

Elektrische Energiesysteme

Vorlesungsteil Energieübertragung

Göran Andersson
EEH – Power Systems Laboratory
ETH Zürich

September 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	vii
Literaturempfehlung	viii
1 Einführung	1
1.1 Elektrische Energie	1
1.2 Erzeugung elektrischer Energie	1
1.2.1 Kraftwerke	2
1.2.2 Erzeugungsstruktur verschiedener Länder	7
1.3 Übertragung und Verteilung elektrischer Energie	8
1.3.1 Spannungsebenen und Netztypen	9
1.3.2 Internationale Verbundnetze und Synchronzonen	12
1.3.3 Netzstruktur	13
1.3.4 Unterwerke	16
1.3.5 Netzbetrieb und -überwachung	16
1.4 Verbrauch elektrischer Energie	17
2 Leistung im Wechselstromsystem	21
2.1 Leistung im einphasigen Netzwerk	21
2.2 Erhaltung der Scheinleistung	27
2.3 Leistung im dreiphasigen, symmetrischen Netzwerk	29
2.3.1 Symmetrische Dreiphasensysteme	29
2.3.2 Leistung in symmetrischen Dreiphasensystemen	32
2.3.3 Stern-Dreieck-Transformation	34
2.3.4 Einphasige Berechnung von Dreiphasensystemen	35
2.4 Zusammenfassung	35
3 Transformatoren	37
3.1 Einphasiger Transformator	37
3.1.1 Gekoppelte Wicklungen	37
3.1.2 Ideales Transformatormodell	39
3.1.3 Reales Transformatormodell	42
3.2 Dreiphasiger Transformator	46
3.2.1 Aufbau von Dreiphasentransformatoren	47

3.2.2	Dreiphasiges Transformatormodell	48
4	Bezogene Grössen	51
4.1	Zweck der Rechnung mit bezogenen Grössen	51
4.2	Einführung der p.u.-Grössen an einem Beispiel	52
4.3	Wahl der Bezugsspannungen bei vernetzten Vierpolelementen	54
4.4	Umrechnung zwischen p.u.-Systemen	56
5	Leitungen	59
5.1	Einführung	59
5.1.1	Physikalische Bedeutung von Leitungen	59
5.1.2	Grund für die hohe Übertragungsspannung	60
5.2	Leitungsparameter	61
5.2.1	Leiter	62
5.2.2	Induktivität	63
5.2.3	Kapazität	73
5.2.4	Ohmsche Elemente	77
5.2.5	Leitungsparameter von Kabeln und Freileitungen . . .	78
5.3	Elektromagnetische Felder unter Freileitungen	79
5.3.1	Elektrisches Feld	80
5.3.2	Magnetisches Feld	81
5.4	Leitungsmodell und Lösung der Wellengleichung	86
5.4.1	Ersatzschaltbild eines Leitungselements	87
5.4.2	Telegraphengleichung	89
5.4.3	Wellengleichung	90
5.4.4	Interpretation der Wellenausbreitung	92
5.4.5	Miteinbezug der Randbedingungen	93
5.4.6	Wellengleichung der verlustlosen Leitung	96
5.5	Leitungsmodelle	97
5.5.1	Allgemeines Vierpolmodell einer Leitung	97
5.5.2	Verlustlose Leitung	100
5.5.3	Zusätzliche Vereinfachungen	100
5.5.4	Vergleich verschiedener Leitungsmodelle	101
6	Grundregeln der Energieübertragung	103
6.1	Entkoppelte Grössen	103
6.2	Natürliche Leistung	105
6.2.1	Natürliche Leistung einer verlustlosen Leitung	105
6.2.2	Natürliche Leistung einer verlustbehafteten Leitung .	107
6.2.3	Typische Werte für Freileitungen und Kabel	108
6.3	Leerlauf und Kurzschluss	108
6.3.1	Leerlauf	109
6.3.2	Kurzschluss	110
6.4	Blindleistungsbedarf einer Leitung	111

6.5	Spannungsabfall entlang einer Leitung	113
6.6	Wirkungsgrad von Hochspannungsleitungen	116
6.7	P - U -Charakteristik	117
6.8	P - δ -Charakteristik	119
6.9	Belastungscharakteristik und -grenzen	122
6.10	Drehstromkabel	123
7	Symmetrische Komponenten in Dreiphasensystemen	127
7.1	Unsymmetrische Betriebszustände	127
7.2	MG0-Transformation	128
7.3	Leistungen im MG0-System	138
7.4	MG0-Ersatzschaltbild	140
7.4.1	Elementares Versorgungssystem	140
7.4.2	Sternpunktbetrachtungen	143
7.4.3	Sternlast	144
7.4.4	Transformatoren	145
7.5	Analyse von Fehlern mithilfe der MG0-Transformation	148
7.5.1	Einpoliger Erdschluss	148
7.5.2	Zweipoliger Kurzschluss ohne Erdberührung	153
7.5.3	Dreipoliger Kurzschluss	156
7.6	Das gelöschte Netz	158
A	Nullimpedanz von Transformatoren	167
B	Nullimpedanz von Freileitungen	171
B.1	Schleifenimpedanz von Einfachleitungen mit Erdrückleitung .	171
B.2	Nullimpedanz von Drehstromfreileitungen	173
	Literaturverzeichnis	177

Vorwort

Im Vorlesungsteil *Energieübertragung* der Vorlesung *Elektrische Energiesysteme* im fünften Studiensemester des Departements Informationstechnologie und Elektrotechnik der ETH Zürich wird die Energieübertragung über Leitungen bzw. Kabel untersucht. Das Ziel besteht darin, den Weg der Energie vom Generator zum Endverbraucher mittels Gleichungen beschreiben zu können und damit das Netzverhalten sowohl im symmetrischen als auch im unsymmetrischen Betriebszustand berechnen zu können. Im Gegensatz zum Vorlesungsteil *Hochspannungstechnologie*, wo einzelne Komponenten des Hochspannungsnetzes (z.B. Leistungsschalter) betrachtet werden, interessiert uns hier vielmehr das Zusammenspiel der Geräte im Hochspannungsnetz, weshalb wir z.B. den Leistungsschalter nur als „offen“ oder „geschlossen“ modellieren. Als Einführung werden in diesem Skript nur Leitungen von einer Quelle zu einer Last (sogenannte Stichleitungen) betrachtet. Darauf aufbauend wird in der Vorlesung *Modellierung und Analyse elektrischer Netze* im sechsten Semester der Energietransport sowohl im stationären als auch im transienten Zustand im vermaschten Netz¹ dargelegt. Auch im Rahmen der Vorlesung *Optimierung liberalisierter elektrischer Energiesysteme*² im siebten Semester, wird nochmals auf die in dieser Vorlesung vermittelten Grundlagen zumindest teilweise zurückgegriffen.

Wegen der Wichtigkeit des Transformators in der Energieübertragung werden zuerst nochmals dessen Grundlagen kurz wiederholt und anschliessend ein Vierpolmodell des Transformators für Simulationsberechnungen hergeleitet. Anschliessend wenden wir uns dem Grundelement in dieser Vorlesung zu, der Leitung.

Nach einer Einführung leiten wir ein mathematisches Vierpolmodell (Telegraphengleichung von Maxwell) für die Leitungen her. Bei der Lösung der Telegraphengleichung beschränken wir uns auf stationäre, d.h. sinusförmige, Grössen und gelangen so zu den Leitungsgleichungen, die das Verhalten von Strom und Spannung entlang einer Hochspannungsleitung beschreiben. Abgerundet wird dieser Teil durch die Interpretation der Leitungsgleichungen und durch weiterführende Betrachtungen über das Zusammenspiel von Wirk- und Blindleistungstransport über eine Hochspannungsleitung mit der

¹Ein vermaschtes Netz ist dann vorhanden, wenn es zwischen einigen (oder auch allen) Knoten nicht nur eine Leitung für den Energietransport gibt. Mit der Vermaschung wird eine Redundanz der Übertragungswege geschaffen, die für die Versorgungssicherheit eine ungeheure Bedeutung hat. Diese Redundanz bedeutet, dass bei Ausfall einer Leitung/eines Kraftwerks die Versorgung der Abnehmer von Energie noch immer gewährleistet ist.

²Dabei wird z.B. die Versorgungssicherheit der Kunden mit Energie maximiert, wobei gleichzeitig die gegebenen Einschränkungen (z.B. maximal über eine Leitung fliessende Leistung) beachtet werden.

anliegenden Spannung.

In einem zweiten Teil wird eine Einführung in die Berechnung von Kurzschlüssen in dreiphasigen Hochspannungsleitungen gegeben. Dabei lernen wir ein Transformationsverfahren kennen, das eine vereinfachte Betrachtung von dreiphasigen Netzen ermöglicht (Mit-, Gegen- und Nullsystem).

Spezieller Dank geht an die Institutsmitarbeiterinnen und -mitarbeiter welche dieses Skript erstellt haben.

Zürich, am 25. Juni 2008

Göran Andersson

Literaturempfehlung

Wir möchten darauf hinweisen, dass Studierenden der ETH Zürich neben diesem Skriptum ein umfangreiches Angebot an Standardliteratur in der Bibliothek der ETH zur Verfügung steht. Für das Studium empfehlen wir vor allem folgende Werke:

- [1] BERGEN, A. R. ; VITTAL, V.: *Power Systems Analysis*. 2nd edition. Prentice-Hall, 2000.
- [2] OEDING, D. ; OSWALD, B. R.: *Elektrische Kraftwerke und Netze*. 6. Auflage. Springer, 2004.
- [3] CRASTAN, V.: *Elektrische Energieversorgung 1*. Band 1. Springer, 2000.

1

Einführung

Dieses Kapitel soll eine allgemeine Einführung in das Gebiet der elektrischen Energiesysteme geben. Zuerst wollen wir über grundsätzliche Eigenschaften und Bedeutung elektrischer Energie diskutieren, dann wenden wir uns der Kette Erzeugung-Transport-Verbrauch zu.

1.1 Elektrische Energie

Elektrische Energie wird durch Umwandlung aus Primärenergien gewonnen. In der Energiewirtschaft bezeichnet man sie als Endenergie, da sie vom Endverbraucher als solche abgenommen wird. Im Vergleich zu anderen Endenergien wie z.B. Erdgas oder Kohle zeichnet sich elektrische Energie vor allem durch folgende Eigenschaften aus:

- relativ einfach mess-, steuer- und regelbar
- vielseitig anwendbar
- effiziente Nutzbarmachung der Primärenergien
- hohe thermodynamische Wertigkeit, d.h. sie kann mit einem hohen Wirkungsgrad in mechanische oder thermische Energie umgewandelt werden
- mit relativ niedrigen Verlusten transportierbar

Elektrische Energie hat aber nicht nur Vorteile. Der bedeutendste Nachteil ist wohl die Gefahr hoher Spannungen und Ströme für den Menschen. Ein weiterer Nachteil ist die schlechte Speicherbarkeit die dazu führt, dass die Erzeugung in den Kraftwerken in jedem Moment dem Verbrauch angepasst, also geregelt werden muss. Trotzdem hat sich elektrische Energie als eine der wichtigsten Endenergieformen durchgesetzt.

Abbildung 1.1 stellt den weltweiten Gesamtendenergieverbrauch nach Energieformen dar. Öl und Gas sind nach wie vor die am häufigsten eingesetzten Endenergieformen, gefolgt von Elektrizität mit etwa 16% am Gesamtanteil.

1.2 Erzeugung elektrischer Energie

Generell wissen wir, dass Energie weder erzeugt noch verbraucht werden kann. Trotzdem spricht man oft von der Erzeugung elektrischer Energie

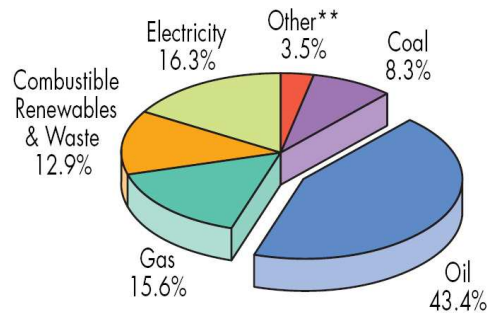


Abbildung 1.1. Weltweiter Gesamtendenergieverbrauch nach Energieformen im Jahr 2005; **Geothermie, Solar, Wind, etc. [4].

und meint damit die Umwandlung einer Primärenergie in elektrische Energie. Diese Umwandlung findet in Kraftwerken statt.

1.2.1 Kraftwerke

Elektrizität kann aus verschiedenen Primärenergieträgern gewonnen werden. Traditionell nutzt man vor allem die potentielle und kinetische Energie von Wasser indem man es über Turbinen abarbeitet und die thermische Energie von Dampf den man in Dampfturbinen entspannt. Zur Dampferzeugung greift man üblicherweise auf fossile (Kohle, Öl) oder nukleare Brennstoffe (angereichertes Uran) zurück. Ein weiterer fossiler Energieträger ist Gas welches in Gasturbinen zu mechanischer Energie verarbeitet wird.

Durch die weltweite Forderung nach Reduktion der Treibhausgasemissionen und durch die Liberalisierung der Energimärkte zeichnet sich seit einigen Jahren ein neuer Trend ab, nämlich jener der *dezentralen Energieerzeugung* (*decentralized, distributed generation or embedded generation*).¹ Es entstehen immer mehr kleine, meist regenerative² Primärenergien nutzende Kraftwerke die nicht an die grossen Übertragungsnetze sondern direkt beim Verbraucher angeschlossen sind. Dadurch ergeben sich neue technische, ökonomische und regulatorische Herausforderungen für die Energieversorgung.

Somit setzt man seit einigen Jahren vermehrt auf Wind- und Solarenergie als Primärquellen. Ausserdem werden konventionelle Primärenergien vermehrt in anderer (zumeist effizienterer) Form genutzt, so z.B. fossile Brennstoffe in *Brennstoffzellen* (*fuel cells*) oder *Mikroturbinen*. Auch der umgekehrte Weg ist möglich, nämlich vorhandene Technologien mit neuartigen Brennstoffen zu betreiben. Als Beispiel sei hier der Einsatz von Biogas in Verbrennungskraftmaschinen genannt. Solche Quellen liefern (Ab-)Wärme und

¹Bei wichtigen Fachbegriffen ist der entsprechende englische Ausdruck in Klammern angeführt.

²Der Begriff *regenerativ* ist umstritten, weil es streng genommen keine wirklich regenerativen Quellen gibt. Selbst die Sonne wird irgendwann erlöschen.

elektrische Energie, man spricht in dem Zusammenhang von *Kraft-Wärme-Kopplung (KWK) (Combined Heat and Power (CHP))*.

Verschiedene Faktoren beeinflussen die Standorte von Kraftwerken. Kohlekraftwerke werden z.B. in der Nähe grosser Kohlevorkommen oder nahe an Transportwegen, wie z.B. Häfen, errichtet. Kernkraftwerke werden normalerweise nicht in der Nähe von grossen Agglomerationen gebaut, ausserdem soll der Standort gewisse Forderungen wie z.B. Erdbeben- und Überflutungssicherheit erfüllen. Generell benötigen thermische Kraftwerke Kühlwasser, deshalb werden sie oft an grossen Flüssen gebaut. Windkraftanlagen können nur dort effizient betrieben werden, wo die Windverhältnisse genug sogenannte Volllaststunden pro Jahr versprechen, z.B. in Küstenregionen oder auf Bergkämmen.

Wasserkraftwerke

Wasserkraftwerke nutzen die kinetische und potentielle Energie von Wasser in Flüssen und Stauseen. Je nach Fallhöhe und Durchflussmenge überwiegt die Ausnutzung der kinetischen oder potentiellen Energie des Wassers. Man unterscheidet zwischen *Hoch-, Mittel- und Niederdruckkraftwerken*.

Als *Hochdruckkraftwerke* bezeichnet man Kraftwerke mit sehr grossen Fallhöhen im Bereich von 500 bis 2000 m. Die potentielle Energie von aufgestautem Wasser kann in Speicherseen vorrätig angelegt und zu Spitzenlastzeiten abgearbeitet werden. Dementsprechend bezeichnet man diese Kraftwerke auch als *Speicherkraftwerke*. Zur Energieumwandlung werden sogenannte *Pelton-turbinen* eingesetzt. In Schwachlastzeiten kann in anderen Kraftwerken erzeugter Strom dazu verwendet werden, die Speicher zu füllen. In diesem Fall spricht man von *Pumpspeicherkraftwerken*. Die Generatoren werden dann als Antriebsmotoren für die Pumpen verwendet. Hochdruckkraftwerke zeichnen sich durch ihre rasche Einsatzmöglichkeit aus. Sie können ihre Leistungsabgabe innerhalb kürzester Zeit (Minuten) auch starken Schwankungen anpassen.

Von *Mitteldruckkraftwerken* spricht man bei mittleren Fallhöhen von bis zu etwa 50 m und mittleren Durchflussmengen. Potentielle und kinetische Energie werden gleichermassen genutzt. Zum Einsatz kommen meist *Francisturbinen*.

Niederdruckkraftwerke werden auch als *Laufwasser- oder Flusskraftwerke* bezeichnet. Die Fallhöhen sind relativ gering (einige Meter), dafür ist die Durchflussmenge gross. Hier eignen sich *Kaplan-turbinen* als Antriebsmaschinen für die Generatoren. Da Pegelstand und Durchflussmenge von Flüssen kurzfristig (mehrere Stunden bis ein Tag) relativ konstant sind, werden diese Kraftwerke vorwiegend zur Grundlastdeckung eingesetzt. Auch Niederdruckkraftwerke können zur Leistungsregelung eingesetzt werden, allerdings mit höheren Zeitkonstanten und in einem kleineren Leistungsbereich als Hochdruckkraftwerke.

Als „Faustformel“ für die in einem Wasserkraftwerk erzeugte Wirkleistung gilt die Beziehung

$$P \approx 8 \cdot Q \cdot H \quad (1.1)$$

wobei Q die Durchflussmenge in m^3/s und H die Fallhöhe in m ist; die Einheit von P ergibt sich zu kW. In dieser Gleichung sind die Wirkungsgrade von hydraulischem System η_h , Turbine η_t und Generator η_g im Gesamtwirkungsgrad berücksichtigt:

$$\eta = \eta_h \cdot \eta_t \cdot \eta_g \approx 0.82 \quad (1.2)$$

wobei

$$\eta_h \approx 0.90, \eta_t \approx 0.93 \text{ und } \eta_g \approx 0.98$$

Der Faktor 8 in (1.1) entsteht durch Multiplikation des Gesamtwirkungsgrades mit der Erdbeschleunigung.

Die Leistungsabgabe eines Kraftwerkes ist also jeweils linear von der Durchflussmenge und von der Fallhöhe abhängig.

In Europa und Nordamerika führen die Flüsse im Winter oder in langen Trockenperioden wesentlich weniger Wasser als im Sommer oder in Zeiten häufiger Niederschläge. In Gebirgsregionen spielt auch das Schmelzwasser im Frühling eine bedeutende Rolle. Die Leistung von Wasserkraftwerken ist aus diesem Grund starken saisonalen Schwankungen unterworfen. Vor allem im Winter kann in Mitteleuropa oft nur bis zu einem Viertel der ausgebauten Engpassleistung produziert werden.

Thermische Kraftwerke

In thermischen Kraftwerken werden heiße Gase in Gas- oder Dampfturbinen entspannt. Typische Wirkungsgrade konventioneller Dampfkraftwerke liegen unter 40%. Durch Fernwärmeauskopplung und kombinierte Prozesse kann dieser erhöht werden. Grundsätzlich unterscheidet man *Gas-* und *Dampfkraftwerke* (*gas and steam power stations*):

- Gaskraftwerke: Hier gelangen Gasturbinen zum Einsatz, im Prinzip entsprechen diese Flugzeugturbinen.
- Dampfkraftwerke: Hier gelangen Dampfturbinen zum Einsatz. Üblich sind mehrstufige Turbinen (Hoch-, Mittel- und Niederdruckteil). Nach Art der Dampferzeugung unterscheidet man:
 - Fossil gefeuerte Kraftwerke (fossil fuel)
 - Kernkraftwerke (nuclear power plant)
- Kombinierte Gas- und Dampfkraftwerke (GUD) (Combined Cycle Gas Turbine (CCGT))

Thermische Kraftwerke sind im Vergleich zu Wasserkraftwerken schlecht regelbar. Bezüglich der thermisch-mechanischen Ausrüstung müssen gewisse maximale Temperaturgradienten eingehalten werden. Dies führt zu hohen Zeitkonstanten bezüglich Veränderung der Abgabeleistung. Zudem ist der Betrieb eines thermischen Kraftwerkes meist nur in einem gewissen Betriebszustand wirtschaftlich sinnvoll, der Betrieb als Regelkraftwerk ist meistens unwirtschaftlich. Diese Gründe führen dazu, dass Dampfkraftwerke fast ausschliesslich zur *Grundlastdeckung* verwendet werden. Gasturbinen können variierenden Leistungsanforderungen innerhalb einiger Minuten folgen und werden deshalb auch zur Spitzenlastdeckung eingesetzt.

Windkraftwerke

Windkonverter nutzen die kinetische Energie von Wind. Moderne Anlagen erzeugen Leistungen von bis zu 5 MW bei Rotordurchmessern bis zu 120 m. Vor allem in windstarken Küstenregionen kann Windenergie sehr effizient und kostengünstig genutzt werden.

Die erzeugte Leistung eines Windkonverters P steigt mit der dritten Potenz der Windgeschwindigkeit v an:

$$P \propto v^3 \quad (1.3)$$

Durch die natürliche Schwankung der Windgeschwindigkeit schwankt wie aus Gleichung (1.3) ersichtlich die abgegebene Leistung sehr stark. Der Einsatz von Windenergie verlangt daher ganz besonders nach schnell einsetzbaren Regelkraftwerken die diese starken Leistungsänderungen ausgleichen können.

Solarkraftwerke

Sonnenlicht kann unmittelbar oder mittelbar zur Erzeugung von elektrischer Energie eingesetzt werden. Die beiden Technologien sind

- Photovoltaik (direkte Umwandlung von Sonnenlicht in Gleichstrom) und
- Solarthermische Kraftwerke (Sonnenlicht zur Dampferzeugung).

Auch Solarkraftwerke sind auf das natürliche Dargebot an Sonnenlicht angewiesen. Die erzeugte Leistung schwankt vor allem zwischen Tag und Nacht, aber auch zwischen den Jahreszeiten. Ausserdem hat die Witterung respektive Bewölkung einen starken Einfluss auf die erzeugte Leistung.

Brennstoffzellen

Brennstoffzellen sind Systeme, die durch chemische Konversation von Treibstoffen direkt thermische und elektrische Energie erzeugen. Als Abfallpro-

dukt entsteht Wasser. Als Brennstoffe kommen (Bio-)Gas, Erdölprodukte, Wasserstoff und Alkohol in Frage.

Je nach Anwendung setzt man verschiedene Technologien ein. Die wichtigsten beiden Typen sind

- Proton Exchange Membrane (PEM): Betriebstemperatur 50 bis 80 °C, Wirkungsgrad ca. 50%, typische Anwendung im KFZ-Bereich.
- Solid Oxide Fuel Cell (SOFC): Betriebstemperatur 600 bis 1000 °C, Wirkungsgrad ca. 70%, Anwendung im stationären Bereich.

Die maximalen Nennleistungen von Brennstoffzellenkraftwerken bewegen sich derzeit im Bereich mehrerer MW.

Brennstoffzellen können auch als Speicher eingesetzt werden, indem man die abgegebene elektrische Energie zur Erzeugung von Wasserstoff nutzt. Dieser kann in einem Speicher aufbewahrt und jederzeit wieder zu elektrischer Energie umgewandelt werden. Man bezeichnet diese Technologie als *reversible Brennstoffzellen (reversible fuel cell)*.

Geothermiekraftwerke

Geothermiekraftwerke nutzen Erdwärme als Primärenergie. Dazu werden Bohrungen bis zu einer Tiefe von 5000 m unter die Erdoberfläche vorgenommen. Mit einem Temperaturgradienten von etwa 5 °C pro 100 m ergibt sich eine Temperaturdifferenz von etwa 200 °C. Durch die sogenannten Injektionsbohrungen wird kaltes Wasser in die Tiefe gepresst, in den Produktionsbohrungen steigt das erwärmte Wasser auf welches über einen Wärmetauscher geleitet wird. Aus dem Sekundärkreislauf des Wärmetauschers wird thermische und mechanische/elektrische Energie entnommen.

Über 99% der Erdmasse hat eine Temperatur von mehr als 1000 °C. Entsprechend gross bzw. nahezu unerschöpflich ist das vorhandene Potential. Zur Zeit sind weltweit etwa 200 Erdwärmekraftwerke in Betrieb.

In Basel läuft derzeit das Geothermie-Projekt namens *Deep Heat Mining Basel*. Aus den fünf Bohrungen (drei mit je 5000 m, zwei mit 2700 m Tiefe) wird man eine Leistung von 3 MW elektrisch und 20 MW thermisch (Fernwärme) gewinnen.

Ein Vorteil der Geothermie gegenüber anderen „alternativen“ Energieformen ist das konstante Dargebot an Primärenergie (Erdwärme). Dadurch wird eine bedarfsgerechte Anpassung der erzeugten Leistung möglich.

Kraftwerkseinsatz

Wie erwähnt variiert durch den Einsatz dargebotsabhängiger Primärenergien wie z.B. Wasser, Wind und Sonne nicht nur der Verbrauch sondern auch die Erzeugung der elektrischen Leistung je nach Witterung und Saison. Man

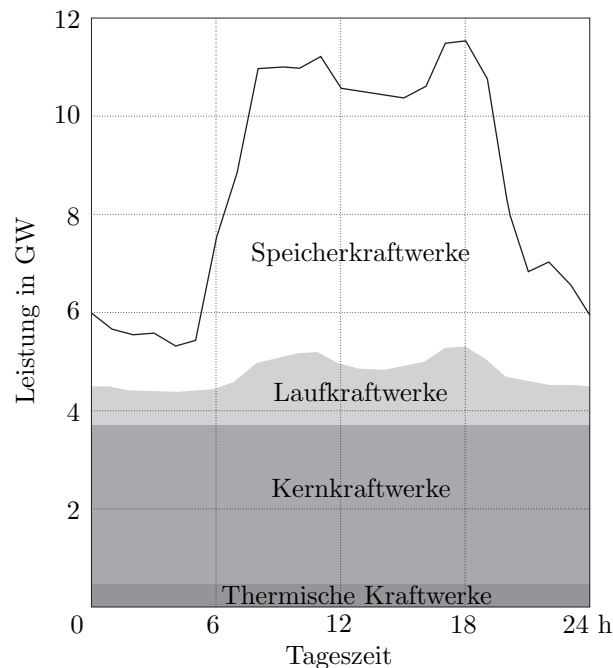


Abbildung 1.2. Erzeugung elektrischer Energie an einem Wintertag in der Schweiz.

spricht von stochastisch erzeugenden Quellen, die einer stochastisch verbrauchenden Last gegenüberstehen. Die Differenz muss von Kraftwerken beglichen werden, die ihre Leistung dem Bedarf anpassen können.

Abbildung 1.2 zeigt den Einsatz verschiedener konventioneller Kraftwerkstypen zur Energieerzeugung an einem Wintertag in der Schweiz.

1.2.2 Erzeugungsstruktur verschiedener Länder

Die geographische Lage eines Landes und seine landschaftlichen Gegebenheiten wirken sich stark auf den Primärenergieeinsatz zur Erzeugung elektrischer Energie aus. Abbildung 1.3 zeigt die Erzeugungsstruktur verschiedener Länder im Vergleich. Hier sollen kurz ein paar Beispiele beleuchtet werden. Norwegen z.B. deckt seinen Elektroenergiebedarf beinahe vollständig mit Wasserkraftwerken, da aus geographischen Gründen ein hohes Dargebot an Wasser vorhanden ist. Frankreich, auf der anderen Seite, deckt rund drei Viertel seines elektrischen Energiebedarfs durch Kernkraft ab. Dänemark, nicht in der Abbildung dargestellt, erzeugt etwa 19% seiner elektrischen Energie aus Wind [6]. Durch die geographische Nähe Dänemarks zu Schweden und Norwegen, die viele Wasserkraftwerke haben, ist es ausserdem möglich, mit Windkraftanlagen überschüssig produzierte Leistung dorthin zu exportieren, da Norwegen und Schweden leicht ihre Speicherkraftwerke regulieren bzw. Wasser anstatt es abzarbeiten speichern können. Diese so-

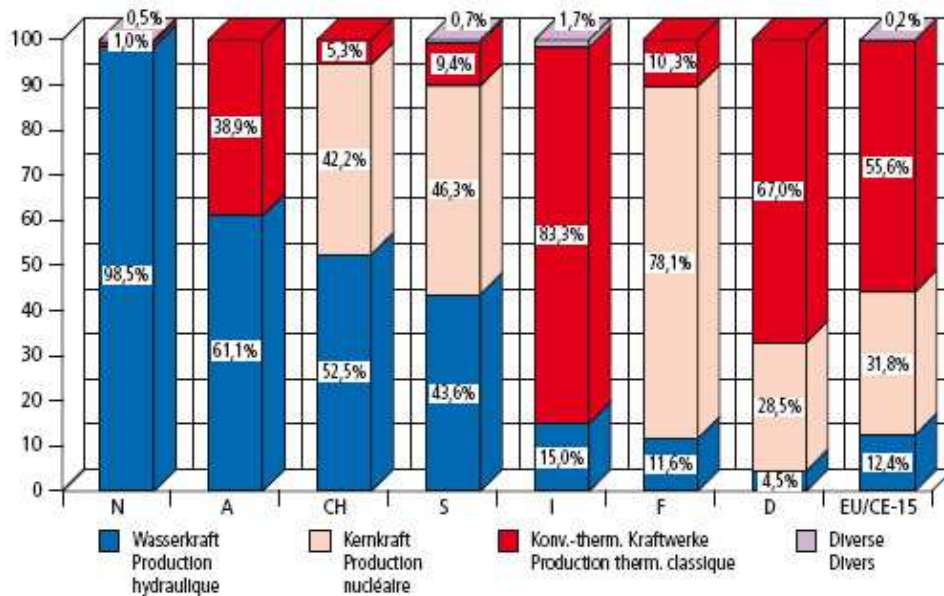


Abbildung 1.3. Anteil der verschiedenen Kraftwerkstypen an der elektrischen Energieerzeugung in Europa im Jahr 2006 [8].

genannte *Regelleistung/-energie* (*balance power/energy*) wird in Zukunft an Bedeutung gewinnen, da die zunehmende Anzahl von dargebotsabhängigen, stochastisch erzeugenden Quellen zu grösseren Abweichungen von den prognostizierten Erzeugungsprofilen führen wird.

In der Schweiz werden über 50% des gesamten Elektroenergiebedarfs durch Wasserkraft abgedeckt, womit das vorhandene Potential bereits relativ gut ausgenutzt ist. In einer vom Bundesamt für Energie veröffentlichten Studie wird der bis 2050 realisierbare zusätzliche Ausbau der Wasserkraft auf 16% geschätzt [7]. Neben der Wasserkraft werden 40% der abgenommenen Energie in Kernkraftwerken umgewandelt.

1.3 Übertragung und Verteilung elektrischer Energie

Aus ökonomischen, umweltpolitischen, technologischen und aus Gründen der Verfügbarkeit ist es nicht möglich, den gesamten elektrischen Energiebedarf der grossen Lastzentren – Städte, Agglomerationen und Industrien – direkt vor Ort zu decken. Deshalb wird ein Grossteil der elektrischen Energie in grossen, zentralen Kraftwerken erzeugt und über elektrische Leitungen bzw. Leitungsnetze zu den Konsumenten transportiert.

Grundelement des elektrischen Übertragungs- und Verteilnetzes ist die Punkt zu Punkt Verbindung, der Stromkreis oder sog. Strang. Bei Drehstrom oder Dreiphasenstrom handelt es sich dabei um drei Leiter, bei Gleich-

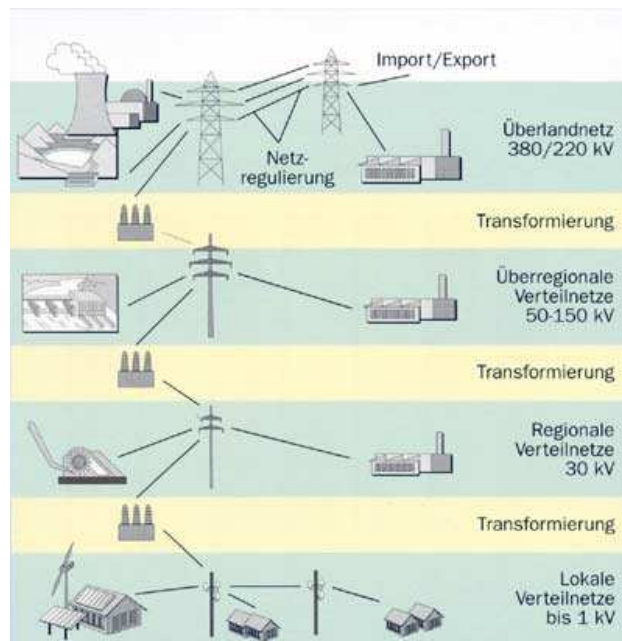


Abbildung 1.4. Die Verteilung auf den verschiedenen Spannungsebenen (Quelle: VSE).

strom und einphasigem Wechselstrom um zwei Leiter. Als Leiter kommen

- Freileitungen (overhead lines),
- Kabel (cables), oder
- GasIsolierte Leitungen (GIL) (Gas Insulated Lines (GIL))

in Frage. Diese werden zu Netzen zusammengeschaltet.

1.3.1 Spannungsebenen und Netztypen

Wie in Abbildung 1.4 dargestellt ist ein elektrisches Energieversorgungsnetz aus verschiedenen Spannungsebenen aufgebaut. Je nach Länge des Transportweges und der geforderten Transportkapazität ergibt sich ein wirtschaftliches Optimum bei einer gewissen Nennspannung. Höhere Spannungen senken die Übertragungsverluste, führen aber zu erhöhten Kosten für die Komponenten.³ Tabelle 1.1 zeigt eine übliche Einteilung der Netzspannungsebenen.

Das Elektrizitätsnetz lässt sich in gewisser Hinsicht mit dem Strassenverkehrsnetz vergleichen. Die grossen 400-kV- und 220-kV-Überland- oder

³Der Zusammenhang zwischen Spannung und Übertragungsverlusten wird im Abschnitt 5.1.2 behandelt.

Tabelle 1.1. Netzspannungsebenen.

Ebene	Kürzel	Nennspannung
Niederspannung (low voltage)	NS (LV)	unter 1 kV
Mittelspannung (medium voltage)	MS (MV)	bis ca. 50 kV
Hoch-/Höchstspannung (high voltage)	HS (HV)	ab 110 kV

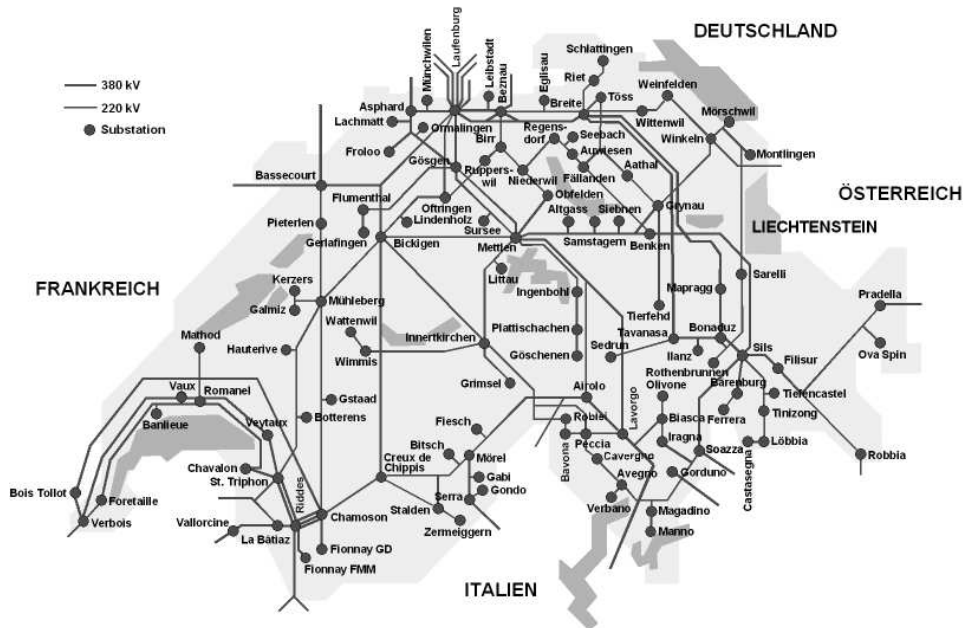
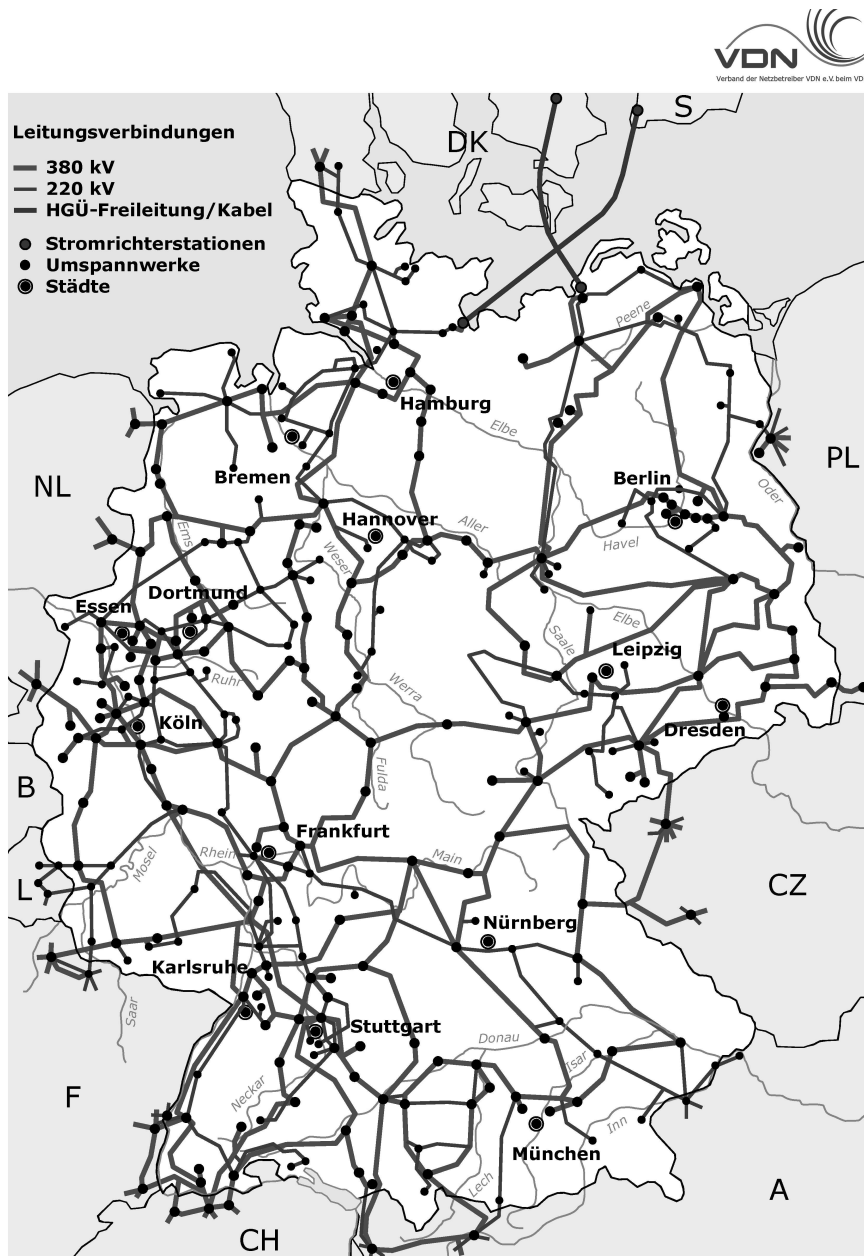


Abbildung 1.5. Das schweizerische Höchstspannungsnetz (Quelle: ETRANS).

Fernleitungen dienen dem Transport grosser Leistungen über weite Distanzen, z.B. von Speicherseen in den Alpen und von Kernkraftwerken zu den grossen Unterwerken in den Verbraucherzentren oder aber auch für den Energieaustausch mit in- und ausländischen Elektrizitätsgesellschaften. Diese Leitungen bilden das sogenannte *Übertragungsnetz* (*transmission network*) und entsprechen somit den Autobahnen im Strassenverkehrsnetz. Abbildung 1.5 zeigt das Höchstspannungsübertragungsnetz der Schweiz. Die regionale Energieverteilung (*sub-transmission*) geschieht in der Schweiz über das 50-kV-Verteilnetz und erlaubt den Energietransport von den grossen Unterwerken zu den Regionalwerken (in der Schweiz als Kantonswerke bezeichnet). Dieses Netz lässt sich mit dem Kantonsstrassennetz gleichsetzen. Die Verteilung von den Kantonswerken in die einzelnen Gemeinden entspricht schliesslich den Hauptstrassen und geschieht auf einem Niveau von 16 kV und 10 kV, man spricht vom *Verteilnetz* (*distribution network*). Zum Vergleich dazu zeigt Abbildung 1.6 das Höchstspannungsnetz Deutschlands.



Deutsches Höchstspannungsnetz 2005

Abbildung 1.6. Das deutsche Höchstspannungsnetz (Quelle: VDN).

Tabelle 1.2. Netztypen.

Typ	Verteilnetz	Übertragungsnetz
Zweck	(Fein-)Verteilung	Transit
Spannungsebene	NS, MS	HS
Topologie	Strahlen- oder Ringnetz	vermaschtes Netz
Ausdehnung	Gemeinde, Kanton	Bund, Kontinent

Die wesentlichen Unterschiede zwischen Übertragungs- und Verteilnetzen sind in Tabelle 1.2 nochmals zusammengefasst.

1.3.2 Internationale Verbundnetze und Synchronzonen

Stellt man zwischen zwei oder mehreren Übertragungsnetzen elektrische Verbindungen her, so erreicht man dadurch

- eine erhöhte Zuverlässigkeit der Versorgung im gesamten Verbundgebiet und
- die Möglichkeit elektrische Energie international auszutauschen, d.h. zu handeln.

Der zweite Punkt bildet eine fundamentale Grundlage für einen funktionierenden Elektrizitätsmarkt, denn ohne Transportmöglichkeit kann kein Handel vollzogen werden.

Grundsätzlich können Netze auf zwei Arten gekoppelt werden, nämlich

- *synchron* = Wechsel-/Drehstromverbindung oder
- *asynchron* = Gleichstromverbindung

Verbindet man Drehstromnetze direkt, d.h. durch Verbindung der drei Phasen, so laufen diese synchron und werden dementsprechend als *Synchronzone* bezeichnet. Zusätzlich zu den beiden oben genannten Punkten ergeben sich in solchen Zonen noch weitere, vor allem die Betriebsführung betreffende Vorteile.

Das Übertragungsnetz der Schweiz ist Teil des europäischen Verbundnetzes der *Union for the Coordination of Transmission of Electricity (UCTE)*. In diesem Verbund sind die Übertragungsnetze von 23 Ländern – von Portugal bis Polen – synchronisiert. Etwa 450 Millionen Menschen werden über das UCTE-Netz mit Strom versorgt. Die Netze von Dänemark, Finnland, Island, Norwegen und Schweden sind Teil des Verbundnetztes der *Organization for Nordic Electrical Cooperation (NORDEL)*. Die Netze von UCTE und NORDEL laufen nicht synchron. Um dennoch einen Energieaustausch zu ermöglichen, existieren mehrere Gleichstromverbindungen, sogenannte

Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragungssysteme (HGÜ) (High Voltage Direct Current (HVDC)), z.B. zwischen Deutschland und Schweden in Form eines Unterseekabels. Einige Staaten Osteuropas sind mit Staaten der früheren Sowjetunion zum *EES/VES*-Verbund zusammengeschaltet. In Nordafrika bilden Marokko, Algerien, Tunesien u.a. das *COMELEC*-Verbundnetz. In Nordamerika ist das Netz der USA in drei Synchronzonen organisiert: *Eastern Interconnection*, *Western Interconnection* und *ERCOT Interconnection* (Texas).

1.3.3 Netzstruktur

Eine einfache Punkt zu Punkt Verbindung würde schon beim Ausfall eines Elementes im Stromkreis zu einer Versorgungsunterbrechung führen. Deshalb reichen einfache Leitungen nicht aus, um eine zuverlässige Versorgung mit Elektrizität zu gewährleisten. Man braucht ein Netz an Leitungen, in dem beim Ausfall einer Leitung die Energie auf parallelen Wegen befördert werden kann. Dies entspricht einer Redundanz. Um eine hohe Verfügbarkeit der Stromversorgung zu garantieren, müssen elektrische Energieversorgungsnetze jederzeit unter den folgenden zwei, wesentlich unterschiedlichen Systemkonditionen funktionieren:

- Im *Normalbetrieb*, wenn alle Komponenten, wie beispielsweise Kraftwerke, Transformatoren oder Leitungen, ordnungsgemäss funktionieren, und
- im *Ausfallbetrieb*, wenn bis zu einer definierten Anzahl der im Betrieb stehenden Komponenten ausfallen.

Wenn in einem Netz *eine* beliebige Komponente ausfallen darf, ohne dass die Versorgung dadurch beeinträchtigt wird, so wird dieses als $N - 1$ *sicheres* Energieübertragungssystem bezeichnet. Entsprechend steht $N - 2$ *sicher* für ein Netz, das beim Ausfall von *zwei* beliebigen Komponenten noch weiter betrieben werden kann. Im Normalfall werden Netze $N - 1$ sicher betrieben, spezielle, sehr wichtige Verbindungen sind $N - 2$ sicher.

Abbildung 1.7 zeigt zwei Netze, die durch den gleichen Bus versorgt werden. Das linke Netz ist nur über einen Transformator angeschlossen und bereits der Ausfall dieser einen Komponente führt zu einer Versorgungsunterbrechung. Dieses Netz ist also nicht $N - 1$ sicher. Das rechte Netz hingegen wird auch dann noch versorgt, wenn eine der beiden Zuleitungen ausfällt, es ist also $N - 1$ sicher.

Die konsequente Anwendung der $N - 1/N - 2$ Bedingung führt zum *vermaschten Netz (meshed grid)*, welches man sich als regelmässiges Maschenwerk vorstellen kann. Jeder Zweig kann ausfallen, ohne dass die Versorgungssicherheit beeinflusst wird, da es genug parallele oder redundante

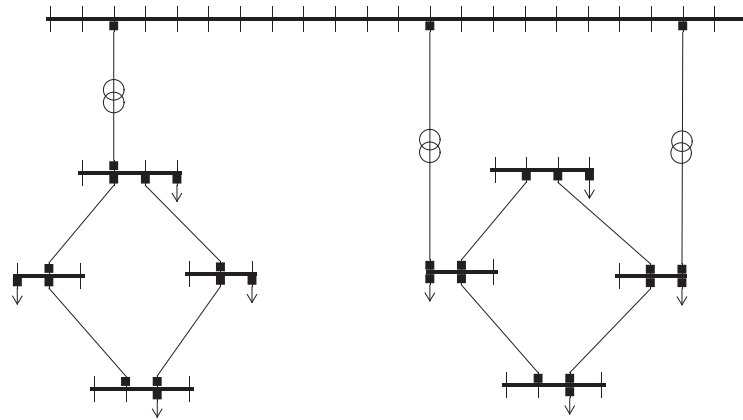


Abbildung 1.7. Schematisches Versorgungsnetz: links $N - 0$ sicher, rechts $N - 1$ sicher.

Versorgungspfade gibt, die den Leitungsausfall kompensieren. Das Übertragungsnetz, das zur Übertragung grosser Leistungen über weite Entfernungen dient, ist nach diesen Gesichtspunkten aufgebaut.

Ein zu hoher Vermaschungsgrad hat jedoch auch Nachteile: zu viele Stromkreise liefern im Fehlerfall schwierig zu bewältigende Kurzschlussströme.⁴ Ab einer gewissen Redundanz durch eine hohe Anzahl von Stromkreisen wird die Redundanz durch eine weitere Masche nur unbedeutend verbessert.

Bei der Feinverteilung der elektrischen Energie in kleineren geographischen Gebieten, wie z.B. in einer Stadt, müssen andere Punkte beachtet werden. Wenn das Netz ebenfalls stark vermascht wäre, würde dies eine sehr dichte Belegung der Fläche des Versorgungsgebietes bedeuten. Durch die geringen geographischen Abmessungen sind die Impedanzen zwischen den Einspeisepunkten gering, wodurch ungewollt hohe Leistungen über ein solches Netz fließen könnten. Aus wirtschaftlichen Gründen sind jedoch die Leitungen auf der Verteilebene knapp ausgelegt. Durch zusätzlich sich überlagernde Leistungen könnten deshalb die physikalischen Belastungsgrenzen überschritten werden. Aus diesem Grund sind die Verteilnetze nicht vermascht sondern strahlenförmig angeordnet, es sind also Inseln mit radialer Verteilung, die nicht $N - 1$ sicher sind. Zunehmend werden auch sogenannte *offene Ringschaltungen* (*open rings*) eingesetzt (siehe Abbildung 1.8). Im Normalfall werden beide Verteilschienen separat versorgt. Sollte eine Zuleitung ausfallen, würden beide Verteilschienen über die verbleibende Zuleitung versorgt. Das System ist quasi $N - 1$ sicher, jedoch mit einem kurzen Unterbruch, bis der Ringschalter geschlossen ist.

⁴Eine starke Vermaschung entspricht im Prinzip einer Parallelschaltung vieler Leitungswiderstände.

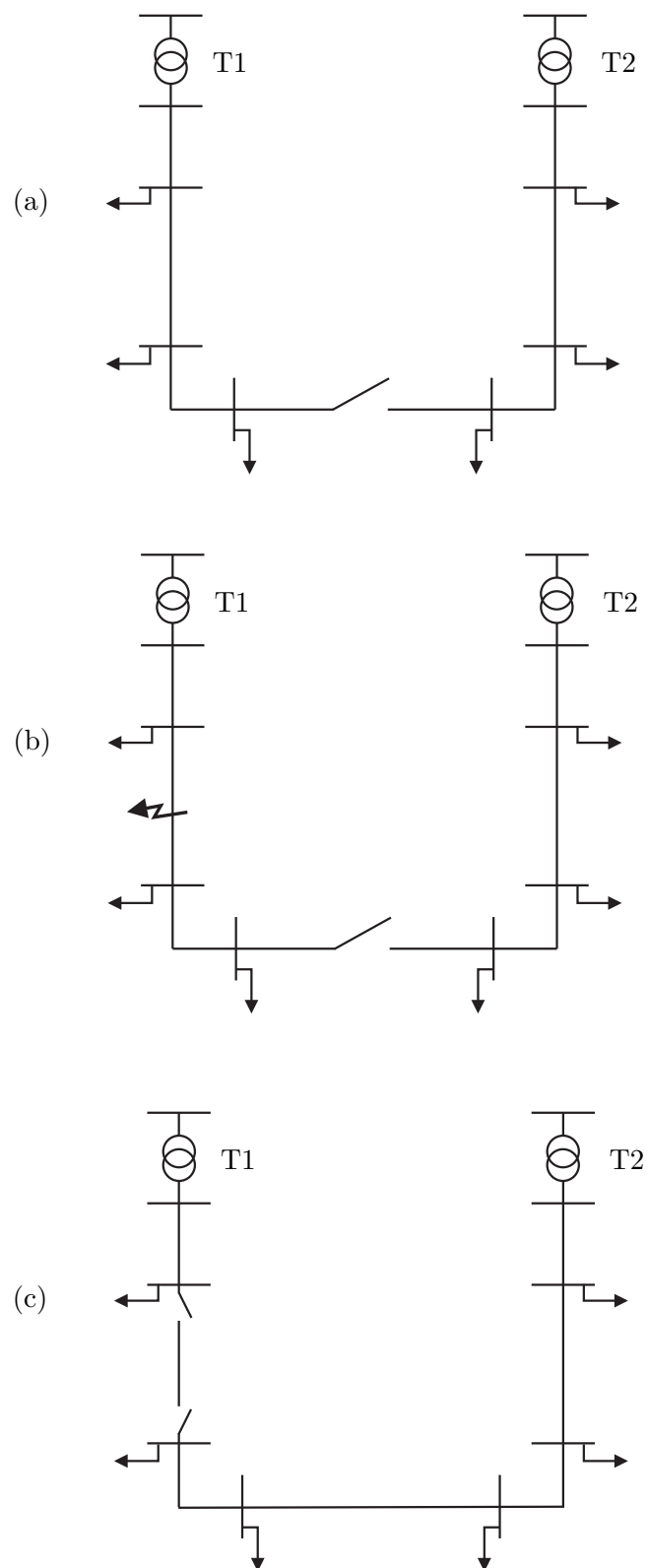


Abbildung 1.8. Offene Ringschaltung (a), Fehler (b), geschlossene Ringschaltung (c).

1.3.4 Unterwerke

Beim Weiterziehen des Vergleiches von Elektrizitäts- und Strassennetz könnte man die Unterwerke mit Kreuzungen gleichsetzen. Sie verbinden die einzelnen Spannungsebenen (z.B. 220 kV und 110 kV) miteinander und erfüllen im wesentlichen folgende Aufgaben:

- Die Unterwerke bilden die Knoten des elektrischen Netzes, in welchen die Leitungen der verschiedenen Spannungsebenen zusammenlaufen und mittels Transformatoren gekoppelt werden.
- Die Unterwerke sind die Schaltstationen, in denen die zu- und wegführenden Leitungen — je nach betrieblichen Anforderungen — zu- und abgeschaltet werden können; hier sind Veränderungen der Netztopologie möglich.
- In den Unterwerken befinden sich Mess-, Steuer- und Regeleinrichtungen wie z.B. Spannungs- und Stromwandler, Schutzgeräte, Zähler, Kompensationseinrichtungen, etc.
- An den 50/16-kV- bzw. 110/16-kV-Unterwerken übergeben die Überlandwerke⁵ die Energie an die Kantonswerke zur Feinverteilung.

1.3.5 Netzbetrieb und -überwachung

Die Überwachung des Netzes erfolgt über verschiedene regionale, den grossen Unterwerken untergeordnete Netzsteuerstellen. Diese Netzsteuerstellen übermitteln ihre Daten mit leitungsgerichteten Tonfrequenzkanälen, Richtstrahlverbindungen, Koaxialkabeln und immer häufiger über optische Kabel an die Leitstellen des zentralen Lastverteilers. Die so übermittelten Daten geben einem Lastverteiler einen Überblick über den Betriebszustand des jeweiligen Netzes und erlauben ihm, das Netz sicher und optimal zu betreiben.

Die elektrische Energieversorgung wird nicht nur durch Mengen (MWh) und Leistungen (MW) charakterisiert, sondern auch durch Qualitätsmerkmale und -anforderungen. Um elektrische Energie verwenden zu können, ist die Einhaltung der Spannungsform (Sinus) sowie einer konstanten Amplitude und Frequenz von grosser Wichtigkeit. Mit Hilfe von Regel- und Kompensationseinrichtungen wird gewährleistet, dass Abweichungen der effektiven Spannung von der Nennspannung beim Kunden typischerweise kleiner als $\pm 10\%$ sind.

⁵In der Schweiz gibt es sieben Überlandwerke: ATEL (Aare Tessin AG), BKW (Bernische Kraftwerke AG), EGL (Elektrizitätsgesellschaft Laufenburg AG), EWZ (Elektrizitätswerk der Stadt Zürich), EOS (Energie Ouest Suisse), NOK (Nordostschweizerische Kraftwerke) und CKW (Zentralschweizerische Kraftwerke).

Ein weiteres Merkmal ist die Verfügbarkeit der elektrischen Energie; aus wirtschaftlichen Gründen ist es nicht realistisch, eine Versorgungsverfügbarkeit von 100% zu erwarten. Im Schnitt beträgt die Verfügbarkeit der elektrischen Energieversorgung in der Schweiz rund 99.98%, was etwa 1.7 Stunden Netzausfall pro Jahr entspricht.⁶ Dieser Wert ist beachtlich, besonders wenn man bedenkt, dass Planung und Betrieb der Netze rund um die Uhr unter anderem nach folgenden Kriterien optimiert werden: wirtschaftliche Bereitstellung der Energie, Reserven, Behebung von Störungen, Wartung und eine hohe Ausnutzung der Komponenten.

Was die elektrische Energieübertragung im Gegensatz z.B. zu einer Pipeline für den Erdgastransport noch zusätzlich erschwert, ist die Tatsache, dass im Energieübertragungssystem keine Energie gespeichert werden kann. Folglich muss die Leistung, die momentan benötigt wird, auch momentan zur Verfügung gestellt werden. Ist dies nicht der Fall, kommt es zu folgenden Szenarien:

- Wenn der Leistungsbedarf der Lasten höher ist als die augenblicklich erzeugte Leistung, dann sinkt die Netzfrequenz unter den Nennwert (50 Hz).
- Wenn die Kraftwerke mehr erzeugen als die Kunden momentan verbrauchen, dann steigt die Netzfrequenz über den Nennwert.

Im Netz der UCTE wird die Frequenz auf $|\Delta f| < 0.05$ Hz geregelt.

1.4 Verbrauch elektrischer Energie

Wie erwähnt beträgt der Anteil der elektrischen Energie am gesamten Endenergieverbrauch weltweit etwa 20%. Der grösste Teil davon wird beim Endverbraucher nochmals umgewandelt, und zwar in

- mechanische Energie,
- chemische Energie,
- Wärme und
- Licht.

Dabei teilt sich der Endverbrauch von elektrischer Energie in westlichen Industriestaaten beinahe gleichmässig auf die Bereiche Industrie, öffentlicher Bereich und Haushalte auf [1].

⁶Im Zusammenhang mit der vermehrten Einbindung von erneuerbaren Erzeugern und der damit verbundenen stochastischen Energieerzeugung wird diskutiert, ob eine solch hohe Verfügbarkeit für Privatpersonen überhaupt anzustreben ist. So gibt es Netzbetreiber mit Lasten, die tiefere Stromtarife bezahlen, dafür bei Lieferengpässen durch den Netzbetreiber abgeschaltet werden dürfen (je nach Abmachung z.B. zehn Stunden pro Monat).

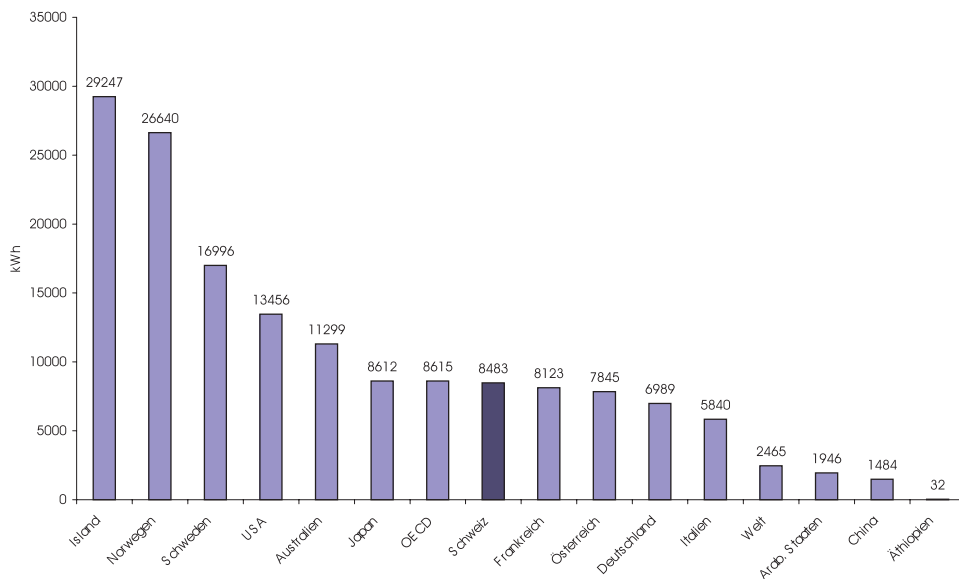


Abbildung 1.9. Durchschnittlicher Pro-Kopf-Verbrauch an elektrischer Energie im Jahr 2002 [9].

Der Pro-Kopf-Verbrauch an elektrischer Energie ist von Land zu Land sehr unterschiedlich. Abbildung 1.9 zeigt einige Länder im Vergleich. Dabei fällt auf, dass Island, Norwegen und Schweden die Länder mit dem weltweit höchsten Pro-Kopf-Elektrizitätsverbrauch sind. Der Grund dafür sind lange, kalte Winter mit wenig Tageslicht und vor allem elektrische Heizungen. Ausserdem gibt es in Island und Norwegen grosse Industrien die Elektrolyseprozesse betreiben. Japan, Frankreich und Österreich liegen etwa gleichauf mit der Schweiz im OECD-Schnitt. Der elektrische Energieverbrauch ist sehr starken zeitlichen Schwankungen unterworfen. Die abgenommene Leistung schwankt

- *tageszeitlich*: In Abbildung 1.10 fallen vor allem die „Mittagsspitze“ und die „Abendsspitze“ auf. In der Nacht ist der Verbrauch niedrig.
- *wöchentlich*: An den Werktagen ist der Verbrauch höher als am Wochenende. Feiertage sind besonders interessant, je nach Anlass weisen sie hohen oder niedrigen Verbrauch auf.
- *saisonal bzw. jahreszeitlich*: In Mitteleuropa wird im Winter mehr Energie verbraucht als im Sommer. In südlicheren Gebieten ist die Situation umgekehrt, dort braucht man im Sommer viel Strom für Klimaanlage.

Ausserdem hängt die abgenommene Leistung von vielen anderen, teilweise stochastischen Grössen wie der Witterung ab. Die Erzeugung muss in je-

dem Augenblick dem Verbrauch nachgeführt werden. Die Schwierigkeit besteht darin, eine genaue *Lastprognose* (*load forecast*) für den nächsten Tag zu machen. Gelingt dies nicht, so kann es passieren, dass man aufgrund unvorhergesehenem Lastverhaltens und fehlender Erzeugungsreserven teure Ausgleichsleistung aus dem Verbundnetz beziehen muss.

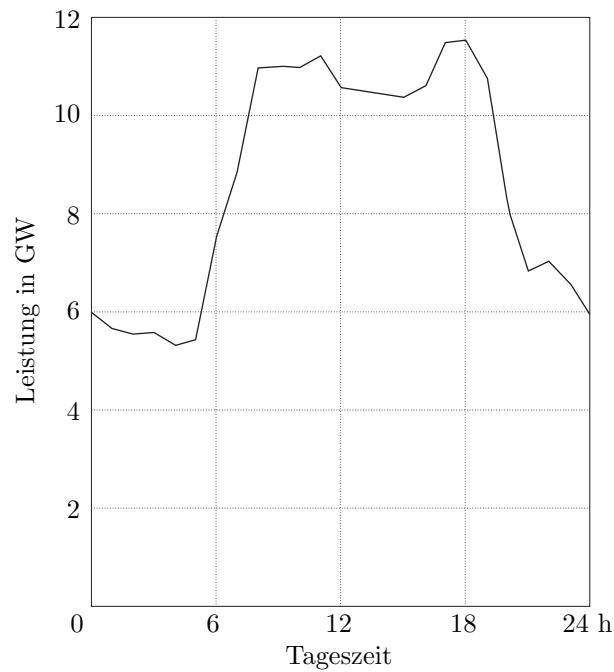


Abbildung 1.10. Verbrauch elektrischer Energie an einem Wintertag in der Schweiz.

2

Leistung im Wechselstromsystem

In diesem Kapitel untersuchen wir die Leistung sinusförmiger Spannungen und Ströme in Ein- und Dreiphasensystemen. Es handelt sich hauptsächlich um eine Repetition von bereits bekannten Grundlagen, die eine wichtige Basis für die folgenden Kapitel bilden.

2.1 Leistung im einphasigen Netzwerk

Betrachtet wird ein beliebiges Wechselstromnetzwerk im *stationären Zustand (steady state)*. Das Netzwerk enthält passive Elemente (R, L, C) sowie nur rein sinusförmige Strom- und Spannungsquellen gleicher Frequenz. Dadurch sind alle Ströme und Spannungen in diesem Netzwerk rein sinusförmig und lassen sich durch ihre Amplitude, ihre Phasenlage bezogen auf eine willkürlich definierte Nulllage, sowie ihre Frequenz beschreiben. Die Momentanwerte für Spannung und Strom an einem Element des Netzwerkes können durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t) \quad (2.1a)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.1b)$$

Dabei steht \hat{U} bzw. \hat{I} für den Wert der Amplitude, während φ für die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung steht. Die Kreisfrequenz ω ist definiert als

$$\omega = 2\pi f \quad (2.2)$$

f entspricht dabei der Nennfrequenz des Netzes (z.B. 50 Hz in Europa, 60 Hz in Nordamerika). Oft werden anstelle der Amplitudenwerte \hat{U} und \hat{I} die Effektivwerte¹ U und I verwendet; die Größen stehen in folgendem Zusammenhang:

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (2.3a)$$

$$I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad (2.3b)$$

¹Der Effektivwert eines Wechselstromes entspricht dem Wert eines Gleichstromes, wenn durch den Wechselstrom in einem Widerstand im Mittel die gleiche Wärme abgegeben wird wie durch den Gleichstrom.

Für den Momentanwert der Leistung multiplizieren wir nun die Momentanwerte von Spannung und Strom und erhalten

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \widehat{U}\widehat{I} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \\
 &= \widehat{U}\widehat{I} \cos(\omega t) \left(\cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi \right) \\
 &= \widehat{U}\widehat{I} \left(\cos^2(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \varphi \right) \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Beziehungen

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \quad (2.5a)$$

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad (2.5b)$$

ergibt sich für den Momentanwert der Leistung

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \widehat{U}\widehat{I} \cos \varphi (1 + \cos(2\omega t))}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \widehat{U}\widehat{I} \sin \varphi \sin(2\omega t)}_2 \quad (2.6)$$

Diese Terme sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Betrachten wir den ersten Summanden, so sehen wir, dass die Leistung aufgrund des Cosinus-Terms in der Klammer zwischen Null und dem Maximalwert $\widehat{U}\widehat{I} \cos \varphi$ oszilliert. Das zeitliche Mittel dieses Summanden kann mit den Effektivwerten aus Gleichung (2.3a) und (2.3b) als

$$P = \frac{1}{2} \widehat{U}\widehat{I} \cos \varphi = UI \cos \varphi \quad (2.7)$$

ausgedrückt werden. Dieser zeitliche Mittelwert P wird als *Wirkleistung* (*active/real power*) bezeichnet, der Faktor $\cos \varphi$ wird *Leistungsfaktor* (*power factor*) genannt. Die Einheit der Wirkleistung ist Watt (W).

Der zweite Summand in Gleichung (2.6) ist im zeitlichen Mittel Null. Durch den Sinus-Term mit der Frequenz 2ω oszilliert er zwischen $\pm \frac{1}{2} \widehat{U}\widehat{I} \sin \varphi$. Die Amplitude dieser Schwingung

$$Q = \frac{1}{2} \widehat{U}\widehat{I} \sin \varphi = UI \sin \varphi \quad (2.8)$$

wird als *Blindleistung* (*reactive power*) bezeichnet. Die Einheit der Blindleistung ist Volt-Ampere-reaktiv (Var).

Sinusförmige Größen können auch als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden. Die Zeitfunktion $x(t)$ wird zum rotierenden Zeiger \underline{X} :

$$x(t) = \widehat{X} \cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \underline{X} = \frac{\widehat{X}}{\sqrt{2}} (\cos \theta + j \sin \theta) = X e^{j\theta} \quad (2.9)$$

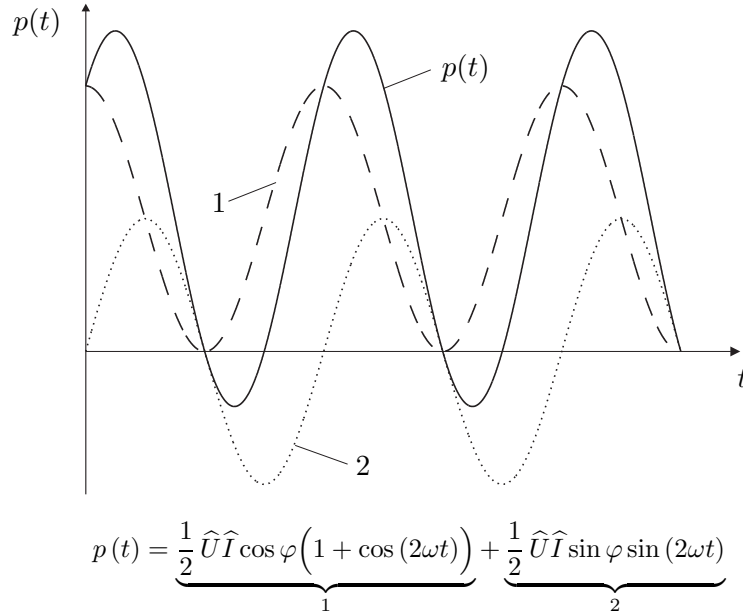


Abbildung 2.1. Darstellung der Summanden aus Gleichung (2.6).

Der Momentanwert der Zeitfunktion $x(t)$ zum Zeitpunkt t entspricht dem Realteil des mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zeigers:

$$x(t) = \sqrt{2} \Re \{ \underline{X} e^{j\omega t} \} \quad (2.10)$$

Dementsprechend lassen sich die Zeitfunktionen Strom und Spannung als komplexe Größen darstellen:

$$\underline{U} = U (\cos \varphi_u + j \sin \varphi_u) = U e^{j\varphi_u} \quad (2.11a)$$

$$\underline{I} = I (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i) = I e^{j\varphi_i} \quad (2.11b)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (2.11c)$$

Die Winkel φ_u und φ_i sind die Phasenlagen von Strom und Spannung. Nimmt man die Spannung als Referenz, d.h. $\varphi_u = 0$, so ergibt sich der Strom wieder mit Phase $-\varphi$ relativ zur Spannung (wie in Gleichung (2.1b)).

Bildet man nun das Produkt aus Strom und Spannung, so erhält man

$$\underline{U} \underline{I} = UI e^{j(\varphi_u + \varphi_i)} \quad (2.12)$$

Will man im Exponenten dieses Ausdrucks lieber die bereits als φ definierte Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom haben, so muss man die Spannung mit dem konjugiert komplexen Strom \underline{I}^* multiplizieren. Dieses Produkt ist als *komplexe Scheinleistung (complex apparent power)* \underline{S} definiert:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j\varphi} = UI (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (2.13)$$

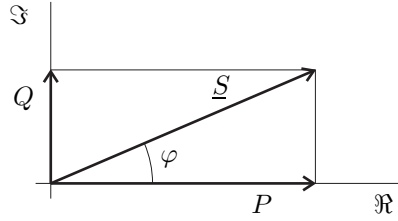


Abbildung 2.2. Leistungsdreieck aus Wirk-, Blind- und Scheinleistung.

Der Betrag dieser Grösse wird als *Scheinleistung* (*apparent power*) S bezeichnet:

$$S = |\underline{S}| \quad (2.14)$$

Die (komplexe) Scheinleistung wird entsprechend Spannung mal Strom in Volt-Ampere (VA) angegeben.

Durch die Verwendung des konjugiert komplexen Stromes entsprechen die Wirkleistung P und die Blindleistung Q laut (2.7) und (2.8) dem Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Scheinleistung:

$$P = \Re \{ \underline{S} \} = \Re \{ \underline{U} \underline{I}^* \} = UI \cos \varphi \quad (2.15a)$$

$$Q = \Im \{ \underline{S} \} = \Im \{ \underline{U} \underline{I}^* \} = UI \sin \varphi \quad (2.15b)$$

$$\underline{S} = P + jQ \quad (2.15c)$$

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.15d)$$

Diese Beziehungen sind in Abbildung 2.2 als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt, man spricht vom *Leistungsdreieck*.

Die Begriffe Wirk-, Blind- und Scheinleistung sollen nun anhand von zwei Beispielen diskutiert werden.

Beispiel: Ohmsch-Induktive Last Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 2.3. Gesucht ist die im stationären Betrieb aufgenommene Leistung der Parallelschaltung aus Widerstand und Induktivität.

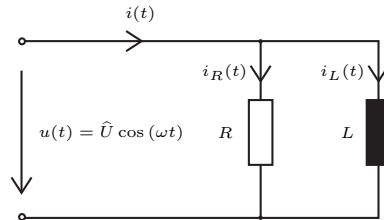


Abbildung 2.3. Ohmsch-induktive Last.

Mit der Knotenregel erhalten wir den Gesamtstrom (im stationären Be-

trieb):

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_L(t) \\ i(t) &= \frac{\hat{U}}{R} \cos(\omega t) + \frac{\hat{U}}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Somit wird die momentane Leistung

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \frac{\hat{U}^2}{R} \cos^2(\omega t) + \frac{\hat{U}^2}{\omega L} \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2}{R} (1 + \cos(2\omega t)) + \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2}{\omega L} \sin(2\omega t) \\ &= \underbrace{\frac{U^2}{R} (1 + \cos(2\omega t))}_{p_R(t)} + \underbrace{\frac{U^2}{\omega L} \sin(2\omega t)}_{p_L(t)} \end{aligned}$$

Die gesamte vom Netzwerk aufgenommene Leistung $p(t)$ setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, und zwar der Leistung am Widerstand $p_R(t)$ und der Leistung an der Induktivität $p_L(t)$. Mit den Gleichungen (2.6), (2.7) und (2.8) folgt für Wirk- und Blindleistung

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \text{und} \quad Q = \frac{U^2}{\omega L} = \frac{U^2}{X_L} \quad \text{mit} \quad X_L = \omega L$$

Der Wert der Blindleistung ist positiv, d.h. die Spule nimmt Blindleistung auf, sie *verbraucht* Blindleistung. Dieser Leistungswert entspricht der Amplitude der oszillierenden magnetischen Energie und ist im zeitlichen Mittel Null.

Die von der Induktivität aufgenommene Leistung kann auch über die magnetische Energie berechnet werden. Berechnen wir nun die Energie $w_L(t)$, die zum Zeitpunkt t in der Induktivität gespeichert ist. Es gilt

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

Der Strom durch die Spule $i_L(t)$ ist bei sinusförmiger Spannung

$$i_L(t) = \frac{\hat{U}}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Setzen wir diese Beziehung in die Energiegleichung ein erhalten wir

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \frac{1}{2} L \frac{\hat{U}^2}{\omega^2 L^2} \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2}{\omega^2 L} \left(\frac{\cos(2\omega t - \pi) + 1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\omega^2 L} (1 - \cos(2\omega t)) \end{aligned}$$

Die von der Induktivität aufgenommene Leistung erhalten wir, indem wir die Energie nach der Zeit ableiten:

$$\begin{aligned} p_L(t) &= \frac{dw_L(t)}{dt} = \\ &= \frac{\hat{U}^2}{2\omega^2 L} \cdot \omega \cdot \sin(2\omega t) = \\ &= \frac{U^2}{\omega L} \cdot \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Auf diesem Weg haben wir für die Leistung der Induktivität das gleiche Ergebnis erhalten wie durch Multiplikation von Strom und Spannung. Die Blindleistungsaufnahme der Spule entspricht der *Amplitude der Zeitableitung der magnetischen Energie*.

Als dritte Möglichkeit können wir die Leistung mit komplexen Zeigern berechnen. Der Gesamtstrom als komplexer Zeiger ist

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right)$$

Laut Gleichung (2.13) beträgt die gesamte komplexe Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

Wenn wir die Spannung mit Referenzwinkel 0° (also rein reell) annehmen ist $\underline{U} = \underline{U}^* = U$ und

$$\underline{S} = \frac{U^2}{R} + j \frac{U^2}{\omega L}$$

Der reelle Anteil der Scheinleistung ist die Wirkleistung. Diese wird vom Widerstand aufgenommen. Der Imaginärteil der Gleichung für die Scheinleistung ist die Blindleistung der Spule. Hier ist das Vorzeichen der Blindleistung positiv, d.h. die Induktivität nimmt Blindleistung auf, sie *verbraucht* Blindleistung. Man erhält also:

$$P = \Re\{\underline{S}\} = \frac{U^2}{R} \quad \text{und} \quad Q = \Im\{\underline{S}\} = \frac{U^2}{\omega L}$$

Beispiel: Ohmsch-Kapazitive Last Äquivalent zum obigen Beispiel kann die Leistung die von einer ohmsch-kapazitiven Last aufgenommen wird berechnet werden. Wir betrachten die Schaltung in Abbildung 2.4.

Für die Wirk- und Blindleistung erhalten wir analog zur induktiven Last

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \text{und} \quad Q = -U^2 \omega C$$

Hier ist das Vorzeichen der Blindleistung negativ, d.h. die Kapazität gibt

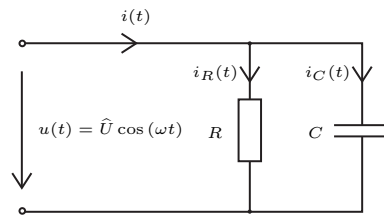


Abbildung 2.4. Ohmsch-kapazitive Last

Blindleistung ab, sie *erzeugt* Blindleistung. Demnach können Kapazitäten dazu eingesetzt werden, um die von Induktivitäten verbrauchte Blindleistung zu kompensieren. Später werden wir sehen, dass durch Kompensation der Blindleistung die Netzspannung beeinflusst werden kann.

Auch die kapazitive Blindleistung kann über den Energieansatz berechnet werden. Ausgegangen wird von der Gleichung für die Energie im elektrischen Feld des Kondensators

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$$

Auch hier kann durch Einsetzen und Umformen der gleiche Ausdruck wie durch Multiplikation der Zeitfunktionen von Strom und Spannung erreicht werden.

2.2 Erhaltung der Scheinleistung

Wenn wir mit komplexen Scheinleistungen arbeiten machen wir intensiv vom *Theorem der Erhaltung der Scheinleistung* Gebrauch. Dieses besagt, dass in einem Netzwerk mit mehreren voneinander unabhängigen Quellen und Verbrauchern die Summe der Scheinleistungsabgabe der Quellen gleich der Summe der Scheinleistungsaufnahme der Verbraucher ist. Dabei wird angenommen, dass alle Ströme und Spannungen rein sinusförmig und von gleicher Frequenz sind.

Für eine einzelne Quelle kann man dieses Theorem mit den Kirchhoffschen Regeln beweisen. Für den allgemeinen Fall ist die Beweisführung etwas komplizierter.

In der Anwendung dieses Theorems ersetzt man oft Netzwerke durch äquivalente Quellen (Thevenin-Äquivalent). Abbildung 2.5 zeigt ein Netz N_b , welches von zwei Quellen und einem weiteren Netz N_a gespeist wird. Für die Summe der Scheinleistungen gilt

$$\underline{S}_{ab} + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = \sum_i \underline{S}_{b,i} \quad (2.16)$$

wobei $\underline{S}_{b,i}$ die Scheinleistung des Elementes i im Netz N_b darstellt.

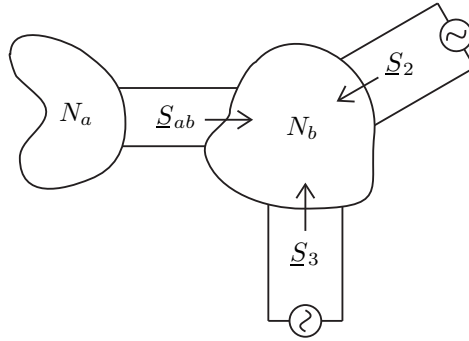


Abbildung 2.5. Erhaltung der Scheinleistung.

Beispiel: Serienimpedanz Die Erhaltung der Scheinleistung soll anhand eines Serienelementes mit der Impedanz

$$\underline{Z} = R + jX$$

untersucht werden. Abbildung 2.6 zeigt die entsprechende Schaltung.

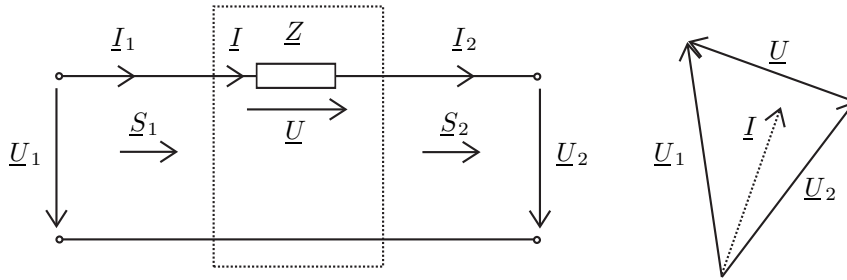


Abbildung 2.6. Schaltung einer Serienimpedanz und Zeigerdiagramm.

Die komplexe Scheinleistung am Eingang des Vierpoles (links, Index 1) ist

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1$$

In der Serienschaltung müssen die drei eingezeichneten Ströme gleich sein:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}$$

Der Strom wird an der Impedanz einen Spannungsabfall \underline{U} hervorrufen, um welchen sich die Ausgangsspannung von der Eingangsspannung unterscheidet (siehe Zeigerdiagramm in Abbildung 2.6). Die Spannung am Ausgang ist demnach

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 - \underline{U} = \underline{U}_1 - \underline{Z}\underline{I}$$

Die Scheinleistung am Ausgang des Vierpoles (rechts, Index 2) erhalten wir als Produkt aus Spannung mal konjugiert komplexem Strom:

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{U}_2 \underline{I}^*$$

Setzen wir den Ausdruck für U_2 ein, so erhalten wir für die Ausgangsleistung

$$\underline{S}_2 = (\underline{U}_1 - \underline{Z}I) I^* = \underline{S}_1 - \underline{Z}|I|^2$$

Jetzt können wir aus der ersten Gleichung für \underline{S}_1 einsetzen und erhalten

$$\underline{S}_2 = \underbrace{(P_1 - R|I|^2)}_{P_2} + j \underbrace{(Q_1 - X|I|^2)}_{Q_2}$$

Eingangs- und Ausgangsleistung des Vierpoles unterscheiden sich also genau um die von der Impedanz \underline{Z} aufgenommene Leistung.

Die in Abbildung 2.6 gezeigte Schaltung könnte als einfaches Modell einer Hochspannungsleitung herangezogen werden.

2.3 Leistung im dreiphasigen, symmetrischen Netzwerk

2.3.1 Symmetrische Dreiphasensysteme

Ein symmetrisches Dreiphasensystem (auch Drehstromsystem genannt) wird von drei gleich grossen, gleichfrequenten aber um jeweils 120° ($2\pi/3$) phasenverschobenen Spannungen angeregt. Abbildung 2.7 und 2.8 zeigen diese drei Spannungen im Zeitverlauf und als Zeiger. Die drei Phasen werden üblicherweise mit R, S und T bezeichnet, entsprechend sind Spannungen, Ströme, Widerstände usw. der Phasen indiziert. Die Spannung der Phase R wird in Abbildung 2.8 in der Abszisse, also mit 0° angenommen. Dementsprechend ist die Spannung der Phase S um 120° und die Spannung der Phase T um 240° verschoben. Dieser „Spannungstern“ dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn, sodass die Phasenfolge R-S-T entsteht.²

Wie in Abbildung 2.8 angedeutet treten in einem Drehstromsystem zwei verschiedene Spannungen auf: die *Phasenspannung* und die verkettete Spannung oder *Dreiecksspannung*.

Phasenspannung U_p : Diese Spannung wird *zwischen einer Phase und dem Sternpunkt* abgegriffen. Sie entspricht der in Sternschaltung auftretenden Spannung am Element (siehe Abbildung 2.9). Die Phasenspannungen werden als \underline{U}_R , \underline{U}_S und \underline{U}_T bezeichnet.

Verkettete Spannung U : Diese Spannung wird *zwischen zwei Phasen* abgegriffen. Gemäss der Geometrie des Zeigerdiagrammes in Abbildung 2.8 ist der Betrag dieser verketteten Spannung um $\sqrt{3}$ höher als jener der Phasenspannung. Die verkettete Spannung ist jene Spannung, die

²Diese Festlegung ist willkürlich. Um die gleiche Phasenfolge R-S-T zu erreichen müssen bei umgekehrter Drehrichtung ω lediglich die Phasen S und T vertauscht werden.

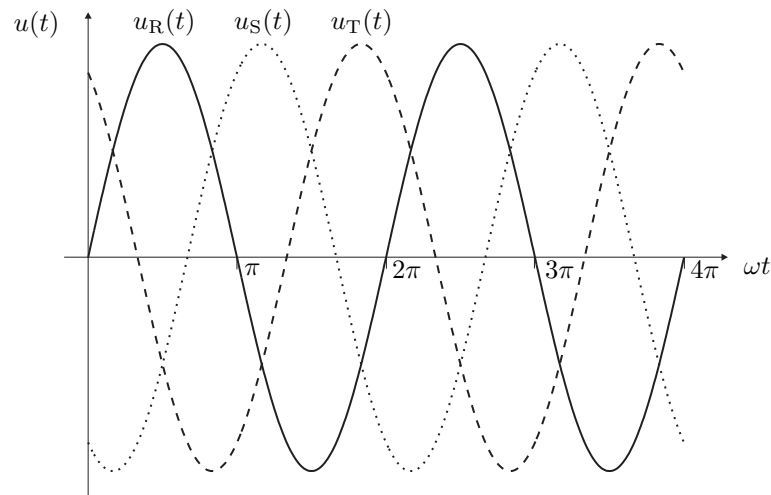


Abbildung 2.7. Zeitverlauf der Spannungen in den Phasen R, S und T.

bei Dreieckschaltung am jeweiligen Element anliegt (siehe Abbildung 2.9). Im dreiphasigen System treten drei verkettete Spannungen zwischen den Phasen R-S (\underline{U}_{RS}), S-T (\underline{U}_{ST}) und T-R (\underline{U}_{TR}) auf. Diese drei verketteten Spannungen sind wie die Phasenspannungen um 120° phasenverschoben.

Wie erwähnt stehen die Effektivwerte von Phasenspannung und Dreiecksspannung in folgender Relation:

$$U = \sqrt{3} U_p \quad (2.17)$$

Im Niederspannungsbereich sind die Beträge der Phasenspannung und der verketteten Spannung 230 bzw. 400 V.

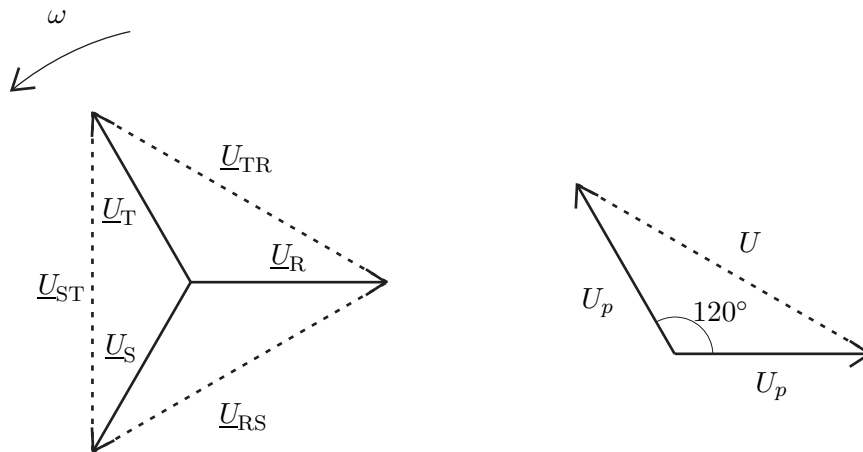


Abbildung 2.8. Zeigerdarstellung der drei Phasenspannungen (mit Betrag U_p) und der verketteten Spannungen (mit Betrag $U = \sqrt{3} U_p$).

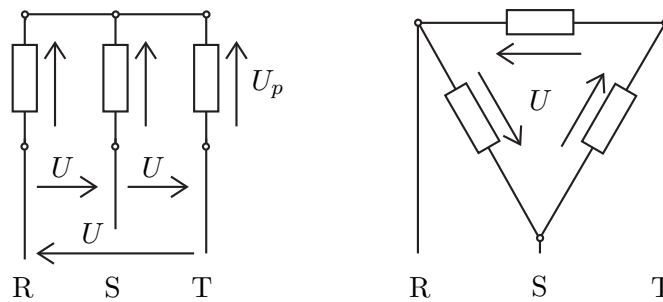


Abbildung 2.9. Stern- und Dreieckschaltung eines Verbrauchers: Bei Sternschaltung liegt die Phasenspannung U_p , bei Dreieckschaltung die verkettete Spannung U an den Verbraucherwiderständen an.

2.3.2 Leistung in symmetrischen Dreiphasensystemen

Nun wollen wir die Leistung in einem symmetrischen dreiphasigen System untersuchen. Wir beginnen wieder mit den Zeitverläufen der Spannungen in den einzelnen Phasen (siehe Abbildung 2.7):

$$u_R(t) = \hat{U}_p \cos \omega t \quad (2.18a)$$

$$u_S(t) = \hat{U}_p \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad (2.18b)$$

$$u_T(t) = \hat{U}_p \cos(\omega t - 4\pi/3) \quad (2.18c)$$

Aufgrund der angenommenen Symmetrie haben alle drei Phasenspannungen die gleiche Amplitude \hat{U}_p . Die Summe dieser Phasenspannungen ergibt zu jedem Zeitpunkt

$$u_R(t) + u_S(t) + u_T(t) = 0 \quad (2.19)$$

Äquivalent gilt für die drei Ströme

$$i_R(t) = \hat{I}_p \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.20a)$$

$$i_S(t) = \hat{I}_p \cos(\omega t - \varphi - 2\pi/3) \quad (2.20b)$$

$$i_T(t) = \hat{I}_p \cos(\omega t - \varphi - 4\pi/3) \quad (2.20c)$$

und wiederum mit der Annahme, dass die Stromamplituden in allen Phasen gleich gross sind

$$i_R(t) + i_S(t) + i_T(t) = 0 \quad (2.21)$$

Der Anteil der Phase R an der momentanen Leistung beträgt nach Gleichung (2.6)

$$p_R(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p \hat{I}_p (\cos \varphi (1 + \cos(2\omega t)) + \sin \varphi \sin(2\omega t)) \quad (2.22)$$

φ entspricht wieder der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, deshalb sind die $\sin \varphi$ - und $\cos \varphi$ -Terme zeitunabhängig und in allen Phasen gleich. Die $\sin(2\omega t)$ - und $\cos(2\omega t)$ -Ausdrücke treten in den anderen beiden Phasen um $2\pi/3$ bzw. $4\pi/3$ versetzt auf. Mit Hilfe des Additionstheorems lässt sich zeigen, dass sich diese Terme im Dreiphasensystem gegenseitig aufheben:³

$$\begin{aligned} & \underbrace{\cos(2\omega t)}_{\text{Phase R}} + \underbrace{\cos\left(2\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right)}_{\text{Phase S}} + \underbrace{\cos\left(2\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right)}_{\text{Phase T}} = \\ & = \cos(2\omega t) + \cos(2\omega t) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \\ & \quad + \cos(2\omega t) \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

³Natürlich kann diese Tatsache auch mit einem Sinus-Ansatz gezeigt werden.

wobei gilt

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad (2.24a)$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.24b)$$

Der Momentanwert der gesamten dreiphasigen Wirkleistung, also die Summe der Wirkleistungen aller drei Phasen, wird damit zu einem *zeitlich konstanten Wert* und entspricht der dreifachen Phasenleistung:

$$p(t) = 3 \frac{\hat{U}_p \hat{I}_p}{2} \cos \varphi = 3 U_p I_p \cos \varphi = P \quad (2.25)$$

Das bedeutet, dass sich die oszillierenden Anteile der Leistung in den drei Phasen *jederzeit und nicht nur im zeitlichen Mittel* exakt zu Null ergänzen.⁴

Die komplexe dreiphasige Scheinleistung ergibt sich aus der Summe der Phasenscheinleistungen mit Gleichung (2.13) zu

$$\underline{S} = \underline{U}_R \underline{I}_R^* + \underline{U}_S \underline{I}_S^* + \underline{U}_T \underline{I}_T^* \quad (2.26)$$

Im symmetrischen Zustand führen alle drei Phasen gleich grosse Ströme und Spannungen. Die dreiphasige Scheinleistung kann deshalb als die dreifache Scheinleistung einer Phase angeschrieben werden. Als Phasengrössen verwendet man definitionsgemäss Spannung und Strom der Phase R, wobei die Spannung der Phase R mit 0° angenommen wird.

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_R \underline{I}_R^* = 3 \underline{S}_R = 3 P_R + j 3 Q_R \quad (2.27)$$

Nun wollen wir anstatt der Phasengrössen der Phase R verkettete Grössen in die obige Gleichung einsetzen. Die verkettete Spannung ergibt sich laut Gleichung (2.17) zu

$$\underline{U} = \sqrt{3} \underline{U}_R \quad (2.28)$$

Einen verketteten Strom in dem Sinn gibt es nicht, das heisst, es tritt in keinem Dreiphasensystem ein Strom vom Betrag $\sqrt{3}$ mal Phasenstrom auf. Trotzdem kann man einen solchen Strom als virtuellen, verketteten Strom definieren, um die Rechnung einfacher zu gestalten. Wir definieren also

$$\underline{I} = \sqrt{3} \underline{I}_R \quad (2.29)$$

Mit dieser Definition können wir (2.27) neu ausdrücken. Dabei kürzen sich die Faktoren 3 und $\sqrt{3}$ und wir erhalten für die komplexe dreiphasige Scheinleistung mit den Konventionen in (2.28) und (2.29) die gleiche Formel wie für die einphasige Scheinleistung in (2.13):

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U I e^{j\varphi} = U I (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

⁴Dies hat zur Folge, dass bei Dreiphasenmaschinen das Drehmoment über eine Umdrehung konstant ist. Im Gegensatz dazu erfährt z.B. der Läufer eines Einphasenmotors ein Rüttelmoment doppelter Nennfrequenz.

Entsprechend gelten auch hier wieder die bekannten Gleichungen (2.15a)-(2.15c) für Wirk- und Blindleistung:

$$\begin{aligned} P &= \Re \{ \underline{S} \} = \Re \{ \underline{U} \underline{I}^* \} = UI \cos \varphi \\ Q &= \Im \{ \underline{S} \} = \Im \{ \underline{U} \underline{I}^* \} = UI \sin \varphi \\ \underline{S} &= P + jQ \end{aligned}$$

Diese Werte entsprechen im symmetrischen System genau den dreifachen Leistungswerten pro Phase. Die Formeln (2.13)-(2.15c) gelten also sowohl für einphasige als auch für dreiphasige Systeme, sofern für dreiphasige Verhältnisse für U und I die $\sqrt{3}$ -fachen Phasengrößen eingesetzt werden.

2.3.3 Stern-Dreieck-Transformation

Jede Stern- oder Dreieckschaltung kann in eine äquivalente, gleiche Leistung aufnehmende Dreieck- oder Sternschaltung transformiert werden. Ist z.B. nur die Leistung eines dreiphasigen Verbrauchers gegeben, so kann dieser beliebig als Stern- oder Dreieckslast dargestellt werden.

Wir betrachten wieder Abbildung 2.9. Die Impedanzen in der Sternschaltung bezeichnen wir als \underline{Z}_y , jene in der Dreieckschaltung als \underline{Z}_d . In der Sternschaltung liegt die Phasenspannung vom Betrag U_p an den Impedanzen an. Die gesamte Scheinleistung ergibt sich zu

$$\underline{S}_y = 3 \frac{U_R^2}{\underline{Z}_y^*} \quad (2.31)$$

An den Impedanzen der Dreieckschaltung liegt die verkettete Spannung vom Betrag $U = \sqrt{3}U_p$ an. Die gesamte aufgenommene Scheinleistung ist

$$\underline{S}_d = 3 \frac{(\sqrt{3}U_R)^2}{\underline{Z}_d^*} \quad (2.32)$$

Die beiden Schaltungen sind dann äquivalent, wenn sie die gleiche Scheinleistung aufnehmen. Wir setzen also

$$\underline{S}_y = \underline{S}_d \quad (2.33)$$

und erhalten als Bedingung für die Impedanzen

$$\frac{\underline{Z}_y}{\underline{Z}_d} = \frac{3\underline{U}_R^2}{3(\sqrt{3}\underline{U}_R)^2} = \frac{1}{3} \quad (2.34)$$

Wir können also eine Dreieckschaltung jederzeit in eine Sternschaltung umwandeln indem wir die Widerstände der Dreieckschaltung dritteln und in Stern schalten. Die neue Schaltung nimmt die gleiche Scheinleistung auf wie die ursprüngliche, in den Phasenleitern fließen die gleichen Ströme.

2.3.4 Einphasige Berechnung symmetrischer Dreiphasensysteme

Nachdem sich in einem symmetrischen Dreiphasensystem in allen drei Phasen die gleichen Vorgänge abspielen, kann das dreiphasige System anhand eines einphasigen Ersatzsystems analysiert werden. Dazu führt man folgende Schritte durch:

1. Alle in Dreieck geschalteten Elemente werden in äquivalente Sternschaltungen umgewandelt (siehe Abschnitt 2.3.3).
2. Für die Phase R wird ein einphasiges Ersatzschaltbild gezeichnet.
3. Die gesuchten Grössen werden aus dem einphasigen Ersatzschaltbild der Phase R berechnet.
4. Um die gesuchten Grössen in den Phasen S und T zu erhalten addieren wir zu den Grössen aus Phase R jeweils 120° bzw. 240° .
5. Wenn nötig werden die Stern-Elemente wieder in Dreieckschaltungen transformiert, um dann die verketteten Grössen zu berechnen.

Abbildung 2.10 zeigt ein Beispiel eines symmetrischen Dreiphasensystem. Die in Dreieck geschalteten Kondensatoren C werden in eine Sternschaltung umgewandelt. Ihre Reaktanz reduziert sich durch die Transformation laut Gleichung (2.34) auf ein Drittel gegenüber der Dreieckschaltung. Wegen

$$jX_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (2.35)$$

entspricht das einer Verdreifachung der Kapazität.

Nach der Umwandlung kann die einphasige Ersatzschaltung gezeichnet werden. Dabei ist zu beachten, dass *im symmetrischen Dreiphasensystem alle Sternpunkte gleiches Potential* führen. Die Punkte a , f und e können deshalb ohne weitere Auswirkungen verbunden werden. Diese Sternpunkte liegen in der einphasigen Ersatzschaltung auf dem Rückleiter.

2.4 Zusammenfassung

In einphasigen Netzwerken oszilliert die Leistung mit doppelter Netzfrequenz. In symmetrischen Dreiphasensystemen heben sich die oszillierenden Anteile der drei Phasen auf, die Leistung verläuft zeitlich konstant.

Die komplexe Scheinleistung ist definiert als das Produkt aus Spannung mal konjugiert komplexen Strom. Der Realteil der komplexen Scheinleistung ist die Wirkleistung, der Imaginärteil ist die Blindleistung.

Für die Berechnung von Schein-, Wirk- und Blindleistung können für einphasige und symmetrische dreiphasige Systeme die selben Gleichungen verwendet werden, für die gesamte dreiphasige Leistung wird jeweils $\underline{I} = \sqrt{3} \underline{I}_R$ und $\underline{U} = \sqrt{3} \underline{U}_R$ eingesetzt. In Tabelle 2.1 sind Formeln und Einheiten nochmals zusammengefasst.

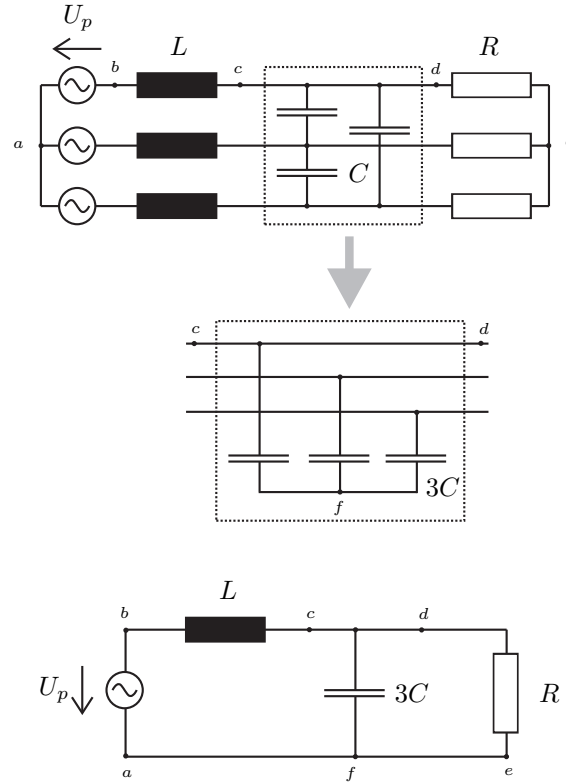


Abbildung 2.10. Symmetrisches Drehstromsystem und seine einphasige Ersatzschaltung. Nach Umwandlung der Dreieckschaltung in eine Sternschaltung liegen die Kapazitäten $3C$ parallel zu den Widerständen R . In der einphasigen Ersatzschaltung liegen die Sternpunkte am gemeinsamen Rückleiter.

Tabelle 2.1. Übersicht Wirkleistung, Blindleistung und komplexe Leistung.

Bezeichnung	Wirkleistung	Blindleistung	kompl. Leistung
Zeichen	P	Q	\underline{S}
Einheit	MW	MVar	MVA
Berechnung	$UI \cos \varphi = \Re\{\underline{S}\}$	$UI \sin \varphi = \Im\{\underline{S}\}$	$\underline{U}\underline{I}^* = P + jQ$

3

Transformatoren

In diesem Kapitel werden wir ein Modell für Transformatoren erarbeiten. Wir beginnen mit dem Prinzip gekoppelter Wicklungen, dann folgt eine idealisierte Darstellung eines einphasigen Transformators. Diese werden wir schrittweise zu einem für die Energieübertragung brauchbaren Modell ausbauen. Abschliessend behandeln wir Transformatoren für dreiphasige Systeme.

3.1 Einphasiger Transformator

3.1.1 Gekoppelte Wicklungen

Eine stromdurchflossene Spule erzeugt ein magnetisches Feld. Zwei Spulen, die sich in einem gemeinsamen magnetischen Feld befinden, beeinflussen sich gegenseitig. Durch die *magnetische Kopplung* tritt eine Wechselwirkung ein: Jede Änderung eines Spulenstromes hat eine Änderung des Stromes in der anderen Spule zur Folge.

Bringt man zwei Spulen auf einen gemeinsamen, magnetisch gut leitenden *Eisenkern* (*magnetic core*) auf, so erreicht man, dass beide Spulen fast vom gleichen magnetischen Fluss durchdrungen werden. Die Kopplung fällt damit relativ stark aus. Abbildung 3.1 zeigt eine solche Anordnung. Dies ist der grundsätzliche Aufbau eines einphasigen Transformators.

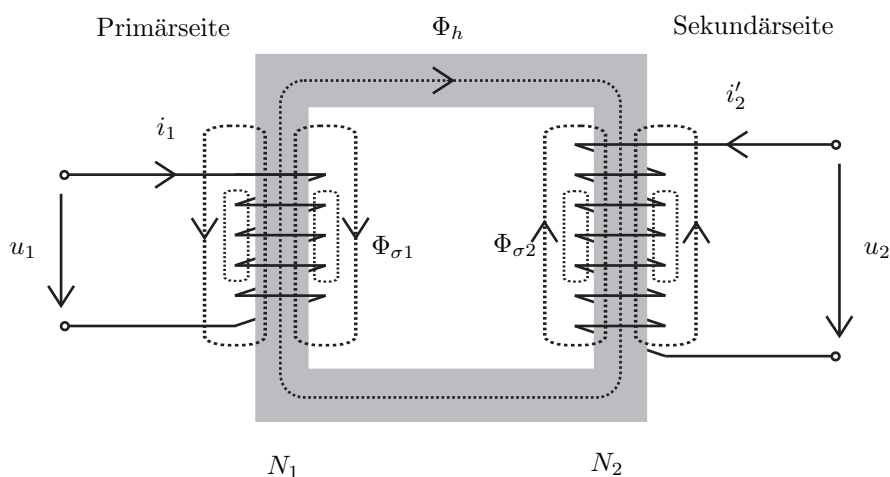


Abbildung 3.1. Prinzipieller Aufbau eines einphasigen Transformators.

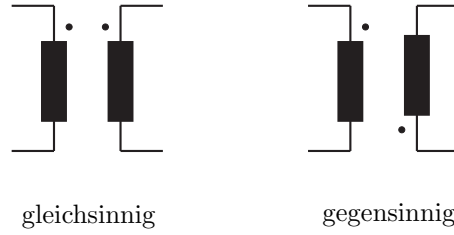


Abbildung 3.2. Kennzeichnung des Wicklungssinnes durch Punkte an den Anschlüssen.

Die bewickelten *Schenkel* (*limbs*) bilden zusammen mit dem *Joch* (*yoke*) eine magnetisch gut leitfähige Verbindung zwischen *Primär-* und *Sekundärwicklung* (*primary- and secondary winding*). Die Primärwicklung mit Windungszahl N_1 führt den Primärstrom i_1 , die Sekundärwicklung mit Windungszahl N_2 wird vom Sekundärstrom i'_2 durchflossen.¹

Im Eisen breitet sich der *Hauptfluss* (*mutual flux*) Φ_h aus. Dieser durchdringt beide Wicklungen und bewirkt deren magnetische Kopplung. Je höher sein Anteil am Gesamtfluss der Spulen ist, desto stärker treten diese in Wechselwirkung. Zusätzlich zum Hauptfluss bildet jede Wicklung für sich einen *Streufluss* (*leakage flux*) $\Phi_{\sigma 1}$ bzw. $\Phi_{\sigma 2}$ aus. Diese sind im Vergleich zum Hauptfluss relativ klein. Die Feldlinien des Streuflusses durchdringen nur eine Spule und schliessen sich über Luft.² Die *Flussverkettungen* (*flux linkage*) in den Spulen ergeben sich zu

$$\lambda_1 = N_1 \Phi_h + \lambda_{\sigma 1} \quad (3.1a)$$

$$\lambda_2 = N_2 \Phi_h + \lambda_{\sigma 2} \quad (3.1b)$$

wobei $\lambda_{\sigma 1}$ und $\lambda_{\sigma 2}$ die Flussverkettungen der Streuflüsse $\Phi_{\sigma 1}$ und $\Phi_{\sigma 2}$ mit den entsprechenden Spulen darstellen.

Die Richtung des magnetischen Flusses in Abhängigkeit vom Strom wird durch den *Wicklungssinn* der Spule festgelegt. Man unterscheidet zwischen *gleichsinniger* und *gegensinniger* Wicklung. Üblicherweise wird der Wicklungssinn durch Punkte an den Spulenanschlüssen angegeben (siehe Abbildung 3.2). Liegen sich diese Punkte direkt gegenüber, so handelt es sich um eine gleichsinnige Wicklung; liegen sie diagonal gegenüber, so ist die Anordnung gegensinnig. In den folgenden Untersuchungen gehen wir immer von gleichsinnigen Wicklungen aus.

¹Der Strom $i'_2 = -i_2$ wurde später eingeführt um die Herleitung des Modells zu erleichtern.

²Nicht alle Feldlinien des Streufeldes sind mit allen Wicklungen der jeweiligen Spule verkettet.

3.1.2 Ideales Transformatormodell

Die prinzipielle Funktion eines Transformators lässt sich anhand einer idealisierten Darstellung zweier verketteter Spulen demonstrieren. Für den *idealen Transformator* treffen wir folgende Annahmen:

1. Es gibt *keine Verluste* im Transformator, weder in den Wicklungen noch im Eisen.
2. Es treten *keine Streuflüsse* auf, beide Wicklungen werden nur vom Hauptfluss durchsetzt. Die Kopplung ist somit ideal.
3. Der Eisenkern hat *unendlich hohe Permeabilität* (das entspricht idealer magnetischer Leitfähigkeit).

Wir wollen nun eine ideale Spulenordnung wie in Abbildung 3.1 untersuchen. Mit dem Induktionsgesetz und der zweiten getroffenen Annahme

$$\lambda_{\sigma 1} = \lambda_{\sigma 2} = 0 \quad (3.2)$$

erhalten wir für die in den Spulen induzierten Spannungen

$$u_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_h}{dt} \quad (3.3a)$$

$$u_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_h}{dt} \quad (3.3b)$$

Wenn wir annehmen, dass der Fluss zeitlich variiert, d.h.

$$\frac{d\Phi_h}{dt} \neq 0 \quad (3.4)$$

können wir die Gleichungen (3.3a) und (3.3b) nach der Ableitung des Flusses auflösen. Wir sehen, dass das Verhältnis von Spannung zu Windungszahl für beide Wicklungen, also primär und sekundär, gleich ist:

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} \quad (3.5)$$

Daraus folgt unmittelbar das *Übersetzungsverhältnis (turns ratio)*³ der beiden Spannungen

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = c \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

Da das Verhältnis der beiden Windungszahlen ein reeller Wert ist wird hier auch das Übersetzungsverhältnis reell.⁴

³Genaugenommen handelt es sich hier um das *Leerlaufübersetzungsverhältnis*. Die in Abschnitt 3.1.3 behandelten Nichtidealitäten realer Transformatoren führen zu einer belastungsabhängigen Abweichung von diesem Verhältnis.

⁴Dies ist allerdings nicht immer der Fall. Bei Dreiphasentransformatoren kann es zu einer Phasendrehung der Sekundärspannung gegenüber der Primärspannung kommen. Das Übersetzungsverhältnis wird dann komplex (siehe Abschnitt 3.2).

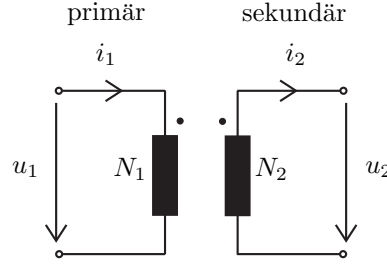


Abbildung 3.3. Idealer Transformator.

Entsprechend unserer dritten Annahme ($\mu = \infty$) ist der Eisenkern ideal leitend, d.h. sein magnetischer Widerstand ist Null. Das ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises bildet einen Zusammenhang zwischen magnetischer Spannung (Erregung) θ , magnetischem Fluss Φ und Reluktanz R_m :

$$\theta = R_m \Phi \quad (3.7)$$

Die magnetische Spannung entspricht den sogenannten *Amperewindungen*, also dem Produkt aus Strom mal Windungszahl einer Spule. Für den Idealfall $R_m = 0$ gibt es keinen magnetischen Spannungsabfall entlang des Eisenkernes, die Summe der Amperewindungen der Primär- und Sekundärseite ergibt sich zu

$$N_1 i_1 + N_2 i'_2 = R_m \Phi_h = 0 \quad (3.8)$$

Der Quotient aus Sekundär- zu Primärstrom ergibt das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{i'_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -c \quad (3.9)$$

Wie auch die Spannung ist der Strom auf der Sekundärseite nur vom Strom auf der Primärseite und dem Übersetzungsverhältnis abhängig. Zur Bereinigung des negativen Vorzeichens definieren wir nun

$$i_2 = -i'_2 \quad (3.10)$$

und erhalten eine Situation wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Das Verhältnis der beiden Ströme wird

$$\frac{i_2}{i_1} = c \quad (3.11)$$

Wenn wir von sinusförmigen Strömen ausgehen, dann werden auch die magnetischen Flüsse und die dadurch induzierten Spannungen sinusförmig verlaufen. Sinusförmige Ströme und Spannungen können wir entsprechend Gleichung (2.9) als Zeiger darstellen. In den Gleichungen (3.1a)-(3.11) können u , i und Φ durch komplexe Größen \underline{U} , \underline{I} und $\underline{\Phi}$ ersetzt werden.

Wir wissen jetzt, wie man Spannungen und Ströme zwischen Primär- und Sekundärseite umrechnet. Nun wollen wir untersuchen, wie man für

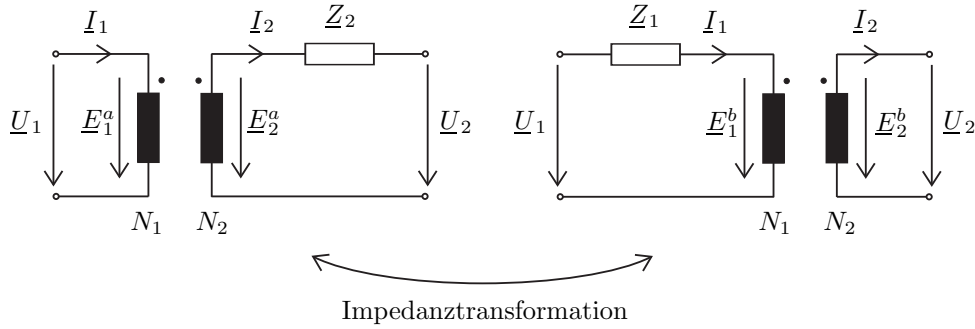


Abbildung 3.4. Umrechnung einer Impedanz von der Sekundärseite auf die Primärseite.

einen idealen Transformator Impedanzen auf die jeweils andere Seite beziehen kann. Diese Umrechnung nennt man *Impedanztransformation*. Wir betrachten Abbildung 3.4. Für beide Schaltungen können wir auf der Impedanzseite eine Maschengleichung aufstellen:

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1^a = c \underline{E}_2^a = c (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2) \quad (3.12a)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_2^b = \frac{1}{c} \underline{E}_1^b = \frac{1}{c} (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1) \quad (3.12b)$$

Diese Gleichungen können wir nach $c \underline{U}_2$ auflösen:

$$c \underline{U}_2 = \underline{U}_1 - c \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \quad (3.13a)$$

$$c \underline{U}_2 = \underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \quad (3.13b)$$

Subtrahieren wir (3.13b) von (3.13a), so erhalten wir

$$0 = -c \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \quad (3.14)$$

Das Verhältnis der Impedanzen ergibt sich daraus zu

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = c \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = c^2 \quad (3.15)$$

Die beiden Schaltungen in Abbildung 3.4 verhalten sich also equivalent, sofern Gleichung (3.15) erfüllt ist. Am Verhalten des Vierpoles ändert sich nichts wenn die Impedanzen diesem Verhältnis entsprechend ausgetauscht werden. Mit Gleichung (3.15) können wir Impedanzen beliebig zwischen Primär- und Sekundärseite umrechnen.⁵

Nun haben wir das Übersetzungsverhältnis für Spannungen, Ströme und Impedanzen hergeleitet und sind in der Lage, jede dieser Größen auf die jeweils andere Seite zu beziehen. Wir fassen zusammen:

⁵Gleichung (3.15) gilt nicht nur für Elemente die als komplexe Zahlen dargestellt sind, sondern auch für R , L oder C .

- Die Spannungen verhalten sich wie entsprechend dem Übersetzungsverhältnis.
- Die Ströme verhalten sich invers zum Übersetzungsverhältnis.
- Die Impedanzen verhalten sich wie das Quadrat des Übersetzungsverhältnisses.

Wie erwähnt ist diese Darstellung des Transformators idealisiert. Um ein realistischeres Modell zu erhalten, werden wir im nächsten Abschnitt das ideale Modell mit weiteren Elementen ergänzen.

3.1.3 Reales Transformatormodell

Das ideale Transformatormodell aus Abschnitt 3.1.2 werden wir nun schrittweise verfeinern, indem wir drei wesentliche Nichtidealitäten berücksichtigen.

Streuung

Die nur mit einer Wicklung verketteten Streuflüsse kann man so betrachten als würden sie von je einer separaten Spule im primären und sekundären Stromkreis verursacht. Wir erhalten jeweils für die Primär- und Sekundärseite eine *Streureaktanz* mit der *Streuinduktivität* $L_{\sigma 1}$ bzw. $L_{\sigma 2}$. Die Flussverkettung der Streuinduktivitäten mit den Streufeldern findet über Luft statt und ist deshalb linear:

$$\lambda_{\sigma 1} = L_{\sigma 1} i_1 \quad (3.16a)$$

$$\lambda_{\sigma 2} = L_{\sigma 2} i_2' \quad (3.16b)$$

Durch die Streuflüsse wird die Kopplung der beiden Wicklungen unvollständig, sie stellen eine *Nichtidealität* des Transformators dar.

Wicklungsverluste

Reale Wicklungen sind mit ohmschen Widerständen behaftet. Die primär- und sekundärseitigen Klemmenspannungen ergeben sich unter deren Einbezug aus der Summe von ohmschem Spannungsabfall über der Wicklung und der induzierten Spannung zu

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} = R_1 i_1 + \frac{d}{dt} (\lambda_{\sigma 1} + N_1 \Phi_h) \quad (3.17a)$$

$$u_2 = R_2 i_2' + \frac{d\lambda_2}{dt} = R_2 i_2' + \frac{d}{dt} (\lambda_{\sigma 2} + N_2 \Phi_h) \quad (3.17b)$$

wobei R_1 der ohmsche Widerstand der Primärwicklung und R_2 der ohmsche Widerstand der Sekundärwicklung ist. Mit den Gleichungen (3.16a) und (3.16b) erhalten wir

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_h}{dt} \quad (3.18a)$$

$$u_2 = R_2 i_2' + L_{\sigma 2} \frac{di_2'}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_h}{dt} \quad (3.18b)$$

Mit Gleichung (3.10) können wir (3.18b) auch folgendermassen darstellen:

$$u_2 = -R_2 i_2 - L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_h}{dt} \quad (3.19)$$

Wir berücksichtigen diese weitere Abweichung vom Idealverhalten, indem wir die beiden Elemente in die Modellschaltung einfügen (siehe Abbildung 3.5).

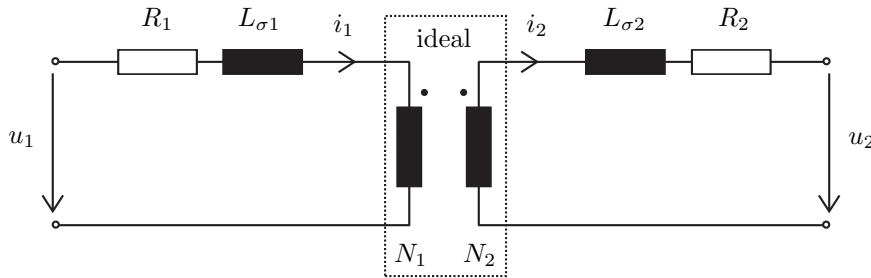


Abbildung 3.5. Transformatormodell mit primärer und sekundärer Streuinduktivität und Wicklungswiderständen.

Nun können wir wie in Abschnitt 3.1.2 gezeigt die Grössen der Sekundärseite auf die Primärseite umrechnen. Abbildung 3.6 zeigt die neue Ersatzschaltung mit den Elementen

$$R_t = R_1 + c^2 R_2 \quad (3.20)$$

und

$$L_t = L_{\sigma 1} + c^2 L_{\sigma 2} \quad (3.21)$$

Dieses Modell enthält die Nichtidealitäten durch Streuung und ohmsche Verluste in den Wicklungen.

Kernverluste

Auch der magnetische Leiter, der Eisenkern, ist nicht vollkommen ideal. In ihm treten spannungs- und frequenzabhängige Verluste auf. Dadurch gibt der Transformator an der Sekundärseite weniger Leistung ab als er auf der Primärseite aufnimmt. Der Transformator wird auch dann auf der Primärseite einen Strom aufnehmen, wenn auf der Sekundärseite kein Strom fliesst, da

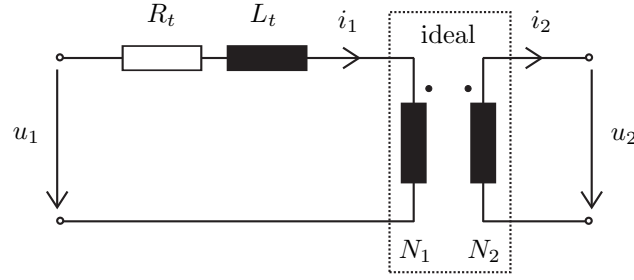


Abbildung 3.6. Transformatormodell mit transformierten und zusammengefassten Streuinduktivitäten und Wicklungswiderständen.

die Verluste im Eisen gedeckt werden müssen. Diese nennt man dann *Leerlaufverluste* (*no load losses*). Sie setzen sich aus den primärseitigen Wicklungsverlusten und den Kernverlusten zusammen.

Der Blindanteil der Verluste im Eisen kann durch eine *Magnetisierungsinduktivität* modelliert werden. Diese nimmt den *Magnetisierungsstrom* (*magnetization current*) auf der hier berechnet werden soll.

Wir beginnen wieder mit dem ohmschen Gesetz des magnetischen Kreises aus Gleichung (3.7). Mit dem magnetischen Widerstand des Kernes $R_m \neq 0$ erhalten wir

$$\theta = R_m \Phi_h = N_1 i_1 + N_2 i'_2 \quad (3.22)$$

Nehmen wir den Strom auf der Sekundärseite mit $i'_2 = 0$ an, so erhalten wir den *Magnetisierungsstrom*

$$i_1|_{i'_2=0} = i_m = \frac{R_m \Phi_h}{N_1} \quad (3.23)$$

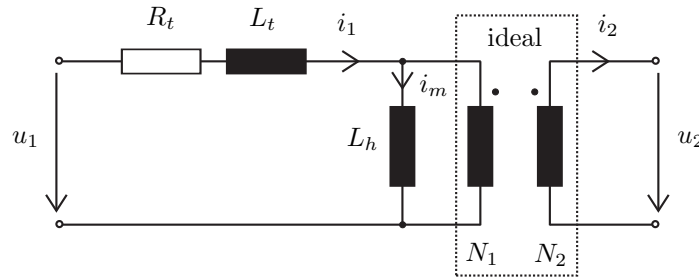
Mit dieser Gleichung und (3.22) ergibt sich der Primärstrom aus der Summe von Magnetisierungsstrom und dem auf die Primärseite bezogenen Sekundärstrom:

$$i_1 = i_m - \frac{N_2}{N_1} i'_2 = i_m + \frac{i_2}{c} \quad (3.24)$$

Der primäre Strom ist also die Summe aus Magnetisierungsstrom und transformiertem Sekundärstrom. Der Magnetisierungsstrom wird zwischen Primärseite und Sekundärseite „abgezweigt“ und liegt bei realen Leistungstransformatoren unter 1% des Nennstromes. In der Schaltung können wir diesen Strom durch Einfügen einer *Magnetisierungs- oder Hauptinduktivität* L_h berücksichtigen (siehe Abbildung 3.7).

Der Wert dieser Induktivität ergibt sich aus der Gleichung für die induzierte Spannung

$$N_1 \frac{d\Phi_h}{dt} = L_h \frac{di_m}{dt} \quad (3.25)$$

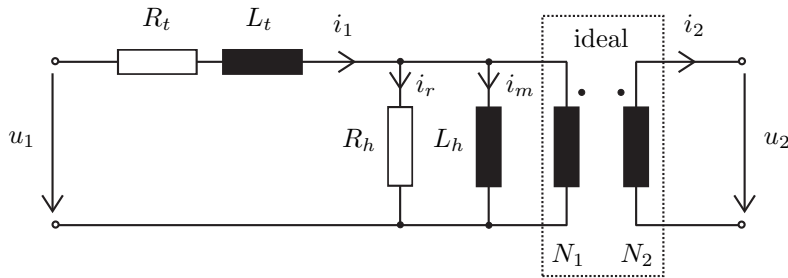
**Abbildung 3.7.** Transformatormodell mit Hauptinduktivität.

Im Vergleich zur zusammengefassten Streuinduktivität ist diese Induktivität bei realen Transformatoren sehr gross, es gilt

$$L_h \gg L_t \quad (3.26)$$

Die Wirkverluste im Kern werden durch einen ohmschen Widerstand R_h modelliert. In der Schaltung fügen wir diesen parallel zur Magnetisierungsinduktivität ein. Analog zu den Induktivitäten gilt auch hier

$$R_h \gg R_t \quad (3.27)$$

**Abbildung 3.8.** Vollständiges Transformatormodell.

Das Modell in Abbildung 3.8 berücksichtigt nun alle untersuchten Abweichungen vom idealen Transformator. Diese sind hier nochmals zusammengefasst:

- Streuverluste (induktiv durch L_t)
- Wicklungsverluste (ohmsch durch R_t)
- Kernverluste (ohmsch durch R_h und induktiv durch L_h)

Wegen (3.26) und (3.27) vernachlässigt man für den Nennbetrieb oft die Querelemente R_h und L_h . Der Transformator wird dann vereinfacht durch eine komplexe Serienimpedanz $\underline{Z}_t = R_t + j\omega L_t$ und einen idealen Transformator mit $c = N_1/N_2$ dargestellt. Abbildung 3.9 zeigt eine solche Ersatzschaltung. Sie stellt ein wichtiges, häufig angewandtes Modell dar. Im Leerlauf ($i_2 = 0$) dürfen die Querelemente nicht vernachlässigt werden.

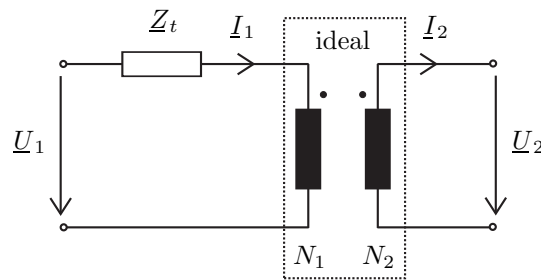


Abbildung 3.9. Vereinfachtes Transformatormodell für die Energieübertragung.

3.2 Dreiphasiger Transformator

Will man alle drei Stränge eines Drehstromsystems transformieren, so kann man dies mit drei einzelnen Einphasentransformatoren tun. Grundsätzlich gibt es mit Stern- und Dreieckschaltung vier Möglichkeiten solche *Transformatorbänke* zu verschalten: Man kann jeweils die primär- und sekundärseitigen Wicklungen in Stern oder Dreieck schalten.⁶

Das Übersetzungsverhältnis und die Phasenverschiebung zwischen Primär- und Sekundärwicklung sowie das Verhalten im unsymmetrischen Betrieb hängen von der sogenannten *Schaltgruppe* des Transformators ab. Ausserdem bietet jede Konfiguration unterschiedliche Erdungsmöglichkeiten.

Die Bezeichnung der Schaltgruppen erfolgt nach einem genormten Schema bestehend aus zwei Buchstaben und einer Zahl:

1. Die Schaltung der Oberspannungswicklung wird mit einem Grossbuchstaben gekennzeichnet (D für Dreieck oder Y für Stern).
2. Die Schaltung der Unterspannungswicklung wird mit Kleinbuchstaben dargestellt (d oder y).
3. Daran fügt man eine Zahl, welche die Phasenverschiebung zwischen Primär- und Sekundärwicklung als Vielfaches von 30° angibt (n in Gleichung (3.31), im Gegenuhrzeigersinn gerechnet).

Beispielsweise bedeutet das Kürzel Yd5 überspannungsseitige Sternschaltung, unterspannungsseitige Dreieckschaltung und eine Phasedrehung um $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$. Bei gleicher Verdrahtung von Primär- und Sekundärseite ergibt sich die Schaltgruppe Yy0 oder Dd0.

Für Einspeisungen in Hochspannungsnetze verwendet man sehr oft eine Yd-Konfiguration. Zum einen erreicht man damit einen „Gewinn“ an Übersetzungsverhältnis, zum anderen kann auf der Hochspannungsseite ein Neutralleiter ausgeführt und geerdet werden. In Abbildung 3.10 ist eine solche

⁶Ausser Stern- und Dreieckschaltung gibt es z.B. noch die Möglichkeit einer sogenannten *Zick-Zack-Schaltung*, diese wird analog mit Z oder z gekennzeichnet.

Anordnung dargestellt. Zwischen Sternpunkt des Transformators und Erde ist eine *Erdungsimpedanz* geschaltet. Sinn und Zweck dieser Massnahme werden wir in Kapitel 7 untersuchen.

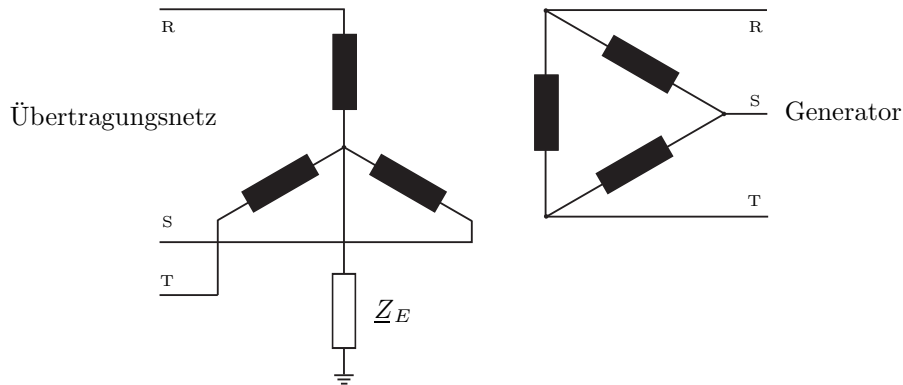


Abbildung 3.10. Yd-Schaltung zur Anbindung eines Generators oder Verteilnetzes an das Übertragungsnetz. Auf der Oberspannungsseite ist der Transformatorsternpunkt über die Impedanz Z_E mit Erde verbunden.

3.2.1 Aufbau von Dreiphasentransformatoren

Es besteht aber auch die Möglichkeit, alle Primär- und Sekundärwicklungen auf einen gemeinsamen magnetisch leitenden Körper aufzubringen. Dadurch spart man vor allem Material und Gewicht, was eine wichtige Rolle in Bezug auf den Transport spielt. Ausserdem ist der Platzbedarf gegenüber drei einzelnen Transformatoren geringer. Die Einsparung kann mit der einer Dreiphasenleitung gegenüber drei Einphasenleitungen verglichen werden.

Eisenkern und Wicklungen können auf viele verschiedene Arten konstruiert und angeordnet werden. Abbildung 3.11 zeigt den grundsätzlichen Aufbau eines *Fünfschenkeltransformators*. Weit verbreitet sind auch *Dreischenkeltransformatoren*. Ihr prinzipieller Aufbau ist der fünfschenkeligen Anordnung ähnlich, nur die zusätzlichen, nicht bewickelten Schenkel (links und rechts) fehlen.

Im symmetrischen Betrieb addieren sich die Flüsse in den drei Schenkeln zu

$$\Phi_R + \Phi_S + \Phi_T = 0 \quad (3.28)$$

weshalb der resultierende Fluss im Joch null ist. Erst bei unsymmetrischen Bedingungen breiten sich Flüsse über das Joch und die eventuell vorhandenen zusätzlichen Schenkel (vierter und fünfter) aus. Die Konstruktion der Eisenteile hat deshalb einen wesentlichen Einfluss auf das Betriebsverhalten bei unsymmetrischer Belastung.

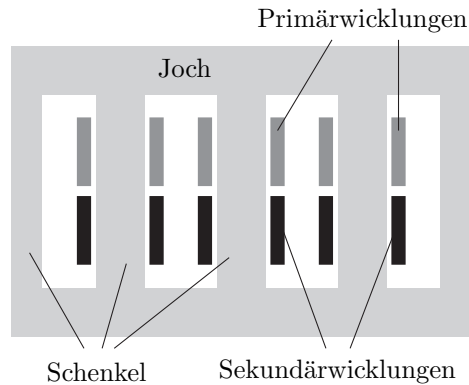


Abbildung 3.11. Fünfschenkeliger Dreiphasentransformator.

3.2.2 Dreiphasiges Transformatormodell

Zur Modellierung eines Dreiphasentransformators kann im Prinzip das einphasige Modell aus Abschnitt 3.1.3 für jede einzelne Phase herangezogen werden.

Betrachtet man jedoch die Verhältnisse bei Yd- oder Dy-Schaltung, also bei ungleicher Verschaltung der Primär- und Sekundärseite, so kann man zwei Dinge feststellen:

1. An Primär- und Sekundärspule liegen nicht die gleichen Spannungen an. Auf der einen Seite ist es die Phasenspannung, auf der anderen Seite die verkettete Spannung. Betrachten wir z.B. die Yd-Schaltung in Abbildung 3.10, so liegt an den generatorseitigen Spulen die Dreiecksspannung \underline{U} und an den netzseitigen Spulen die Phasenspannung \underline{U}_p an. Dadurch verändert sich das tatsächliche Übersetzungsverhältnis gegenüber dem Windungszahlverhältnis.
2. Dreieck- und Phasenspannung unterscheiden sich auch in der Phase. Deshalb tritt zusätzlich zur Amplitude eine Veränderung der Phasenlage auf. Je nach Schaltgruppe und Phasenanschluss ist ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/6 = 30^\circ$ als Phasenverschiebung möglich.

Beide Punkte beeinflussen das Übersetzungsverhältnis. Den Gewinn an Amplitude berücksichtigen wir durch Multiplikation des regulären Windungszahlverhältnisses mit einem Faktor k . Entsprechend unseren Überlegungen gilt für

$$\text{Dy-Schaltung: } k = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.29a)$$

$$\text{Yd-Schaltung: } k = \sqrt{3} \quad (3.29b)$$

Die Phasendrehung bringen wir in das Modell ein, indem wir dem idealen Transformator in Abbildung 3.9 ein phasendrehendes Element nachschalten.

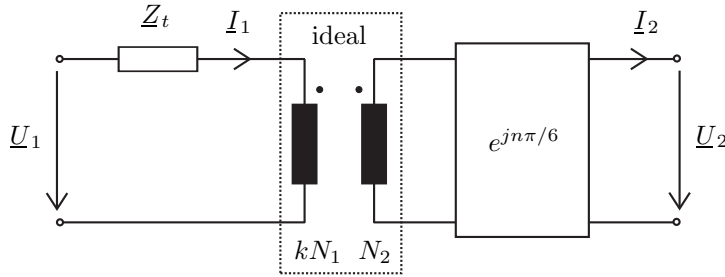


Abbildung 3.12. Einphasiges Transformatormodell mit Berücksichtigung der Schaltgruppe.

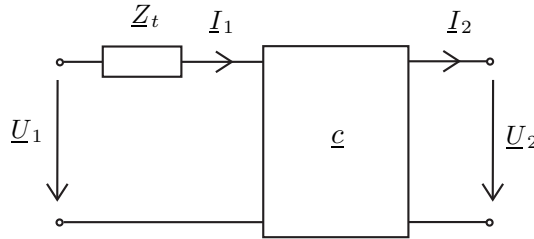


Abbildung 3.13. Einphasiges Transformatormodell mit idealem, komplexem Transformator.

Die Phasenverschiebung kann ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/6 = 30^\circ$ betragen, dementsprechend multiplizieren wir das Windungszahlverhältnis mit einem um $n\pi/6$ gedrehten Zeiger

$$e^{jn\pi/6}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ (siehe Abbildung 3.12). Wir erinnern uns, dass n in der Kennzeichnung der Schaltgruppe auftritt, und zwar als Zahl nach der Kennzeichnung der Schaltungen (z.B. Ydn). Der Betrag des Übersetzungsverhältnisses wird wegen

$$|e^{jn\pi/6}| = 1 \quad (3.30)$$

nicht beeinflusst. Jedoch bekommt das Übersetzungsverhältnis eine Phasenlage und lässt sich deshalb durch eine *komplexe Zahl* beschreiben. Schlussendlich erhalten wir

$$k \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot e^{jn\pi/6} = \underline{c} \in \mathbb{C} \quad (3.31)$$

Abbildung 3.13 zeigt die einphasige Ersatzschaltung dieses Modells. Der ideale Transformator und das phasendrehende Element sind zu einem Element zusammengefasst.

In einem realen Energieübertragungsnetz gibt es viele Verbindungen über Transformatoren. Die unterschiedlichen Spannungsebenen werden mit

Transformatoren verbunden, Generatoren und Lasten sind über Transformatoren angeschlossen. Somit arbeiten viele Transformatoren im *Parallelbetrieb*. In diesem Fall muss unter anderem die Schaltgruppe besonders beachtet werden.

4

Bezogene Grössen

In diesem Kapitel werden wir die Darstellung in bezogenen Grössen kennenlernen. Dabei machen wir nichts anderes, als die Grösse auf eine vorher festgelegte Basisgrösse zu beziehen und dann als Vielfaches davon anzugeben. Diese Darstellung ist in der Energieversorgung durchwegs üblich und kann hilfreich sein, wenn man es z.B. mit Kenngrössen elektrischer Netze zu tun hat.

4.1 Zweck der Rechnung mit bezogenen Grössen

Normalerweise werden physikalische Grössen als Produkt aus Zahlenwert und Einheit dargestellt, z.B. $U = 400 \text{ kV}$.

Im Gegensatz dazu kann man eine Darstellung in bezogenen Grössen wählen. Dabei wird der Wert einer Grösse als Vielfaches einer vorher festgelegten *Bezugs- oder Basisgrösse (base value)* ausgedrückt; die Grösse wird also auf die Bezugsgrösse bezogen. Bei der Division kürzen sich die Einheiten von Grösse und Bezugsgrösse weg und man erhält einen eigentlich dimensionslosen Wert. Dieser wird dann in *per-unit (p.u.)* angegeben, man spricht vom *p.u.-System*. In diesem System stellt man Grössen als

$$\text{Grösse in p.u.} = \frac{\text{aktuelle Grösse}}{\text{Bezugsgrösse}}$$

dar. Bei geschickter Wahl der Bezugsgrösse erhält die Grösse in p.u. eine starke Aussagekraft.

Wird z.B. die Spannung in einem Netzknoten auf die Nennspannung des Netzes bezogen, so kann man mit der Information $u = 0.93 \text{ p.u.}$ im ersten Augenblick mehr anfangen als mit $U = 372.03 \text{ kV}$. Man sieht sofort dass die Spannung 7% unter der Nennspannung liegt.

Systeme verschiedener Grösse, z.B. Transformatoren mit unterschiedlichen Nennströmen, sind durch die Darstellung von Betriebsgrössen in p.u. oft leichter überschaubar und vergleichbar als durch Angabe der absoluten Werte. Sind z.B. die auf den jeweils maximal zulässigen Betriebsstrom bezogenen Stromwerte zweier Transformatoren mit $i_1 = 0.98 \text{ p.u.}$ und $i_2 = 0.35 \text{ p.u.}$ angegeben, so ist sofort erkennbar, dass der erste Transformator nahe an seiner Belastungsgrenze arbeitet, wobei der zweite weit davon entfernt ist.

Ein weiterer Vorteil der Rechnung im p.u.-System macht sich bei Netzberechnungen mit Computern bemerkbar. Durch geschickte Wahl der Bezugsgrössen kann man erreichen, dass Systeme unterschiedlicher Dimension

im Rechner durch p.u.-Werte in der gleichen Grössenordnung dargestellt werden (z.B. 100 MVA = 1 p.u. für Berechnung grosser Netze, 1 MVA = 1 p.u. für Berechnung kleiner Netze). Dieser Umstand kann bei numerischen Berechnungsverfahren von Vorteil sein.

Der „Komfort“ dieses Systems zeigt sich besonders bei Berechnungen von elektrischen Maschinen. Beispielsweise entspricht im p.u.-System die Reaktanz eines Transformators seiner relativen Kurzschlussspannung.

4.2 Einführung der p.u.-Grössen an einem Beispiel

Versuchen wir nun, die Grössen einer einfachen Schaltung im p.u.-System darzustellen. Hierzu betrachten wir das Beispiel in Abbildung 4.1. Hierbei gilt $X_L = \omega L$ und $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Für die Serienschaltung der Elemente R , jX_L

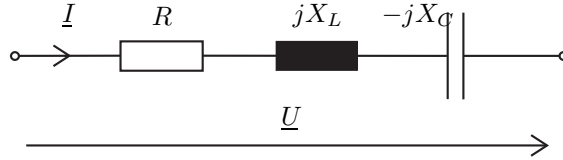


Abbildung 4.1. RLC-Serienschaltung.

und $-jX_C$ gilt

$$\underline{U} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} - jX_C\underline{I} \quad (4.1)$$

Führt man nun eine *Bezugsspannung* U_B ein, durch welche man obige Gleichung dividiert, so erhält man

$$\underline{u} = \frac{\underline{U}}{U_B} = \frac{R\underline{I}}{U_B} + \frac{jX_L\underline{I}}{U_B} - \frac{jX_C\underline{I}}{U_B} \quad (4.2)$$

wobei \underline{u} die auf die Bezugsspannung U_B bezogene Spannung ist. \underline{u} ist eine dimensionslose Grösse und wird in p.u. angegeben. Die Bezugsspannung U_B wählt man sinnvollerweise in der Grössenordnung der *Nennspannung*. Der Index „B“ steht für „Basis“ und kennzeichnet den Bezugswert. Die Bezugsgrössen sind reelle Werte, welche mit der entsprechenden Dimension behaftet sind.

Des Weiteren soll eine *Bezugs- oder Basisleistung* S_B eingeführt werden. Man beachte, dass die Wahl von S_B frei ist, da von den Grössen in der Beziehung

$$S_B = U_B \cdot I_B = \frac{U_B^2}{Z_B} \quad (4.3)$$

zwei Grössen frei wählbar sind. Nach Einführung der bezogenen Leistung

$$\underline{s} = \frac{\underline{S}}{S_B} \quad (4.4)$$

und Spannung in Gleichung (4.2) sind die Bezugswerte für Strom und Impedanz durch folgende Beziehungen gegeben:

$$I_B = \frac{S_B}{U_B} \quad (4.5)$$

$$Z_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{U_B^2}{S_B} \quad (4.6)$$

Mit der Einführung des bezogenen Stromes

$$\underline{i} = \frac{I}{I_B} \quad (4.7)$$

folgt aus Gleichung (4.2)

$$\underline{u} = \frac{RI_B}{U_B} \underline{i} + \frac{jX_L I_B}{U_B} \underline{i} - \frac{jX_C I_B}{U_B} \underline{i} \quad (4.8)$$

Der Basiswert der Bezugsimpedanz Z_B gilt als Basis für jegliche Widerstände im System, also sowohl für rein reelle als auch für imaginäre und komplexe Impedanzen. Wir beziehen die Widerstände auf ihre Basisgrösse:

$$r = \frac{R}{Z_B} \quad (4.9a)$$

$$x_L = \frac{X_L}{Z_B} \quad (4.9b)$$

$$x_C = \frac{X_C}{Z_B} \quad (4.9c)$$

Jetzt können alle bezogenen Werte in die ursprüngliche Maschengleichung (4.1) eingesetzt werden und wir erhalten diese in p.u.:

$$\underline{u} = r \underline{i} + j x_L \underline{i} - j x_C \underline{i} \quad (4.10)$$

Anstelle dieser Gleichung könnte man für die in Abbildung 4.1 dargestellte Schaltung auch

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (4.11)$$

schreiben, wobei die gesamte Impedanz des Kreises

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C \quad (4.12)$$

ist. Mit der Gesamtreaktanz im p.u.-System

$$\underline{z} = r + jx_L - jx_C = \frac{\underline{Z}}{Z_B} \quad (4.13)$$

lautet Gleichung (4.11), jetzt in p.u.,

$$\underline{u} = \underline{z} \underline{i} \quad (4.14)$$

4.3 Wahl der Bezugsspannungen bei vernetzten Vierpolelementen

Aus den Betrachtungen der vorangehenden Abschnitte ergeben sich für ein lineares System aus Vierpolelementen die folgenden Grundaussagen.

Da im ganzen Netz nur *eine* Bezugsleistung existieren soll, ist es sinnvoll, die Bezugsleistung S_B den im Netz am häufigsten auftretenden Leistungswerten angepasst zu wählen. Diese wird meist als dreiphasige Leistung angegeben, typische Werte in Hochspannungsnetzen sind 1 MVA für die mittleren oder 100 MVA für die höheren Spannungsniveaus.

Bei den *Bezugsspannungen* ist es oft üblich, für alle Knoten eines Netzteils, die zwischen zwei Transformatoren liegen (also auf gleichem Spannungsniveau), eine verkettete Bezugsspannung festzulegen. Diese Netzbezugsspannung wird vorteilhaft so gewählt, dass sie später eine möglichst einfache Interpretation der p.u.-Knotenspannungen ermöglicht, d.h. dem p.u.-Wert eine hohe Anschaulichkeit verleiht. Oft wird die Nennspannung als Bezugsspannung angenommen.

Um diese Grundsätze zur p.u.-Rechnung etwas anschaulicher zu machen, ist im folgenden ein Beispiel für die Umrechnung vom $\Omega/\text{kV}/\text{MVA}$ -Modell in das p.u.-System dargestellt.

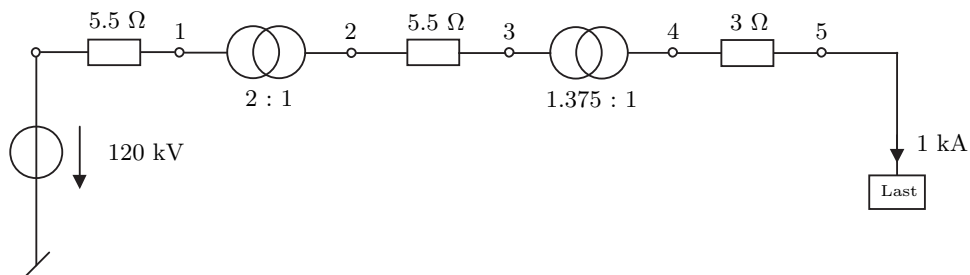


Abbildung 4.2. Beispiel mit Ω -, kV- und kA-Werten.

Gegeben sei das in Abbildung 4.2 gezeigte Schema. Die Spannung der linksseitigen treibenden Quelle beträgt 120 kV. Alle Impedanzen und auch alle Transformatorübersetzungsverhältnisse seien gegeben. Die rechtsseitige Last nehme einen Strom von 1 kA auf. Gesucht sind das p.u.-Modell und die p.u.-Spannungslösung dieses einfachen Netzes mit den Bezugsspannungen 120 kV am Knoten 1, 50 kV an den Knoten 2 und 3 und 40 kV am Knoten 4.

Abbildung 4.3 zeigt die konventionelle Lösung des Beispiels. Sie kann mit Hilfe der klassischen Methoden der Netzwerktheorie gefunden werden.

In Abbildung 4.4 ist obiges Schema im p.u.-Modell dargestellt. Als Bezugsleistung wurde $S_B = 100 \text{ MVA}$ gewählt. Zusammen mit den Vorgaben der Bezugsspannungen an den einzelnen Knoten wurden alle Spannungen, Ströme und Impedanzen in p.u. umgerechnet. Besonders interessant ist die

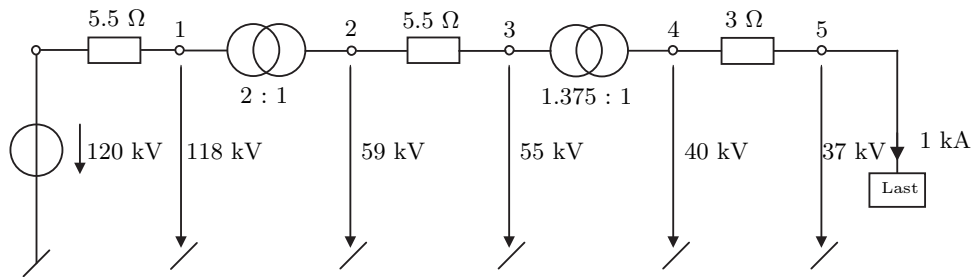


Abbildung 4.3. Lösung des Beispiels in Ω-, kV- und kA-Werten.

Angabe der Transformatorübersetzungsverhältnisse in p.u. Dabei kann die Basisgrösse z.B. auf das Nennübersetzungsverhältnis des Transformators gesetzt werden. In unserem Beispiel ist das Übersetzungsverhältnis dann 1 p.u., wenn primär und sekundär Spannungen von 1 p.u. anliegen:

$$c_B = \frac{U_{1B}}{U_{2B}} = \frac{120 \text{ kV}}{50 \text{ kV}} = 2.4 : 1 \quad (4.15)$$

Das tatsächliche Übersetzungsverhältnis des Transformators berechnet sich aus den tatsächlich anliegenden Spannungen zu

$$c = \frac{118 \text{ kV}}{59 \text{ kV}} = 2.0 : 1 \quad (4.16)$$

Jetzt können wir das tatsächliche Übersetzungsverhältnis des Transformators c auf den Basiswert c_B beziehen und erhalten das bezogene Übersetzungsverhältnis c' in p.u.:

$$c' = \frac{c}{c_B} = \frac{2.0}{2.4} = 0.833 : 1 \text{ p.u.} \quad (4.17)$$

Analog können wir das Übersetzungsverhältnis des zweiten Transformators auf einen Basiswert beziehen.

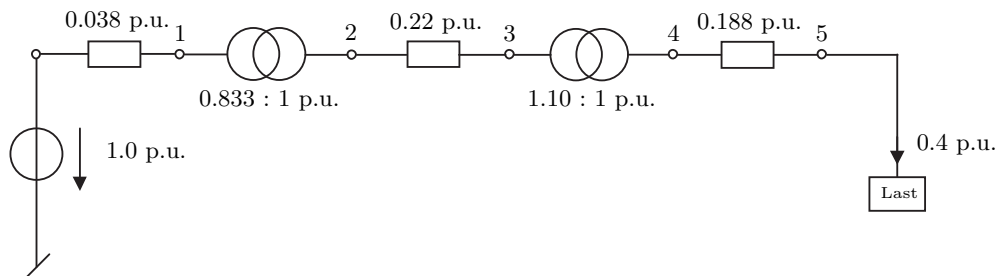


Abbildung 4.4. Beispiel mit p.u.-Werten.

Die Ergebnisse aller gesuchten Knotenspannungen in p.u. sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

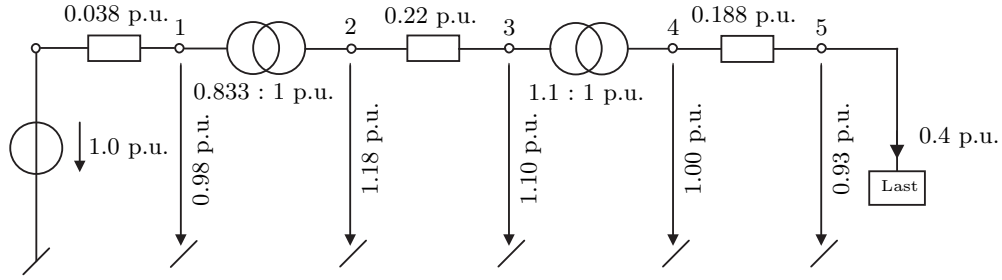


Abbildung 4.5. Lösung des Beispiels in p.u.-Werten.

Aus dieser Darstellung ist sehr anschaulich erkennbar, um wieviele Prozent z.B. die jeweilige berechnete Spannung abfällt bzw. vom vorgegebenen Bezugsspannungsniveau abweicht. Die in Abschnitt 4.1 erwähnten Punkte der guten Übersichtlichkeit und Vergleichbarkeit sind damit klar einzusehen.

Eine Erleichterung bringt das p.u.-System auch bei der Umrechnung von Transformatorimpedanzen von der Primär- auf die Sekundärseite. Laut Gleichung (4.15) gilt für den Bezugswert des Übersetzungsverhältnisses

$$c_B = \frac{U_{1B}}{U_{2B}}$$

Ist eine primärseitige Transformatorreaktanz \underline{Z}_1 gegeben, so hat diese den bezogenen Wert

$$\underline{z}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{Z_{1B}} = \frac{\underline{Z}_1}{U_{1B}^2/S_B} \quad (4.18)$$

Rechnet man diese Impedanz laut Gleichung (3.15) auf die Sekundärseite um, so erhält man dort als bezogene Grösse

$$\underline{z}_2 = \frac{\underline{Z}_1/c_B^2}{U_{2B}^2/S_B} = \frac{\underline{Z}_1}{c_B^2 U_{2B}^2/S_B} = \frac{\underline{Z}_1}{U_{1B}^2/S_B} = \underline{z}_1 \quad (4.19)$$

Man sieht, dass die Transformatorimpedanz in p.u. auf beiden Seiten den gleichen Zahlenwert hat, sofern das Basisübersetzungsverhältnis c_B entsprechend (4.15) gewählt wird.

Bei realen Transformatoren liegt die Serienimpedanz (siehe vereinfachtes Modell in Abschnitt 3.1.3) bei $|\underline{z}_t| \approx 0.05 \dots 0.15$ p.u.

4.4 Umrechnung zwischen p.u.-Systemen

Bei der Umrechnung zwischen zwei p.u.-System geht es darum, ein gegebenes p.u.-Bezugssystem mit den Bezugswerten X_{iB}^{alt} auf ein neues System mit X_{iB}^{neu} umzurechnen. In der Praxis muss man das z.B. dann tun, wenn die vom Hersteller gelieferten p.u.-Daten eines Generators an die Bezugsgrössen einer Netzberechnung angeglichen werden sollen.

Generell gilt, dass der Weg über das bezugssystemneutrale $\Omega/\text{kV}/\text{MVA}$ -System immer zum Ziel führt. Das heisst, man wandelt alle im p.u.-System \mathcal{A} gegebenen Grössen in $\Omega/\text{kV}/\text{MVA}$ -Grössen um und wählt danach ein beliebig neues, für alle Grössen gültiges, einheitliches Bezugssystem \mathcal{B} . Dieser Weg ist jedoch relativ aufwendig.

Einfacher ist es, die Grössen direkt auf die neuen Bezugswerte umzurechnen. Dazu muss man den aktuellen p.u.-Wert mit dem Verhältnis aus alter zu neuer Bezugsgrösse multiplizieren.

Beispiel: Umrechnung einer Impedanz Der tatsächliche Wert einer Impedanz \underline{Z} in Ω muss bei einem Wechsel auf eine neue Bezugsgrösse gleich bleiben:

$$\underline{Z} = \underline{z}^{alt} \cdot Z_B^{alt} = \underline{z}^{neu} Z_B^{neu} \quad (4.20)$$

Daraus ergibt sich für den neuen p.u.-Wert

$$\underline{z}^{neu} = \underline{z}^{alt} \frac{Z_B^{alt}}{Z_B^{neu}} \quad (4.21)$$

Da der Bezugswert der Impedanz laut Gleichung (4.6) aus dem Bezugswert der Spannung und der Leistung zustande kommt, gilt weiter

$$\underline{z}^{neu} = \underline{z}^{alt} \left(\frac{U_B^{alt}}{U_B^{neu}} \right)^2 \frac{S_B^{neu}}{S_B^{alt}} \quad (4.22)$$

5

Leitungen

Nun wenden wir uns dem zentralen Element der Energieübertragung zu – der Leitung. Zuerst untersuchen wir die verteilten Leitungsparameter verschiedener Leiteranordnungen und diskutieren über die elektromagnetischen Felder in der Nähe von Freileitungen. Dann führen wir ein Leitungsmodell ein, welches uns erlaubt, eine Gleichung einer verlustbehafteten Leitung für den stationären Zustand herzuleiten. Im Weiteren wird auch der wichtige Spezialfall der verlustlosen Leitung untersucht werden. Abschliessend untersuchen wir verschiedene Leitungsmodelle für unterschiedliche Leitungslängen.

5.1 Einführung

5.1.1 Physikalische Bedeutung von Leitungen

Die metallischen Leiter haben die Aufgabe das magnetische und elektrische Feld und somit die Leistung zu führen (Poyntingscher Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$).

In der Energietechnik besteht die primäre Aufgabe der Leitung im sicheren Transport hoher Leistungen. Zum Einsatz kommen entweder Freileitungen (overhead lines) oder Kabel (cables). Sie unterscheiden sich in ihrem Aufbau und den Betriebseigenschaften voneinander und werden deshalb für unterschiedliche Aufgaben eingesetzt. Einen wesentlichen Unterschied stellen auch die Kosten dar: Bei gleichem Spannungsniveau sind die Kosten für ein Kabel etwa 10 bis 20 mal höher als jene für eine Freileitung. Deshalb bevorzugt man aus rein wirtschaftlicher Sicht die Errichtung von Freileitungen.

Die Geometrie von Freileitungs- oder Kabelleitern ist dadurch ausgezeichnet, dass sie sich in einer Richtung (nämlich entlang der Leitung) nicht ändert.¹ Somit wird nur eine parallele Anordnung von Leitern betrachtet. Dies ist eine Vereinfachung die die mathematische Behandlung wesentlich erleichtern wird, ohne dass dabei grosse Einbussen in der Genauigkeit der Ergebnisse in Kauf genommen werden müssen.

Leitungen werden also als homogene Gebilde behandelt, die mehrere Einzelleiter umfassen können. Dabei werden die Eigenschaften der Leitung pro Längeneinheit durch *verteilte Parameter* (z.B. Induktivität pro Längeneinheit in mH/km) gekennzeichnet. Eine Leitung enthält somit keine konzen-

¹Bei Freileitungen entsteht durch das Gewicht der Leiterseile ein gewisser Durchhang zwischen zwei Masten. Dieser Umstand kann vereinfachend durch Annahme eines mittleren Abstandes zur Erde berücksichtigt werden, siehe Gleichung (5.51).

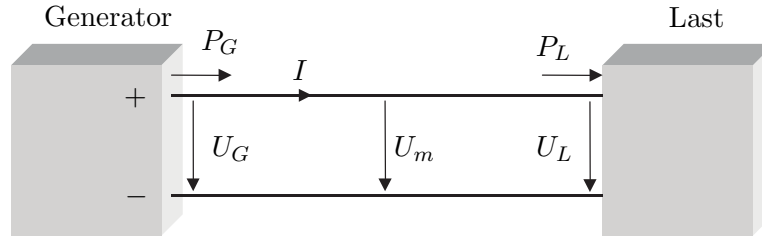


Abbildung 5.1. Ein stark vereinfachtes Energieübertragungssystem

trierten Parameter wie sie aus der Theorie der Schaltkreise bekannt sind. Vereinfachend kann ein Leitungsstück jedoch durch eine π -Schaltung aus konzentrierten Elementen modelliert werden. Dies ist je nach Zweck der Untersuchung bis zu einer gewissen Leitungslänge zulässig.

5.1.2 Grund für die hohe Übertragungsspannung

Abbildung 5.1 zeigt ein vereinfachtes Gleichstromübertragungssystem. Dabei liefert ein Generator über eine Übertragungsleitung elektrische Leistung an eine Last. Weil die Leitung widerstandsbehaftet ist, kommt es entlang der Leitung zu einem Spannungsabfall: Die Spannung an den Generatorklemmen U_G ist höher als die Spannung an den Lastklemmen U_L . U_m ist die Spannung in der Leitungsmitte.

Die über die Leitung transportierte mittlere Leistung beträgt

$$P_{trans} = U_m I \quad (5.1)$$

Stellt nun R den gesamten Leitungswiderstand dar, so führt dies zu folgenden Übertragungsverlusten P_Ω :

$$P_\Omega = RI^2 = R \left(\frac{P_{trans}}{U_m} \right)^2 \quad (5.2)$$

Stellen wir die Verlustleistung in Relation zur übertragenen Leistung, erhalten wir die relative Verlustleistung als

$$\frac{P_\Omega}{P_{trans}} = R \frac{P_{trans}}{U_m^2} \quad (5.3)$$

Gleichung (5.3) zeigt, dass die Übertragungsverluste umgekehrt proportional zum Quadrat der angelegten Leitungsspannung sind.

Um die Verluste gering zu halten, werden Energieübertragungsleitungen deshalb mit möglichst hohen Spannungen betrieben. Natürlich steigt mit der Leiterspannung auch der Isolationsaufwand (Kosten) der Komponenten (z.B. Transformatoren). Wie in Abbildung 5.2 dargestellt stehen sinkenden Verlustkosten steigende Anlagenkosten gegenüber. Das optimale Spannungsniveau ergibt sich aus dem Minimum der Gesamtkosten.

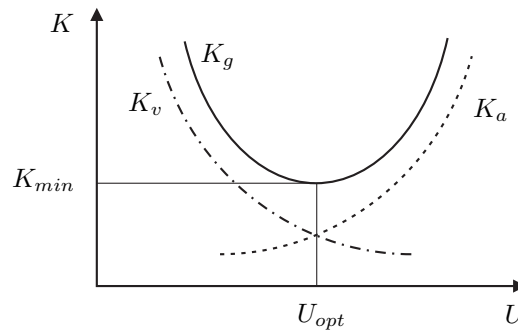


Abbildung 5.2. Kosten K vs. Übertragungsspannung U . Die Gesamtkosten K_g ergeben sich aus den Verlustkosten K_v und den Anlagenkosten K_a . Die wirtschaftlich optimale Übertragungsspannung U_{opt} ergibt sich bei minimalen Kosten K_{min} .

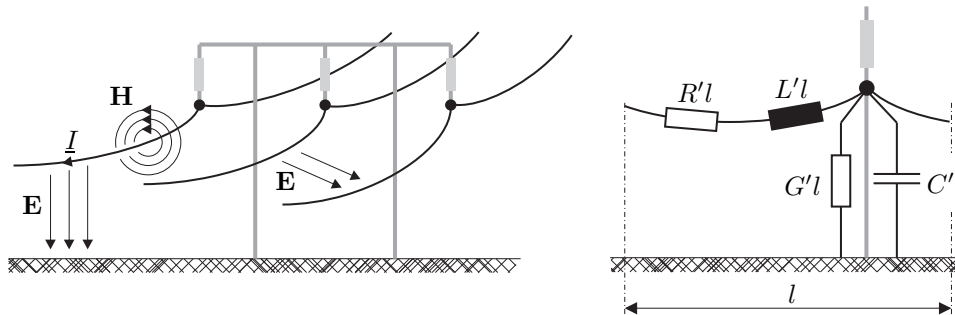


Abbildung 5.3. Links: Magnetisches (\mathbf{H}) und elektrisches (\mathbf{E}) Feld einer unter Spannung stehenden und stromführenden Hochspannungsfreileitung; rechts: Leitungsmodell mit konzentrierten Parametern.

5.2 Leitungsparameter

Aus der Geometrie einer Leiteranordnung und den verwendeten Materialien ergeben sich für jede Leitung charakteristische *Leitungsparameter*. Diese auf eine Längeneinheit bezogenen Parameter werden auch *Leitungsbeläge* genannt. Es handelt sich dabei um

- Widerstandsbelag R' in Ω/km
- Induktivitätsbelag L' in H/km
- Ableitbelag G' in S/km
- Kapazitätsbelag C' in F/km

Wie diese Beläge zustande kommen ist in Abbildung 5.3 skizziert. Der Längswiderstand der Leitung entsteht durch den ohmschen Widerstand des Leitermaterials. Die Längsinduktivität und die Querkapazität resultieren aus

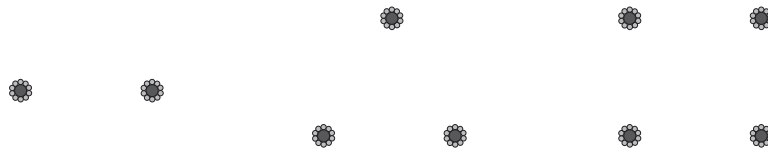


Abbildung 5.4. Bündelleiter: Duplex-, Triplex- und Quadruplexleiter.

den Effekten des magnetischen und elektrischen Feldes eines unter Spannung stehenden und stromführenden Leiters. Der Quer(ab-)leitwert entsteht durch die Leckströme an den Isolatoren und im Isoliermedium (z.B. Luft, SF_6). Diese Ableitströme sind in der Regel sehr klein, weshalb der Querleitwert oft vernachlässigt wird. Alle übrigen Parameter werden zur Modellierung von Hochspannungsleitungen herangezogen.

Das Ziel besteht darin, Formeln für die oben genannten Parameter von dreiphasigen Leitungen zu finden, welche auf beliebige Leiterformen und -anordnungen anwendbar sind.

5.2.1 Leiter

Ein Übertragungssystem besteht grundsätzlich aus zwei Hauptkomponenten: aus *Leitern*, deren Aufgabe es ist, den Strom zu führen, und aus einem *Isoliersystem*, welches die notwendige Isolation der spannungsführenden Teile untereinander (Phasen) und gegenüber Erde sicherstellt. Bei Freileitungen besteht dieses Isoliersystem aus Isolatorketten an den Masten (z.B. aus Porzellan, Glas, Silikon) und, entlang der Leiter, aus Luft. Je nach Betriebsspannung sind bestimmte Mindestabstände einzuhalten, um die geforderte Spannungsfestigkeit der Isolierstrecke zu erreichen. Diese Abstände (und somit die Betriebsspannung der Leitung) sind vor allem für die Konstruktion der Leitungsmasten bzw. für das sogenannte *Mastbild* von Bedeutung.

Jede Phase einer Übertragungsleitung besteht aus einem oder mehreren Leitern. Werden mehrere Leiter für eine Phase verwendet, so spricht man von *Bündelleitern* (*bundled conductors*). Je nach Anzahl der Leiter pro Phase bezeichnet man diese als Duplex-, Triplex-, Quadruplex- usw. Leiter (siehe Abbildung 5.4). Solche Leiterbündellungen führen zu einer geringeren Längsimpedanz der Leitung und einem reduzierten elektrischen Feld an der Leiteroberfläche. Demzufolge reduziert sich die Koronaentladung und somit der Querableitwert der Leitung.

Als Leitermaterial kommen heutzutage fast ausschliesslich Aluminium bzw. Aluminiumlegierungen in Frage. Um neben der guten elektrischen Leitfähigkeit von Aluminium auch eine gute mechanische Festigkeit der Leiterseile zu erreichen, verwendet man oft eine Konstruktion mit einem tragfähigen Stahlseilkern auf welchen Aluminiumlitzen aufgebracht werden (siehe Abbildung 5.5). Solche Leiter werden als *Stalu* oder *ACSR* (*Aluminium Conductor*

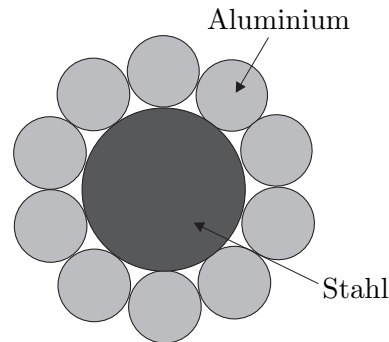


Abbildung 5.5. Querschnitt durch einen Stalu-/ACSR-Leiter.

Steel Reinforced) bezeichnet.

Weil der spezifische Widerstand von Stahl viel höher ist als jener von Aluminium ($\rho_{Fe}/\rho_{Al} \approx 4 \dots 10$), fließt der überwiegende Anteil des Leiterstromes in den Aluminiumdrähten. Zusätzlich bewirkt der *Skinneffekt* eine Verdrängung des Stromes in den äusseren Leiterbereich.

Wie bereits angedeutet werden auch Legierungen aus Aluminium, Magnesium und Silizium als Material für Leiterseile verwendet. Man erreicht damit eine mit Stalu vergleichbare mechanische Festigkeit bei viel geringerem Gewicht, diesem Vorteil steht jedoch ein höherer Preis gegenüber.

5.2.2 Induktivität

Induktivität eines unendlich langen geraden Leiters

Um eine allgemeine Beziehung für die Induktivität eines Mehrphasenleitersystems herzuleiten, beginnen wir mit der Untersuchung eines unendlich langen geradlinigen Leiters im Raum. Der unendlich lange und geradlinig ausgedehnte Leiter ist eine Annäherung an einen langen Leiter und vereinfacht die Berechnung der Parameter. Diese Vorstellung entspricht nicht dem Modell einer realen Übertragungsleitung, sie stellt nur den ersten Schritt in der Ableitung dar. Wie wir später sehen werden, können die gesuchten Gleichungen durch einfache Schlussfolgerungen und Superposition gefunden werden.

Wir beginnen mit der Ableitung der Induktivität eines unendlich langen Drahtes mit Radius r , über den sich der Strom i gleichmässig verteilt (konstante Stromdichte). Die Feldlinien des \mathbf{H} -Feldes sind konzentrische Kreise (siehe Abbildung 5.6), für Punkte ausserhalb des Leiters mit $x > r$ gilt

$$H_a(x) = \frac{i}{2\pi x} \quad (5.4)$$

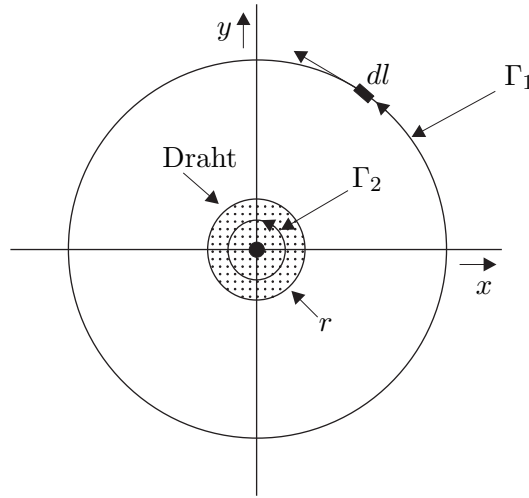


Abbildung 5.6. Querschnitt durch einen stromführenden Leiter.

Im Leiterinnenraum ($x \leq r$) beträgt der Strom innerhalb Γ_2

$$i(x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} i \quad (5.5)$$

Somit ergibt sich die magnetische Feldstärke im Inneren des Leiters zu

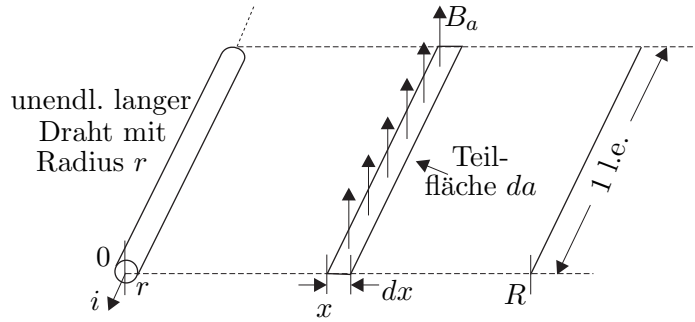
$$H_i(x) = \frac{x}{2\pi r^2} i \quad (5.6)$$

Die Gesamtinduktivität berechnet sich aus der Summe der Feldverteilungen inner- und ausserhalb des Leiters.

Äussere Induktivität Um jenen Anteil der Induktivität zu bestimmen der durch das Feld ausserhalb des Leiters entsteht, betrachten wir den magnetischen Fluss von der Leiteroberfläche bis zu einem Radius R . Jede Feldlinie umschliesst den Leiter genau einmal, deshalb ist die Flussverkettung² gleich dem Fluss im Rechteck vom Radius r bis R in Abbildung 5.7. Die Länge des Rechtecks wird als eine Längeneinheit (1 l.e.) angenommen. Der verkettete Fluss berechnet sich zu

$$\phi_a = \int_A B_a(x) da = \int_r^R B_a(x) dx = \mu_0 \int_r^R \frac{i}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \quad (5.7)$$

²Das Konzept der Flussverkettung wird normalerweise für Spulen angewandt. Dabei ist der verkettete Fluss jener Flussanteil, der alle Windungen der Spule(n) durchdringt. Den unendlich langen Leiter kann man sich als eine Spule mit einer einzigen Windung vorstellen welche sich im Unendlichen schliesst ($-\infty$ und $+\infty$ seien der gleiche Punkt).

Abbildung 5.7. Fluss durch Rechteck $R - r, 1$.

wobei wir als differentielle Fläche $da = 1 \cdot dx$ und $B_a(x) = \mu_0 H_a(x)$ verwenden. Die Beziehung zwischen Flussverkettung ϕ_a und Induktivität l_a lautet

$$\phi_a = l_a i \quad (5.8)$$

Daraus erhalten wir die äussere Induktivität pro Längeneinheit

$$l_a = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \quad (5.9)$$

Innere Induktivität Zur Bestimmung der inneren Induktivität berechnen wir zuerst die magnetische Energie innerhalb einer Längeneinheit des Leiters:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \int_V H_i^2 dV = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \int_0^r \left(\frac{x}{2\pi r^2} i \right)^2 2\pi x dx = \frac{\mu \mu_0 i^2}{16\pi} \quad (5.10)$$

μ repräsentiert die relative Permeabilität des Leitermaterials. Für Kupfer- oder Aluminium kann $\mu \approx 1$ angenommen werden.

Bezeichnen wir den Teil der Induktivität, der von der Flussverkettung innerhalb des Leiters herrührt, als l_i , so erhalten wir

$$W_m = \frac{1}{2} l_i i^2 \quad (5.11)$$

Der innere Anteil der Induktivität pro Längeneinheit ist dann

$$l_i = \frac{\mu \mu_0}{8\pi} \quad (5.12)$$

Aus Gleichung (5.12) kann man erkennen, dass die innere Induktivität unabhängig vom Leiterradius r ist.

Addieren wir nun die Anteile der äusseren und inneren Induktivität aus den Gleichungen (5.9) und (5.12), so erhalten wir die Gesamtinduktivität des Leiters pro Längeneinheit

$$l = l_i + l_a = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{\mu}{4} + \ln \frac{R}{r} \right) \quad (5.13)$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert für μ_0 ein, kann man die Induktivität pro km berechnen:

$$l = 2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\mu}{4} + \ln \frac{R}{r} \right) \text{ H/km} \quad (5.14)$$

Mit der Umformung $\mu/4 = \ln e^{\mu/4}$ kann Gleichung (5.14) als

$$l = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{R}{r'} \text{ H/km} \quad (5.15)$$

angeschrieben werden, wobei

$$r' = r e^{-\mu/4} \quad (5.16)$$

Für $\mu \approx 1$, also Kupfer- oder Aluminiumleiter, gilt $r' \approx 0.78 r$.

Betrachtet man den Ausdruck für die Induktivität in Gleichung (5.15) so stellt man fest, dass diese bei unendlichem Integrationsbereich, d.h. $R \rightarrow \infty$, unendlich gross wird. Dies entspricht nicht der Realität, das eben hergeleitete Modell für den einzelnen Draht ist unvollständig, denn es muss immer irgendwo in endlichem Abstand R zum Hinleiter ein Rückstrom fliessen.

In den nachfolgenden Abschnitten wird gezeigt, dass mit der Berücksichtigung dieser Tatsache das obige Modell physikalisch konsistent wird.

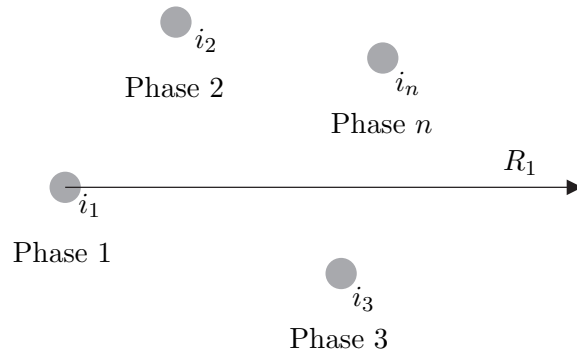
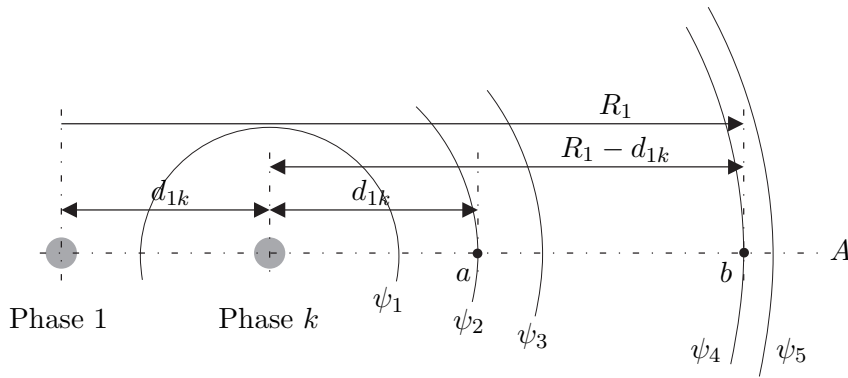
Mehrphasensysteme

Um das „unphysikalische“ Resultat für den Einzelleiter aufzuklären, untersuchen wir nun ein System mit n Leitern wie in Abbildung 5.8. Im Folgenden bezeichnen wir einen einzelnen Leiter in Abbildung 5.8 als *Phase*. Es handelt jetzt also nicht um einen Bündelleiter bestehend aus n Einzelleitern auf die sich der Phasenstrom aufteilt, sondern um n Phasen welche jede für sich einen anderen (Phasen-)Strom führen.³ Jede Phase kann dann wieder aus einem Bündel mehrerer Einzelleiter bestehen (siehe Abbildung 5.11) die gemeinsam den Phasenstrom führen.

Zunächst interessiert uns die Flussverkettung von Phase 1 vom Ursprung bis zum Radius R_1 . Zusätzlich zum Fluss von Phase 1 müssen auch die Flussanteile der Phasen 2, 3, ..., n berücksichtigt werden. Der verkettete Fluss der Phase 1 ist aus dem vorigen Absatz bekannt und ergibt sich zu

$$\phi_{11} = l_1 i_1 = \frac{i_1 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_1}{r'} \quad (5.17)$$

³Für dreiphasige Systeme werden die Phasen 1, 2, ..., k , ..., n auch mit R, S und T bezeichnet.

Abbildung 5.8. System mit n Phasen.Abbildung 5.9. Beitrag der Phase $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ zum verketteten Fluss der Phase 1.

Betrachten wir nun allgemein den Anteil der Phase k am verketteten Fluss mit Phase 1 (siehe Abbildung 5.9). Nehmen wir alle anderen Phasenströme als Null an. Wie in Abbildung 5.9 gezeigt sind die magnetischen Feldlinien hervorgerufen durch i_k konzentrische Kreise mit Mittelpunkt im Leiter der Phase k . Die Feldlinie ψ_1 schliesst den Leiter der Phase 1 nicht ein und liefert somit keinen Beitrag zum verketteten Fluss. Die Feldlinie ψ_3 ist mit Phase 1 verkettet, so auch ψ_5 , jedoch ist diese ausserhalb des Radius R_1 . Sie liefert keinen Nettoanteil zur Flussverkettung und wird deshalb nicht berücksichtigt. Die Feldlinien ψ_2 und ψ_4 stellen jene Grenzen zwischen Phase 1 und Phase k dar, innerhalb derer Flüsse zur Flussverkettung beitragen, wenn man bis R_1 integriert. Es liefern also nur jene Feldlinien einen Beitrag zur Flussverkettung, die die Achse A zwischen den Punkten a und b schneiden.

Der verkettete Fluss zwischen Phase 1 und Phase k kann mit Gleichung

(5.7) berechnet werden:

$$\phi_{1k} = \frac{i_k \mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_1 - d_{1k}}{d_{1k}} \quad (5.18)$$

Die gesamte Flussverkettung von Phase 1 kann nun durch Superposition der Einzelanteile aller Phasen gefunden werden. Sie ergibt sich zu

$$\phi_1 = \sum_{k=1}^n \phi_{1k} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{R_1}{r'_1} + i_2 \ln \frac{R_1 - d_{12}}{d_{12}} + \dots + i_n \ln \frac{R_1 - d_{1n}}{d_{1n}} \right] \quad (5.19)$$

Diesen Ausdruck kann man in zwei Teile aufspalten:

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'_1} + i_2 \ln \frac{1}{d_{12}} + \dots + i_n \ln \frac{1}{d_{1n}} \right] + \\ & + \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n i_k \ln (R_1 - d_{1k})}_A \end{aligned} \quad (5.20)$$

Man beachte, dass $d_{11} = 0$. Der Term A kann nun vereinfacht werden, indem wir einen kleinen mathematischen Trick anwenden. Wir addieren einen Nullterm B , wodurch wir umformen und den Grenzwert für $R_1 \rightarrow \infty$ bilden können:

$$A = \sum_{k=1}^n i_k \ln (R_1 - d_{1k}) - \underbrace{\sum_{k=1}^n i_k \ln R_1}_{B=0} = \sum_{k=1}^n i_k \ln \left(1 - \frac{d_{1k}}{R_1} \right) \quad (5.21)$$

Weil $\sum_{k=1}^n i_k = 0$ gilt auch $B = 0$. Um den gesamten Fluss zu erfassen, setzen wir $R_1 \rightarrow \infty$ und erhalten

$$A(R_1 \rightarrow \infty) = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n i_k \ln \left(1 - \frac{d_{1k}}{R_1} \right) = 0 \quad (5.22)$$

Schlussendlich ergibt sich die gesamte Flussverkettung von Phase 1 laut (5.20) zu

$$\phi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'_1} + i_2 \ln \frac{1}{d_{12}} + \dots + i_n \ln \frac{1}{d_{1n}} \right] \quad (5.23)$$

Die Flussverkettung der Phase 1 hängt also von allen Strömen i_1, i_2, \dots, i_n ab. Die Gleichung kann auch in der Form

$$\phi_1 = l_{11} i_1 + l_{12} i_2 + \dots + l_{1n} i_n \quad (5.24)$$

geschrieben werden, wobei die Induktivitäten l_{1k} nur von der Geometrie der Leiteranordnung abhängig sind. Die gesamte Flussverkettung für Phase k ergibt sich zu

$$\phi_k = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{d_{k1}} + \dots + i_k \ln \frac{1}{r'_k} + \dots + i_n \ln \frac{1}{d_{kn}} \right] \quad (5.25)$$



Abbildung 5.10. Systeme mit zwei und drei Phasen.

In den nächsten beiden Abschnitten werden zwei wichtige Spezialfälle von Mehrphasensystemen behandelt, nämlich das Zwei- und Dreiphasensystem.

System mit zwei Phasen

Betrachten wir ein System wie in Abbildung 5.10 bestehend aus zwei identischen Leitern (Phasen) mit Radius r im Abstand D . Mit Gleichung (5.25) und der Annahme $i_1 + i_2 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} + i_2 \ln \frac{1}{D} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} - i_1 \ln \frac{1}{D} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \ln \frac{D}{r'}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Gleiches gilt für ϕ_2 . Somit ergibt sich die Induktivität der beiden Leiter pro Längeneinheit zu

$$l_1 = l_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r'} \tag{5.27}$$

Die gesamte Induktivität setzt sich aus Eigen- und Gegeninduktivität zusammen. Weil aber $i_1 = -i_2$, ist gilt für die Gesamtinduktivität Gleichung (5.27).

System mit drei Phasen

Betrachten wir ein System wie in Abbildung 5.10 bestehend aus drei identischen Drähten (Phasen) mit Radius r und gegenseitigem Abstand D , d.h. die drei Phasen sind in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge D platziert. Auch hier erhält man aus Gleichung (5.25) und

$i_1 + i_2 + i_3 = 0$ den verketteten Fluss

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} + i_2 \ln \frac{1}{D} + i_3 \ln \frac{1}{D} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[i_1 \ln \frac{1}{r'} - i_1 \ln \frac{1}{D} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \ln \frac{D}{r'}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Gleiches gilt für die Phasen 2 und 3. Folglich beträgt die Induktivität der Phasen 1, 2 und 3

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r'} \tag{5.29}$$

Auch hier gilt der obige Kommentar bezüglich Eigen- und Gegeninduktivität. Durch die Symmetrie, d.h. die äquidistante Anordnung der Phasen und die Bedingung $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, erhält man den einfachen Ausdruck für die Gesamtinduktivität in Gleichung (5.29).

Bündelleiter

In Abschnitt 5.2.1 wurde erwähnt, dass für höhere Spannungsebenen, typischerweise über 200 kV, jede Phase aus mehreren Einzelleitern besteht (siehe Abbildung 5.11). Zur Berechnung der Induktivität kann das obige Verfahren angewandt werden. Man erhält damit ähnliche Ausdrücke wie für den Fall eines einzigen Leiters pro Phase.

Tatsächlich kann man zur Berechnung die gleichen Formeln verwenden, nur muss anstatt des Radius r' ein sogenannter äquivalenter Radius r'_{eq} und anstatt des Abstandes d_{ik} in Abbildung 5.9 ein geometrischer Mittelwert des Abstandes zwischen den Einzelleitern der Phasen eingesetzt werden. Es kann gezeigt werden, dass der äquivalente Radius einer gebündelten Phase mit n symmetrisch angeordneten Einzelleitern durch folgende Beziehung berechnet werden kann:

$$r'_{eq} = \sqrt[n]{n R^{n-1} r'} \tag{5.30}$$

Die Notation entspricht Abbildung 5.11. Man kann auf einfache Weise zeigen, dass sich durch Aufteilung einer Phase auf ein querschnittsgleiches Leiterbündel bestehend aus mehreren Einzelleitern der äquivalente Radius vergrößert. Dementsprechend vermindert sich die Induktivität.

Natürlich lässt sich der äquivalente Radius auch für den ursprünglich verwendeten, tatsächlichen Leiterradius r (siehe Abbildung 5.7) berechnen:

$$r_{eq} = \sqrt[n]{n R^{n-1} r} \tag{5.31}$$

Nachdem die Abstände zwischen den Phasen viel grösser sind als die Abstände der Einzelleiter im Phasenbündel, kann als Phasenabstand die Distanz zwischen den Mittelpunkten der Leiterbündel anstatt der geometrischen Mittel der Einzelabstände eingesetzt werden.

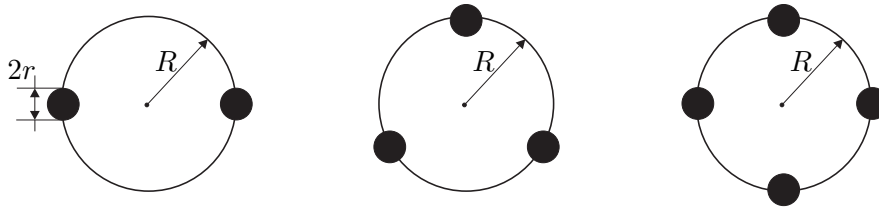


Abbildung 5.11. Symmetrische Anordnung der gebündelten Leiter einer Phase.

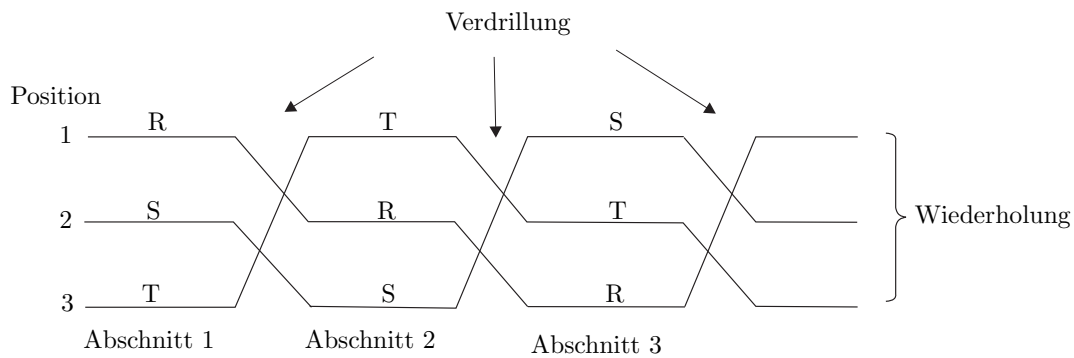


Abbildung 5.12. Verdrillte Dreiphasenleitung.

Verdrillung der Phasen

Im letzten Abschnitt wurde eine allgemeine Beziehung für die Flussverkettung in einem Mehrphasensystem hergeleitet. Dabei wurde angenommen, dass die einzelnen Phasenleiter symmetrisch zueinander angeordnet sind, z.B. in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks. Normalerweise sind die drei Phasenleiter aber nicht exakt symmetrisch angeordnet.

Oft sind alle drei Phasen horizontal oder vertikal angeordnet, deshalb sind die einzelnen Phasen mit unterschiedlichen Flüssen verkettet. Erreichen diese Unterschiede eine inakzeptable Größenordnung, so müssen Gegenmassnahmen getroffen werden. Eine übliche Methode besteht darin, die Position der Phasen regelmässig zu vertauschen (siehe Abbildung 5.12), wodurch man eine *Verdrillung* der Leitung erreicht.

Betrachten wir nun eine verdrillte Leitung mit einer Phasenleiteranordnung wie in Abbildung 5.13 dargestellt und nehmen wir folgendes an:

1. Jede Phase (R, S und T) besetzt jede Position (1, 2 und 3) über jeweils einen Abschnitt der Leitung.
2. $i_R + i_S + i_T = 0$

Berechnen wird nun die durchschnittliche Flussverkettung pro Längeneinheit

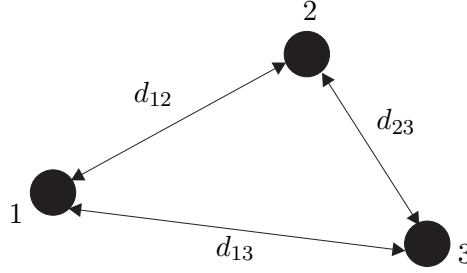


Abbildung 5.13. Allgemeine Anordnung von drei Phasenleitern.

über die drei Leitungsabschnitte für die Phase R:

$$\bar{\phi}_R = \frac{1}{3} \left(\phi_R^{(1)} + \phi_R^{(2)} + \phi_R^{(3)} \right) \quad (5.32)$$

$\phi_R^{(i)}$ stellt den verketteten Fluss pro Längeneinheit im i -ten Abschnitt der Leitung dar, $i = 1, 2, 3$. Setzt man Gleichung (5.25) in Gleichung (5.32) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_R = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \quad & \left(\begin{aligned} & i_R \ln \frac{1}{r'} + i_S \ln \frac{1}{d_{12}} + i_T \ln \frac{1}{d_{13}} \\ & + i_R \ln \frac{1}{r'} + i_S \ln \frac{1}{d_{23}} + i_T \ln \frac{1}{d_{12}} \\ & + i_R \ln \frac{1}{r'} + i_S \ln \frac{1}{d_{13}} + i_T \ln \frac{1}{d_{23}} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Jede Zeile in Gleichung (5.33) entspricht einer Anwendung von Gleichung (5.25) auf Phase R in den jeweiligen Positionen 1, 2 und 3. Jetzt können die Terme zusammengefasst werden:

$$\bar{\phi}_R = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(i_R \ln \frac{1}{r'} + i_S \ln \frac{1}{d_m} + i_T \ln \frac{1}{d_m} \right) \quad (5.34)$$

mit

$$d_m = \sqrt[3]{d_{12}d_{23}d_{31}} \quad (5.35)$$

Der Abstand d_m ist der geometrische Mittelwert der Abstände zwischen den drei Phasen.

Unter Verwendung der zweiten obigen Annahme, d.h. $i_R + i_S + i_T = 0$, kann Gleichung (5.34) weiter zu

$$\bar{\phi}_R = \frac{\mu_0}{2\pi} i_R \ln \frac{d_m}{r'} \quad (5.36)$$

vereinfacht werden, daraus ergibt sich die durchschnittliche Induktivität zu

$$\bar{l}_R = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_m}{r'} \quad (5.37)$$

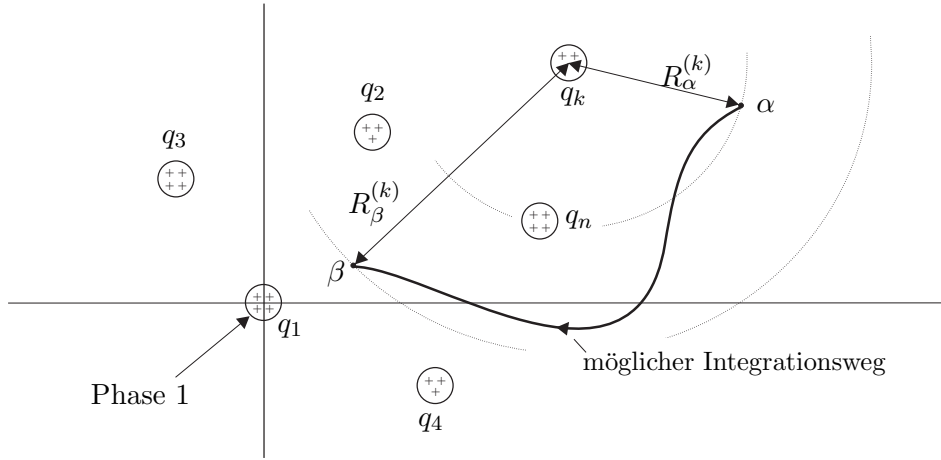


Abbildung 5.14. Integration der elektrischen Feldstärke.

Durch die Verdrillung ergibt sich der *gleiche durchschnittliche Induktivitätsbelag* für alle drei Phasenleiter:

$$\bar{l}_R = \bar{l}_S = \bar{l}_T \quad (5.38)$$

Die mittlere Induktivität einer verdrehten Leitung ist also für alle Phasen gleich und beträgt pro Längeneinheit

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_m}{r'} \quad (5.39)$$

In der Praxis bietet sich die Verdrillung in den (bestehenden) Unterwerken an, wodurch die einzelnen Abschnitte nicht exakt äquidistant werden. Man erreicht also nur einen begrenzten Ausgleich der unterschiedlichen Anordnung. Normalerweise verdrillt man die Phasenleiter nur bei sehr hohen Spannungsniveaus ausserhalb der Unterwerke.

5.2.3 Kapazität

Die Herleitung der Querkapazität einer Leitung kann in Analogie zur Längsinduktivität erfolgen. Betrachten wir ein System wie in Abbildung 5.14. Der Leiter k trägt pro Längeneinheit die Ladung q_k . Das elektrische Feld des als unendlich lang angenommenen Leiters ist radial homogen und vom Betrag

$$E_k = \frac{q_k}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R^{(k)}} \quad (5.40)$$

Die Spannung zwischen den Punkten α und β kann durch Integration des elektrischen Feldes entlang eines beliebigen Weges von Punkt α nach

Punkt β ermittelt werden. Natürlich ist das Integral entlang konzentrischer Kreise, welche Äquipotentiallinien des radialhomogenen elektrischen Feldes darstellen, gleich Null. Entscheidend ist nur die radiale Abstandsdifferenz vom Leiter k .

Das Integral der Feldstärke über die radiale Strecke zwischen den konzentrischen Kreisen auf denen die Punkte α und β liegen liefert die Spannung zwischen den beiden Punkten (bzw. Äquipotentiallinien), welche durch die Ladung des Leiters k hervorgerufen wird:

$$u_{\beta\alpha}^{(k)} = - \int_{R_\alpha^{(k)}}^{R_\beta^{(k)}} \frac{q_k}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R} dR = \frac{q_k}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_\alpha^{(k)}}{R_\beta^{(k)}} \quad (5.41)$$

wobei $R_\alpha^{(k)}$ der radiale Abstand vom Leiter k zum Punkt α ist, analog für β .

Für eine Anordnung von mehreren Leitern erhält man die Gesamtspannung aus der Überlagerung der Einzelspannungen. Für n Leiter ergibt sich diese zu

$$u_{\beta\alpha} = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{R_\alpha^{(i)}}{R_\beta^{(i)}} \quad (5.42)$$

Wir treffen nun die Annahme, dass sich die Ladungen aller Leiter zu Null ergänzen:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0 \quad (5.43)$$

Wie auch schon bei der Herleitung der magnetischen Flussverkettung lassen wir auch jetzt wieder den Radius $R_\alpha^{(i)} \rightarrow \infty$ gehen, das heisst wir beziehen die Spannung der Leiter auf einen unendlich weit entfernten Punkt. Mit Gleichung (5.43) erhält man

$$u_\beta = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{1}{R_\beta^{(i)}} \quad (5.44)$$

Interessant ist die Spannung an der Oberfläche eines Leiters, z.B. des Leiters k . Nehmen wir als Leiterradius r_k an, so berechnet sich die Spannung an der Oberfläche des Leiters k zu

$$u_k = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \left(q_1 \ln \frac{1}{d_{k1}} + \dots + q_k \ln \frac{1}{r_k} + \dots + q_n \ln \frac{1}{d_{kn}} \right) \quad (5.45)$$

Bestehen die Phasenleiter aus mehreren Einzelleitern (Bündel), so muss für die Berechnung der Spannung r_k durch $r_{k,eq}$ ersetzt werden (siehe Gleichung (5.31)). Bei Bündelleitern reduziert sich die elektrische Feldstärke an der Oberfläche der Leiter. Dadurch reduzieren sich die Leckströme über die Luft und somit die Koronaschallemission der Leitung.

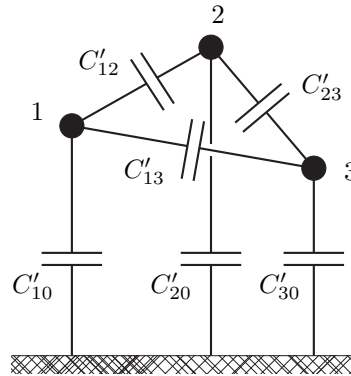


Abbildung 5.15. Kapazitäten einer Dreiphasenleitung.

Gleichung (5.45) kann auch in Matrizenform geschrieben werden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{q} \quad (5.46)$$

Die Matrix \mathbf{F} enthält dabei die Potentialkoeffizienten. Die Kapazitätsparameter können aus der inversen Beziehung gefunden werden:

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{u} \quad (5.47)$$

mit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}$. Abbildung 5.15 zeigt die bei einer Dreiphasenleitung auftretenden bezogenen Leitungskapazitäten.

Die Kapazität einer verdrehten Dreiphasenleitung pro Phase und Längeneinheit ergibt sich zu

$$C' = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d_m}{r_{eq}}} \quad (5.48)$$

Diese Gleichung liefert im Allgemeinen recht genaue Resultate. In der Ableitung wurde angenommen, dass das Referenzpotential im Unendlichen und null sei. Obwohl die Erde kein idealer, widerstandsloser Leiter ist kann das Potential an der Erdoberfläche als Null angenommen werden.⁴ Diese Tatsache muss vor allem dann berücksichtigt werden, wenn die Abstände der Phasen untereinander annähernd gleich den Abständen zur Erde sind.

Will man die Erdoberfläche als Nullpotential heranziehen, so erreicht man dies durch Plazierung von gespiegelten Ladungen. Diese führen die betragsmässig gleiche aber negative Ladung der Phasenleiter und sind im gleichen Abstand zur Oberfläche jedoch unterhalb davon angeordnet. Geometrisch ergibt sich also unter der Erde ein Spiegelbild der Verhältnisse über Erde, die Ladungsvorzeichen werden vertauscht (siehe Abbildung 5.16). Für ein Dreiphasensystem bekommt man demnach ein äquivalentes System mit sechs Phasenleitern: drei über Erde (real), und drei unter Erde mit entgegengesetzt grossen Ladungen (Modellvorstellung).

⁴Bereits eine sehr kleine Ladungsdichte in der Erde reicht aus um dies zu erreichen.

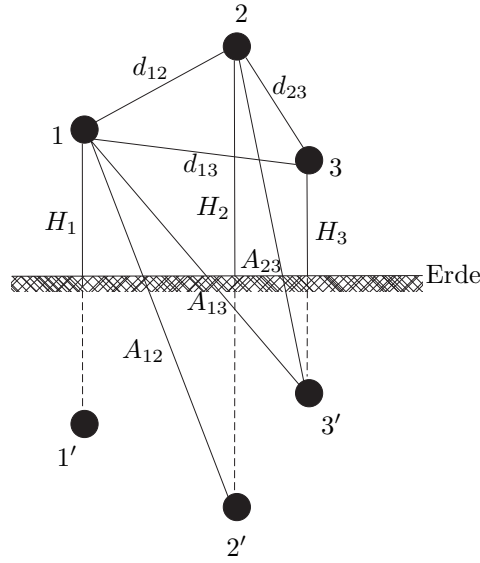


Abbildung 5.16. Allgemeine Anordnung einer Dreiphasenleitung.

Für dieses System kann die gleiche Ableitung wie für das reine Dreiphasensystem gemacht werden. Das Ergebnis für die Kapazität pro Phase und Längeneinheit für eine verdrehte Dreiphasenleitung lautet

$$C'_m = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2H}{A} \frac{d_m}{r_{eq}}\right)} \quad (5.49)$$

mit d_m und r_{eq} wie oben. H ist das geometrische Mittel der Phasenleiterabstände von der Erdoberfläche (siehe Abbildung 5.16)

$$H = \sqrt[3]{H_1 H_2 H_3} \quad (5.50)$$

Wie in Abbildung 5.17 dargestellt kommt es durch das Gewicht der Leiterseile zwischen zwei Masten zum *Durchhang* (*sag*), wodurch der Abstand zwischen Leiter und Erdoberfläche nicht konstant ist. Dieser Durchhang kann berücksichtigt werden indem man einen reduzierten Abstand

$$H' = H_{min} + \frac{1}{3}h \quad (5.51)$$

in den obigen Gleichungen einsetzt.

Das geometrische Mittel der Distanzen zwischen den Phasenleitern und den gespiegelten Leitern ist (siehe Abbildung 5.16)

$$A = \sqrt[3]{A_{12} A_{23} A_{13}} \quad (5.52)$$

Ist die Höhe der Phasenleiter über der Erdoberfläche gross im Vergleich zur Distanz der Phasenleiter untereinander, so gilt $2H/A \approx 1$, dadurch liefern Gleichung (5.48) und (5.49) das gleiche Ergebnis für die Kapazität pro Längeneinheit.

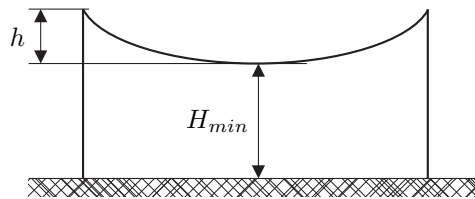


Abbildung 5.17. Durchhang der Leiterseile zwischen zwei Masten.

5.2.4 Ohmsche Elemente

Reale Leitungen sind nicht verlustlos. Daher muss zusätzlich zum Induktivitäts- und Kapazitätsbelag ein Längswiderstands- und ein Querleitwert berücksichtigt werden.

Längswiderstand

Für Gleichstrom kann der ohmsche Widerstand eines Leiters aus dessen Querschnitt, Länge und spezifischer Leitfähigkeit relativ einfach bestimmt werden. Führt der Leiter aber Wechselstrom, so muss bei der Bestimmung des ohmschen Widerstandes der Skineneffekt berücksichtigt werden.⁵ Dieser Effekt hat zur Folge, dass sich der Strom nicht homogen über den gesamten Leiterquerschnitt verteilt sondern an den Rand des Leiters gedrängt wird, d.h. die Stromdichte im Leiter nimmt nach aussen hin zu, der überwiegende Anteil des Leiterstromes fließt in einer Randschicht. Dadurch verringert sich der wirksame Leiterquerschnitt und der ohmsche Widerstand erhöht sich gegenüber dem gleichstromführenden Leiter. In einem 50-Hz-System beträgt dieser Anstieg typischerweise einige Prozent.

Für eine Anordnung wie in Abbildung 5.5 entspricht der ohmsche Wechselstromwiderstand annähernd dem Gleichstromwiderstand der Aluminiumleiter. Dabei gleicht sich der Effekt der Erhöhung des Widerstandes durch die Stromverdrängung mit dem des im Stahlkern fließenden Stromanteiles in etwa aus. Genauere Werte kann man aus Messungen mit Betriebsfrequenz, also 50 oder 60 Hz, und Betriebstemperatur bekommen. Diese Werte werden vom Leiterhersteller zur Verfügung gestellt.

Der ohmsche Längswiderstandsbelag R' bildet die Stromwärmeverluste im Leiter nach, wobei ein Teil der Jouleschen Verluste beim Stromtransport durch Konvektion und Strahlung vom Leiter an die Luft abgegeben wird. Die zulässige Strombelastbarkeit wird durch eine höchstzulässige Erwärmung des Leiterseils begrenzt, da längerfristig Leitertemperaturen von mehr als 80 °C bei den gängigen Materialien für Leiterseile (Aluminium und Stahl)

⁵Neben dem Skineneffekt treten im Leiterseil noch andere, den ohmschen Widerstand beeinflussende Effekte auf: Der *Proximityeffekt* beschreibt die Stromverdrängung im Leiter durch Felder benachbarter Leiter, unter dem *Spiralityeffekt* versteht man die Erhöhung des ohmschen Widerstandes durch die Verseilung der Drähte.

zur Entfestigung führen können. Bei betriebsmässiger Erwärmung auf die Leitertemperatur ϑ steigt der Widerstand auf⁶

$$R' = R'_{20} (1 + \alpha (\vartheta - 20 \text{ }^{\circ}\text{C})) \quad (5.53)$$

wobei R'_{20} der Widerstandsbelag bei 20 °C ist. Er berechnet sich aus dem spezifischen Widerstand des Leitermaterials bei 20 °C ϱ_{20} (in $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$) und der wirksamen Querschnittsfläche A (in mm^2):

$$R'_{20} = \frac{\varrho_{20}}{A} \quad (5.54)$$

Querwiderstand

Der Ableitbelag G' bildet bei Freileitungen die Korona- und Kriechstromverluste an der Oberfläche von spannungsführenden Teilen und Freiluftisolatoren, bei Kabeln die dielektrischen Verluste in der Feststoffisolation nach. Die Ableitverluste sind praktisch identisch mit den Leerlaufverlusten, die enorm witterungsabhängig sind. So hört man beispielsweise das Knistern, welches durch instabile Teilentladungen bzw. Koronaerscheinungen einer Hochspannungsleitung entsteht besonders gut an einem nebligen, feuchten Herbsttag. Hingegen tritt der Koronaeffekt an einem heissen, trockenen Sommertag viel weniger auf, weshalb natürlich auch die Koronaverluste wesentlich abnehmen. Bei Freileitungen lassen sich für G' nur Näherungswerte aus Messungen gewinnen, wohingegen bei Kabeln exakte Prüffeldmessungen möglich sind.

5.2.5 Leitungsparameter von Kabeln und Freileitungen

Die Leitungsparameter von Kabeln und Freileitungen unterscheiden sich signifikant. Die Gründe dafür sind folgende:

1. In einem Kabel sind die Abstände zwischen den Phasenleitern wesentlich geringer als bei einer Freileitung, gleiches gilt für die Abstände zwischen den Phasenleitern und Erde.
2. In einem Kabel sind die Leiter meist von anderen metallischen Materialien wie z.B. Schirmung oder Mantelung umgeben.
3. Als Isolationsmaterial zwischen den Phasenleitern dient bei Freileitungen Luft, bei Kabeln kommen andere Materialien wie z.B. Papier und Öl oder SF_6 zum Einsatz.

Aus den Gleichungen (5.39) und (5.48) folgen zwei markante Unterschiede der verteilten Parameter von Freileitungen und Kabeln :

⁶Für Aluminium und Kupfer kann mit einem Temperaturkoeffizienten von $\alpha = 0.004 \text{ K}^{-1}$ gerechnet werden.

1. Der Längsinduktivitätsbelag von Freileitungen ist in der Regel höher als jener von Kabeln.
2. Der Querkapazitätsbelag ist normalerweise bei Kabeln wesentlich höher als bei Freileitungen.

Die im Leiter anfallende Wärme (ohmsche Verluste) wird bei Freileitungen an die umgebende Luft abgegeben und kann von Wind bzw. Konvektion abgeführt werden. Bei Kabeln muss die anfallende Wärme über ein geschichtetes Dielektrikum abgeführt werden, Konvektion kann nicht stattfinden. Um die zulässige Betriebstemperatur nicht zu überschreiten, muss man die Erwärmung des Leiters und somit die ohmschen Verluste klein halten. Deshalb haben Kabel bei gleicher Nennleistung meist niedrigere Längswiderstandsbeläge als Freileitungen.

In den Tabellen 5.1 und 5.2 sind einige konkrete Werte von Leitungsparameter angeführt.

Tabelle 5.1. Typische Leitungsparameter für Freileitungen bei 50 Hz [11].

Nennspannung in kV	230	345	500	765
R' in Ω/km	0.050	0.037	0.028	0.012
$X'_L = \omega L'$ in Ω/km	0.407	0.306	0.271	0.274
$Y'_C = \omega C'$ in $\mu\text{S}/\text{km}$	2.764	3.765	4.333	4.148

Tabelle 5.2. Typische Leitungsparameter für Kabel bei 50 Hz [11].

Nennspannung in kV	115	230	500
R' in Ω/km	0.059	0.028	0.013
$X'_L = \omega L'$ in Ω/km	0.252	0.282	0.205
$Y'_C = \omega C'$ in $\mu\text{S}/\text{km}$	192.0	204.7	80.4

5.3 Elektromagnetische Felder unter einer Dreiphasen-Hochspannungsfreileitung

Mit der starken Verbreitung der Mobiltelefonie in den letzten Jahren wurde zunehmend über die mögliche schädliche Wirkung von elektromagnetischen Feldern auf den Menschen diskutiert. Auch Hochspannungsleitungen verursachen sowohl elektrische wie auch magnetische Felder. Der Unterschied zwischen den von Sendeantennen und den von Hochspannungsleitungen erzeugten Feldern ist, dass die Felder unter Hochspannungsleitung eine niedrige Frequenz von 50 Hz haben, während die von Sendeantennen ausgestrahlten Felder im GHz-Bereich liegen. Ausserdem ist der Sinn der Sendeantennen

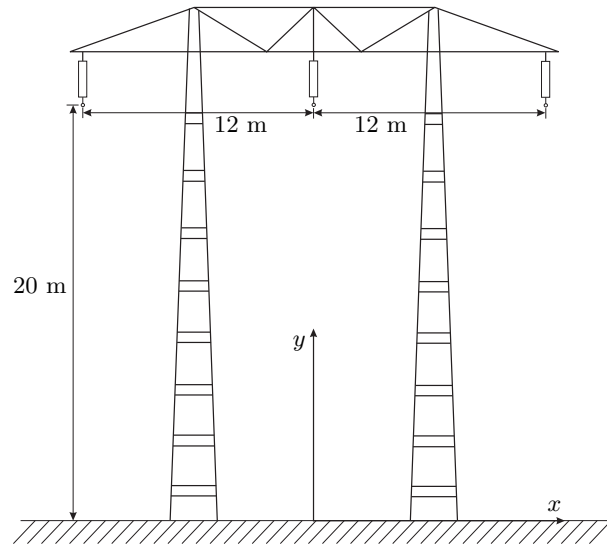


Abbildung 5.18. Masse der betrachteten Freileitung.

gerade die Erzeugung von Feldern, während bei Hochspannungsleitungen dies nur ein unerwünschter Nebeneffekt ist.

Um ein Gefühl dafür zu bekommen wie gross die elektromagnetischen Felder unter einer Hochspannungsleitung in Bodennähe sind, wird in diesem Abschnitt eine Hochspannungsleitung mit den in Abb. 5.18 gegebenen Massen betrachtet.

Da wir hier ein symmetrisches Dreiphasensystem betrachten, sind die Spannungen in den einzelnen Leitern jeweils um 120° phasenverschoben. Ausserdem sind die Spannungen und Ströme in den Leitern nicht konstant, sondern variieren mit der Netzfrequenz von 50 Hz. Dasselbe gilt auch für die Ströme. Diese Variationen der Spannungen und Ströme wirken sich auch auf die elektromagnetischen Felder aus. Die Feldstärken sind vom betrachteten Zeitpunkt abhängig, d.h. es entstehen Wechselfelder.

5.3.1 Elektrisches Feld

Das elektrische Feld unter einer Hochspannungsleitung hängt von der Spannung, der Form der Masten und der Anordnung der Leiterseile ab. Die analytische Berechnung des elektrischen Feldes ist sehr aufwendig, da die Impedanz der Erde berücksichtigt werden müsste. Deshalb wird auf die analytische Herleitung verzichtet und nur die Resultate einer Simulation für die in Abb. 5.18 gegebene Anordnung wiedergegeben.

In Abb. 5.19 sind die Verläufe der Spannungen in den drei Phasen gegeben. Bezogen auf Abb. 5.18 ist $u_R(t)$ die Spannung im linken Leiter, $u_S(t)$ diejenige im mittleren Leiter und $u_T(t)$ die im rechten Leiter. In den folgenden Simulationen werden drei Zeitpunkte t_1 , t_2 und t_3 betrachtet.

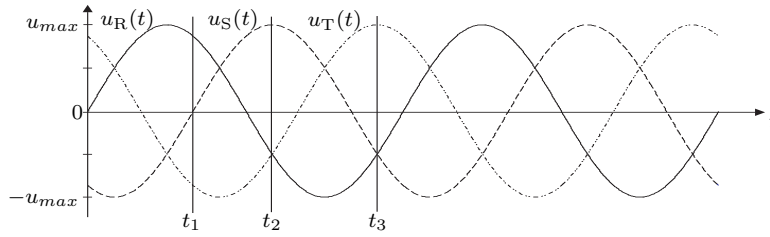


Abbildung 5.19. Verlauf der Spannungen in den drei Phasen.

Die sich ergebenden Werte des elektrischen Feldes sind stark von der Spannung abhängig. Es werden die Felder für die verketteten Spannungen 110 kV, 220 kV und 400 kV (Effektivwerte) betrachtet. Direkt am Boden verschwindet das elektrische Feld, da dort das Potential null ist. Bezogen auf das in Abb. 5.18 eingezeichnete Koordinatensystem sind in Abb. 5.20 die Beträge der Felder im Abstand von 2 m über dem Boden, d.h. $y = 2$ m, bis jeweils 80 m in positiver und negativer x -Richtung gezeigt.

Nur zu den Zeitpunkten, an denen die Spannung im mittleren Leiter den Maximalwert erreicht oder durch Null geht, d.h. wenn die Beträge der Spannungen im linken und im rechten Leiter gleich sind, ist der Verlauf symmetrisch. Gleichzeitig nimmt das Feld im Durchschnitt über die gesamte Breite in diesen Zeitpunkten den Maximalwert (t_1), bzw. den Minimalwert (t_2) an. Der Zeitpunkt t_3 ist ein Beispiel für einen Zeitpunkt, zu dem das Feld nicht symmetrisch ist.

Als Vergleich sei hier angemerkt, dass das natürliche statische Luftfeld eine Feldstärke von bis zu 0.1 kV/m aufweist. Bei einem Gewitter sind gar 20 kV/m und mehr möglich. Auch im Haushalt sind wir ständig elektrischen Feldern ausgesetzt. Bei Elektrogeräten entstehen in 30 cm Entfernung Feldstärken von bis zu 0.5 kV/m. Die menschliche Haut wirkt als Schutzschild und reicht aus, um elektrische Felder von Stromleitungen nicht in den Körper eindringen zu lassen. In Gebäuden wird das von aussen kommende, mit 50 Hz variierende elektrische Feld auf mindestens ein Zehntel abgeschwächt. Die Werte der elektrischen Felder die durch Hochspannungsleitungen in 2 m Höhe verursacht werden (Abb. 5.20), liegen also nicht viel über denjenigen, denen wir in unserem Alltag ausgesetzt sind.

5.3.2 Magnetisches Feld

Im Gegensatz zum elektrischen Feld lässt sich das magnetische Feld ohne allzu grosse Probleme analytisch berechnen, da die Erde nur geringen Einfluss auf das magnetische Feld hat. Mit dem Gesetz von Biot-Savart erzeugt ein gerader stromdurchflossener Leiter ein magnetisches Feld mit dem Betrag

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (5.55)$$

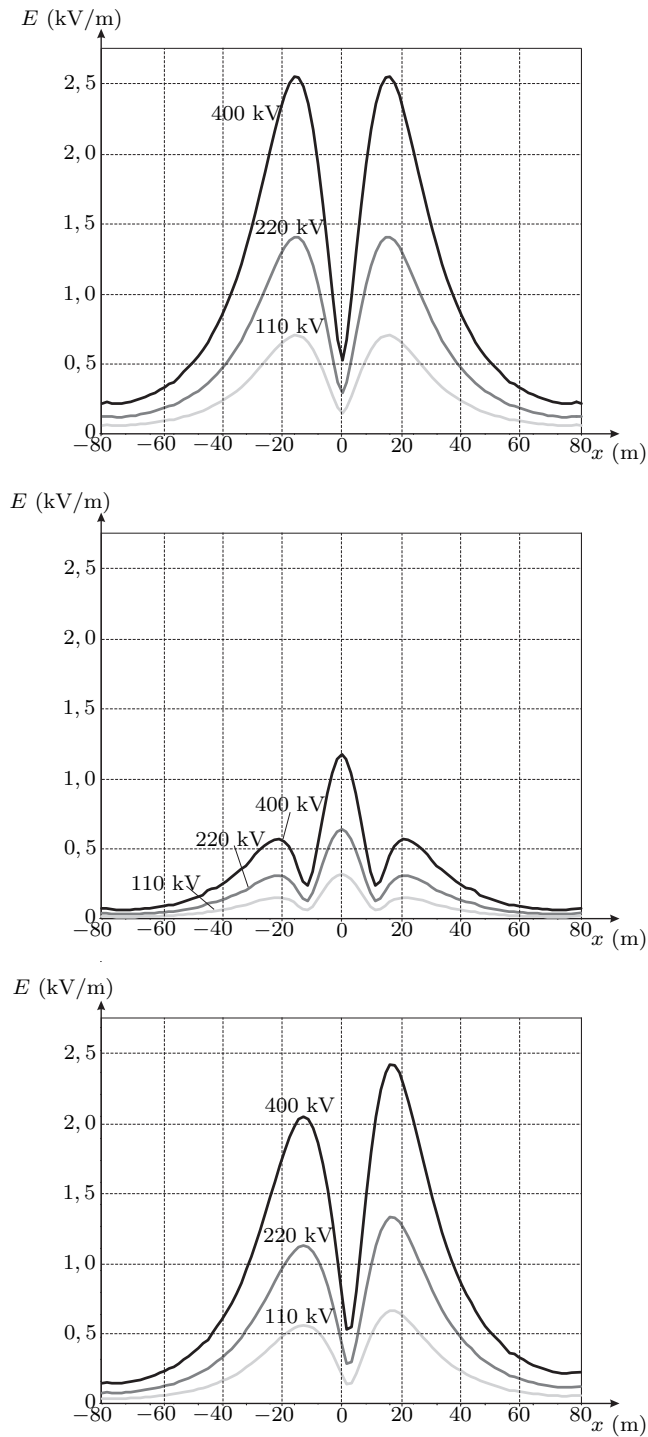


Abbildung 5.20. Elektrisches Feld zum Zeitpunkt t_1 (oben), t_2 (mitte) und t_3 (unten) im Abstand von 2 m über dem Boden.

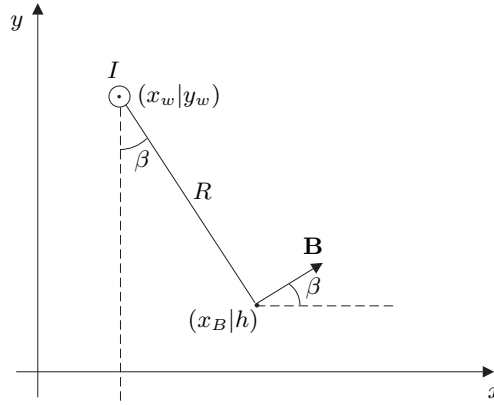


Abbildung 5.21. Magnetfeld eines geraden Leiters.

Dabei ist R der Abstand des Punktes, an dem das Feld berechnet werden soll, zum Leiter, der den Strom I führt. Die Richtung des Feldes ist immer tangential zum Kreis um den Leiter.

Dies kann nun für die Berechnung des magnetischen Feldes einer Dreiphasenleitung verwendet werden. Für jeden Leiter wird zunächst der Betrag und die Richtung des magnetischen Feldes bestimmt. Daraufhin können die sich aus den drei Leitern ergebenden Feldvektoren addiert und der Gesamtbetrag des Feldes berechnet werden. Da das Feld eines geraden Leiters gemäss (5.55) nur vom Abstand des Punktes, an dem das Feld berechnet werden soll, zur Leitung abhängt, kann zur Herleitung der Formel im Zweidimensionalen gerechnet werden. Für einen einzelnen Leiter sind die Bezeichnungen in Abb. 5.21 gegeben.

Der Betrag des magnetischen Feldes am Ort $(x_B | h)$ ergibt sich mit (5.55) zu

$$|\mathbf{B}| = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{(x_B - x_w)^2 + (h - y_w)^2}} \quad (5.56)$$

Dabei wird angenommen, dass I in positiver z -Richtung fliesst, also aus dem Blatt heraus. In umgekehrter Richtung wird I negativ.

Um die durch die drei Phasen erzeugten Magnetfelder addieren zu können, wird \mathbf{B} in x - und y -Koordinaten zerlegt:

$$B_x = B \cdot \cos \beta \quad (5.57)$$

$$B_y = B \cdot \sin \beta \quad (5.58)$$

Mit

$$\sin \beta = \frac{x_B - x_w}{\sqrt{(x_B - x_w)^2 + (h - y_w)^2}} \quad (5.59)$$

$$\cos \beta = \frac{y_w - h}{\sqrt{(x_B - x_w)^2 + (h - y_w)^2}} \quad (5.60)$$

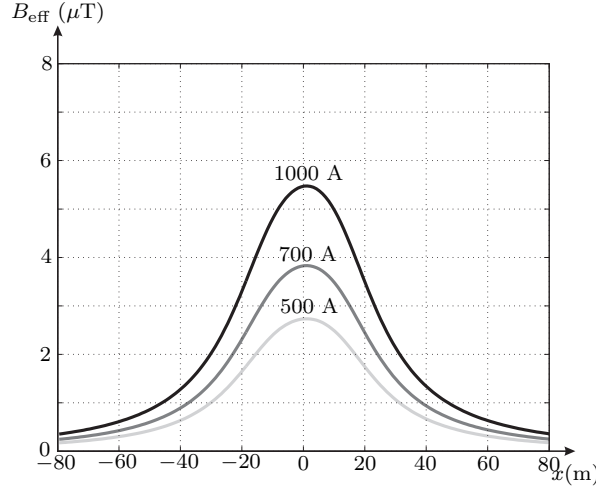


Abbildung 5.22. Effektivwert des Magnetfeldes im Abstand von 2 m über dem Boden.

wird dies zu

$$B_x = \frac{\mu_0 I (y_w - h)}{2\pi((x_B - x_w)^2 + (h - y_w)^2)} \quad (5.61)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I (x_B - x_w)}{2\pi((x_B - x_w)^2 + (h - y_w)^2)} \quad (5.62)$$

Die Berechnung des Gesamtfeldes erfolgt durch die Aufaddierung der einzelnen Felder in x - und in y -Richtung. Dieses Feld variiert ebenso wie das elektrische Feld mit der Zeit. In Abb. 5.22 ist der Effektivwert des Gesamtfeldes für die Anordnung in Abb. 5.18 und für die verketteten, effektiven Ströme von 1000 A, 700 A und 500 A im Abstand von 2 m über dem Boden gegeben. Der Effektivwert berechnet sich aus den Momentanwerten wie folgt:

$$B_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) dt} \quad (5.63)$$

Die Berechnung des magnetischen Feldes in grosser Distanz von den Leitern kann durch einige Annäherungen stark vereinfacht werden. Daraus dass die Richtung des magnetischen Feldes immer tangential zum Kreis um den Leiter ist, kann gefolgert werden, dass in grosser Distanz zur Freileitung das Gesamtfeld in etwa senkrecht auf der Erde steht (Abb. 5.23).

Es wird angenommen, dass der Abstand von P zum Leiter der Entfernung in x -Richtung entspricht, zum Beispiel beträgt der Abstand für den linken Leiter $x + a$. In Phasorenschreibweise ergibt sich das magnetische Feld in P zu

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{\underline{I}_R}{x + a} + \frac{\underline{I}_S}{x} + \frac{\underline{I}_T}{x - a} \right) \quad (5.64)$$

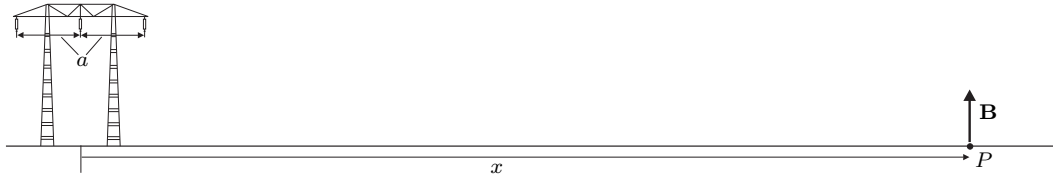


Abbildung 5.23. Magnetfeld in grosser Distanz.

Mit der Approximation

$$\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon \quad (5.65)$$

für kleine ϵ ergibt dies

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{(x-a)}{x^2} \cdot \underline{I}_R + \frac{1}{x} \cdot \underline{I}_S + \frac{(x-a)}{x^2} \cdot \underline{I}_T \right)^7, \quad a \ll x \quad (5.66)$$

Aus der Bedingung, dass die Summe der Ströme zu jedem Zeitpunkt gleich null sein muss

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \quad (5.67)$$

kann die einfachere Formel

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{a}{x^2} (\underline{I}_T - \underline{I}_R), \quad a \ll x \quad (5.68)$$

und damit der Betrag des Magnetfeldes in grosser Entfernung

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3} I_{ph} a}{x^2} = 3.5 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{a I_{ph}}{x^2}, \quad a \ll x \quad (5.69)$$

abgeleitet werden. Dabei ist I_{ph} der Phasenstrom in A; mit x und a in m ergibt sich die Flussdichte B in T. Für die Berechnung des Feldes direkt unter der Freileitung kann (5.69) nicht verwendet werden, da die Annahme, dass der Abstand zwischen den Leitern viel kleiner ist als der Abstand zum Berechnungspunkt, nicht mehr zutrifft. Nach (5.69) würde das Feld bei $x = 0$ m unendlich gross werden, was natürlich nicht stimmt. Dennoch ist die Formel für die Berechnung des magnetischen Feldes in grosser Entfernung nützlich und zeigt auch auf, dass das Feld quadratisch zum Abstand abnimmt.

Magnetische Felder werden durch die Haut kaum abgeschwächt, rufen im Körper aber nur äusserst geringe Ströme hervor. Haushaltsgeräte, wie Mixer oder Bügeleisen, erzeugen Magnetfelder, die in einer Distanz von 30 cm bis zu 10 μ T betragen. Um beim Menschen Herzprobleme auszulösen, müssen Wechselfeldstärken bei einer Frequenz von 50 Hz von 1 Tesla auftreten. Das ist mehrere zehntausendmal mehr als unter einer Hochspannungsleitung.

⁷ $\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{x}} \approx \frac{1}{x} \left(1 - \frac{a}{x}\right) = \frac{(x-a)}{x^2}$

Obwohl in hunderten von Untersuchungen von Wissenschaftlern in aller Welt keine Gefährdung oder Schädigung der menschlichen Gesundheit durch Hochspannungsleitungen nachgewiesen werden konnte, wird intensiv weiter geforscht und in vielen europäischen Ländern gibt es festgelegte Grenzwerte, die das magnetische Feld unter einer Hochspannungsleitung nicht überschreiten darf.

5.4 Leitungsmodell und Lösung der Wellengleichung

Die stationäre, mathematische Modellierung eines elektrischen Energieübertragungssystems ist eine wichtige Voraussetzung für die im Rahmen der Netzplanung und Betriebsführung zu lösenden Aufgaben. Dabei ist die Annahme, dass sich das System in einem *stationären Zustand* (*steady state*) befindet, nie exakt erfüllt. Das ständige „Lastrauschen“ hält das System stets in einem dynamischen Zustand. Für viele Aufgaben ist es jedoch ausreichend, eine „Momentanaufnahme“ des Betriebszustandes zu machen und dabei die kurzfristigen Ausgleichsvorgänge zu vernachlässigen. Diese Betrachtungsweise ist deshalb gerechtfertigt, weil im Normalbetrieb das „Lastrauschen“ nur eine geringe Amplitude aufweist. Die trendmässigen Laständerungen erstrecken sich im Normalbetrieb über eine längere Zeit (etliche zehn Minuten). Deshalb vermag das stationäre Lastmodell den momentanen Betriebszustand ausreichend genau zu beschreiben. Mit anderen Worten kann somit der Normalbetriebszustand durch ein System von nichtlinearen, algebraischen Netzgleichungen, die in diesem Kapitel hergeleitet werden, beschrieben werden.

Natürlich können mit diesem Modell keine Ausgleichsvorgänge, wie sie z.B. nach einem grösseren Lastsprung oder nach dem Ausfall eines Kraftwerkblockes auftreten, behandelt werden. Erst wenn die zugehörigen dynamischen Vorgänge abgeklungen sind, können die im folgenden behandelten Netzgleichungen für die Berechnung des stationären Betriebszustandes benutzt werden.

Wie lange dann der so errechnete stationäre Betriebszustand gültig bleibt hängt im Normalbetrieb von der Lastentwicklung ab. Bei raschen Laständerungen (z.B. in der Umgebung der Tageslastspitze) muss die stationäre Lösung häufiger neu bestimmt werden als zu Zeiten, in denen sich die Last nur wenig ändert (z.B. während den Nachtstunden).

Eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit der Leitungstheorie ist der geringe Abstand der Leiter (Elektroden) gegenüber der Wellenlänge. Damit ist gewährleistet, dass das Feld zwischen den Leitern mit guter Näherung mit dem statischen Feld übereinstimmt. Dies gilt sowohl für das elektrische als auch für das magnetische Feld. Zudem kann in diesem Fall vorausgesetzt werden, dass die beiden Felder nicht gekoppelt sind.

Damit ist es möglich die auf der Leitung befindliche Ladung und den

den Leiter umschliessenden Fluss durch Kapazität und Induktivität mit der Spannung bzw. mit dem Strom in Verbindung zu bringen. Kapazität und Induktivität werden pro Längeneinheit betrachtet. Um auch in axialer Leitungsrichtung die Gültigkeit des Modells eines Kondensators und einer Spule zu gewährleisten, wird vorerst ein sehr kurzes Leitungsstück (Längenelement Δx , siehe Abbildung 5.24) vorausgesetzt. Für jedes Längenelement gilt dann

$$\begin{aligned} Q' &= C'U \\ \Phi' &= L'I \end{aligned}$$

wobei Q' die Ladung und Φ' der Fluss pro Längeneinheit ist. Diese beiden Größen können durch Messung mit langsam veränderlichen Wechselgrößen an einem endlichen Leitungsstück bestimmt werden. Da diese Größen der Länge des Leitungsstückes proportional sind, können ein Kapazitätsbelag C' und ein Induktivitätsbelag L' definiert werden.

Das Übertragungsverhalten der Leitungen wird durch ihre Länge und die längenbezogenen Kenngrößen R' , L' , G' und C' bestimmt. Der konstruktive Aufbau von Freileitungen erfolgt zwangsläufig vor Ort, so dass ihre Kennwerte nicht – wie bei den fabriksfertigen Geräten Generator und Transformator – durch Prüffeldmessungen bestimmt werden können. Dies gilt grundsätzlich auch für die fertig zur Baustelle angelieferten Kabel, deren Induktivitäts- und Kapazitätsbelag von ortsspezifischen Faktoren wie Verlegeart (z.B. Anordnung und Abstand einadriger Kabel), Schaltung und Erdung der Kabelmäntel oder -schirme sowie von den elektrischen Eigenschaften des umgebenden Erdbodens abhängt.

5.4.1 Ersatzschaltbild eines Leitungselements

Das Leitungsmodell wird ausgehend von einem Längenelement aufgebaut. Mit den im Abschnitt 5.2 hergeleiteten Wirk- und Blindwiderstandsbelägen kann ein infinitesimal kleines Leitungsstück gebildet werden, wie in Abbildung 5.24 gezeigt.⁸ In diesem Ersatzschaltbild des Leitungselements sind die Spannungen und Ströme eingetragen anhand derer die allgemeine Differentialgleichung der homogenen Leitung hergeleitet werden kann.

Um die Vorgänge auf Leitungen korrekt analysieren zu können, müsste man auf die allgemeine Theorie der elektromagnetischen Phänomene, nämlich die Maxwellsche Feldtheorie, zurückgreifen. Da nun bezüglich der geometrischen Anordnung der Leitung einschränkende Annahmen getroffen werden, können gewisse Modellannahmen aus der konzentrierten Netzwerktheorie übernommen werden. Es sind dies die Vorstellungen eines Kapazitäts- und Induktivitätsbelags, die pro Längenelement der Leitung als konstant

⁸Zur Veranschaulichung des Leitungsmodells wird in der Literatur häufig das Bild einer Kette von Induktivitäten und Kapazitäten gezeigt. Dieses Bild ist für die Ableitung ganz nützlich, der Kettenleiter gibt jedoch nicht die auf der homogenen Leitung aufscheinende Wellenausbreitung wieder, weshalb nicht näher auf dieses Modell eingegangen wird.

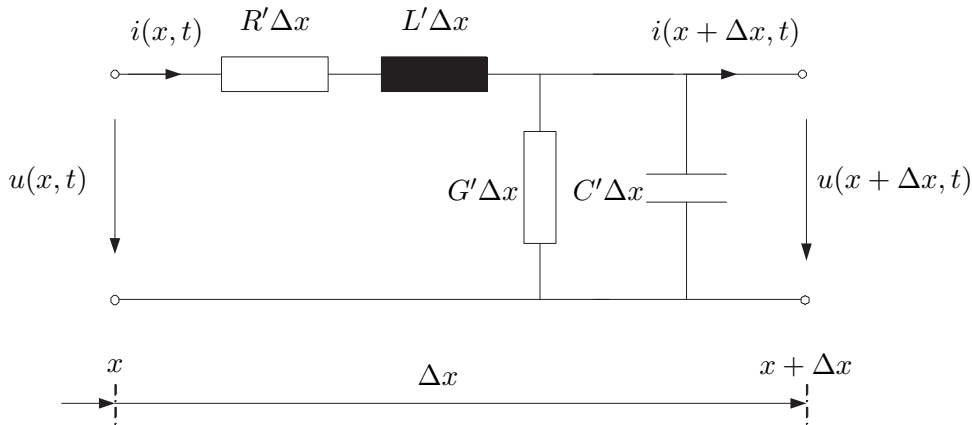


Abbildung 5.24. Ersatzschaltbild eines Längenelementes Δx einer verlustbehafteten homogenen Leitung.

vorausgesetzt werden. Damit ist quer zur Leitung ein Feldbild vorhanden, das dem jeweiligen statischen Feldverlauf entspricht. Der Verlauf der Felder in der Achse der Leitung gehorcht jedoch den Feldgleichungen. Und damit treten Phänomene auf, wie sie auch sonst bei der Ausbreitung von Feldern und Wellen in Erscheinung treten. Es gibt die vom Dielektrikum und vom magnetischen Material abhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit der Vorgänge, die im Grenzfall die Lichtgeschwindigkeit erreicht.

Die Ausbreitung von Wellen auf Leitungen ist ein wesentliches Merkmal dieser Vorgänge und damit ein Kennzeichen der Leitungstheorie. Ein Leitungsabschnitt, der mit einem Ende an eine Quelle angeschlossen ist, verhält sich bedeutend anders als ein konzentriertes Schaltelement, das die gleiche Kapazität (statisch gemessen) aufweist. Je nach Länge der Leitungen sind jedoch Näherungen möglich, von denen in der Praxis ausgiebig Gebrauch gemacht wird und die später noch genauer diskutiert werden.

Die Theorie präsentiert sich vereinfacht, wenn die Leitungen verlustlos angenommen werden ($R' = G' = 0$). In vielen Fällen können unter dieser Voraussetzung die Vorgänge genügend genau dargestellt werden.

Die Ausbreitung von Wellen auf Leitungen ist immer mit einem Energietransport verbunden. Die einfache Anwendung des Poyntingschen Vektors auf das Feldbild zwischen den Leitern zeigt, dass die Leistungsdichte genau in die Achsenrichtung der Leitung zeigt. *Der Energietransport erfolgt somit im Feld zwischen den Leitern.* Da vom Feld wegen der vorgegebenen Geometrie und der vereinfachten Annahmen ohne Schwierigkeiten auf integrale Größen, nämlich Strom und Spannung in einem Punkt der Leitung geschlossen werden kann, wird man in den seltensten Fällen das Feld analysieren, sondern mit Strom und Spannung arbeiten.

In der Energieübertragung sind *Leistung* und *Energie* von zentraler Bedeutung. Als Betriebsfrequenz sind im stationären Zustand nur mehr die

Werte $16\frac{2}{3}$, 50 und 60 Hz von Wichtigkeit.⁹ In vielen Fällen genügt die Betrachtung einer einzigen Frequenz jedoch nicht: Es treten Ausgleichs- und Einschwingvorgänge sowie betriebliche Impulsformen auf, bei denen ein breites Frequenzspektrum erscheint. Dabei ist der zeitliche Verlauf der Spannung oder des Stromes von Wichtigkeit. Die Leitungstheorie muss daher nach Behandlung von Vorgängen im Frequenzbereich auf die zeitliche Darstellung ebenso eingehen. Die Betrachtung von hochfrequenten Ausgleichsvorgängen würde aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, weshalb darauf verzichtet wird.

Eine wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung und Anwendung einer Leitungstheorie ist die Linearität der Feldbeziehungen. Das heisst, dass die Permeabilitäts- und die Dielektrizitätskonstante im gesamten Feldraum ihre Gültigkeit haben. Damit gilt das Überlagerungsgesetz, das für den Übergang vom Frequenz- in den Zeitbereich wichtig ist.

5.4.2 Die Differentialgleichung der elektrischen Leitung – die Telegraphengleichung

Für die nachfolgende Berechnung wird vom Leitungsersatzschaltbild in Abbildung 5.24 ausgegangen.

Spannung u und Strom i sind Funktionen des Ortes x entlang der Leitung und der Zeit t :

$$\begin{aligned} u &= u(x, t) \\ i &= i(x, t) \end{aligned}$$

Bewegt man sich nun entlang der Leitung von einer Position x aus um ein kleines Stück Δx fort, so ergeben sich Spannung und Strom an der Stelle $x + \Delta x$ entsprechend den Kirchhoffschen Gesetzen zu

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) - R' \Delta x i(x, t) - L' \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (5.71a)$$

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - G' \Delta x u(x + \Delta x, t) - C' \Delta x \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad (5.71b)$$

Durch Subtraktion der Spannung bzw. des Stromes am Leitungsanfang und Division durch Δx auf beiden Seiten erhält man

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = -R' i(x, t) - L' \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (5.72a)$$

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -G' u(x + \Delta x, t) - C' \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad (5.72b)$$

⁹In der Schweiz benutzen die Schweizerischen Bundesbahnen (SBB) für ihr Fahrstreckennetzwerk die Frequenz $16\frac{2}{3}$ Hz.

Nimmt man nun an, dass die Bewegung entlang der Leitung infinitesimal klein ist,¹⁰ also

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad (5.73)$$

so erhält man aus den Gleichungen (5.72a) und (5.72b) folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left(R' + L' \frac{\partial}{\partial t} \right) i \quad (5.74a)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - \left(G' + C' \frac{\partial}{\partial t} \right) u \quad (5.74b)$$

Die beiden Gleichungen (5.74a) und (5.74b) bilden ein System von partiellen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und werden als *Differentialgleichungen der elektrischen Leitung* bezeichnet.

Man erhält aus den beiden Gleichungen (5.74a) und (5.74b) Gleichungen mit nur einer Variablen (u oder i), indem man die erste Gleichung nach x und die zweite nach t (oder umgekehrt) ableitet und gegenseitig einsetzt. Als Resultat erhält man die *Telegraphengleichungen* (Maxwell, um 1860):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R' G' u + (R' C' + L' G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.75a)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R' G' i + (R' C' + L' G') \frac{\partial i}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (5.75b)$$

Die beiden partiellen Differentialgleichungen (5.75a) und (5.75b) gelten für beliebige Zeitabhängigkeit von Spannung und Strom, also auch für Ausgleichsvorgänge. Sie gelten auch für inhomogene Leitungen, wenn die Ortsabhängigkeit der Leitungsbeläge berücksichtigt wird (z.B. $R' = f(x)$).

Im nächsten Abschnitt werden die Lösungen dieser Differentialgleichungen für sinusförmige Anregung hergeleitet. Man spricht in diesem Fall von den Leitungsgleichungen.

5.4.3 Die Wellengleichung und ihre Lösung

Die Differentialgleichungen (5.75a) und (5.75b) sollen hier für den Spezialfall der rein sinusförmigen Anregung gelöst werden. Diese Anregungsform ist in der Physik ausserordentlich wichtig, da nur für sie eine Übertragungsfunktion definiert werden kann. Die Sinusfunktion ist nämlich, abgesehen von der Konstante, die einzige Funktion, die am Ausgang eines linearen physikalischen Netzwerkes in gleicher Form wie am Eingang auftritt, wenn auch mit veränderter Amplitude und Phase.¹¹

¹⁰Dieser Schritt ist zulässig da es sich um eine stetige und glatte Funktion handelt.

¹¹Diese Tatsache hängt damit zusammen, dass die Funktion $\sin(\omega t)$, ihre Ableitungen und jede Linearkombination davon den gleichen zeitlichen Verlauf zeigen.

Wird die Leitung mit einer beliebigen Signalform angeregt, so kann mit Hilfe der Fouriertransformation das Signal in seine Frequenzkomponenten zerlegt werden. Man bestimmt dann für jede Komponente des Signals die Lösung der Differentialgleichungen der elektrischen Leitung und erhält die Lösung für das gegebene Anregungssignal als Summe der einzelnen Lösungen (Superpositionsprinzip).¹²

Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung sind die Telegraphengleichungen (5.75a) und (5.75b). Diese sind lineare *partielle* Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und sind für Spannung und Strom identisch, demnach müssen beide Lösungen (für $u(x, t)$ und $i(x, t)$) von gleicher Form sein.

Wir führen für $u(x, t)$ und $i(x, t)$ *Phasoren* ein:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \Re \{ \underline{U}(x) e^{j\omega t} \} \\ i(x, t) &= \Re \{ \underline{I}(x) e^{j\omega t} \} \end{aligned}$$

wobei \underline{U} und \underline{I} die Amplituden darstellen und $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz ist. Diese Phasoren werden nun in die Gleichungen (5.74a) bzw. (5.74b) eingesetzt:

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = -(R' + j\omega L') \underline{I} \quad (5.77a)$$

$$\frac{d\underline{I}}{dx} = -(G' + j\omega C') \underline{U} \quad (5.77b)$$

Aus den Gleichungen (5.77a) und (5.77b) wird \underline{I} eliminiert:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (R' + j\omega L') (G' + j\omega C') \underline{U} \quad (5.78)$$

Im Unterschied zur Gleichung (5.75a) tritt in der Gleichung (5.78) die Zeit nicht mehr auf. Durch Einführung der Phasoren wurde aus der *partiellen* Differentialgleichung (5.78) eine *gewöhnliche* lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Durch Elimination von \underline{U} aus den Gleichungen (5.77a) und (5.77b) finden wir die zu (5.78) analoge Gleichung für den Strom:

$$\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = (R' + j\omega L') (G' + j\omega C') \underline{I} \quad (5.79)$$

Die Gleichungen (5.78) und (5.79) sind die *Wellengleichungen* (*wave equations*) der verlustbehafteten Leitung und werden üblicherweise in folgender

¹²Dies gilt natürlich nur unter der Annahme eines linearen Systems.

Form geschrieben:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U} \quad (5.80a)$$

$$\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{I} \quad (5.80b)$$

$$\text{mit } \underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad (5.80c)$$

Dabei ist $\underline{\gamma}$ die komplexe *Wellenausbreitungskonstante* (*propagation constant*) mit der Dimension 1/Länge.

Die Lösungen der Gleichungen (5.80a) und (5.80b) sind von folgender Form:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_a + \underline{U}_b = \underline{U}_{a0} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}_{b0} e^{\underline{\gamma}x} \quad (5.81a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_a + \underline{I}_b = \underline{I}_{a0} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{I}_{b0} e^{\underline{\gamma}x} \quad (5.81b)$$

Wird Gleichung (5.81a) nach x abgeleitet und mit Gleichung (5.80c) in Gleichung (5.77a) eingesetzt, dann finden wir eine Beziehung zwischen den Leitungsspannungen und -strömen:

$$\underline{I}(x) = \frac{-1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \sqrt{\frac{G' + j\omega C'}{R' + j\omega L'}} (\underline{U}_{a0} e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{U}_{b0} e^{\underline{\gamma}x}) \quad (5.82)$$

Durch Koeffizientenvergleich in Gleichung (5.82) erhält man als Quotient von Spannung und Strom die *Wellenimpedanz* (*characteristic impedance, surge impedance*):

$$\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \frac{\underline{U}_{a0}}{\underline{I}_{a0}} = \frac{\underline{U}_{b0}}{\underline{I}_{b0}} \quad (5.83)$$

Die Dimension der Wellenimpedanz ist Ω .

Mit Hilfe von Gleichung (5.83) lässt sich Gleichung (5.82) wie folgt ausdrücken:

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_W} \cdot (\underline{U}_{a0} e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{U}_{b0} e^{\underline{\gamma}x}) \quad (5.84)$$

5.4.4 Interpretation der Wellenausbreitung

Wie nachfolgend gezeigt wird, kann der Lösungsansatz laut Gleichung (5.81a) bzw. (5.81b) einfach und plausibel interpretiert werden. (5.81a) als Zeitfunktion ausgeschrieben lautet

$$u(x, t) = \Re \left\{ \underbrace{\underline{U}_{a0} e^{-\underline{\gamma}x} e^{j\omega t}}_{a)} + \underbrace{\underline{U}_{b0} e^{\underline{\gamma}x} e^{j\omega t}}_{b)} \right\} \quad (5.85)$$

Wir spalten die Wellenausbreitungskonstante $\underline{\gamma}$ nach Real- und Imaginärteil auf:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad (5.86)$$

mit $\alpha \dots$ Dämpfungsbelag in Np/m (Neper/Meter)
 $\beta \dots$ Phasenbelag in rad/m

Häufig wird α in dB/m angegeben. Die Umrechnung erfolgt dann nach der Definition der Dämpfung im logarithmischen Mass

$$\frac{\alpha}{\text{dB/m}} = 8.686 \cdot \frac{\alpha}{\text{Np/m}} \quad (5.87)$$

Der Anteil a) in Gleichung (5.85) entspricht einer vorwärts, also in positiver x -Richtung laufenden gedämpften Spannungswelle. Anteil b) entspricht einer rückwärts, also in negativer x -Richtung laufenden gedämpften Spannungswelle.

Wir stellen uns nun die Frage, mit welcher Geschwindigkeit v_p sich die Welle in der x -Richtung bewegt, wie schnell sich beispielsweise der Nulldurchgang der in positiver x -Richtung laufenden Welle ($\omega t - \beta x = \frac{\pi}{2}$) bewegt. Der Beobachtungspunkt $x = x_0 + v_p t$ bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v_p . Die Phase ($\omega t - \beta(x_0 + v_p t)$) bleibt also konstant, wenn die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (5.88)$$

beträgt.

Die Phasengeschwindigkeit der rückwärtslaufenden Welle, Anteil b) in Gleichung (5.85), läuft mit der Geschwindigkeit

$$v_p = -\frac{\omega}{\beta} \quad (5.89)$$

Bei Freileitungen erreicht die Phasengeschwindigkeit fast Lichtgeschwindigkeit.

Das linke Bild in Abbildung 5.25 zeigt die vorwärtslaufende, gedämpfte Welle mit Phasendrehung am Leitungsende. Das mittlere Bild in Abbildung 5.25 zeigt die rückwärtslaufende, gedämpfte Welle mit Phasendrehung am Leitungsanfang. Das rechte Bild in Abbildung 5.25 zeigt die Überlagerung der hinwärts- und rückwärtslaufenden Welle. Diese Bilder zeigen aber nur den *theoretischen* Verlauf der Leitungsspannung: Bei realen Spannungswellen ist die Wellenlänge ca. 6000 km, deshalb entspricht der schattiert gezeichnete Teil in Bild 5.25 bereits einer Leitungslänge von 750 km!

5.4.5 Miteinbezug der Randbedingungen

Die Integrationskonstanten in der Spannungsgleichung (5.81a) ergeben sich aus den Randbedingungen am Anfang oder am Ende der Leitung.

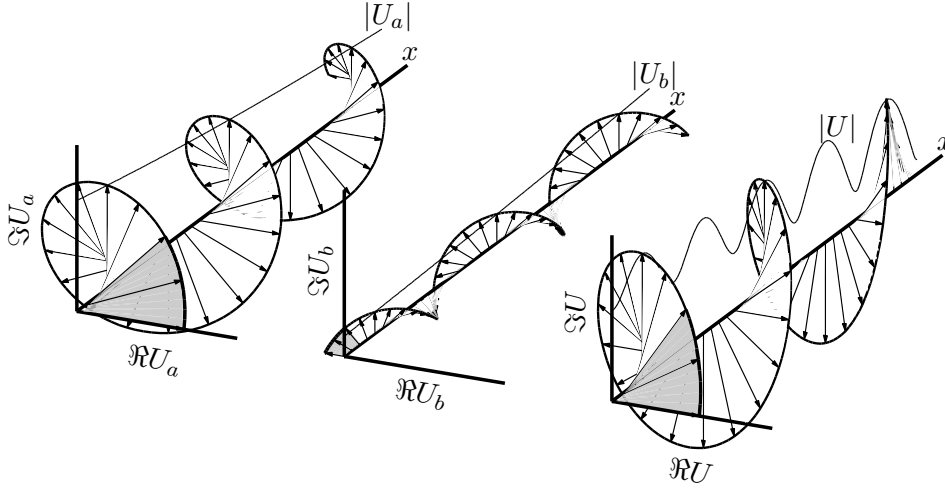


Abbildung 5.25. Hin- und rücklaufende Spannungswelle.

Vorgabe von Strom und Spannung am Anfang der Leitung

Sind Strom und Spannung am Anfang der Leitung gegeben, ergibt sich aus der Gleichung (5.81a)

$$\underline{U}(x=0) = \underline{U}_1 = \underline{U}_{a0} + \underline{U}_{b0} \quad (5.90)$$

Und aus Gleichung (5.84) folgt

$$\underline{I}(x=0) = \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_W} (\underline{U}_{a0} - \underline{U}_{b0}) \quad (5.91)$$

Daraus ergibt sich für die beiden Anteile

$$\underline{U}_{a0} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_W \underline{I}_1}{2} \quad (5.92a)$$

$$\underline{U}_{b0} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_W \underline{I}_1}{2} \quad (5.92b)$$

Somit erhält man folgende Ausdrücke für Spannung und Strom am Ort x entlang der Leitung:

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2} (\underline{U}_1 + \underline{Z}_W \underline{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (\underline{U}_1 - \underline{Z}_W \underline{I}_1) e^{\gamma x} \quad (5.93a)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} + \underline{I}_1 \right) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} - \underline{I}_1 \right) e^{\gamma x} \quad (5.93b)$$

Eine mathematisch elegantere Form ergibt sich, wenn die Glieder nach \underline{U}_1 bzw. $\underline{Z}_W \underline{I}_1$ zusammengefasst werden:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \quad (5.94)$$

und analog für $\underline{I}(x)$. Es folgt mit Hilfe der cosh- und sinh-Funktionen:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cosh(\gamma x) - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \sinh(\gamma x) \quad (5.95a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cosh(\gamma x) - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} \sinh(\gamma x) \quad (5.95b)$$

Vorgabe von Strom und Spannung am Ende der Leitung

Sind Strom und Spannung am Ende der Leitung gegeben, ergibt sich aus Gleichung (5.81a):

$$\underline{U}(x=l) = \underline{U}_2 = \underline{U}_{a0} e^{-\gamma l} + \underline{U}_{b0} e^{\gamma l} \quad (5.96)$$

und aus Gleichung (5.81b) für die Spannung am Leitungsende

$$\underline{I}(x=l) = \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_W} (\underline{U}_{a0} e^{-\gamma l} - \underline{U}_{b0} e^{\gamma l}) \quad (5.97)$$

Dann ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$\underline{U}_{a0} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_W \underline{I}_2}{2} e^{\gamma l} \quad (5.98a)$$

$$\underline{U}_{b0} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_W \underline{I}_2}{2} e^{-\gamma l} \quad (5.98b)$$

Diese werden nun in die allgemeine Lösung der Wellengleichungen, nämlich in die Spannungsgleichung (5.81a) und in die Stromgleichung (5.81b) eingesetzt. Man erhält

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{Z}_W \underline{I}_2) e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - \underline{Z}_W \underline{I}_2) e^{-\gamma(l-x)} \quad (5.99a)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} + \underline{I}_2 \right) e^{\gamma(l-x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} - \underline{I}_2 \right) e^{-\gamma(l-x)} \quad (5.99b)$$

Dies ist die Form der Leitungsgleichungen mit Strom- und Spannungsvorgabe am Ende der Leitung. Durch Einführen der hyperbolischen Funktionen erhalten wir wieder analog:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cosh(\gamma(l-x)) + \underline{Z}_W \underline{I}_2 \sinh(\gamma(l-x)) \quad (5.100a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cosh(\gamma(l-x)) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \sinh(\gamma(l-x)) \quad (5.100b)$$

Der Vergleich dieser Ausdrücke mit (5.95a) und (5.95b) zeigt dass man diese Form erreichen kann indem man x mit $l-x$ substituiert und die Strom- und Spannungsgrößen vom Leitungsende einsetzt.

5.4.6 Die Wellengleichung der verlustlosen Leitung

Einen Spezialfall stellt der Fall der verlustlosen Leitung dar. Da bei einer Freileitung der induktive Widerstand überwiegt (für Spannungen ab ca. 130 kV gilt $\frac{R}{\omega L} \lesssim 0.1$) und der Verlust durch den Ableitwiderstand verschwindend kleine Werte annimmt, kann man als Vereinfachung die Energieübertragungsleitung verlustlos modellieren:

$$R' = G' = 0 \quad (5.101)$$

Diese Vernachlässigung von R' und G' hat selbstverständlich Auswirkungen auf die Leitungsgleichungen, wie nachfolgend gezeigt wird.

Als Ausgangspunkt für unsere Berechnungen dienen folgende Gleichungen:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} - \underline{Z}_W \underline{I}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} \quad (5.102a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_W} \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} \quad (5.102b)$$

Dabei wird angenommen, dass die Werte von Strom und Spannung am Anfang der Leitung bekannt sind. Die Wellenausbreitungskonstante $\underline{\gamma}$ wird bei diesem Spezialfall rein imaginär:

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L'C'} = j\beta \quad (5.103)$$

Die Wellenimpedanz ist im Spezialfall der verlustlosen Leitung *rein reell*¹³ und berechnet sich zu

$$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (5.104)$$

Für die Sinus- und Cosinusfunktion gelten folgende Beziehungen:

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad (5.105)$$

Wenden wir nun die Beziehungen aus Gleichung (5.105) auf die Gleichungen (5.102a) bzw. (5.102b) an, so erhalten wir die Wellengleichungen für die verlustlose Leitung.

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos(\beta x) - jZ_W \underline{I}_1 \sin(\beta x) \quad (5.106a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cos(\beta x) - j \frac{\underline{U}_1}{Z_W} \sin(\beta x) \quad (5.106b)$$

¹³Man spricht in diesem Fall auch vom *Wellenwiderstand*.

Analog erhalten wir die Leitungsgleichung für die verlustlose Leitung, wenn am Leitungsende Strom und Spannung bekannt sind.

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos(\beta(l-x)) + jZ_W \underline{I}_2 \sin(\beta(l-x)) \quad (5.107a)$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cos(\beta(l-x)) + j \frac{\underline{U}_2}{Z_W} \sin(\beta(l-x)) \quad (5.107b)$$

Gehen wir nun von einer verlustlosen Leitung aus und berechnen den Phasenbelag mit den im Kapitel 5.2 (ab Seite 61) hergeleiteten Formeln für

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d_m}{r'_{eq}}\right)$$

$$C' = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d_m}{r_{eq}}\right)}$$

erhalten wir

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0 \frac{\ln\left(\frac{d_m}{r'_{eq}}\right)}{\ln\left(\frac{d_m}{r_{eq}}\right)}} \approx \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c} \quad (5.108)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist und als Medium Luft ($\epsilon = 1$) angenommen wird. Somit ist die Phasenkonstante für die verlustlose Leitung nur von der Betriebsfrequenz abhängig und beträgt bei 50 Hz und $\epsilon = 1$ etwa $\beta = \frac{6^\circ}{100 \text{ km}}$.

5.5 Leitungsmodelle

In der Praxis will man nicht immer mit den relativ komplizierten Wellengleichungen rechnen, der exakte Verlauf von Strom und Spannung entlang einer Leitung ist nicht immer von Interesse. Oft will man nur den Spannungsabfall entlang der Leitung oder den totalen Blindleistungsbedarf bestimmen. Für solche Untersuchungen sind unter Umständen gewisse Vereinfachungen der Wellengleichung zulässig, ohne dabei grosse Einbussen in der Genauigkeit der Ergebnisse hinnehmen zu müssen. Man erhält vereinfachte Leitungsmodelle, die je nach Art der Vereinfachung für bestimmte Problemstellungen geeignet sind. Im folgenden werden einige Leitungsmodelle und deren Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.

5.5.1 Allgemeines Vierpolmodell einer Leitung

Aus dem Leitungsmodell mit verteilten Parametern (Belägen) kann ein Vierpolmodell (T- oder Π -Äquivalent) mit konzentrierten Elementen hergeleitet werden. Diese Darstellung einer Leitung bzw. eines Leitungsstückes kann

weitere Untersuchungen erleichtern. Zum Beispiel ist in vielen Fällen nur die Spannung am Leitungsanfang und -ende gesucht, nicht aber der Verlauf der Spannung entlang der Leitung. Es kann also mit konzentrierten Elementen gerechnet werden. Bei der Herleitung eines Modelles mit konzentrierten Elementen kann folgendermassen vorgegangen werden:

1. Zuerst wird die Kettenform für ein Π -Glied (wie in Abbildung 5.26 gezeigt) aufgestellt.
2. Dann werden die Koeffizienten mit denen der Wellengleichungen verglichen und auf den Wert der Elemente in der Π -Ersatzschaltung geschlossen.

Nach diesen Punkten soll nun vorgegangen werden. Abbildung 5.26 zeigt ein Π -Modell eines Leitungsstückes. Für die Herleitung ist es praktisch die gesamte Queradmittanz \underline{Y}_q je zur Hälfte auf beide Seiten des Vierpoles aufzuteilen. Die Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung am Π -Element in Abbildung 5.26 lauten

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \underline{Z}_l \frac{\underline{Y}_q}{2} & \underline{Z}_l \\ \frac{\underline{Y}_q}{2} \left(2 + \underline{Z}_l \frac{\underline{Y}_q}{2} \right) & 1 + \underline{Z}_l \frac{\underline{Y}_q}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

Der gleiche Zusammenhang kann mit den Wellengleichungen (5.100a) und (5.100b) ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh(\gamma l) & \underline{Z}_W \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{\underline{Z}_W} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (5.110)$$

wobei $\underline{U}_1 = \underline{U}(x=0)$ und $\underline{I}_1 = \underline{I}(x=0)$. Vergleichen wir nun die Koeffizienten der beiden Kettenmatrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 , so können für die Elemente

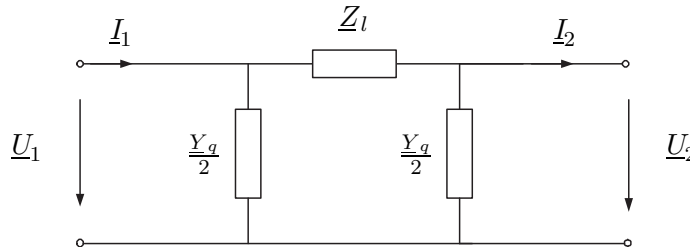


Abbildung 5.26. Π -Ersatzschaltbild einer homogenen Leitung.

der Ersatzschaltung folgende Ausdrücke gefunden werden:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_W \sinh(\underline{\gamma}l) \quad (5.111a)$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{\cosh(\underline{\gamma}l) - 1}{\underline{Z}_W \sinh(\underline{\gamma}l)} = \frac{1}{\underline{Z}_W} \tanh\left(\frac{\underline{\gamma}l}{2}\right) \quad (5.111b)$$

Diese Elemente entsprechen den exakten Beziehungen zwischen Strom und Spannung die sich aus den Wellengleichungen für $x = 0$ und $x = l$ ergeben.

Für den Fall $|\underline{\gamma}l| \ll 1$ können die Ausdrücke für \underline{Z}_l und \underline{Y}_q vereinfacht werden:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_W \sinh(\underline{\gamma}l) \approx \underline{Z}_W \underline{\gamma}l = \underline{Z}'l \quad (5.112a)$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{1}{\underline{Z}_W} \tanh\left(\frac{\underline{\gamma}l}{2}\right) \approx \frac{1}{\underline{Z}_W} \frac{\underline{\gamma}l}{2} = \frac{\underline{Y}'l}{2} \quad (5.112b)$$

Die *konzentrierten* Elemente \underline{Z}_l und \underline{Y}_q der richtungssymmetrischen Π -Ersatzschaltung können also unter der Voraussetzung $|\underline{\gamma}l| \ll 1$ aus den *verteilten* Parametern R', L', G' und C' der Leitung berechnet werden:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}'l = (R' + jX')l \quad (5.113a)$$

$$\frac{\underline{Y}_q}{2} = \frac{\underline{Y}'l}{2} = \frac{(G' + jB')l}{2} \quad (5.113b)$$

Entscheidend für die Modellierung einer Leitung ist, wie gut $|\underline{\gamma}l| \ll 1$ erfüllt ist. Umso grösser dieses Produkt wird, desto weniger genau wird das Π -Modell mit den konzentrierten Elementen die Verhältnisse der Wellengleichungen wiedergeben. Bei der Anwendung der Ersatzschaltung muss man sich deshalb bewusst sein, dass man sich mit steigender Leitungslänge l immer mehr von den exakten Strom- und Spannungsverhältnissen entfernt. Je nach Leitungsart ist die Näherung bis zu einer gewissen Leitungslänge¹⁴ akzeptabel:

- bis etwa 300 km für Freileitungen
- bis etwa 100 km für Kabel¹⁵

Bei praktischen Lastflussberechnungen werden längere Leitungen oft in mehrere kurze Stücke unterteilt, die dann jeweils als Π -Glieder modelliert und kettenförmig hintereinander geschaltet werden.

¹⁴Die Länge bezieht sich hier immer auf eine Betriebsfrequenz von 50 Hz. Bei höheren Frequenzen verkürzen sich die Angaben entsprechen der kürzeren Wellenlänge.

¹⁵Im Kapitel 6.10 werden wir sehen, dass Wechsel- bzw. Drehstromkabel ohnehin nur bis zu einer Länge von etwa 60 km eingesetzt werden. Grund dafür ist der hohe Bedarf an Ladeleistung der sich aus der hohen Betriebskapazität des Kabels ergibt.

5.5.2 Verlustlose Leitung

Eine weitere Vereinfachung besteht darin, die ohmschen Elemente der Leitung zu vernachlässigen. Wie bereits im Abschnitt 5.4.6 diskutiert gilt für eine verlustlose Leitung

$$R' = G' = 0$$

Für diesen Spezialfall wird der *Wellenwiderstand rein reell* und die *Wellenausbreitungskonstante rein imaginär*, d.h. $Z_W \in \mathbb{R}$ und $\underline{\gamma} = j\beta$. Die entsprechenden Vereinfachungen im II-Ersatzschaltbild können erreicht werden, indem die ohmschen Elemente in den obigen Gleichungen vernachlässigt werden:

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}'l = jX'l \quad (5.114a)$$

$$\frac{Y_q}{2} = \frac{Y'}{2}l = j\frac{B'}{2}l \quad (5.114b)$$

Besonders bei Freileitungen wird oft nur der ohmsche Anteil des Ableitwertes vernachlässigt:

$$G' = 0$$

Die konzentrierten Elemente der Ersatzschaltung werden mit dieser Vereinfachung zu

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}'l = R'l + jX'l \quad (5.115a)$$

$$\frac{Y_q}{2} = \frac{Y'}{2}l = j\frac{B'}{2}l \quad (5.115b)$$

Dieses Modell liefert eine gute Approximation für Leitungen mit Nennspannungen ab ca. 130 kV.

5.5.3 Zusätzliche Vereinfachungen

Modelle für *Freileitungen* können noch weiter vereinfacht werden. Zum Beispiel kann unter gewissen Umständen die gesamte Querimpedanz vernachlässigt und die Leitung als reine Serienimpedanz modelliert werden. Üblicherweise werden Leitungen nach ihrer Länge in drei Kategorien eingeteilt:¹⁶

Kurze Leitungen (bis 100 km): Leitungen mit einer Länge von bis zu etwa 100 km weisen normalerweise eine sehr geringe Querkapazität auf, auch der ohmsche Anteil des Ableitwertes ist relativ klein. Derart kurze Leitungen können durch eine einzige Serienimpedanz $\underline{Z} = R'l + j\omega L'l$ modelliert werden.

¹⁶Die Längenangaben sind als ungefähre Richtwerte zu verstehen, es handelt sich hier nicht um eine strikte, exakte Einteilung.

Mittellange Leitungen (100 bis 300 km): Für Leitungslängen im Bereich 100 bis ca. 300 km kann das vereinfachte Π -Modell (5.113) verwendet werden ohne grosse Abstriche in der Genauigkeit zu machen.

Lange Leitungen (über 300 km): Bei Leitungslängen über etwa 300 km treten die Effekte der verteilten Parameter relativ deutlich in Erscheinung. Sie sollten als eine Kette aus kürzeren Π -Elementen modelliert oder mit den exakten Beziehungen (5.111) berechnet werden.

5.5.4 Vergleich verschiedener Leitungsmodelle

Im folgenden sollen die Resultate von verschiedenen Leitungsmodellen anhand eines Beispiels diskutiert werden. Gegeben sind der Wellenwiderstand und die Ausbreitungskonstante einer 230-kV-Leitung:

$$\underline{Z}_W = 382.2 - j 16.5 \, \Omega$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0.0001 \, \text{Np/km} + j 0.0011 \, \text{rad/km}$$

Wir wollen die Spannung am Ende der leerlaufenden Leitung berechnen. Im Leerlauf ist der Strom am Leitungsende $\underline{I}_2 = 0$, die Spannung am Leitungsanfang wird mit $|\underline{U}_1| = 1.0 \, \text{p.u.}$ angenommen. $|\underline{U}_2|$ soll auf folgende Arten berechnet werden:

- a) Mit den exakten Gleichungen (5.100a):

$$\underline{U}(x=0) = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh(\underline{\gamma}l)$$

- b) Mit der Wellengleichung für die *verlustlose* Leitung (5.107a):

$$\underline{U}(x=0) = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos(\beta l)$$

- c) Mit der Π -Ersatzschaltung für mittellange Leitungen. Aus der Ausbreitungskonstante und dem Wellenwiderstand können wir entsprechend (5.112) die Elemente des Ersatzschaltbildes ermitteln:

$$\underline{Z}_l \approx \underline{Z}_W \underline{\gamma} l \quad \text{und} \quad \frac{\underline{Y}_q}{2} \approx \frac{1}{\underline{Z}_W} \frac{\underline{\gamma} l}{2}$$

Mit (5.109) ergibt sich die Beziehung zwischen den Spannungen zu

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_l \underline{Y}_q}{2} \right) = \underline{U}_2 \left(1 - \frac{(\underline{\gamma} l)^2}{2} \right)$$

- d) Die Leitung wird als reine *Serienimpedanz* modelliert. An einer Serienimpedanz tritt im Leerlauf natürlich kein Spannungsabfall auf, die Ausgangsspannung entspricht der Eingangsspannung.

Tabelle 5.3. Betrag der Spannung am Ende einer leerlaufenden 230-kV-Freileitung für verschiedene Leitungslängen l , berechnet mit verschiedenen Leitungsmodellen. Werte in p.u.

l in km	$ \underline{\gamma}l $	a)	b)	c)	d)
50	0.0552	1.0015	1.0015	1.0015	1.0000
100	0.1105	1.0060	1.0061	1.0060	1.0000
300	0.3314	1.0565	1.0570	1.0540	1.0000
500	0.5523	1.1710	1.1730	1.1503	1.0000

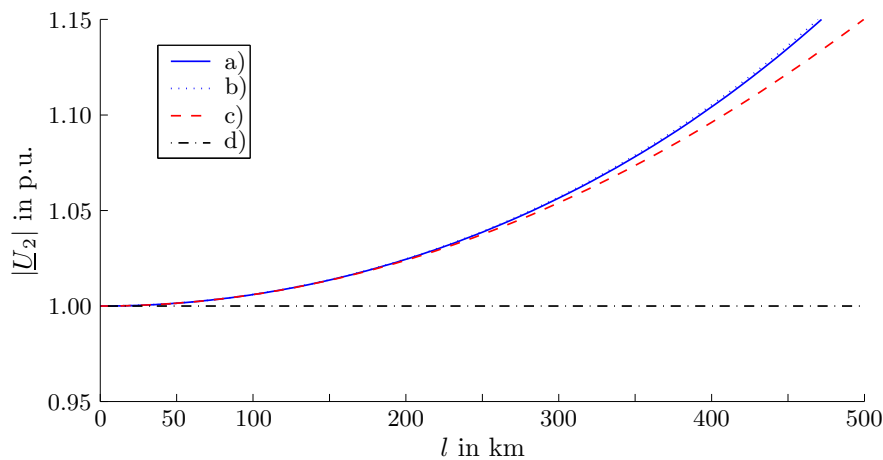


Abbildung 5.27. Betrag der Leerlaufspannung am Ende der Leitung, berechnet mit verschiedenen Modellen. a) exakt, b) mit verlustloser Wellengleichung, c) mit Π -Modell (5.112), d) mit Serienimpedanz.

Tabelle 5.3 und Abbildung 5.27 zeigen die Ergebnisse für verschiedene Leitungslängen. Man sieht, wie die Ergebnisse der verschiedenen Modelle mit steigender Leitungslänge immer mehr voneinander abweichen. Bei kurzen Leitungen bis zu einer Länge von etwa 50 km liefern alle vier Modelle annähernd gleiche Werte für die Ausgangsspannung. Bei längeren Leitungen weicht das Serienimpedanz-Modell d) sichtlich von den anderen Modellen ab. Bei einer Leitungslänge von 300 km beträgt die Abweichung zwischen den Ergebnissen der vollständigen Wellengleichung a) und jener des Π -Modells c) etwa 0.24%, bei 500 km sind es bereits 1.77%. Offensichtlich gibt die verlustlose Wellengleichung b) die exakten Gegebenheiten sehr gut wieder, die Ergebnisse stimmen fast mit den exakten Werten überein: Bei einer Leitungslänge von 500 km beträgt die Abweichung lediglich 0.17%. Aus diesem Grund wird das verlustlose Modell in der Praxis sehr häufig verwendet.

6

Grundregeln der Energieübertragung

In diesem Kapitel behandeln wir die statischen Strom- und Spannungsverhältnisse sowie die daraus resultierenden Wirk- und Blindleistungsflüsse auf Wechsel- bzw. Drehstromleitungen. Nach einigen grundsätzlichen Überlegungen wird das Betriebsverhalten von Leitungen in verschiedenen Situationen untersucht.

Bei der Diskussion der Betriebseigenschaften von Leitungen werden wir uns in den meisten Fällen auf eine Phase bzw. ein einphasiges Ersatzsystem beschränken, da vorläufig nur *symmetrische Verhältnisse* untersucht werden. Im Kapitel 7 werden wir sehen, wie auch unsymmetrische Systeme als einphasige Ersatzsysteme dargestellt werden können. Somit rechtfertigt sich die einphasige Betrachtung in diesem Kapitel.

Die zweite wichtige Voraussetzung für die Gültigkeit der folgenden Untersuchungen ist, dass sich das Netzwerk in einem statischen Zustand (*steady state*) befindet. Für die Berechnung von dynamischen Vorgängen (z.B. Ausgleichsvorgänge nach Schalthandlungen) müssen andere Modelle verwendet werden.

6.1 Entkoppelte Grössen

Die Übertragung von Leistung über eine Leitung kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Wie in Bild 6.1 dargestellt, werden üblicherweise die Grössen Spannung (komplex), Wirk- und Blindleistung je am Leitungsanfang und -ende verwendet.¹ Für eine Leistungsübertragung über eine Leitung ergeben sich also acht reelle Grössen:

$$U_1, \varphi_1, U_2, \varphi_2, P_1, Q_1, P_2, Q_2$$

Nicht alle dieser Grössen sind entkoppelt, also voneinander unabhängig einstellbar. So sind z.B. der Winkel der Spannung \underline{U}_1 und der Winkel der Spannung \underline{U}_2 durch die Eigenschaften der Leitung (Länge, Phasenbelag) miteinander gekoppelt. Deshalb wird z.B. ein Winkel als Referenz (z.B. $\varphi_2 = 0$) genommen, dadurch „verliert“ man eine Grösse in den Formeln.

Auch die Leistungen am Leitungsanfang und -ende sind nicht voneinander unabhängig. Werden z.B. Wirk- und Blindleistung am Leitungsanfang vorgegeben, so stellen sich diese am Leitungsende entsprechend den

¹Anstelle der Leistungen könnten auch die komplexen Stromwerte verwendet werden.

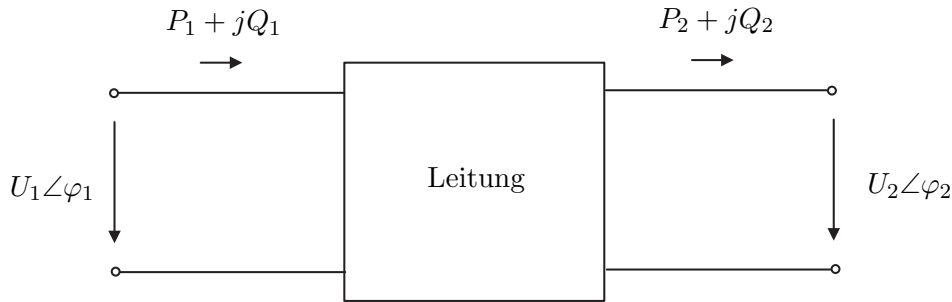


Abbildung 6.1. Leistungsübertragung über eine Leitung

Leitungseigenschaften und der Übertragungsspannung ein. Dabei kann entweder \underline{U}_1 oder \underline{U}_2 vorgegeben sein. Bei Vorgabe der beiden Spannungen am Leitungsanfang und -ende (jetzt drei reelle Werte) stellen sich die Wirk- und Blindleistungen dementsprechend ein, sie können nicht zusätzlich vorgegeben werden.

Wie z.B. in den Gleichungen (5.95a) und (5.95b) gezeigt stehen Strom und Spannung entlang der Leitung in einem bestimmten Zusammenhang. Demnach reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Variablen wieder um zwei komplexe bzw. vier reelle Größen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich schlussendlich folgende Bilanz der unabhängigen Größen:

ursprüngliche Größen	8
ein Spannungswinkel als Referenz	−1
2 komplexe = 4 reelle U/I -Größen	−4
entkoppelte reelle Größen	3

Die Anzahl der entkoppelten Größen reduziert sich also bei einer wie in Bild 6.1 gezeigten Leistungsübertragung auf drei reelle Werte. Das heisst, dass von den acht reellen Größen, mit denen wir die Übertragung beschreiben, nur jeweils drei frei gewählt werden können, alle anderen Größen stellen sich entsprechend ein. Man spricht in diesem Zusammenhang von *entkoppelten Größen* (*independent quantities*).

Nicht jede Kombination aus vorgegebenen entkoppelten Größen ist für eine Leistungsübertragung sinnvoll. In der Netzbetriebspraxis werden typischerweise folgende Größen der Leistungsübertragung festgelegt:

- U_1, φ_1, U_2 : Die Leistungen stellen sich entsprechend den Leitungseigenschaften und den vorgegebenen Größen Winkel und Spannungen ein. Dieser Fall tritt z.B. dann ein, wenn die Leitung zwei grosse, leistungsstarke, sogenannte starre Netze² miteinander verbindet.

²Unter einem „starken Netz“ versteht man ein Netz dessen Spannung und Frequenz unabhängig vom Belastungszustand konstant, also starr sind. Diesem Idealfall ist man mit sehr leistungsstarken und gut ausgebauten Netzen nahe.

- U_1, P_2, Q_2 (oder P_1, Q_1, U_2): Gibt man die Spannung an einem und die Leistungen am anderen Leitungsende vor, so stellen sich alle anderen Größen dementsprechend ein. Dieser Fall tritt z.B. dann ein, wenn ein entfernter Verbraucher aus einem Netz über eine Leitung versorgt wird.
- U_1, P_1, Q_1 : Die entkoppelten Größen werden an der Eingangsseite gewählt, Leistungen und Spannung an der Ausgangsseite stellen sich entsprechend ein. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn ein Kraftwerk über eine Leitung Leistung ins Netz einspeist.

6.2 Natürliche Leistung

Unter der *natürlichen Leistung* einer Leitung versteht man jene Leistung, die übertragen wird, wenn die Leitung *mit ihrem Wellenwiderstand belastet* ist.

6.2.1 Natürliche Leistung einer verlustlosen Leitung

Wir betrachten eine verlustlose Leitung mit $R' = G' = 0$, die mit ihrem rein reellen Wellenwiderstand abgeschlossen ist. Dieser kann aus den verteilten Leitungsparametern berechnet werden:

$$Z_2 = Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (6.1)$$

Die Leistungen am Ausgang der Leitung betragen somit³

$$P_{nat} = P_2 = \frac{|\underline{U}_2|^2}{Z_2} = \frac{|\underline{U}_2|^2}{Z_W} \quad (6.2)$$

und

$$Q_2 = 0 \quad (6.3)$$

Der Ausgangsstrom wird

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{Z_2} = \frac{\underline{U}_2}{Z_W} \quad (6.4)$$

³Auch hier soll die Konvention aus Kapitel 2 gelten: Für die Berechnung der Dreiphasengrößen P , Q und S wird jeweils der $\sqrt{3}$ -fache Wert der *Phasengrößen* von Strom und Spannung in die Gleichungen eingesetzt. In den folgenden Beziehungen können durch Einsetzen der $\sqrt{3}$ -fachen Strom- und Spannungswerte am Anfang bzw. Ende der Leitung die Dreiphasenleistungen berechnet werden.

Setzen wir nun die Gleichung (6.4) in die Gleichungen für die verlustlose Leitung (5.107a) bzw. (5.107b) ein, erhalten wir Spannung und Strom am Leitungsanfang ($x = 0$):

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cos(\beta l) + j Z_W \frac{\underline{U}_2}{Z_W} \sin(\beta l) \\ &= \underline{U}_2 (\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) = \underline{U}_2 e^{j\beta l}\end{aligned}\quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= j \underline{U}_2 \frac{1}{Z_W} \sin(\beta l) + \frac{\underline{U}_2}{Z_W} \cos(\beta l) \\ &= \frac{\underline{U}_2}{Z_W} (\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) = \underline{I}_2 e^{j\beta l}\end{aligned}\quad (6.5b)$$

Das Ergebnis zeigt, dass Strom und Spannung entlang der Leitung um denselben Winkel βl gedreht werden. Verfolgt man die Grössen auf der Leitung selbst ($x \neq 0$), so verdrehen sich die Zeiger proportional zum Abstand vom Leitungsende. Die Amplituden von Strom und Spannung bleiben entlang der Leitung gleich. Die Leistung am Leitungsanfang ist gleich gross wie am Leitungsende:

$$P_1 = \frac{|\underline{U}_1|^2}{Z_W} = P_2 \quad (6.6)$$

da auf der Leitung keine Verluste auftreten. Diese besondere Belastung wird als *natürliche Leistung* (*surge impedance loading*) P_{nat} der Leitung bezeichnet.

$$P_{nat} = \frac{|\underline{U}|^2}{Z_W} \quad (6.7)$$

Mit dieser Belastung erreicht man *optimale Übertragungsbedingungen*. Strom und Spannung sind entlang der Leitung in ihrer Amplitude konstant und in Phase, die Phasendrehung zwischen Anfang und Ende der Leitung beträgt βl . In der Praxis weichen die übertragenen Leistungen meistens von der natürlichen Leistung ab; die Leitungen sind meistens nicht mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen.

Bei natürlicher Last ist die *Blindleistungsbilanz der Leitung ausgeglichen*. Das heisst, dass die Längsinduktivität genau den Betrag an Blindleistung verbraucht, den die Querkapazität erzeugt. Die in der Querkapazität erzeugte Blindleistung hängt von der Querkapazität selbst und der Betriebsspannung ab. Die in der Längsinduktivität verbrauchte Blindleistung hängt vom Leiterstrom und vom Wert der Längsinduktivität ab. Bei der Übertragung der natürlichen Leistung gleichen sich die beiden Blindleistungen aus:

$$Q'_C = Q'_L \Rightarrow U^2 \omega C' = I^2 \omega L' \Rightarrow \frac{U^2}{I^2} = \frac{L'}{C'} = Z_W^2 \quad (6.8)$$

Der Wellenwiderstand von Freileitungen liegt im Bereich von etwa 200 bis 400 Ω . Dominanter Parameter ist die Längsinduktivität, ihre Reaktanz

ist im Vergleich zur Queradmittanz sehr hoch. Die in der Längsinduktivität verbrauchte Blindleistung Q'_L übersteigt schon bei relativ niedrigen Strömen den in der Querkapazität generierten Anteil Q'_C . Aus diesem Grund werden Freileitungen meist über ihrer natürlichen Leistung betrieben. Dieser Betriebszustand wird als *übernatürlich* bezeichnet.

Kabel haben im Vergleich zu Freileitungen relativ geringe Wellenwiderstände, etwa im Bereich 30 bis 50 Ω . Es dominiert der Einfluss der Querkapazität. Daraus ergibt sich bei gleicher Betriebsspannung U eine höhere natürliche Leistung, die meistens über der thermischen Grenzleistung des Kabels liegt. Während Freileitungen dauerhaft ein mehrfaches ihrer natürlichen Leistung führen können, werden Kabel immer unter ihrer natürlichen Leistung, also *unternatürlich* betrieben. Die Besonderheiten von Kabeln werden im Abschnitt 6.10 noch eingehender erläutert.

An dieser Stelle sei auf das interaktive Simulationsprogramm Flowdemo.net (<http://flowdemo.net>, Link „Start Flowdemo.net Applet“) verwiesen. Dieses Programm ist frei verfügbar und kann ohne Installation in einem Internet-Browser gestartet werden. Nach Start des Applets und Doppelklick auf „2 Bus Example“ startet ein einfaches Beispiel anhand dessen man das Verhalten einer Leitung studieren kann.

Der Begriff der natürlichen Leistung kann auch auf eine verlustbehaftete Leitung angewendet werden. Die Ausgangs- und Eingangsleistungen sind dann jedoch nicht mehr gleich. Dieser Fall soll im nächsten Abschnitt genauer untersucht werden.

6.2.2 Natürliche Leistung einer verlustbehafteten Leitung

Bei einer verlustbehafteten Leitung ist der Wellenwiderstand eine komplexe Grösse. Zur folgenden Untersuchung soll am Leitungsende ein Widerstand identisch dem Wellenwiderstand angebracht werden. Der Strom am Leitungsende berechnet sich dann zu

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \quad (6.9)$$

Folglich erhalten wir die Scheinleistung am Leitungsende

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \frac{|\underline{U}_2|^2}{\underline{Z}_W^*} \quad (6.10)$$

Wird Gleichung (6.9) in die Leitungsgleichungen (5.100a) und (5.100b) eingesetzt ergibt sich für Spannung und Strom am Leitungsanfang

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cosh(\underline{\gamma}l) + \underline{Z}_W \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \sinh(\underline{\gamma}l) \\ &= \underline{U}_2 (\cosh(\underline{\gamma}l) + \sinh(\underline{\gamma}l)) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}l}\end{aligned}\quad (6.11a)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \cosh(\underline{\gamma}l) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \sinh(\underline{\gamma}l) \\ &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} (\cosh(\underline{\gamma}l) + \sinh(\underline{\gamma}l)) = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma}l}\end{aligned}\quad (6.11b)$$

Die komplexe Leistung am Leitungsanfang ist

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{U}_2 \frac{\underline{U}_2^*}{\underline{Z}_W^*} e^{2\alpha l} = \underline{S}_2 e^{2\alpha l} \quad (6.12)$$

Die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bleibt auch im verlustbehafteten Fall über die gesamte Leitung erhalten. Wirk- und Blindleistung steigen in Richtung Leitungsanfang an, die Leistung am Leitungsanfang ist um einen reellen Faktor $e^{2\alpha l}$ höher als am Ausgang. Auch steigen die Amplituden von Spannung und Strom entlang der Leitung (in Richtung Leitungsanfang) proportional zu $e^{\alpha x}$. Die Winkeldrehung ist nach wie vor proportional zu βx .

6.2.3 Typische Werte für Freileitungen und Kabel

Abschliessend sollen einige Werte für den Wellenwiderstand und die natürliche Leistung von realen Leitungen angeführt werden.

- Beispiele für Freileitungen [14]:

Nennspannung in kV	132	275	380
Z_W in Ω	150	315	295
P_{nat} in MW	50	240	490

- Beispiele für Kabel [11]:

Nennspannung in kV	115	230	500
Z_W in Ω	36.2	37.1	50.4
P_{nat} in MW	365	1426	4960

6.3 Leerlauf und Kurzschluss

Nach der Herleitung der natürlichen Leistung soll nun das Verhalten von Leitungen in den beiden Extremfällen Leerlauf und Kurzschluss untersucht werden. Der Einfachheit halber werden die Leitungen jeweils als verlustlos angenommen.

6.3.1 Leerlauf

Der Leerlauffall kann eintreten wenn eine unbelastete Leitung unter Spannung gesetzt wird, oder wenn die Last am Ende der Leitung ausgeschaltet wird. Dieser Fall ist dadurch charakterisiert, dass der Strom am Ende der Leitung $\underline{I}_2 = 0$ ist. Damit erhält man aus den Leitungsgleichungen (5.100a) und (5.100b):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh(\gamma l) \quad (6.13a)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} \sinh(\gamma l) \quad (6.13b)$$

Wir legen \underline{U}_1 in die reelle Achse und vereinfachen die Gleichungen (6.13a) bzw. (6.13b) mit $R' = G' = 0$ zu

$$U_1 = U_2 \cos(\beta l) \quad (6.14a)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{jU_2}{Z_W} \sin(\beta l) \quad (6.14b)$$

Wird die Spannung am Leitungsanfang festgehalten, so steigt U_2 am Ende der Leitung auf

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos(\beta l)} \quad (6.15)$$

an. Für diesen Betriebsfall kann der Eingangsstrom der Leitung berechnet werden:

$$\underline{I}_1 = \frac{jU_2}{Z_W} \sin(\beta l) = \frac{jU_1 \tan(\beta l)}{Z_W} \quad (6.16)$$

Man sieht, dass die Amplitude der Spannung über der leerlaufenden Leitung in Richtung Leitungsende ansteigt, während die Stromamplitude in gleicher Richtung sinkt (siehe Abbildung 6.2). Der Anstieg von U_1 auf U_2 über der leerlaufenden Leitung wird als *Ferranti-Effekt* bezeichnet. Im Extremfall kann es zur Resonanz kommen, wenn nämlich die Leitungslänge bei 50 Hz 1500 km erreicht, d.h. $\beta l = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$. In der Praxis kann der Ferranti-Effekt auch schon bei kürzeren Leitungen zum Problem werden.

Hier sei wieder auf das Programm Flowdemo.net (<http://flowdemo.net>) hingewiesen. Ein Beispiel an dem der Ferranti-Effekt beobachtet werden kann findet man unter dem Link „Long Line Example“. Mit veränderter Belastung am Leitungsende verändert sich auch der Spannungsverlauf entlang der Leitung. Durch Ausschalten der Last wird der Spannungsanstieg entlang der Leitung am deutlichsten.

Schlussendlich bilden wir noch die Eingangsimpedanz der leerlaufenden Hochspannungsleitung:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 = -j \frac{Z_W}{\tan(\beta l)} \quad (6.17)$$

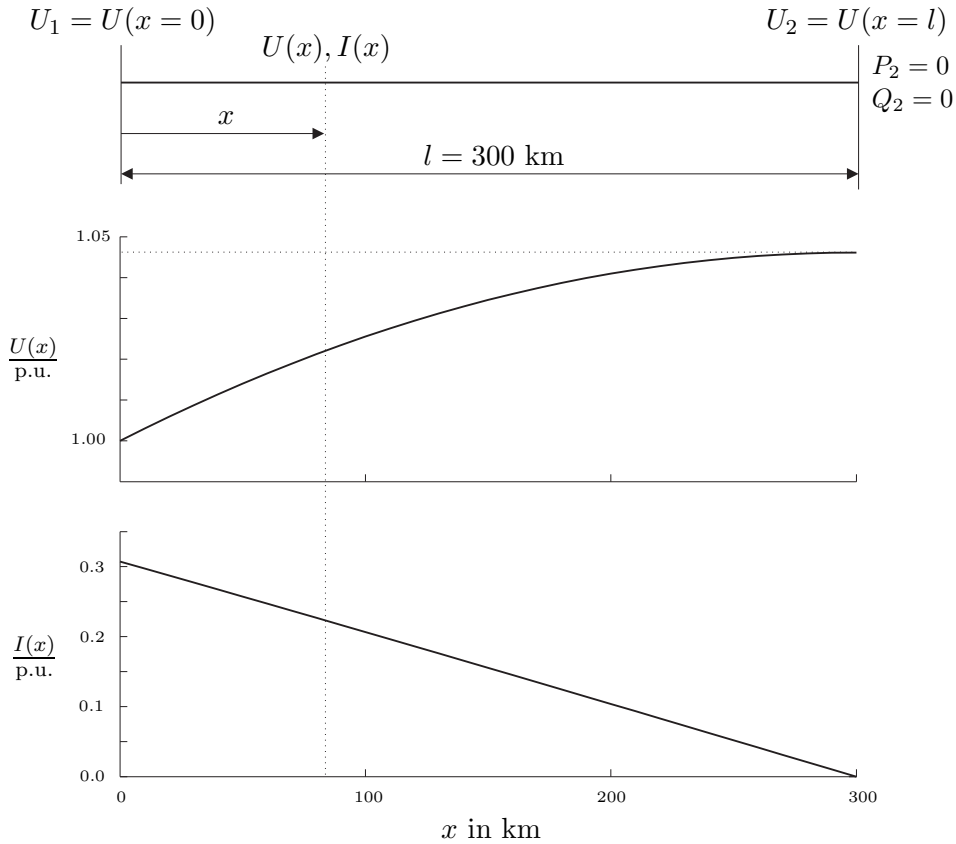


Abbildung 6.2. Spannungs- und Stromverlauf für eine 300 km lange leerlaufende Leitung mit am Leitungsanfang festgehaltener Spannung ($L' = 1$ mH/km, $C' = 10$ nF/km).

Aus der Impedanzdarstellung wird offensichtlich, dass die Eingangsimpedanz der offenen Leitung *kapazitiv* ist. Bei einer Leitungslänge von 750 km, d.h. $\beta l = 45^\circ$, ist der Betrag der Eingangsimpedanz bereits so gross wie der des Wellenwiderstandes. Die auftretenden Ströme (*Ladeströme*⁴) sind beträchtlich.

In der Realität ist immer zu berücksichtigen, dass die Spannung am Leitungsanfang nicht starr ist, sondern durch die Ladeströme noch angehoben wird. Spannungserhöhungen am Ende einer offenen Leitung müssen deshalb schon ab Leitungslängen von 300 km beachtet werden.

6.3.2 Kurzschluss

Der Kurzschluss am Leitungsende ist formell ähnlich zum Leerlauf. Bei einem idealen Kurzschluss am Leitungsende ist die Ausgangsspannung $\underline{U}_2 = 0$. Mit dieser Bedingung ergibt sich aus der Wellengleichung der verlustlosen

⁴Der Ladestrom ist definiert als derjenige Strom, der beim Leerlauf einer Leitung fließt.

Leitung

$$\underline{U}_1 = j\underline{I}_2 Z_W \sin(\beta l) \quad (6.18a)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos(\beta l) \quad (6.18b)$$

Analog zur Spannung im Leerlauf wird der Strom am Leitungsende im Kurzschluss zu

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1}{\cos(\beta l)} \quad (6.19)$$

Auch hier ist wieder der Resonanzfall bei $\beta l = 90^\circ$ erkennbar ($\underline{I}_2 \rightarrow \infty$). Die Eingangsimpedanz ergibt sich beim Kurzschluss am Leitungsende zu

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 = jZ_W \tan(\beta l) \quad (6.20)$$

Für 50-Hz-Systeme ist die Kurzschlussimpedanz bis zu einer Leitungslänge von 1500 km *induktiv*.

6.4 Blindleistungsbedarf einer Leitung

Wenn Leistung über eine Leitung übertragen wird, entstehen Verluste. In den ohmschen Elementen der Leitung (Längs- und Querwiderstand) treten Wirkverluste auf, in den reaktiven Elementen (Längsinduktivität und Querkapazität) wird Blindleistung umgesetzt. Die am Ende der Leitung entnommene komplexe Leistung unterscheidet sich von der am Leitungsanfang eingespeisten Leistung um den Wirk- und Blindleistungsbedarf der Leitung. Für die Spannungsverhältnisse auf der Leitung (und somit für die Stabilität der Energieübertragung) ist der Blindleistungsbedarf von besonderem Interesse. Er soll deshalb genauer diskutiert werden.

Wir betrachten die Wellengleichung für eine verlustlose Leitung:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jZ_W \sin(\beta l) \\ \frac{j}{Z_W} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Die Leistungsaufnahme am Leitungsanfang $\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = P_1 + jQ_1$ ist abhängig von der Leistungsabgabe am Leitungsende $\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = P_2 + jQ_2$. Bei vorgegebener Spannung \underline{U}_2 und darauf bezogener natürlicher Leistung $P_{nat} = |\underline{U}_2|^2 / Z_W$ ergibt sich für die Leistung am Eingang der Leitung

$$P_1 + jQ_1 = P_2 + j \left(Q_2 \cos(2\beta l) + \frac{1}{2} \left(\frac{|\underline{S}_2|^2}{P_{nat}} - P_{nat} \right) \sin(2\beta l) \right) \quad (6.21)$$

Für eine verlustlose Leitung muss $P_1 = P_2$ sein. Die bereitzustellende Blindleistung Q_1 wird ausser von Q_2 in starkem Masse vom Eigenverbrauch ΔQ der Leitung bestimmt. Mit der Näherung $\cos(2\beta l) \approx 1$ gilt:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{|\underline{S}_2|^2}{P_{nat}} - P_{nat} \right) \sin(2\beta l) \quad (6.22)$$

Der Blindleistungsbedarf einer Leitung setzt sich demnach aus zwei Anteilen zusammen:

- induktiver Anteil:

$$Q_L = \frac{1}{2} \frac{|\underline{S}_2|^2}{P_{nat}} \sin(2\beta l) \quad (6.23)$$

- kapazitiver Anteil:

$$Q_C = \frac{1}{2} P_{nat} \sin(2\beta l) \quad (6.24)$$

Die beiden Anteile sind bei Belastung mit natürlicher Leistung ausgeglichen, d.h. die Querkapazität „erzeugt“ genau den Betrag an Blindleistung, den die Längsinduktivität „verbraucht“:

$$\Delta Q = Q_L - Q_C = 0 \quad \text{bei} \quad |\underline{S}_2| = P_{nat} \quad (6.25)$$

Bei $|\underline{S}_2| > P_{nat}$ nimmt die Leitung induktive Blindleistung auf ($Q_L > Q_C$), bei $|\underline{S}_2| < P_{nat}$ gib sie induktive Blindleistung ab ($Q_L < Q_C$). Die im Leerlaufbetrieb aufgenommene kapazitive Blindleistung Q_C ist kapazitiv und wird *Ladeleistung* genannt. Diese beträgt bei einer

- verlustlosen Leitung mit $R' = G' = 0$

$$Q_C = \frac{1}{2} P_{nat} \sin(2\beta l) \quad (6.26)$$

- kurzen Leitung mit $\underline{U}_1 \approx \underline{U}_2 \approx \underline{U}$

$$Q_C = P_{nat} \beta l = \frac{|\underline{U}|^2}{Z_W} \beta l = |\underline{U}|^2 \omega C' l \quad (6.27)$$

Wird die Leitung wie angenommen im Leerlauf betrieben, d.h. $\underline{S}_2 = 0$, so ist laut Gleichung (6.23) der induktive Blindleistungsbedarf Q_L in beiden Fällen (verlustlos/kurz) gleich Null.

Betrachten wir nun noch den Blindleistungsbedarf in Abhängigkeit der übertragenen Wirkleistung. Wieder gehen wir von einer verlustlosen Leitung aus. Gleichung (6.21) lautet mit $x = 0$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos(\beta l) + j Z_W \underline{I}_2 \sin(\beta l) \quad (6.28)$$

Drücken wir nun den Strom am Leitungsende durch die Scheinleistung am Leitungsende aus, erhalten wir

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos(\beta l) + j Z_W \sin(\beta l) \left(\frac{P_2 - j Q_2}{\underline{U}_2^*} \right) \quad (6.29)$$

Nun führen wir den Übertragungswinkel δ ein, d.h. den Winkel zwischen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 , und legen \underline{U}_2 in die reelle Achse ($\underline{U}_2 = U_2$):

$$\underline{U}_1 = U_1 (\cos \delta + j \sin \delta) \quad (6.30)$$

Spalten wir die Spannungsbeziehung nach Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir

$$\Re \{\underline{U}_1\} = U_1 \cos \delta = U_2 \cos(\beta l) + Z_W \sin(\beta l) \frac{Q_2}{U_2} \quad (6.31a)$$

$$\Im \{\underline{U}_1\} = U_1 \sin \delta = Z_W \sin(\beta l) \frac{P_2}{U_2} \quad (6.31b)$$

Eine Umstellung des Realteils liefert eine Gleichung für die Blindleistung am Ausgang der Leitung:

$$Q_2 = \frac{U_2 (U_1 \cos \delta - U_2 \cos(\beta l))}{Z_W \sin(\beta l)} \quad (6.32)$$

Die am Leitungseingang aufgenommene Blindleistung ist

$$Q_1 = \frac{-U_1 (U_2 \cos \delta - U_1 \cos(\beta l))}{Z_W \sin(\beta l)} \quad (6.33)$$

Falls die Amplituden von \underline{U}_1 und \underline{U}_2 identisch sind folgt daraus:

$$Q_2 = -Q_1 = \frac{U_1^2 (\cos \delta - \cos(\beta l))}{Z_W \sin(\beta l)} = \frac{P_{nat} (\cos \delta - \cos(\beta l))}{\sin(\beta l)} \quad (6.34)$$

Figur 6.3 zeigt die am Leitungsanfang benötigte Blindleistung gemäss Gleichung (6.34) für Leitungen unterschiedlicher Länge in Funktion der über die Leitung übertragenen Wirkleistung.

Sowohl die Wirk- als auch die Blindleistung können auf die natürliche Leistung bezogen, d.h. durch P_{nat} dividiert werden. Wenn der Wirkleistungsbedarf am Leitungsende kleiner ist als die natürliche Leistung der Leitung ($P_2 < P_{nat}$) wirkt die Leitung als Kapazität und gibt an beiden Leitungsenden Blindleistung ab. Falls $P_2 > P_{nat}$ zeigt die Leitung ein induktives Verhalten und muss mit Blindleistung gespeist werden. Somit können Hochspannungsleitungen bei veränderlicher Belastung und ungefähr konstanter Spannung an beiden Leitungsenden nur dann betrieben werden, wenn an beiden Leitungsenden ausreichende Blindleistungsquellen oder -senken vorhanden sind.

6.5 Spannungsabfall entlang einer Leitung

In diesem Abschnitt werden wir eine Formel für den Spannungsabfall (voltage drop) entlang einer Übertragungsleitung herleiten.

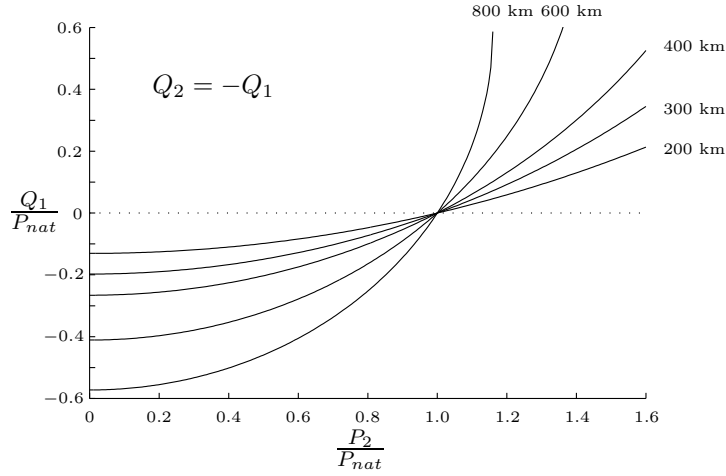


Abbildung 6.3. Die am Leitungseingang benötigte Blindleistung als Funktion der am Leitungsende entnommenen Wirkleistung.

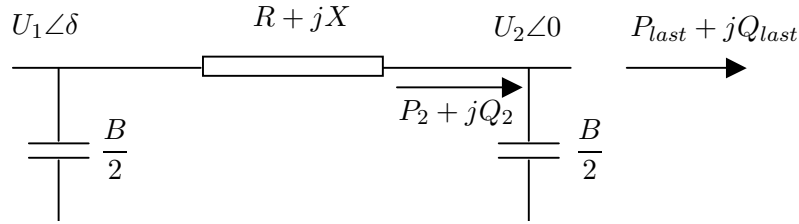


Abbildung 6.4. II-Modell einer Übertragungsleitung.

Gehen wir dazu von dem Modell in Bild 6.4 aus. Die Parameter R , X und B im Modell wurden aus den verteilten Parametern der Leitung, R' , L' und C' berechnet (G' wurde vernachlässigt). Am Ende der Leitung wird die komplexe Leistung $P_{last} + jQ_{last}$ abgenommen.

Die Queradmittanzen $\frac{B}{2}$ des Leitungsmodells sind Kapazitäten, d.h. sie geben Blindleistung ab. Den Blindleistungsfluss zum rechten Teil des II-Modells Q_2 erhalten wir, indem wir die im kapazitiven Shuntelement $\frac{B}{2}$ erzeugte Blindleistung von der induktiven Blindlast Q_{last} abziehen. Die übertragene Wirkleistung P_2 entspricht dem Wirkanteil der Last P_{last} . Wir erhalten also

$$P_2 = P_{last} \quad (6.35a)$$

$$Q_2 = Q_{last} - Q_c \quad (6.35b)$$

wobei Q_c der in der rechten Querkapazität erzeugten Blindleistung entspricht. Somit können wir das Modell in Bild 6.4 durch ein einfacheres wie in Bild 6.5 ersetzen.

Drücken wir nun den Strom als Funktion von Scheinleistung

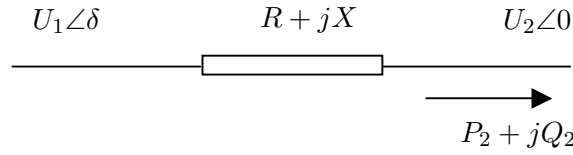


Abbildung 6.5. Modell einer Übertragungsleitung zur Berechnung des Spannungsabfalles.

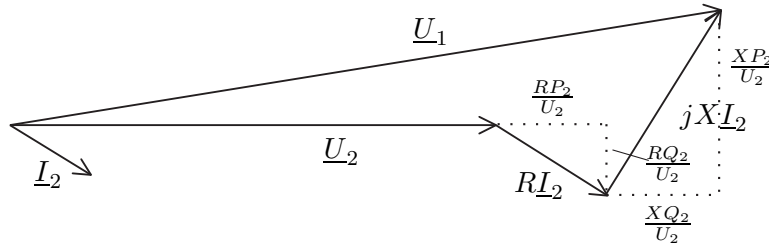


Abbildung 6.6. Beziehung zwischen den Zeigern \underline{U}_1 und \underline{U}_2 .

$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2$ und Spannung \underline{U}_2 aus, so ergibt sich

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{S}_2^*}{\underline{U}_2^*} = \frac{P_2 - jQ_2}{U_2} \quad (6.36)$$

Hier hat es sich als vorteilhaft erwiesen den Winkel der Spannung \underline{U}_2 als Referenzwinkel zu wählen ($\underline{U}_2 = U_2$). Jetzt kann die Spannung \underline{U}_1 direkt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z}_l \cdot \underline{I}_2 = U_2 + (R + jX) \frac{P_2 - jQ_2}{U_2} \\ &= \left(U_2 + \frac{RP_2 + XQ_2}{U_2} \right) + j \left(\frac{XP_2 - RQ_2}{U_2} \right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Die Amplitude der Spannung am Leitungsanfang ist dann

$$|\underline{U}_1| = U_1 = \sqrt{\left(U_2 + \frac{RP_2 + XQ_2}{U_2} \right)^2 + \left(\frac{XP_2 - RQ_2}{U_2} \right)^2} \quad (6.38)$$

Diese Beziehungen sind als Zeigerdiagramm in Bild 6.6 dargestellt. Für eine verlustlose Leitung mit $R = 0$ vereinfacht sich Gleichung (6.38) zu

$$U_1 = \sqrt{\left(U_2 + \frac{XQ_2}{U_2} \right)^2 + \left(\frac{XP_2}{U_2} \right)^2} \quad (6.39)$$

Diese vereinfachte Beziehung zwischen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 ist für eine verlustfreie Leitung als Zeigerdiagramm in Abbildung 6.7 dargestellt. Für realistische

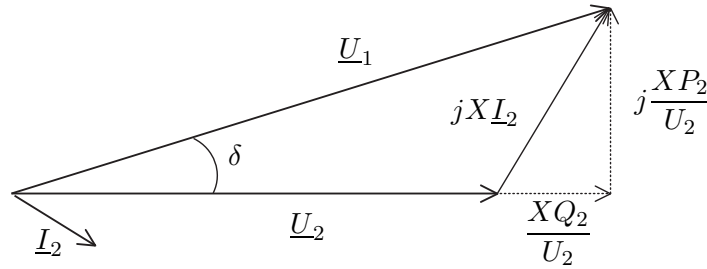


Abbildung 6.7. Vereinfachte Beziehung zwischen den Zeigern \underline{U}_1 und \underline{U}_2 .

Fälle gilt $|XP_2/U_2| \ll U_2$, deshalb kann der rechte Term in Gleichung (6.39) vernachlässigt werden und wir erhalten

$$U_1 \approx U_2 + \frac{XQ_2}{U_2} \quad (6.40)$$

Aus Bild 6.7 ist erkennbar, dass der Phasenunterschied zwischen den beiden Spannungen in erster Linie durch den Wirkleistungsfluss P_2 bestimmt wird, wobei der Betragsunterschied $\Delta U = U_1 - U_2$ hauptsächlich durch den Blindleistungsfluss Q_2 verursacht wird.

In den obigen Untersuchungen sind wir davon ausgegangen, dass Spannung und Leistungen am gleichen Ende der Leitung bekannt sind. Oft ist es jedoch so, dass die Spannung an einem Ende, z.B. auf der Generatorseite, und die Leistungen am anderen Ende der Leitung, z.B. der Lastseite, gegeben sind. In diesem Fall ist nach wie vor Gleichung (6.38) gültig, nur ist dann U_1 die bekannte und U_2 die gesuchte Grösse. U_2 kann dann aus U_1 , P_2 und Q_2 durch Umformung von Gleichung (6.38) berechnet werden.

6.6 Wirkungsgrad von Hochspannungsleitungen

Nun wollen wir den Wirkungsgrad einer Hochspannungsleitung anhand eines Beispiels bestimmen. Für eine 200 km lange 420-kV-Leitung ($= U_2$) soll bei natürlicher Leistung der Wirkungsgrad der Übertragung bestimmt werden. Die primären Daten dieser Leitung lauten:

$$\begin{aligned} R' &= 0.031 \, \Omega/\text{km} \\ L' &= 1.06 \, \text{mH}/\text{km} \\ C' &= 11.9 \, \text{nF}/\text{km} \\ f &= 50 \, \text{Hz} \end{aligned}$$

Der ohmsche Querableitwert wird vernachlässigt ($G' = 0$). Mit Gleichung (5.86) können wir aus den Leitungsparametern die Ausbreitungskonstante

berechnen:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(0.031 + j0.333) j3.74 \cdot 10^{-6}} = (0.052 + j1.117) 10^{-3} \frac{1}{\text{km}} \quad (6.41)$$

Mit Einbezug der Länge erhalten wir

$$\underline{\gamma}l = \alpha l + j\beta l = 0.0104 + j0.2234 \quad (6.42)$$

Bei der Wellenimpedanz vernachlässigen wir den Imaginärteil und erhalten

$$Z_W = 298.5 \, \Omega \quad (6.43)$$

Die Wirkleistung, die von der Last am Leitungsende aufgenommen wird beträgt

$$\frac{U_2^2}{Z_W} = \frac{(420 \text{ kV})^2}{298.5 \, \Omega} = 591 \text{ MW} \quad (6.44)$$

In diesem Fall beträgt der Phasenstrom

$$I_2 = \frac{U_2}{\sqrt{3} \cdot Z_W} = \frac{420 \text{ kV}}{\sqrt{3} \cdot 298.5 \, \Omega} = 812.4 \text{ A} \quad (6.45)$$

Die Verluste können mit

$$\Delta P = P_1 - P_2 \approx 3 \cdot R' l \cdot I_2^2 = 3 \cdot 0.031 \cdot 200 \cdot 812.4^2 = 12.3 \text{ MW} \quad (6.46)$$

angenähert werden. Die Leistungsaufnahme der Leitung ergibt sich damit zu $P_1 \approx 591 + 12.3 = 603.3 \text{ MW}$. Der Effekt der verteilten Leitungskapazität wird dabei vernachlässigt. Trotzdem deckt sich diese Schätzung gut mit der genaueren Rechnung:

$$P_1 = P_2 e^{2\alpha l} = 603.6 \text{ MW} \quad (6.47)$$

Der Wirkungsgrad beträgt somit $e^{-2\alpha l} = 0.979$ oder 97.9%. *Der Wirkungsgrad der Energieübertragung über eine Freileitung ist folglich sehr hoch!*

6.7 Spannungs-Leistungs-Charakteristik einer Hochspannungsleitung

Wird am Ende einer Hochspannungsleitung zu viel Leistung entnommen, kann es zu einem hohen Spannungsabfall entlang der Leitung kommen. Dies führt unter Umständen zu Stabilitätsproblemen. Deshalb ist es wichtig, den Zusammenhang zwischen abgegebener Leistung und Spannung einer Leitung zu kennen.

Wir wollen diesen Zusammenhang anhand einer 300 km langen, verlustlosen Freileitung mit $\beta = 0.0013 \text{ rad/km}$ diskutieren. Die Spannung am

Leitungsanfang beträgt konstant 1.0 p.u., am Leitungsende wird die Leistung $P_2 + jQ_2$ entnommen. Der Strom am Leitungsende kann aus diesen Angaben berechnet werden:

$$\underline{I}_2 = \frac{P_2 - jQ_2}{\underline{U}_2^*} \quad (6.48)$$

Setzen wir nun die Gleichung (6.48) in die Leitungsgleichung (5.107a) mit $x = 0$ ein, so erhalten wir

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos(\beta l) + jZ_W \underline{I}_2 \sin(\beta l) = \underline{U}_2 \cos(\beta l) + jZ_W \frac{P_2 - jQ_2}{\underline{U}_2^*} \sin(\beta l) \quad (6.49)$$

Die Gleichung (6.49) kann nun nach \underline{U}_2 aufgelöst werden:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1 - jZ_W \frac{P_2 - jQ_2}{\underline{U}_2^*} \sin(\beta l)}{\cos(\beta l)} \quad (6.50)$$

Betrachten wir diese Gleichung nun etwas näher. Die Spannung am Leitungsende \underline{U}_2 kommt darin zweimal vor: einmal auf der linken Seite, ein zweites Mal in konjugiert komplexer Form auf der rechten Seite. Würde auf der rechten Seite anstatt \underline{U}_2^* einfach \underline{U}_2 vorkommen, so könnten beide Seiten damit multipliziert werden. Das Ergebnis wäre eine quadratische Gleichung für \underline{U}_2 . Da dies aber nicht der Fall ist, kann keine explizite Gleichung für \underline{U}_2 gefunden werden. \underline{U}_2 kann deshalb nur *iterativ* berechnet werden: Man beginnt mit einem Startwert (üblicherweise 1 p.u. reell) für \underline{U}_2^* und berechnet damit die rechte Seite von (6.50). Das konjugiert komplexe Resultat für \underline{U}_2 setzt man wieder in die rechte Seite der Gleichung ein und berechnet \underline{U}_2 neu. Man wiederholt diese Iteration so oft, bis sich das Ergebnis nur noch minimal ändert, d.h. das Ergebnis *konvergiert* ist.

Bild 6.8 zeigt die Spannung am Leitungsende als Funktion der am Leitungsende entnommenen Wirkleistung für verschiedene Belastungsfälle. Wegen ihrer Form wird diese Darstellung auch als *Nasenkurve* (*nose curve*) bezeichnet.

Aus Abbildung 6.8 ist klar zu erkennen, dass die Übertragung je nach Leistungsfaktor ($\cos \varphi$) begrenzt ist, d.h. es gibt eine *maximal übertragbare Wirkleistung*.

Weiters ist aus Bild 6.8 ersichtlich, dass der Leistungsfaktor einen signifikanten Einfluss auf die Spannung am Leitungsende und die maximal übertragbare Leistung hat. Die maximal übertragbare Wirkleistung und die Spannung am Leitungsende sind bei induktiver Last tiefer. Bei kapazitiver Last wird das Spannungsprofil im oberen Bereich der Kurve in Bild 6.8 flacher und die maximal übertragbare Wirkleistung grösser. Das bedeutet, dass die Spannung am Leitungsende durch zusätzliche Kapazitäten in der Leitung (= Parallelkompensation) reguliert werden kann.

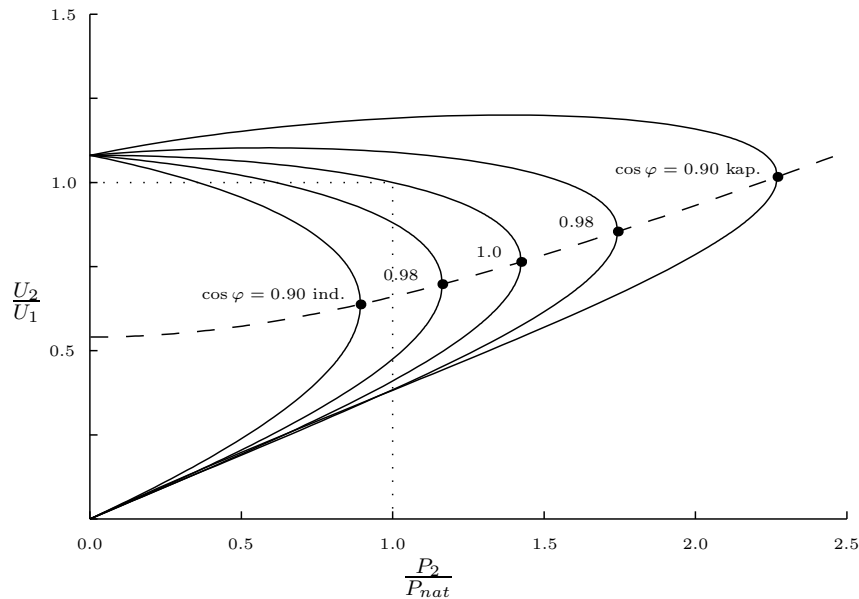


Abbildung 6.8. Spannung am Leitungsende als Funktion der entnommenen Wirkleistung für verschiedene Belastungsfälle.

Bild 6.8 zeigt auch, dass ein bestimmter Wirkleistungswert unterhalb der maximal übertragbaren Wirkleistung theoretisch bei *zwei verschiedenen Spannungswerten* übertragen werden kann. Normalerweise wird dabei der höhere Wert gewählt, mit Spannungswerten um 1,0 p.u. Bei kleinerem Spannungswert müsste, damit immer noch die gleiche Wirkleistung über die Leitung übertragen werden kann, der Strom grösser sein. Dadurch würde aber auch die Verlustleistung in der Leitung zunehmen und somit die Leitung näher an die thermische Grenze gelangen (oder darüber). Der Betrieb der Leitung bei den kleineren Spannungswerten (in Abbildung 6.8 unter der gestrichelten Linie) kann zu Instabilitäten in der Übertragung führen.

6.8 Wirkleistung als Funktion der Verdrehung der Spannungszeiger

Nun untersuchen wir einen weiteren wichtigen Zusammenhang, nämlich den zwischen übertragener Wirkleistung und der Winkeldifferenz der Spannungen am Leitungsanfang und -ende.

Dafür denken wir uns die Amplituden der Spannungen an den Leitungsenden als fixiert. Die Zeiger mit konstanter Amplitude bleiben aber gegeneinander verdrehbar, d.h. die Winkel sind variabel. Wir wollen nun das Verhalten der übertragenen Wirkleistung in Abhängigkeit der Winkeldifferenz diskutieren.

Vereinfachend wird die Leitung als rein induktive Serienimpedanz $jX_L = j\omega L$ angenommen. Die Spannungen am Leitungsanfang und -ende können in polarer Darstellung geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= U_1 e^{j\theta_1} \\ \underline{U}_2 &= U_2 e^{j\theta_2}\end{aligned}$$

Da die Leitung als verlustlos angenommen wurde, ist die Wirkleistung an beiden Enden gleich:

$$P_1 = P_2 = \Re \{ \underline{U}_1 I_1^* \} \quad (6.52)$$

Der Strom und sein konjugiert komplexer Wert berechnen sich zu

$$I_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{jX_L} = \frac{U_1 e^{j\theta_1} - U_2 e^{j\theta_2}}{jX_L} \quad (6.53a)$$

$$I_1^* = \frac{U_1 e^{-j\theta_1} - U_2 e^{-j\theta_2}}{-jX_L} = \frac{j}{X_L} (U_1 e^{-j\theta_1} - U_2 e^{-j\theta_2}) \quad (6.53b)$$

Eine der Spannungen kann in eine vorgegebene Lage gebracht werden. Wir tun dies, in dem wir den Winkel der Spannung am Leitungsende definieren: $\theta_2 = 0$. Mit diesen Beziehungen kann die übertragene Wirkleistung berechnet werden:

$$\begin{aligned}P_1 &= \Re \left\{ U_1 e^{j\theta_1} \frac{j}{X_L} (U_1 e^{-j\theta_1} - U_2) \right\} \\ &= \Re \left\{ jU_1^2 \frac{1}{X_L} - jU_1 U_2 \frac{1}{X_L} e^{j\theta_1} \right\} \\ &= \Re \left\{ jU_1^2 \frac{1}{X_L} - jU_1 U_2 \frac{1}{X_L} \cos \theta_1 + U_1 U_2 \frac{1}{X_L} \sin \theta_1 \right\} \\ &= U_1 U_2 \frac{1}{X_L} \sin \theta_1 = U_1 U_2 \frac{1}{X_L} \sin \delta\end{aligned} \quad (6.54)$$

$\delta = \theta_1 - \theta_2$ ist dabei die Winkeldifferenz zwischen der Spannung am Leitungsanfang und -ende und wird als *Übertragungswinkel (transmission angle)* bezeichnet. Abbildung 6.9 stellt die Verhältnisse aus Gleichung (6.54) dar. Im oberen Bild ist die Wirkleistung als Funktion des Übertragungswinkels aufgetragen, im unteren Diagramm ist die Spannung in der Mitte der Leitung (U_m) über dem Wirkleistungsfluss aufgetragen.

Wird nun der Übertragungswinkel δ von Null an erhöht, so steigt die übertragene Wirkleistung, was eine Verminderung der Spannung und eine Zunahme des Stromes bewirkt. Bis zu einem bestimmten Punkt dominiert der Anstieg des Stromes gegenüber dem Abfall der Spannung in der Leitungsmittle. Erreicht der Übertragungswinkel $\delta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, so ist die über die Leitung übertragene Leistung maximal. Für grössere Werte nimmt die Spannung in der Leitungsmittle stärker ab als der Strom zunimmt, die übertragene Leistung fällt ab. Hat man den Punkt der maximal übertragbaren

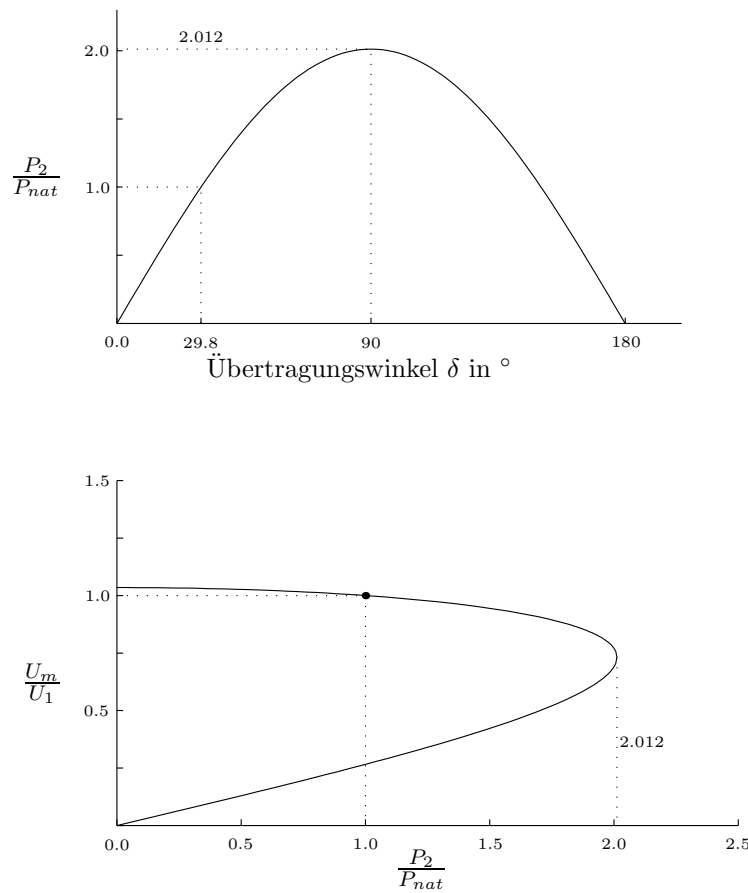


Abbildung 6.9. Oben: P - δ -Charakteristik. Unten: Spannung in der Leitungsmitte als Funktion der übertragenen Wirkleistung.

Wirkleistung einmal erreicht, so kann es vorkommen, dass die Spannung bei einer Reduktion der übertragenen Leistung am unteren Zweig der Kurve verläuft und deshalb absinkt, obwohl die Leistung reduziert wird. Alle Punkte am unteren Zweig der Spannungskurve in Abbildung 6.9 werden deshalb als *instabil* bezeichnet. Die maximal übertragbare Wirkleistung stellt die *statische Grenze (steady-state limit)* dar.

Betrachten wir beispielsweise die 400 km lange, verlustlose Hochspannungsleitung mit $\beta l = 0.52$ rad, die Bild 6.9 zugrunde liegt, so erhalten wir eine theoretisch maximal übertragbare Leistung von $2.012 \cdot P_{nat}$. In der Praxis belastet man aber eine Leitung aus Sicherheitsgründen niemals zu 100%, sondern begnügt sich mit ca. 70%, was für unsere Leitung $0.7 \cdot 2.012 \cdot P_{nat} = 1.4084 \cdot P_{nat}$ ergibt.

Die in diesem Kapitel betrachtete Analyse repräsentiert eine idealisierte Situation. Die Annahme, dass die Amplitude der Spannung am Leitungsende

und -anfang konstant ist, ist nicht immer gültig.

6.9 Belastungscharakteristik und -grenzen einer Hochspannungsleitung

Pionierarbeit auf diesem Gebiet leistete H. P. St. Clair [15], der aus praktischen Erfahrungen Kurven für die Belastungscharakteristiken für Hochspannungsleitungen zusammenstellte, die dann von einigen anderen Wissenschaftlern noch ausgedehnt wurden.

Hochspannungsleitungen können nicht beliebig stark belastet werden. Im wesentlichen unterliegt die Leistungsübertragung drei Restriktionen:

Thermische Grenze: Bei zu starker Erwärmung des Leitermaterials kann es zu einem erhöhten Durchhang kommen (siehe S. 76), bei Kabeln können zu hohe Temperaturen zur beschleunigten Alterung der Isolierung führen.

Spannungsabfall: Aus betrieblichen Gründen und aus Gründen der Versorgungsqualität sollte die Spannung an einem Netzknoten nicht zu stark von der Nennspannung abweichen (z.B. $\pm 10\%$).

Übertragungswinkel: Aus Stabilitätsgründen sollte ein gewisser Übertragungswinkel nicht überschritten sondern eine *stationäre Stabilitätsreserve* eingehalten werden. Diese ist definiert als

$$\text{stationäre Stabilitätsreserve} = \frac{P_{\max} - P_{\text{limit}}}{P_{\max}} \cdot 100\% \quad (6.55)$$

Abbildung 6.10 zeigt die Abhängigkeit der übertragenen Wirkleistung vom Übertragungswinkel. P_{limit} kennzeichnet jene Leistung, bis zu der eine Stabilitätsreserve von mindestens 30% eingehalten wird. Der maximal zulässige Übertragungswinkel liegt demnach im Bereich von etwa 40° .

Abbildung 6.11 zeigt die maximal übertragbare Wirkleistung in p.u. (Basis ist die natürliche Leistung P_{nat}) in Abhängigkeit der Leitungslänge. Dabei wird ein maximaler Spannungsabfall von 5% der Nennspannung und eine Stabilitätsreserve von 30% vorausgesetzt. Wie in dieser Abbildung angedeutet, ist die Belastung von Hochspannungsleitungen durch folgende *ungefähre* Grenzen bestimmt:

1. bis 80 km: thermische Grenze
2. 80 bis 320 km: Spannungsabfall
3. über 320 km: Stabilitätsgrenze

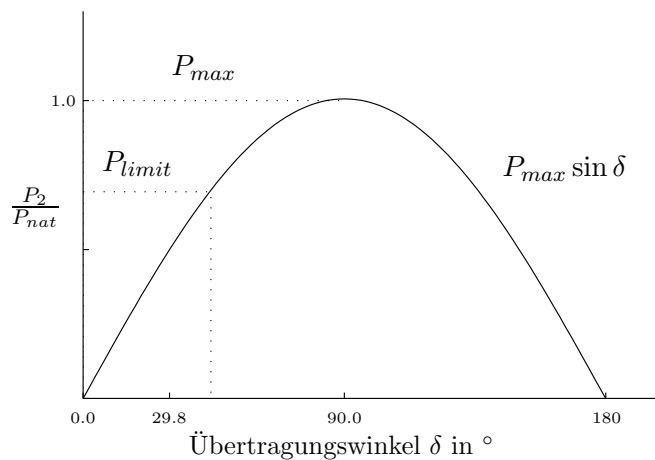


Abbildung 6.10. Übertragene Wirkleistung als Funktion des Übertragungswinkels.

Abbildung 6.11 zeigt auch, dass für Leitungslängen ab ca. 400 km die Belastung der Leitung kleiner als die natürliche Last sein muss. Wie bereits erwähnt wurde, kann der Leistungstransport über (lange) Leitungen durch Kompensation erhöht werden.

Die Grenzen der Energieübertragung sind hier vereinfacht dargestellt, sie dienen einer generellen Orientierung. In grossen, komplexen Energiesystemen müssen zur Bestimmung der Übertragungskapazität detaillierte Untersuchungen durchgeführt werden.

6.10 Drehstromkabel

Ein Drehstromkabel besteht aus drei Kernen (Phasen), wobei ein Kern in der Regel aus mehreren verdrehten Kupfer- oder Aluminiumdrähten besteht. Ein Hochspannungskabel hat grundsätzlich über den innen liegenden metallischen Leitern eine elektrische Isolierung mit einem entweder festen (z.B. Kunststoff) oder schichtweise fest/flüssigen (z.B. ölimprägniertes Papier⁵) oder gasförmigen (z.B. Schwefelhexafluorid SF_6) Dielektrikum. Die äussere Abgrenzung der Isolierschicht wird von einer oder mehreren metallischen Hüllen gebildet. Eine äussere nichtmetallische Hülle dient als passiver Korrosionsschutz für die metallische Hülle. Abbildung 6.12 zeigt ein Hochspannungskabel für den Betrieb mit Wechselstrom.

Die primären Leitungsdaten von Kabeln, genauer L' und C' , unterscheiden sich wesentlich von denjenigen der Freileitungen, obwohl die Leiterquer-

⁵Anstatt des ölimprägnierten Papiers wird heute teilweise auch ein unter Druck stehendes dünnflüssiges Öl als Isoliermedium verwendet, das die Hohlraumbildung (Ort der Teilentladungen) und somit die Alterung des Isolierstoffes vermindert.

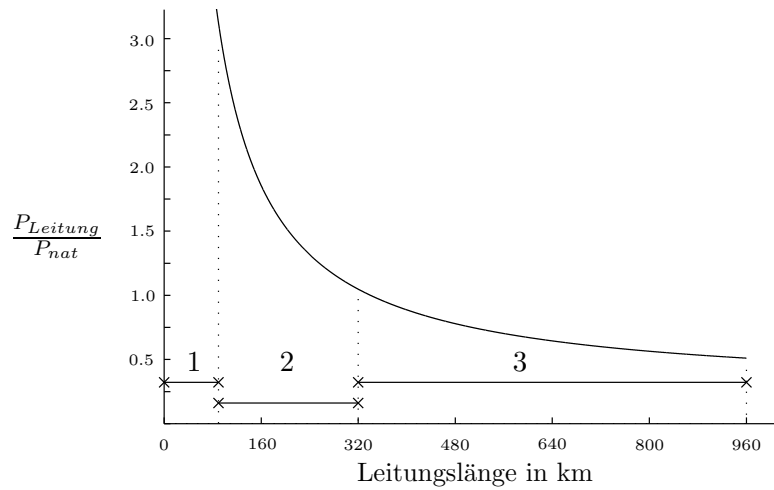


Abbildung 6.11. Übertragbare Wirkleistung als Funktion der Leitungslänge.

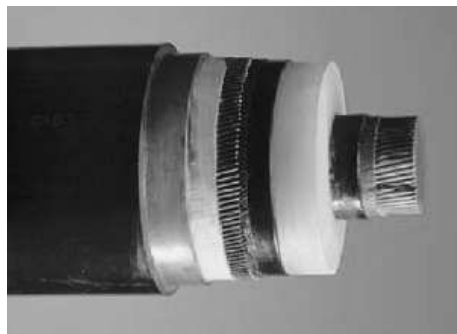


Abbildung 6.12. Beispiel eines Hochspannungskabels: Nennspannung 132 kV, Nennleistung 315 MVA, Kupferleiter mit Querschnitt 2000 mm², XLPE Isolierung (vernetztes Polyethylen), spez. Masse 40 kg/m. Quelle: ABB.

schnitte in der gleichen Grössenordnung liegen. Gründe dafür wurden im Abschnitt 5.2.5 (siehe S. 78) diskutiert.

Nun sollen anhand eines Beispiels die Betriebseigenschaften eines Kabels untersucht werden. Wir betrachten ein 420-kV-Kabel mit folgenden Daten:

$$\begin{aligned} R' &= 75 \text{ m}\Omega/\text{km} \\ L' &= 0.35 \text{ mH/km} \\ C' &= 0.2 \text{ }\mu\text{F/km} \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung des ohmschen Widerstandsbelages R' erhält man für den Wellenwiderstand

$$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 42 \text{ }\Omega \quad (6.56)$$

Die natürliche Leistung (siehe Abschnitt 6.2 ab S. 105) beträgt demnach

$$P_{nat} = \frac{U_{nenn}^2}{Z_W} = \frac{(420 \text{ kV})^2}{42 \text{ }\Omega} = 4.2 \text{ GW} \quad (6.57)$$

Um diese Leistung zu übertragen wäre ein Phasenstrom von $I = 5774 \text{ A}$ notwendig. Mit einem realistischen Leiterquerschnitt von 500 mm^2 käme man auf eine Stromdichte von 11.5 A/mm^2 und auf Verluste von 2.5 MW/km . Dies sind Werte, die technisch nicht zu realisieren sind und auch wirtschaftlich nicht vertreten werden können. Basierend auf der möglichen Wärmeabfuhr und der wirtschaftlichen Optimierung ist eine Nennleistung von rund 500 MVA zu vertreten. Der Nennstrom liegt dann in der Grössenordnung von 700 A .

Im Leerlauf des Kabels muss beachtet werden, dass wegen des niedrigen Wellenwiderstands in diesem Zustand beachtliche Ströme auftreten können. Die grosse Betriebskapazität führt bei längeren Kabeln zu grossen Ladeleistungen. Der Leerlaufstrom für Nennspannung ist gegeben durch

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z_W} \tanh(\underline{\gamma} l) \quad (6.58)$$

Die Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma}$ berechnet sich zu

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L') j\omega C'} = 0.00085 + j0.00276 \text{ rad/km} \quad (6.59)$$

Der Phasenbelag des Kabels ist etwa fünfmal so gross wie der einer typischen Freileitung gleicher Nennspannung. Der Wellenwiderstand dagegen ist nur ungefähr $1/10$ des Wellenwiderstands einer vergleichbaren Freileitung. Die Ladeleistung eines Kabels kann hohe Ströme zur Folge haben. Wird ein Wert von 700 A als Grenze der Strombelastbarkeit angenommen, so darf das leerlaufende Kabel (ohne Kompensation) nicht viel länger als ca. 50 km sein.

7

Symmetrische Komponenten in Dreiphasensystemen

In diesem Kapitel werden Unsymmetrien in Dreiphasensystemen, die z.B. durch Erd- und Kurzschlüsse entstehen, beschrieben. Zu ihrer einfacheren mathematischen Behandlung wird das Verfahren der MG0-Transformation erklärt. Am Schluss wird noch die Behandlung des Sternpunkts näher untersucht.

7.1 Unsymmetrische Betriebszustände

Unsymmetrische Betriebszustände werden durch Fehler, unsymmetrische Belastungen oder durch nicht ideal verdrehte und damit unsymmetrische Leitungen hervorgerufen. Unter Fehlern versteht man unerwünschte Änderungen des Spannungs-, Isolations- oder Schaltzustandes des Netzes. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen *Quer- und Längsfehlern*.

Ein Querfehler liegt vor, wenn „quer“ zu den Phasen und/oder gegen Erde unerwünschte leitende Verbindungen entstehen. Die möglichen Querfehler in Dreiphasensystemen sind:

- Erdschlüsse
 - einfach (ein Leiter gegen Erde)
 - doppelt (zwei Leiter an unterschiedlichen Orten gegen Erde)
 - dreifach (drei Leiter an unterschiedlichen Orten gegen Erde)
- Zweipoliger Kurzschluss
 - ohne Erdberührung
 - mit Erdberührung
- Dreipoliger Kurzschluss
 - ohne Erdberührung
 - mit Erdberührung

Eine besondere Fehlerart ist der Doppel- oder Dreifacherdschluss, bestehend aus zwei oder drei räumlich getrennten, einfachen Erdschlüssen. Kurzschlüsse zählen wegen der hohen mechanischen und thermischen Beanspruchung

von Anlagen und Betriebsmitteln durch Ströme, die ein Vielfaches der Nennströme betragen können, zu den gefährlichsten Fehlerarten in elektrischen Netzen! Sie können jedoch nicht nur den Anlagen und Betriebsmitteln grossen Schaden zufügen, sondern auch die Personensicherheit ist nicht mehr gewährleistet.

Unter Längsfehlern versteht man Fehler „längs“ der Leiter, also unerwünschte Unterbrechungen oder Verbindungen des Stromkreises. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn ein Leiterseil reisst oder ein Schalter nicht wie gewünscht alle drei Phasen unterbricht. Mögliche Längsfehler in Dreiphasensystemen sind:

- Einpolige Unterbrechung/Verbindung
- Zweipolige Unterbrechung/Verbindung
- Dreipolige Unterbrechung/Verbindung

Auch durch Längsfehler können unsymmetrische Betriebsbedingungen entstehen die mitunter eine Gefahr für Betriebsmittel darstellen können. Beispielsweise sind Dreiphasen-Asynchronmaschinen im Zweiphasenbetrieb, also nach Ausfall einer Phase, einer starken thermischen Beanspruchung ausgesetzt die zur Zerstörung der Maschine führen kann.

Während bei dreipoligen Kurzschlüssen/Unterbrechungen die symmetrischen Verhältnisse erhalten bleiben, stellen alle anderen Fehler unsymmetrische Belastungen dar. Eine mögliche Technik zur rechnerischen Behandlung unsymmetrischer Zustände in Mehrphasensystemen stellt die Zerlegung in symmetrische Komponenten dar - die Transformation ins Mit-, Gegen- und Nullsystem (MG0-System). Ebenso wie Kurz- und Erdschlüsse können damit auch andere unsymmetrische Betriebszustände analysiert werden.

7.2 MG0-Transformation

Ein Mehrphasensystem mit linearem Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen kann allgemein durch Systemmatrizen, z.B. die Admittanz- und Impedanzmatrizen $\underline{\mathbf{Y}}$ und $\underline{\mathbf{Z}}$ beschrieben werden. Die Spannungen und Ströme an einer Komponente, z.B. einem Verbraucher, ergeben sich als lineare Funktion aus den gegebenen Grössen, z.B. den drei Phasenspannungen des speisenden Generators. Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen.

Ein dreiphasiger Generator speist einen in Dreieck geschalteten Verbraucher. Die Ströme lassen sich komplex, also nach Betrag und Phase, mit Hilfe der Admittanzmatrix aus den ebenfalls komplexen Generatorspannungen berechnen. Allgemein gilt für lineare Netzwerke

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{E}} \quad (7.1)$$

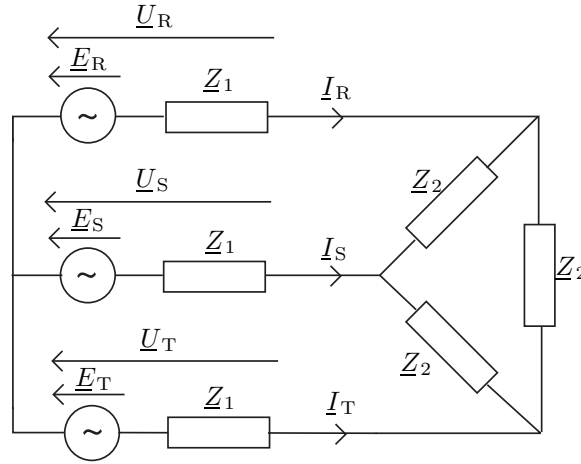


Abbildung 7.1. Dreiphasensystem.

wobei $\underline{\mathbf{Y}}$ die (komplexe) Admittanzmatrix des Netzwerkes darstellt, $\underline{\mathbf{I}}$ und $\underline{\mathbf{E}}$ beinhalten die Ströme und Generatorspannungen der drei Phasen R, S und T.

Für das in Abbildung 7.1 gezeigte System können die Phasenströme anhand der Phasenspannungen folgendermassen berechnet werden:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R - \underline{U}_S}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_R - \underline{U}_T}{\underline{Z}_2} \quad (7.2a)$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S - \underline{U}_T}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_S - \underline{U}_R}{\underline{Z}_2} \quad (7.2b)$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_T - \underline{U}_R}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_T - \underline{U}_S}{\underline{Z}_2} \quad (7.2c)$$

Werden in diesen Gleichungen die Phasenspannungen durch die Quellenspannungen und die Phasenströme ausgedrückt

$$\underline{U}_R = \underline{E}_R - \underline{Z}_1 \underline{I}_R \quad (7.3a)$$

$$\underline{U}_S = \underline{E}_S - \underline{Z}_1 \underline{I}_S \quad (7.3b)$$

$$\underline{U}_T = \underline{E}_T - \underline{Z}_1 \underline{I}_T \quad (7.3c)$$

und so kombiniert dass für jeden Phasenstrom eine Gleichung in Funktion der Quellenspannungen resultiert, lässt sich dieses System wie folgt darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{I}}} = \underbrace{\frac{1}{3\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{Y}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{E}}} \quad (7.4)$$

Im allgemeinen Fall können die Admittanzmatrizen der Komponenten von dreiphasigen symmetrischen Energieversorgungssystemen als *zyklisch*

symmetrisch angenommen werden. Diese Annahme ist die entscheidende Voraussetzung für das Verfahren der MG0-Transformation.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\alpha} & \underline{\beta} & \underline{\gamma} \\ \underline{\gamma} & \underline{\alpha} & \underline{\beta} \\ \underline{\beta} & \underline{\gamma} & \underline{\alpha} \end{pmatrix}}_{\text{zykl. symmetr.}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Unübersichtlich werden Mehrphasensysteme vor allem dann, wenn die Systemmatrizen voll besetzt sind, d.h. jede Ausgangsgrösse von jedem Eingang beeinflusst wird. Dies ist bei realen Netzen nicht der Fall, die Systemmatrizen sind sehr schwach besetzt.

Nur wenn das Netz vollständig symmetrisch aufgebaut ist, kann es durch ein einphasiges Ersatzschaltbild beschrieben werden. In einem Fehlerfall, wo das System unsymmetrisch wird, ist dies nicht mehr möglich. Selbstverständlich können die Auswirkungen einer beliebigen Unsymmetrie, z.B. eines einpoligen Erdschlusses auf einer Leitung, mit den Verfahren der Netzwerkanalyse durch Aufstellen und Lösen der Gleichungssysteme im dreiphasigen Netz vollständig berechnet werden. Die Zusammenhänge zwischen den auslösenden Ereignissen und den Ergebnissen anhand von Zahlenwerten allein sind jedoch schwer nachvollziehbar. Mit der MG0-Transformation wurde ein Verfahren entwickelt, das eine systematische Analyse von unsymmetrischen Betriebssituationen in dreiphasigen Netzen ermöglicht.

Die MG0-Transformation erlaubt es, ein dreiphasiges Drehstromnetz in drei voneinander unabhängige einpolige Systeme, nämlich das Mit-, Gegen- und Nullsystem (MG0) zu zerlegen. Mathematisch betrachtet ist die Grundidee des Verfahrens die Transformation der realen Situation, die nach der gebräuchlichen Bezeichnung der drei Leiter RST-System genannt wird, in einen *Bildbereich*, das MG0-System. In diesem herrschen, da nur noch einphasige Systeme vorkommen, übersichtlichere Verhältnisse, so dass das Problem leichter gelöst werden kann. Anschliessend werden die Ergebnisse wieder in das RST-System zurücktransformiert.

Die gewünschte Vereinfachung im Bildbereich gelingt mit Hilfe der Eigenvektoren der Admittanzmatrix. Ein Vektor \mathbf{x} heisst Eigenvektor einer Matrix \mathbf{A} , wenn gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \quad (7.6)$$

mit einem skalaren Faktor, dem zum Eigenvektor gehörenden Eigenwert λ . Der Vektor \mathbf{x} ändert durch Multiplikation mit der Matrix also seine Richtung nicht, sondern wird nur um den Faktor λ gestreckt. Eine weitere Eigenschaft der Eigenvektoren ist, dass die Matrix \mathbf{A} sich mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T} , zusammengesetzt aus den Eigenvektoren von \mathbf{A} , mit

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (7.7)$$

diagonalisieren lässt. Diese Eigenschaft wird bei der MG0-Transformation ausgenutzt.

Auch die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ eines dreiphasigen Netzes hat Eigenvektoren, d.h. auch diese Matrix lässt sich diagonalisieren. Sobald eine Admittanzmatrix diagonal ist, bedeutet dies, dass jede Zeile von (7.1) unabhängig von den anderen ist, es entstehen also von einander entkoppelte, einphasige Systeme.

Nach den Gesetzen der linearen Algebra werden im allgemeinen Fall der zyklisch symmetrischen Matrix in Gleichung (7.5) die in Tabelle 7.1 dargestellten Eigenwerte und -vektoren gefunden, wobei die Konstante \underline{a} definiert ist als

$$\underline{a} = e^{j \cdot 120^\circ} = \frac{-1 + j \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (7.8a)$$

$$\text{bzw. } \underline{a}^2 = e^{j \cdot 240^\circ} = \frac{-1 - j \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (7.8b)$$

Tabelle 7.1. Eigenvektoren und -werte der Systemmatrix.

Symmetrische Komponenten	Eigenvektoren	Eigenwerte
Mitsystem	$\underline{\mathbf{x}}_M = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a} \end{pmatrix}$	$\underline{\lambda}_M = \underline{\alpha} + \underline{\beta} \cdot \underline{a}^2 + \underline{\gamma} \cdot \underline{a}$
Gegensystem	$\underline{\mathbf{x}}_G = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{a} \\ \underline{a}^2 \end{pmatrix}$	$\underline{\lambda}_G = \underline{\alpha} + \underline{\beta} \cdot \underline{a} + \underline{\gamma} \cdot \underline{a}^2$
Nullsystem	$\underline{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\underline{\lambda}_0 = \underline{\alpha} + \underline{\beta} + \underline{\gamma}$

Diese komplexe Konstante wird beim Rechnen in Drehstromsystemen häufig verwendet. Sie hat den Betrag

$$|\underline{a}| = |e^{j \cdot 120^\circ}| = 1 \quad (7.9)$$

und eine Phase von $+120^\circ$. Die in den Eigenvektoren vorkommenden Elemente entsprechen also drei gleich langen, je um 120° verdrehten Zeigern, die sich vektoriell addiert zu Null ergänzen.

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0 \quad (7.10)$$

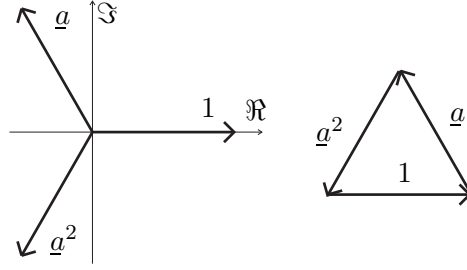


Abbildung 7.2. Eigenvektoren einer zyklisch symmetrischen Matrix.

Diese beim Rechnen mit symmetrischen Komponenten besonders wichtige Tatsache wird in Abbildung 7.2 graphisch veranschaulicht.

Entscheidend ist ausserdem, dass die Eigenvektoren in Tabelle 7.1 (im Gegensatz zu den Eigenwerten) *nicht* von den einzelnen Elementen \underline{a} , $\underline{\beta}$ und $\underline{\gamma}$ der betrachteten Admittanzmatrix abhängen, sondern charakteristisch sind für alle zyklisch symmetrischen Matrizen. Dadurch eignen sie sich zum Rechnen in beliebigen Dreiphasensystemen.

Mit

$$\underline{\mathbf{T}} = (\underline{\mathbf{x}}_{\text{M}} \quad \underline{\mathbf{x}}_{\text{G}} \quad \underline{\mathbf{x}}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

ergibt sich die diagonale Admittanzmatrix

$$\underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda}_{\text{M}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\lambda}_{\text{G}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\lambda}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{\text{M}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_{\text{G}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Daraus und aus Tabelle 7.1 ist ersichtlich, dass für $\underline{\beta} = \underline{\gamma}$ die Mit- und die Gegenadmittanz gleich sind.

Die zugehörigen Spannungsquellen- und Stromvektoren $\underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}}$, bzw. $\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}}$ des MG0-Systems können folgendermassen hergeleitet werden

$$\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}} \underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}} \quad (7.13)$$

$$\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}} \quad (7.14)$$

$$(\underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}}) = \underline{\mathbf{Y}} (\underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}}) \quad (7.15)$$

Daraus und aus (7.1) folgen die Beziehungen

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_{\text{R}} \\ \underline{I}_{\text{S}} \\ \underline{I}_{\text{T}} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \underline{I}_{\text{M}} \\ \underline{I}_{\text{G}} \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} \quad (7.16)$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{\text{R}} \\ \underline{E}_{\text{S}} \\ \underline{E}_{\text{T}} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \underline{E}_{\text{M}} \\ \underline{E}_{\text{G}} \\ \underline{E}_0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}} \quad (7.17)$$

Mit diesen Beziehungen und den Gleichungen (7.3a), (7.3b) und (7.3c) kann ausserdem gezeigt werden, dass

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \underline{U}_M \\ \underline{U}_G \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}} \quad (7.18)$$

Die Matrix $\underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}}$ ist nur in der Hauptdiagonale besetzt! Es gibt keine Koppelimpedanzen in den Nebendiagonalen, d.h. die drei Impedanzen des MG0-Systems sind vollständig voneinander entkoppelt. Deshalb lässt es sich im MG0-System bedeutend einfacher rechnen. Die Admittanzmatrizen im RST-System und die entsprechenden im MG0-System enthalten die gleiche Information.

Damit sind die prinzipiellen Schritte zur Analyse von Drehstromnetzen mit symmetrischen Komponenten bereits erklärt. Die Transformationen $\text{RST} \rightarrow \text{MG0}$ und $\text{MG0} \rightarrow \text{RST}$ sind lineare Abbildungen, wobei die Rücktransformationsmatrix $\underline{\mathbf{T}}$, die auch als Entsymmetrierungsmatrix bezeichnet wird, direkt spaltenweise aus den Eigenvektoren zusammengesetzt wird. Die Eigenvektoren könnten jeweils mit einem beliebigen skalaren Faktor versehen werden, ohne ihre charakteristische Eigenschaft zu verlieren. Man wählt sie aber so wie gezeigt, weil dann alle Elemente von $\underline{\mathbf{T}}$ den Betrag 1 haben und dadurch ein symmetrisches Dreiphasensystem einem Mitsystem gleicher Amplitude entspricht.

Die Symmetrierungsmatrix $\underline{\mathbf{S}}$, die zur Umrechnung von $\text{RST} \rightarrow \text{MG0}$ gebraucht wird, ergibt sich durch Inversion von $\underline{\mathbf{T}}$. Mit der oben genannten Festlegung der Eigenvektoren auf Einträge vom Betrag 1 ergeben sich in der Matrix $\underline{\mathbf{S}}$ nur Einträge vom Betrag $\frac{1}{3}$.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{T}}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Der Ablauf der MG0-Transformation und der entsprechenden Rücktransformation lässt sich in einer Gleichung zusammenfassen. Dazu wird

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}} \underline{\mathbf{S}} \quad (7.20)$$

in (7.1) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{\alpha} & \underline{\beta} & \underline{\gamma} \\ \underline{\gamma} & \underline{\alpha} & \underline{\beta} \\ \underline{\beta} & \underline{\gamma} & \underline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} = \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{3. Schritt: Rücktransformation}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Y}_M & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_G & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_0 \end{pmatrix}}_{\text{2. Schritt: Lösung}} \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{1. Schritt: Transformation}} \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Das Ausmultiplizieren dieser Gleichung von rechts nach links entspricht den Schritten

1. Symmetrierung ($\text{RST} \rightarrow \text{MG0}$) durch Multiplikation mit $\underline{\mathbf{S}}$
2. Rechnen im MG0-System durch Anwenden der entkoppelten Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}}$
3. Entsymmetrierung ($\text{MG0} \rightarrow \text{RST}$) durch Multiplikation mit $\underline{\mathbf{T}}$

Als Übersicht seien hier noch einmal die Formeln gegeben, die für die MG0-Transformation benötigt werden.

RST	MG0
$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}}$	$\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{I}}$
$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}}$	$\underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{U}}$
$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}}$	$\underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{E}}$
$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}} \underline{\mathbf{S}}$	$\underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{T}}$
$\underline{\mathbf{Y}}_E = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Y}}_E^{\text{MG0}} \underline{\mathbf{S}}$	$\underline{\mathbf{Y}}_E^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{Y}}_E \underline{\mathbf{T}}$
$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{E}}$	$\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} = \underline{\mathbf{Y}}^{\text{MG0}} \underline{\mathbf{E}}^{\text{MG0}}$

(7.22)

Nun können wir also ein Dreiphasensystem mathematisch ins MG0-System transformieren. Alle Variablen mit Index _M gehören zum Mitsystem, diejenigen mit Index _G zum Gegensystem und die mit Index ₀ zum Nullsystem.

Betrachten wir zur anschaulicheren Bedeutung des Mit-, Gegen- und Nullsystems die Berechnung der Phasenspannungen des RST-Systems aus den Phasenspannungen des MG0-Systems.

$$\underline{U}_R = \underline{U}_M + \underline{U}_G + \underline{U}_0 \quad (7.23a)$$

$$\underline{U}_S = \underline{a}^2 \underline{U}_M + \underline{a} \underline{U}_G + \underline{U}_0 \quad (7.23b)$$

$$\underline{U}_T = \underline{a} \underline{U}_M + \underline{a}^2 \underline{U}_G + \underline{U}_0 \quad (7.23c)$$

Mitsystem Die Phasenspannungen des RST-Systems im Mitsystem ergeben sich zu

$$\underline{U}_R^M = \underline{U}_M \quad (7.24a)$$

$$\underline{U}_S^M = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_M \quad (7.24b)$$

$$\underline{U}_T^M = \underline{a} \cdot \underline{U}_M \quad (7.24c)$$

Dies entspricht der Multiplikation des Eigenvektors \underline{x}_M mit der Spannung \underline{U}_M . Abbildung 7.3 zeigt eine graphische Darstellung obiger Beziehungen. Die Zeiger haben gleiche Länge und eine Phasenverschiebung von jeweils 120° .

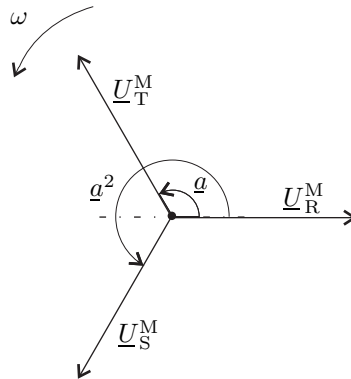


Abbildung 7.3. Spannungszeiger des Mitsystems.

In einem symmetrisch angeregten, dreiphasigen Netz wird man, symmetrischen Aufbau vorausgesetzt, überall nur symmetrische Spannungen und Ströme messen, d.h. gleiche Beträge und Phasenverschiebungen von 120° zwischen den Phasen wie dies auch in Abbildung 7.3 der Fall ist. Die alleinige Anregung des Mitsystems ist folglich der erwünschte Betriebszustand eines Drehstromsystems und kann durch eine einphasige Ersatzschaltungen berechnet werden. Dieses sogenannte Mitsystem beschreibt also den *Normalbetrieb*. Weil die Summe der drei um 120° gegeneinander verdrehten Stromzeiger stets Null ergibt, sind allfällige Sternpunktverbindungen immer stromlos. Es spielt hier keine Rolle, ob Sternpunkte geerdet bzw. miteinander verbunden sind oder nicht.

Gegensystem Die beiden anderen Eigenvektoren \underline{x}_G und \underline{x}_0 beschreiben *Abweichungen vom idealen Betrieb*. Die Phasenspannungen des RST-Systems im Gegensystem ergeben sich zu

$$\underline{U}_R^G = \underline{U}_G \quad (7.25a)$$

$$\underline{U}_S^G = \underline{a} \cdot \underline{U}_G \quad (7.25b)$$

$$\underline{U}_T^G = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_G \quad (7.25c)$$

Dieses Mal ist es die Multiplikation des Eigenvektors \underline{x}_G mit der Spannung des Gegensystems \underline{U}_G . Abbildung 7.4 zeigt die entsprechenden Zeiger. Es entsteht wiederum ein Dreiphasensystem, allerdings mit vertauschter Phasenfolge, d.h. umgekehrtem Drehsinn in allen Strömen und Spannungen gegenüber dem Mitsystem (jetzt R-T-S) bei gleicher Drehrichtung ω . Daher kommt auch der Name Gegensystem.

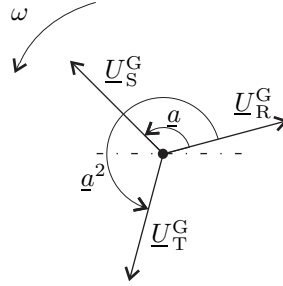


Abbildung 7.4. Spannungszeiger des Gegensystems.

Auch im Gegensystem sind alle Sternpunktverbindungen stromlos. Leitungen, Transformatoren und rein passive Verbraucher, die keinen eigenen Drehsinn haben, verhalten sich bzgl. Mit- und Gegensystem gleich. Die entsprechenden Impedanzen $\underline{Z}_M = \underline{Y}_M^{-1}$ und $\underline{Z}_G = \underline{Y}_G^{-1}$ sind daher identisch. Bei rotierenden Maschinen hängt das Verhalten dagegen sehr davon ab, ob das elektrische Drehfeld mit oder gegen die mechanische Drehrichtung läuft.

Nullsystem Die Phasenspannungen des RST-Systems ergeben sich im Nullsystem zu

$$\underline{U}_R^0 = \underline{U}_0 \quad (7.26a)$$

$$\underline{U}_S^0 = \underline{U}_0 \quad (7.26b)$$

$$\underline{U}_T^0 = \underline{U}_0 \quad (7.26c)$$

Die Phasenspannungen entsprechen also dem Eigenvektor \underline{x}_0 multipliziert mit der Spannung des Nullsystems. Abbildung 7.5 zeigt die konphasen Spannungszeiger des Nullsystems. Daraus ist ersichtlich, dass das Nullsystem ein dreifaches Einphasensystem mit betrags- und phasengleichen Spannungen und Strömen in allen drei Leitern ist.

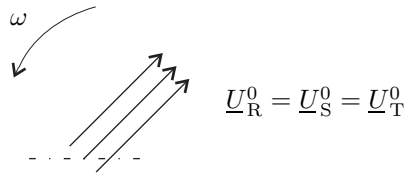


Abbildung 7.5. Spannungszeiger des Nullsystems.

Ist auch ein Mitsystem vorhanden, werden die Phasenspannungszeiger durch das Nullsystem ungleich lang. Nullströme können sich *nur über Sternpunktverbindungen* schliessen und sind immer Null, wenn keine solche Rückleitung existiert. Im Gegensatz zu Mit- und Gegensystem ist deshalb für die Verhältnisse im Nullsystem die Behandlung der Sternpunkte von entscheidender Bedeutung. Die Impedanzen $\underline{Z}_0 = \underline{Y}_0^{-1}$ von Leitungen und Transformatoren sind im Nullsystem generell grösser als im Mit- und Gegensystem.

Bei der MG0-Transformation muss immer klar unterschieden werden, ob die Komponenten im RST oder im MG0-System gemeint sind. Aus (7.23a) lässt sich schliessen, dass die entsprechenden Zeiger des Mit-, Gegen- und Nullsystems einfach vektoriell addiert werden können, um vom MG0-System auf das RST-System zu gelangen. Für die Systeme in den Abbildungen 7.3, 7.4 und 7.5 ist dies in Abbildung 7.6 gezeigt.

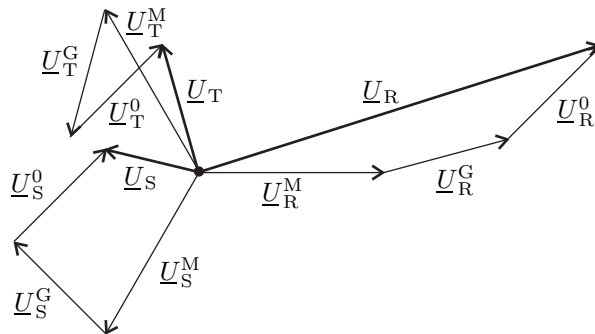


Abbildung 7.6. Übergang vom MG0-System ins RST-System.

Während im normalen Betrieb eines Drehstromsystems nur das Mitsystem aktiv ist und alle Spannungen und Ströme des Gegen- und Nullsystems Null sind, besteht ein unsymmetrischer Betrieb aus einer Überlagerung der drei Komponenten. Diese sind jetzt einfacher zu analysieren als im ursprünglichen RST-System, weil durch die Transformation auf Eigenvektoren eine Entkoppelung stattgefunden hat. Im symmetrisch aufgebauten Netz erzeugt z.B. nur die Nullspannung Nullströme und auch nichts anderes.

7.3 Leistungen im MG0-System

Besonders beachtet werden müssen die Leistungen im MG0-System. Allgemein berechnet sich die komplexe Leistung im Dreiphasensystem aus der Summe der drei Phasenleistungen zu

$$\underline{S} = \underline{U}_R \underline{I}_R^* + \underline{U}_S \underline{I}_S^* + \underline{U}_T \underline{I}_T^* = \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{I}}^* \quad (7.27)$$

Versuchen wir nun, die komplexe Leistung durch die symmetrischen Komponenten des Drehstromsystems auszudrücken. Für die Ströme und Spannungen im RST-System können wir die mit der Matrix $\underline{\mathbf{T}}$ multiplizierten Vektoren des MG0-Systems einsetzen:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}} \quad (7.28)$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} \quad (7.29)$$

Eingesetzt in Gleichung (7.27) erhalten wir für die gesamte komplexe Leistung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= (\underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}})^T \cdot (\underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}})^* = \\ &= (\underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}})^T \cdot \underbrace{\underline{\mathbf{T}}^T (\underline{\mathbf{T}})^*}_{3 \mathbf{E}} \cdot (\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}})^* \end{aligned} \quad (7.30)$$

Diese Gleichung können wir vereinfachen indem wir den mittleren Teil auflösen zu

$$\underline{\mathbf{T}}^T (\underline{\mathbf{T}})^* = \left(((\underline{\mathbf{T}})^*)^T \underline{\mathbf{T}} \right)^T = 3 (\underline{\mathbf{T}}^{-1} \underline{\mathbf{T}})^T = 3 \mathbf{E} \quad (7.31)$$

wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix darstellt. Gleichung (7.30) ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \underline{S} &= 3 \cdot (\underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}})^T \cdot (\underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}})^* = \\ &= 3 \cdot (\underline{U}_M \underline{I}_M^* + \underline{U}_G \underline{I}_G^* + \underline{U}_0 \underline{I}_0^*) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Aufgrund der Festlegung der Eigenvektoren bzw. der $\underline{\mathbf{T}}$ -Matrix liegt ein Faktor 3 zwischen den Berechnungen der Leistungen in RST- und MG0-System. Das symmetrische Dreiphasensystem transformiert sich in ein Mitsystem gleicher Amplitude, d.h. die Zeiger des MG0-Systems können einfach addiert werden, um auf die entsprechenden Werte im RST-System zu gelangen, wie dies in Abbildung 7.6 gemacht wurde. Deshalb wird die von uns verwendete Transformation auch *amplitudeninvariant* genannt. Diese setzt aber nur ein Drittel der Leistung des ursprünglich dreiphasigen Systems um. Allgemein ist die Umrechnung von Leistungen problemlos möglich, denn jedes Element des RST-Systems setzt genau die dreifache Leistung um wie sein Äquivalent im MG0-System.

Woher dieser Faktor 3 kommt, lässt sich auch erklären, wenn für jede Phase des RST-Systems die Leistung separat berechnet wird. In Abschnitt 7.2 haben wir gesehen, dass sich die Phasenspannungen im RST-System aus jeweils drei Spannungen im MG0-System zusammensetzen. Also zum Beispiel setzt sich \underline{U}_R aus \underline{U}_R^M , \underline{U}_R^G und \underline{U}_R^0 und \underline{I}_R aus \underline{I}_R^M , \underline{I}_R^G und \underline{I}_R^0 zusammen. Diese drei Spannungen und drei Ströme haben die gleiche Amplitude wie \underline{U}_M , bzw. \underline{I}_M . Berechnen wir nun mit Hilfe dieser Spannungen und Ströme die Leistung die in der R-Phase umgesetzt wird.

$$\underline{U}_R \underline{I}_R^* = \underline{U}_R^M \underline{I}_R^{*M} + \underline{U}_R^G \underline{I}_R^{*G} + \underline{U}_R^0 \underline{I}_R^{*0} \quad (7.33)$$

Da die Spannung \underline{U}_R^M und der zugehörige Strom \underline{I}_R^M durch die gleiche Winkeldrehung aus \underline{U}_M , bzw. \underline{I}_M entstanden sind, ergibt sich durch deren Multiplikation das gleiche wie aus $\underline{U}_M \underline{I}_M^*$. Dasselbe gilt für den zweiten und dritten Summand auf der rechten Seite von (7.33). Führen wir für die S- und T-Phase dieselbe Berechnung aus, sehen wir dass

$$\underline{U}_R \underline{I}_R^* + \underline{U}_S \underline{I}_S^* + \underline{U}_T \underline{I}_T^* = 3 \underline{U}_M \underline{I}_M^* + 3 \underline{U}_G \underline{I}_G^* + 3 \underline{U}_0 \underline{I}_0^* \quad (7.34)$$

Aus diesen Betrachtungen wird auch noch einmal deutlich, dass in jeder Phase im RST-System sowohl ein Mit-, Gegen- und Nullstrom fließt. Da sich diese jedoch nur durch Phasendrehungen unterscheiden, kann mit einem einzelnen Mit-, Gegen- und Nullsystem gerechnet werden.

Wir haben davon gesprochen, dass die angewendete MG0-Transformation amplitudeninvariant ist. Es gibt aber auch die leistungsinvariante MG0-Transformation. Dabei unterscheiden sich lediglich die Symmetrisierungs- und Entsymmetrisierungsmatrix von denjenigen in (7.19) um einen Faktor. Bei Leistungsinvarianz gilt

$$S = (\underline{U}_{M_L} \underline{I}_{M_L}^* + \underline{U}_{G_L} \underline{I}_{G_L}^* + \underline{U}_{0_L} \underline{I}_{0_L}^*) = \quad (7.35)$$

$$= (\underline{\mathbf{S}}_L \underline{\mathbf{U}})^T \cdot (\underline{\mathbf{S}}_L \underline{\mathbf{I}})^* \quad (7.36)$$

$$= 3 \cdot (\underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{U}})^T \cdot (\underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{I}})^* \quad (7.37)$$

Dabei ist $\underline{\mathbf{S}}_L$ die Symmetrisierungsmatrix bei der leistungsinvarianten Transformation und beträgt

$$\underline{\mathbf{S}}_L = \sqrt{3} \underline{\mathbf{S}} \quad (7.38)$$

und für die Entsymmetrisierungsmatrix gilt

$$\underline{\mathbf{T}}_L = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{T}} \quad (7.39)$$

Das heisst, die Symmetrisierungsmatrix der leistungsinvarianten Transformation entspricht derjenigen der amplitudeninvarianten Transformation multipliziert mit dem Faktor $\sqrt{3}$ und die Entsymmetrisierungsmatrix derjenigen

der amplitudeninvarianten Transformation multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Damit gilt

$$\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{L}}^{\text{MG0}} = \sqrt{3} \underline{\mathbf{U}}^{\text{MG0}} \quad (7.40)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{L}}^{\text{MG0}} = \sqrt{3} \underline{\mathbf{I}}^{\text{MG0}} \quad (7.41)$$

Für die Berechnung der Zeiger im RST-System aus denjenigen im MG0-System müssen die Amplituden der MG0-Zeiger zunächst mit $\frac{1}{\sqrt{3}}$ multipliziert werden und dann erst können sie addiert werden.

Im den folgenden Abschnitten wird die amplitudeninvariante Transformation verwendet.

7.4 MG0-Ersatzschaltbild

Bis jetzt haben wir kennengelernt, wie man die Spannungen und Ströme vom RST-System ins MG0-System und wieder zurück umwandeln kann und was es mit dem Mit-, Gegen- und Nullsystem auf sich hat. Doch wie sieht nun ein Netzwerk im MG0-System aus?

7.4.1 Elementares Versorgungssystem

Ausgangspunkt ist das Thevenin-Equivalent eines dreiphasigen Versorgungssystems in Abbildung 7.7. Dabei sind \underline{Z}_1 die Eigenimpedanzen des Drehstromsystems und \underline{Z}_2 die Koppelimpedanzen.

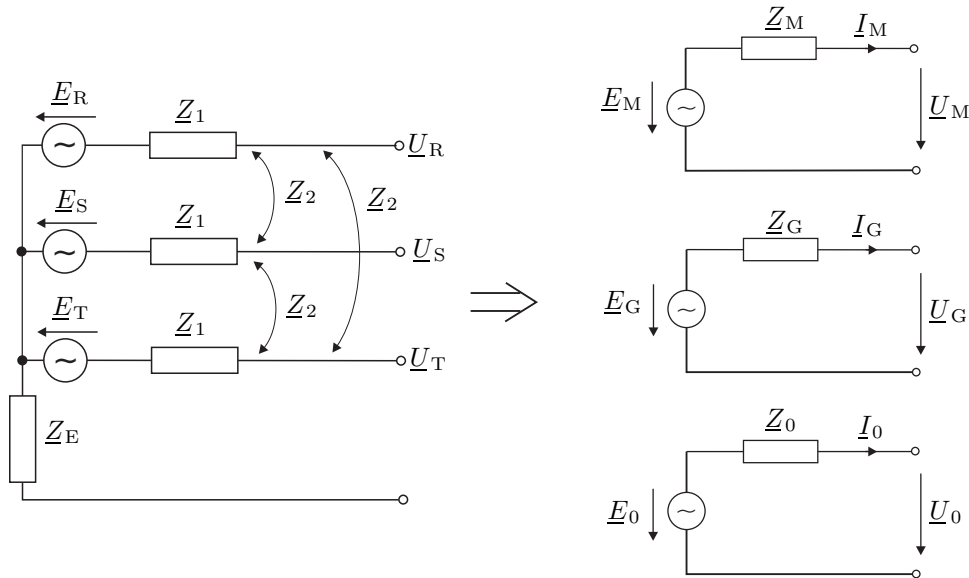


Abbildung 7.7. Thevenin-Equivalent eines Dreiphasensystems.

Für dieses Drehstromsystem ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_E & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_E & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_2 + \underline{Z}_E & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_E & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_2 + \underline{Z}_E & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_E & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Mit Hilfe von (7.22) kann dies nun ins MG0-System transformiert werden

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_M \\ \underline{E}_G \\ \underline{E}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_M & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_G & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_M \\ \underline{I}_G \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_M \\ \underline{U}_G \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

mit $\underline{Z}_M = \underline{Z}_G = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2 + 3\underline{Z}_E$. Werden die Koppelimpedanzen vernachlässigt, sind die Impedanzen des Mit- und Gegensystems also gleich gross wie die Eigenimpedanzen des symmetrischen Drehstromsystems. Ist zusätzlich noch die Erdungsimpedanz gleich Null, wird auch die Impedanz des Nullsystems gleich gross wie die Eigenimpedanzen.

Dieses RST-System mit zyklisch-symmetrischen Impedanzen kann also durch ein äquivalentes System aus drei entkoppelten Kreisen (Mit-, Gegen- und Nullsystem) dargestellt werden. Versuchen wir nun, diese Schaltung im MG0-System darzustellen. Für die Ersatzschaltbilder der einzelnen Komponenten gelten folgende Überlegungen:

Mitsystem Die Schaltung des Mitsystems entspricht dem einphasigen Ersatzschaltbild des symmetrischen Dreiphasensystems. Die Mitsystemkomponente der Generatorspannung, die bei einem symmetrischen Generator gleich der Spannung \underline{E}_R ist, speist das Netz. Alle passiven Elemente werden unter Beibehaltung der Schaltungstopologie mit ihren im Mitsystem wirksamen Impedanzen \underline{Z}_M eingetragen. Interessant ist, dass \underline{Z}_M unabhängig von der Sternpunktimpedanz \underline{Z}_E ist. Für die Impedanz im Mitsystem spielt es also keine Rolle, ob vorhandene Sternpunkte geerdet sind oder nicht. In Dreieck geschaltete Elemente müssen zunächst in Sternschaltungen umgerechnet werden. Im symmetrischen, dreiphasigen Netz haben alle Sternpunkte gleiches Potenzial, egal ob sie miteinander verbunden sind oder nicht. Im Ersatzschaltbild des Mitsystems muss dies dadurch erzwungen werden, dass *immer alle Sternpunkte kurzgeschlossen werden*.

Gegensystem Das Ersatzschaltbild des Gegensystems ist prinzipiell genauso aufgebaut wie das des Mitsystems. Allerdings ist die Gegensystemkomponente von symmetrischen Generatorspannungen Null, sodass meist keine Speisung in der Schaltung vorhanden ist. Im passiven Teil erscheinen alle Impedanzen \underline{Z}_G , die gleich \underline{Z}_M sind. Daraus folgt, dass eine Sternpunktterdung ebenfalls keinen Einfluss auf das Gegensystem hat. Auch im Ersatzschaltbild des Gegensystems müssen Dreieck-Stern-Umwandlungen durchgeführt und *alle Sternpunkte kurzgeschlossen werden*.

Nullsystem Das Nullsystem wird von der Nullkomponente der Generatorspannung gespeist, die bei symmetrischen Generatoren fehlt. Als Impedanzen sind die Nullimpedanzen \underline{Z}_0 der passiven Elemente zu berücksichtigen, die im allgemeinen von den Mit- und Gegenimpedanzen abweichen. Von grosser Bedeutung ist im Nullsystem die Behandlung der Sternpunkte. Wie bereits erwähnt können Nullströme *nur* über Sternpunktverbindungen fließen. Sternpunkte sind deshalb im Ersatzschaltbild des Nullsystems *dort und nur dort* zu verbinden, wo in der Realität entsprechende Verbindungen bestehen. Allfällige Impedanzen in den Sternpunktverbindungen müssen mit dem *Dreifachen des realen Wertes* eingetragen werden. Die Verdreifachung ist nötig, weil der reale Nulleiter vom Dreifachen des Nullstromes durchflossen wird und im Ersatzschaltbild der tatsächliche Spannungsabfall auftreten soll.

Abbildung 7.7 zeigt die resultierenden Ersatzschaltbilder des Mit-, Gegen- und Nullsystems. Häufig wird für die Darstellung eines Netzes das in Abbildung 7.8 gezeigte Schema verwendet. Damit wird sowohl das MG0-System wie auch die Situation im RST-System wiedergegeben.

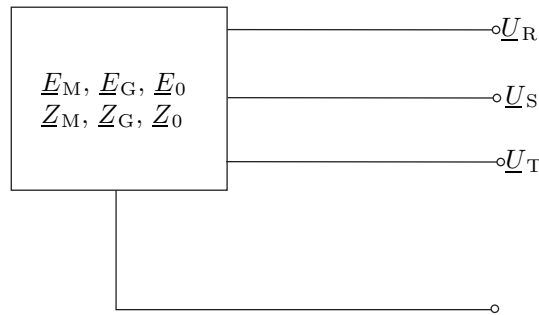


Abbildung 7.8. Schematische Darstellung eines Dreiphasensystems.

Wird das Drehstromsystem symmetrisch betrieben, gilt

$$\underline{E}_S = \underline{a}^2 \cdot \underline{E}_R \quad (7.44)$$

$$\underline{E}_T = \underline{a} \cdot \underline{E}_R \quad (7.45)$$

Daraus ergibt sich für die Generatorspannungen im MG0-System

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_M \\ \underline{E}_G \\ \underline{E}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{a}^2 \underline{E}_R \\ \underline{a} \underline{E}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

Das heisst also, dass die Generatorspannungen im Gegen- und im Nullsystem zu Null werden. In Abbildung 7.9 sind die resultierenden Ersatzschaltbilder gegeben.

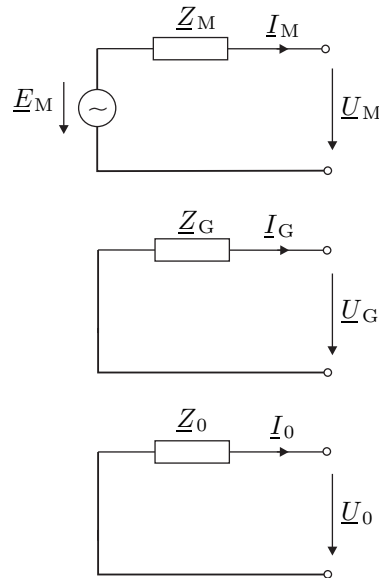


Abbildung 7.9. Thevenin-Equivalent eines symmetrischen Dreiphasensystems.

7.4.2 Sternpunktbetrachtungen

Es wurde bereits mehrmals darauf hingewiesen, dass die Behandlung der Sternpunkte wichtig ist. Bisher haben wir angenommen, dass der Generatorsternpunkt über den Widerstand \underline{Z}_E geerdet ist. Dies muss jedoch nicht immer der Fall sein. In Abbildung (7.10) ist ein Drehstromsystem gegeben bei dem der Generatorsternpunkt ungeerdet ist.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde bereits erwähnt, dass in einem solchen Fall kein Nullstrom fließen kann. Doch was bedeutet dies konkret? In Abbildung 7.10 ist das entsprechende MG0-System gegeben. Das Mit- und das Gegensystem bleiben unverändert. Beim Nullsystem wird jedoch dort, wo sich bei einem unsymmetrischen Drehstromnetz die Quelle des Nullsystems befinden würde, die Verbindung unterbrochen. Damit wird verhindert, dass dort ein Strom fließen kann. Genau genommen würde eigentlich die Nullimpedanz \underline{Z}_0 unendlich gross werden, was jedoch den gleichen Effekt hat wie die Unterbrechung der Leitung.

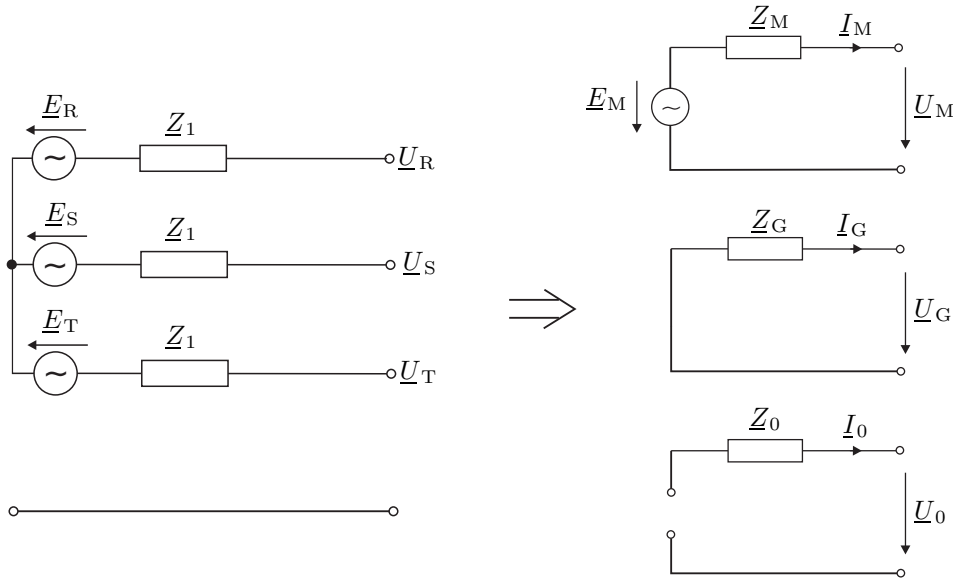


Abbildung 7.10. Symmetrisches Drehstromsystem mit ungeerdetem Generatorsternpunkt.

7.4.3 Sternlast

Ein weiterer Sternpunkt entsteht, wenn eine Sternlast vom Drehstromnetz gespeiesen wird, wie dies in Abbildung 7.11 gezeigt ist. Dies kann irgendein symmetrischer Verbraucher sein.

Das resultierende MG0-System ist auf der rechten Seite von Abbildung 7.11 gegeben. Die Impedanzen \underline{Z}_3 der Sternlast bewirken, dass im MG0-System zusätzliche Impedanzen $\underline{Z}_{M,3}$, $\underline{Z}_{G,3}$, $\underline{Z}_{0,3}$ parallel zu den bereits vorhandenen Impedanzen $\underline{Z}_{M,1} = \underline{Z}_{G,1} = \underline{Z}_{0,1} = \underline{Z}_1$ erscheinen. Diese zusätzlichen Impedanzen haben alle den gleichen Wert wie die Sternimpedanzen, d.h.

$$\underline{Z}_{M,3} = \underline{Z}_{G,3} = \underline{Z}_{0,3} = \underline{Z}_3 \quad (7.47)$$

Wichtig ist ob der Sternpunkt dieser Sternlast geerdet ist. Wiederum sehen das Mit- und das Gegensystem in beiden Fällen, also sowohl bei geerdetem wie auch bei ungeerdetem Sternpunkt genau gleich aus. Die Erdung, bzw. die nicht vorhandene Erdung hat nur Einfluss auf das Nullsystem. Im Falle einer Erdung (gestrichelte Linie) ist die Impedanz $\underline{Z}_{0,3}$ an beiden Enden verbunden, bei ungeerdetem Sternpunkt bleibt der untere Anschluss unverbunden.

Natürlich könnte die Last auch eine Dreieckslast sein. Da aber eine Dreieckslast in eine ungeerdete Sternlast umgeformt werden kann, ist die separate Betrachtung einer Dreieckslast überflüssig.

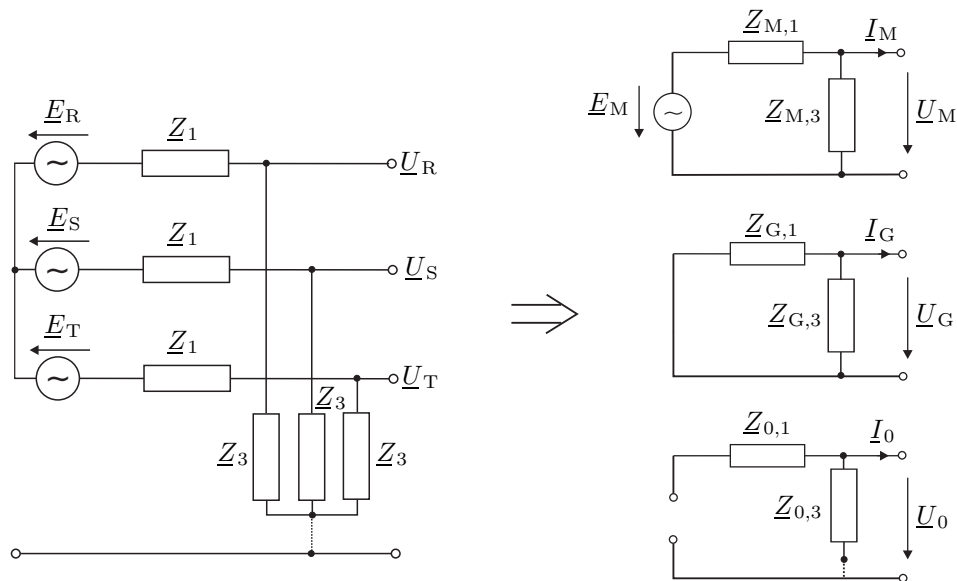


Abbildung 7.11. Drehstromsystem mit zusätzlicher Sternlast.

7.4.4 Transformatoren

Sobald Transformatoren im System vorhanden sind, wird es etwas komplizierter. Vor allem das Nullsystem ist stark davon abhängig was für ein Transformator eingefügt wurde. Das Mit- und das Gegensystem werden kaum beeinflusst. Der Ablauf bei der Umwandlung eines Drehstromnetzes mit Transformatoren ins MG0-System ist folgendermassen:

1. Zuerst wird entschieden auf welcher Spannungsebene gerechnet werden soll (falls ein Fehlerstrom berechnet werden soll, eignet sich natürlich die Ebene, wo der Fehler passiert ist).
2. Alle vorhandenen Impedanzen und Quellen werden auf diese Spannungsebene bezogen.
3. Das MG0-System wird ohne Transformator gezeichnet, also an der Stelle wo sich der Trafo befinden müsste, wird erst einmal eine Lücke gelassen.
4. Beim Mit- und Gegensystem werden die entsprechenden Transformatorimpedanzen seriell eingefügt.
5. Das zum vorhandenen Transformatortyp gehörige Nullsystem wird aus der Tabelle in Abbildung 7.12 herausgelesen (das Nullsystem für Transformatoren mit ungeerdeten Sternpunkten können durch $\underline{Z}_{Ep} = \infty$, bzw. $\underline{Z}_{Es} = \infty$ einfach abgeleitet werden).
6. Das gefundene Nullsystem wird eingefügt.

Nr.	Primärseite	Sekundärseite	Nullsystem
1			$\underline{Z}_{T0} + 3(\underline{Z}_{Ep} + \underline{Z}_{Es})$ $\underline{Z}_{T0} \approx 3to5 \cdot \underline{Z}_M$
2			\underline{Z}_{T0} $\underline{Z}_{T0} \approx \underline{Z}_M$
3			\underline{Z}_{T0} $\underline{Z}_{T0} \approx \underline{Z}_M$

Abbildung 7.12. Nullimpedanz verschiedener Transformatorschaltgruppen.

Die Berechnung der Nullimpedanz \underline{Z}_{T0} ist ziemlich kompliziert und die Herleitung würde den Rahmen dieses Skripts sprengen. Deshalb sei hier auf Anhang A verwiesen, wo etwas genauer auf die Grösse dieser Impedanz eingegangen wird. Die ungefähren Werte sind in der Abbildung 7.12 angegeben.

Als Beispiel ist in Abbildung 7.13 ein Drehstromsystem mit einem Transformator gegeben. Geht man nach dem oben beschriebenen Ablauf vor, entsteht das MG0-System in Abbildung 7.14.

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Unsymmetrien, hervorgerufen durch Erd- und Kurzschlüsse näher betrachtet. Es wird gezeigt, wie diese Betriebssituationen mit Hilfe der MG0-Transformation analysiert werden können.

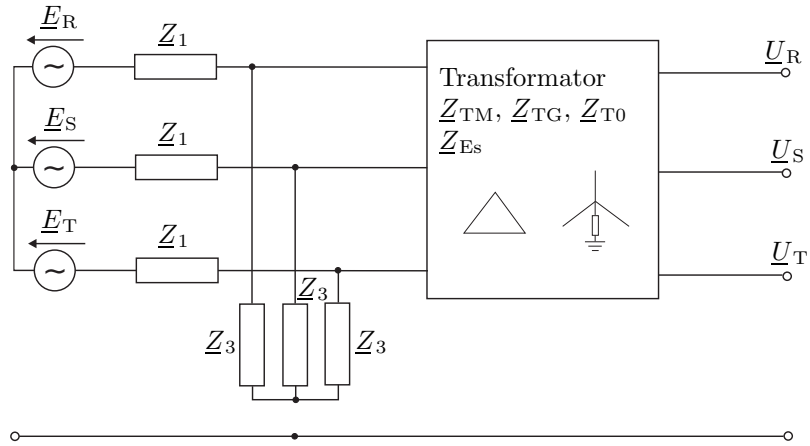


Abbildung 7.13. Drehstromnetz mit Transformator.

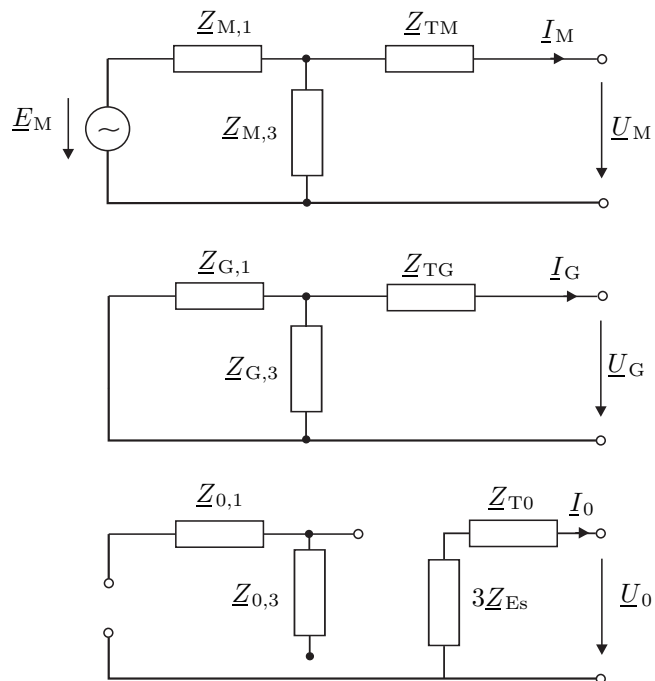


Abbildung 7.14. MG0-System mit Transformator.

7.5 Analyse von Fehlern mithilfe der MG0-Transformation

In diesem Abschnitt werden wir einige typische Fehlersituationen in elektrischen Netzen untersuchen. Dabei vernachlässigen wir die transienten Vorgänge und gehen davon aus, dass die Fehlerströme sinusförmig sind. Wir werden sehen, dass im Vergleich zur klassischen Netzwerkanalyse die Rechnung mit symmetrischen Komponenten viele Erleichterungen bringt. In den Beispielen werden immer rein ohmsche Fehlerwiderstände angenommen, die aber auch durch komplexe Impedanzen ersetzt oder im Kurzschlussfall zu Null gesetzt werden könnten.

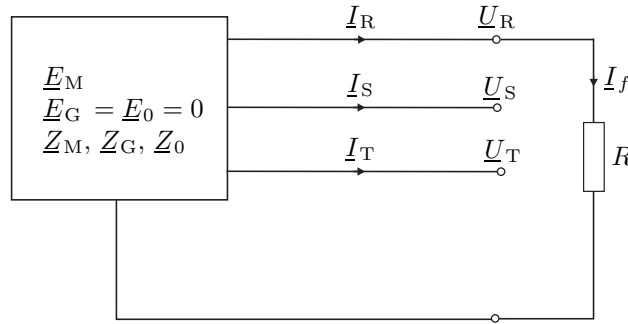
7.5.1 Einpoliger Erdschluss

Als einpoliger Erdschluss wird eine niederohmige Verbindung zwischen einer der drei Phasen und der Erde bezeichnet.¹ Es kann zum Beispiel ein Seil einer Freileitung gerissen sein und den Boden berühren, ein Baum in eine Leitung gefallen sein etc. Der einpolige Erdschluss ist der häufigste Fehler in Energieübertragungsnetzen. In Hochspannungsnetzen mit Nennspannungen grösser 130 kV macht dieser Fehler etwa 80% aller Störungen aus. Je nach Art der Störung besteht ein unterschiedlich grosser Übergangswiderstand zwischen dem betroffenen Phasenleiter und Erde. Allgemein kann jede Verbindung zwischen einem Phasenleiter und der Erde als einphasige Unsymmetrie betrachtet werden, also z.B. auch ein einphasiger Verbraucher.

Ausgangspunkt ist das symmetrische Netz aus Abbildung 7.8. Im Fehlerfall wird das Netz zusätzlich durch einen Fehlerwiderstand R zwischen einer Phase und Erde belastet (Abbildung 7.15). Dadurch entsteht ein unsymmetrisches System von Strömen und Spannungen welches mit Hilfe der drei symmetrischen Komponenten analysiert werden kann. Die linke Seite entspricht dem symmetrischen System, die rechte Seite stellt den fehlerhaften Teil des Netzes mit einem Fehlerwiderstand R zwischen Phase R und Erde dar.

Zur Analyse des unsymmetrischen Netzteils betrachten wir nun nur noch den rechten Teil des Netzes in Abbildung 7.15 und stellen am Ort der Unsymmetrie die durch die Fehlersituation gegebenen Zusammenhänge zwischen den Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_S , \underline{U}_T und Strömen \underline{I}_R , \underline{I}_S , \underline{I}_T auf. Um die Unsymmetrie vollständig zu beschreiben, müssen drei Gleichungen gefunden werden, die die sechs Grössen oder einen Teil von ihnen enthalten. In diesem

¹Ist der Sternpunkt des speisenden Systems niederohmig geerdet, so spricht man auch vom Erdkurzschluss. Haben verschiedene Phasen an verschiedenen Orten Erdkontakt, so handelt es sich je nach Anzahl der betroffenen Phasen um einen Doppel- oder Dreifacherd(kurz)schluss. Im Gegensatz dazu liegt ein zweipoliger Kurzschluss mit Erdberührung dann vor, wenn zwei Phasen an der gleichen Stelle Erdkontakt haben und kurzgeschlossen sind.

**Abbildung 7.15.** RST-Ersatzschaltung eines einphasigen Erdschlusses.

Beispiel lauten diese:

$$R \cdot \underline{I}_R = \underline{U}_R \quad (7.48a)$$

$$\underline{I}_S = 0 \quad (7.48b)$$

$$\underline{I}_T = 0 \quad (7.48c)$$

Allgemein erzwingt jeder unverbundene Leiter $\underline{I} = 0$. Jeder Erdschluss führt zu $\underline{U} = 0$. Wenn wie in Phase R Impedanzen vorhanden sind, muss zusätzlich das ohmsche Gesetz berücksichtigt werden.

Die Gleichungen werden nun in das MG0-System transformiert, indem alle Größen des RST-Systems als Summe von MG0-Komponenten dargestellt werden.

$$R \cdot (\underline{I}_M + \underline{I}_G + \underline{I}_0) = \underline{U}_M + \underline{U}_G + \underline{U}_0 \quad (7.49a)$$

$$\underline{a}^2 \cdot \underline{I}_M + \underline{a} \cdot \underline{I}_G + \underline{I}_0 = 0 \quad (7.49b)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{I}_M + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_G + \underline{I}_0 = 0 \quad (7.49c)$$

Durch Subtraktion von Gleichung (7.49b) und (7.49c) sowie Division durch $(\underline{a} - \underline{a}^2)$ erhält man

$$\underline{I}_M = \underline{I}_G \quad (7.50)$$

In Verbindung der Beziehung (7.10) ergibt sich aus Gleichung (7.49b)

$$\underline{I}_M = \underline{I}_G = \underline{I}_0 \quad (7.51)$$

und aus Gleichung (7.49a)

$$R \cdot 3 \cdot \underline{I}_M = \underline{U}_M + \underline{U}_G + \underline{U}_0 \quad (7.52)$$

Die unsymmetrische Belastung des dreiphasigen Netzes wird durch die Gleichungen (7.51) und (7.52) vollständig beschrieben.

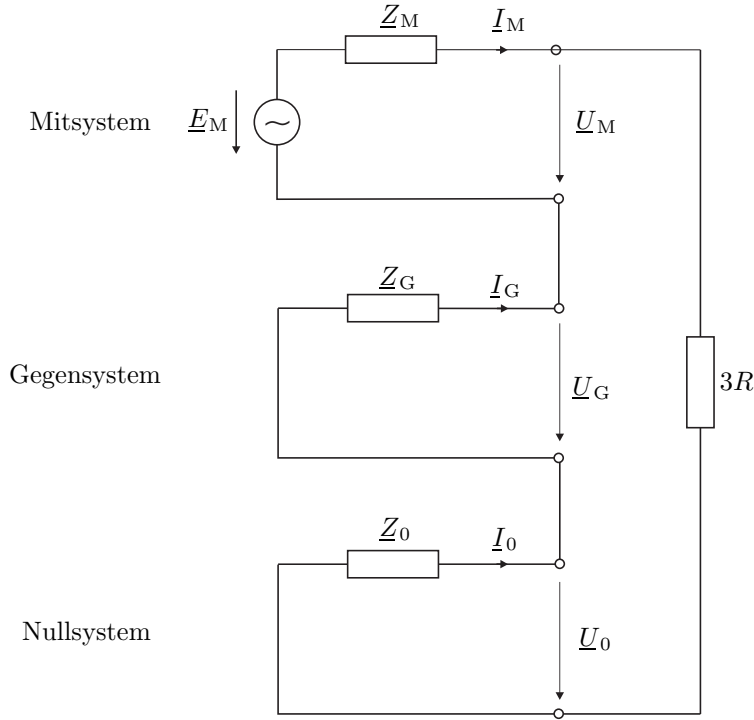


Abbildung 7.16. MG0-Ersatzschaltung eines einpoligen Erdfehlers mit Fehlerwiderstand R .

Durch Zusammenschaltung der Ersatzschaltbilder von Mit-, Gegen- und Nullsystem in Abbildung 7.16 wird die Einhaltung dieser Gleichungen erzwungen: Die drei Systeme M, G und 0 werden laut Gleichung (7.51) vom gleichen Strom durchflossen, woraus sich eine Serienschaltung der Ersatzschaltbilder ergibt. Laut Gleichung (7.52) wird der Widerstand $3R$ vom Strom des Mitsystems durchflossen, dabei fällt an ihm die Summe der Spannungen aus Mit-, Gegen- und Nullsystem ab. Aus dem MG0-Ersatzschaltbild können nun auch die (gleichen) Ströme der drei symmetrischen Komponenten berechnet werden:

$$\underline{I}_M = \underline{I}_G = \underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_M}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.53)$$

Die Spannung \underline{E}_M ist die Leerlaufspannung des Mitsystems, d.h. die Spannung am Fehlerort vor dem Auftreten des Fehlers. Nimmt man die Spannungen am Fehlerort vor dem Fehlereintritt als \underline{E}_R , $\underline{E}_S = a^2 \underline{E}_R$ und $\underline{E}_T = a \underline{E}_R$ an, so erhält man für die innere Spannung des Mitsystems

$$\underline{E}_M = \frac{1}{3}(\underline{E}_R + a \underline{E}_S + a^2 \underline{E}_T) = \underline{E}_R \quad (7.54)$$

Der Fehlerstrom \underline{I}_f ist, wie aus Abbildung 7.15 leicht erkennbar, gleich dem

Strom in der Phase R:

$$\underline{I}_f = \underline{I}_R = \underline{I}_M + \underline{I}_G + \underline{I}_0 \quad (7.55)$$

Daraus und mit den Gleichungen (7.53) und (7.54) ergibt sich der Fehlerstrom zu

$$\underline{I}_f = \frac{\underline{E}_R}{\frac{1}{3}(\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + \underline{Z}_0) + R} \quad (7.56)$$

Aus der Schaltung in Abbildung 7.16 können auch die Fehlerspannungen berechnet werden. Man erhält

$$\underline{U}_M = \underline{E}_M - \underline{Z}_M \underline{I}_M = \underline{E}_M - \underline{E}_M \cdot \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.57a)$$

$$\underline{U}_G = -\underline{Z}_G \underline{I}_G = -\underline{E}_M \cdot \frac{\underline{Z}_G}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.57b)$$

$$\underline{U}_0 = -\underline{Z}_0 \underline{I}_0 = -\underline{E}_M \cdot \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.57c)$$

Aus diesen Gleichungen können die Phasenspannungen des RST-Systems berechnet werden. Wird angenommen, dass im verwendeten Drehstromsystem $\underline{\beta} = \underline{\gamma}$ gilt (siehe Abschnitt 7.2), ergibt sich $\underline{Z}_M = \underline{Z}_G$. Somit kann vereinfacht angenommen werden, dass

$$\underline{Z}_M = \underline{Z}_G = \underline{Z} \quad (7.58)$$

Mithilfe der Gleichungen (7.57a), (7.57b) und (7.57c) berechnen sich die Phasenspannungen am Fehlerort zu

$$\underline{U}_R = \underline{U}_M + \underline{U}_G + \underline{U}_0 = \underline{E}_R \cdot \frac{3R}{2\underline{Z} + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.59a)$$

$$\underline{U}_S = a^2 \underline{U}_M + a \underline{U}_G + \underline{U}_0 = \underline{E}_S - \underline{E}_R \cdot \frac{\underline{Z}_0 - \underline{Z}}{2\underline{Z} + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.59b)$$

$$\underline{U}_T = a \underline{U}_M + a^2 \underline{U}_G + \underline{U}_0 = \underline{E}_T - \underline{E}_R \cdot \frac{\underline{Z}_0 - \underline{Z}}{2\underline{Z} + \underline{Z}_0 + 3R} \quad (7.59c)$$

Aus diesen Gleichungen kann man klar erkennen, dass die Nullimpedanz des Kreises einen wesentlichen Einfluss auf die Spannung der „gesunden“ Phasen (in diesem Fall S und T) hat. Wir werden diesbezüglich zwischen zwei Fällen unterscheiden.

Zuerst wollen wir annehmen, dass der Sternpunkt starr geerdet ist und die Leitung kurz ist, wodurch die Nullimpedanz \underline{Z}_0 gleich der Mitimpedanz

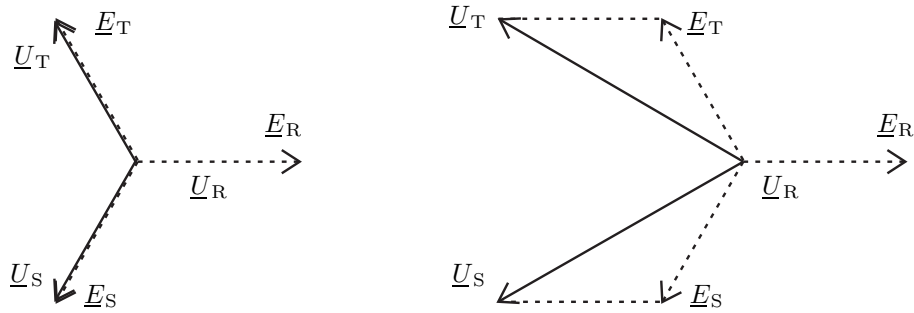


Abbildung 7.17. Das dreiphasige Spannungssystem während eines einphasigen Erdschlusses. Links: $Z_0 = Z$ und $R = 0$. Rechts: $Z_0 = \infty$ und $R = 0$. (Die gestrichelten Linien stellen das System vor dem Fehler dar, die voll gezeichneten Zeiger kennzeichnen den Fehlerzustand.)

Z_M und der Gegenimpedanz Z_G wird. Eine weitere vereinfachende Annahme kommt von der Tatsache, dass der Fehlerwiderstand R für „satte“ Kurzschlüsse sehr niedrig ist. Mit diesen Annahmen ($Z_0 = Z$ und $R = 0$) werden die Gleichungen (7.59a), (7.59b) und (7.59c) zu

$$\underline{U}_R = 0 \quad (7.60a)$$

$$\underline{U}_S = \underline{E}_S \quad (7.60b)$$

$$\underline{U}_T = \underline{E}_T \quad (7.60c)$$

Das heisst, dass bei einem Erdschluss in einem System mit starr geerdetem Sternpunktserdung die Spannung in den gesunden Phasen nicht beeinträchtigt wird.

Der zweite Fall den wir untersuchen wollen ist der des isolierten Sternpunktes ($Z_0 = \infty$). Dadurch werden obige Gleichungen zu

$$\underline{U}_R = 0 \quad (7.61a)$$

$$\underline{U}_S = \underline{E}_S - \underline{E}_R \quad (7.61b)$$

$$\underline{U}_T = \underline{E}_T - \underline{E}_R \quad (7.61c)$$

Aus dem Resultat erkennt man, dass bei einem einpoligen Erdschluss in einem System mit isoliertem Sternpunkt der Betrag der Spannungen der gesunden Phasen um den Faktor $\sqrt{3}$ ansteigt. Abbildung 7.17 zeigt die Spannungsverhältnisse in beiden Fällen.

Unsymmetrien im Bereich der realen Quellen führen zum Erscheinen von Quellen im Gegen- und Nullsystem zusätzlich zum Mitsystem. Unsymmetrien im passiven Teil des Netzes werden getrennt vom symmetrischen Teil betrachtet. Sie werden durch Schaltverbindungen zwischen den drei Ersatzschaltbildern des MG0-System berücksichtigt, während in einem vollständig symmetrischen Netz die Ersatzschaltungen nicht verknüpft sind. Im betrachteten Fall des einpoligen Fehlers in Phase R kann durch eine Verbindung

der drei Ersatzschaltbilder die Einhaltung der Unsymmetriebedingungen der Gleichungen (7.51) und (7.52) erzwungen werden. Die drei Ersatzschaltbilder werden in Reihe geschaltet, sodass die Gleichheit der Ströme \underline{I}_M und \underline{I}_G , \underline{I}_0 auf einfache Art erfüllt ist. Ein in den Kreis eingefügter Widerstand vom Dreifachen des Fehlerwiderstandes R erzwingt zusätzlich die Einhaltung der Spannungsbedingung (7.52).

Aus drei zusammengehörigen Grössen, z.B. den Spannungen \underline{U}_M , \underline{U}_G und \underline{U}_0 des MG0-Systems können mit Hilfe der $\underline{\mathbf{T}}$ -Matrix die entsprechenden Grössen im RST-System nach Betrag und Phase berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_M \\ \underline{U}_G \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_M + \underline{U}_G + \underline{U}_0 \\ \underline{a}^2 \underline{U}_M + \underline{a} \underline{U}_G + \underline{U}_0 \\ \underline{a} \underline{U}_M + \underline{a}^2 \underline{U}_G + \underline{U}_0 \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

Ein einpoliger Fehler in Phase S oder T kann prinzipiell auf die gleiche Art analysiert werden. Allerdings müssen die Komponentensysteme noch mit \underline{a} bzw. \underline{a}^2 multipliziert werden, um die Serienschaltung durchführen zu können. Der einfachere Weg ist jedoch die Phasen einfach umzubenennen und zum Beispiel für einen einpoligen Kurzschluss in der Phase S diese als Phase R zu betrachten. Damit wird dann die Phase R zu Phase T und die Phase T zu Phase S. Die Bezeichnung der Phasen ist immer eine Frage des Bezugspunktes. Man muss einfach aufpassen, dass man die richtige Reihenfolge bei der Benennung der Phasen einhält, also dass die Phasenverdrehung von der Phase R zu Phase S 120° beträgt.

Die hergeleitete Ersatzschaltung für den einpoligen Erdfehler wird im Abschnitt 7.6 über das gelöschte Netz angewandt.

7.5.2 Zweipoliger Kurzschluss ohne Erdberührung

Als weitere unsymmetrische Belastung wird der zweipolige Kurzschluss betrachtet, eine niederohmige Verbindung zwischen zwei Phasen. Zusätzlich kann noch eine Erdberührung vorhanden sein, man spricht dann vom zweipoligen Erdschluss oder Erdkurzschluss.

Betrachten wir nun den zweipoligen Kurzschluss ohne Erdberührung. Die Ersatzschaltung in Abbildung 7.18 zeigt den unsymmetrischen Fehler mit Widerstand R zwischen den Phasen S und T. Dementsprechend stellen sich unsymmetrische Strom- und Spannungsverhältnisse ein.

Die Annahme des Fehler zwischen den Phasen S und T vereinfacht die Rechnung im Vergleich zu den anderen beiden Möglichkeiten. Diese unterscheiden sich jedoch nur durch Phasenverschiebungen um \underline{a} bzw. \underline{a}^2 . Gleich wie beim einpoligen Erdschluss kann auch hier bei einem Kurzschluss zwischen den Phasen R und S oder R und T eine Umbenennung der Phasen vorgenommen werden.

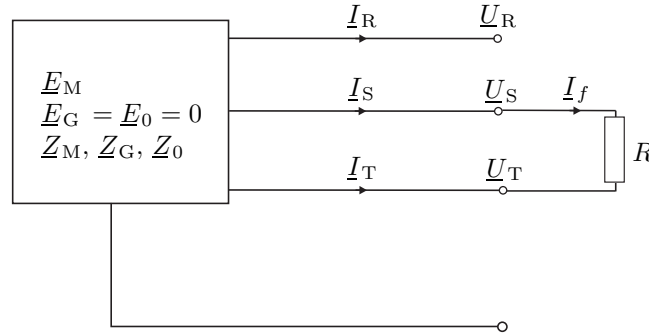


Abbildung 7.18. RST-Ersatzschaltbild eines zweipoligen Kurzschlusses ohne Erdberührung.

Mit einem Widerstand zwischen den Phasen S und T ergeben sich die Unsymmetriebedingungen im RST-System wie folgt:

$$\underline{I}_R = 0 \quad (7.63a)$$

$$\underline{I}_S = -\underline{I}_T \quad (7.63b)$$

$$\underline{U}_S - \underline{U}_T = R \cdot \underline{I}_S \quad (7.63c)$$

Nach Transformation in MG0-Komponenten erhalten wir

$$\underline{I}_M + \underline{I}_G + \underline{I}_0 = 0 \quad (7.64a)$$

$$\underline{a}^2 \underline{I}_M + \underline{a} \underline{I}_G + \underline{I}_0 = -(\underline{a} \underline{I}_M + \underline{a}^2 \underline{I}_G + \underline{I}_0) \quad (7.64b)$$

$$\underline{a}^2 \underline{U}_M + \underline{a} \underline{U}_G + \underline{U}_0 - (\underline{a} \underline{U}_M + \underline{a}^2 \underline{U}_G + \underline{U}_0) = R \cdot (\underline{a}^2 \underline{I}_M + \underline{a} \underline{I}_G + \underline{I}_0) \quad (7.64c)$$

Aus Gleichung (7.64a) folgt

$$\underline{I}_0 = -\underline{I}_M - \underline{I}_G \quad (7.65)$$

Eingesetzt in Gleichung (7.64b) ergibt sich

$$\underline{I}_M = -\underline{I}_G \quad (7.66)$$

und zusammen mit Gleichung (7.64a) folgt

$$\underline{I}_0 = 0 \quad (7.67)$$

Letzteres hätte man auch sofort hinschreiben können, weil Nullströme immer eine Verbindung zum Sternpunkt bzw. zur Erde erfordern welche beim zweipoligen Kurzschluss nicht vorhanden ist. Die Strompfade \underline{I}_R , \underline{I}_S und \underline{I}_T haben (im Gegensatz zum einphasigen Fehlerfall) keine Möglichkeit sich über die Erde zu schliessen und können daher auch keine Nullkomponente enthalten. Die zweipolige Unsymmetrie wird also unter Einbezug der

Spannung am Widerstand R gemäss Gleichung (7.64c) im MG0-System wie folgt beschrieben:

$$\underline{I}_0 = 0 \quad (7.68a)$$

$$\underline{I}_M = -\underline{I}_G \quad (7.68b)$$

$$\underline{U}_M - \underline{U}_G = R \cdot \underline{I}_M \quad (7.68c)$$

Wie beim einpoligen Erdschluss können auch bei der zweipoligen Unsymmetrie die Bedingungen durch geeignete Schaltverbindungen zwischen den Komponentensystemen erzwungen werden. Die Ersatzschaltungen des Mit- und Gegensystems müssen diesmal über Kreuz verbunden werden, damit entgegengesetzt gleiche Ströme fliessen. Dazwischen muss der Widerstand R (diesmal ohne Faktor 3) eingefügt werden, damit das ohmsche Gesetz gemäss Gleichung (7.68c) erfüllt ist. Das Nullsystem wird nicht verbunden und ist daher bei fehlender Nullkomponente der Generatorspannung vollständig bedeutungslos für die weiteren Betrachtungen.

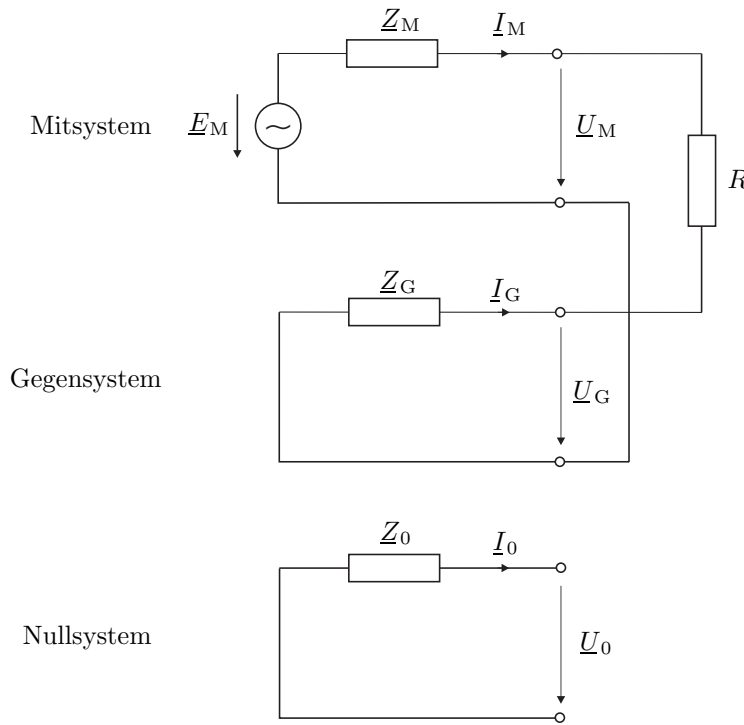


Abbildung 7.19. MG0-Ersatzschaltung eines zweipoligen Kurzschlusses ohne Erdberührung.

Auch in diesem Fall konnten nach den Regeln der Netzwerkanalyse die Spannungen und Ströme im MG0-System berechnet werden, die mit Hilfe der Matrix \underline{T} wieder in das RST-System zurücktransformiert werden kön-

nen. Für die Ströme im Mit- und Gegensystem gilt

$$\underline{I}_M = -\underline{I}_G = \frac{\underline{E}_M}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + R} \quad (7.69)$$

Mit

$$\underline{E}_M = \frac{1}{3}(\underline{E}_R + \underline{a}\underline{E}_S + \underline{a}^2\underline{E}_T) = \underline{E}_R \quad (7.70)$$

und (7.69) kann der Fehlerstrom \underline{I}_f berechnet werden

$$\underline{I}_f = \underline{I}_S = \underline{a}^2 \underline{I}_M + \underline{a} \underline{I}_G + \underline{I}_0 \quad (7.71)$$

$$= (\underline{a}^2 - \underline{a}) \underline{I}_M = (\underline{a}^2 - \underline{a}) \frac{\underline{E}_M}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + R} \quad (7.72)$$

$$= -j\sqrt{3} \frac{\underline{E}_R}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_G + R} \quad (7.73)$$

7.5.3 Dreipoliger Kurzschluss

Im Gegensatz zu den vorher beschriebenen Betriebssituationen ist der dreipolige Kurzschluss unter der Annahme gleicher Fehlerwiderstände in allen Phasen symmetrisch. Bild 7.20 zeigt die Schaltung im RST-System.

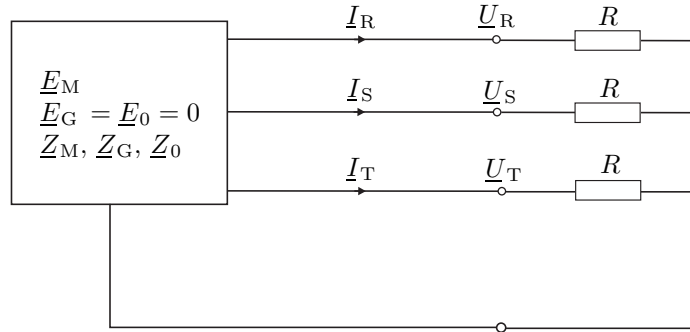
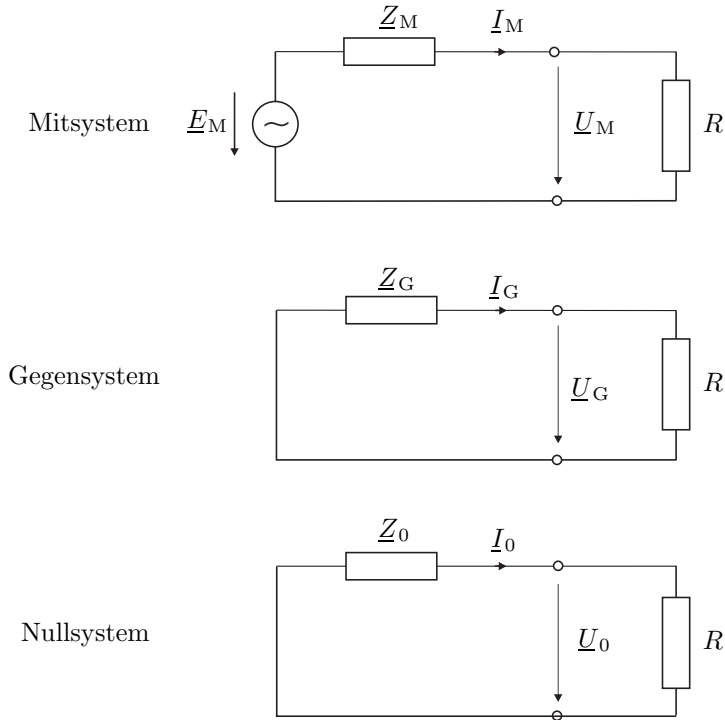


Abbildung 7.20. Dreiphasensystem eines dreipoligen Kurzschlusses.

Dieser Kurzschlussfall tritt nur sehr selten auf, verursacht normalerweise aber die höchstmöglichen Ströme (und somit die höchstmöglichen thermischen und mechanischen Belastungen) und ist als „worst case“ in Kurzschlussberechnungen zu verwenden. Im dargestellten Beispiel wird ein Widerstand R zwischen den Phasen und der Erde angenommen und es liegt eine Erdberührung vor. Da symmetrische Zustände herrschen unterscheiden sich die Ströme und Spannungen im Fall des dreiphasigen Kurzschlusses mit Erdberührung nicht von dem ohne Erdberührung (der Punkt, in dem die Widerstände R in Abbildung 7.20 zusammengeschaltet und mit Erde verbunden sind, würde auch ohne Erdverbindung Nullpotential führen).

**Abbildung 7.21.** MG0-Ersatzschaltung eines dreipoligen Kurzschlusses.

Für die Spannungen und Ströme im RST-System gilt

$$\underline{U}_R = R \underline{I}_R \quad (7.74)$$

$$\underline{U}_S = R \underline{I}_S \quad (7.75)$$

$$\underline{U}_T = R \underline{I}_T \quad (7.76)$$

Dies führt mit Transformation ins MG0-System und Umformungen auf die Gleichungen

$$\underline{U}_M = R \underline{I}_M \quad (7.77)$$

$$\underline{U}_G = R \underline{I}_G \quad (7.78)$$

$$\underline{U}_0 = R \underline{I}_0 \quad (7.79)$$

Die MG0-Ersatzschaltung ist einfach, denn wegen der Symmetrie sind die Komponentensysteme in der Ersatzschaltung nicht miteinander verbunden und es wird nur das Mitsystem angeregt. Das entsprechende MG0-System ist in Abbildung 7.21 gegeben.

Die Fehlerströme in den Phasen des RST-Systems ergeben sich zu

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{E}_R}{\underline{Z}_M + R} \quad (7.80)$$

$$\underline{I}_S = \frac{a^2 \underline{E}_R}{\underline{Z}_M + R} \quad (7.81)$$

$$\underline{I}_T = \frac{a \underline{E}_R}{\underline{Z}_M + R} \quad (7.82)$$

Verglichen mit (7.56) ergibt sich im Falle, dass Mit-, Gegen- und Nullimpedanz alle den gleichen Wert haben, ein gleich grosser Fehlerstrom wie beim einphasigen Erdschluss. Da das Netz beim dreipoligen Erdschluss jedoch symmetrisch bleibt, fliesst kein Strom über die Erde.

7.6 Das gelöschte Netz

Der Betrieb eines Energieübertragungssystems, das vollständig von der Erde isoliert ist, hat beim einpoligen Erdschluss einen immensen Vorteil: Da kein Retourpfad für den Fehler(null)strom existiert, kann im Fehlerfall zumindest idealerweise kein Strom fliessen (siehe Gleichung (7.56)). Das erkennt man auch in der Ersatzschaltung in Abbildung 7.16, deren Nullsystem vollständig unterbrochen wäre wenn man ausser dem Sternpunkt des Verbrauchers auch den des Generators ungeerdet lässt. Dadurch verschwindet neben \underline{I}_0 auch \underline{I}_G , d.h. die Ströme bleiben symmetrisch, da nur noch das Mitsystem aktiv ist. Allerdings werden die Spannungen gegen Erde unsymmetrisch. Weil eine Phase durch den Erdschluss auf Erdpotential gezogen wird, erhöhen sich die Spannungen der beiden anderen Phasen gegen Erde um den Faktor $\sqrt{3}$ (siehe Gleichungen (7.61a)-(7.61c) und Abbildung 7.17). Mittelspannungsnetze werden in der Schweiz meist isoliert betrieben. Bei geringer Ausdehnung des Netzes ist auch der Erdschlussstrom klein und der am Freileitungsisolator entstehende Lichtbogen erlischt von selbst. Die kurzzeitigen Spannungsüberhöhungen in den gesunden Phasen sind ertragbar und werden auch als Detektionshilfe von einpoligen Erdkurzschlüssen verwendet.

Bei einem Energieübertragungssystem mit einer Erdverbindung bewirkt der einpolige Erdschluss dagegen einen grossen Kurzschlussstrom mit allfälligen Beschädigungen und erfordert eine Freischaltung der Leitung. *Tatsächlich sind alle Energieübertragungssysteme in einer bestimmten Art geerdet, wenn nicht über eine direkte Verbindung (z.B. geerdeter Sternpunkt) dann zumindest über die Erdkapazitäten der Leitungen.* Da Hoch- und Höchstspannungsnetze keine solche Spannungsüberhöhungen ertragen wie dies bei Mittelspannungsnetzen der Fall ist, müssen die Sternpunkte in diesen Netzen niederomig geerdet werden. Dabei wird jeder Erdschluss zu einem Kurzschluss mit hohem Kurzschlussstrom und muss durch die Schutzeinrichtung abgeschaltet werden.

In der Praxis sind bei Netzen mit niederohmiger Sternpunktterdung (wirksam geerdet) die Sternpunkte einzelner oder aller Transformatoren entweder direkt oder über eine niederohmige Impedanz geerdet. Der Preis für die niedrigeren Kurzschlussströme in nicht oder schwach geerdeten Netzen ist die Spannungsüberhöhung in den „gesunden“ Phasen der die Isolierung standhalten muss. Die folgenden drei Varianten sind in der Praxis von Bedeutung:

- Die Sternpunkte aller Transformatoren sind direkt geerdet. Bei dieser Variante ergeben sich die grössten Kurzschlussströme.
- Nur ausgewählte Sternpunkte werden direkt geerdet. Die anderen Sternpunkte sind isoliert.
- Zur Verringerung der Kurzschlussströme bei einpoligen Fehlern werden die Sternpunkte nicht direkt, sondern über niederohmige Impedanzen geerdet.

Abbildung 7.22 zeigt ein symmetrisches dreiphasiges Energieübertragungssystem mit ungeerdetem Sternpunkt. Die eingetragenen Kapazitäten stellen die identischen Erdkapazitäten der Leitungen dar.

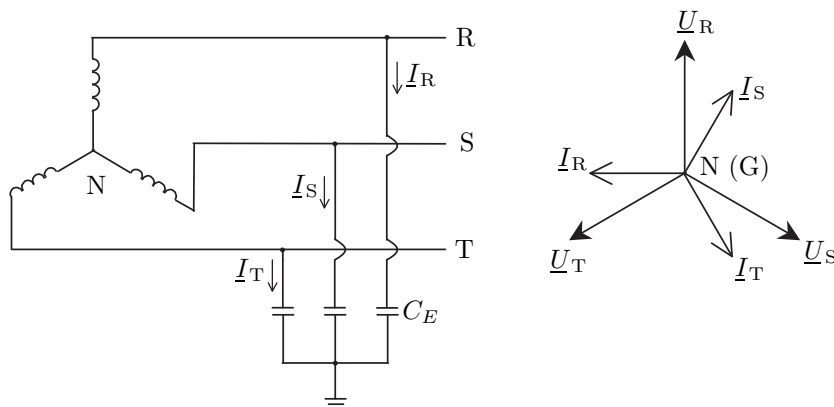


Abbildung 7.22. Das Energieübertragungsnetz im symmetrischen Betriebszustand; die Kapazitäten C_E entsprechen den Erdkapazitäten der Phasenleiter.

Ein einpoliger Erdfehler auf einer beliebigen Phase zerstört diese Symmetrie. Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass der einpolige Erdschluss auf der Phase R auftritt, wie dies auch in Abbildung 7.23 zu sehen ist. Zusätzlich wird angenommen, dass der Fehlerwiderstand null sei, so dass die fehlerbehaftete Phase Erdpotential annimmt. Diese Verschiebung des ungeerdeten Sternpunktes hat natürlich auch Auswirkungen auf die beiden anderen Phasen S und T (siehe Zeigerdiagramm in Abbildung 7.23). Dabei sind die Ströme um den Faktor $\sqrt{3}$ grösser als im stationären

Zustand und erfahren auch eine Phasenverschiebung. Dieser Fehlerstrom ist oftmals ausreichend, um einen Lichtbogen an der Fehlerstelle aufrecht zu erhalten.

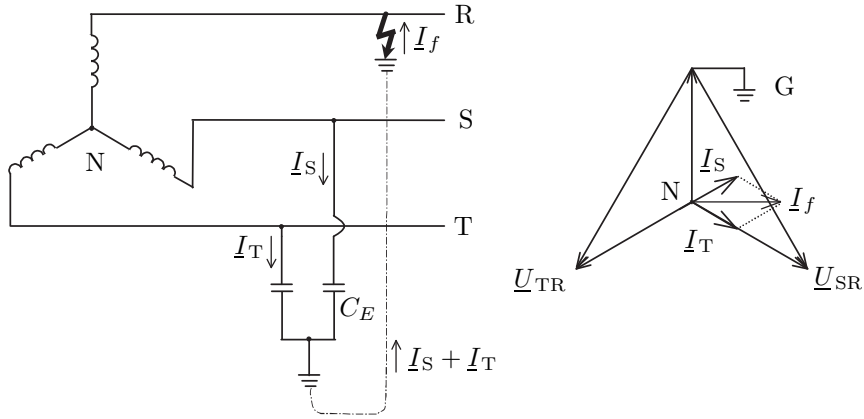


Abbildung 7.23. Das Energieübertragungsnetz im unsymmetrischen Betriebszustand hervorgerufen durch einen Erdkurzschluss.

Um dieses Problem zu umgehen, kann anstatt der satten Erdung eine Drosselspule zwischen Generatorsternpunkt und Erde eingebaut werden, die als *Petersenspule* (*Petersen Coil*) oder *Erdschlusslöschspule* bezeichnet wird (Abbildung 7.24).

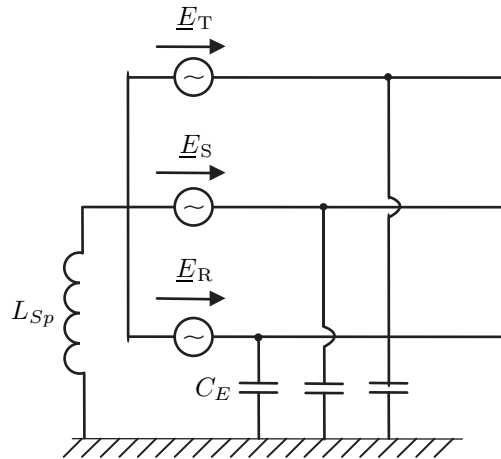


Abbildung 7.24. Petersenspule in einem Dreiphasennetz.

Tritt nun ein einpoliger Erdfehler auf, fließt ein Teil des Fehlerstroms auch durch die Petersenspule. Der Strom durch die Erdschlusslöschspule hinkt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ nach, jedoch eilt der Strom durch die Erdkapazität der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ vor. Somit *überlagern sich im Lichtbogen zwei Ströme*,

die exakt die entgegengesetzte Phase aufweisen und sich, bei richtiger Auslegung der Petersenspule, zu Null ergänzen. Die Grösse der Petersenspule muss also so gewählt werden, dass sie zusammen mit den Erdkapazitäten einen Parallelschwingkreis (Sperrkreis) bildet, der bei Netzfrequenz in Resonanz ist. Dann kann über das Nullsystem und damit auch über den Fehlerwiderstand R im Idealfall kein Strom fließen.

In Wirklichkeit wird trotz der Petersenspule ein kleiner Strom über die Erdschlussverbindung fließen, denn die reale, nichtideale Induktivität besitzt auch einen ohmschen Widerstand. Ferner sind im Netz Ableitungswiderstände vorhanden, wodurch sowohl der induktive als auch der kapazitive Strom kein reiner Blindstrom ist und die beiden Ströme nicht exakt um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind. Dadurch sperrt der Schwingkreis nicht vollständig. Es bleibt ein kleiner reeller Reststrom, der auch als „*Wattreststrom*“ bezeichnet wird. Ein solcher Reststrom liegt praktisch etwa in der Grössenordnung von 3 bis 10% des unkompensierten Erdschlussstroms. Der Kurzschlussstrom des am häufigsten vorkommenden Fehlers, des einpoligen Erdschlusses, ist damit so gering, dass ein Lichtbogen an der Fehlerstelle nicht mehr mit genügend Ladungsträgern versorgt werden kann und somit von selbst erlischt.

Für die gesamte Induktivität der Sternpunktserdungen L_{Sp} , wie sie im nächsten Abschnitt noch hergeleitet wird, muss gelten

$$L_{Sp} = \frac{1}{3\omega^2 C_E} \quad (7.83)$$

wobei C_E die Erdkapazität ist.

Neben den ohmschen Elementen im Schwingkreis besteht ein weiteres Problem in der Bestimmung der Erdkapazität. Je länger die Leitung ist umso mehr nimmt sie die Eigenschaften einer verteilten Struktur an und umso weniger kann die totale Erdkapazität nur mit einer Kapazität nachgebildet werden. Deshalb begnügt man sich damit, dass bei langen Leitungen die vorhandene Petersenspule den Kurzschlussstrom auf einen ungefährlichen Wert begrenzt, so dass er aber noch sicher vom Leitungsschutzsystem detektiert und die Leitung in der Folge kurzfristig freigeschaltet werden kann.

Herleitung des gelöschten Netzes Abbildung 7.25 links (RST) zeigt einen einpoligen Erdschluss bei satt geerdetem Sternpunkt. Der Verlauf des Kurzschlussstroms ist durch die fett gedruckten Linien hervorgehoben. Daraus wird ersichtlich, dass ein grosser Strom über die Fehlerstelle fliesst und dadurch den Lichtbogen aufrecht erhält. Das Ziel der Petersenspule (und somit des gelöschten Netzes) besteht darin, dass über die Erdschlussverbindung kein Strom fliesst und der Lichtbogen „verhungert“. In der Praxis wird sich jedoch der Strom wegen verschiedener Nichtidealitäten niemals ganz aufheben.²

²Da nur ein kleiner Fehlerstrom über die Kurzschlussstelle fliesst, kann das Energieübertragungsnetz also ohne Schaden längere Zeit im Erdschluss betrieben werden.

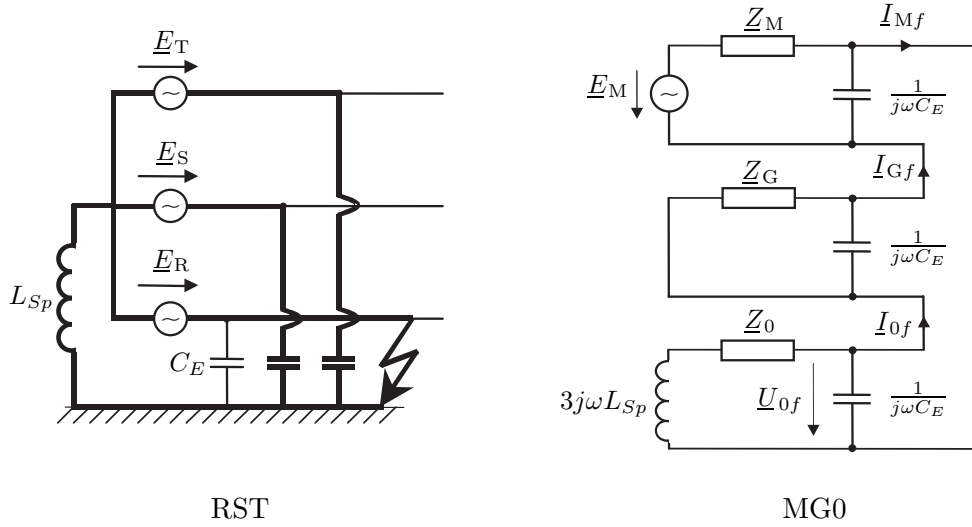


Abbildung 7.25. Herleitung der Grösse der Induktivität für das gelöschte Netz.

Abbildung 7.25 rechts (MG0) zeigt schliesslich das ins MG0-System transformierte Netz mit einpoligem Kurzschluss und Petersenspule im Nullsystem, anhand dessen nun die Grösse der zur Kompensation notwendigen Induktivität hergeleitet werden soll.

Die gesamte Reaktanz im Nullsystem bestehend aus der Summe der Nullimpedanz und der Impedanz der Petersenspule parallel zur Impedanz der Erdkapazität:

$$\underline{Z}_{total} = (\underline{Z}_0 + 3j\omega L_{Sp}) \parallel \frac{1}{j\omega C_E} \quad (7.84)$$

Mit der Annahme $3j\omega L_{Sp} \gg \underline{Z}_0$ kann eine Approximation von L_{Sp} einfach berechnet werden und wir erhalten

$$\underline{Z}_{total} \approx 3j\omega L_{Sp} \parallel \frac{1}{j\omega C_E} = \frac{3j\omega L_{Sp} \frac{1}{j\omega C_E}}{3j\omega L_{Sp} + \frac{1}{j\omega C_E}} = \frac{3j\omega L_{Sp}}{-3\omega^2 L_{Sp} C_E + 1} \quad (7.85)$$

Das Ziel besteht darin, den Fehlerstrom zu unterdrücken, das heisst

$$\underline{I}_{Mf} = \underline{I}_{Gf} = \underline{I}_{0f} \stackrel{!}{=} 0 \quad (7.86)$$

Es muss also gelten³

$$\underline{I}_{0f} = \frac{\underline{U}_{0f}}{\underline{Z}_{total}} = \underline{U}_{0f} \frac{1 - 3\omega^2 L_{Sp} C_E}{3j\omega L_{Sp}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (7.87)$$

³Natürlich könnte man schon früher eine Bedingung für das Sperren des Parallelschwingkreises aufstellen: In Resonanz wird die Impedanz unendlich gross, das heisst der Nenner in Gleichung (7.85) geht gegen Null. Daraus erhält man das gleiche Ergebnis.

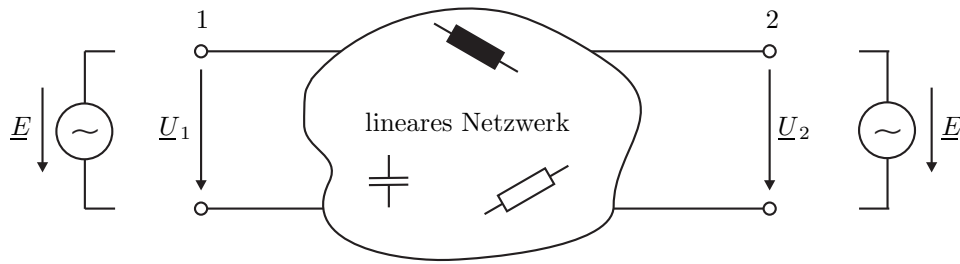


Abbildung 7.26. Lineares Netzwerk.

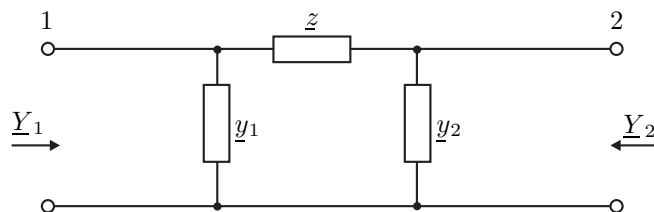
Damit der Fehlerstrom über die Erde verschwindet, muss in Gleichung (7.87) der Zähler null werden. Daraus folgt die Induktivität der Petersenspule

$$L_{Sp} = \frac{1}{3\omega^2 C_E} \quad (7.88)$$

Zum Schluss muss noch überprüft werden, ob die Annahme $3j\omega L_{Sp} \gg \underline{Z}_0$ berechtigt war. Für eine Leitung von 100 km Länge beträgt die Erdkapazität ungefähr $2 \mu\text{F}$ und die Nullimpedanz $(30 + 120j) \Omega$. Da die Petersenspule nur den kapazitiven Strom kompensieren kann, wird in den Vergleich auch nur die Reaktanz der Nullimpedanz berücksichtigt. Für die angegebenen Wert führt dies auf $2122j \gg 120j$. Somit ist die Annahme vertretbar.

Für diese Herleitung haben wir die Erdkapazitäten der Phasen als konzentrierte Elemente C_E modelliert. In Wirklichkeit handelt es sich um verteilte Kapazitäten (Kapazitätsbeläge), die Grösse der konzentrierten Elemente entspricht dem Integral der Beläge über die Länge der Leitung(en). Es stellt sich die Frage, wie sich die Impedanz zwischen einer Phase und Erde verhält, wenn man sich entlang der Leitung bewegt. Vorweg sei festgehalten, dass sich diese Impedanz, sofern sie in einem Punkt unendlich gross ist, für andere Punkte entlang der Leitung nicht ändert. Diesen Umstand wollen wir nun genauer untersuchen.

Betrachten wir dazu das in Abbildung 7.26 dargestellte lineare Netzwerk. Die Punkte 1 und 2 stellen zwei örtlich verschiedene Punkte auf einer Phase dar. Dieses lineare Netzwerk kann als Vierpol angesehen und somit durch eine π -Ersatzschaltung modelliert werden (siehe Abbildung 7.27). Wir gehen

Abbildung 7.27. Lineares Netzwerk als Vierpol (π -Ersatzschaltung).

davon aus, dass das lineare Netzwerk durch eine Petersenspule geerdet und somit an der Stelle 1 ideal gelöscht ist, womit die Admittanz zwischen Phase und Erde am Tor 1 (\underline{Y}_1 in Abbildung 7.27) gleich Null ist. Stellt man sich nun vor, am Tor 1 eine Spannung \underline{E} anzulegen, so muss in einem gelöschten Netz die Spannung am Punkt 2 ungleich Null sein. Dies soll auch umgekehrt gelten, d.h. beim Anlegen einer Spannung \underline{E} am Tor 2 soll die Spannung am Tor 1 ungleich Null sein. Damit dies der Fall ist, muss auch die Admittanz zwischen Punkt 2 und Erde (\underline{Y}_2 in Abbildung 7.27) gleich Null sein. Fassen wir diese Bedingungen für das gelöschte Netz zusammen:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{Y}_1 = 0 \\ \underline{U}_1 = \underline{E} \Rightarrow \underline{U}_2 \neq 0 \\ \underline{U}_2 = \underline{E} \Rightarrow \underline{U}_1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Y}_2 = 0 \quad (7.89)$$

Versuchen wir nun, den Beweis zu führen, dass sich in einem gelöschten Netz entlang einer Phase die Erdimpedanz nicht ändert. Wir beginnen mit der Berechnung der Erdadmittanzen am Tor 1 und Tor 2 (siehe Abbildung 7.27):

$$\underline{Y}_1 = \underline{y}_1 + \frac{1}{z + 1/\underline{y}_2} = \frac{\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + z \underline{y}_1 \underline{y}_2}{1 + z \underline{y}_2} \quad (7.90a)$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{y}_2 + \frac{1}{z + 1/\underline{y}_1} = \frac{\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + z \underline{y}_1 \underline{y}_2}{1 + z \underline{y}_1} \quad (7.90b)$$

Jetzt können wir mit Hilfe der Spannungsteilerregel bestimmen welche Spannung beim Anlegen der Quelle am jeweils anderen Tor auftreten würde. Damit unsere Bedingung erfüllt ist, muss diese jeweils ungleich Null sein.

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 = \underline{E} \Rightarrow \underline{U}_2 &= \frac{\underline{E}}{1 + z \underline{y}_2} \neq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + z \underline{y}_2} \neq 0 \end{aligned} \quad (7.91a)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 = \underline{E} \Rightarrow \underline{U}_1 &= \frac{\underline{E}}{1 + z \underline{y}_1} \neq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + z \underline{y}_1} \neq 0 \end{aligned} \quad (7.91b)$$

Offensichtlich müssen dann auch die Brüche in Gleichung (7.91a) und (7.91b) ungleich Null sein. Wenden wir uns nun wieder der Formel für die Erdadmittanz am Tor 1, Gleichung (7.90a), zu. Im gelöschten Netz muss diese Admittanz gleich Null sein, d.h.

$$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + z \underline{y}_1 \underline{y}_2}{1 + z \underline{y}_2} = 0 \quad (7.92)$$

muss gelten. Betrachten wir den Bruch in Gleichung (7.92), so folgt mit Gleichung (7.91a) für dessen Zähler

$$\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \underline{z} \underline{y}_1 \underline{y}_2 = 0 \quad (7.93)$$

Vergleichen wir nun dieses Ergebnis mit dem Ausdruck für die Erdadmittanz am Tor 2 in Gleichung (7.90b) so erkennen wir, dass dieser mit den Beziehungen (7.91b) und (7.93) ebenfalls gleich Null sein muss. Wir fassen zusammen, dass

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \underline{z} \underline{y}_1 \underline{y}_2}{1 + \underline{z} \underline{y}_1} = 0 \quad (7.94)$$

weil

$$\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \underline{z} \underline{y}_1 \underline{y}_2 = 0 \text{ und } \frac{1}{1 + \underline{z} \underline{y}_1} \neq 0$$

Somit ist klargestellt, dass in einem ideal gelöschten linearen Netzwerk die Impedanz zwischen einer Phase und Erde an allen Orten der Phase gleich ist und gegen Unendlich geht.

Bei realen gelöschten Netzen weicht die Admittanz gegen Erde von Null ab. Es bleibt der Wattreststrom durch die ohmschen Ableitwiderstände, ausserdem lässt sich die Petersenspule (vor allem nach Veränderungen der Ausdehnung des Netzes durch Schalthandlungen) nicht auf exakte Kompensation einstellen. Der Schwingkreis aus Petersenspule und Erdkapazitäten ist somit ständig leicht verstimmt. Die Kompensation reicht jedoch aus, um Erdfehlerströme auf relativ kleine Werte zu begrenzen (z.B. 50 A für die Mittelspannungsebene) um eine Zerstörung von Anlagenteilen zu vermeiden bzw. den Betrieb bei Einfachfehlern weiter aufrecht erhalten zu können.

Anhang A

Nullimpedanz von Transformatoren

Die Nullimpedanz in einem Dreiphasensystem ist definiert als das Verhältnis von Phasenstrom und Phasenspannung wenn alle drei Phasen verbunden werden und die Spannung zwischen den Phasen und dem Neutralleiter anliegt. Für eine Anordnung wie in Abbildung A.1 ist die Nullimpedanz

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} \quad (\text{A.1})$$

Bei Transformatoren ist nur dann eine Nullimpedanz vorhanden, wenn die Wicklungen in Stern geschaltet sind. Bei Dreieckswicklungen gibt es keinen Nullpunkt und somit keine Nullimpedanz, d.h. $\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$.

Will man die Nullimpedanz einer Transformatorwicklung messen, so wird wie in Abbildung A.1 eine Spannung zwischen den kurzgeschlossenen Phasenanschlüssen R, S und T und dem Neutralleiter angelegt. Die andere(n) Wicklung(en) (primär, sekundär, tertiär) bleiben offen. Je nach Konstruktion des Transformators wird man einen Nullstrom messen aus dem man zusammen mit der angelegten Spannung die Nullimpedanz laut Gleichung (A.1) berechnen kann.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf dreiphasige Transformatoren mit Wicklungen in Stern- oder Dreieckschaltung. Beginnen wir mit einem Transformator bei dem beide Windungen (primär und sekundär) in Stern geschaltet sind. Eine gleichphasige Nullspannung wird in allen drei Schenkeln des Transformators einen gleichphasigen magnetischen Fluss zur Folge haben. Diese Flüsse addieren sich im Joch. Als Retourpfad benötigt dieser resultierende Fluss eine magnetisch leitfähige Verbindung ausserhalb der Wicklungsschenkel. Dieser Retourpfad kann durch zusätzliche Schenkel gegeben sein (5-Schenkel-Transformatoren, siehe Abbildung A.2).

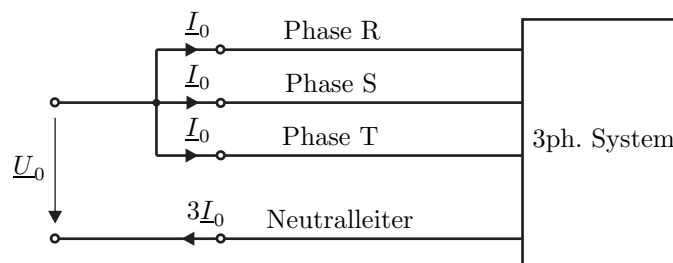


Abbildung A.1. Ersatzschaltung für die Nullimpedanz eines Drehstromsystems.

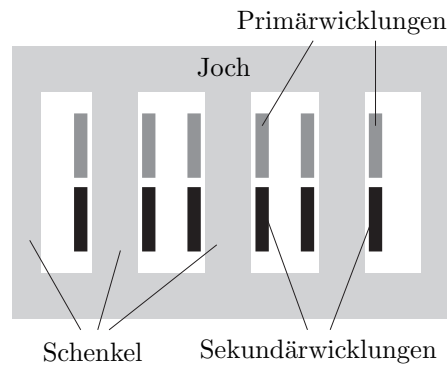


Abbildung A.2. Dreiphasiger Transformator mit fünf Schenkeln.

In einer dreischenkelligen Anordnung findet der Fluss keinen Rückweg im Eisen. Er muss aus dem Eisen austreten und sich über Luft schliessen. Durch den hohen magnetischen Widerstand dieses Pfades muss für einen gewissen Fluss eine hohe Anzahl an sogenannten „Amperewindungen“ (Strom mal Windungszahl = Erregung) aufgebracht werden. Das heisst, dass selbst ein hoher Nullstrom in einer Wicklung durch den kleinen verketteten Fluss nur kleine Nullspannungen in der anderen Wicklung hervorrufen wird. Daraus folgt, dass die Nullimpedanz eines dreischenkelligen Drehstromtransformators relativ niedrig ist. Wird der Dreischenkeltransformator mit einem Nullstrom vom Betrag des Nennstromes gespeist, so liegt die Nullspannung normalerweise im Bereich 60...100 % der Nennspannung.

In einem fünfschenkelligen Transformator steht durch die beiden zusätzlichen (nicht bewickelten) Schenkel ein Retourpfad zu Verfügung. Diese Schenkel weisen im ungesättigten Zustand eine relativ hohe magnetische Leitfähigkeit auf, dadurch wird schon bei kleinen magnetischen Spannungen (Amperewindungen) eine beträchtliche elektrische Spannung zwischen den Phasenleitern und dem Neutralleiter anliegen. Der Quotient aus Spannung und Strom erreicht sehr hohe Werte, d.h. die Nullimpedanz des Transformators ist sehr gross. Für grosse Nullströme tritt in den Seitenschenkeln Sättigung auf wodurch sich die magnetische Leitfähigkeit des Pfades verschlechtert. Somit sinkt der Quotient aus Spannung und Strom, die Nullimpedanz ist nicht konstant und entsprechend der Hysteresekurve des Eisens auch nicht linear.

Hat der Transformator in Dreieck geschaltete Wicklungen, so stellen diese für die induzierte Nullspannung einen Kurzschlusspfad dar (siehe Abbildung A.3). Ein entsprechender Strom wird sich ausbilden der dem in der jeweils anderen in Stern geschalteten Wicklung fliessenden Strom (primär, sekundär) entgegenwirkt.¹ Man kann sich vorstellen, dass sich die Ströme

¹Der Strom wirkt seiner Ursache, dem Nullstrom in der anderen Wicklung, entgegen.

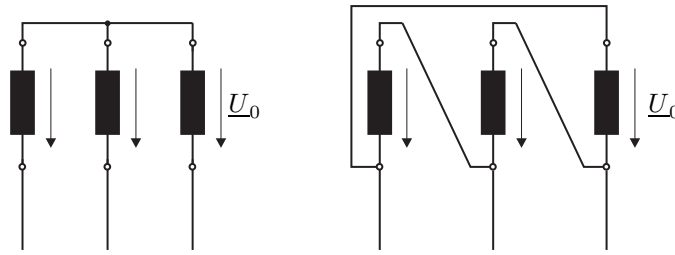


Abbildung A.3. Wicklung in Stern- und Dreieckschaltung. Bei Dreieckschaltung addieren sich die Nullspannungen in den drei Phasen und sind kurzgeschlossen.

in den beiden Wicklungen über eine dazwischen liegende Reaktanz ausgleichen. Die gesamte Nullimpedanz einer solchen Anordnung setzt sich aus zwei Komponenten zusammen:

1. Die Nullimpedanz der in Stern geschalteten Wicklung ohne Wirkung der Dreieckswicklung plus
2. die Koppelimpedanz die zwischen den beiden Wicklungen liegt.

Abbildung 7.12 zeigt die Nullimpedanzen für verschiedene Transformatorschaltgruppen. Der Wert der Nullimpedanz \underline{Z}_0 ist nicht für alle Anordnungen Nr. 1–3 gleich. Für Stern-Stern-Konfigurationen wie in Nr. 1 ist die Nullimpedanz wesentlich vom Vorhandensein eines magnetischen Rückschlusses und von den Erdungsimpedanzen abhängig. Für den Fall Nr. 1 setzt sich die Nullimpedanz aus einem primären Widerstand und einer bereits erwähnten Impedanz zwischen den beiden Wicklungen zusammen (Koppelimpedanz durch Streuung \underline{Z}_σ). Da die Sternpunktimpedanzen vom dreifachen Nullstrom durchflossen werden müssen diese entsprechend berücksichtigt werden. Im Fall Nr. 2 breiten sich keine Nullströme in den Wicklungen aus weil alle drei Anschlusspunkte R, S und T um die gleiche Nullspannung \underline{U}_0 angehoben werden. Dadurch wird die Nullimpedanz unendlich hoch. In der Anordnung Nr. 3 ergibt sich die Nullimpedanz wieder aus der Kopplung des Streuflusses und der Sternpunktimpedanz der Primärseite. Dies gilt prinzipiell auch für umgekehrte Primär- und Sekundärseite.

Anhang B

Nullimpedanz von Freileitungen

Grundlegende Gleichungen zur Berechnung der Nullimpedanz von Freileitungen sind in [21, 22, 23] publiziert. Die Herleitung dieser Gleichungen ist relativ aufwändig und soll hier nicht im Detail behandelt werden. Stattdessen sollen die grundlegenden Effekte qualitativ diskutiert und einige wichtige Ergebnisse gezeigt werden.

B.1 Schleifenimpedanz von Einfachleitungen mit Erdrückleitung

Wir betrachten die in Abbildung B.1 gezeigte Leiterschleife mit Erdrückleitung. Der Draht mit Durchmesser $2r$ verläuft parallel zur ebenen Erdoberfläche ($y = 0$) in der Höhe $y = h$. Für den spezifischen Widerstand der Erde kann ein wirksamer Mittelwert ϱ angenommen werden. Der über das Leiterseil fließende Nullstrom \underline{I}_0 findet seinen Rückweg über das Erdreich, dementsprechend ergibt sich dort eine bestimmte Stromdichteverteilung. Nun kann man sich vereinfacht den Erdrückstrom als konzentrierten, in der Tiefe $y = -\delta$ verlaufenden Strom vorstellen. Diese *Erdstromtiefe* δ ist dabei von der Frequenz und von der Leitfähigkeit des Erdreichs abhängig:

$$\delta = \sqrt{\frac{3.42 \cdot \varrho}{\omega \mu_0}} \quad (\text{B.1})$$

Hier ist $\omega = 2\pi f$ die Frequenz des Wechselstroms in rad/s und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am die Permeabilität des luftleeren Raumes. Mit ϱ in Ωm ergibt

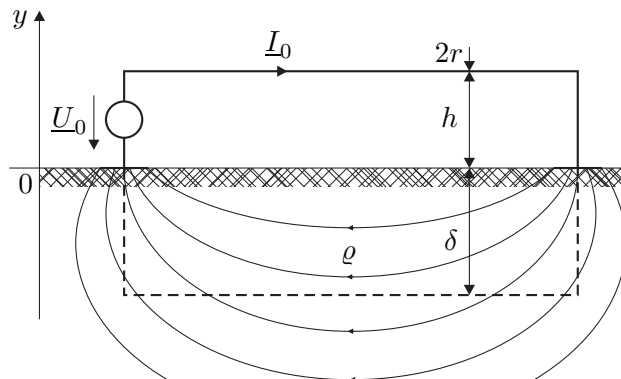


Abbildung B.1. Leiter-Erde-Schleife.

Tabelle B.1. Spezifischer Widerstand der Erde und Erdstromtiefe für unterschiedliche Bodenarten [24].

Art des Erdreichs	Moorboden	Lehm- und Ackerboden	Feuchter Sand	Trockener Sand oder Kies	Steiniger Boden
ϱ in Ωm	30	100	200	1000	3000
δ in m	510	930	1320	2940	5100

sich δ in m. Wir stellen fest, dass die Erdstromtiefe

- mit steigender Frequenz abnimmt und
- mit steigender Leitfähigkeit zunimmt.

Tabelle B.1 gibt einige typische Werte für die Erdstromtiefe in Abhängigkeit vom spezifischen Erdwiderstand bei $f = 50$ Hz an. Im nördlichen Alpenvorland geht man üblicherweise von Leitfähigkeiten zwischen 100 und 200 Ωm aus. Zu beachten ist, dass metallische Rohrleitungen, Zäune, Leitplanken oder andere Bebauungen den Erdwiderstand sowie die Erdstromtiefe erheblich beeinflussen können.

Mit der Annahme $h \ll \delta$ (siehe Tabelle B.1) kann ein vereinfachter Ausdruck für die Schleifenimpedanz pro Längeneinheit angegeben werden [24]:

$$\underline{Z}'_{LE} = R' + \frac{\omega\mu_0}{8} + j\frac{\omega\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{\delta}{r} + \frac{\mu_r}{4} \right) \quad (\text{B.2})$$

Diese Gleichung ist im Bereich 50 Hz bis 20 kHz mit ausreichender technischer Genauigkeit gültig. Die einzelnen Terme in (B.2) haben folgende Bedeutung:

- R' ist der Wirkwiderstand des Leiterseils pro Längeneinheit.
- $\frac{\omega\mu_0}{8}$ entspricht dem Wirkwiderstand der Erdrückleitung pro Längeneinheit. Man beachte, dass die Leitfähigkeit der Erde in diesem Ausdruck nicht enthalten ist. Dies resultiert aus der oben getroffenen Annahme $h \ll \delta$, welche laut (B.1) ein hohes ϱ , also schlechte Leitfähigkeit des Bodens impliziert.
- $\frac{\omega\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r}$ entspricht der äusseren Reaktanz der Schleife pro Längeneinheit.
- $\frac{\omega\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\mu_r}{4}$ ist die innere Reaktanz des Leiterseils pro Längeneinheit.

B.2 Nullimpedanz von Drehstromfreileitungen

Die Nullimpedanz von Drehstromfreileitungen ist stark vom Vorhandensein eines Erdseiles¹ abhängig. Wie in Abbildung B.2 dargestellt teilt sich bei einer Leitung mit Erdseil der Rückstrom auf das Erdseil (\underline{I}_S) und das Erdreich (\underline{I}_E) auf.

Nullimpedanz ohne Erdseil Abbildung B.2 (oben) zeigt eine Dreiphasenfreileitung ohne Erdseil. Jede dieser stromdurchflossenen Leiterschleifen erzeugt einen magnetischen Fluss, der (teilweise) auch die anderen beiden Leiterschleifen durchdringt. Unter Berücksichtigung dieser gegenseitigen induktiven Kopplung erhalten wir

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_0 \underline{Z}_{0RR} + \underline{I}_0 \underline{Z}_{0RS} + \underline{I}_0 \underline{Z}_{0RT} \quad (\text{B.3a})$$

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_0 \underline{Z}_{0SR} + \underline{I}_0 \underline{Z}_{0SS} + \underline{I}_0 \underline{Z}_{0ST} \quad (\text{B.3b})$$

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_0 \underline{Z}_{0TR} + \underline{I}_0 \underline{Z}_{0TS} + \underline{I}_0 \underline{Z}_{0TT} \quad (\text{B.3c})$$

$$(\text{B.3d})$$

Hier ist $\underline{Z}_{0RR} = \underline{Z}_{0SS} = \underline{Z}_{0TT}$ die Schleifenimpedanzen nach Gleichung B.2. $\underline{Z}_{0RS}, \underline{Z}_{0RT}, \dots, \underline{Z}_{0TS}$ stellen Koppelimpedanzen zwischen zwei Leiterschleifen mit Rückleitung über Erde dar und können näherungsweise wie folgt berechnet werden [24]:

$$\underline{Z}'_{nm} = \frac{\omega \mu_0}{8} + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \quad (\text{B.4})$$

Hier ist \underline{Z}'_{nm} die Koppelimpedanz pro Längeneinheit zwischen den Leitern/Phasen n und m ; d_{nm} ist der Abstand der beiden Leiter. Damit ergibt sich die Nullimpedanz (pro Längeneinheit) einer Drehstromfreileitung ohne Erdseil zu

$$\underline{Z}'_0 = R'_0 + jX'_0 = R' + 3 \frac{\omega \mu_0}{8} + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left(3 \ln \frac{\delta}{\sqrt[3]{rD^2}} + \frac{\mu_r}{4} \right) \quad (\text{B.5})$$

wobei D der mittlere geometrische Abstand zwischen den Phasenleitern ist.

Nullimpedanz mit Erdseil Ist auch ein Erdseil vorhanden, so muss die Impedanz der Schleife Erdseil-Erde und deren Koppelimpedanz zu den Phasenstromkreisen berücksichtigt werden. Entsprechende Gleichungen werden in [24] angegeben.

¹Es können auch mehrere Erdseile vorhanden sein. In erster Linie dienen Erdseile als Fangvorrichtung für Blitzeinschläge. Daneben erfüllen sie aber noch andere Aufgaben: Durch das Erdseil kommt es zur Parallelschaltung der Masterdungen, was zu verbesserten Erdungsverhältnissen führen kann. Ausserdem verringert ein Erdseil die induktive Fernwirkung der Leitung.

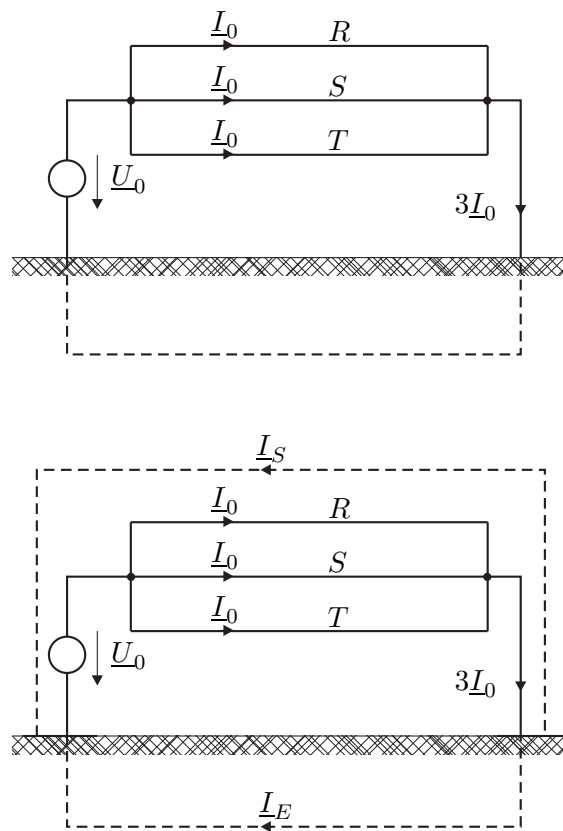


Abbildung B.2. Dreiphasenfreileitung ohne (oben) und mit (unten) Erdseil.

Tabelle B.2. Typische Werte für die Mit- und Nullimpedanzen von Hochspannungsfreileitungen; Donaumastbild, ein System pro Mast, ein Erdseil [24].

Nennspannung	Bündel-leiter	Mitimpedanz \underline{Z}'_M in Ω/km	Nullimpedanz \underline{Z}'_0 in Ω/km
110 kV	nein	$0.12 + j0.39$	$0.31 + j1.38$
220 kV	2er	$0.06 + j0.30$	$0.16 + j0.98$
380 kV	4er	$0.03 + j0.26$	$0.13 + j0.91$

Neben dem Vorhandensein eines Erdseils wird die Nullimpedanz einer Leitung vor allem durch das Mastbild (geometrische Anordnung der Leiter am Mast und Anzahl der Drehstromsysteme auf einem Mast) und die Leitfähigkeit des Erdreichs bestimmt. Tabelle B.2 zeigt einige typische Werte für Nullimpedanzen von Freileitungen.

Literaturverzeichnis

- [1] BERGEN, A. R. ; VITTAL, V.: *Power Systems Analysis*. 2nd edition. Prentice-Hall, 2000. – ISBN 0-13-691990-1
- [2] OEDING, D. ; OSWALD, B. R.: *Elektrische Kraftwerke und Netze*. 6. Aufl. Springer, 2004. – ISBN 3-540-00863-2
- [3] CRASTAN, V.: *Elektrische Energieversorgung 1*. Bd. 1. Springer, 2000. – ISBN 3-540-64193-9
- [4] INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. *Key World Energy Statistics 2007*
- [5] CHOW, J. ; KOPP, R. J. ; PORTNEY, P. R.: Energy Resources and Global Development. In: *Science* Vol. 302 (2003), S. 1528–1531
- [6] ORGANISATION FOR NORDIC ELECTRICAL COOPERATION (NORDEL). *Nordel Annual Statistics 2007*
- [7] WEINGARTNER, H.: Wasserkraft – Energie mit Zukunft. In: *VA Tech Direkt* 01/2005 (2005)
- [8] SCHWEIZERISCHES BUNDESAMT FÜR ENERGIE. *Elektrizitätsstatistik 2007*
- [9] UNITED NATIONS DEVELOPMENT PROGRAMME. *Human Development Report 2005*
- [10] INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. *Renewables Information 2003*
- [11] KUNDUR, P.: *Power system stability and control*. McGraw-Hill, 1994. – ISBN 0-07-035958-X
- [12] GLAVITSCH, H.: *Leitungstheorie*. AMIV-Verlag, 1988
- [13] HAUBRICH, H.-J.: *Aachener Beiträge zur Energieversorgung*. Bd. 13: Elektrische Energieversorgungssysteme – technische und wirtschaftliche Zusammenhänge. Verlag der Augustiner Buchhandlung, 1993
- [14] WEEDY, B. M. ; CORY, B. J.: *Electric power systems*. 4th edition. Wiley, 1998. – ISBN 0-471-97677-6

- [15] STCLAIRE, H. P.: Practical concepts in capability and performance of transmission lines. In: *AIEE Transactions* 72 (1953), S. 1152–1157
- [16] HANDSCHIN, E.: *Elektrische Energieübertragungssysteme*. 2. Auflage. Hühig, 1987. – ISBN 3-7785-1401-6
- [17] HEUCK, K. ; DETTMANN, K.-D. ; REUTER, E.: *Elektrische Energieversorgung; Erzeugung, Transport und Verteilung elektrischer Energie für Studium und Praxis*. 5. Auflage. Vieweg, 2002. – ISBN 3-528-48547-7
- [18] FLOSDORFF, R. ; HILGARTH, G.: *Elektrische Energieverteilung*. 8. Auflage. Teubner, 2003. – ISBN 3-519-26424-2
- [19] FORTESQUE, F. L.: Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks. In: *34th Annual Convention of the AIEE*. Atlantic City, NJ, 1918, S. 1027–1115
- [20] ANDERSON, P. M.: *Analysis of faulted power systems*. IEEE Press, 1995. – ISBN 0-7803-1145-0
- [21] POLLACZEK, F.: Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung. In: *Elektische Nachrichtentechnik* 9 (1926), Nr. 3, S. 339–359
- [22] CARSON, J. R.: Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return. In: *Bell System Technical Journal* 5 (1926), S. 539–554
- [23] HORAK, J.: Zero Sequence Impedance of Overhead Transmission Lines. In: *32nd Annual Western Protective Relay Conference (WPRC)*. Spokane, USA, 2005
- [24] HAPPOLDT, H. ; OEDING, D.: *Elektrische Kraftwerke und Netze*. 5. Auflage. Springer, 1978. – ISBN 3-540-08305-7
- [25] BALZER, G. [u. a.]: *Switchgear Manual*. 9th edition. ABB Calor Emag Schaltanlagen AG, Mannheim, Germany; Cornelsen Verlag, Berlin, 1995. – ISBN 3-464-48234-0