



Fachgebiet Elektrische Energieversorgungsnetze

Extraordinarius: Prof. Dr.-Ing. R. Witzmann



Simulation von elektrischen Energieversorgungsnetzen

Skript zur Vorlesung

Wintersemester 2013/2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung.....	1
2	Mathematische Grundlagen der digitalen Netzberechnung.....	5
3	Netzwerkgleichungen	15
4	Netzelemente und ihre Ersatzschaltungen	19
5	Lastflussberechnung	27
6	Unsymmetrische Netzbelastung	57
7	Kurzschlussstromberechnung	63
8	Netzzustandserfassung (State Estimation)	83
9	Digitale Berechnung transienter Vorgänge.....	91

1 Einführung

Aufgaben der Energieversorger und Netzbetreiber:

- Vorausschauende Planung der Netze
- Sicherer Betrieb
- Zuverlässige Versorgung der Kunden

Um diesen Aufgaben gerecht werden zu können, sind Verfahren notwendig zur Berechnung der Strom- und Spannungsverteilung im Netz sowie der Belastung der Betriebsmittel für

- Normalbetrieb
Berechnung der Leistungsflüsse auf einzelnen Betriebsmitteln, Lastflussberechnung (stationärer Betrieb)
- Gestörten Betrieb
Kurzschlussstromberechnung, symmetrisch, unsymmetrisch (quasistationäre Betrachtung, lineare Gleichungen)
- Ausgleichsvorgänge und Schalthandlungen im Betrieb und nach Fehlern
Berechnung elektrodynamischer und elektromagnetischer Vorgänge (transiente Vorgänge, Differenzialgleichungen)

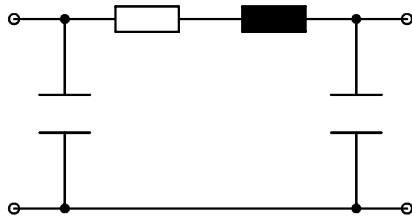
Aufgrund der Größe der Netze und der Komplexität der Anordnungen ist eine geschlossene Lösung der Gleichungs- bzw. Differenzialgleichungssysteme nicht handhabbar. Die Berechnung erfolgt durch numerische Verfahren.

Schritte bei der Lösung eines Problems in den Ingenieurwissenschaften bei der Anwendung eines Digitalrechners:

1. Idealisierung des Problems durch Schaffung einer Modellvorstellung. In der Elektrotechnik bedeutet dies meist die Entwicklung eines Ersatzschaltbildes.

Das Problem muss einerseits so vereinfacht werden, dass es mit wirtschaftlich vertretbarem Aufwand behandelt werden kann. Andererseits darf aber die Vereinfachung nicht so weit gehen, dass die physikalische Realität nicht mehr richtig wiedergegeben wird. Der Vorteil des Einsatzes von Digitalrechnern bei der Lösung von Problemen in den Ingenieurwissenschaften liegt vor allem darin, dass weniger Vereinfachungen notwendig sind im Vergleich zur Handrechnung.

Beispiel:



Einphasiges Ersatzschaltbild einer Hochspannungsleitung

Beschreibung der physikalischen Realität durch die Maxwell'schen Gleichungen.

Schrittweise Vereinfachung:

- Es werden nur leitungsgebundene Vorgänge betrachtet (Telegrafengleichungen statt Maxwell'sche Gleichungen).
- Es werden nur die Vorgänge am Anfang und am Ende der Leitung betrachtet.
- Es werden nur stationäre Vorgänge zugrunde gelegt.
- Es wird schließlich angenommen, dass die Leitung verdreht ist, und dass symmetrische Strom- und Spannungsvorgänge gegeben sind.

Die letzte Vereinfachung führt dann auf das oben angegebene einphasige Ersatzschaltbild. Mit diesem Ersatzschaltbild können aber z. B. unverdrillte Leitungen oder transiente Vorgänge nicht erfasst werden.

2. Beschreibung des Modells durch einen mathematischen Ansatz

Z. B. Vierpolgleichung bei der Leitung, Beschreibung eines Netzwerks durch das ohmsche Gesetz und die Kirchhoff'schen Gleichungen.

3. Auswahl eines geeigneten Lösungsverfahrens für den mathematischen Ansatz. Bei der Benutzung von Digitalrechnern zur numerischen Auswertung sind prinzipielle Beschränkungen zu beachten.

- a) Der Grenzwertbegriff ist dem Digitalrechner nicht zugänglich (Abbrechfehler).
- b) Ein Kontinuum (z. B.: Integral) kann vom Digitalrechner nicht erfasst werden (Diskretisierungsfehler).

a) und b) sind Verfahrensfehler, hinzu kommen noch Rundungsfehler.

Wichtig ist die Wahl des für den Digitalrechner geeigneten Lösungsverfahrens.

Beispiel:

Lösung linearer Gleichungssysteme

Gauß-Elimination – Cramer'sche Regel

Cramer'sche Regel:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & r_2 \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & a_{12} \\ r_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & r_1 \\ a_{21} & r_2 \end{vmatrix}}{D}$$

Anzahl der Unbekannten	5	10	20
Gauß-Elimination	<1ms	Faktor 15	Faktor 60
Cramer'sche Regel	<1ms	Faktor 250000	Faktor 1016

Beispiel:

schwach besetzte Matrizen: Bei 487 Knotenpunkten sind 760.000 Elemente abzuspeichern. => Reduktion auf 9.500 Elemente (ca. 1% des Speicherplatzes für die volle Matrix).

4. Wertemäßige Lösung

Nur bei der wertemäßigen Lösung kann der Digitalrechner helfen.

- a) Digital
- b) Analog
- c) Grafisch

5. Deutung der numerischen Ergebnisse

6. Vergleich mit Messergebnissen

2 Mathematische Grundlagen der digitalen Netzberechnung

Literatur:

- R. Zurmühl: Matrizen
- S. Zurmühl: Praktische Mathematik
- A. v. Weiß: Einführung in die Matrizenrechnung zur Anwendung in der Elektrotechnik
- A.M. Tropper: Matrizenrechnungen in der Elektrotechnik (B.-I.-Hochschultaschenbuch)

2.1 Definitionen und Bezeichnungen

2.1.1 Matrix / Matrizen

Eine Anordnung von reellen oder komplexen Zahlen in einem rechteckigen Schema heißt eine **Matrix**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ Die Elemente der Matrix bezeichnet man als Koeffizienten.

$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}$ heißt ihre i-te Zeile.

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \text{ heißt ihre k-te Spalte.}$$

Der Index kennzeichnet den Platz, den das Element im Zahlenschema einnimmt. Es gilt die Vereinbarung, dass die erste Ziffer des Index die Nummer der Zeile angibt und die zweite die Nummer der Spalte.

a_{ik}
↑
i-te Zeile
← k-te Spalte

Schreibweise: $[A]$ (oder **A**)

Sonderfälle des Matrixaufbaus:

1. Quadratische Matrizen

Anzahl der Zeilen = Anzahl der Spalten

Jeder quadratischen Matrix kann man eine Zahl, ihre Determinante $\det [A]$ zuordnen.

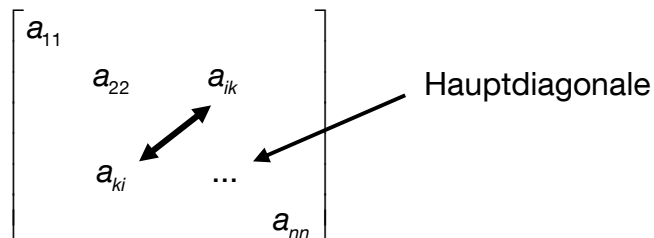
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

2. Symmetrische Matrizen

Die spiegelbildlich zur Hauptdiagonale liegenden Elemente sind gleich:

$$a_{ik} = a_{ki}$$

(nur bei quadratischen Matrizen möglich)



Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & -7 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Einspaltige Matrix (Spaltenvektor)

Matrix, die nur aus einer einzigen Spalte besteht:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4. Einzeilige Matrix (Zeilenvektor)

Matrix, die nur aus einer einzigen Zeile besteht:

$$[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]$$

2.1.2 Transponierte Matrix

Vertauscht man bei einer Matrix $[A]$ die Zeilen mit den Spalten, dann erhält man die transponierte Matrix von $[A]$.

Sie wird bezeichnet mit: $[A]^t$

Beispiel:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [A]^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Einheitsmatrix

Eine Matrix, die in der Hauptdiagonale mit 1 sonst mit 0 besetzt ist, wird als Einheitsmatrix bezeichnet.

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Einige Rechenregeln

2.2.1 Addition und Subtraktion

Die Matrix $[C]$ als Summe (Differenz) der Matrizen $[A]$ und $[B]$ ist so definiert, dass jedes Element der Summenmatrix (Differenzmatrix) $[C]$ gleich der Summe (Differenz) der entsprechenden Elemente der Einzelmatrizen $[A]$ und $[B]$ ist.

$$\text{Also } [A] \pm [B] = [C] \qquad \text{heißt } c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$$

Voraussetzung: $[A]$ und $[B]$ müssen die gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

Die Multiplikation der Elemente der Matrix $[A]$ mit einem Skalar k wird als skalare Multiplikation bezeichnet:

$$k \cdot [A] = [A] \cdot k$$

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Matrizenmultiplikation

$$[A] \cdot [B] = [C]$$

Es sei $[A]$ eine Matrix mit n Spalten und $[B]$ eine Matrix mit n Zeilen. Dann gilt für die Elemente der Matrix $[C]$:

$$c_{ik} = \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vk}$$

Beispiele zur Matrizenmultiplikation:

a) $[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$[A] \cdot [B]$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 4 2 1 2 3 4 </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 3 2 0 2 1 -2 </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 14 10 3 -2 </div>

$[B] \cdot [A]$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 3 2 0 2 1 -2 </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 4 2 1 2 3 4 </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 16 10 -4 7 4 -4 17 10 -8 </div>

b) $[x] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$[x] \cdot [B]$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 3 1 2 2 1 0 </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 5 2 -1 </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 18 9 </div>

$[B] \cdot [x] \rightarrow$ nicht definiert
(Matrix $[B]$ hat mehr Spalten als $[x]$ Zeilen)

c) $[x] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $[Y] = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 5 3 2 </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 3 2 1 23 </div>
--	---

2.3 Lineare Gleichungen

2.3.1 Lineare Gleichungen in Matrixschreibweise

Ein System von n linearen Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{1n} \cdot x_n & = & r_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{2n} \cdot x_n & = & r_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{nn} \cdot x_n & = & r_n \end{array}$$

lässt sich nach den Regeln der Matrizenmultiplikation wie folgt schreiben

$$[A] \cdot [x] = [r]$$

2.3.2 Kehrmatrix (Inverse)

Auflösung des Gleichungssystems nach x

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & c_{11} \cdot r_1 & + & c_{12} \cdot r_2 & + & \cdots & c_{1n} \cdot r_n \\ x_2 & = & c_{21} \cdot r_1 & + & c_{22} \cdot r_2 & + & \cdots & c_{2n} \cdot r_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ x_n & = & c_{n1} \cdot r_1 & + & c_{n2} \cdot r_2 & + & \cdots & c_{nn} \cdot r_n \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise

$$[x] = [C] \cdot [r]$$

$[C]$ wird als Kehrmatrix oder Inverse der Matrix $[A]$ bezeichnet.

Man schreibt: $[C] = [A]^{-1}$ also $[x] = [A]^{-1} \cdot [r]$

Die Multiplikation von $[A]$ mit der Kehrmatrix ergibt die Einheitsmatrix $[E]$.

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [E]$$

Eine Kehrmatrix kann nur für quadratische Matrizen angegeben werden (beim Gleichungssystem: Anzahl der Unbekannten muss gleich Anzahl der Gleichungen sein).

Eine Kehrmatrix existiert nicht, wenn die Determinante der Matrix $[A]$ $\det([A]) = 0$ ist.

Die Inverse einer nichtsingulären Matrix kann durch Umformung von Zeilen und Spalten berechnet werden, sodass eine Diagonalmatrix entsteht.

Beispiel:

gegeben: $[A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

gesucht: $[A]^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Zeile(1)} = \text{Zeile(1)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Zeile(2)} = \text{Zeile(1)} - \text{Zeile(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Zeile(1)} = \text{Zeile(1)} - \text{Zeile(2)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Zeile(2)} = \text{Zeile(2)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [E] \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 1 - 1 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad q.e.d.$$

2.4 Zusammenstellung von Bezeichnungen für die digitale Netzberechnung

\underline{U} = Außenleiter-Spannung (wenn nicht anders angegeben)

\underline{I} = Außenleiterstrom

\underline{Z} = komplexer Widerstand, Impedanz

$\frac{1}{\underline{Z}}$ = komplexer Leitwert, Admittanz

$[\underline{Y}]$ = Admittanzmatrix

\underline{Y}_{ik} = Element einer Admittanzmatrix

$[\underline{Z}]$ = Impedanzmatrix

\underline{Z}_{ik} = Element einer Impedanzmatrix

$[\underline{U}]$ = Einspaltige Matrix der Spannungen (Spannungsvektor)

$[\underline{I}]$ = Einspaltige Matrix der Ströme (Stromvektor)

3 Netzwerkgleichungen

Im Allgemeinen:

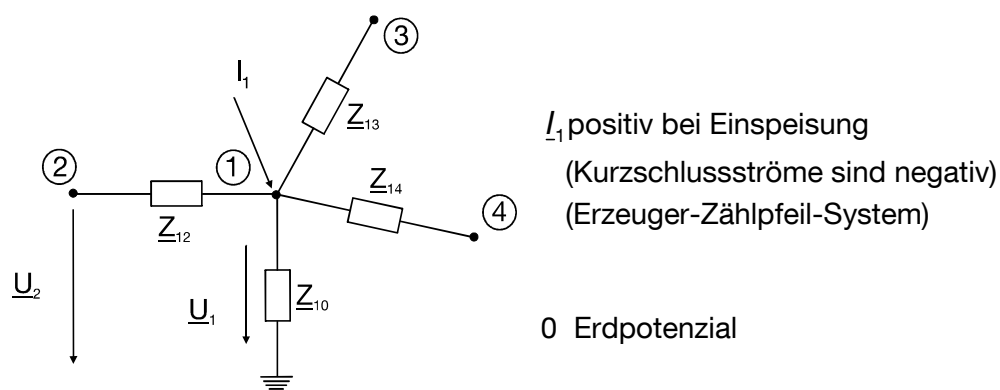
gegeben: Lasten, Einspeiseleistungen, Spannungen an Einspeisepunkten

gesucht: Spannungen an Knotenpunkten, Stromverteilung

Lösung: Ersatzschaltung des Netzes unter Berücksichtigung der Kirchhoff'schen Gleichungen

3.1 Knotenadmittanzmatrix

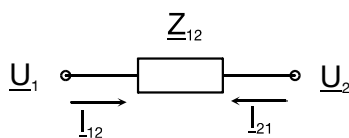
Allen Zweigen sind Impedanz- bzw. Admittanzwerte zugeordnet:



In jedem Knotenpunkt gilt:

$$\sum I = 0$$

Im einzelnen Zweig gilt:



$$I_{12} = (U_1 - U_2) \frac{1}{Z_{12}} = -I_{21}$$

Summation im Knotenpunkt (1)

$$I_{10} + I_{12} + I_{13} + I_{14} = I_1$$

oder

$$(\underline{U}_1 - 0) \frac{1}{\underline{Z}_{10}} + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \frac{1}{\underline{Z}_{12}} + (\underline{U}_1 - \underline{U}_3) \frac{1}{\underline{Z}_{13}} + (\underline{U}_1 - \underline{U}_4) \frac{1}{\underline{Z}_{14}} = I_1$$

Geordnet:

$$\underline{U}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_{10}} + \frac{1}{\underline{Z}_{12}} + \frac{1}{\underline{Z}_{13}} + \frac{1}{\underline{Z}_{14}} \right) - \underline{U}_2 \frac{1}{\underline{Z}_{12}} - \underline{U}_3 \frac{1}{\underline{Z}_{13}} - \underline{U}_4 \frac{1}{\underline{Z}_{14}} = I_1$$

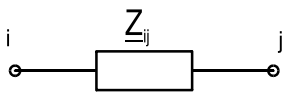
Im Netz mit n Knotenpunkten (Knoten 0 = Erdpotential weggelassen)

$$\begin{array}{lcl} \text{Knoten (1):} & \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{1n}\underline{U}_n & = I_1 \\ \text{Knoten (2):} & \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{2n}\underline{U}_n & = I_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Knoten (n):} & \underline{Y}_{n1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{n2}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{nn}\underline{U}_n & = I_n \end{array} \quad \left(\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_{11}} \right)$$

oder in Matrixschreibweise: $[\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] = [\underline{I}]$

$[\underline{Y}]$ Knotenpunktadmittanzmatrix mit den Elementen \underline{Y}

Allgemeine Aufstellungsregel



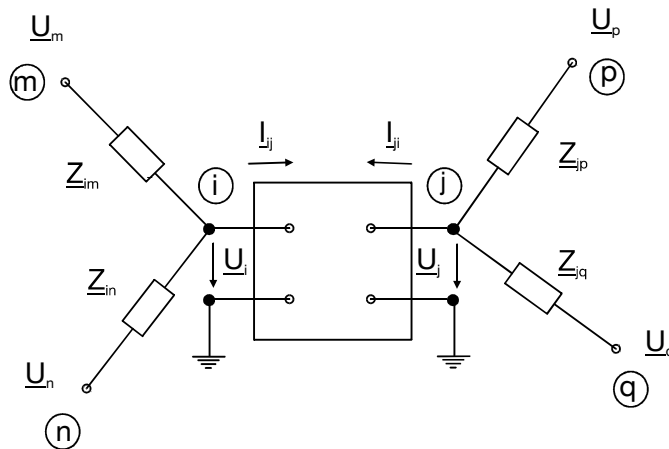
\underline{Y}_{ii} = Summe der im Knoten i anliegenden Leitwerte (Diagonalelement)

\underline{Y}_{ij} = negative Summe der die Knoten i und j verbindenden Leitwerte (Neben-Diagonalelem.)

$[\underline{Y}]$ ist das mathematische Abbild des passiven Netzes.

Sind nur Impedanzzweige vorhanden: $\underline{Y}_{ij} = \underline{Y}_{ji}$ (Symmetrie zur Diagonalen)

3.2 Einbinden eines passiven Vierpols in die Knotenadmittanzmatrix



Der Vierpol sei gegeben durch seine Leitwertmatrix:

$$[\underline{Y}_{VP}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa} & \underline{Y}_{ab} \\ \underline{Y}_{ba} & \underline{Y}_{bb} \end{bmatrix}$$

Es gilt somit:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{ij} \\ \underline{I}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa} & \underline{Y}_{ab} \\ \underline{Y}_{ba} & \underline{Y}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i \\ \underline{U}_j \end{bmatrix}$$

daraus:

$$\underline{I}_{ij} = \underline{Y}_{aa} \underline{U}_i + \underline{Y}_{ab} \underline{U}_j$$

$$\underline{I}_{ji} = \underline{Y}_{ba} \underline{U}_i + \underline{Y}_{bb} \underline{U}_j$$

weiterhin gilt:

$$\underline{I}_{im} = (\underline{U}_i - \underline{U}_m) \frac{1}{\underline{Z}_{im}}$$

$$\underline{I}_{jp} = (\underline{U}_j - \underline{U}_p) \frac{1}{\underline{Z}_{jp}}$$

$$\underline{I}_{in} = (\underline{U}_i - \underline{U}_n) \frac{1}{\underline{Z}_{in}}$$

$$\underline{I}_{jq} = (\underline{U}_j - \underline{U}_q) \frac{1}{\underline{Z}_{jq}}$$

Knotengleichungen für die Knoten (i)

$$\underline{I}_{ij} + \underline{I}_{im} + \underline{I}_{in} = 0$$

und (j)

$$\underline{I}_{ji} + \underline{I}_{jp} + \underline{I}_{jq} = 0$$

damit:

$$\left(\frac{1}{\underline{Z}_{im}} + \frac{1}{\underline{Z}_{in}} + \underline{Y}_{aa} \right) \underline{U}_i + \underline{Y}_{ab} \underline{U}_j - \frac{1}{\underline{Z}_{im}} \underline{U}_m - \frac{1}{\underline{Z}_{in}} \underline{U}_n = 0$$

$$\left(\frac{1}{\underline{Z}_{jp}} + \frac{1}{\underline{Z}_{jq}} + \underline{Y}_{bb} \right) \underline{U}_j + \underline{Y}_{ba} \underline{U}_i - \frac{1}{\underline{Z}_{jp}} \underline{U}_p - \frac{1}{\underline{Z}_{jq}} \underline{U}_q = 0$$

in der Matrix $[\underline{Y}] =$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_{ii} & \underline{y}_{ij} & \underline{y}_{im} & \underline{y}_{in} & \underline{y}_{ip} & \underline{y}_{iq} \\ \underline{y}_{ji} & \underline{y}_{jj} & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{y}_{jq} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{y}_{qi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{y}_{qq} \end{bmatrix}$$

wird die i-te und die j-te Zeile von $[\underline{Y}]$:

$$\begin{array}{lcl} i: & \frac{1}{\underline{Z}_{im}} + \frac{1}{\underline{Z}_{in}} + \underline{Y}_{aa} & \underline{Y}_{ab} \quad -\frac{1}{\underline{Z}_{im}} \quad -\frac{1}{\underline{Z}_{in}} \quad 0 \quad 0 \\ j: & \underline{Y}_{ba} & \frac{1}{\underline{Z}_{jp}} + \frac{1}{\underline{Z}_{jq}} + \underline{Y}_{bb} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{\underline{Z}_{jp}} \quad -\frac{1}{\underline{Z}_{jq}} \end{array}$$

$[\underline{Y}]$ ist dann symmetrisch zur Diagonale, wenn $\underline{Y}_{ab} = \underline{Y}_{ba}$

4 Netzelemente und ihre Ersatzschaltungen

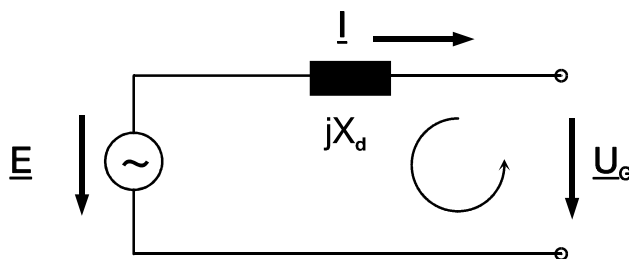
Größere Netzänderungen finden im Minuten- und Stundenbereich statt. Daher ist eine Momentaufnahme (stationäre Betrachtung) für die meisten Aufgaben ausreichend:

- Beschreibung durch System von algebraischen Gleichungen (vereinfachte Modelle)
- Beschreibung durch einphasige ESB (Leiter-Erd-Spannungen)

So ist jedoch keine Berechnung von Ausgleichsvorgängen z. B. nach Kraftwerksabschaltung möglich.

4.1 Generator

Ersatzschaltbild des Synchrongenerators:



$$\underline{U}_G = \underline{E} - \underline{I} \cdot jX_d$$

\underline{E} : Polradspannung

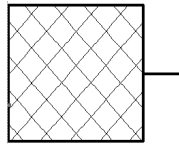
\underline{U}_G : Generatorklemmenspannung

X_d : synchrone Längsreaktanz

Ersatzschaltbild im Kurzschlussfall:

Behandlung im Abschnitt „7. Kurzschlussstromberechnung“

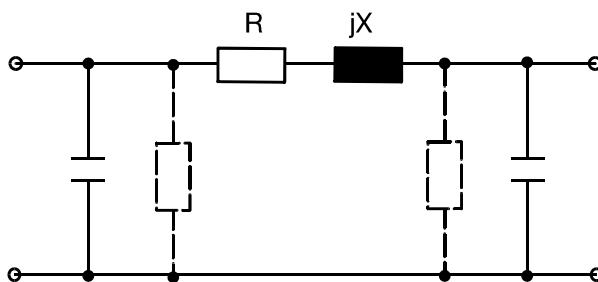
4.2 Netz-Einspeisung



Eingangsimpedanz:

$$|Z_q| = \frac{1,1 \cdot U_{rq}^2}{S_{kq}''}$$

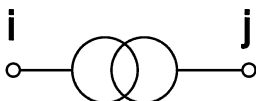
4.3 Freileitung, Kabel



Werte für R , X , ωC (und G)
siehe Vorlesung über
Energieübertragungstechnik
oder Tabellenbücher.

4.4 Transformator

Zweiwicklungstransformator



Gegeben i. A.:

S_n : Transformatornennleistung (Bemessungsscheinleistung)

u_k : Kurzschlussspannung in % (Bemessungswert)

V_{CU} : Kupferverluste

V_{Fe} : Eisenverluste

I_0 / I_n : relativer Leerlaufstrom in % angegeben

U_{n-i} , U_{n-j} : Nennspannungen des Transformators (Dreieckspannungen)

Yd5 (z. B.) Schaltgruppe

Hinweis:

- Nennwerte Index n
- Bemessungswerte Index r

Definitionen nach DIN 40200:

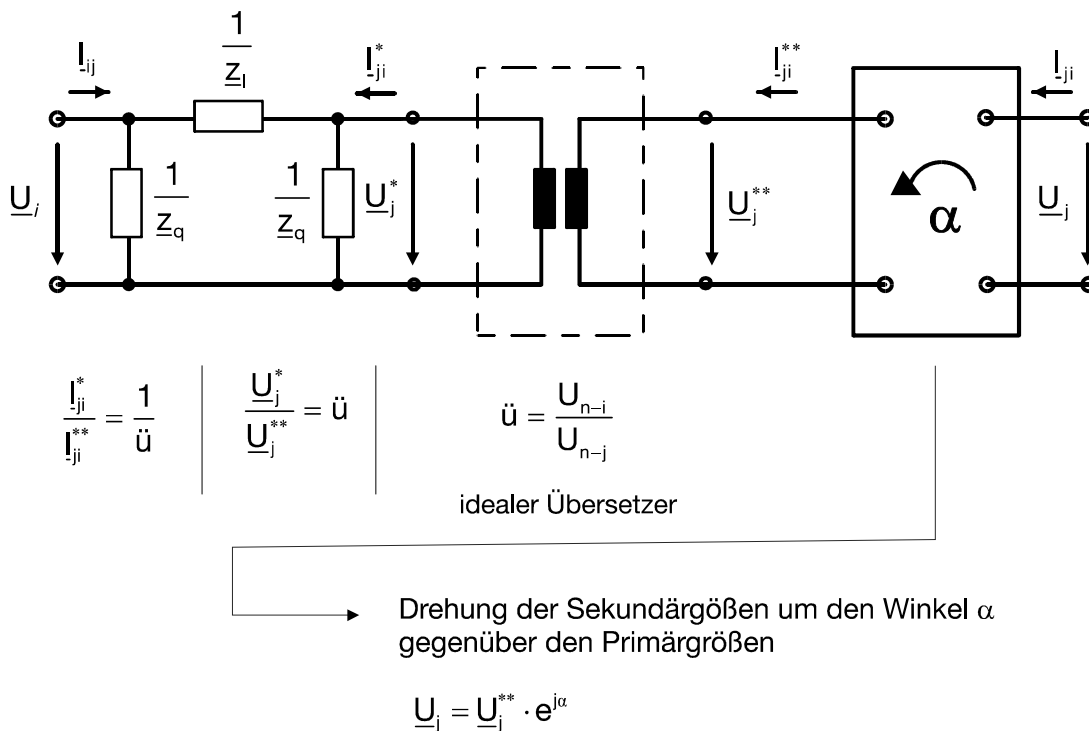
Nennwert:

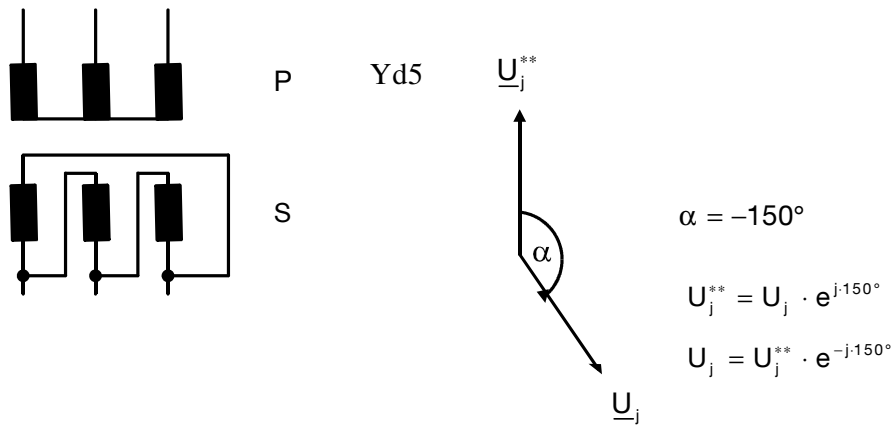
Ein geeigneter gerundeter Wert einer Größe zur Bezeichnung oder Identifizierung eines Elements einer Gruppe oder einer Einrichtung.

Bemessungswert:

Ein für eine vorgegebene Betriebsbedingung geltender Wert einer Größe, der i. A. vom Hersteller für ein Element, eine Gruppe oder eine Einrichtung festgelegt wird.

Ersatzschaltbild:



Beispiel:


$$\underline{U}_j^{**} = \underline{U}_j \cdot e^{-j\alpha}$$

$$\underline{U}_j^* = \ddot{u} \cdot \underline{U}_j^{**} = \ddot{u} \cdot e^{-j\alpha} \underline{U}_j$$

$$\underline{I}_{ji}^{**} = \underline{I}_{ji} \cdot e^{-j\alpha}$$

$$\underline{I}_{ji}^* = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_{ji}^{**} = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot e^{-j\alpha} \underline{I}_{ji}$$

Knotengleichungen:

Knoten i:

$$\underline{U}_i \cdot \frac{1}{\underline{Z}_q} + (\underline{U}_i - \underline{U}_j^*) \cdot \frac{1}{\underline{Z}_l} = \underline{I}_{ij}$$

$$\left(\frac{1}{\underline{Z}_q} + \frac{1}{\underline{Z}_l} \right) \cdot \underline{U}_i - \frac{1}{\underline{Z}_l} \cdot \underline{U}_j^* = \underline{I}_{ij}$$

$$\left(\frac{1}{\underline{Z}_q} + \frac{1}{\underline{Z}_l} \right) \cdot \underline{U}_i - \ddot{u} \cdot e^{-j\alpha} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_l} \cdot \underline{U}_j = \underline{I}_{ij}$$

analog Knoten j:

$$\left(\frac{1}{\underline{Z}_q} + \frac{1}{\underline{Z}_l} \right) \cdot \underline{U}_j^* - \frac{1}{\underline{Z}_l} \cdot \underline{U}_i = \underline{I}_{ji}^*$$

$$-\ddot{u} \cdot e^{j\alpha} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_l} \cdot \underline{U}_i + \ddot{u}^2 \cdot \left(\frac{1}{\underline{Z}_q} + \frac{1}{\underline{Z}_l} \right) \cdot \underline{U}_j = \underline{I}_{ji}$$

in der Vierpoldarstellung (siehe Kapitel 3)

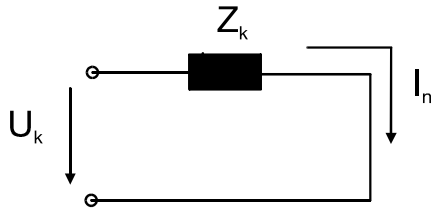
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{ij} \\ \underline{I}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa} & \underline{Y}_{ab} \\ \underline{Y}_{ba} & \underline{Y}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i \\ \underline{U}_j \end{bmatrix}$$

ergibt sich somit:

$$\underline{Y}_{aa} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_q} + \frac{1}{\underline{Z}_l} \right) \quad \underline{Y}_{ab} = -\ddot{u} \cdot e^{-j\alpha} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_l}$$

$$\underline{Y}_{ba} = -\ddot{u} \cdot e^{+j\alpha} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_l} \quad \underline{Y}_{bb} = \ddot{u}^2 \cdot \left(\frac{1}{\underline{Z}_q} + \frac{1}{\underline{Z}_l} \right)$$

Bestimmung von \underline{Z}_I im Kurzschlussversuch:



Einstellen der Primärspannung (Kurzschlussspannung) so, dass sekundärseitig Nennstrom fließt.

$$\underline{Z}_k = \frac{U_k}{I_n} = \frac{\underline{u}_k}{100\%} \cdot \frac{U_n^2}{S_n} \quad \underline{u}_k [\%]$$

$$\underline{u}_k = u_r + j u_x$$

$$u_k = \sqrt{u_r^2 + u_x^2}$$

$$u_x = \sqrt{u_k^2 - u_r^2}$$

$$u_r = \frac{I_n \cdot R_k \cdot \sqrt{3}}{U_{n-i}} \cdot 100\% = \frac{I_n^2 \cdot R_k \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot I_n \cdot U_{n-i}} \cdot 100\% = \frac{V_{CU}}{S_n} \cdot 100\% \quad u_r [\%]$$

Im π – ESB ergibt sich:

$$\underline{Z}_k = \frac{U_k}{I_n} = \frac{\underline{Z}_q \cdot \underline{Z}_I}{\underline{Z}_q + \underline{Z}_I} \quad \text{mit } \underline{Z}_q \gg \underline{Z}_I \quad \underline{Z}_k = \underline{Z}_I$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_I} = \frac{S_n \cdot 100\%}{(u_R + j u_x) \cdot U_{n-i}^2}$$

Bestimmung von \underline{Z}_q im Leerlaufversuch:

Messung des Leerlaufstromes bei primärseitiger Nennspannung.

$$I_0 = \underline{U}_n \cdot \left(\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{j \cdot X_h} \right) = \underline{U}_n \cdot \frac{1}{\underline{Z}_0}$$

$$R_{Fe} = \frac{U_n^2}{V_{Fe}} \quad X_h = \frac{U_n^2}{Q_{mag}} \quad \text{mit} \quad \frac{Q_{mag}}{S_n} = \frac{I_0}{I_n}$$

(lineare Magnetisierungskennlinie)

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} = \frac{V_{Fe}}{U_n^2} - j \cdot \frac{I_0}{I_n} \cdot S_n \cdot \frac{1}{U_n^2}$$

Im π – ESB ergibt sich:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_n}{I_0} = \frac{\underline{Z}_q \cdot (\underline{Z}_q + \underline{Z}_l)}{2 \cdot \underline{Z}_q + \underline{Z}_l} \quad \text{mit } \underline{Z}_q \gg \underline{Z}_l \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{2} \cdot \underline{Z}_q$$

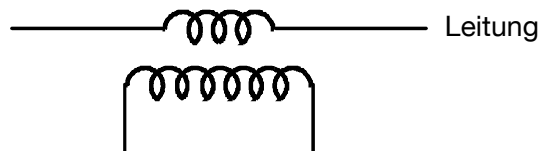
$$\frac{1}{\underline{Z}_q} = \frac{1}{2} \left(V_{Fe} - j \frac{I_0}{I_n} \cdot S_n \right) \cdot \frac{1}{U_{n-i}^2}$$

Hinweis:

Dreiwicklungstransformator



Zusatztransformator



5 Lastflussberechnung

Es wird die Stromverteilung des Netzes im ungestörten symmetrischen Betrieb berechnet (d. h., es ist nur die Betrachtung des Mitsystems erforderlich).

Ziel ist es folgende Fragen zu beantworten:

- Welches Spannungsprofil stellt sich in den Netzknoten bei einer bestimmten Belastung ein?
- Welche Leistungen fließen über die Netzelemente bei diesem Spannungsprofil?

Literatur

- Stagg, Al-Abiad: Computer Methods in Power System Analysis,
Mc Graw Hill, New York 1968
- Handschin: Elektrische Energieübertragungssysteme,
Hüthig Verlag Heidelberg, 2. Auflage. 1987

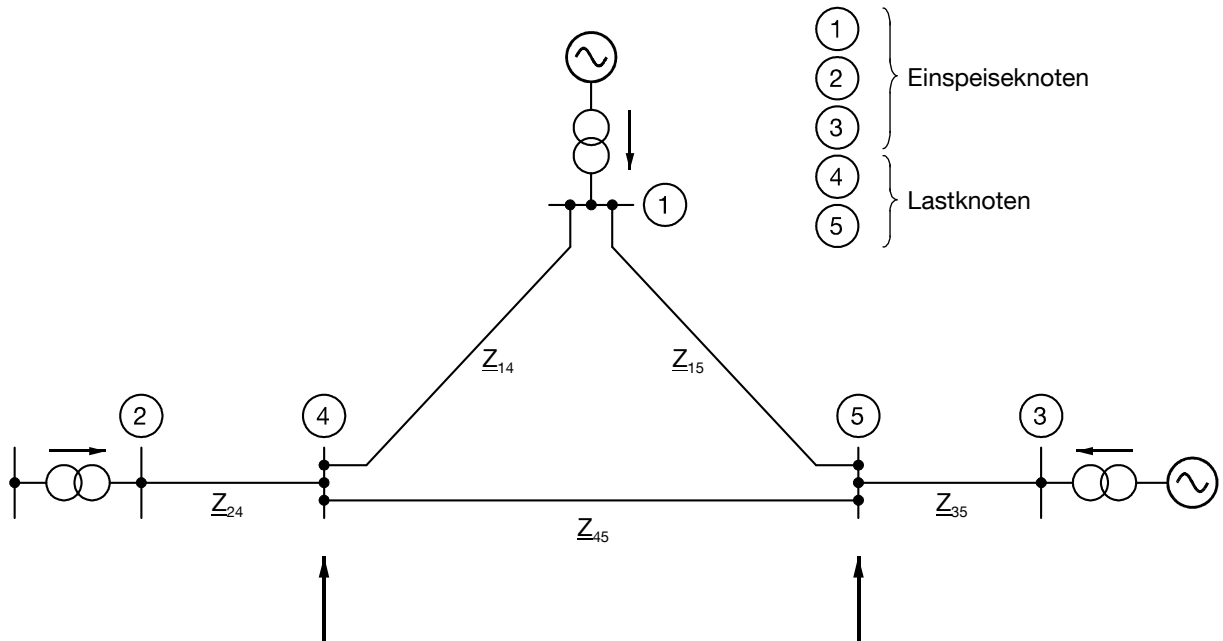
5.1 Netz und Betriebsdaten

5.1.1 Netzdaten

Sind in der Knotenadmittanzmatrix $[Y]$ enthalten.

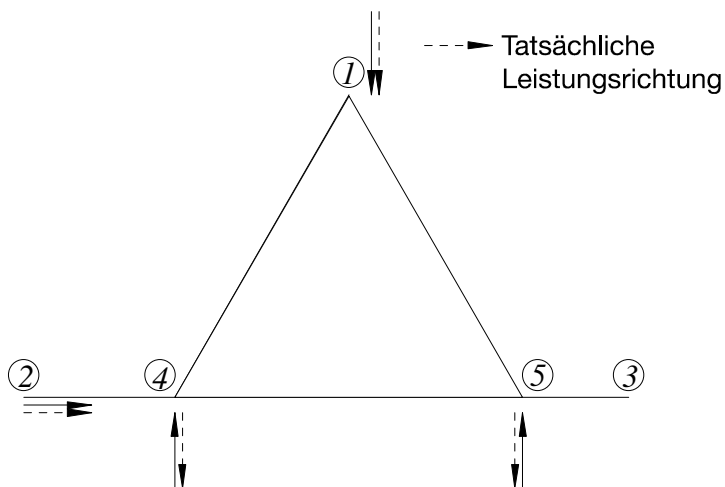
Im Unterschied zur Kurzschlussberechnung ist hier in jedem Falle die Berücksichtigung der ohmschen Widerstände (komplexe Rechnung) erforderlich. Im allgemeinen Fall fehlen die Generatorreaktanzen. Es interessieren nur die Verhältnisse bis zur Generatorklemme. Der Grund dafür, dass nur der Knoten der Sammelschiene des Generators bzw. des Kraftwerks in das Netz eingeht, ist die Tatsache, dass P , Q und U dort gemessen werden.

Beispiel:



Bemerkungen zum Beispiel:

Die Richtungen der Leistungspfeile sind jeweils in das Netz hinein gerichtet.



Knotennummerierung:

Zuerst Einspeiseknoten, dann Lastknoten (auch Knoten ohne Lasten), meist in Reihenfolge steigender Zweigabgangszahlen (wird vom Rechner geordnet).

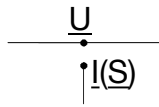
5.1.2 Betriebsdaten

Ziel der Lastflussberechnung:

Bei vorgegebenen Verbraucher- und Erzeugerleistungen (nicht Strömen!) bzw. -spannungen ist an den Knoten die Strom- bzw. Leistungsverteilung im Netz zu berechnen, mit dem Ziel, die Spannungen an den einzelnen Knoten zu ermitteln um damit die Verluste, die Leitungsbelastungen u.a. zu berechnen.

Eine besondere Rolle spielen hierbei Knoten, an denen Leistungen eingespeist oder entnommen werden.

Die Knoten im Netz sind jeweils durch zwei komplexe bzw. vier reelle Größen gekennzeichnet:

 $\underline{U} = U \cdot e^{j\delta}$ $\underline{S} = P + jQ$	<u>4 reelle Größen:</u> P Wirkleistung Q Blindleistung $ U $ Spannungsbetrag (U) $\delta = \angle(\underline{U})$ Spannungswinkel
--	---

Von diesen 4 reellen Größen sind 2 vorgegeben und 2 zu berechnen.

Bemerkung:

Angabe aller Leistungen und Spannungen jeweils zum gleichen Zeitpunkt.

5.1.3 Klassifizierung der Knoten:

Einspeiseknoten:

In den Einspeiseknoten wird angenommen, dass die Wirkleistungseinspeisung P über die Turbinenregelung und der Spannungsbetrag U über Spannungsregler (Stelltransformatoren) fest vorgegeben werden kann.

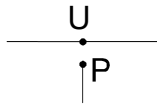
1. Einspeiseknoten mit Spannungshaltung:

Vorgabe: P, U

frei veränderlich: δ, Q

Bemerkung:

Knoten mit Spannungserhaltung werden normalerweise als Einspeiseknoten bezeichnet.



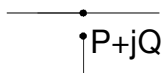
2. Es sind auch Einspeiseknoten möglich, bei denen P und Q vorgegeben werden:

Vorgabe: P, Q

frei veränderlich: U, δ

Bemerkung:

Diese Knoten werden normal den Lastknoten zugeordnet („negative Lasten“).



3. Referenzknoten („slack bus“)

Vorgabe: U, δ also U

frei veränderlich: P, Q



Der Referenzknoten übernimmt die Restleistung, d. h. er entspricht einer leistungsfähigen Einspeisung, in der weder Wirk- noch Blindleistung limitiert sind (unter Berücksichtigung der zulässigen Betriebsgrenzen).

Da es nur auf die relative Winkellage der Spannungen in den einzelnen Knoten ankommt, wird dem Referenzknoten der Winkel $\delta' = 0$ zugeordnet.

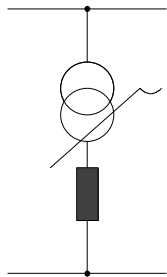
Dem Referenzknoten wird immer die Knotennummer 1 gegeben.

Bemerkung:

Fremdeinspeisungen sind wie Einspeiseknoten oder Kraftwerke zu behandeln, (P - U -Vorgabe oder P - Q -Vorgabe) oder evtl. als Referenzknoten (bei Frequenzhaltung und Ausregelung der Belastungsspitzen).

Lastknoten:

Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass der Verbraucher eine bestimmte Wirk- und Blindleistung entnimmt (Voraussetzung: Spannungsregelung am Verbraucherort).



$P+jQ$

Spannung wird am Verbraucherort konstant gehalten

Vorgabe: P, Q

frei veränderlich: U, δ also \underline{U}

Spannungsabhängigkeit der Lasten:

Normalerweise sind die vom Verbraucher aufgenommenen Wirk- und Blindleistungen in unterschiedlicher Weise von der Spannung im Anschlusspunkt abhängig (im normalen Spannungsbereich ist z. B. die Wirkleistung von Asynchronmotoren nahezu unabhängig von der Spannung; die Wirkleistung von Glühlampen ändert sich etwa mit der 1,6-ten Potenz der Spannung, die Wirkleistung von Elektrowärmegeräten mit der 2. Potenz).

Die Spannungsabhängigkeit der Last kann in einem Spannungsbereich von etwa 80 % bis 120 % der Nennspannung durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\text{Wirkleistung: } P = P_n \cdot \left(\frac{U}{U_n} \right)^p \qquad \text{Blindleistung: } Q = Q_n \cdot \left(\frac{U}{U_n} \right)^q$$

n = Index für Werte im Normalbetrieb

p = Spannungsexponent der Wirkleistung

q = Spannungsexponent der Blindleistung

Für die Lastflussberechnung wird i.a. der Exponent 0 verwendet:

$p = q = 0$ Lastnachbildung durch konstante Scheinleistung.

($p = q = 2 \rightarrow$ Lastnachbildung durch konstante Impedanz)

(Im Allgemeinen liegen die Werte von p und q je nach Netzkonfiguration in den folgenden Wertebereichen $p = 0,1 \dots 1,4$; $q = 1,5 \dots 3,2$; s. Funk, Elektrizitätswirtschaft 68 (1969))

Im Folgenden wird stets zugrunde gelegt: $p = q = 0$

Zusammenfassung und Klassifizierung der Knoten anhand des obigen Beispiels:

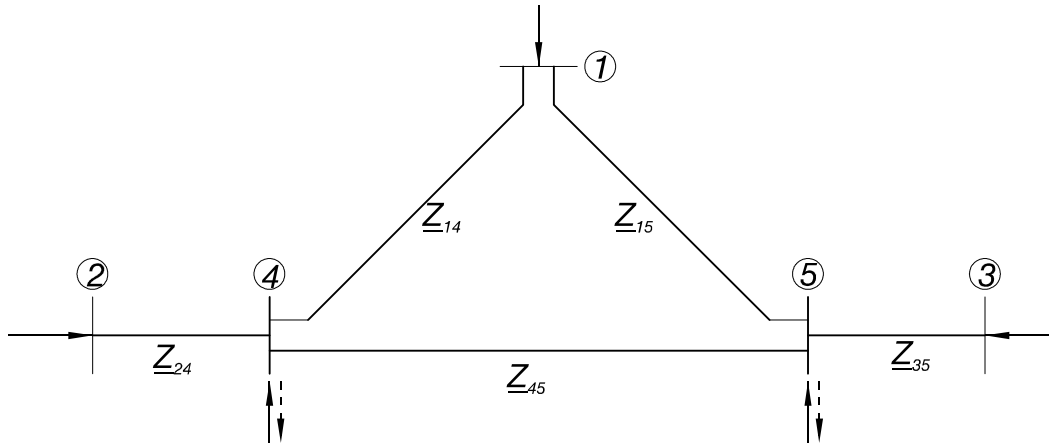
		Knoten	P	Q	U	δ
	1	Einspeisungsknoten (Referenzknoten, „slack bus“)	zu berechnen	zu berechnen	z.B. $110/\sqrt{3}$ kV	0
$P-U$ Vorgabe	2	Einspeisungsknoten (Fremdeinspeisung)	+	zu berechnen	z.B. $110/\sqrt{3}$ kV	zu berechnen
	3	Einspeisungsknoten (Kraftwerk)	+	zu berechnen	z.B. $110/\sqrt{3}$ kV	zu berechnen
$P-Q$ Vorgabe	4	Lastknoten	–	induktiv: –	zu berechnen	zu berechnen
	5	Lastknoten	–	kapazitiv: +	zu berechnen	zu berechnen

P ist positiv bei einer Einspeisung ins Netz,

Q ist ebenfalls positiv bei einer Einspeisung ins Netz.

(Kondensator → positiv, Drossel → negativ)

5.2 Knotengleichungen



$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{Z_{14}} + \frac{1}{Z_{15}} & 0 & 0 & -\frac{1}{Z_{14}} & -\frac{1}{Z_{15}} \\
 0 & \frac{1}{Z_{24}} & 0 & -\frac{1}{Z_{24}} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{Z_{35}} & 0 & -\frac{1}{Z_{35}} \\
 -\frac{1}{Z_{14}} & -\frac{1}{Z_{24}} & 0 & \left(\frac{1}{Z_{24}} + \frac{1}{Z_{14}} + \frac{1}{Z_{45}} \right) & -\frac{1}{Z_{45}} \\
 -\frac{1}{Z_{15}} & 0 & -\frac{1}{Z_{35}} & -\frac{1}{Z_{45}} & \left(\frac{1}{Z_{35}} + \frac{1}{Z_{15}} + \frac{1}{Z_{45}} \right)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \underline{U}_1 \\
 \underline{U}_2 \\
 \underline{U}_3 \\
 \underline{U}_4 \\
 \underline{U}_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 I_1 \\
 I_2 \\
 I_3 \\
 I_4 \\
 I_5
 \end{bmatrix}$$

Unterteilung der Knoten in Knoten mit

- vorgegebenen und konstanten Spannungen \underline{U}
→ Kennzeichnung durch Index c
- unbekannten Spannungen \underline{U}
→ Kennzeichnung durch Index u

$$\begin{bmatrix}
 [\underline{Y}_{cc}] & [\underline{Y}_{cu}] \\
 [\underline{Y}_{uc}] & [\underline{Y}_{uu}]
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 [\underline{U}_c] \\
 [\underline{U}_u]
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 [\underline{I}_c] \\
 [\underline{I}_u]
 \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung der Knotenspannungen $[\underline{U}_u]$ scheidet die Knotengleichung für den Referenzknoten aus; damit verbleibt:

$$[\underline{Y}_{uc}] \cdot [\underline{U}_c] + [\underline{Y}_{uu}] \cdot [\underline{U}_u] = [\underline{I}_u]$$

Im Beispiel:

$$\begin{array}{cc}
 \text{[Ycc]} & \text{[Ycu]} \\
 \left[\begin{array}{cc|cc}
 \frac{1}{Z_{14}} + \frac{1}{Z_{15}} & 0 & 0 & -\frac{1}{Z_{14}} \\
 0 & \frac{1}{Z_{24}} & 0 & -\frac{1}{Z_{24}} \\
 0 & 0 & \frac{1}{Z_{35}} & 0 \\
 -\frac{1}{Z_{14}} & -\frac{1}{Z_{24}} & 0 & \left(\frac{1}{Z_{24}} + \frac{1}{Z_{14}} + \frac{1}{Z_{45}} \right) \\
 -\frac{1}{Z_{15}} & 0 & -\frac{1}{Z_{35}} & -\frac{1}{Z_{45}} \\
 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc|cc}
 & & & -\frac{1}{Z_{15}} \\
 & & & 0 \\
 & & & -\frac{1}{Z_{35}} \\
 & & & -\frac{1}{Z_{45}} \\
 & & & \left(\frac{1}{Z_{35}} + \frac{1}{Z_{15}} + \frac{1}{Z_{45}} \right) \\
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix}$$

[Yuc]
[Yuu]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{Z_{14}} \\ -\frac{1}{Z_{15}} \end{bmatrix} \cdot \underline{U}_1 + [Y_{uu}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix}$$

Hinweis auf weitere Unterteilung von $[Y_{uu}]$

$$[Y_{uu}] = \begin{bmatrix} [Y_{GG}] & [Y_{LG}] \\ [Y_{LG}] & [Y_{LL}] \end{bmatrix}$$

Index G: Einspeiseknoten
 Index L: Lastknoten

Tatsächlich vorgegeben sind in Normalfall die Leistungen, nicht unmittelbar die Ströme.

Die rechte Seite $[I_u]$ hängt von den Spannungen $[U_u]$ ab:

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= 3 \cdot I_{konj} \cdot \underline{U} & \underline{I} &= I \cdot e^{j\varphi_I} \\
 &= 3 \cdot I \cdot e^{-j\varphi_I} \cdot U \cdot e^{+j\varphi_U} & \underline{U} &= U \cdot e^{j\varphi_U}
 \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot I \cdot U \cdot e^{j\varphi} \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$= 3 \cdot I \cdot U \cdot \cos \varphi + j \cdot 3 \cdot I \cdot U \cdot \sin \varphi$$

$$= \quad P \quad + \quad jQ$$

Ebenso ist:

$$3 \cdot \underline{I} \cdot \underline{U}_{konj} = P - jQ$$

also

$$\underline{I} = \frac{P - jQ}{3 \cdot \underline{U}_{konj}}$$

i -te Zeile des Gleichungssystems zur Lastflussberechnung:

$$\underline{Y}_{i1} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2} \cdot \underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{in} \cdot \underline{U}_n = \frac{P_i - jQ_i}{3 \cdot \underline{U}_{ikonj}}$$

Multiplikation mit $3 \cdot \underline{U}_{ikonj}$

$$3 \cdot \underline{U}_{ikonj} \cdot \sum_{k=1}^n \underline{Y}_{ik} \cdot \underline{U}_k = P_i - jQ_i$$

Darstellung der Knotengleichung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{U}_i = U_{wi} + jU_{bi}$$

$$\underline{Y}_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$$

$$3 \cdot (U_{wi} - jU_{bi}) \cdot \sum_{k=1}^n (G_{ik} + jB_{ik})(U_{wk} + jU_{bk}) = P_i - jQ_i$$

Trennung nach Real- und Imaginärteil:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n \{U_{wi} \cdot (U_{wk} \cdot G_{ik} - U_{bk} \cdot B_{ik}) + U_{bi} \cdot (U_{bk} \cdot G_{ik} + U_{wk} \cdot B_{ik})\} = P_i$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n \{U_{bi} \cdot (U_{wk} \cdot G_{ik} - U_{bk} \cdot B_{ik}) - U_{wi} \cdot (U_{bk} \cdot G_{ik} + U_{wk} \cdot B_{ik})\} = Q_i$$

Darstellung der Knotengleichung in Polarkoordinaten:

$$\underline{U}_i = U_i \cdot e^{j\delta_i}$$

$$\underline{Y}_{ik} = Y_{ik} \cdot e^{j\Theta_{ik}}$$

$$3 \cdot U_i \cdot e^{-j\delta_i} \cdot \sum_{k=1}^n Y_{ik} \cdot e^{j\Theta_{ik}} \cdot U_k \cdot e^{j\delta_k} = P_i - jQ_i$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n U_i \cdot U_k \cdot Y_{ik} \cdot e^{j(\Theta_{ik} + \delta_k - \delta_i)} = P_i - jQ_i$$

Trennung nach Real- und Imaginärteil:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n U_i \cdot U_k \cdot Y_{ik} \cdot \cos(\Theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = P_i$$

$$-3 \cdot \sum_{k=1}^n U_i \cdot U_k \cdot Y_{ik} \cdot \sin(\Theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = Q_i$$

In jedem Fall erhält man ein System von quadratischen Gleichungen, dieses System ist explizit nicht lösbar.

→ Näherungsverfahren (Iterationsverfahren)

Übersicht:

- Stromiteration
- Newton-Raphson-Verfahren-Verfahren
- Schnelle entkoppelte Lastflussrechnung

5.3 Stromiteration

Dieses Verfahren (Zeileniteration) entspricht dem Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Ausgangspunkt: Schätzung von $[\underline{U}_u] \rightarrow [\underline{U}_u^{(0)}]$

Zur Erklärung ein Beispiel:

1. Zeile \rightarrow slack bus = bekannt: \underline{U}_1

2. Zeile (h -ter Schritt):

(Zur Erklärung nur Lastknoten und Einspeiseknoten mit P-Q-Vorgabe)

$$\underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2^{(h)} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{U}_3^{(h-1)} + \dots + \underline{Y}_{2n} \cdot \underline{U}_n^{(h-1)} = \begin{cases} \frac{P_2 - jQ_2}{3 \cdot \underline{U}_{2konj}^{(h)}} & \text{quadratische Variante A} \\ \frac{P_2 - jQ_2}{3 \cdot \underline{U}_{2konj}^{(h-1)}} & \text{lineare Variante B} \end{cases}$$

\underline{U}_1 bekannt

$\underline{U}_2^{(h)}$ unbekannt

$\underline{U}_3^{(h-1)} \dots \underline{U}_n^{(h-1)}$ bekannt (aus vorangegangenen $h-1$ -ten Schritt)

\rightarrow Auflösung nach $\underline{U}_2^{(h)}$

Weiter mit dem 3. Schritt:

$$\underline{Y}_{31} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{32} \cdot \underline{U}_2^{(h)} + \underline{Y}_{33} \cdot \underline{U}_3^{(h)} + \dots + \underline{Y}_{3n} \cdot \underline{U}_n^{(h-1)} = \begin{cases} \frac{P_3 - jQ_3}{3 \cdot \underline{U}_{3konj}^{(h)}} \\ \frac{P_3 - jQ_3}{3 \cdot \underline{U}_{3konj}^{(h-1)}} \end{cases}$$

$\underline{U}_1, \underline{U}_2^{(h)}$ bekannt

$\underline{U}_3^{(h)}$ unbekannt

$\underline{U}_4^{(h-1)} \dots \underline{U}_n^{(h-1)}$ bekannt (aus vorangegangenen $h-1$ -ten Schritt)

\rightarrow Auflösung nach $\underline{U}_3^{(h)}$

\rightarrow usw. bis $\underline{U}_n^{(h)}$

Verallgemeinerung:

$$\text{i-te Zeile: } \sum_{k=1}^n Y_{ik} \cdot \underline{U}_k = \frac{P_i - jQ_i}{3 \cdot \underline{U}_{ikonj}}$$

Herausnehmen des Diagonalgliedes:

$$\underline{Y}_{ii} \cdot \underline{U}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot \underline{U}_k = \frac{P_i - jQ_i}{3 \cdot \underline{U}_{ikonj}}$$

Aufgelöst nach \underline{U}_i :

$$\underline{U}_i = \frac{\frac{P_i - jQ_i}{3 \cdot \underline{U}_{ikonj}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ik} \cdot \underline{U}_k}{\underline{Y}_{ii}}$$

$$\underline{U}_i^{(h)} = \frac{\frac{P_i - jQ_i}{3 \cdot \underline{U}_{ikonj}^{(h-1)}} - \sum_{k=1}^{i-1} Y_{ik} \cdot \underline{U}_k^{(h)} - \sum_{k=i+1}^n Y_{ik} \cdot \underline{U}_k^{(h-1)}}{\underline{Y}_{ii}}$$

Variante B (linear)

Damit sind für jeden Knoten mit P-Q-Vorgabe jeweils 2 Gleichungen gegeben um

$\underline{U}_{wi}^{(h)}$ und $\underline{U}_{bi}^{(h)}$ zu berechnen.

Für den Fall von Einspeisknoten mit P-U-Vorgabe:

$$U_i^2 = U_{wi}^2 + U_{bi}^2 = \text{const}$$

Damit sind für jeden Knoten mit P-U-Vorgabe jeweils 3 Gleichungen gegeben um

$\underline{U}_{wi}^{(h)}$, $\underline{U}_{bi}^{(h)}$ und $Q_i^{(h)}$ zu berechnen.

Nach der numerischen (iterativen) Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems stehen folgende Informationen zur Verfügung:

Referenzknoten:

Wirk- und Blindleistungseinspeisungen unter Berücksichtigung der spannungsabhängigen Netzverluste

Lastknoten:

Spannungen (Betrag und Phase bzw. Real- und Imaginärteil)

Einspeisungen:

Winkel der komplexen Spannung und Blindleistungseinspeisung, um den vorgegebenen Spannungsbetrag einhalten zu können.

Das Netz ist damit vollständig beschrieben. Wichtig ist weiterhin die Berechnung der Leistungsflüsse zwischen den Knoten i und j :

$$\underline{S}_{ij}^* = P_{ij} - j \cdot Q_{ij} = \underline{U}_i^* \cdot (\underline{U}_i - \underline{U}_j) \cdot \underline{Y}_{ij} \quad (= U_i^2 \cdot \underline{Y}_{i0}) \quad \underline{Y}_{i0} : \text{Querkomponente gg. Erde}$$

bzw.

$$\underline{S}_{ji}^* = P_{ji} - j \cdot Q_{ji} = \underline{U}_j^* \cdot (\underline{U}_j - \underline{U}_i) \cdot \underline{Y}_{ji} \quad (= U_j^2 \cdot \underline{Y}_{j0}) \quad \underline{Y}_{j0} : \text{Querkomponente gg. Erde}$$

Hinweis auf Beschleunigungsfaktoren:

$$U_{wi \text{ beschl.}}^{(h)} = U_{wi}^{(h-1)} + \alpha \cdot (U_{wi}^{(h)} - U_{wi}^{(h-1)})$$

$$U_{bi \text{ beschl.}}^{(h)} = U_{bi}^{(h-1)} + \beta \cdot (U_{bi}^{(h)} - U_{bi}^{(h-1)})$$

$$\alpha, \beta = 1 \rightarrow \text{keine Beschleunigung} \rightarrow U_i^{(h)}$$

$$\alpha, \beta = 0 \rightarrow \text{keine Veränderung} \rightarrow U_i^{(h)} = U_i^{(h-1)}$$

Vorteile:

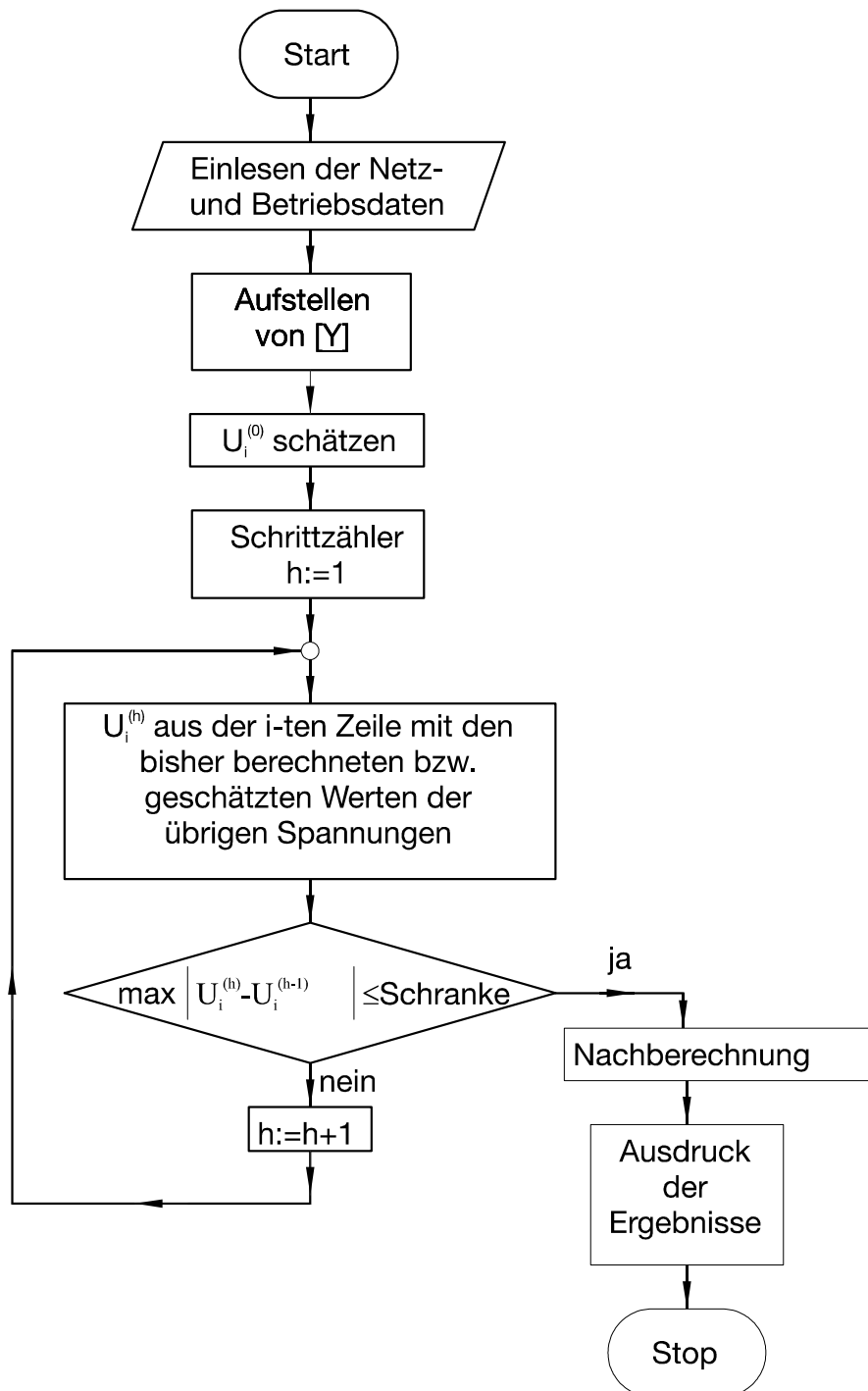
- Sichere Konvergenz, auch bei gestörten Netzverhältnissen
- Anwendung auch bei transienten Berechnungsverfahren

Nachteile:

- Langsame Konvergenz, insbesondere in der Nähe der Lösung
- Relativ lange Rechenzeiten

Verfahren wird meist bei kritischen Lastflüssen eingesetzt, erst wenn andere / schnellere Verfahren nicht konvergieren.

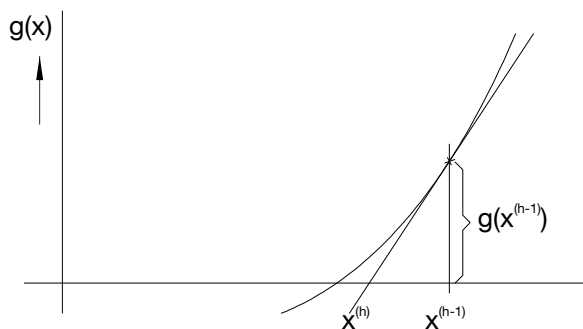
Lastflussberechnung: Zeileniteration (Gauß-Seidel-Verfahren)



5.4 Newton-Raphson-Verfahren

Das nichtlineare Gleichungssystem, das der Lastflussberechnung zugrunde liegt, kann iterativ auch mithilfe des Newton-Raphson-Verfahrens gelöst werden.

Bekanntlich lässt sich mithilfe des Newton'schen Iterationsverfahren für die Lösung der Funktion $g(x) = 0$ aus einem Näherungswert $x^{(h-1)}$ ein besserer Näherungswert $x^{(h)}$ finden, wenn man die Kurve $g(x)$ durch ihre Tangente im gegebenen Punkt $x^{(h-1)}$ ersetzt:



Allgemein gilt für eine nichtlineare Gleichung $g(x) = 0$ mit einer Unbekannten:

$$g(x) = g(x^0) + \frac{1}{1!} \frac{dg(x^0)}{dx} (x - x^0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2g(x^0)}{dx^2} (x - x^0)^2 + \dots = 0$$

Achtung: hochgestellter Index 0: Iterationsschritt

Bricht man die Reihe nach dem Term 1. Ordnung ab, so gilt allgemein:

$$\frac{g(x^{(h-1)})}{x^{(h-1)} - x^{(h)}} = \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^{(h-1)}$$

Umgeformt:

$$g(x^{(h-1)}) + \underbrace{(x^{(h)} - x^{(h-1)})}_{\Delta x} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^{(h-1)} = 0$$

Aufgelöst nach x^h ergibt sich:

$$x^h = x^{h-1} - \frac{g(x^{h-1})}{(dg(x)/dx)^{h-1}}$$

Da die Terme höherer Ordnung vernachlässigt sind, ergibt sich im ersten Schritt $h=1$ nicht die exakte Lösung x , sondern x^h . Die Berechnung ist so lange zu wiederholen, bis der Konvergenztest

$$\left| x^h - x^{h-1} \right| = \left| \frac{g(x^{h-1})}{(dg(x)/dx)^{h-1}} \right| < \varepsilon$$

mit der vorgegebenen Genauigkeitsschranke ε erfüllt ist.

Im folgenden Beispiel wird die Verallgemeinerung des Iterationsverfahrens für den Fall von n Gleichungen mit zwei Unbekannten erläutert:

$$g_1(x, y) = a$$

$$g_2(x, y) = b$$

Schätzwert:

$$x^{(0)}, y^{(0)}$$

Δx , Δy seien die unbekannten Differenzen zwischen den Schätzwerten und der Lösung, dann gilt:

$$g_1(x^{(0)} + \Delta x, y^{(0)} + \Delta y) = a$$

$$g_2(x^{(0)} + \Delta x, y^{(0)} + \Delta y) = b$$

Jede dieser Gleichungen kann in eine Taylor-Reihe entwickelt werden.

Wird diese Reihe nach den linearen Gliedern abgebrochen, dann erhält man (Näherung!):

$$g_1(x^{(0)}, y^{(0)}) + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_0 + \Delta y \cdot \left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_0 = a$$

$$g_2(x^{(0)}, y^{(0)}) + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_0 + \Delta y \cdot \left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_0 = b$$

$$x^2 - 2y = 4$$

$$x + y = -1$$

$$x^{(0)} = 1; \quad y^{(0)} = -2$$

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_0 = 2; \quad \left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_0 = -2$$

$$\left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_0 = 1; \quad \left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_0 = 1$$

Nach Umformung in Matrizenschreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial g_2}{\partial y} \right|_0 \end{bmatrix}}_{\text{Jaccobi-Matrix}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - g_1(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ b - g_2(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{bmatrix}$$

$$5 + \Delta x \cdot 2 - \Delta y \cdot 2 = 4$$

$$-1 + \Delta x + \Delta y = -1$$

$$\Delta x = -\Delta y$$

$$1 + 4\Delta x = 0$$

$$\Delta x = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta y = +\frac{1}{4}$$

Verbesserte Werte:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta y$$

$$x^{(1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{exakt: } \sqrt{3} - 1)$$

$$y^{(1)} = -2 + \frac{1}{4} = -1\frac{3}{4} \quad (\text{exakt: } -\sqrt{3})$$

Anwendung des Verfahrens auf die Lastflussberechnung (System von nicht linearen Gleichungen):

i-te Zeile des Systems der Knotengleichungen:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n \{ U_{wi} \cdot (U_{wk} \cdot G_{ik} - U_{bk} \cdot B_{ik}) + U_{bi} \cdot (U_{bk} \cdot G_{ik} + U_{wk} \cdot B_{ik}) \} = P_i$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n \{ U_{bi} \cdot (U_{wk} \cdot G_{ik} - U_{bk} \cdot B_{ik}) + U_{wi} \cdot (U_{bk} \cdot G_{ik} + U_{wk} \cdot B_{ik}) \} = Q_i$$

(Beide Gleichungen werden im Flussplan als Gl. A bezeichnet.)

Gesucht: U_{wi} , U_{bi}

mit Ausnahme des Referenzknotens

Rechte Seite P_i , Q_i

bekannt und vorgegeben

(im Falle P-Q-Vorgabe)

Sollwerte!

Lösung eines Systems mit $2 \cdot (n - 1)$ Gleichungen:

Hinweis: Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial U_{w2}} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial U_{wn}} & \frac{\partial P_2}{\partial U_{b2}} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial U_{bn}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial U_{w2}} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial U_{wn}} & \frac{\partial P_n}{\partial U_{b2}} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial U_{bn}} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial U_{w2}} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial U_{wn}} & \frac{\partial Q_2}{\partial U_{b2}} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial U_{bn}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial U_{w2}} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial U_{wn}} & \frac{\partial Q_n}{\partial U_{b2}} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial U_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{w2} \\ \vdots \\ \Delta U_{wn} \\ \Delta U_{b2} \\ \vdots \\ \Delta U_{bn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial P}{\partial U_w} \right] & \left[\frac{\partial P}{\partial U_b} \right] \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial U_w} \right] & \left[\frac{\partial Q}{\partial U_b} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta U_w] \\ [\Delta U_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta P] \\ [\Delta Q] \end{bmatrix}$$

Elemente der Jacobi-Matrix:

Diagonalelement z. B. von $\left[\frac{\partial P}{\partial U_w} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\{ 3 \cdot \sum_{k=1}^n \dots \right\}}{\partial U_{wi}} &= 3 \cdot \underbrace{\left\{ U_{wi} \cdot G_{ii} - \cancel{U_{bi} \cdot B_{ii}} + U_{wi} \cdot G_{ii} + \cancel{U_{bi} \cdot B_{ii}} \right\}}_{k=i} + 3 \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n U_{wk} \cdot G_{ik} - U_{bk} \cdot B_{ik} \\ &= 3 \cdot \left\{ 2U_{wi} \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (U_{wk} \cdot G_{ik} - U_{bk} \cdot B_{ik}) \right\} \end{aligned}$$

Off-Diagonalelement:

$$\frac{\partial \left\{ 3 \cdot \sum_{k=1}^n \dots \right\}}{\partial U_{wk}} = 3 \cdot \underbrace{\left\{ U_{wi} \cdot G_{ik} + U_{bi} \cdot B_{ik} \right\}}_{k \neq i}, \quad k = 2, 3 \dots n$$

Die Elemente der Jacobi-Matrix ändern sich mit jedem Rechenschritt.

Bei P - U -Vorgabe \rightarrow statt $Q_i \rightarrow U_i^2$ (Spannungsbetrag) $(U_i^2 = U_{wi}^2 + U_{bi}^2)$

damit $\frac{\partial U^2}{\partial U_w}$ statt $\frac{\partial Q}{\partial U_w}$ und $\frac{\partial U^2}{\partial U_b}$ statt $\frac{\partial Q}{\partial U_b}$

und auf der rechten Seite ΔU^2 statt ΔQ_i

Vorteile:

Gute Konvergenz in der Nähe der Lösung

Dann wenige Iterationsschritte

Nachteile:

Anzahl der Iterationsschritte abhängig von Startwerten

Schlechte Konvergenz bei großem Abstand zur Lösung

Schlecht gewählte Startwerte können zu Nichtkonvergenz oder u.U. zu nicht physikalischen Lösungen führen

Häufig zur Lastfluss-Rechnung verwendet, bei kritischen Netzen bzw. Konvergenzproblemen Umschalten auf Zeileniteration.

Rechenablauf (Erklärung anhand des Flussplanes):

Zuerst werden die Anfangswerte der Spannungen $U_{wi}^{(0)}$ und $U_{bi}^{(0)}$ geschätzt und damit die Istwerte der Wirk- und Blindleistungen nach Gl. A berechnet. Diese Istwerte unterscheiden sich von den Sollwerten, die Differenz zwischen Ist- und Sollwerten wird mit ΔP bzw. ΔQ bezeichnet:

$$\Delta P_i^{(h)} = P_{isoll} - P_i^{(h)}$$

$$\Delta Q_i^{(h)} = Q_{isoll} - Q_i^{(h)}$$

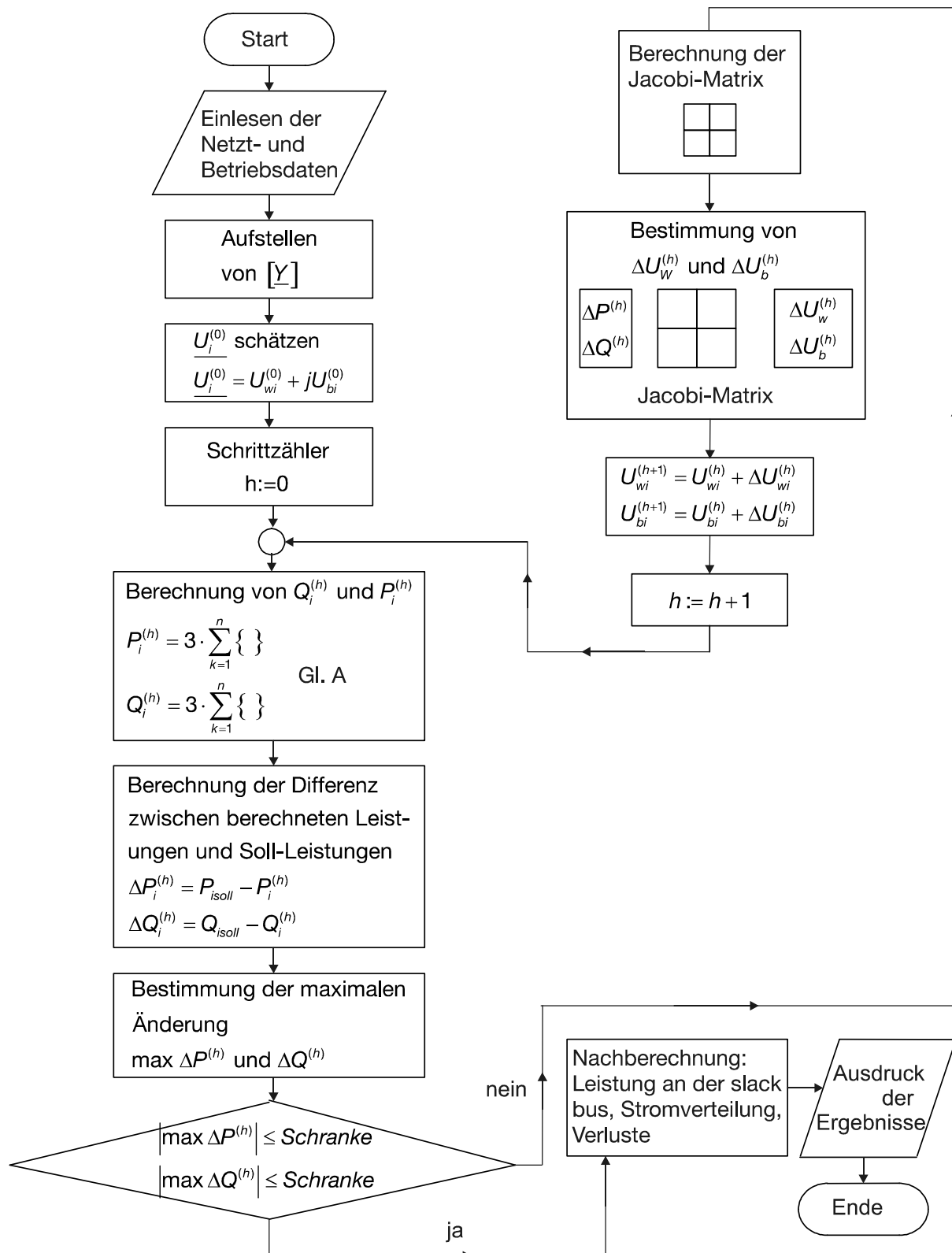
Dann werden die Elemente der Jacobimatrix berechnet und schließlich das resultierende lineare Gleichungssystem gelöst. Die verbesserten Spannungswerte ergeben sich dann aus:

$$\Delta U_{wi}^{(h+1)} = U_{wi}^{(h)} + \Delta U_{wi}^{(h)} ;$$

$$\Delta U_{bi}^{(h+1)} = U_{bi}^{(h)} + \Delta U_{bi}^{(h)}$$

Dieser Rechenprozess wird solange wiederholt, bis die Differenzen $\Delta P_i^{(h)}$ und $\Delta Q_i^{(h)}$ für alle Knoten unterhalb bestimmter Toleranzen liegen.

Lastflussberechnung Newton-Raphson-Verfahren



5.5 Schnelle, entkoppelte Lastflussberechnung

Grundlage hierzu ist das Newton-Raphson-Verfahren.

Betrachtet wird die i -te Zeile des Systems der Knotengleichungen in Polarkoordinaten:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^n U_i \cdot U_k \cdot Y_{ik} \cdot \cos(\Theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = P_i$$

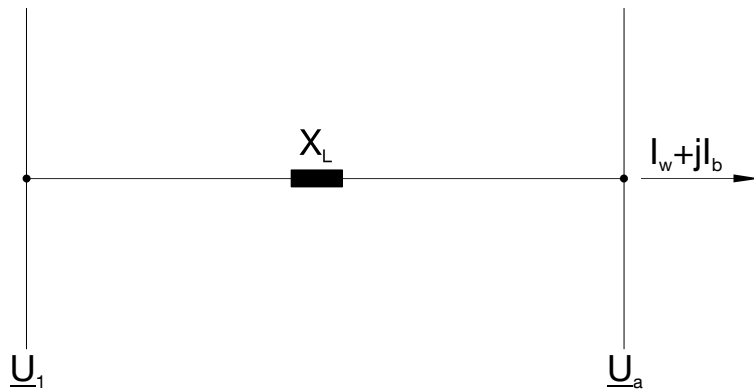
$$-3 \cdot \sum_{k=1}^n U_i \cdot U_k \cdot Y_{ik} \cdot \sin(\Theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = Q_i$$

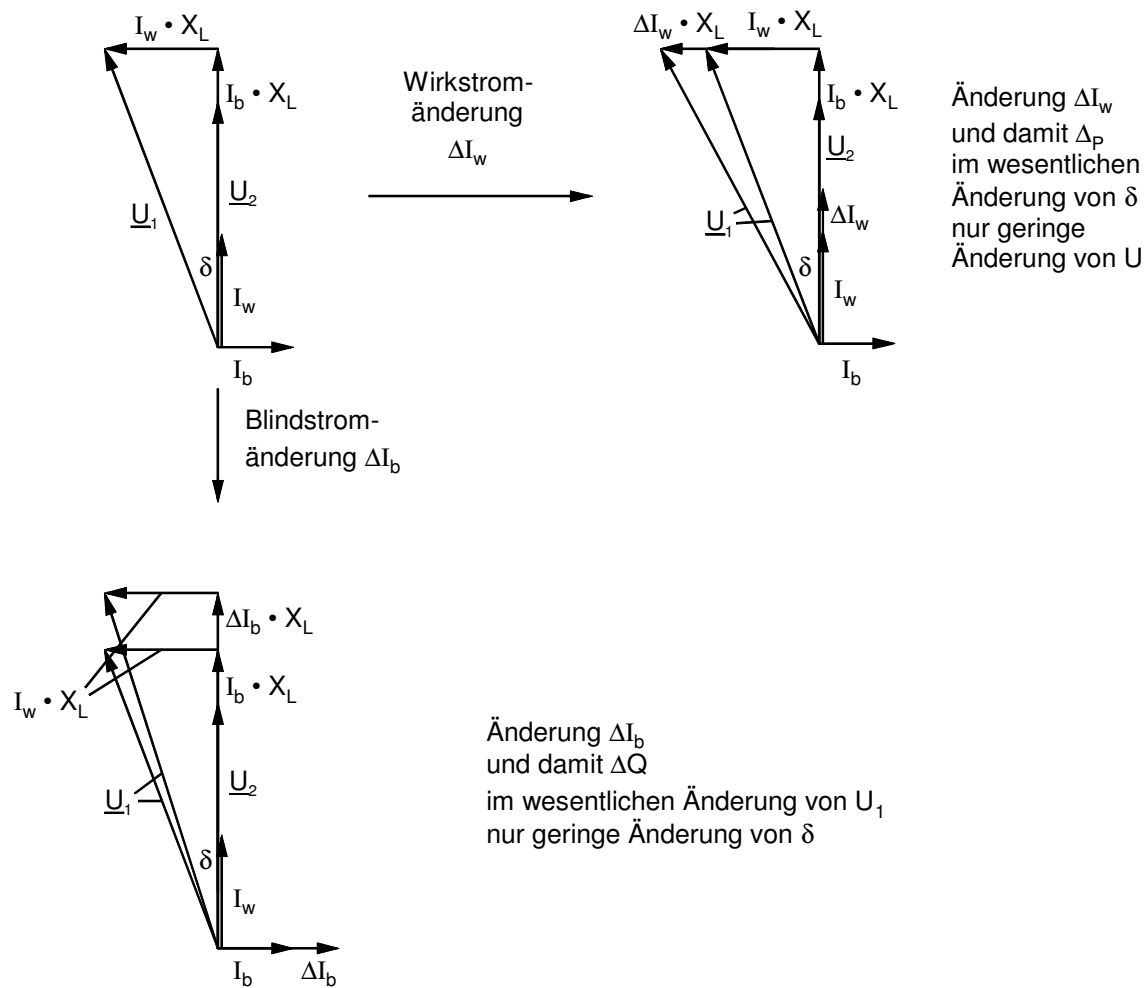
Damit ergibt sich für das Gleichungssystem mit der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial P}{\partial \delta} \right] & \left[\frac{\partial P}{\partial U} \right] \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial \delta} \right] & \left[\frac{\partial Q}{\partial U} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta \delta] \\ [\Delta U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta P] \\ [\Delta Q] \end{bmatrix}$$

Begründung der folgenden Näherung:

Vereinfachte Betrachtung einer Übertragung el. Energie über eine Leitung unter Vernachlässigung des ohmschen Widerstandes.



Leitungsdiagramm:


Wirkleistungsänderungen führen im Wesentlichen zu einer Änderung von δ ;

Blindleistungsänderungen bewirken im Wesentlichen eine Änderung von U

Damit lässt sich folgende Näherung einführen („schnelle, entkoppelte Lastflussberechnung“):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & [0] \\ [0] & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta \delta] \\ [\Delta U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta P] \\ [\Delta Q] \end{bmatrix}$$

Ausmultipliziert:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \delta} \right] \cdot [\Delta \delta] = [\Delta P] \quad \text{P-Modell}$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial U} \right] \cdot [\Delta U] = [\Delta Q] \quad \text{Q-Modell}$$

5.6 Nachberechnung

Die verschiedenen Iterationsverfahren liefern unmittelbar nur die gesuchten Potenziale des Vektors $[U_0]$. Im Allgemeinen interessieren aber auch noch andere Größen; diese müssen in einer „Nachberechnung“ aus den Potenzialen ermittelt werden. Die „Nachberechnung“ ist für alle Iterationsverfahren gleich.

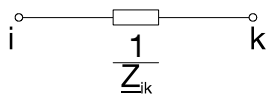
Ströme:

Abnahme in den Verbraucher-Knotenpunkten,

Einspeisung in den Kraftwerksknotenpunkten:

$$[I] = [Y][U]$$

in den Zweigen:



$$I_{ik} = (\underline{U}_i - \underline{U}_k) \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{ik}}$$

Leistungen:

Istwerte: $\underline{S}_{ist} = 3 \cdot \underline{I}_{konj} \cdot \underline{U}$ (weichen vom Sollwert ab)

Vor allem Ermittlung der Leistung am slack bus:

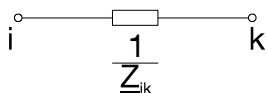
$$\underline{S}_{1ist} = 3 \cdot \underline{I}_{1konj} \cdot \underline{U}_1 = \dots$$

Verluste:

Bestimmungsmöglichkeiten:

a) aus den Spannungen:

$$V_{ik} = 3 |\underline{U}_i - \underline{U}_k|^2 \cdot \Re \left(\frac{1}{\underline{Z}_{ik}} \right)$$



b) über Leistungsbilanz

(Differenz zwischen eingespeister und entnommener Leistung)

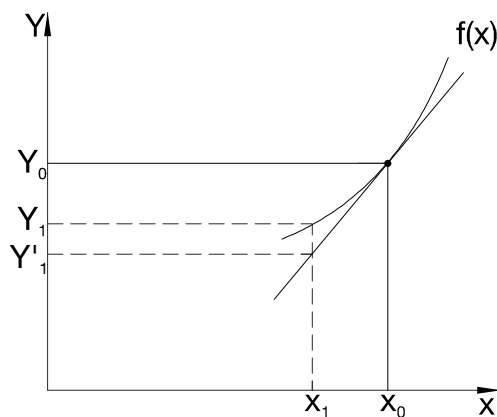
(Achtung: Ungenauigkeit der Rechnung kann Fehler kumulieren)

5.7 Netzzustandskorrektur (Empfindlichkeitsanalyse, Sensitivitätsanalyse)

Wird festgestellt, dass der Netzzustand nicht zufriedenstellend ist (z. B. Zweigströme, Spannungsfälle oder Verluste zu hoch)

→ **Korrektur des Netzzustandes**

Bei der Auswahl der Maßnahmen kann der Rechner über die Empfindlichkeitsanalyse Entscheidungshilfen geben (Echtzeitproblem → kurze Rechenzeit erforderlich, exakte Lösung nicht unbedingt notwendig, dafür schnelle Lösung)



Der Ausgangszustand ist durch x_0 und y_0 festgelegt. y_0 sei unerwünscht (z. B. ein bestimmter Zweigstrom). Durch Verändern der unabhängigen Variablen x von x_0 auf x_1 → Verbesserung $y_0 \rightarrow y_1$.

Linearisierung des Problems ($y_0 \rightarrow y_1'$) (Vereinfachung auf Kosten der Genauigkeit)

$$\Delta x = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_0^{-1} \cdot \Delta y$$

↑ Eingangsgröße Änderung des Netzzustandes
 (Änderung der komplexen Knotenspannungen)

In der Praxis:

$x \rightarrow$ Vielzahl der Größen, die den Zustand bestimmen (z. B. Netzaufbau, Leistungen, Transformatorübersetzungsverhältnis.)

$y \rightarrow$ Netzzustand, bestimmt durch die komplexen Knotenspannungen

Der Zusammenhang zwischen Eingangsgrößen und Netzzustand ist durch Netzwerks- bzw. Leistungsgleichungen gegeben:

$f(x) \rightarrow$ Nichtlineares Gleichungssystem, wie bei Lastflussrechnung

Da bei der Lastflussrechnung dieses Gleichungssystem iterativ gelöst wird, liegt es nahe, eine Empfindlichkeitsanalyse mithilfe eines Schrittes des entsprechenden Iterationsverfahrens durchzuführen.

Newton-Raphson-Verfahren

\rightarrow Jacobi-Matrix ist ein lineares Modell der Beziehungen zwischen Knotenleistungen und Spannungsbeträgen ($\rightarrow x$) und den komplexen Knotenspannungen ($\rightarrow y$)

Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_G}{\partial U_{wG}} & \frac{\partial P_G}{\partial U_{wL}} & \frac{\partial P_G}{\partial U_{bG}} & \frac{\partial P_G}{\partial U_{bL}} \\ \frac{\partial P_L}{\partial U_{wG}} & \frac{\partial P_L}{\partial U_{wL}} & \frac{\partial P_L}{\partial U_{bG}} & \frac{\partial P_L}{\partial U_{bL}} \\ \frac{\partial |U|_G^2}{\partial U_{wG}} & \frac{\partial |U|_G^2}{\partial U_{wL}} & \frac{\partial |U|_G^2}{\partial U_{bG}} & \frac{\partial |U|_G^2}{\partial U_{bL}} \\ \frac{\partial Q_L}{\partial U_{wG}} & \frac{\partial Q_L}{\partial U_{wL}} & \frac{\partial Q_L}{\partial U_{bG}} & \frac{\partial Q_L}{\partial U_{bL}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta U_w]_G \\ [\Delta U_w]_L \\ [\Delta U_b]_G \\ [\Delta U_b]_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta P]_G \\ [\Delta P]_L \\ [\Delta |U|^2]_G \\ [\Delta Q]_L \end{bmatrix}$$

Inversion, vereinfacht geschrieben:

$$\begin{bmatrix} [\Delta U_w]_{G+L} \\ [\Delta U_b]_{G+L} \end{bmatrix} = [I]^{-1} \begin{bmatrix} [\Delta P]_G \\ [\Delta P]_L \\ [\Delta |U|^2]_G \\ [\Delta Q]_L \end{bmatrix}$$

$G \rightarrow$ Anzahl der G-Knoten (P - U)

$L \rightarrow$ Anzahl der L-Knoten (P - Q)

Hieraus ergibt sich die Antwort auf die Frage \rightarrow Wie ändern sich die komplexen Knotenspannungen, wenn die Stellgrößen P_G , P_L , U_G^2 oder Q_L geändert werden?

Es müssen nicht alle Stellgrößen geändert werden → Großteil der Elemente der einspaltigen Matrix auf der rechten Seite ist Null:

$$\begin{bmatrix} [\Delta U_w]_{G+L} \\ [\Delta U_b]_{G+L} \end{bmatrix} = [I]^{-1} \begin{bmatrix} [\Delta SG]_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

S = Anzahl der Stellgrößen.

Elimination der Spalten der inversen Jacobimatrix für die nicht geänderten Stellgrößen:

$$\begin{bmatrix} [\Delta U_w]_{G+L} \\ [\Delta U_b]_{G+L} \end{bmatrix} = [I]_{2(G+L), S}^{-1} \cdot [\Delta SG]_S \quad \otimes$$

Anzahl der Zeilen
Anzahl der Spalten

Bei nur einer Stellgröße → nur eine Spalte der Jacobi-Matrix erforderlich.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SG \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erweiterung der Fragestellung:

Wie ändern sich beispielsweise die Netzverluste, Zweigströme oder Spannungsbeträge an den Verbrauchern (Betriebsgrößen) abhängig von den Stellgrößen?

Zunächst wird die Abhängigkeit dieser Betriebsgrößen von den komplexen Knotenspannungen betrachtet:

Verluste:

totales Differenzial:

$$dV = \sum_{i=1}^{G+L} \frac{\partial V}{\partial U_{wi}} \cdot dU_{wi} + \sum_{i=1}^{G+L} \frac{\partial V}{\partial U_{bi}} \cdot dU_{bi}$$

In Matrizenschreibweise und Übergang $dV \rightarrow \Delta V$ unter Verwendung von Gl. \otimes

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial V}{\partial U_w} \right]_{G+L} \\ \left[\frac{\partial V}{\partial U_b} \right]_{G+L} \end{bmatrix}^T \cdot [I]_{2(G+L),S}^{-1} \cdot [\Delta SG]_S$$

Ähnliche Zweigströme:

$$\Delta I_{Zj} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial I_{Zj}}{\partial U_w} \right]_{G+L} \\ \left[\frac{\partial I_{Zj}}{\partial U_b} \right]_{G+L} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} [\Delta U_w]_{G+L} \\ [\Delta U_b]_{G+L} \end{bmatrix}$$

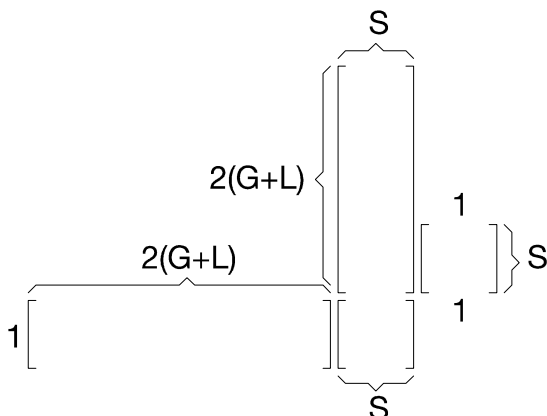
oder allgemein Betriebsgrößen = BG (zu beeinflussende Betriebsgrößen)

$$\Delta BG_j = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial BG_j}{\partial U_w} \right]_{G+L} \\ \left[\frac{\partial BG_j}{\partial U_b} \right]_{G+L} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} [\Delta U_w]_{G+L} \\ [\Delta U_b]_{G+L} \end{bmatrix}$$

Gl. \otimes eingesetzt:

$$\Delta BG_j = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial BG_j}{\partial U_w} \right]_{G+L} \\ \left[\frac{\partial BG_j}{\partial U_b} \right]_{G+L} \end{bmatrix}^T \cdot [I]_{2(G+L),S}^{-1} \cdot [\Delta SG]_S$$

Vorgehensweise:



Daraus folgt:

$$\Delta BG_j = \begin{bmatrix} SM_{j,1} \\ \vdots \\ SM_{j,k} \\ \vdots \\ SM_{j,s} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta SG_1 \\ \vdots \\ \Delta SG_k \\ \vdots \\ \Delta SG_s \end{bmatrix}$$

Bei insgesamt B Betriebsgrößen:

$$[\Delta BG]_B = [SM]_{B,S} \cdot [\Delta SG]_S \quad SM_{j,k} \text{ Empfindlichkeitsfaktoren}$$

↑
Empfindlichkeitsmatrix (sensitivity matrix)

Die Elemente $SM_{j,k}$ geben Auskunft auf die Frage:

Welche Stellgrößenänderung ist am wirkungsvollsten?

Betrachtet man den größten Wert von $SM_{j,k}$ der Zeile Nr. j der Empfindlichkeitsmatrix, so sind damit Vorzeichen und Größenordnung der Stellgrößenänderung gegeben.

6 Unsymmetrische Netzbelastung

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass sich das Drehstromsystem in einem symmetrischen Betriebszustand befindet. Deshalb konnte das Drehstromsystem durch ein einphasiges Ersatzschaltbild modelliert werden.

Netzunsymmetrien werden bedingt

- durch ungleiche Impedanzen in den Phasen L1, L2, L3 (vermieden durch entsprechenden Netzaufbau, z. B. Verdrillung)
- durch unsymmetrische Belastung (vor allem bei Kurzschlüssen)

Mit dem Übergang auf unsymmetrische Verhältnisse müssen andere mathematische Methoden verwendet werden, um ein geeignetes Modell für die Berechnung herleiten zu können. Ein Verfahren, das sich für die unsymmetrische Fehlerstromberechnung besonders gut eignet, ist die Methode der symmetrischen Komponenten.

6.1 Diagonalisierung von Matrizen (zur Vertiefung)

→ Einführung von Modalmatrizen

Aufgabe: Diagonalisierung von $[A]$ ($\triangleq [Z]$)

$$[A][X] = [Y]$$

$$[X] = [M][\bar{X}] \quad [Y] = [M][\bar{Y}]$$

$$[\bar{X}] = [M]^{-1}[X] \quad [\bar{Y}] = [M]^{-1}[Y]$$

$$[A][M][\bar{X}] = [M][\bar{Y}]$$

$$\underbrace{[M]^{-1}[A][M]}_{[\Lambda]}[\bar{X}] = [\bar{Y}]$$

$$[\Lambda] = [M]^{-1} [A] [M] \quad (1)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{Y}_1 &= \lambda_1 \cdot \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_2 &= \lambda_2 \cdot \bar{X}_2 \\ &\vdots \\ \bar{Y}_n &= \lambda_n \cdot \bar{X}_n \end{aligned}$$

Wie findet man die Matrix $[M]$?

→ Eigenwertproblem

Ein Eigenwert λ ist definiert als die Lösung von

$$[A][Z] = \lambda [Z] \quad (2)$$

$[Z]$ = zugeordneter Eigenvektor

Umformung von (1):

$$[A][M] = [M][\Lambda]$$

Es werde nur eine Spalte von $[M]$ betrachtet, nämlich die i-te Spalte:

$$[A] \begin{bmatrix} m^{(i)} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} m^{(i)} \end{bmatrix}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Gleichung (2), deshalb ist λ_i ein Eigenwert von $[A]$ mit der i-ten Spalte von $[M]$ als dem zugeordneten Eigenvektor.

Bestimmung der Eigenwerte: Gleichung (2) kann umgeformt werden:

$$([A] - \lambda [E]) \cdot [Z] = 0 ; [E] = \text{Einheitsvektor}$$

Eine nicht-triviale Lösung ($[Z] \neq 0$) des homogenen Gleichungssystems existiert nur, wenn die Determinante der charakteristischen Matrix $[A] - \lambda [E] = 0$.

Allgemein: Eine $n \times n$ Matrix $[A]$ hat n Eigenwerte.

Beispiel:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_s & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_s \end{bmatrix}$$

Determinante der charakteristischen Matrix:

$$\det\{[Z] - \underline{\lambda} [E]\} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_s - \underline{\lambda} & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_s - \underline{\lambda} & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_s - \underline{\lambda} \end{vmatrix}$$

Berechnung der Determinante, allgemein durch Dreieckszerlegung, hier einfache Formel:

$$\det\{ \} = (\underline{Z}_s - \underline{Z}_m - \underline{\lambda})^{n-1} \cdot [\underline{Z}_s - \underline{\lambda} + (n-1) \cdot \underline{Z}_m]$$

Durch Nullsetzen:

$$\underline{\lambda}_1 = \underline{Z}_s + (n-1) \cdot \underline{Z}_m ; \quad \underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2 = \dots = \underline{\lambda}_n = \underline{Z}_s - \underline{Z}_m$$

Damit sind die Eigenwerte bestimmt.

Bestimmung der Eigenvektoren $[m^{(i)}]$ durch Lösung von $([Z] - \underline{\lambda}_i [E]) [\underline{m}^{(i)}] = 0$

für n=3:

$\underline{\lambda}_1 :$

$$\begin{bmatrix} -2\underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & -2\underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & -2\underline{Z}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m}_{11} \\ \underline{m}_{21} \\ \underline{m}_{31} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Lösung:} \quad \begin{matrix} \underline{m}_{11} = k \\ \underline{m}_{21} = k \\ \underline{m}_{31} = k \end{matrix}$$

$\underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}_3 :$

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m}_{12} \\ \underline{m}_{22} \\ \underline{m}_{32} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ebenso:} \quad \begin{bmatrix} \underline{m}_{13} \\ \underline{m}_{23} \\ \underline{m}_{33} \end{bmatrix}$$

Lösungen: $\underline{m}_{12} + \underline{m}_{22} + \underline{m}_{32} = 0$

$\underline{m}_{13} + \underline{m}_{23} + \underline{m}_{33} = 0$

Lösungen für $[M] :$

andere Lösungen:

$$\underline{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$

mit $\underline{k}=1 \rightarrow [M] = [S]$

$$\underline{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

mit $\underline{k}=1 \quad \alpha, \beta, 0 \text{ Komp.}$

$$\underline{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2 Symmetrische Komponenten

Definition der Transformation (Lineartransformation):

$$\begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_{(0)} \\ \underline{G}_{(1)} \\ \underline{G}_{(2)} \end{bmatrix}$$

G für Spannung
Strom
(Ladung, Fluss)

$\underline{a} = e^{j120^\circ}$ komplexer Drehoperator

$$[\underline{G}_{123}] = [\underline{S}] [\underline{G}_{(0)(1)(2)}]$$

Inversion:

$$\begin{bmatrix} \underline{G}_{(0)} \\ \underline{G}_{(1)} \\ \underline{G}_{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{G}_{(0)(1)(2)}] = [\underline{S}]^{-1} [\underline{G}_{123}]$$

Anwendung auf Netzelemente:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{U}_{123}] = [\underline{Z}_{123}] [\underline{I}_{123}]$$

$$[\underline{S}]^{-1} [\underline{U}_{123}] = [\underline{S}]^{-1} [\underline{Z}_{123}] [\underline{I}_{123}]$$

$$\underbrace{[\underline{S}]^{-1} [\underline{U}_{123}]} = [\underline{S}]^{-1} [\underline{Z}_{123}] [\underline{S}] [\underline{I}_{(0)(1)(2)}]$$

$$[\underline{U}_{(0)(1)(2)}] = \underbrace{[\underline{S}]^{-1} [\underline{Z}_{123}] [\underline{S}]}_{\underline{Z}_{(0)(1)(2)}} [\underline{I}_{(0)(1)(2)}]$$

wenn \underline{Z}_{123} zyklisch symmetrisch $\rightarrow \underline{Z}_{(0)(1)(2)}$ Diagonalmatrix

Zyklische Symmetrie:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{33} = \underline{Z}_s \\ \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_a \\ \underline{Z}_{21} &= \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_b \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_a & \underline{Z}_b \\ \underline{Z}_b & \underline{Z}_s & \underline{Z}_a \\ \underline{Z}_a & \underline{Z}_b & \underline{Z}_s \end{bmatrix}$$

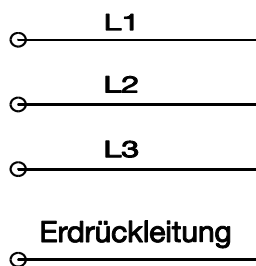
$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{(0)(1)(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(0)} &= \underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_b & \underline{Z}_{(0)} &= \underline{Z}_s + 2\underline{Z}_m \\ \underline{Z}_{(1)} &= \underline{Z}_s + \underline{a}^2 \underline{Z}_a + \underline{a} \underline{Z}_b \text{ mit } \underline{Z}_a = \underline{Z}_b =: \underline{Z}_m \text{ wird } \underline{Z}_{(1)} = \underline{Z}_s - \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_{(2)} &= \underline{Z}_s + \underline{a} \underline{Z}_a + \underline{a}^2 \underline{Z}_b & \underline{Z}_{(2)} &= \underline{Z}_{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{(0)(1)(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{(0)(1)(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)(1)(2)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Entkoppelung} \rightarrow \underline{U}_{(0)} = \underline{Z}_{(0)} \underline{I}_{(0)} ; \quad \underline{U}_{(1)} = \underline{Z}_{(1)} \underline{I}_{(1)} ; \quad \underline{U}_{(2)} = \underline{Z}_{(2)} \underline{I}_{(2)}$$

6.3 Beispiel: Leitung



R_L = ohmscher Widerstand Leiterseil

R_E = ohmscher Widerstand der Erdrückleitung

Vereinfachende Annahmen:

- Abstand Leiterseil – Erde \ll Stromeindringtiefe
- Betriebsfrequenz (50 oder 60 Hz)

Impedanz einer Leiterschleife Phase-Erdrückleitung (Selbstimpedanz):

(siehe Grundlagen der Hochspannungs- und Energieübertragungstechnik, 5.Semester)

$$Z_s = R_L + R_E + j\omega \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{\delta}{r} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\mu_0 = 1,26 \frac{mH}{km} = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}$$

$$\delta = 658 \sqrt{\frac{\sigma}{f}} \text{ in } m \quad \text{Stromeindringtiefe}$$

$$\sigma \text{ in } \Omega m ; f \text{ in } Hz$$

$$\text{bei } 50Hz : \quad \sigma = 100 \Omega m \Rightarrow \delta = 930 m$$

$$\sigma = 1000 \Omega m \Rightarrow \delta = 2940 m$$

$$R_E = \frac{\omega \mu_0 l}{8} \quad \dots \approx 0,05 \frac{\Omega}{km} \quad \text{bei } 50 \text{ Hz}$$

Gegenimpedanz (Impedanz zwischen zwei Leitern)

$$Z_m = R_E + j\omega \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{\delta}{a}$$

Impedanzen im 012-System

$$Z_1 = Z_s - Z_m = R_L + j\omega \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \right)$$

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_0 = Z_s + 2Z_m = R_L + \underbrace{3R_E} + j\omega \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(3 \ln \frac{\delta}{\sqrt[3]{ra^2}} + \frac{1}{4} \right)$$

$$3R_E = \frac{3\mu_0 \omega l}{8}$$

7 Kurzschlussstromberechnung

7.1 Aufgabenstellung

Durch das „Gesetz über technische Arbeitsmittel und Verbraucherprodukte“ (Geräte- und Produktsicherheitsgesetz) und DIN VDE 100 ist jeder Erbauer und Betreiber von elektrischen Anlagen gehalten, diese Anlagen kurzschlussfest auszulegen. Dazu sind bei der Auswahl der Betriebsmittel die Kurzschlussströme am Einbauort zur Beurteilung heranzuziehen:

- des Ausschaltvermögens von Schaltern und Sicherungen
- der mechanischen Beanspruchung von Sammelschienen, Stützern usw.
- der thermischen Beanspruchung von Anlagenteilen
- der Fehlererfassung bei symmetrischen und unsymmetrischen Fehlern durch den Netzschutz auch im Schwachlastzustand
- der Bemessung der Erdungsanlagen (Querschnitt, Erder-, Schritt- und Berührungsspannung)
- der betriebsfrequenten Überspannungen der gesunden Leiter bei unsymmetrischen Fehlern
- der magnetischen Beeinflussung von Fernmeldeanlagen auch in der Nähe von Hochspannungsleitungen

Im Gegensatz zu den bisherigen Berechnungen wird bei der Kurzschlussstromberechnung kein stationärer Betriebszustand berechnet, das Ziel ist die Bestimmung der Fehlerströme. Dabei wird nicht deren zeitlicher Verlauf als Lösung der Differenzialgleichung bestimmt. Vielmehr werden für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B. 60 ... 120 ms, nach Fehlereintritt die Kurzschlussströme mit Hilfe von algebraischen Gleichungen, die auf der Netzwerktheorie beruhen, berechnet (quasistationäre Betrachtung).

Maßgebende VDE-Bestimmung: VDE 0102/1.90 (Berechnung von Kurzschlussströmen in Drehstromnetzen)

Fehlerarten:

Satter Kurzschluss: Zwischen den kurzgeschlossenen Leitern besteht ein direkter metallischer Kontakt, der Übergangswiderstand zwischen den Leitern ist zu vernachlässigen.

Lichtbogenkurzschluss: Die Leiter sind über einen Lichtbogen leitend miteinander verbunden.

- a) Dreipoliger Kurzschluss
- b) Einpoliger Kurzschluss
- c) Zweipoliger Kurzschluss ohne Erdberührung
- d) Zweipoliger Kurzschluss mit Erdberührung
- e) Doppelkurzschluss

7.2 Generatorersatzschaltbild für die Kurzschlussstromberechnung

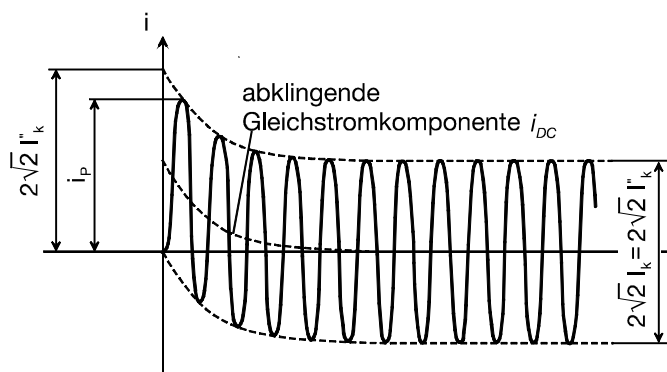
Generatorferner Kurzschluss

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \gamma)$$

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + X^2}} \left[\sin(\omega t + \gamma - \varphi) - \sin(\gamma - \varphi) e^{-\frac{t}{L/R}} \right]$$

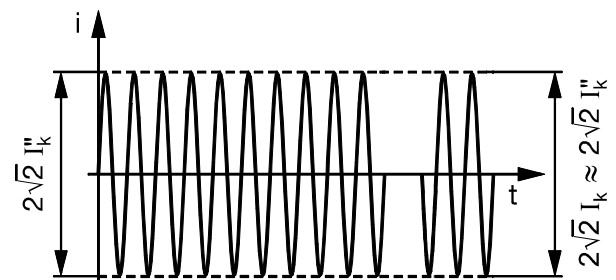
$$\text{mit } \tan \varphi = \frac{X}{R}$$

$$\text{es gilt dabei: } X \gg R \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$



Kurzschluss im Nulldurchgang der Spannung

$$\gamma = 0$$

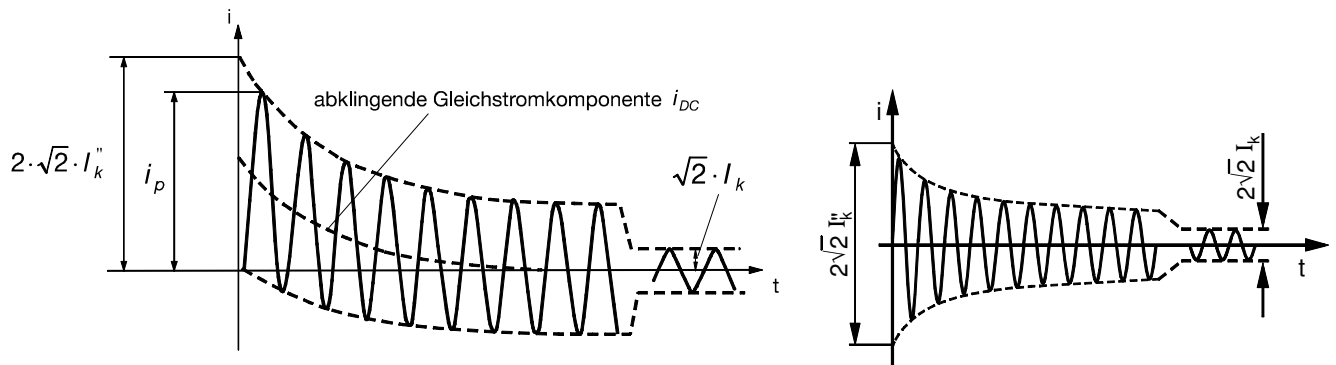


Kurzschluss im Spannungs-Maximum

$$\gamma = \varphi$$

$$i(t) = I_k'' + i_{dc} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + X^2}} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{L/R}} \right]$$

Generatornaher Kurzschluss



Kurzschluss im Nulldurchgang der Spannung

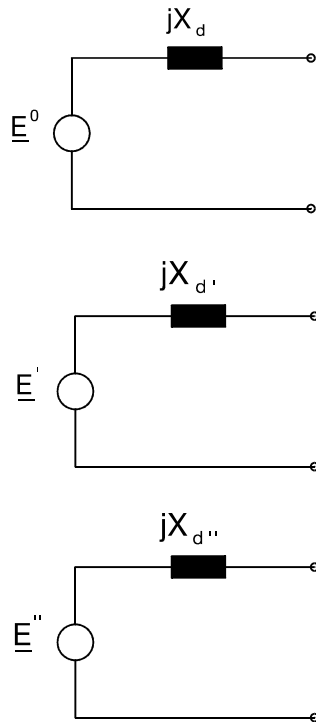
Kurzschluss im Spannungs-Maximum

I_k'' Anfangskurzschluss-Wechselstrom

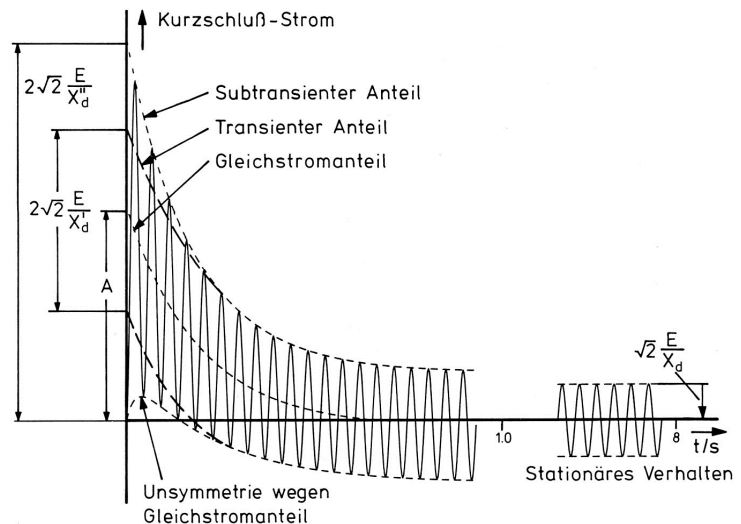
i_p Stoßkurzschlussstrom

I_k Dauerkurzschlussstrom

i_{DC} abklingende Gleichstromkomponente des Kurzschlussstromes



X_d	synchrone Reaktanz (in der Längsachse)
E^0	stationäre Polradspannung (entspricht Klemmenspannung im Leerlauf)
X_d'	transiente Reaktanz
E'	transiente Polradspannung
X_d''	subtransiente Reaktanz
E''	subtransiente Polradspannung



Die mit den verschiedenen Wicklungen verketteten magnetischen Flüsse können sich nicht sprungartig ändern (Prinzip der konstanten Flussverkettungen).

Der subtransiente Vorgang umfasst den Ausgleichsvorgang zwischen Ständer- und Dämpferwicklung → Zuordnung einer Zeitkonstanten T_d'' (subtransiente Zeitkonstante)

T_d'' im Bereich von 20...50...70ms MW: 50ms

Abklingen nach etwa $5 \cdot 50ms = 250ms$

Der transiente Vorgang umfasst den Ausgleichsvorgang zwischen Ständer- und Erregerwicklung (Beschränkung auf d-Achse).

→ $T_d' \approx 0,8...1,5...2,2s$ MW $\approx 1s$

Gleichstromglied (in etwa exponentiales Abklingen)

→ $T_a \approx 50\text{ms} \dots 400\text{ms}$

Für Kurzschlussrechnung wesentlich: subtransienter Verlauf (Ausschalten etwa in diesem Bereich)

Bezogener Wert von $X_d'' \rightarrow x_d''$

$$x_d'' = \frac{X_d''}{U_{nG}^2 / S_{nG}}$$

S_{nG} = Generatornennleistung (eigentlich Bemessungsleistung S_{rG})

U_{nG} = Generatornennspannung (Bemessungsspannung)

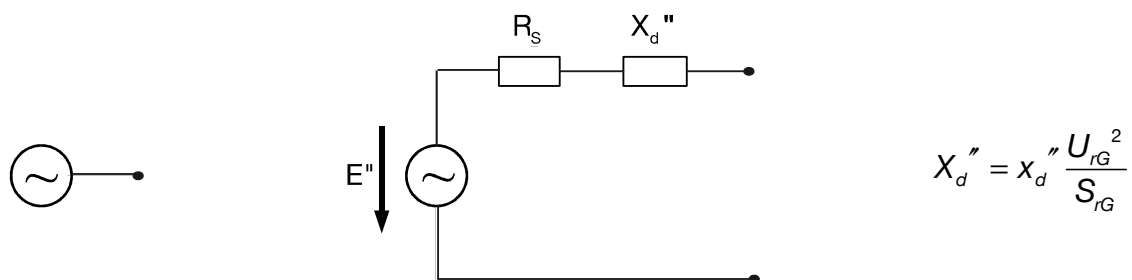
x_d'' im Bereich 10...20 % (große Werte bei großen Nennleistungen)

(...30 % bei Schenkelpolgeneratoren mit Dämpferwicklung)

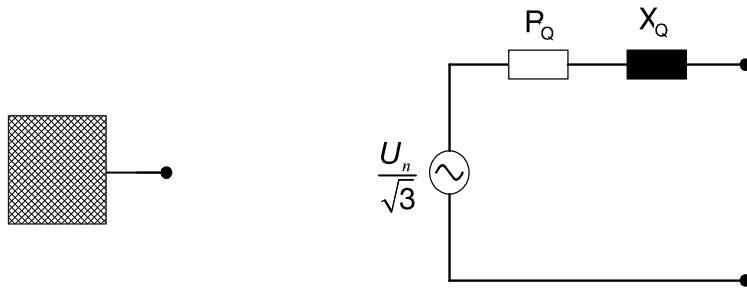
Transienter Vorgang wesentlich für Stabilitätsuntersuchungen (E' , X_d')

7.3 Beispiel

Synchrongenerator



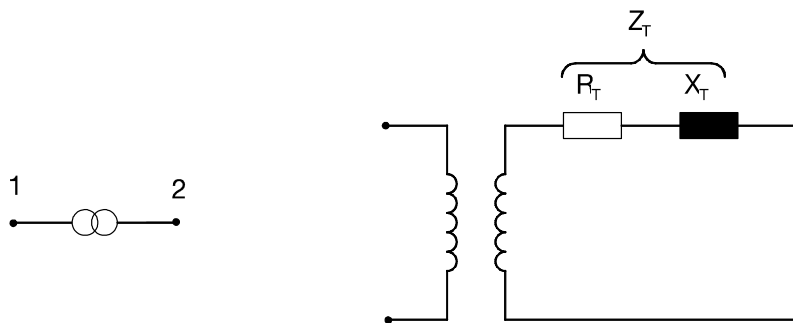
Netzeinspeisung



$$Z_Q = \frac{c \cdot U_{nQ}}{\sqrt{3} \cdot I_{kQ}}$$

$$X_Q = \frac{Z_Q}{\sqrt{1 + (R_Q/X_Q)^2}}$$

Transformator

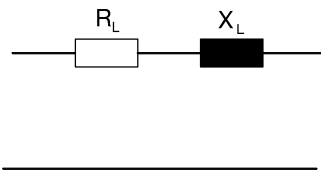
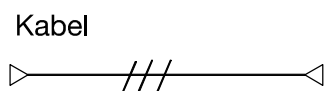
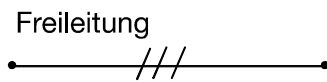


$$Z_T = \frac{u_k}{100\%} \cdot \frac{U_{rT}^2}{S_{rT}}$$

$$R_T = \frac{u_r}{100\%} \cdot \frac{U_{rT}^2}{S_{rT}} = \frac{P_{krT}}{3I_T^2}$$

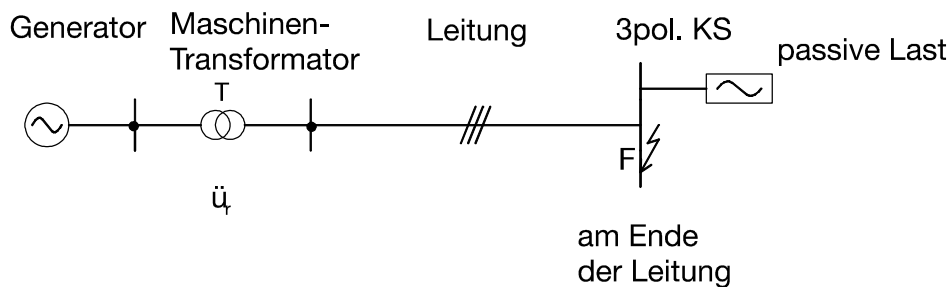
$$X_T = \sqrt{Z_T^2 - R_T^2}$$

Freileitung/ Kabel:

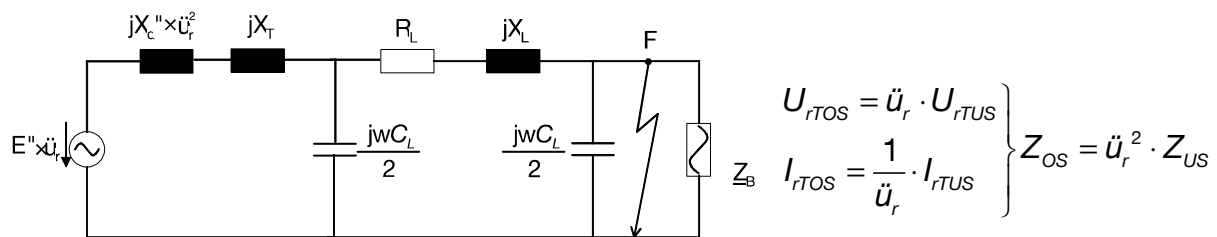


$$\underline{Z}_L = R_L + jX_L$$

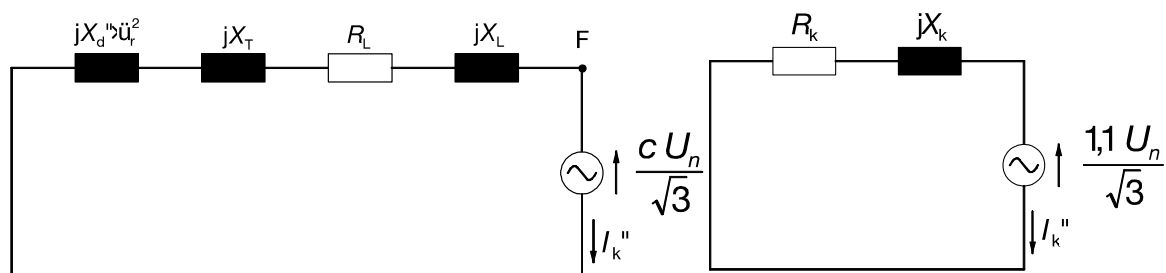
Beispiel:



Ersatzschaltbild mit auf Fehlerseite bezogenen Größen:



Einführung der Ersatzspannungsquelle im Ersatzschaltbild:



7.4 Berechnungsverfahren

Berechnung der größten Kurzschlussströme unter den folgenden Bedingungen:

- Rechnen mit Spannungsfaktor c_{\max}
- Wahl der Netzschtaltung, die zum Maximum des Kurzschlussstromes an der Kurzschlussstelle führt und maximale Kraftwerks- und Netzeinspeisungen
- Wenn Ersatzimpedanzen Z_Q zur Nachbildung von Netzeinspeisungen verwendet werden, so soll die kleinste Kurzschlussimpedanz entsprechend dem größten Kurzschlussstrombeitrag der Netzeinspeisung gewählt werden.

Berechnung der kleinsten Kurzschlussströme unter den folgenden Bedingungen:

- Rechnen mit Spannungsfaktor c_{\min}
- Wahl der Netzschtaltung, die zum Minimum des Kurzschlussstromes an der Kurzschlussstelle führt und die minimalen Kraftwerks- und Netzeinspeisungen
- Motorische Lasten vernachlässigen

Welche Größen sind zu berechnen?

- Anfangs-Kurzschlusswechselstrom I_k'' .

(Der Effektivwert der symmetrischen Wechselstromkomponente eines zu erwartenden Kurzschlussstromes im Augenblick des Kurzschlusseintritts, wenn die Kurzschlussimpedanz ihre Größe zum Zeitpunkt Null beibehält.)

- Anfangs-Kurzschlusswechselstromleistung S_k'' (fiktive Größe!!)

$$S_k'' = \sqrt{3} \cdot U_n \cdot I_k''$$

- $U_n \rightarrow$ Netznennspannung
- Stoßkurzschlussstrom i_p

(Der maximal mögliche Augenblickswert des zu erwartenden Kurzschlussstromes)

Hinweis:

Ausschaltwechselstrom I_a (Effektivwert der symmetrischen Wechselstromkomponente des zu erwartenden Kurzschlussstromes im Augenblick der Kontakttrennung des erstlöschenden Pols einer Schalteinrichtung)

Dauerkurzschlussstrom I_k (Effektivwert des Kurzschlussstromes, der nach dem Abklingen aller Ausgleichsvorgänge bestehen bleibt).

Im Folgenden wird nur die Berechnung von I_k'' behandelt.

Gegeben sind:

Die Netzdaten des (passiven) Netzes

→ Knotenadmittanzmatrix im Mit-, Gegen- und Nullsystem:

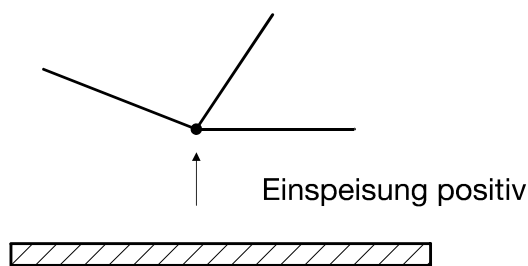
$$\begin{bmatrix} Y_{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_{(0)} \end{bmatrix}$$

und die Generatordaten

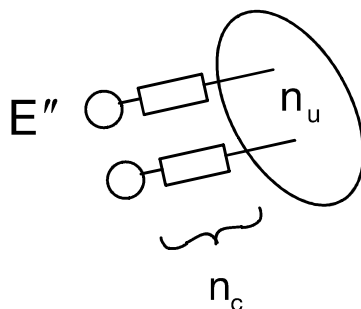
Vereinfachende Voraussetzungen:

- a) Die Lichtbogenwiderstände an der Fehlerstelle werden vernachlässigt.
- b) Die Generatorpolradspannungen E'' seien symmetrisch.
- c) Alle Leitungskapazitäten (mit Ausnahme der Kapazitäten im Nullsystem) und alle Queradmittanzen von passiven Lasten können vernachlässigt werden.
- d) Große Synchronmotoren und Synchron-Phasenschieber sowie große Asynchronmotoren und Parallelkondensatoren sind entsprechend VDE 0102 zu berücksichtigen.

Stromvorzeichen:



Nummer des Kurzschlussknotens: k



n_u : Anzahl der Knoten mit unbekannten ($\rightarrow U$) Spannungen

n_c : Anzahl der Knoten mit konstanten ($\rightarrow C$) Spannungen

Aufbau der Knotengleichungen: Knotenadmittanzmatrizen:

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} [\underline{Y}_{cc}] & [\underline{Y}_{cu}] \\ [\underline{Y}_{uc}] & [\underline{Y}_{uu}] \end{bmatrix}$$

Index $U \rightarrow$ Knotenspannung unbekannt

Index $C \rightarrow$ Knotenspannung konstant

Gleichungssysteme für die Knoten mit unbekannten Spannungen (Index)

Nullsystem:
$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{(0)UC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(0)C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(0)UU} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(0)U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)V} \end{bmatrix}$$

Verbraucherströme:
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)2)V} \end{bmatrix}$$

Mitsystem:
$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{(1)UC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(1)C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(1)UU} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(1)U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{(1)U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{(1)V} \end{bmatrix}$$

Gegensystem:
$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{(2)UC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(2)C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(2)UU} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(2)U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{(2)U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{(2)V} \end{bmatrix}$$

Berücksichtigung der vereinfachenden Voraussetzungen:

a) $\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_{(0)C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{(2)C} \end{bmatrix} = 0$

symmetrische Polradspannungen

b) $\rightarrow \underline{I}_{(0)V} = \underline{I}_{(1)V} = \underline{I}_{(2)V} = 0$

Verbraucher können vernachlässigt werden:

somit
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(0)UU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{(0)U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)U} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(1)UC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{(1)C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(1)UU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{(1)U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{I}_{(1)U} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(2)UU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{(2)U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{I}_{(2)U} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

daraus
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_{(0)U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{Z}_{(0)UU} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)U} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{U}_{(1)U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{Z}_{(1)UU} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{(1)U} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(1)UC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{(1)C} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{U}_{(2)U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{Z}_{(2)UU} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{(2)U} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

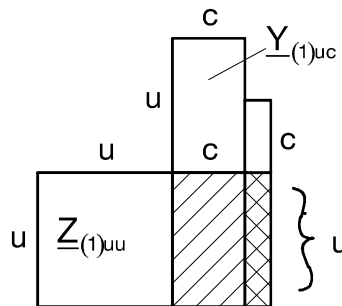
mit
$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{UU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{UU} \end{bmatrix}^{-1}$$

Bemerkung zum Mitsystem:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{(1)U} &= \underbrace{\underline{Z}_{(1)UU} \cdot \underline{I}_{(1)U}}_{\text{abhängig vom Kurzschlussstrom}} - \underbrace{\underline{Z}_{(1)UU} \underline{Y}_{(1)UC}}_{\text{konstant}} \underline{U}_{(1)C} \\ &\quad \downarrow \\ \underline{U}_{(1)U}^0 &= -\underline{Z}_{(1)UU} \underline{Y}_{(1)UC} \underline{U}_{(1)C} \end{aligned} \quad \boxed{\alpha}$$

$\underline{U}_{(1)U}^0$ ist der Vektor der Knotenspannungen des ungestörten ($\underline{I}_{(1)U} = 0$) und unbelasteten Netzes.

Berechnung von $\underline{U}_{(1)U}^0$


Hinweis:

$\underline{U}_{(1)U}^0$ bei Berücksichtigung der Mitkomponente von Verbraucherströmen $\underline{I}_{(1)V}$:

$$\underline{U}_{(1)U}^0 = \underline{Z}_{(1)UU} \underline{I}_{(1)V} - \underline{Z}_{(1)UU} \underline{Y}_{(1)UC} \underline{U}_{(1)C} \quad \boxed{\beta}$$

$\underline{U}_{(1)U}^0$ wäre dann der Vektor der Knotenspannungen des ungestörten, jedoch belasteten Netzes (Voraussetzung: Lastflussberechnung vor Eintritt des KS.)

Die Komponenten des Vektors \underline{I}_U im Null-, Mit- und Gegensystem sind Null, ausgenommen die Komponente Nr. k im Kurzschlussknoten k.

$$\underline{I}_{(0)(1)(2)U} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \underline{I}_{(0)(1)(2)k} \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für den Kurzschlussknoten k gilt (k-te Zeile): (alle Ströme \underline{I}_U außer \underline{I}_k sind Null!)

$$\underline{U}_{(0)k} = \underline{Z}_{(0)kk} \cdot \underline{I}_{(0)k}$$

$$\underline{U}_{(1)k} = \underline{Z}_{(1)kk} \cdot \underline{I}_{(1)k} + \underline{U}_{(1)k}^0$$

$$\underline{U}_{(2)k} = \underline{Z}_{(2)kk} \cdot \underline{I}_{(2)k}$$

Systemgleichungen liefern für das Netz Strom-Spannungsbeziehungen ohne Rücksicht auf die Art des Fehlers.

Für diese Systemgleichungen ist also nur das Diagonalelement \underline{Z}_{kk} der invertierten Knotenadmittanzmatrix $[\underline{Y}_{UU}]$ sowie die „Ersatzspannung“ $\underline{U}_{(1)k}^0$ maßgebend.

Die „Ersatzspannung“ $\underline{U}_{(1)k}^0$ müsste eigentlich nach Gl. $\boxed{\alpha}$ bzw. Gl. $\boxed{\beta}$ (mit Berücksichtigung der Verbraucherlasten) berechnet werden.

Schwierigkeit: Kenntnis der Vorbelastung bei der Bestimmung von E'' bzw. der Verbraucherströme.

Festlegung nach VDE 0102:

$$\underline{U}_{(1)}^0 = \frac{cU_n}{\sqrt{3}}$$

mit der Netznenntension U_n (Dreiecksspannung!) und dem Spannungsfaktor c .

Der Spannungsfaktor c ist unterschiedlich bei der Berechnung der größten und kleinsten Kurzschlussströme.

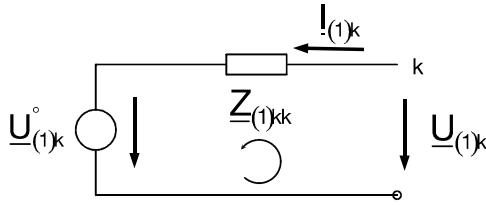
Bei der Berechnung der größten Kurzschlussströme gilt:

- $c = 1,00$ für Niederspannungsnetze 230/400 V, 50 Hz
- $c = 1,10$ für Mittel- und Hochspannungsnetze

Im Allgemeinen ist der dreipolige Kurzschlussstrom der größte. Bei einem Kurzschluss in der Nähe eines Transformators mit Sternpunktterdung in einem Netz mit niederohmiger Sternpunktterdung kann allerdings der einpolige Erdkurzschlussstrom größer als der dreipolige Kurzschlussstrom werden.

Physikalische Bedeutung von \underline{Z}_{kk} :

Ersatzschaltung des Netzes am Knoten k (entsprechend den Systemgleichungen):



$\underline{U}_{(1)k}^0$ Ersatzspannung

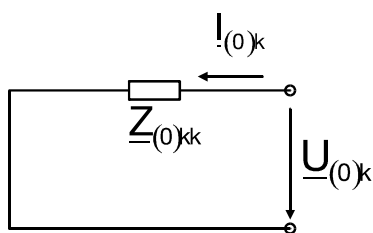
$\underline{Z}_{(1)kk}$ Ersatzimpedanz der Kurzschlussbahn

$$\underline{U}_{(1)k}^0 + \underline{Z}_{(1)kk} \cdot \underline{I}_{(1)k} - \underline{U}_{(1)k} = 0$$

Hinweis auf Ersatzspannungsquelle in VDE 0102:

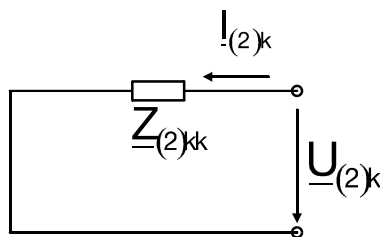
Der obige Stromkreis kann auch so berechnet werden, als wäre eine Ersatzspannungsquelle mit der Spannung $\underline{U}_{(1)k}^0$ an der Fehlerquelle wirksam (Satz von Thevenin) und der Impedanz $\underline{Z}_{(1)kk}$ als Fehlerimpedanz.

Nullsystem



$$\underline{Z}_{(0)kk} \cdot \underline{I}_{(0)k} - \underline{U}_{(0)k} = 0$$

Gegensystem:



$$\underline{Z}_{(2)kk} \cdot \underline{I}_{(2)k} - \underline{U}_{(2)k} = 0$$

$$\underline{Z}_{(2)kk} = \underline{Z}_{(1)kk}$$

Bei generatorfernen Kurzschlüssen (Bei rotierenden Maschinen können Mit- und Gegenimpedanzen voneinander abweichen.)

Bestimmung von \underline{Z}_{kk} :

Berechnung der Kehrmatrix (Dreieckszerlegung)

[Bei nur 1 Kurzschlussstelle unmittelbare Auflösung des Gleichungssystems mit der Matrix $[\underline{Y}_{UU}]$ und dem k-ten Einheitsvektor (k-te Komponente =1, alle übrigen Komponenten =0) als Rechte Seite]

Vorgehen bei der Kurzschlussstromberechnung:

1. dreiphasiges Schaltbild für Fehlerart im Originalraum
2. Fehlerbedingungen im Originalraum festlegen.
3. Fehlerbedingungen in symmetrische Komponenten transformieren. (=Bildraum)
4. Schaltbild in symmetrische Komponenten für den Fehlerort erstellen.
5. Ströme und Spannungen in symmetrische Komponenten berechnen.
6. Rücktransformation der Ströme und Spannungen in den Originalraum.

Fehlerarten:

Zu den 3 Systemgleichungen kommen noch 3 Gleichungen hinzu, die die Art des Fehlers kennzeichnen.

Dreipoliger Kurzschluss: „Fehlerbedingungen“

1-2-3-System

$$L1: \underline{U}_{1k} = 0$$

$$L2: \underline{U}_{2k} = 0$$

$$L3: \underline{U}_{3k} = 0$$

(0)-(1)-(2)-System

$$\underline{U}_{(0)k} = 0$$

$$\underline{U}_{(1)k} = 0$$

$$\underline{U}_{(2)k} = 0$$

$$\text{daraus} \quad \underline{I}_{(1)k} = -\frac{\underline{U}_{(1)k}^0}{\underline{Z}_{(1)k}} \quad \underline{I}_{(0)k} = \underline{I}_{(2)k} = 0$$

Rücktransformation in 1-2-3-System:

$$\underline{I}_{1k} = -\frac{\underline{U}_{(1)k}^0}{\underline{Z}_{(1)k}} \quad \underline{I}_{2k} = -\underline{a}^2 \frac{\underline{U}_{(1)k}^0}{\underline{Z}_{(1)k}} \quad \underline{I}_{3k} = -\underline{a} \frac{\underline{U}_{(1)k}^0}{\underline{Z}_{(1)k}}$$

Einpoliger Kurzschluss (L1): „Fehlerbedingungen“

1-2-3-System

$$L1: \underline{U}_{1k} = 0$$

$$L2: \underline{I}_{2k} = 0$$

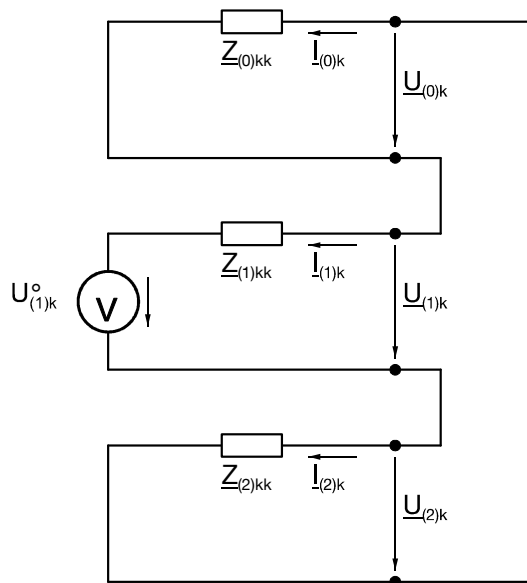
$$L3: \underline{I}_{3k} = 0$$

(0)-(1)-(2)-System

$$\underline{U}_{(1)k} + \underline{U}_{(2)k} + \underline{U}_{(0)k} = 0$$

$$\underline{I}_{(1)k} = \underline{I}_{(2)k}$$

$$\underline{I}_{(1)k} = \underline{I}_{(0)k}$$



$$\underline{I}_{(1)k} = \frac{-\underline{U}_{(1)k}^0}{\underline{Z}_{(0)kk} + \underline{Z}_{(1)kk} + \underline{Z}_{(2)kk}}$$

$$\underline{U}_{(1)k}^0 = c \frac{U_n}{\sqrt{3}}$$

Rücktransformation in 1-2-3-System:

$$\underline{I}_{1k} = \underline{I}_{(0)k} + \underline{I}_{(1)k} + \underline{I}_{(2)k} = 3 \cdot \underline{I}_{(1)k}$$

$$\underline{I}_{1k} = \frac{-3 \frac{c U_n}{\sqrt{3}}}{\underline{Z}_{(0)kk} + \underline{Z}_{(1)kk} + \underline{Z}_{(2)kk}}$$

Spannungsverlagerung:

$$\text{Erdfehlerfaktor: } \delta = \left| \underline{a}^2 + \frac{\underline{Z}_{(1)} - \underline{Z}_{(0)}}{2\underline{Z}_{(1)} + \underline{Z}_{(0)}} \right|$$

Zu betrachtende Grenzfälle:

- a) isolierter Sternpunkt (Mittelspannungsnetze mit geringer Ausdehnung)

$$\underline{Z}_E \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{Z}_{(0)} \rightarrow \infty$$

$$\delta = \left| \underline{a}^2 - 1 \right| = \sqrt{3} \approx 1,73$$

Fehlerstrom wird durch Erdkapazitäten C_E bestimmt (Mit- und Gegenimpedanzen können vernachlässigt werden)

$$\underline{I}_{1k} = \frac{-3 \frac{cU_n}{\sqrt{3}}}{\underline{Z}_{(0)kk}} = -\sqrt{3}cU_n\omega C_E$$

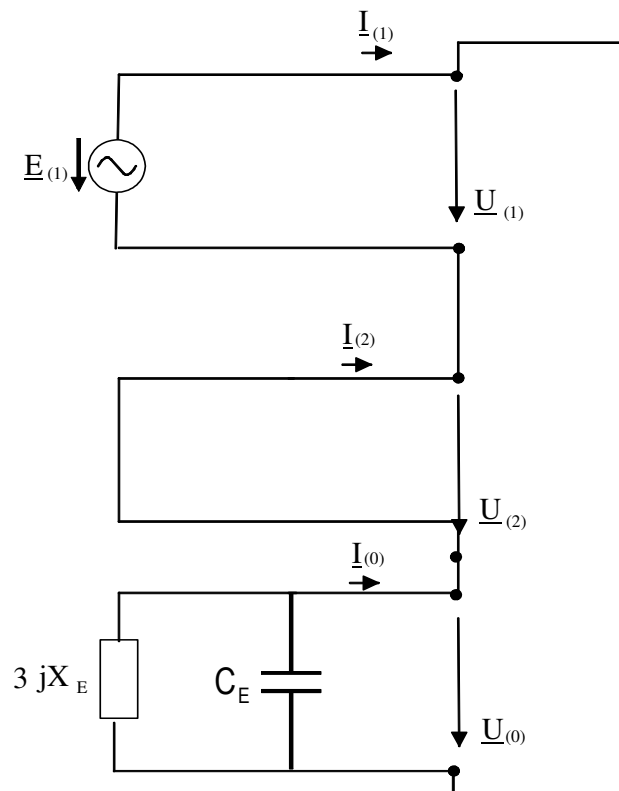
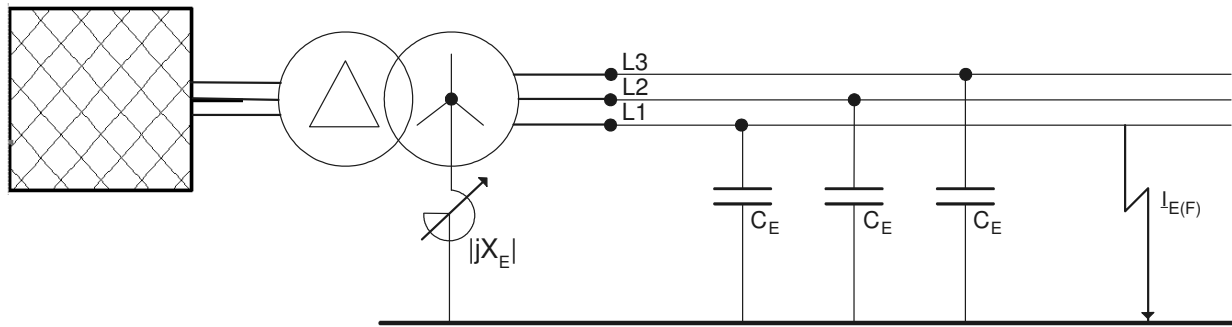
- b) vernachlässigbar kleine Nullimpedanz (Hochspannungsnetze)

$$\underline{Z}_{(0)} \rightarrow 0$$

$$\delta = \left| \underline{a}^2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

- c) Erdschlusskompensation (Freileitungsnetze 10 ... 110 kV, Kabelnetze 10 ... 110 kV in Städten (strombegrenzend))

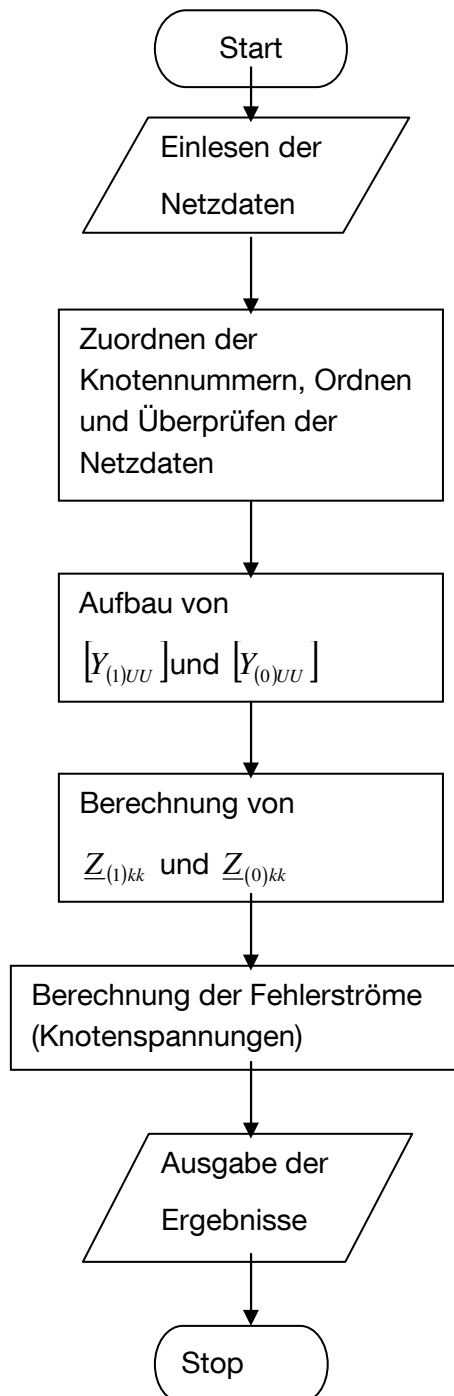
Löschspule im Sternpunkt eines oder mehrerer Transformatoren



für $X_E = \frac{1}{3\omega C_E}$ wird $I_{E(F)} = 0$ (Resonanz)

(Reststrom wegen Dämpfung und Verstimmung)

Flussdiagramm:

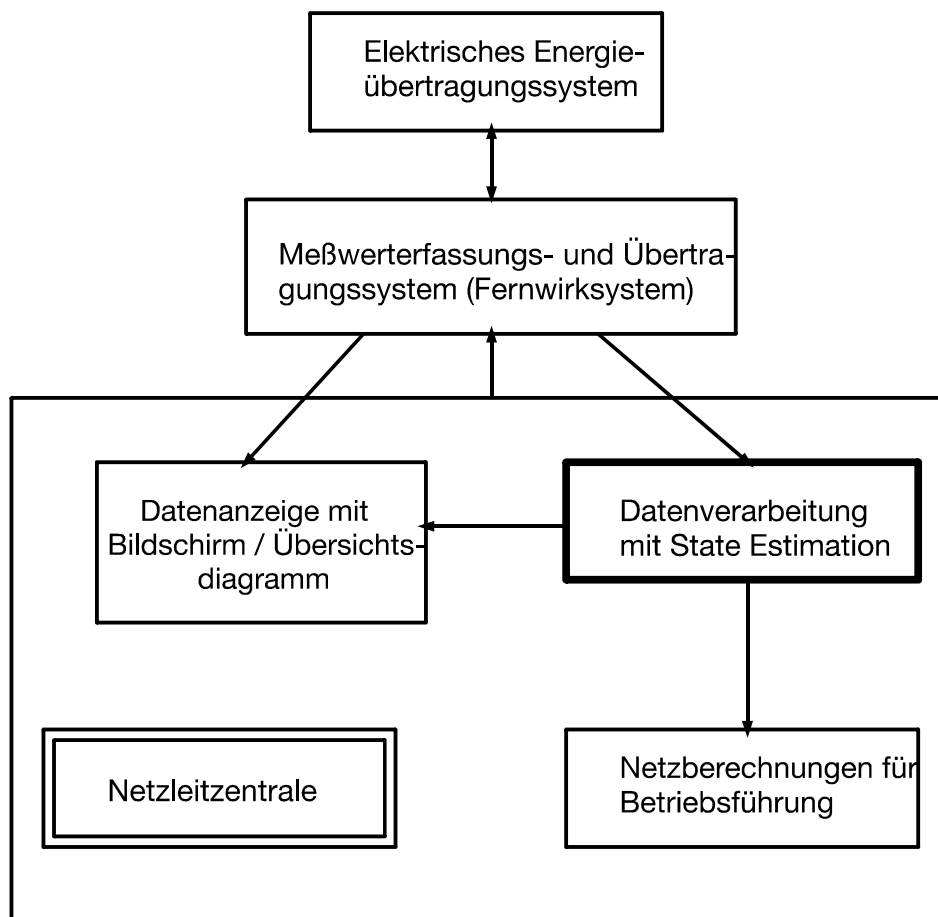


8 Netzzustandserfassung (State Estimation)

8.1 Aufgabenstellung

Der Rechner muss zu jedem Zeitpunkt ein möglichst aktuelles und richtiges Bild des Netzzustandes zur Verfügung haben.

Zu diesem Zweck werden die im Netz durch Messung gewonnen Daten mithilfe eines Datenübertragungssystems zur Netzleitzentrale übertragen.



Problem:

- Messwerte sind nie vollständig.
- Auftreten von dynamischen und statischen Messfehlern (Wert unbekannt)

Folgerung:

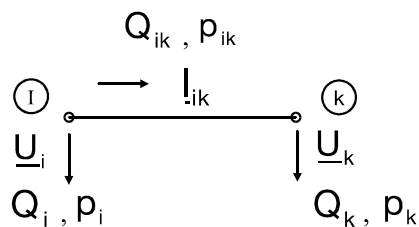
- Es ist nur möglich, den wahrscheinlichsten Neuzustand zu schätzen. (State Estimation)
- Netzzustand muss vollständig bestimmt werden können.
- Messfehler müssen statistisch ausgefiltert werden.
- Nicht gemessene Größen müssen berechnet werden können.
- Große Messfehler müssen entdeckt, lokalisiert und eliminiert werden können.

8.2 Darstellung des Netzzustandes

Der Netzzustand wird durch die komplexen Knotenspannungen dargestellt. Aus diesen Spannungen lassen sich mithilfe der Netzersatzschaltungen alle benötigten Betriebsdaten direkt berechnen (der Netzzustand ist dadurch eindeutig festgelegt).

Messtechnische Erfassung des Netzzustandes:

1. Messdaten



Knoten (i)

Zweigleistungen P_{ik}, Q_{ik}

Zweigstrombetrag I_{ik}

Spannungsbetrag U_i

Einspeise- bzw. Verbraucherleistungen P_i, Q_i

Knotenstrombetrag I_i

2. Schalterstellungsmeldungen

→ Schaltzustand $[Y]$

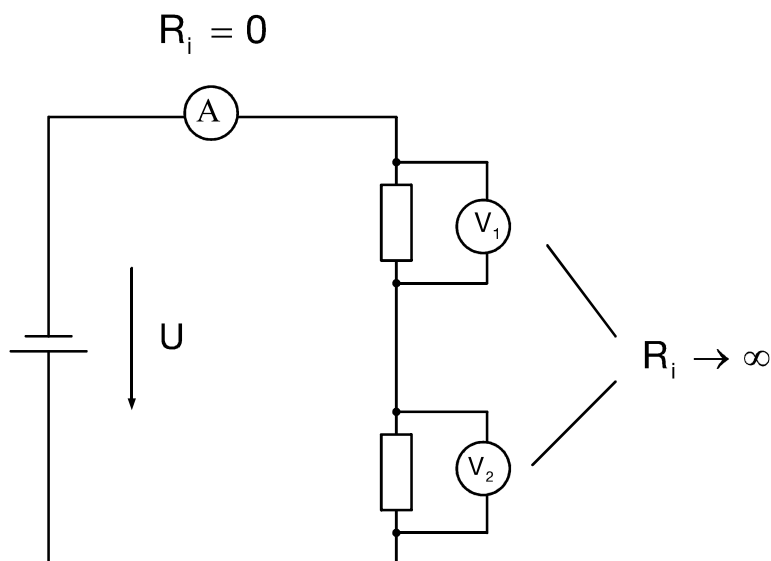
zu 1.

bei m Netzverbindungen (Zweigen) 4m Messungen → p_{ik} , Q_{ik} , 2 mal I_{ik}

(Häufig wird nur die Wirkleistung gemessen, nur bei großen Verbrauchern, Kraftwerken und Netzkuppelstellen auch Blindleistung. Spannungsmessung vor allem an Übergabestellen und Kraftwerkssammelschienen, seltener an Verbraucherschwerpunkten oder Umspannwerken. Strombeträge meist nur an den Anfangs- und Endpunkten der Hauptleitungen.)

State-Estimation mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate:

Einführungsbeispiel:



bekannt:

Z_1 = Ablesewert des Amperemeters

Z_2 = Ablesewert des Voltmeters 1

Z_3 = Ablesewert des Voltmeters 2

R_1 , R_2 Widerstände

unbekannt:

v_1 = Messfehler des Amperemeters

v_2 = Messfehler des Voltmeters 1

v_3 = Messfehler des Voltmeters 2

U_0 Batteriespannung (→ zu messen)

Geht man von der physikalisch nicht haltbaren Annahme aus, dass die Messinstrumente keinen Messfehler aufweisen, dann gilt:

$$U_0 = Z_1(R_1 + R_2) \quad \text{oder} \quad U_0 = \frac{Z_2(R_1 + R_2)}{R_1} \quad \text{oder} \quad U_0 = \frac{Z_3(R_1 + R_2)}{R_2}$$

→ redundante Messung

Tatsächlich ist aber jede Messung 1, 2, 3 mit einem unbekannten Fehler v_1, v_2, v_3 behaftet. Man erhält aus den 3 Messungen verschiedene Werte für U_0 und es besteht die Aufgabe den wahrscheinlichsten Wert von U_0 zu ermitteln. Dies erfolgt mithilfe der Ausgleichsrechnung (Gauß)

Für die Ausgleichsrechnung gilt allgemein:

$$Z_j = h_j(U_0) + v_j \quad j = 1, 2, 3$$

dabei ist

$$h_1(U_0) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \quad (A)$$

$$h_2(U_0) = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (V_1)$$

$$h_3(U_0) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (V_2)$$

Nach dem Prinzip der Ausgleichsrechnung ergibt sich der wahrscheinlichste Wert für U_0 dann, wenn die Summe der Messfehlerquadrate ein Minimum ist:

$$F(U_0) = \sum_{j=1}^3 \{Z_j - h_j(U_0)\}^2 = \text{Min}$$

Die 3 Messinstrumente haben allerdings unterschiedliche Genauigkeit. Die Messfehlerquadrate sind deshalb mit einem bestimmten Gewicht zu bewerten. Diese Gewichtung ist umgekehrt proportional dem Streuungsquadrat (Varianz) σ^2 . (Bestimmung der Instrumentenfehler durch eine Vielzahl von Messungen, Annahme einer Normalenverteilung.)

$$\rightarrow w_j \sim \frac{1}{\sigma_j^2}$$

$$F(U_0) = \sum_{j=1}^3 \{Z_j - h_j(U_0)\}^2 \cdot w_j = \text{Min}$$

$$\frac{\partial F(U_0)}{\partial U_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(U_0)}{\partial U_0} = & -2 \left\{ Z_1 - \frac{U_0}{R_1 + R_2} \right\} \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot w_1 \\ & -2 \left\{ Z_2 - \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2} \right\} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot w_2 \\ & -2 \left\{ Z_3 - \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2} \right\} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot w_3 = 0 \end{aligned}$$

daraus wird U_0 berechnet!

Allgemein (im Energieversorgungsnetz):

Ein Messwert Z_j ist darstellbar durch den folgenden Ansatz:

$$Z_j = h_j([U]_N) + v_j \quad j = 1 \dots M$$

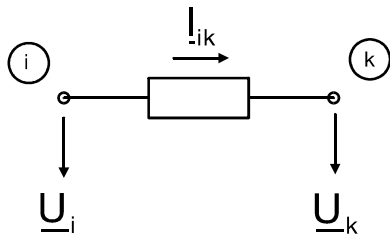
h_j : Messvariable, berechnet über Netzwerkgleichungen aus $[U]_N$

$[U]_N$: Vektor der unbekannten komplexen Knotenspannungen

N : Knoten

M : Messungen

Beispiel:



Strommessung: $I_{ik} = (\underline{U}_i - \underline{U}_k) \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{ik}}$

In Matrixschreibweise:

$$[Z] = [h([\underline{U}]_N)] + [v]$$

$$[\underline{U}]_N^T = [\underline{U}_1 \ \underline{U}_2 \ \dots \ \underline{U}_N]$$

Zustandsvektor:

$$[x]^T = [\underbrace{U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N}_{2N-1} \ \delta_2 \ \delta_3 \ \dots \ \delta_N]$$

δ_1 erscheint nicht

$$\sum_{j=1}^M v_j^2 = \text{Min}$$

$$\text{bzw. } \sum_{j=1}^M v_j^2 \cdot w_j = \text{Min}$$

$$F = \sum_{j=1}^M (Z_j - h_j)^2 \cdot w_j = \text{Min}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -2 \sum_{j=1}^M \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \cdot w_j \cdot (Z_j - h_j) = 0$$

Für alle Spannungen $i = 1 \dots N$ erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_M}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_{2N-1}} & \dots & \frac{\partial h_M}{\partial x_{2N-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 - h_1 \\ \vdots \\ Z_M - h_M \end{bmatrix} = 0$$

$$[A]_{2N-1, M} \cdot [W]_{MM} \cdot [Z - h]_M = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 2N-1 Zeilen Wichtematrix
 M Spalten

$[h']_M = [h'([\underline{U}]_N)]_M$ ist das System der Bestimmungsgleichungen für die Messgrößen aus den unbekannten Spannungen $[\underline{U}]_N$ bzw. $[x]$

$[Z]_M$: die einspaltige Matrix der vorliegenden Messwerte

2N-1 Gleichungen für 2N-1 reelle Unbekannte (Knotenspannungen)

Für $M = 2N-1 \rightarrow [h']$ und $[W]$ ohne Einfluss auf die Lösung des Gleichungssystems, es gilt dann $[Z]_M - [h]_M = 0$

Die Knotenspannungen sind eindeutig durch die vorliegenden Messwerte bestimmt, Minimalisierung der Varianzen nicht mehr möglich.

Fehlerausgleich erst bei redundanten Messungen: $M > 2N-1$.

Je größer Redundanz, desto geringer Streuung der berechneten Spannungen um die echten unbekannten Werte, allerdings auch desto größer die benötigten Matrizen (Rechenzeit \uparrow).

Redundanzen im Bereich 1,5 ... 2,0 ... 2,0

$$\text{Redundanz } r = \frac{\text{Anzahl der Meßwerte}}{\text{Anzahl der Unbekannten}} = \frac{M}{2N-1}$$

9 Digitale Berechnung transienter Vorgänge

Aufgabenstellung:

Berechnung transienter Überspannungen und Überströme

Vorteile digitaler Simulation:

- Netze praktisch unbegrenzt
- Versuche schnell wiederholbar und reproduzierbar
- Variantenuntersuchungen leicht durchführbar, automatisierbar

Beispiele:

Abstandskurzschluss, Überspannungen durch Blitzeinschläge, Schaltüberspannungen, Ableiterauslegung zum Schutz von Anlagen

Lösungsverfahren:

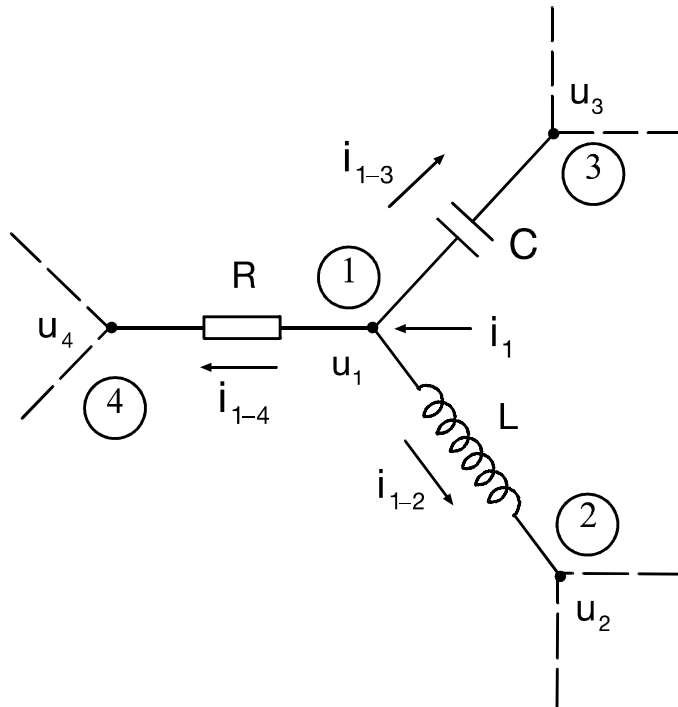
Analyse im Frequenzbereich (Linearisierung um Arbeitspunkt, Berechnung des Systemverhaltens für verschiedene Frequenzen)

Analyse im Zeitbereich (Berechnung der Differenzialgleichungen, Numerische Integration)

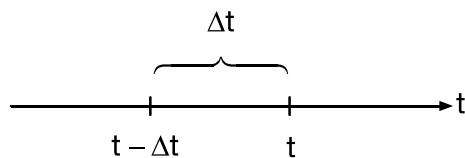
Digitales Rechenverfahren im Zeitbereich nach DOMMEL

Literatur: H. Dommel: Berechnung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge in elektrischen Netzen mit Digitalrechnern. Bull.SEV 60 (1969) 12 S. 538-548

Erklärung anhand eines Beispiels: Vorgegeben sei das folgende Netzwerk mit konzentrierten Elementen:



Diskretisierung im Zeitbereich



Zustand des Netzes zur Zeit $t - \Delta t$ sei bekannt (entweder Anfangswerte oder Ergebnis eines vorausgegangenen Schrittes)

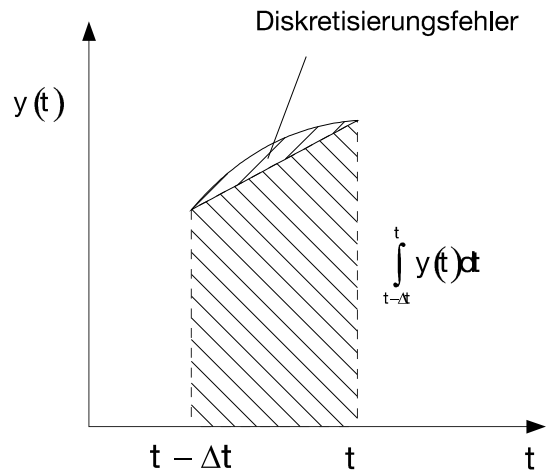
1. L-Zweig

$$u_1 - u_2 = L \frac{di_{1-2}}{dt}$$

oder in Integralform

$$i_{1-2}^{(t)} = i_{1-2}^{(t-\Delta t)} + \frac{1}{L} \int_{t-\Delta t}^t (u_1 - u_2) dt$$

Integration mithilfe der Trapezregel



Näherungsweise ersetzt durch Trapez $\rightarrow \frac{y(t - \Delta t) + y(t)}{2} \cdot \Delta t$

Damit erhält man:

$$i_{1-2}^{(t)} = i_{1-2}^{(t-\Delta t)} + \frac{\Delta t}{2L} \left[u_1^{(t-\Delta t)} - u_2^{(t-\Delta t)} + u_1^{(t)} - u_2^{(t)} \right]$$

Dieselbe Beziehung erhält man, wenn man die Spannung linear interpoliert und den Differenzialquotienten durch einen zentralen Differenzenquotienten ersetzt:

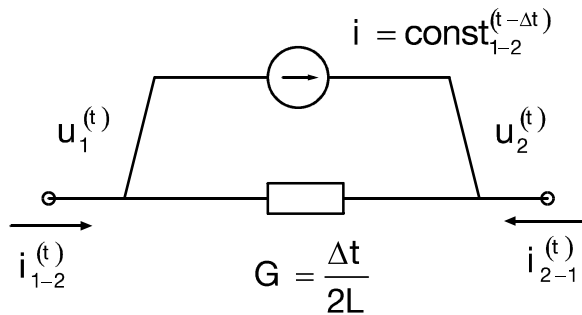
$$\frac{u_1^{(t-\Delta t)} - u_2^{(t-\Delta t)} + u_1^{(t)} - u_2^{(t)}}{2} = L \cdot \frac{i_{1-2}^{(t)} - i_{1-2}^{(t-\Delta t)}}{\Delta t}$$

Diese Gleichung kann wie folgt geschrieben werden:

$$i_{1-2}^{(t)} = \frac{\Delta t}{2L} \left[u_1^{(t)} - u_2^{(t)} \right] + \text{const}_{1-2}^{(t-\Delta t)}$$

$$\text{mit } \text{const}_{1-2}^{(t-\Delta t)} = i_{1-2}^{(t-\Delta t)} + \frac{\Delta t}{2L} \left[u_1^{(t-\Delta t)} - u_2^{(t-\Delta t)} \right]$$

Ersatzschaltbild:



Leitwert $G = \frac{\Delta t}{2L}$ und parallel liegende Quelle eingprägten Stromes, dessen Werte durch die Vergangenheit bestimmt sind.

2. C-Zweig:

$$u_1^{(t)} - u_3^{(t)} = u_1^{(t-\Delta t)} - u_3^{(t-\Delta t)} + \frac{1}{C} \int_{t-\Delta t}^t i_{1-3} dt$$

Anwendung der Trapezregel:

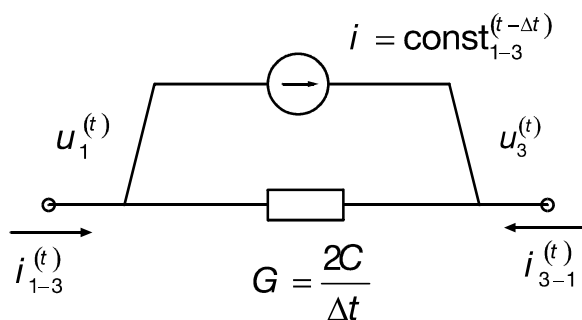
$$u_1^{(t)} - u_3^{(t)} = u_1^{(t-\Delta t)} - u_3^{(t-\Delta t)} + \frac{\Delta t}{2C} [i_{1-3}^{(t)} + i_{1-3}^{(t-\Delta t)}]$$

oder:

$$i_{1-3}^{(t)} = \frac{2C}{\Delta t} [u_1^{(t)} - u_3^{(t)}] + \text{const}_{1-3}^{(t-\Delta t)}$$

$$\text{mit } \text{const}_{1-3}^{(t-\Delta t)} = \frac{-2}{\Delta t} [u_1^{(t-\Delta t)} - u_3^{(t-\Delta t)}] - i_{1-3}^{(t-\Delta t)}$$

Ersatzschaltbild:



3. R-Zweig:

$$i_{1-4}^{(t)} = \frac{1}{R} [u_1^{(t)} - u_4^{(t)}]$$

4. Aufstellung der Knotenpunktgleichungen:

$$i_{1-2}^{(t)} + i_{1-3}^{(t)} + i_{1-4}^{(t)} = i_1^{(t)}$$

$$\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{R} \right] u_1^{(t)} - \frac{\Delta t}{2L} u_2^{(t)} - \frac{2C}{\Delta t} u_3^{(t)} - \frac{1}{R} u_4^{(t)} = i_1^{(t)} - \left[\text{const}_{1-2}^{(t-\Delta t)} + \text{const}_{1-3}^{(t-\Delta t)} \right]$$

Für ein Netz mit n Knotenpunkten → System mit n linearen Gleichungen

$$[Y][u^{(t)}] = [i^{(t)}] - [k^{(t-\Delta t)}]$$

$[Y]$ → reelle Knotenpunktleitwertmatrix

$[u^{(t)}]$ → Spaltenvektor mit den n Knotenpunktspannungen zur Zeit t

$[i^{(t)}]$ → Spaltenvektor der eingespeisten Knotenpunktströme zur Zeit t

$[k^{(t-\Delta t)}]$ → konstanter Spaltenvektor, enthält „Vergangenheitsausdrücke“ $\text{const}_{\mu-\nu}^{(t-\Delta t)}$

Dieses Gleichungssystem ist für jeden Zeitschritt zu lösen. Die Knotenpunktleitwertmatrix $[Y]$ ist konstant, solange die Schrittweite Δt unverändert bleibt. Sie ist symmetrisch bezüglich der Diagonale und sie ist reell (Ersatz durch ein Netz, das nur aus „ohmschen“ Widerständen besteht.).

Aufbau von $[Y]$ wie Knotenpunktadmittanzmatrix.

Y_{ii} = Summe der Leitwerte aller Ersatzschaltbild-Zweige, die an K.P. anliegen.

$Y_{ik} = Y_{ki}$ = negative Summe der Leitwerte aller Ersatzschaltbild-Zweige, die den K.P. i mit dem K.P. k verbinden.

Im Allgemeinen ist ein Teil der Knotenpunktspannungen vorgegeben und bekannt, die anderen sind unbekannt.

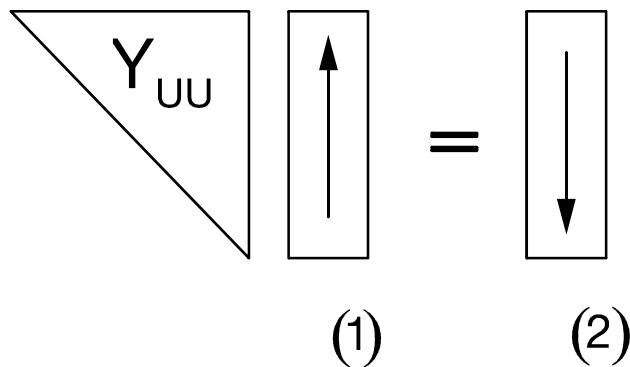
Aufteilung von $[Y]$

$$\begin{bmatrix} [Y_{VV}] & [Y_{VU}] \\ [Y_{UV}] & [Y_{UU}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_V^{(t)}] \\ [u_U^{(t)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [i_V^{(t)}] \\ [i_U^{(t)}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [k_V] \\ [k_U] \end{bmatrix}$$

$$[Y_{UV}][u_V^{(t)}] + [Y_{UU}][u_U^{(t)}] = [i_U^{(t)}] - [k_U]$$

$$[Y_{UU}][u_U^{(t)}] = [i_U^{(t)}] - [k_U] - [Y_{UV}][u_V^{(t)}]$$

Dieses Gleichungssystem ist für jeden Zeitschritt zu lösen. Lösung am zweckmäßigsten durch einmalige Dreieckszerlegung für $[Y_{UU}]$ und Anwendung des Dreieckszerlegungsprozesses auf die rechten Seiten mit anschließender Rücksubstitution.



Einmalig:

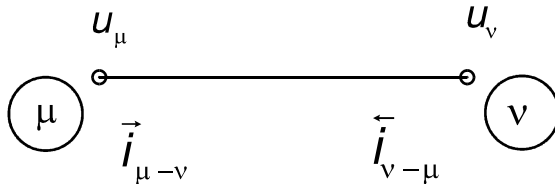
Dreieckszerlegung $Y_{UU} \Rightarrow Y_{UU}^{\Delta}$

In jedem Δt -Schritt:

- (1) ➔ Anwendung des Dreieckszerlegungsprozesses auf die rechten Seiten
- (2) ➔ Rücksubstitution

Zusatz:

Verlustlose einphasige Leitung als Zweig



Für die verlustlose Leitung gilt:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C' \frac{\partial u}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$u_{\rightarrow} = f_{\rightarrow}(x - vt) \quad u_{\rightarrow} = \Gamma \cdot i_{\rightarrow}$$

$$u_{\leftarrow} = f_{\leftarrow}(x + vt) \quad u_{\leftarrow} = -\Gamma \cdot i_{\leftarrow}$$

mit dem Wellenwiderstand $\Gamma = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ und der Wellengeschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$

f_{\rightarrow} = Funktion, die die vorwärtslaufende Welle beschreibt

f_{\leftarrow} = Funktion, die die rückwärtslaufende Welle beschreibt

Auch die Summe beider Wanderwellen ist eine Lösung des Differenzialgleichungssystems:

$$u = u_{\rightarrow} + u_{\leftarrow}$$

$$i = i_{\rightarrow} + i_{\leftarrow} = \frac{u_{\rightarrow}}{\Gamma} - \frac{u_{\leftarrow}}{\Gamma}$$

Damit ergibt sich:

$$u + \Gamma \cdot i = u_{\rightarrow} + u_{\leftarrow} + u_{\rightarrow} - u_{\leftarrow} = 2u_{\rightarrow}$$

$$u - \Gamma \cdot i = u_{\rightarrow} + u_{\leftarrow} - u_{\rightarrow} + u_{\leftarrow} = 2u_{\leftarrow}$$

bzw.

$$u + \Gamma \cdot i = 2f_{\rightarrow} (x - vt)$$

$$u - \Gamma \cdot i = 2f_{\leftarrow} (x + vt)$$

Für einen gedachten Beobachter, der sich auf der Leitung in positiver Richtung (links nach rechts) von (μ) nach (ν) mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist der Ausdruck $x - vt$ konstant und damit der Ausdruck $u + \Gamma \cdot i$

Im Ausgangspunkt (μ) zur Zeit $t-\tau$ gilt:

$$u_{\mu}^{(t-\tau)} + \Gamma \cdot i_{\mu-\nu}^{(t-\tau)} = \text{const}$$

Im Endpunkt (ν) zur Zeit t gilt:

$$u_{\nu}^{(t)} + \Gamma \cdot (-i_{\nu-\mu}^{(t)}) = \text{const} \quad \text{Strom von } \mu \text{ nach } \nu \text{ positiv}$$

somit

$$u_{\mu}^{(t-\tau)} + \Gamma \cdot i_{\mu-\nu}^{(t-\tau)} = u_{\nu}^{(t)} - \Gamma \cdot i_{\nu-\mu}^{(t)}$$

$$i_{\nu-\mu}^{(t)} = +\frac{1}{\Gamma} u_{\nu}^{(t)} - \frac{1}{\Gamma} u_{\mu}^{(t-\tau)} - i_{\mu-\nu}^{(t-\tau)}$$

$$i_{\nu-\mu}^{(t)} = +\frac{1}{\Gamma} u_{\nu}^{(t)} + \text{const}_{\nu-\mu}^{(t-\tau)}$$

$$\text{mit } \text{const}_{\nu-\mu}^{(t-\tau)} = -\frac{1}{\Gamma} u_{\mu}^{(t-\tau)} - i_{\mu-\nu}^{(t-\tau)}$$

Ebenso erhält man:

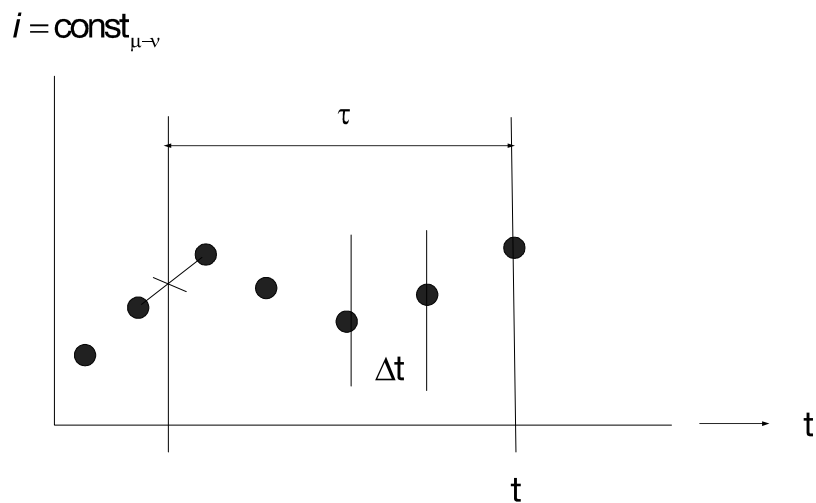
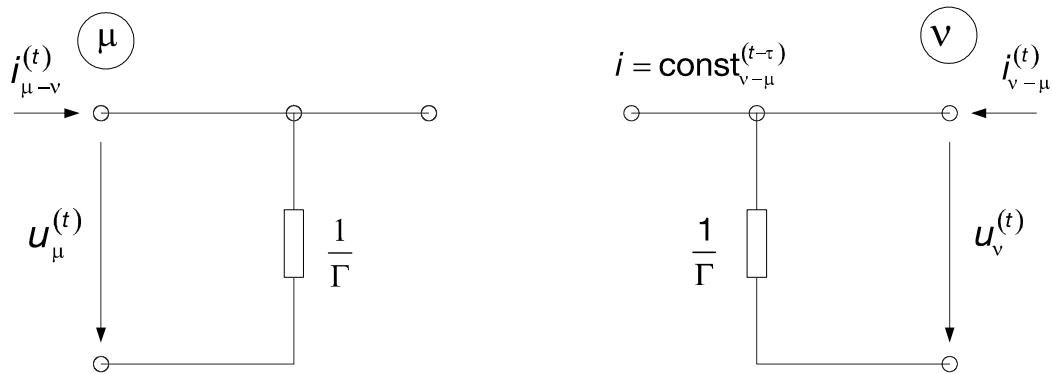
$$i_{\mu-\nu}^{(t)} = \frac{1}{\Gamma} u_{\mu}^{(t)} + \text{const}_{\mu-\nu}^{(t-\tau)}$$

$$\text{mit } \text{const}_{\mu-\nu}^{(t-\tau)} = -\frac{1}{\Gamma} u_{\nu}^{(t-\tau)} - i_{\nu-\mu}^{(t-\tau)}$$

Homogene verlustlose Leitung lässt sich durch zwei Netzwerke darstellen, die aus einer Parallelschaltung des inversen Wellenwiderstandes und einer eingprägten Stromquelle bestehen (analog Serienschaltung von Wellenwiderstand und Spannungsquelle).

Der Strom der Stromquelle am Leitungsanfang ermittelt sich aus den laufzeitverzögerten Werten von Strom und Spannung am Leitungsende bzw. am Ende aus den verzögerten Werten am Leitungsanfang.

Ersatzschaltbild:



Berechnungsverfahren:

Eine Wanderwelle, hervorgerufen durch den Strom und die Spannung am Leitungsende, läuft zum Leitungsanfang zurück.

Nach der Laufzeit τ kommt sie am Anfang an.

Diese zurücklaufende Welle wird über die Stromquelle am Leitungsanfang in das Netzwerk eingepreßt.

Analoges gilt für eine vorwärtslaufende Welle.

Verlustlose Mehrphasenleitung (zur Vertiefung)

$$-\frac{\partial [u]}{\partial x} = [L'] \frac{\partial [i]}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial [i]}{\partial x} = [C'] \frac{\partial [u]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 [u]}{\partial x^2} = [L'] [C'] \frac{\partial^2 [u]}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 [i]}{\partial x^2} = [C'] [L'] \frac{\partial^2 [i]}{\partial t^2}$$

m Phasen $\rightarrow m$ partielle Differenzialgleichungen

Entkoppelung \rightarrow Modalgrößen

$$[u] = [M][u_{\text{modal}}] \quad [u_{\text{modal}}] = [M]^{-1}[u]$$

$[M]$ Modalmatrix zur Matrix $[L'] [C']$

Die Spalten von $[M]$ sind die Eigenvektoren von $[L'] [C']$

$$[i] = [N][i_{\text{modal}}] \quad [i_{\text{modal}}] = [N]^{-1}[i]$$

$[N]$ Modalmatrix zur Matrix $[C'] [L']$

$[L'] [C']$ und $[C'] [L']$ haben zwar gleiche Eigenwerte λ , die Modalmatrizen sind jedoch verschieden, da das Matrixprodukt nicht kommutativ ist:

$$[C'] [L'] \neq [L'] [C']$$

Für die Modalgrößen ergibt sich:

$$[M] \frac{\partial^2 [u_{\text{modal}}]}{\partial x^2} = [L'] [C'] [M] \frac{\partial^2 [u_{\text{modal}}]}{\partial t^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^2 [u_{\text{modal}}]}{\partial x^2} = [M]^{-1} [L'] [C'] [M] \frac{\partial^2 [u_{\text{modal}}]}{\partial t^2}$$

bzw.

$$[N] \frac{\partial^2 [i_{\text{modal}}]}{\partial x^2} = [C'] [L'] [N] \frac{\partial^2 [i_{\text{modal}}]}{\partial t^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^2 [i_{\text{modal}}]}{\partial x^2} = [N]^{-1} [C'] [L'] [N] \frac{\partial^2 [i_{\text{modal}}]}{\partial t^2}$$

Forderung:

Modale Ausbreitungskonstanten für Spannungen und Ströme müssen gleich sein.

$$\rightarrow [M]^{-1} [L'] [C'] [M] = [N]^{-1} [C'] [L'] [N]$$

Diese Forderung ist erfüllt für

$$[N] = [C'] [M] \quad \text{bzw.} \quad [C'] = [N] [M]^{-1}$$

$$\begin{aligned} [M]^{-1} [L'] [C'] [M] &= [N]^{-1} [C'] [L'] [N] \\ &= [N]^{-1} [C'] [L'] [C'] [M] \\ &= [N]^{-1} [N] [M]^{-1} [L'] [C'] [M] \\ &= [M]^{-1} [L'] [C'] [M] \end{aligned}$$

damit Entkoppelung:

$$\frac{\partial^2 [u_m]}{\partial x^2} = [\Lambda] \frac{\partial^2 [u_m]}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 [i_m]}{\partial x^2} = [\Lambda] \frac{\partial^2 [i_m]}{\partial t^2}$$

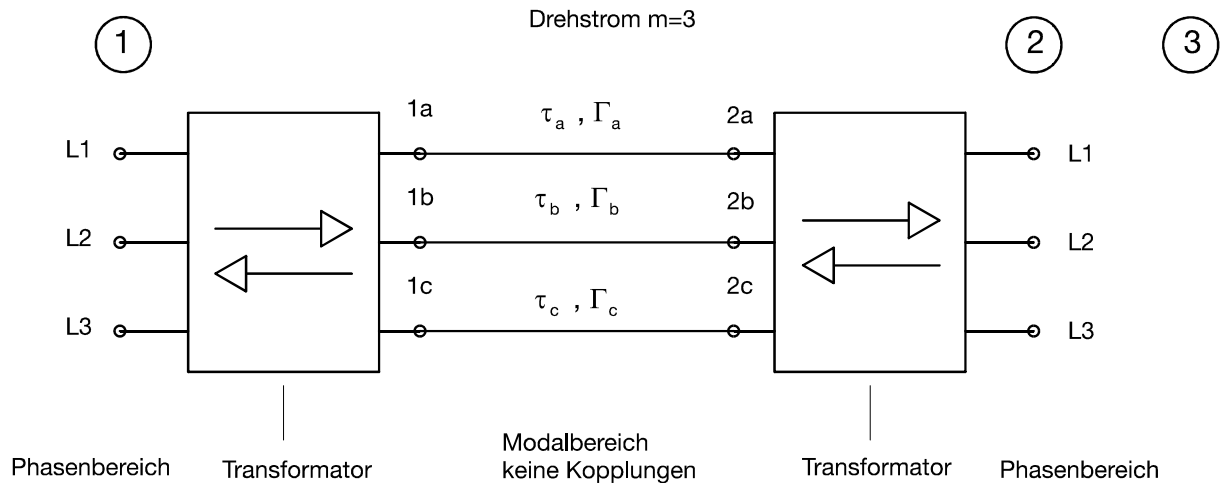
λ_μ Eigenwerte von $[L'] [C']$ bzw. $[C'] [L']$

Jede der m unabhängigen Leitungsgleichungen im Modalbereich kann nun wie für eine einphasige verlustlose Leitung gelöst werden ($\mu=1 \dots m$ für den modalen Bereich).

$$\text{modale Wellengeschwindigkeit: } v_\mu = \sqrt{\frac{1}{\lambda_\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L'_\mu C'_\mu}}$$

$$\text{modale Laufzeit: } \tau_\mu = \frac{l}{v_\mu}$$

$$\text{modaler Wellenwiderstand: } \Gamma_\mu = \sqrt{\frac{L'_\mu}{C'_\mu}}$$



bei vollkommener Verdrehung $\rightarrow \alpha\beta 0$ -Transformation (statt symmetrischer Komponenten, da Transformationsmatrix reell und damit gesamte Berechnung im Bereich der reellen Zahlen bleibt)

$$i_{M(1a-2a)}^{(t)} = \frac{1}{\Gamma_a} \cdot u_{M1a}^{(t)} + \text{const}_{M(1a-2a)}^{(t-\tau_a)}$$

$$i_{M(1b-2b)}^{(t)} = \frac{1}{\Gamma_b} \cdot u_{M1b}^{(t)} + \text{const}_{M(1b-2b)}^{(t-\tau_b)}$$

$$i_{M(1c-2c)}^{(t)} = \frac{1}{\Gamma_c} \cdot u_{M1c}^{(t)} + \text{const}_{M(1c-2c)}^{(t-\tau_c)}$$

Rücktransformation:

$$\begin{bmatrix} i_{(1-2)}^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{const}_{1-2} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit: } \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \text{const}_{1-2} \end{bmatrix} = - \left\{ \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \left[\left(\begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} u_{M2}^{(t-\tau)} + i_{M(2-1)}^{(t-\tau)} \right] \right\}$$

Achtung: Modale Wellenwiderstände und Ausbreitungsgeschwindigkeiten und damit Laufzeiten sind im Allgemeinen für die m modalen Leitungen verschieden, insbesondere unterscheiden sich die Größen im Nullsystem von denen im $\alpha\beta$ -System.

Beispiel für typische Leitung:

$$\Gamma_0 = 740 \, \Omega$$

$$v_0 = 186.000 \, \text{km/s}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = 310 \, \Omega$$

$$v_{\alpha\beta} = 293.000 \, \text{km/s}$$

