سلسلة دروس في التحليل الرياضي

الدراسة العامة لدالة عددية

منهجية شاملة: من مجال التعريف إلى التمثيل البياني

النهايات -- الاشتقاق -- جدول التغيرات -- المنحنى

محاور الدرس

- أدوات أساسية لحساب النهايات: الجداء، حاصل قسمة، كثيرات الحدود، الجذر، ونظرية الحصر.
- الخطوات الثماني للدراسة العامة لدالة عددية، خطوة بخطوة، مع تعليل ومثال بعد كل تعريف.
- التذكير بمشتقات الدوال المرجعية وقواعد الاشتقاق الأساسية.
- بناء جدول التغيرات (بما في ذلك حالة القيم غير منتمية إلى المجال).
- مثال شامل ومفصّل يطبّق جميع الخطوات كاملة من الألف إلى الياء، وصولاً إلى التمثيل البيا.

الأستاذ: بن الدين بويعقوب

السنة الثالثة ثانوي -- جميع الشعب العلمية

تمهيد

دراسة دالة عددية f بغرض رسم منحناها البياني $(\mathcal{C}_f)$ تمرّ عبر مجموعة من الخطوات المنهجية الثابتة تقريباً، مهما اختلف نوع الدالة (كثيرة حدود، كسرية، جذرية...). نستعرض في الجزء الأول أدوات حساب النهايات اللازمة، ثم نفصّل في الجزء الثاني **الخطوات الثماني** للدراسة العامة، قبل تطبيقها كاملة في الجزء الثالث على مثال شامل.

مخطط الدراسة العامة لدالة

الجزء الأول: أدوات أساسية لحساب النهايات (تذكير)

نهاية جداء دالتين ونهاية خارج دالتين

جداء دالتين: $u \times v$

$\lim(uv)$	$\lim v$	$\lim u$
AB	B	A
$+\infty$	$+\infty$	$A(A>0)$
$-\infty$	$+\infty$	$A(A<0)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
?	0	$+\infty$

خارج دالتين: u/v

$\lim(u/v)$	$\lim v$	$\lim u$
A/B	$B \neq 0$	A
0	$\pm\infty$	A
$\pm\infty$	0	$A \neq 0$
$\pm\infty$	$B \neq 0$	$\pm\infty$
?	$\pm\infty$	$\pm\infty$
?	0	0

نهاية دالة كثيرة حدود ودالة كسرية عند اللانهاية

القاعدة: نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية تساوي نهاية حدّها ذي أعلى درجة. ونهاية دالة كسرية (حاصل قسمة كثيرتَي حدود) عند اللانهاية تساوي نهاية حاصل قسمة حدَّيهما الأعلى درجة.

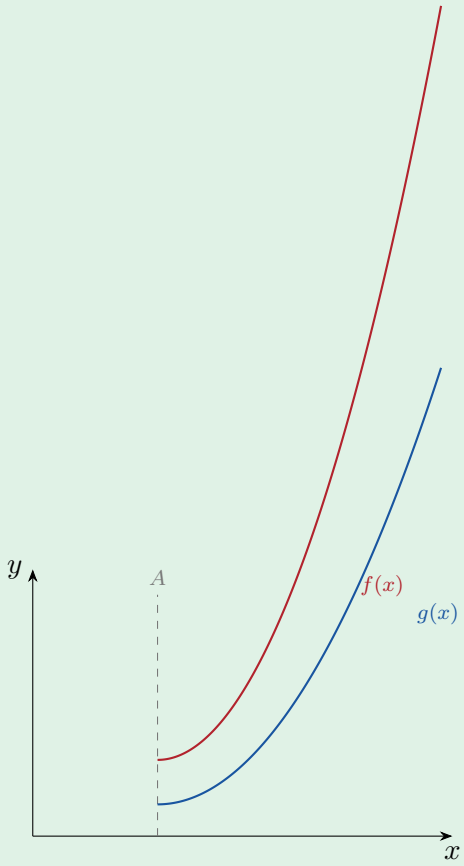
مثال: ليكن $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^4 = +\infty$ (قوة زوجية). أمّا $g(x) = -3x^5 + 8$ فتعطي $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (قوة فردية).

وبالنسبة للدوال الكسرية: إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-4}$ فإنّ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$. وإذا كانت $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ فإنّ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2} = 0$. وإذا كانت $h(x) = \dfrac{3x^3+4}{x^2+6}$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

نهاية الجذر ونظرية المقارنة

نهاية الجذر: إذا كانت $\lim\limits_{\star} u = A$ حيث $A \geq 0$ فإنّ $\lim\limits_{\star} \sqrt{u} = \sqrt{A}$. وإذا كانت $\lim\limits_{\star} u = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{\star} \sqrt{u} = +\infty$.

نظرية المقارنة: إذا وُجد عدد حقيقي A بحيث لكل x من $[A;+\infty[$ يكون $g(x) \leq f(x)$، وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$، فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (والتكافؤ عند $-\infty$، وكذلك بالنسبة للحد الأعلى مع $-\infty$).



بما أنّ $g(x) \leq f(x)$ ابتداءً من A، وأنّ g تؤول إلى $+\infty$، فإنّ f تؤول بدورها إلى $+\infty$.

الجزء الثاني: الخطوات الثماني للدراسة العامة لدالة عددية

الخطوة 1: تحديد مجال التعريف D_f

قاعدة

- إذا كانت f دالة كثيرة حدود: $D_f = \mathbb{R}$.
- إذا كانت $f = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية: $D_f = \mathbb{R} - \{x \ / \ Q(x) = 0\}$ (نستبعد جذور المقام).
- إذا كانت $f(x) = \sqrt{u(x)}$: $D_f = \{x \ / \ u(x) \geq 0\}$.

تعليل

المقام لا يجوز أن ينعدم (القسمة على الصفر غير معرّفة)، والجذر التربيعي لا يُعرَّف إلا لعدد موجب أو معدوم، لهذا نستبعد القيم التي تخالف هذين الشرطين من مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}$.

مثال توضيحي

لتكن $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$. يجب أن يكون $3 - 2x \geq 0$، أي $x \leq \dfrac{3}{2}$، إذن $D_f = \left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$.

الخطوة 2: دراسة الزوجية والفردية (تناظر المنحنى)

قاعدة

لتكن D_f متناظراً بالنسبة للصفر (أي: $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$).

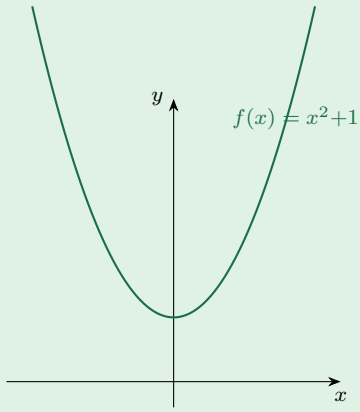
- إذا كانت $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in D_f$: f **زوجية**، و $(\mathcal{C}_f)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.
- إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in D_f$: f **فردية**، و $(\mathcal{C}_f)$ متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم O.

تعليل

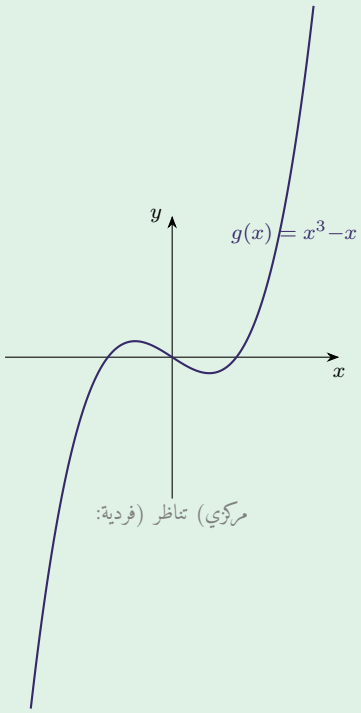
فائدة هذه الخطوة عملية بحتة: إذا تبيّن أنّ الدالة زوجية أو فردية، يكفي دراستها ورسم منحناها على $D_f \cap [0; +\infty[$ فقط، ثمّ إكمال الرسم بتناظر مناسب (محوري أو مركزي)، ممّا يختصر نصف العمل.

مثال توضيحي

$f(x) = x^2 + 1$ معرّفة على $\mathbb{R}$: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$، إذن f زوجية. أمّا $g(x) = x^3 - x$: $g(-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$، إذن g فردية.



محوري) تناظر (زوجية:



مركزي) تناظر (فردية:

الخطوة 3: حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف

قاعدة

نحسب نهاية f عند كل طرف من أطراف D_f (سواء كان عدداً حقيقياً أو $\pm\infty$)، مستعملين أدوات الجزء الأول (الجداء، الخارج، كثيرات الحدود، الجذر، المقارنة).

تعليل

هذه الخطوة ضرورية لتحديد **سلوك المنحنى عند أطراف مجاله**: هل يتّجه نحو اللانهاية؟ هل يقترب من قيمة محدودة؟ نتائجها هي التي تكشف عن وجود مستقيمات مقاربة محتملة (الخطوة الموالية).

مثال توضيحي

لتكن $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$. أطراف D_f هي: $+\infty$, -2^+ , -2^- , $-\infty$. لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2\ , \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty.$$

الخطوة 4: تحديد المستقيمات المقاربة المحتملة

قاعدة

النوع	الشرط	المعادلة
أفقي	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$	$y = b$
عمودي	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$x = a$
مائل	$\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$	$y = ax + b$

تعليل

هذه الأنواع الثلاثة درسناها بالتفصيل (مع التعليل والأمثلة المرسومة) في درس مستقل بعنوان ``المستقيمات المقاربة لمنحنى دالة''. نكتفي هنا بهذا الجدول كمرجع سريع، إذ سنطبّقه كاملاً على مثالنا الشامل في الجزء الثالث.

الخطوة 5: حساب الدالة المشتقة f' ودراسة إشارتها

قاعدة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I:

- إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل x من I (باستثناء عدد منته من القيم): f **متزايدة تماماً** على I.
- إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل x من I (باستثناء عدد منته من القيم): f **متناقصة تماماً** على I.
- إذا انعدمت f' عند x_0 وتغيّرت إشارتها، فإنّ $f(x_0)$ قيمة **حدّية** (كبرى أو صغرى محلية).

تذكير بمشتقات الدوال المرجعية وقواعد الاشتقاق

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k (ثابت)	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u+v$	$u'+v'$	$u \times v$	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	u^n	$nu'u^{n-1}$

مثال توضيحي

لتكن $f(x) = -x^2+2x+3$، معرّفة على $\mathbb{R}$. لدينا $f'(x) = -2x+2 = -2(x-1)$. بما أنّ $-2 < 0$، فإنّ $f'(x)$ لها إشارة $(x-1)$ معكوسة: موجبة على $]-\infty;1[$، منعدمة عند $x=1$، سالبة على $]1;+\infty[$.

الخطوة 6: بناء جدول التغيرات

قاعدة

يتألّف جدول التغيرات من ثلاثة أسطر: سطر قيم x (يضمّ أطراف D_f والنقط الحدّية)، سطر إشارة $f'(x)$، وسطر اتجاه تغيّر f (بأسهم صاعدة/نازلة تربط القيم الحدّية بأطراف المجال). إذا كانت هناك قيمة حقيقية غير منتمية إلى D_f، تُفصل الأعمدة عندها بخطّ مزدوج.

مثال توضيحي

لتكن $f(x) = -(x-1)^2+4$ (أي $f(x) = -x^2+2x+3$)، معرّفة على $\mathbb{R}$، ومشتقتها $f'(x) = -2(x-1)$. بما أنّ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$، فإنّ جدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

الخطوة 7: تعيين نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات

قاعدة

- **تقاطع مع محور التراتيب:** إذا كان $0 \in D_f$، فالنقطة $(0\,;f(0))$.
- **تقاطع مع محور الفواصل:** نحلّ المعادلة $f(x)=0$؛ كلّ حلّ x_0 يعطي نقطة تقاطع $(x_0\,;0)$.

مثال توضيحي

لتكن $f(x)=x^2-3x+2$. لدينا $f(0)=2$، فالمنحنى يقطع محور التراتيب في $(0\,;2)$. وحلّ $f(x)=0$: المميّز $\Delta=9-8=1>0$، فالحلّان: $x_1=1$ و $x_2=2$، فالمنحنى يقطع محور الفواصل في $(1\,;0)$ و $(2\,;0)$.

الخطوة 8: جدول القيم والتمثيل البياني

قاعدة

نختار عدداً من قيم x (تشمل النقط الحدّية ونقط التقاطع مع المحاور) ونحسب صورها، ثمّ نرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ اعتماداً على: جدول التغيرات (اتجاه المنحنى)، المستقيمات المقاربة (إن وُجدت)، نقط التقاطع مع المحاور، وخاصيّة التناظر إن كانت الدالة زوجية أو فردية.

تعليل

كلّما توفّرت معطيات أكثر (نهايات، مقاربات، قيم حدّية، نقط تقاطع)، كان رسم المنحنى أدقّ وأسرع، دون الحاجة لحساب عدد كبير من القيم الإضافية.

الجزء الثالث: مثال شامل -- دراسة كاملة لدالة كسرية

الدالة المدروسة

لتكن الدالة العددية f المعرَّفة بـ:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}.$$

سندرسها كاملة باتّباع الخطوات الثماني السابقة، وصولاً إلى تمثيلها البياني $(\mathcal{C}_f)$.

1) مجال التعريف

عبارة f كسرية، فيجب أن يكون المقام $x-1 \neq 0$، أي $x \neq 1$. إذن:

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[.$$

2) الزوجية والفردية

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ **غير متناظر** بالنسبة للصفر (لأنّ $1 \notin D_f$ بينما $-1 \in D_f$)، إذن لا فائدة من دراسة الزوجية أو الفردية: f ليست زوجية ولا فردية.

3) النهايات عند أطراف المجال

أطراف D_f هي: $-\infty$, 1^- , 1^+ , $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(بما أنّ $\frac{1}{x-1} \to 0$ عند $\pm\infty$، وأنّها تؤول إلى $\mp\infty$ عند $1^\mp$ على الترتيب.)

4) المستقيمات المقاربة

من نهايتَي $1^\pm$: المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم $x = 1$ مستقيماً مقارباً **عمودياً**. ومن جهة أخرى:

$$f(x) - x = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0,$$

إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم $y = x$ مستقيماً مقارباً **مائلاً** بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$.

5) الدالة المشتقة وإشارتها

f قابلة للاشتقاق على D_f (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق ومقامهما لا ينعدم)، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

بما أنّ $(x-1)^2 > 0$ لكل $x \in D_f$، فإشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(x-2)$:

$$f'(x) > 0 \text{ على }]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\ , \qquad f'(x) < 0 \text{ على }]0; 1[\cup]1; 2[\ , \qquad f'(0) = f'(2) = 0.$$

6) جدول التغيرات

القيم الحدّية: $f(0) = 0 + \frac{1}{-1} = -1$ (قيمة قصوى محلية)، و $f(2) = 2 + \frac{1}{1} = 3$ (قيمة صغرى محلية). جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

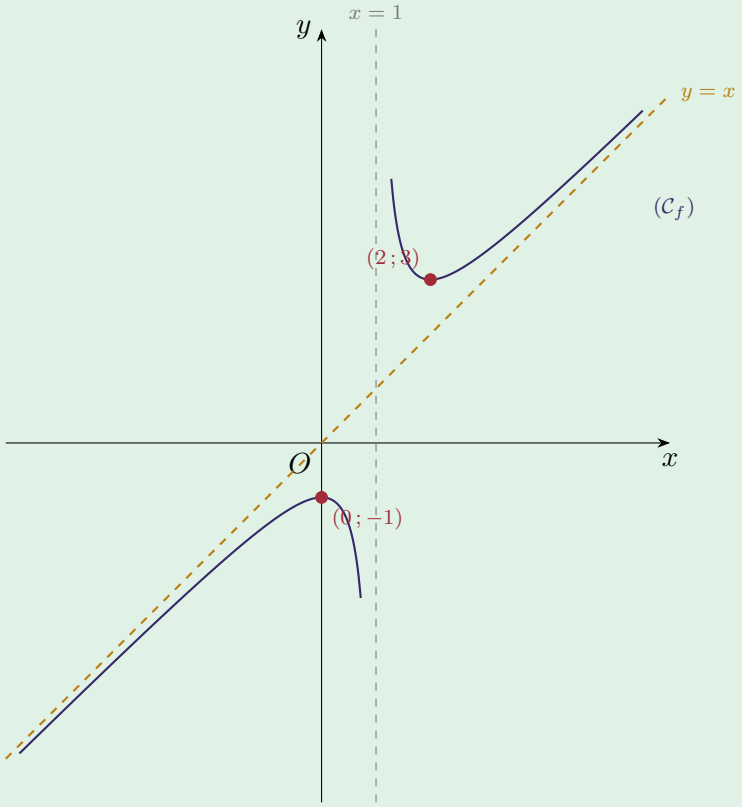
7) نقط تقاطع المنحنى مع المحاور

مع محور التراتيب: $0 \in D_f$، $f(0) = -1$، فالنقطة $(0\,;-1)$ (وهي نفسها القيمة القصوى المحلية).

مع محور الفواصل: نحلّ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x(x-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$. المميّز $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$، فلا يوجد حلّ حقيقي: **المنحنى لا يقطع محور الفواصل مطلقاً.**

8) جدول القيم والتمثيل البياني النهائي

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1.5	-1	--	-3	3.5	4.33



التمثيل البياني الكامل لـ $(\mathcal{C}_f)$: مستقيمان مقاربان ($x = 1$ و $y = x$)، قيمة قصوى محلية عند $(0\,;-1)$، وقيمة صغرى محلية عند $(2\,;3)$.

جدول ملخّص لخطوات الدراسة العامة

الخطوة	المطلوب	الناتج
1	تحديد مجال التعريف	D_f
2	دراسة الزوجية/الفردية	تناظر محوري أو مركزي (إن وُجد)
3	حساب النهايات عند أطراف D_f	سلوك المنحنى عند الأطراف
4	تحديد المستقيمات المقاربة	مقاربات أفقية/عمودية/مائلة
5	حساب f' ودراسة إشارتها	اتجاه تغيّر f
6	بناء جدول التغيرات	القيم الحدّية (القصوى/الصغرى)
7	نقط تقاطع المنحنى مع المحاور	نقط دقيقة على $(\mathcal{C}_f)$
8	جدول القيم والتمثيل البياني	المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ كاملاً

نصيحة أخيرة

لا تُعامل هذه الخطوات كقالب جامد يُطبَّق حرفياً وبنفس الترتيب دائماً؛ فبعض الدوال (كثيرات الحدود مثلاً) لا تحتاج للخطوتين 3 و4 بنفس التفصيل لعدم وجود مقاربات، بينما دوال أخرى قد تستدعي عكس ترتيب بعض الخطوات. المهم هو أن تُجمَع في النهاية جميع المعطيات اللازمة لرسم منحنى دقيق وموثوق.