

Pemodelan Pendinginan Kopi Menggunakan Metode Euler

Benedict Aurelius
2306209095

Proyek UAS
Komputasi Numerik

Depok, Indonesia

Abstrak—Studi kasus ini menyajikan penerapan Metode Euler, sebuah metode numerik orde pertama, untuk memodelkan proses pendinginan secangkir kopi yang mengikuti Hukum Pendinginan Newton. Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan laju perubahan suhu kopi diturunkan dan diselesaikan secara numerik menggunakan Metode Euler. Laporan ini mencakup penjelasan teoritis dari Metode Euler, deskripsi data yang digunakan dalam simulasi, langkah-langkah implementasi metode, serta diskusi dan analisis hasil yang diperoleh. Hasil simulasi memberikan perkiraan suhu kopi pada interval waktu tertentu, yang dapat berguna untuk memahami perilaku termal suatu benda dalam lingkungan dengan suhu konstan.

I. PENDAHULUAN

Perpindahan panas merupakan salah satu fenomena fisis paling fundamental dan omnipresent dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai aplikasi rekayasa dan sains. Mulai dari proses pendinginan mesin kendaraan, pengelolaan suhu pada komponen elektronik seperti prosesor komputer, hingga proses pasteurisasi dalam industri makanan dan bahkan estimasi waktu kematian dalam ilmu forensik, pemahaman dan kemampuan untuk memprediksi perubahan suhu suatu objek adalah krusial. Kemampuan untuk memodelkan dinamika termal ini secara akurat memungkinkan para insinyur dan ilmuwan untuk merancang sistem yang lebih efisien, aman, dan andal.

Salah satu model matematis paling dasar namun kuat untuk menggambarkan fenomena pendinginan adalah Hukum Pendinginan Newton. Hukum ini menyatakan bahwa laju perubahan suhu suatu benda berbanding lurus dengan perbedaan antara suhu benda tersebut dan suhu lingkungan sekitarnya. Hal ini menghasilkan sebuah persamaan diferensial biasa (PDB) orde pertama yang mendeskripsikan proses tersebut. Untuk kasus-kasus sederhana, seperti pada studi kasus ini, persamaan tersebut memiliki solusi analitik atau eksak yang dapat ditemukan menggunakan teknik kalkulus standar. Solusi analitik ini memberikan representasi kurva pendinginan yang kontinu dan akurat.

Namun, di dunia nyata, banyak masalah menjadi jauh lebih kompleks. Faktor-faktor seperti suhu lingkungan yang berubah-ubah, sifat material yang tidak seragam, geometri benda yang rumit, atau adanya sumber panas internal dapat mengubah persamaan diferensial menjadi sangat sulit atau bahkan mustahil untuk diselesaikan secara analitik. Dalam skenario seperti inilah metode numerik menunjukkan kekuatannya. Metode numerik adalah pendekatan komputasional yang mengubah masalah kontinu (seperti perubahan suhu seiring waktu) menjadi serangkaian perhitungan diskrit pada interval-interval kecil. Alih-alih mencari satu fungsi solusi yang eksak, metode ini menghasilkan serangkaian nilai aproksimasi pada titik-titik waktu tertentu.

Studi kasus ini secara spesifik bertujuan untuk menjembatani antara teori fisika fundamental dan teknik komputasi dasar. Kami memilih Metode Euler sebagai alat numerik utama. Meskipun merupakan salah satu metode yang

paling sederhana dan memiliki keterbatasan akurasi dibandingkan metode orde tinggi lainnya (seperti Metode Runge-Kutta), Metode Euler sangat berharga dari sudut pandang edukasional. Kesederhanaan konseptualnya—menggunakan garis singgung pada suatu titik untuk memprediksi titik berikutnya—menjadikannya titik awal yang ideal untuk memahami logika dasar di balik penyelesaian persamaan diferensial secara numerik.

Laporan ini akan menyajikan sebuah panduan langkah-demi-langkah dalam menerapkan Metode Euler pada masalah klasik pendinginan secangkir kopi. Kami akan mulai dengan merumuskan masalah berdasarkan Hukum Pendinginan Newton, mendefinisikan parameter yang relevan, dan kemudian menguraikan proses implementasi Metode Euler. Sebuah program dalam bahasa C akan digunakan untuk mengotomatisasi perhitungan dan menghasilkan data simulasi. Akhirnya, hasil dari simulasi numerik akan dianalisis secara kritis, dengan penekanan khusus pada bagaimana parameter kunci, seperti ukuran langkah (h), mempengaruhi akurasi hasil aproksimasi. Melalui studi kasus ini, diharapkan pembaca dapat memperoleh pemahaman yang solid tentang bagaimana konsep matematika abstrak dapat diimplementasikan dalam solusi komputasi praktis untuk masalah dunia nyata.

II. STUDI LITERATUR

A. Hukum Pendinginan Newton

Hukum Pendinginan Newton menyatakan bahwa laju perubahan suhu suatu benda sebanding dengan perbedaan suhu antara benda tersebut dan lingkungan sekitarnya. Secara matematis, hukum ini dirumuskan sebagai:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a)$$

dimana:

- $T(t)$ adalah suhu benda pada waktu t ,
- T_a adalah suhu lingkungan yang konstan,
- k adalah konstanta pendinginan positif yang bergantung pada sifat-sifat termal benda dan lingkungan.

Persamaan ini adalah persamaan diferensial biasa orde pertama yang dapat diselesaikan secara analitik. Namun, dalam banyak kasus persamaan diferensial sulit atau tidak mungkin diselesaikan secara analitik, sehingga metode numerik menjadi alternatif yang penting.

B. Metode Euler

Metode Euler adalah metode numerik eksplisit orde pertama untuk mencari solusi aproksimasi dari persamaan diferensial biasa dengan nilai awal. Diberikan persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$, Metode Euler memperkirakan solusi pada titik $x_{i+1} = x_i + h$ menggunakan rumus:

di mana h adalah ukuran langkah yang kecil. Metode ini pada dasarnya menggunakan garis singgung pada titik (x_i, y_i) untuk memperkirakan nilai y pada x_{i+1} .

Dalam konteks studi kasus ini, kita memiliki:

- $T(t)$ adalah suhu benda pada waktu t ,
- T_a adalah suhu lingkungan yang konstan,
- k adalah konstanta pendinginan positif yang bergantung pada sifat-sifat termal benda dan lingkungan.

Sehingga, aplikasi Metode Euler pada masalah pendinginan kopi menjadi:

$$T_{i+1} = T_i + h[-k(T(t) - T_a)]$$

dengan kondisi awal $T(0) = T_0$.

III. PENJELASAN DATA YANG DIGUNAKAN

Dalam studi kasus ini, kita menggunakan data parameter sebagai berikut:

- Suhu Awal Kopi (T_0):** Sebagai suhu awal kopi yang akan ditetapkan oleh pengguna, misalnya 95°C.
- Suhu Ruangan (T_a):** Sebagai suhu ruangan yang ditetapkan secara statis oleh pengguna, misalnya 25°C.
- Konstanta Pendinginan (k):** Ditetapkan sebesar 0,1. Nilai ini diasumsikan konstan dan mencerminkan karakteristik sistem termal.
- Ukuran Langkah (h):** Untuk menentukan seberapa sering kita memperbarui perkiraan suhu. Ukuran langkah akan ditetapkan oleh pengguna. Semakin kecil h , umumnya semakin akurat aproksimasi, tetapi membutuhkan lebih banyak langkah perhitungan.
- Waktu Akhir Simulasi (t_{akhir}):** Akan dimasukkan oleh pengguna, menentukan durasi simulasi pendinginan yang ingin kita amati, misalnya 16 menit.

Data ini akan digunakan sebagai input dalam program C yang mengimplementasikan Metode Euler untuk menghasilkan serangkaian nilai suhu kopi pada berbagai waktu.

IV. PENJELASAN METODE YANG DIGUNAKAN

Langkah-langkah untuk menyelesaikan studi kasus ini menggunakan Metode Euler adalah sebagai berikut:

A. Definiskan Persamaan Diferensial

Identifikasi persamaan yang mengatur perilaku sistem, dalam hal ini Hukum Pendinginan Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a)$$

B. Tentukan Kondisi Awal

Tetapkan nilai awal suhu kopi pada waktu $t = 0$, yaitu $T(0) = T_0$.

C. Pilih Ukuran Langkah

Tentukan nilai h , interval waktu antara perhitungan aproksimasi.

D. Iterasi Menggunakan Rumus Euler

Mulai dari $i = 0$, hitung suhu pada langkah berikutnya menggunakan rumus:

$$T_{i+1} = T_i + h[-k(T_i - T_a)]$$

E. Ulangi Iterasi

Lanjutkan langkah 4 hingga waktu simulasi mencapai atau melebihi t_{akhir} .

F. Simpan dan Analisis Hasil

Catat nilai waktu ($t_i = ih$) dan suhu yang sesuai (T_i) pada setiap langkah iterasi untuk dianalisis dan divisualisasikan.

Program C yang telah dibuat mengimplementasikan langkah-langkah ini secara algoritmik, mengambil parameter input dari pengguna dan menghasilkan serangkaian nilai waktu dan suhu aproksimasi.

V. DISKUSI DAN ANALISA HASIL EKSPERIMEN

Untuk menguji implementasi Metode Euler pada studi kasus ini, kita perlu menjalankan program dengan beberapa set parameter input. Mari kita asumsikan kita menjalankan program dengan parameter berikut:

- Suhu Awal Kopi (T_0): 90°C
- Suhu Ruangan (T_a): 22°C
- Ukuran Langkah (h): 1 menit
- Waktu Akhir Simulasi (t_{akhir}): 10 menit

Dengan input ini, program akan menghasilkan serangkaian iterasi yang dibentuk menjadi sebuah tabel yang menunjukkan perubahan suhu kopi seiring waktu.

TABLE I. TABEL HASIL SIMULASI PROGRAM

Euler's Method	
Waktu (Menit)	Suhu Aproksimasi (°C)
0	90.00
1	83.20
2	77.08
3	71.57
4	66.61
5	62.15
6	58.14
7	54.52
8	51.27
9	48.34
10	45.71

Untuk memberikan konteks visual terhadap suhu aproksimasi yang dihasilkan dari rumus Euler terhadap setiap menit, kita dapat sama-sama melihat grafik plot yang dihasilkan berdasarkan tabel diatas.

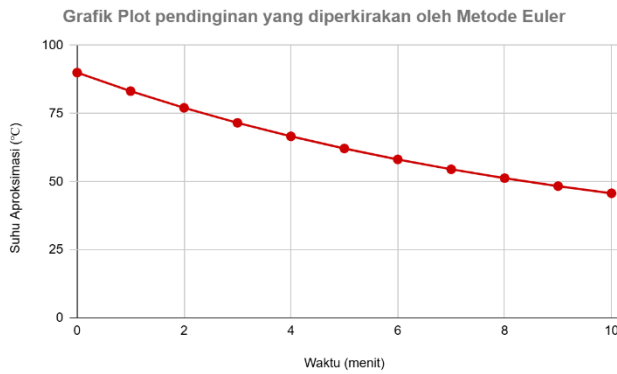


Fig. 1. Grafik Plot pendinginan yang diperkirakan oleh Metode Euler

Sebuah plot garis terlihat diatas dengan waktu (dalam menit) pada sumbu horizontal (sumbu-x) dan suhu (dalam °C) pada sumbu vertikal (sumbu-y). Plot ini akan menunjukkan kurva pendinginan yang diperkirakan oleh Metode Euler. Kurva akan dimulai dari suhu awal dan menurun secara monoton menuju suhu ruangan. Kecerunan kurva akan lebih curam pada awal proses pendinginan ketika perbedaan suhu antara kopi dan ruangan besar, dan akan semakin landai seiring waktu ketika perbedaan suhu mengecil.

Dari tabel dan deskripsi visualisasi, kita dapat mengamati bahwa suhu kopi menurun seiring berjalannya waktu, sesuai dengan Hukum Pendinginan Newton. Laju penurunan suhu lebih cepat pada awal simulasi dan melambat seiring dengan mendekatnya suhu kopi ke suhu ruangan.

A. Pengaruh Ukuran Langkah (h)

Penting untuk dicatat bahwa akurasi Metode Euler sangat bergantung pada ukuran langkah h . Semakin kecil nilai h , semakin banyak langkah perhitungan yang diperlukan, tetapi aproksimasi yang dihasilkan umumnya akan lebih akurat karena kita mendekati kurva solusi sebenarnya dengan garis-garis singgung yang lebih pendek. Sebaliknya, ukuran langkah yang lebih besar dapat menyebabkan kesalahan aproksimasi yang signifikan.

Untuk mengilustrasikan pengaruh ukuran langkah, kita dapat melakukan simulasi dengan nilai h yang berbeda (misalnya $h = 0,5$ menit dan $h = 2$ menit) dan membandingkan hasilnya. Plot yang membandingkan hasil dengan berbagai ukuran langkah akan menunjukkan bagaimana h mempengaruhi perkiraan suhu. Ukuran langkah yang lebih kecil akan menghasilkan kurva yang lebih halus.

B. Perbandingan dengan Solusi Analitik

Salah satu keuntungan memilih Hukum Pendinginan Newton sebagai studi kasus adalah karena persamaan diferensialnya,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a),$$

merupakan persamaan diferensial biasa linear orde pertama yang memiliki solusi analitik. Ini memungkinkan kita untuk membandingkan hasil aproksimasi dari Metode Euler dengan hasil sebenarnya, sehingga kita dapat mengevaluasi secara kuantitatif seberapa akurat metode numerik yang kita gunakan.

Solusi analitik dari persamaan diferensial ini dengan kondisi awal $T(0) = T_0$ adalah:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Fungsi ini memberikan nilai suhu yang tepat pada setiap waktu t tanpa memerlukan proses iterasi.

Sebagai contoh, disini saya akan coba membandingkan nilai suhu yang dihasilkan oleh Metode Euler dan secara analitik pada 5 detik pertama dengan parameter yang sama pada Tabel 1. Dengan menggunakan rumus diatas, didapati tabel sebagai berikut:

TABLE II. TABEL HASIL PERBANDINGAN EULER DAN ANALITIK

Perbandingan Metode Euler dan Analitik		
Waktu (Menit)	Euler	Analitik
0	90.00	90.00
1	83.20	83.53
2	77.08	77.67
3	71.57	72.38
4	66.61	67.58
5	62.15	63.24

Setelah itu, kita akan menghitung Error Absolut yang didefinisikan sebagai berikut:

$$Error = |T_{analitik} - T_{euler}|$$

lalu, didapati tabel sebagai berikut:

TABLE III. TABEL ERROR ABSOLUT

Error	
Waktu (Menit)	Error Absolut
0	0
1	0.33
2	0.59
3	0.81
4	0.97
5	1.09

Dari tabel 3, beberapa poin penting dapat dianalisis:

1) *Akurasi Awal*: Pada $t = 0$, kedua metode memberikan hasil yang sama karena itu adalah titik awal yang diberikan. Galat selalu nol pada kondisi awal.

2) *Sifat Error*: Terlihat bahwa hasil dari Metode Euler secara konsisten sedikit lebih rendah daripada solusi analitik. Hal ini terjadi karena kurva pendinginan yang sebenarnya bersifat cekung ke atas (*concave up*). Metode Euler menggunakan garis singgung lurus untuk melakukan ekstrapolasi. Pada kurva yang cekung ke atas, garis singgung pada awal interval akan selalu berada di bawah kurva itu sendiri, sehingga estimasi untuk titik berikutnya akan lebih rendah dari nilai sebenarnya.

3) *Akumulasi Error*: Error Absolut meningkat seiring berjalannya waktu. Setiap langkah iterasi memperkenalkan error baru, dan error dari langkah-langkah sebelumnya ikut terbawa. Fenomena ini disebut akumulasi error dan merupakan karakteristik umum dari metode numerik iteratif.

Agar lebih terlihat perbandingannya, kita dapat membuat sebuah plot yang menampilkan kedua hasil pada grafik yang sama.

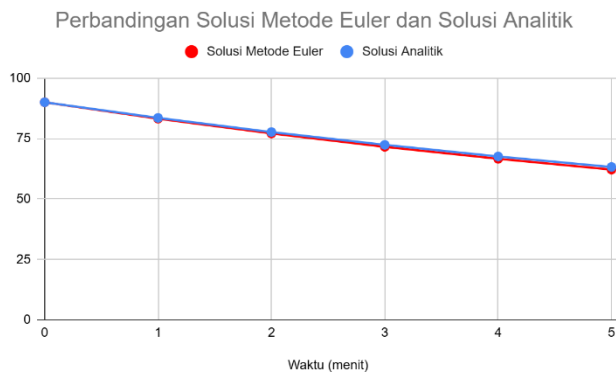


Fig. 2. Grafik Plot Perbandingan Solusi Metode Euler dan Solusi Analitik

VI. KESIMPULAN

Studi kasus ini berhasil mengaplikasikan Metode Euler untuk memodelkan proses pendinginan secangkir kopi berdasarkan Hukum Pendinginan Newton. Hasil simulasi numerik menunjukkan tren penurunan suhu yang diharapkan dan memberikan perkiraan suhu pada berbagai interval waktu. Analisis menunjukkan bahwa ukuran langkah h

merupakan faktor penting yang mempengaruhi akurasi solusi numerik. Meskipun Metode Euler adalah metode orde pertama dan mungkin kurang akurat dibandingkan metode numerik orde tinggi untuk ukuran langkah yang sama, kesederhanaannya membuatnya berguna untuk memberikan pemahaman awal tentang perilaku sistem yang dimodelkan oleh persamaan diferensial. Untuk aplikasi yang memerlukan akurasi lebih tinggi, metode numerik yang lebih canggih seperti Metode Runge-Kutta dapat dipertimbangkan.

LINK GITHUB

https://github.com/benedictaurel/ProyekUASKomnum_2306209095_BenedictAurelius

LINK YOUTUBE

<https://youtu.be/PpI-Qo33NwE>

REFERENCES

- [1] S. C. Chapra and R. P. Canale, "Chapter 25: Runge-Kutta Methods," in *Numerical Methods for Engineers*, 6th ed, New York, 1221 Avenue of the Americas: McGraw-Hill, 2010, pp. 708–719
- [2] GeeksforGeeks, "Euler method for solving differential equation," GeeksforGeeks, <https://www.geeksforgeeks.org/euler-method-solving-differential-equation/> (accessed Jun. 7, 2025)