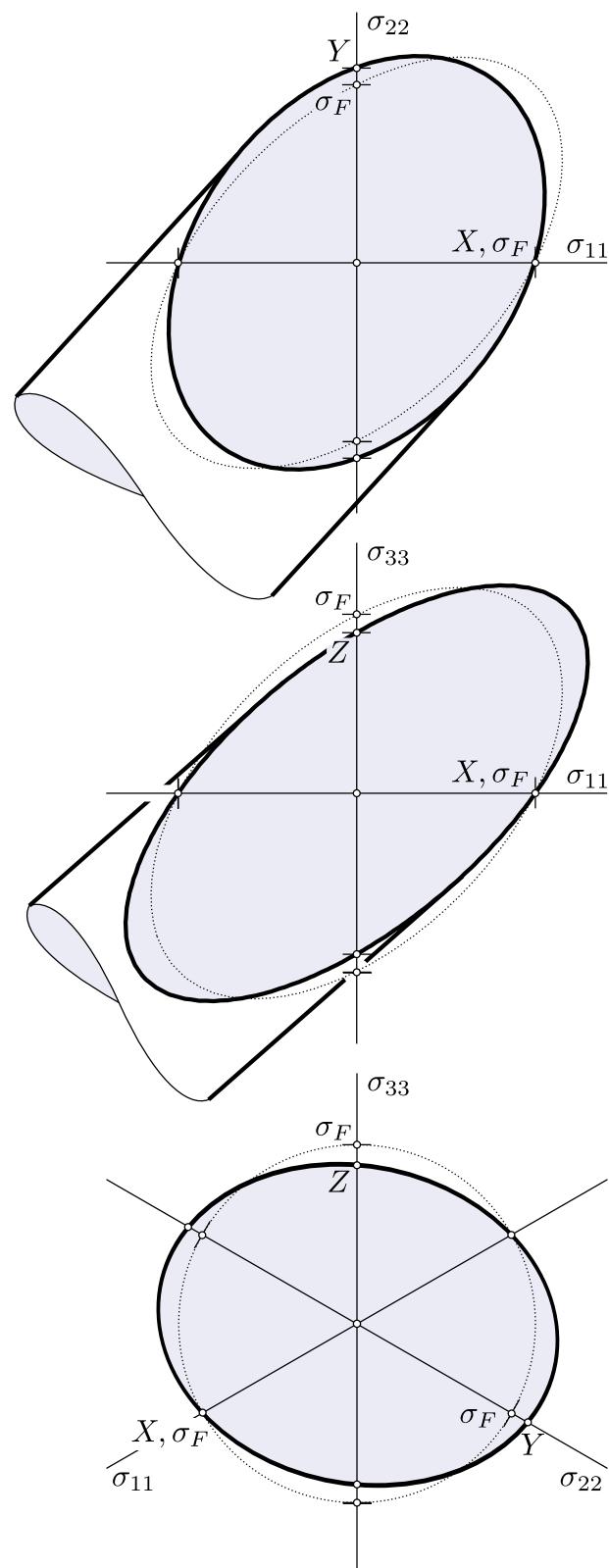


Abbildung 39: Hill-Fließfläche für $X = 1.0\sigma_F, Y = 1.1\sigma_F, Z = 0.9\sigma_F$ im Hauptnormal-spannungsraum

14 Sonderfälle der orthotropen Plastizität

Anisotropie tritt häufig nicht in voller Allgemeinheit mit sechs unabhängigen Parametern auf. Sonderfälle, bei denen einzelne Parameter untereinander gekoppelt sind, haben praktische Bedeutung.

14.1 Von Mises-Plastizität als Sonderfall der Hill-Plastizität

Die von Mises-Fließfunktion ist als isotroper Sonderfall in der Hill-Fließfunktion enthalten.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sigma_V^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H+F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{M} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{3}{2\sigma_F^2} &= 3F = 3G = 3H = L = M = N \end{aligned} \quad (130)$$

Durch Umrechnung der Hill-Koeffizienten in die Fließspannungen (Gleichungen (118) und (119)) zeigt sich, dass Normalfließspannungen und Schubfließspannungen im isotropen Fall untereinander und miteinander gekoppelt sind (Gleichung (133)).

$$\sigma_F = X = Y = Z = \sqrt{3}R = \sqrt{3}S = \sqrt{3}T \quad (131)$$

Die von Mises-Plastizität ist natürlich vollkommen invariant gegen jede Drehung des Bezugssystems:

$$\mathbf{T}_x^T \mathbf{M} \mathbf{T}_x = \mathbf{T}_y^T \mathbf{M} \mathbf{T}_y = \mathbf{T}_z^T \mathbf{M} \mathbf{T}_z = \mathbf{M}$$

14.2 Kubische Symmetrie

Kubische Symmetrie liegt vor, wenn sich das Materialgesetz bei Drehungen um $\frac{\pi}{2}$ um die Orthotropiehauptachsen invariant verhält.

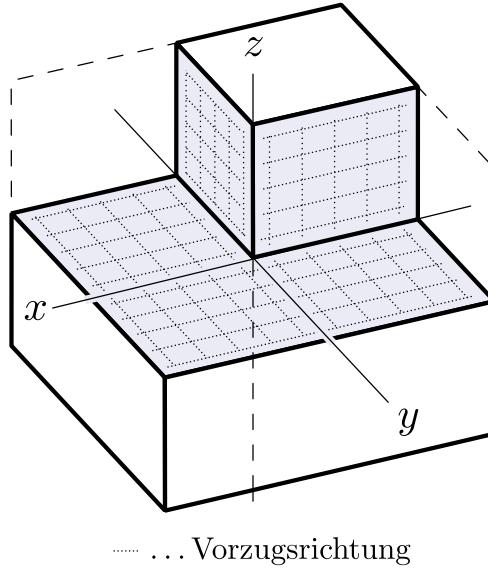


Abbildung 40: Kubisch symmetrischer Quader

Für die Drehung um $\frac{\pi}{2}$ nehmen die Transformationsmatrizen aus Gleichung (2) bis (4) folgende Form an:

$$\mathbf{T}_x\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_y\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_z\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_x^T \mathbf{H} \mathbf{T}_x \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} G+H & -G & -H & 0 & 0 & 0 \\ -G & F+G & -F & 0 & 0 & 0 \\ -H & -F & H+F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_y^T \mathbf{H} \mathbf{T}_y \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} F+G & -F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -F & H+F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -G & -H & G+H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_z^T \mathbf{H} \mathbf{T}_z \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} H+F & -H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -H & G+H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -F & -G & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H+F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix}$$

Kubische Symmetrie liegt genau dann vor, wenn Gleichung (14.2) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x^T \mathbf{H} \mathbf{T}_x &= \mathbf{T}_y^T \mathbf{H} \mathbf{T}_y = \mathbf{T}_z^T \mathbf{H} \mathbf{T}_z = \mathbf{H} \\ &\Leftrightarrow \\ F &= G = H \wedge L = M = N \end{aligned} \tag{132}$$

Es ist also, wie im isotropen Fall, wieder die Gleichheit der Parameter der Normalspannungen F, G, H sowie die Gleichheit der Parameter der Schubspannungen L, M, N gefordert. Jedoch gibt es im Gegensatz zum isotropen Fall keine Forderung nach einer Beziehung zwischen H und L . Für die Fließspannungen bedeutet dies:

$$X = Y = Z \wedge R = S = T \tag{133}$$

14.3 Transverse Isotropie

Transverse Isotropie bedeutet, dass nur eine der drei paarweise orthogonalen Hauptachsen ausgezeichnet ist. In der Ebene, die zu dieser Richtung orthogonal steht, verhält sich das Material isotrop. Aus dieser Definition kann der Zusammenhang der Parameter bestimmt werden.

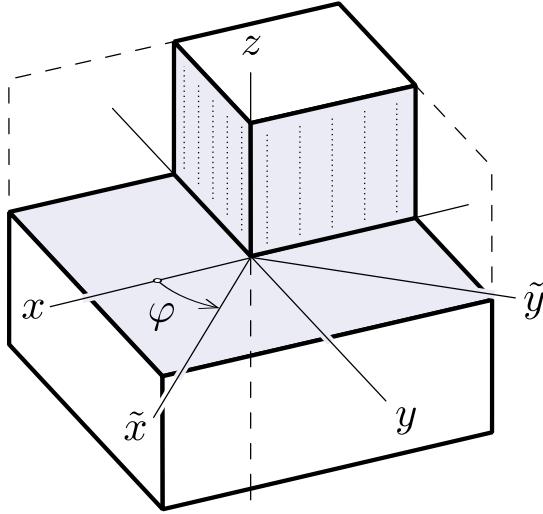


Abbildung 41: Transvers isotroper Quader

Es wird nun angenommen, die ausgezeichnete Richtung sei die z -Richtung. Dann muss eine Drehung um die z -Achse die Fließfunktion invariant lassen, da die Drehung in der isotropen xy -Ebene erfolgt. Nach Durchführung der Multiplikation werden die beiden Seiten der Gleichung elementweise verglichen.

$$\underbrace{\mathbf{T}_z^{-T} \mathbf{H} \mathbf{T}_z^{-1}(\varphi)}_{=: \mathbf{H}_z(\varphi)} = \mathbf{H}$$

Die Matrix \mathbf{H}_z ist zum Teil mit Null besetzt und wird zur besseren Übersicht in Blockmatrizen zerlegt:

$$\mathbf{H}_z = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_z]_{1..4,1..4} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & [\mathbf{H}_z]_{5..6,5..6} \end{bmatrix}$$

Die Null-Blockmatrixeinträge von \mathbf{H}_z sind auch in \mathbf{H} mit Null besetzt und führen somit auf keinen Widerspruch.

Vergleich des ersten Elements der ersten Zeile von $[\mathbf{H}_z]_{1..4,1..4}$ mit \mathbf{H} führt zu:

$$(G + 4H - 2N + F) \cos^4(\varphi) + (2N - 4H - 2F) \cos^2(\varphi) + H + F = G + H \quad (134)$$

Gleichung (134) muss unabhängig vom Winkel φ erfüllt sein. Es kann daher ein Koeffizientenvergleich für 1, $\cos^2(\varphi)$ und $\cos^4(\varphi)$ angestellt werden.

$$\left. \begin{array}{l} G + 4H - 2N + F = 0 \\ 2N - 4H - 2F = 0 \\ H + F = G + H \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = G \\ G = N - 2H \end{array} \quad (135)$$

Vergleich der anderen Elemente der Blockmatrix $[\mathbf{H}_z]_{1..4,1..4}$ führt nur zu linear von Gleichung (135) abhängigen Beziehungen.

Vergleich des ersten Elements der ersten Zeile von $[\mathbf{H}_z]_{5..6,5..6}$ mit \mathbf{H} führt zu:

$$(L - M) \cos(\varphi)^2 + M = L \quad (136)$$

Koeffizientenvergleich für 1 und $\cos^2(\varphi)$.

$$\left. \begin{array}{l} L - M = 0 \\ M = L \end{array} \right\} L = M \quad (137)$$

Die weiteren Elemente der Blockmatrix $[\mathbf{H}_z]_{5..6,5..6}$ führen wieder nur zu linear abhängigen Beziehungen.

Damit sind die Bedingungen denen die Parameter für transverse Isotropie genügen müssen gefunden:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\equiv \mathbf{H}_z(\varphi) \quad \forall \varphi \\ &\Leftrightarrow \\ F &= G \neq H \wedge L = M \neq N = F + 2H \end{aligned} \quad (138)$$

Umrechnung auf die Fließspannungen:

$$X = Y \neq Z \wedge R = S \neq T = \frac{XZ}{\sqrt{4Z^2 - X^2}} \quad (139)$$

15 Entwicklung des Lösungsalgorithmus

Aufgrund des analogen Aufbaus zur von Mises-Plastizität können alle wesentlichen Elemente des Lösungsalgorithmus durch Austauschen der Matrizen \mathbf{M} mit \mathbf{H} aus dem von Mises-Algorithmus gewonnen werden. Daher werden im Folgenden nur noch die Endergebnisse und, soweit vorhanden, Besonderheiten angeführt.

15.1 General-Return Algorithmus und Spannungsinkrement

Die Berechnung der Spannungsinkremente erfolgt wieder ausgehend von der Prandtl-Reuß Gleichung und der Fließbedingung. Die Ableitung ist hier nicht noch einmal angegeben.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{el}^{-1} \underbrace{\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}}_{\sigma_{n+1}^{i+1} - \sigma_n} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1} \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1}^{i+1}}_{2 \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (140)$$

$$0 = \underbrace{\mathcal{F}_{n+1}^{i+1}}_{[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}]^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} - 1} \quad (141)$$

...

$$\Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j+1} = -\frac{f(\Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j})}{f'(\Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j})} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j} \quad (142)$$

$$f(\Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j}) := \left[\left[\mathbf{1} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j} 2 \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{H} \left[\mathbf{1} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j} 2 \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} - 1 \quad (143)$$

$$\frac{df}{d(\Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j})} = (-4) \left[\mathbf{1} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j} 2 \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \right]^{-2} \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \mathbf{H} \left[\mathbf{1} + \Delta \lambda_{n+1}^{i+1,j} 2 \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \quad (144)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} = \left[\mathbf{1} + 2 \Delta \lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \right]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^{trial}]_{n+1}^{i+1} \quad (145)$$

Beim General-Return Algorithmus lautet der Korrekturterm $\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{C}_{el} 2 \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}$. Im Hauptspannungsraum kann wieder geschrieben werden:

$$\mathbf{C} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} = \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \quad (146)$$

und weiter:

$$\left. \begin{aligned} -2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} &= -2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \\ \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 2 \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \right\} -2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{C}_{el} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \parallel \mathbf{n} \quad (147)$$

Der Korrekturterm steht also wieder normal zur Fließfläche, er zeigt jedoch nicht mehr zur Raumdiagonalen. Aus diesem Grund verwendet man nicht mehr den Ausdruck „Radial-Return“ sondern „General-Return“

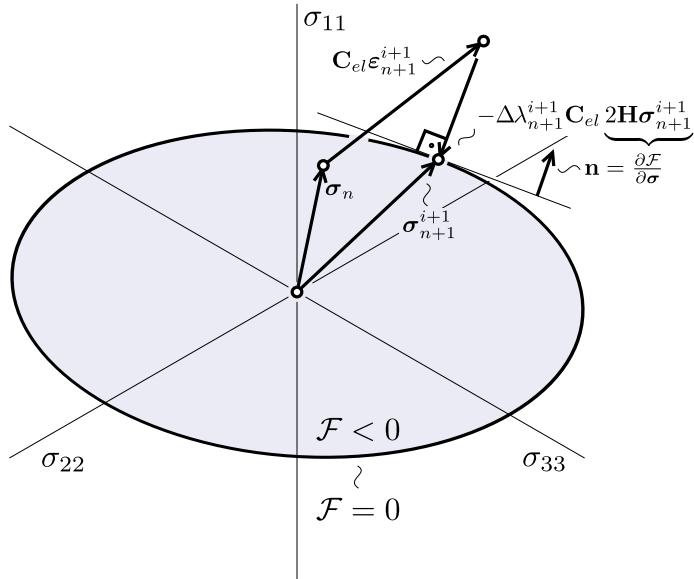


Abbildung 42: Größen des General-Return Algorithmus im Hauptspannungsraum

15.2 Algorithmenkonsistente Materialtangente für die Hill-Fließbedingung

Die Algorithmenkonsistente Materialtangente für die Hill-Fließbedingung ist durch Gleichung (149) gegeben.

$$\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} := \mathbf{C}_{el}^{-1} + 2\Delta\lambda_{n+1}^{i+1} \mathbf{H} \quad (148)$$

$$\mathbf{C}_{n+1}^{*i+1} = \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} - \frac{\left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \otimes \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{H} \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1}}{\left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} \right]^T \mathbf{H} \left[\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{i+1} \right]^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1}} \quad (149)$$

15.3 Gesamタルゴリズム für die Hill-Fließfunktion

Unter der Voraussetzung, dass die Matrix \mathbf{M} durch die Matrix \mathbf{H} ersetzt wird, entspricht die Darstellung in Abbildung 31 dem Gesamタルゴリズム für die Hill-Fließfunktion. Die Bezeichnung „Radial-Return“ ändert sich in „General-Return“.

16 Beispiel: kubisch symmetrisches, dickwandiges Rohr unter Innenverschiebung

Das Verhalten orthotroper Materialien soll nun anhand eines kubisch symmetrischen, dickwandigen Rohres im ebenen Verzerrungszustand unter Innenverschiebung demonstriert werden. Abbildung 43 zeigt die Abmessungen des Beispiels. In Abbildung 44 ist die Lage der Vorzugsrichtungen eingetragen. Die Angabe ist so gestaltet, dass die Parameter L, M, N um den Faktor $\sqrt{2}$ höher liegen als im isotropen Fall. Dadurch tritt Fließen zu folge von Schubspannungen früher ein als im isotropen Fall und es bildet sich im Winkel $\pi/4$ zu den Orthotropiehauptachsen eine Ausbuchtung der plastischen Zone. Abbildung 46 zeigt die FE-Lösung. Plastifizierte Gaußpunkte sind ausgefüllt dargestellt. Der Zahlenwert bezeichnet wieder die „normierte Vergleichsspannung zum Quadrat“ ($\mathcal{F} + 1$). Die Werte der normierten Vergleichsspannung sind auf zwei Nachkommastellen gerundet.

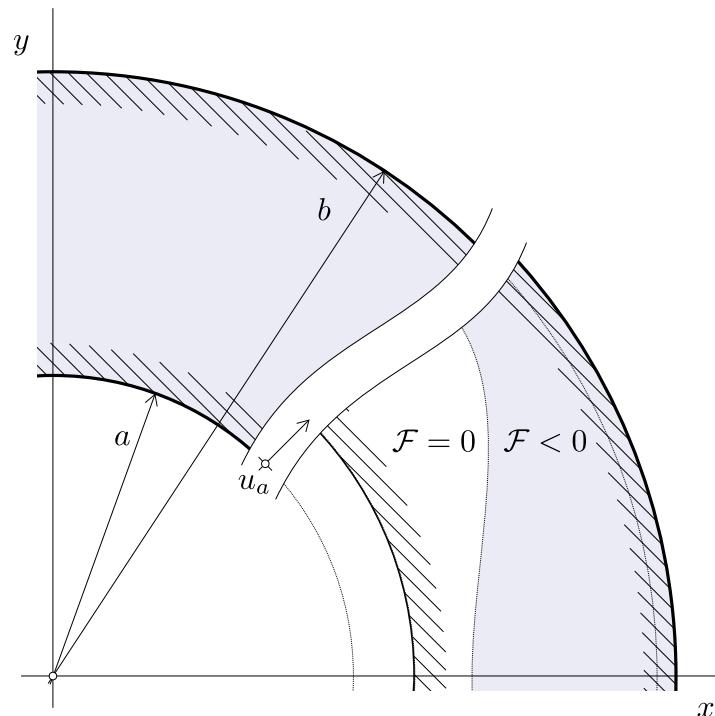


Abbildung 43: Dickwandiges Rohr unter Innenverschiebung

Parameter:

$$a = 50 \text{ mm} \quad E = 200 \text{ GPa} \quad u_a = 0.1 \text{ mm}$$

$$b = 150 \text{ mm} \quad \nu = 0.3$$

$$F = G = H = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-2} \quad L = M = N = 3\sqrt{2} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-2}$$

$$\left[X = Y = Z = 100 \text{ MPa} \quad R = S = T \doteq 48.55 \text{ MPa} \right]$$

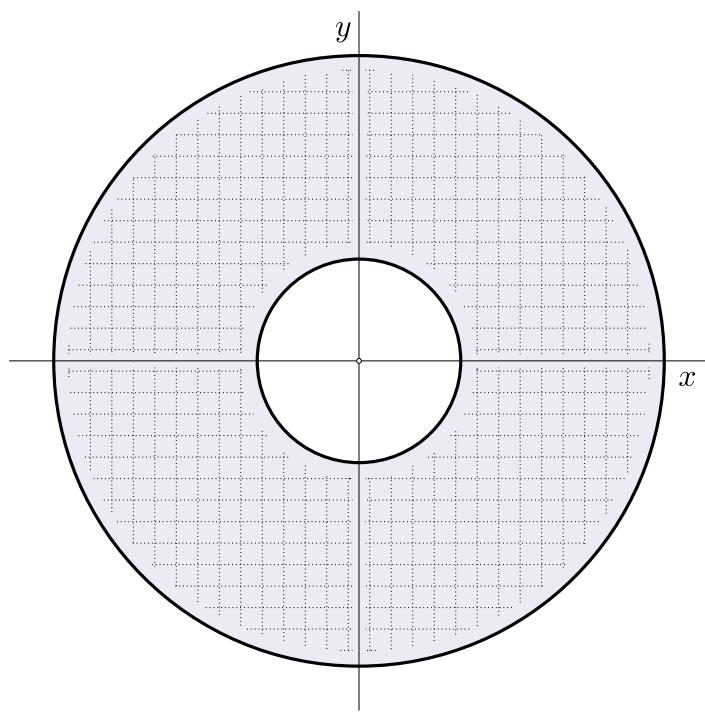


Abbildung 44: Orthotropiehauptachsen parallel zum globalen Koordinatensystem

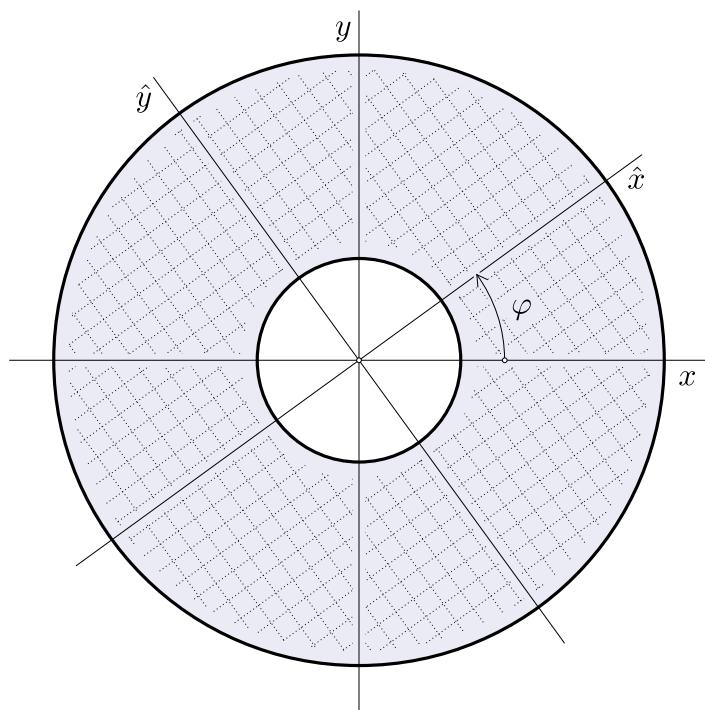


Abbildung 45: Orthotropiehauptachsen verdreht zum globalen Koordinatensystem

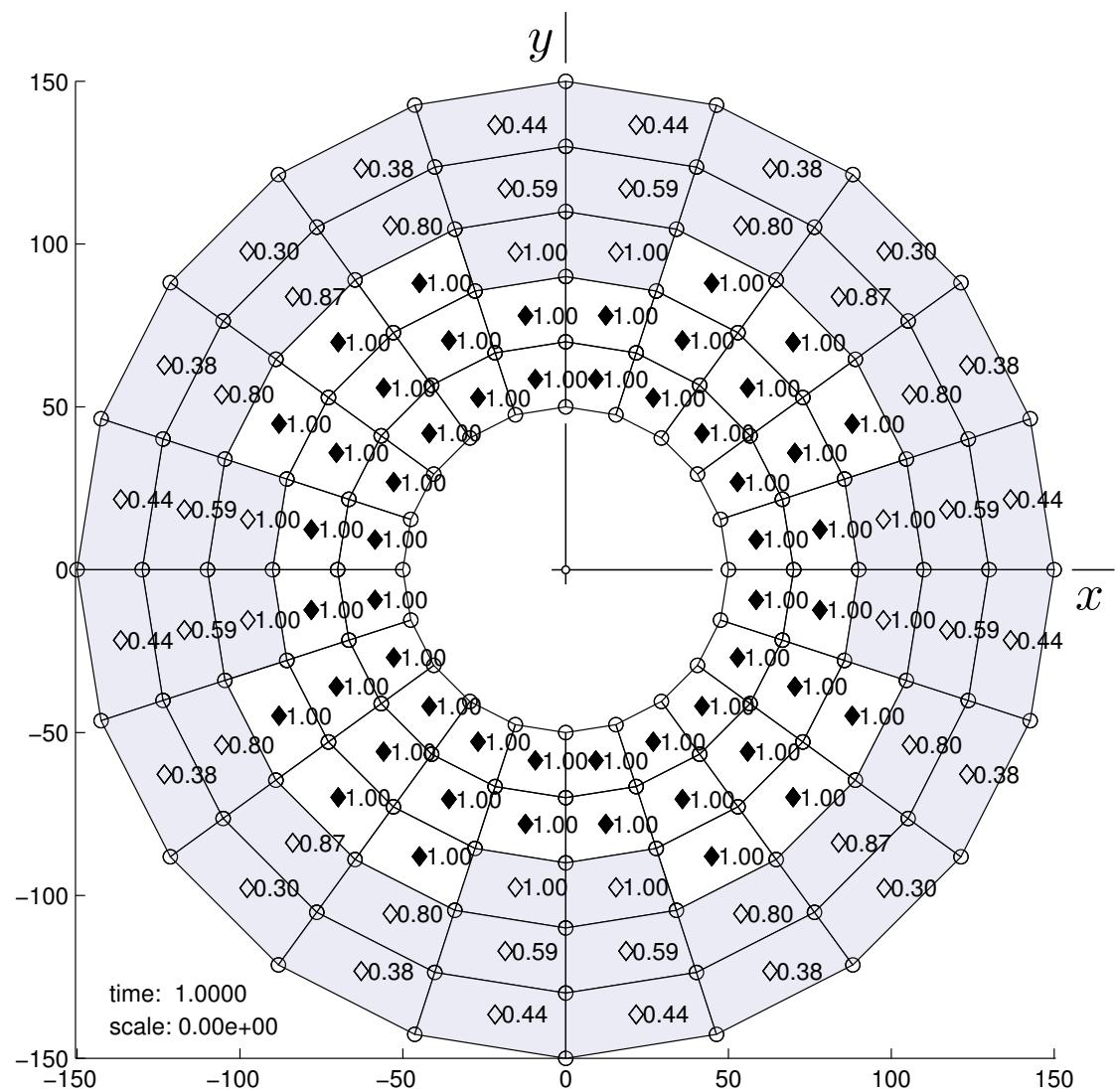


Abbildung 46: FE-Lösung, parallel

17 Beispiel: kubisch symmetrisches, dickwandiges Rohr unter Innenverschiebung mit verdrehter Lage der Orthotropiehauptachsen

Um die Wirkung der Orthotropie besser veranschaulichen zu können, wird nun das Beispiel aus Abschnitt 16 modifiziert. Es werden alle Parameter und Randbedingungen gleichgelassen, jedoch wird die Orientierung der Orthotropiehauptachsen gegenüber dem globalen Koordinatensystem um den Winkel $\pi/5$, also um genau zwei Elemente in Umfangsrichtung, verdreht (Abbildung 45). Die Fließfunktion wird im \hat{x}/\hat{y} -System aufgestellt:

$$\mathcal{F}(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}^T \mathbf{H} \hat{\sigma} - 1$$

Umrechnung aus dem System \hat{x}/\hat{y} in das gedrehte Koordinatensystem x/y :

$$\hat{\sigma} = \mathbf{T}_z(\pi/5) \sigma$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = \sigma^T \mathbf{T}_z^T(\pi/5) \mathbf{H} \mathbf{T}_z(\pi/5) \sigma - 1$$

Wie man an der vierten Spalte bzw. vierten Zeile der Matrix aus Gleichung (150) erkennt, liegt im x/y -System, im Gegensatz zum \hat{x}/\hat{y} -System, eine Kopplung der σ_{xy} Schubspannung mit den Normalspannungen vor. Deshalb entstehen in nicht-rotationssymmetrischen Koordinatensystemen Schubspannungen, obwohl die Belastung rein rotationssymmetrisch ist.

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_z^T(\pi/5) \mathbf{H} \mathbf{T}_z(\pi/5) = \\ &= \frac{1}{X^2} \begin{bmatrix} 1,2810 & -0,7810 & -0,5000 & -0,1826 & 0 & 0 \\ -0,7810 & 1,2810 & -0,5000 & 0,1826 & 0 & 0 \\ -0,5000 & -0,5000 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1826 & 0,1826 & 0 & 3,1187 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,2426 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,2426 \end{bmatrix} \quad (150) \end{aligned}$$

Drehung der Spannung um π zeigt, dass die Definition der Orthotropie (vergl. Abschnitt 14.2) auch im x/y -System erfüllt ist (Gleichung (152)). Die Rechnung zeigt die Gültigkeit der Gleichung (151), aus Gründen der Übersicht ist dies jedoch hier nicht vorgeführt.

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{D}_z(\pi) \sigma, \quad \mathbf{D}_z = \mathbf{T}_z^{-1}$$

$$\sigma = \mathbf{T}_z(\pi) \tilde{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{\sigma}) &= \tilde{\sigma}^T \mathbf{T}_z^T(\pi) \mathbf{T}_z^T(\pi/5) \mathbf{H} \mathbf{T}_z(\pi/5) \mathbf{T}_z(\pi) \tilde{\sigma} - 1 \\ \mathbf{T}_z^T(\pi/5) \mathbf{H} \mathbf{T}_z(\pi/5) &= \mathbf{T}_z^T(\pi) \mathbf{T}_z^T(\pi/5) \mathbf{H} \mathbf{T}_z(\pi/5) \mathbf{T}_z(\pi) \quad (151) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{F}(\tilde{\sigma}) \quad (152)$$

Abbildung 47 zeigt wieder die FE-Lösung. Da gegenüber der Aufgabe aus Abschnitt 16 nur die Orientierung der Orthotropiehauptachsen verdreht wurde, liefert die FE-Rechnung, wie erwartet, das gleiche Ergebnis jedoch um den Winkel $\pi/5$ gedreht (vergl. Abbildung 46).

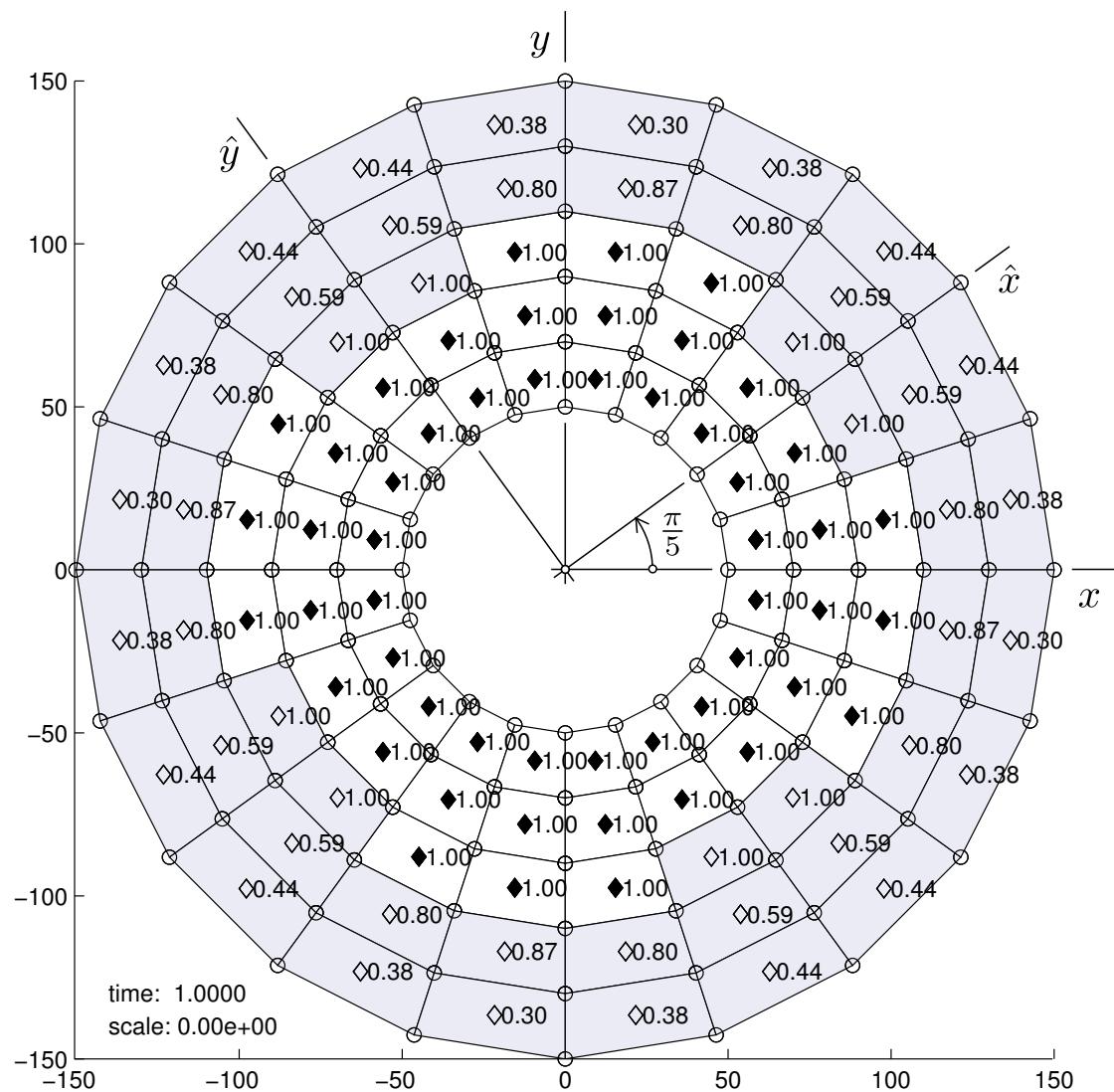


Abbildung 47: FE-Lösung, gedreht

Literatur

- [1] E. Becker, W. Bürger: *Kontinuumsmechanik, Teubner Studienbücher Mechanik* (1975)
- [2] C. Celigoj: *Skriptum Plastizitätstheorie* (2006),
- [3] D. C. Drucker: *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. of the First US National Congress of Applied Mechanics, ASME, New York* (1951), Seiten. 487–491,
- [4] K. Girkmann: *Flächentragwerke, 4.Auflage, Springer-Verlag* (1956),
- [5] R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press* (1950),
- [6] L. M. Kachanov: *Foundations of the theory of plasticity, North-Holland publishing company* (1971),
- [7] R. Kreißig: *Einführung in die Plastizitätstheorie, Fachbuchverlag Leipzig-Köln*(1992),
- [8] H. Parkus: *Mechanik der festen Körper, 2. Auflage, Springer-Verlag* (1983),
- [9] L. Prandtl: *Spannungsverteilung in plastischen Körpern, Proceeding 1st International Congress on Applied Mechanics, Delft* (1924) Seiten 43-54,
- [10] A. Reuß: *Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, ZAMM 10* (1930), Seiten 266-274 ,
- [11] W. Voigt: *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung, Leipzig* (1898),
- [12] H.-C. Wu: *Continuum Mechanics and Plasticity, Chapman & Hall/CRC* (2005),
- [13] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor: *The finite element method. Vol. 1. Basic Formulation and Linear Problems - 4th ed.* ,
- [14] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor: *The finite element method. Vol. 2. Solid and fluid mechanics Dynamics and non-linearity - 4th ed.* ,