Zibetti Benedetta

Esame calcolo numerico 2
Problema 3: ***Un sistema tridimensionale***

Considerare il sistema

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 u_3 \sin(t) - u_1 u_2 u_3 \\ u'_2 = -u_1 u_3 \sin(t) + \dfrac{1}{20} u_1 u_3 \\ u'_3 = u_1^2 u_2 - \dfrac{1}{20} u_1 u_2 \end{cases}$$

Usando un metodo numerico a scelta, approssimare le soluzioni corrispondenti ai valori iniziali sulla sfera $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ per studiarne le traiettorie in R3 da diverse prospettive.

Basandosi sulle osservazioni, scegliere un metodo opportuno e approssimare la soluzione con
$u(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$
su [0, 1] e stimare il suo errore.

OSSERVAZIONI TEORICHE

Sul sistema

Il sistema è formato da tre equazioni differenziali di primo ordine in tre incognite, infatti il problema studiato è tridimensionale.
Esso è non lineare, poiché contiene termini di grado superiore al primo, e non autonomo, perché il termine *sin(t)* dipende esplicitamente dal tempo.

Analizzo il sistema $f(x,y,z) = \begin{cases} f_1 = yz\sin(t) - xyz \\ f_2 = -xz\sin(t) + \frac{1}{20}xz \\ f_3 = x^2y - \frac{1}{20}xy \end{cases}$.

La funzione è di classe C^∞ sul suo dominio quindi, per il teorema di esistenza e unicità globale, la soluzione esatta del problema esiste ed è unica.

Studio gli equilibri ponendo $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, e ricavo otto punti: *(±1,0,0), (0,±1,0), (0,0,±1),* $\left(\frac{1}{20}, \pm\frac{\sqrt{399}}{20}, 0\right)$.

Studio la relazione tra il sistema e il vincolo $\{ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \}$ (una sfera di raggio 1 centrata nell'origine): il prodotto scalare $\nabla g \cdot f$ è nullo, con ∇g gradiente di g.
Da ciò si può dedurre che la funzione norma si conserva, infatti $g(x,y,z)$ è un integrale primo.

Per studiare il sistema, quindi, dovrò utilizzare un metodo numerico isometrico, cioè un metodo che conserva la norma, come ad esempio i metodi di Gauss o il metodo di Crank Nicolson.

Sul vincolo

Le orbite dei punti sono vincolate alla sfera $\{ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \}$.

Per uno studio generale considero 100 punti estratti casualmente sulla superficie sferica dal programma Matlab *"puntirandomsfera.m"* (*Figura 1*) e visualizzo le loro traiettorie (stimate con il metodo implicito isometrico Gauss 3 tramite un progetto Codeblocks) con il programma *"traiettorie.*m" per analizzare il loro comportamento in un intorno dei punti d'equilibrio. Per un'analisi più accurata considero come intervallo di tempo [0,100].

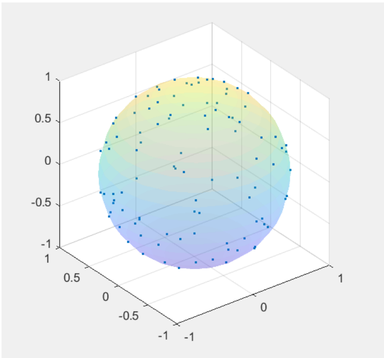

Figura 1

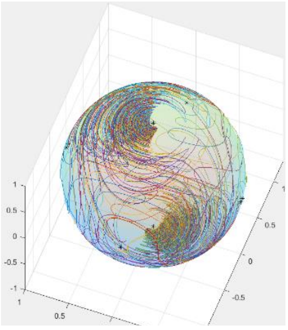

Figura 2

Le orbite nell'intorno di *(0,0,1)* e *(0,0,-1)* sono molto fitte e hanno un andamento casuale poiché nel sistema abbiamo un termine seno. (*Figura 2*)

Le orbite che transitano nell'intorno di *(1,0,0)* oppure di *(-1,0,0)* vengono respinte e mandate verso il polo Nord *(0,0,1)* o il polo Sud *(0,0,-1*) (*Figura 3*).

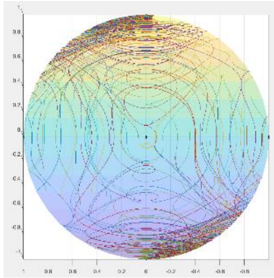

Figura 3

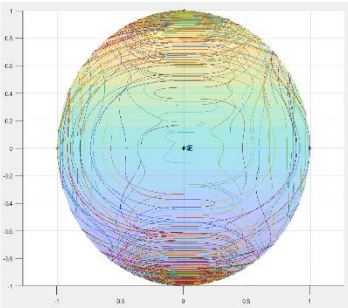

Figura 4

Le orbite negli intorni di *(0,0,±1)* e $\left(\frac{1}{20}, \pm\frac{\sqrt{399}}{20}, 0\right)$

sono più complesse: non hanno, infatti, un andamento uniforme. (*Figura 4*)

Ora studio il caso particolare dell'orbita passante per il dato iniziale $u(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

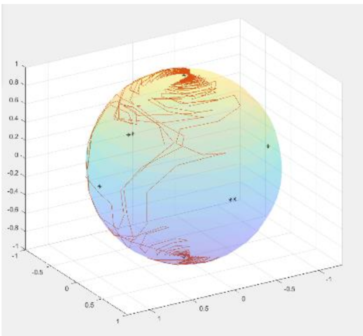

Figura 6

Per un'analisi più accurata considero come intervallo di tempo [0,1000].

Si può notare come, in un tempo finito, l'orbita oscilli tra i due punti d'equilibrio *(0,0,1)* e *(0,0,-1*). L'andamento è casuale per la presenta del termine *sin(t).*
(*Figura 5, Figura 6*)

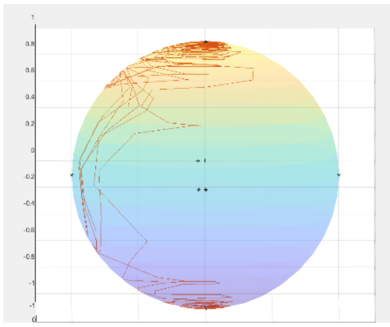

Figura 5

SOLUZIONE NUMERICA

Soluzione particolare ed errore

Cerco una soluzione particolare del problema con il dato iniziale $u(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ nell'intervallo di tempo T=[0,1] tramite l'utilizzo di un metodo numerico opportuno.

Siccome lo studio della soluzione è effettuato in un intervallo di tempo piccolo, oltre a metodi impliciti isometrici, risulta efficace utilizzare anche metodi espliciti, poiché è possibile ridurre di molto il passo con costi relativamente contenuti.

Nel progetto, per analizzare il problema, abbiamo utilizzato il metodo di Gauss2 (isometrico implicito), il metodo di Adam Bashforth 4 (multistep esplicito) e il metodo Runge Kutta 4 (esplicito), tutti con ordine di consistenza teorico p=4.

Per stimare l'errore finale, non conoscendo la soluzione esatta, abbiamo usato la relazione:
$||U_N(T) - U_{2N}(T)||\frac{2^p}{2^p-1} \sim ||u(T) - U_N(T)|| = O(N^{-p}),$
con p ordine teorico del metodo utilizzato e con $U_N(T)$, $U_{2N}(T)$ soluzioni approssimate al tempo T ottenute rispettivamente con N e $2N$ passi.

Confronto i risultati ottenuti tramite i tre diversi metodi: Gauss2 (*Tabella 1*), AB4 (*Tabella 2*), RK4 (*Tabella 3*).
Nelle tabelle sono riportati il numero dei passi N (scelti in modo tale da mantenere i costi simili tra i vari metodi), l'ampiezza dei passi ($h = \frac{T-t_0}{N}$ con T =1 e t_0=0), il costo (cioè il numero di valutazioni della funzione) e la stima dell'errore:

N	PASSO	COSTO	ERRORE
100	0.01	1200	4.823400937918147e-12
200	0.005	2398	2.934245439215980e-13
400	0.0025	4798	1.492139745096210e-14
800	0.00125	9598	

Tabella 1: Gauss 2

N	PASSO	COSTO	ERRORE
1000	0.001	1016	6.187642990577539e-15
2000	0.0005	2016	7.253457094217689e-15
4000	0.00025	4016	1.065814103640150e-15
8000	0.000125	8016	

Tabella 2: Adam Bashforth 4

N	PASSO	COSTO	ERRORE
250	0.004	1000	1.351807554783591e-13
500	0.002	2000	1.344110008479523e-14
1000	0.001	4000	6.187642990577539e-15
2000	0.0005	8000	

Tabella 3: Runge Kutta 4

Ordine del metodo

L'ordine di consistenza teorico di tutti e tre i metodi (Gauss2, AB4, RK4) è p =4.
Non per tutti i problemi, però, l'errore si comporta come un metodo di ordine p.

Posso stimare il p effettivo del problema tramite la relazione

$$p = \frac{\log\left(\frac{ERR_i}{ERR_j}\right)}{\log\left(\frac{N_j}{N_i}\right)}$$

con ERR_ie ERR_j errori della i-esima e j-esima prova, e N_i e N_j i passi rispettivi.

Confronto la stima di p per i tre diversi metodi utilizzati (*Tabella 4*)

GAUSS-2	RUNGE-KUTTA 4	ADAM-BASHFORTH 4
4.03898927943994	3.33016665693378	-0.229278806921682
4.29753499095092	1.11918935521003	2.76671293756025

Tabella 4: stime ordini di consistenza

CONCLUSIONI

Si può osservare che, a parità di costo, tutti e tre i metodi danno una buona approssimazione del problema.

L'errore finale dei due metodi espliciti è minore rispetto a quello del metodo di Gauss 2, quindi, come potevamo aspettarci (perché i metodi impliciti sono più dispendiosi in intervalli ridotti), sono più convenienti. Ma essi non conservano l'ordine di consistenza del metodo, infatti, in questi casi, è presente anche l'errore di floating in quanto si è molto vicini alla precisione di macchina (1e-14). Questo aspetto è particolarmente lampante nel metodo di Adam-Bashforth: da N=1000 a N=2000 l'errore aumenta.

Anche il metodo implicito è abbastanza efficace: il suo errore finale, nonostante sia maggiore di quello degli altri due metodi, è comunque molto piccolo (dell'ordine di grandezza di 1e-12/1e-14) e, inoltre, Gauss 2 conserva l'ordine di consistenza del metodo.

Tra il metodo Runge Kutta 4 e Adam Bashforth 4 non ci sono differenze sostanziali nonostante il secondo metodo sia un metodo multistep, quindi teoricamente più preciso a parità di costo.