1 Matrizen

$$A^{m\times n} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{ij} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n}\right\} m$$

Mögliche Eigenschaften von Matrizen

symmetrisch $A = A^T$ $(\Rightarrow m = n)$

hermitesch $A = A^H$, A gleich ihrer konjugiert komplexen Transponierten

positiv definit $\forall x : x^H A x > 0$ $(x \neq 0$ A symmetrisch/hermitsch)
Matrix positiv definit $\Leftrightarrow \exists$ Choleskyzerlegung

positiv semidefinit $x^H A x \geqslant 0$ (x darf 0 sein)

orthogonal (unitär $\mathbb{C}$) $A \cdot A^T = I \longrightarrow A^{-1} = A^T$

A, B kommutieren $A \cdot B = B \cdot A$

1.0.1 Die Transponierte einer Matrix

Normalfall A^T

Zeilen und Spalten vertauschen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A besitzt komplexe Einträge

Hat A komplexe Einträge s definiert man $B = A^H$ als die $n \times m$ Matrix B mit $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $(\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta)$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+i & 1+1 \end{pmatrix}$$

1.1 Lineare Gleichungssyteme (LGS)

$A \cdot x = b$ Lösung: $x = A^{-1} \cdot b$
$\rightarrow m$ Gleichungen, n Unbekannte

Rang

Anzahl der linear unabhängigen Vektoren der Matrix (entspricht Anz. Zeilen $\neq 0$ der Matrix in Stufenform)

alle Vektoren unabhängig $\Rightarrow$ Rang vollständig, Matrix **regulär**, $m = n$
sonst Matrix **singulär**

homogen

$Ax = 0$ (rechte Seite $= 0$)

Lösungen von LGS

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \textit{hat genau} \\ \textit{eine Lösung} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} r = n = m \text{ oder} \\ \left\{ \begin{matrix} r = n < m \text{ und} \\ c_{r=1} = \dots = c_m = 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right. ,$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \textit{hat für jedes } \mathbf{b} \\ \textit{(mind.) eine Lösung} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow r = m,$$

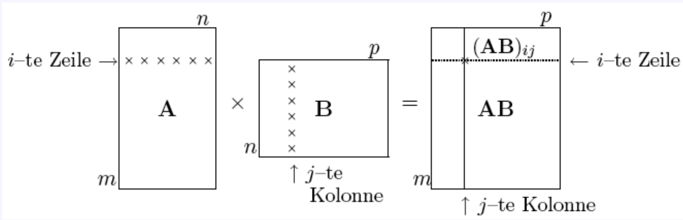
$$\left.\begin{matrix} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \textit{hat für jedes } \mathbf{b} \\ \textit{genau eine Lösung} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow r = m = n,$$

1.2 Rechnen mit Matrizen

Multiplikation

Matrixdimensionen: $m \times n \cdot n \times p = m \times p$

Multiplkationsalgorithmus



Man multipliziert alle $A_{1,j}$ mit den dazugehörign $B_{i,1}$ und addiert jeweils die Resultate $\Rightarrow$ ergibt das erste Element der Multiplikationsmatrix, Schritt wiederholen für alle $A_{i,j}$ und $B_{i,j}$

$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$
$A \cdot B^T = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j^T$ oder $(A^T B)_{ij} = a_i^T b_j$ wobei a_j der j-te Kolonnenvektor von A ist

Rechnen mit Matrizen

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$	$AB \neq BA$ im Allgemeinen
$A + B = B + A$	wenn doch: AB kommutieren
$A(B + C) = (AB) + (AC)$	$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
$(A + B)^H = A^H + B^H$	$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$
$(AB)^H = B^H A^H$	$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$

1.3 Inverse der Matrix

Inverse Matrix

$A^{-1} :=$ Inverse von A $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

A invertierbar $\leftrightarrow A$ regulär

Rechenregeln

$(A^{-1})-1 = A$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

Gauss-Jordan-Algorithmus

Anwendung: Berechnung der Inversen und Lösen von linearen Gleichungssystemen

Inverse: Marix neben Einheitsmatrix. Umwandeln von A in

Einheitsmatrix, wobei dieselben Operationen auf I angewendet werden. Verändertes I ist A^{-1}

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

$$\vdots \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{A \to I} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}}_{I \to A^{-1}}$$

Inverse allgemeiner 2x2 Matrizen

$\triangle$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ wenn } a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \text{ dann}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \frac{1}{a_{12}} \end{pmatrix}$$

Normalfall

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ wenn } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Geschlossene Form

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T \text{ wobei: } C_{ij} = (-1)^{i+1} \det(A_{ij})$$

1.4 Normen

Norm

1-Norm (Manhattan Norm)

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

2-Norm (Euklidische Norm / Standardnorm)

$$||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^H \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

p-Norm

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

∞-Norm

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

Eigenschaften der Norm

Positiv definit $||x|| \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Symmetrisch

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Linear

$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Schwarz'sche Ungleichung

$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$

Dreiecksungleichung

$||x \pm y|| \leq ||x|| \cdot ||y||$

1.5 Skalarprodukt

Skalarprodukt, inneres Produkt

$\langle x, y \rangle = x^H y$

Eigenschaften SP

$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \qquad \langle x, x \rangle \geq 0$

$\langle x, ay + z \rangle = a \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

$\rightarrow \langle ax + z, y \rangle = \overline{a} \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

Winkel zwischen zwei Vektoren

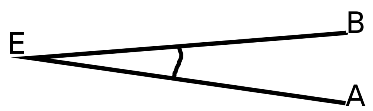
$\langle x, y \rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos(\alpha) \quad$ wobei $\alpha = \measuredangle(x, y)$

$\langle x, y \rangle = 0 \leftrightarrow x \perp y$

Winkel an einem Punkt

Der Winkel zwischen $\sphericalangle AEB$ ist definiert als der Winkel zwischen v_1 und v_2 wobei gilt:

$$v_1 = A - E \qquad v_2 = B - E$$



Winkel in C

$\cos(\phi) = \frac{Re\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$

1.6 Äusseres Produkt

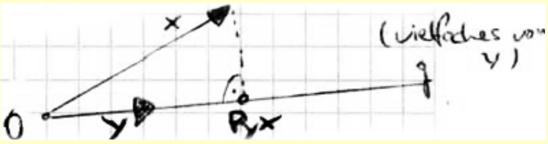
Äußeres Produkt

xy^H = Matrix Rang 1

Orthogonale Projektion

Projektion $P_y(x)$ des Vektors x auf Gerade y durch Ursprung

$P_y(x) = \frac{1}{||y||^2} \cdot yy^H x = uu^H x$ wobei $u = \frac{y}{||y||}$

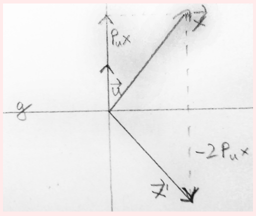


Householder-Spiegelung

Spiegelung an Hyper-spiegelebene (geg durch dazu orthogonalen Einheitsvektor u):

$$H_u = I - 2 \cdot uu^H$$

Ein Vektor wird durch $H_u x$ an der Hyperebene gespiegelt



1.7 Orthogonale / Unitäre Matrizen

Orthogonal $\mathbb{R}$, unitär $\mathbb{C}$

$A^H \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = A^H$

Eigenschaften

A unitär $\leftrightarrow A^{-1}$ unitär
A unitär, B unitär $\leftrightarrow$ AB unitär

Abbildungen mit A:

$||Ax|| = ||x||$ (längentreu)
$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ (winkeltreu)

2 Zerlegungen

2.1 LR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Wie Gauß-Algorithmus. Zusätzlich werden aber die Faktoren, die nötig waren um das Element an dieser Stelle zu eliminieren, in einer Matrix L gespeichert, wobei $l_{jj} = 1$. Der Faktor f bedeutet dann, dass die Pivotzeile im Eliminationsschritt mit f multipliziert und von der aktuellen Zeile *subtrahiert* wird.

Damit erhält man

$$PA = LR$$

wobei P die Permutationsmatrix ist, die die Zeilenvertauschungen mitführt

Vorteil gegenüber Gauß:
b wird nicht verändert $\rightarrow$ austauschen $\rightarrow$ leicht x neu berechnen

LGS aus LR lösen

Es sei $Ax = b$

$$\begin{aligned} (P)A &= LR & &\rightarrow L, R \\ Ly &= (P)b & &\rightarrow y \\ Rx &= y & &\rightarrow x \end{aligned}$$

Cholesky-Zerlegung

Berechne $\tilde{R}$ mit $A = \tilde{R}^H \tilde{R}$, A muss spd (*symmetrisch und positiv definit*) sein.

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } j < i \\ \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} |r_{ki}|^2} & \text{für } i = j \\ \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \overline{r_{ki}} r_{kj} \right) & \text{für } j > i \end{cases}$$

Anwendungen

spd-Test Wenn nicht spd, bricht Chol ab
LGS-lösen schneller als LR, geht aber nur wenn spd

3 Vektorräume

Vektorraum

Ein Körper, mit Vektoren als Elemente der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation

Axiome des Vektorraumes

(V1) $x + y = y + x$
(V2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(V3) es gibt ein Element $o \in V$ für das gilt $x + o = x$
(V4) $\forall x \in V \; \exists -x \in V$
(V5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
(V6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(V7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
(V8) $1x = x$

Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Unterraum, wenn $\forall x, y \in U \land \alpha \in \mathbb{E}$ gilt:

$$x + y \in U$$
$$\alpha x \in U$$

Beispiel: $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^n(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$
wobei C^n alle mind. n mal ableitbaren Funktionen und $\mathcal{P}_n$ die Polynome mit Maximalgrad n sind

Erzeugendensystem

spannt einen Vektorraum auf
$\text{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Basis

Lineareres unabhängiges Erzeugendensystem

Linearkombination

Jeder Vektor x ist als Linearkombination darstellbar:
$\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n = x$

Linear unabhängig
Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn kein Vektor eine Linearkombination der Anderen ist, Test mit Gauss:
$Ax = 0$ hat nur triviale Lös. $x = \overrightarrow{0}$

3.1 Basiswechsel

Transformationsmatrix
führt den Wechsel zwischen zwei Basen B und B' durch. ξ ist der Koordinatenvektor vom Vektor x bzgl. der Basis B

Jeder Vektor in der neuen Basis lässt sich als Linearkombination der alten Basis schreiben:

$$b'_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} \cdot b_i \qquad \text{'wir setzen } T = (\tau_{ik})_{ik=1}^{n}$$
$$B' = B \cdot T \qquad T \text{ Transformationsmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -8 & -27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_0(x) = t^3, \quad p_1(x) = (t-1)^3, \quad p_2(x) = (t-2)^3, \quad p_3(x) = (t-3)^3$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R}^4_{\{p_0,p_1,p_2,p_3\}} \arrow[dl, shift left, Rightarrow, "\mathbf{P}"] \arrow[dd, shift left, Rightarrow, "\mathbf{T}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}"] \\
\mathcal{P}_3 \arrow[r, Rightarrow, "\kappa_{\{1,t,t^2,t^3\}}"] & \mathbb{R}^4_{\{m_0,m_1,m_2,m_3\}} \arrow[ur, shift left, Rightarrow, "\mathbf{P}^{-1}"] \arrow[dr, shift right, Rightarrow, "\mathbf{Q}^{-1}"'] & \\
 & & \mathbb{R}^4_{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}} \arrow[uu, shift left, Rightarrow, "\mathbf{T}^{-1}"] \arrow[ul, shift right, Rightarrow, "\mathbf{Q}"']
\end{tikzcd}$$

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = 1+t, \quad q_2(x) = 1+t+t^2, \quad q_3(x) = 1+t+t^2+t^3$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Formeln
$\xi' = T^{-1} \cdot \xi \quad \xi = T \cdot \xi'$
$B' = B \cdot T \quad B = B' \cdot T^{-1}$
$B \cdot \xi = x = B' \cdot \xi'$

B = ***Standardbasis*** $\mathbb{I}$
Ist B *Standardbasis*, also $\mathbb{I}$, so gilt:
$B' = B \cdot T = \mathbb{I} \cdot T \to T = B'$

Abb. A in *sich*
Bei zwei Abbildungen A und C: $C = T^{-1}AT$

$$\begin{array}{cccl}
\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{\mathbf{A}} & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^m & \text{(Koordinaten bzgl. "alten" Basen)} \\
\mathbf{T}^{-1} \downarrow\uparrow \mathbf{T} & & \mathbf{S}^{-1} \downarrow\uparrow \mathbf{S} & \text{(Koordinaten-transformation)} \\
\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{\mathbf{B}} & \boldsymbol{\eta}' \in \mathbb{E}^m & \text{(Koordinaten bzgl. "neuen" Basen)}
\end{array}$$

4 Lineare Abbildungen

Abbildung
$F : X \to Y$ ist eine Abbildung

X ist der Definitionsbereich dom(F), Y der Zielbereich range(F) und die Menge der tatsächlich angenommenen Werte aus Y heißt Wertebereich im(F).

injektiv $\quad \forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$
Jedes Element Zielbereich **höchstens** einmal

surjektiv $\quad \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$
Jedes Element Zielbereich **mindestens** einmal

bijektiv / isomorph
Jedes Element Zielbereich **genau** einmal, surjektiv und injektiv
Ist eine Abbildung F bijektiv, dann gibt es eine inverse Abbildung F^{-1}

Zusammengesetzte Abbildungen
$G \circ F(x) = G(F(x)) = G \cdot F \cdot x$

Lineare Abbildung
Eine Abbildung ist linear, falls

1. $F(x + \tilde{x}) = F(x) + F(\tilde{x})$
2. $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

oder: $F(\beta x + \gamma \tilde{x}) = \beta F(x) + \gamma F(\tilde{x})$

Wichtige lineare Abb.
C^n repräsentiert eine mind. n mal ableitbare Funktion f

Ableitungsoperator $D : C^1 \to C$, $f \mapsto f'$

Differentialoperator $L : C^m \to C$, $f \mapsto c_m f^{(m)} + c_{m-1} f^{(m-1)} + \cdots + c_1 f' + c_0 f$

Evaluationsabb. t fest, $E_t : C \to \mathbb{R}$, $f \mapsto E_t f :\equiv f(t)$

Multi'op. $M : C \to C$, $f \mapsto g$, wo $g(t) :\equiv t \cdot f(t)$

$\mathbf{F = M \circ D + E_2}$ $\ F : C^1 \to C$, $f \mapsto tf'(t) + f(2)$

Affine Abbildung
Eine affine Abbildung ist eine lineare Abbildung verknüpft mit einer Translation
$H : X \to y_0 + Y$, $x \mapsto y_0 + Fx$ mit F lineare Abb.

4.1 Kern, Bild

Kern
Die Menge der Vektoren $x \in \mathrm{dom}(F)$ für die gilt: $Fx = 0$
Mit A lin. Abb., $kerA = \mathcal{N}(A) =$ Nullraum

F injektiv $\leftrightarrow \ker(F) = 0$

Basis des Kerns von A
1. Reduziere A auf Zeilenstufenform
2. löse $Ax = 0$
3. Wähle in x jeweils einen der freien Parameter 1 und die anderen 0. Die dadurch gewonnenen Vektoren x_i sind die Basisvektoren des Kerns.

Bild
Menge der rechten Seiten b, für die $Ax = b$ eine Lösung hat
Mit A lin. Abb., $imA = \mathcal{R}(A) =$ Kolonnenraum

Basis des Bildes von A
1. Reduziere A auf Zeilenstufenform
2. Die Kolonnen, bei denen das Pivotelement $\neq 0$ ist, sind die Pivotkolonnen. Somit sind diese Kolonnen in der ursprünglichen Matrix A Basisvektoren des Kolonnenraums, also des Bildes von A

Dimensionsformel
$F : n \times m$-Matrix
$\dim X = m =$ Anz. Basisvektoren
$\dim \mathrm{im}\ F = \mathrm{Rang}\ F$
$\dim \ker F =$ Anz. freie Parameter

$\dim X - \dim \ker F = \dim \mathrm{im}\ F$

oder auch, da $\dim \mathrm{im}\ F = \mathrm{Rang}\ F$:
$\underline{\dim X - \dim \ker F = \mathrm{Rang}\ F}$

4.2 Orthonormalbasen

Basis orthogonal
Alle Vektoren paarweise orthogonal

Basis orthonormal
Alle Vektoren paarweise orthogonal und haben Länge 1

Gram-Schmidt Orthogonalisierung
$\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}$ linear unabhängige Vektoren (alte Basis)

$\mathbf{b_1} := \frac{\mathbf{a_1}}{\|\mathbf{a_1}\|}$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{k} &:= \mathbf{a_k} - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{b_j}, \mathbf{a_k} \rangle \cdot \mathbf{b_j} \\ \mathbf{b_k} &:= \frac{\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{k}}{\|\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{k}\|} \end{aligned}\right\} (k = 2, \dots, n)$$

$\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}$ paarweise orthonormale Vektoren (neue Basis)

4.3 Normen von lin. Abb und Matrizen

Matrixnorm

$$\|.\| : \mathbf{E}^{n\times n} \to \mathbf{R}, \quad A \mapsto \|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

positiv definit

$$\|F\| \geq 0$$
$$\|F\| = 0 \Rightarrow F = 0$$

homogen

$$\|\alpha F\| = |\alpha| \|F\|$$

Dreiecksungleichung

$$\|F + G\| \leq \|F\| + \|G\|$$

zusammengesetzte Abbildungen

$$\|F \circ G\| \leq \|G\| \|F\|$$

kompatibel mit den Vektornormen

$$\|Fx\|_Y \leq \|F\| \|x\|_X$$

Spektralnorm

$$\|A\|_2 :\equiv \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Bei einer Diagonalmatrix D gilt:

$$\|D\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} = \max_{1\leq k\leq n} |d_{kk}|^2 =$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max \left\{\sqrt{\omega};\ \omega \text{ Eigenwert von } A^H A\right\} \\ &= \max \left\{|\omega|;\ \omega \text{ Eigenwert von } A\right\} \end{aligned}$$
$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max \left\{\frac{1}{|\omega|};\ \omega \text{ Eigenwert von } A\right\}$$

Frobeniusnorm

$$\|A\|_F :\equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2}$$

4.4 Konditionszahl

Konditionszahl

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

2-Norm-Konditionszahl

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (\sigma_1 = \max\{EW(A)\} \quad \sigma_n = \min\{EW(A) \setminus 0\})$$

5 Methode der kleinsten Quadrate

Die Methoder der kleinsten Quadrate löst überbestimmte lineare Gleichungssysteme, welche im Allgemeinen keine Lösung haben. Wir wollen eine gute Näherung. Dazu minimieren wir die Länge des Residuenvektors des Gleichungssystems $Ax = y$
Dabei ist zu beachten, dass dabei eine Orthogonalprojektion auf die durch $A^H \cdot A$ aufgespannte Ebene ausgeführt wird.

Residuenvektor

$$r := y - Ax$$

Normalengleichung
Falls die Kolonnen von A linear unabhängig sind, ist r minimal, wenn:

$$x = (A^H A)^{-1} A^H y$$

$$\mathbf{A^H A x = A^H y}$$

5.1 QR-Zerlegung

QR-Zerlegung

1. Q aus Gram-Schmidt
$Q := B_{\text{Gram-Schmidt}}$
2. Rechtsdreiecksmatrix R berechnen
$r_{11} := \|\mathbf{a_1}\|$

$$\left.\begin{array}{ll} r_{jk} & := \langle \mathbf{b_j}, \mathbf{a_k} \rangle \quad (j = 1, \ldots, k-1) \\ r_{kk} & := \|\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{k}\| \end{array}\right\} k = 2, \ldots, n$$

Lösung kleinste Quadrate mit QR

$$Rx = Q^H y$$

TODO

Beispiel

Modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren mit Kolonnen-Pivot
Idee: vertauschen der Pivotkolonnen mit den Nullkolonne, wenn $Rang(A^{m\times n}) < n$

$q_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$
$\tilde{q}_i = a_i - q_1 \langle q_1, a_i \rangle \quad (i = 2, \ldots, n)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{wähle } p \geq k \text{ mit } ||\tilde{q}_p|| \neq 0 \text{ und vertausche} \\ \text{Kolonnen } p \text{ und } k. \text{ berechne:} \\ q_k = \frac{\tilde{q}_k}{||\tilde{q}_k||} \\ \tilde{q}_i = \tilde{q}_i - q_k \langle q_k, \tilde{q}_i \rangle \quad (i = k+1, ..., n) \\ \text{ist } ||\tilde{q}_{k+1}|| = \vdots = ||\tilde{q}_n|| = 0 \\ \text{so gilt } Rang(A) = k \text{ und man ist fertig} \end{array}\right\} (k = 2, ..., n)$$

6 Determinanten

Determinate
Zeigt an, ob ein Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht

Regel von Sarrus
$2 \times 2:$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Merke: Fischregel!

$3 \times 3:$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Determinante für $n \times n$-Matrix A
Es gilt: $\det A \neq 0 \iff \text{Rang} A = n \iff A$ ist regulär
Für $\det A$ gilt, mit v = Anz. durchgeführter Zeilenvertauschungen und r_{kk} = Pivotelement der reduzierten Matrix A:

$$\det A = (-1)^v \cdot \prod_{k=1}^{n} r_{kk}$$

Entwicklung nach Zeilen und Kolonnen
Untermatrix $A_{[k,l]}$ zum Element a_{kl} erhält man durch Streichen der Zeile k und Kolonne l von A.
Kofaktor $\kappa_{kl} :\equiv (-1)^{k+l} \cdot \det A_{[k,l]}$

Nun gilt für jede $n \times n$-Matrix A für jedes feste k bzw. jedes feste l die Formeln

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\kappa_{ki} = \sum_{i=1}^{m} a_{il}\kappa_{il}$$

Ein Beispiel für die Entwicklung nach der ersten Zeile ist der Laplacesche Entwichklungssatz (s. u.).

Laplacescher Entwickungssatz, Beispiel

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3$$

Für größere Matrizen einfach rekursiv anwenden!

Determinante einer Dreiecksmatrix
Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente

Determinante einer Block-Dreiecksmatrix
Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Determinante der Diagonalblockmatrizen
$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A \cdot \det D$ (Linksblocksdreiecksmatrix analog)

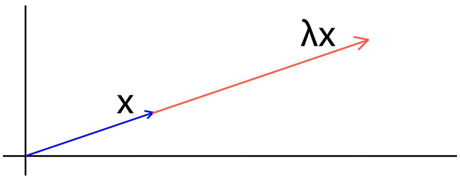
Eigenschaften
- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- Werden k Zeilen (oder Spalten) mit α multipliziert, ergibt sich $\det(A') = \alpha^k \cdot \det(A)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$
- $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$
- Nullzeile / Kolonne $\rightarrow \det(A) = 0$
- $\det(A)$ unverändert, wenn man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert
- Rang(A) $< n \rightarrow \det = 0$
- Sind A und B ähnlich, d. h. existiert X, sd. $A = X^{-1} \cdot B \cdot X$, dann gilt: $\det A = \det B$

Cramer'sche Regel
Lösen eines LGS mit Determinanten

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Die Matrix A_i entsteht aus der Matrix A, indem man die i-te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

7 Eigenwerte



Betrachte die Abbildung $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Eigenvektoren
x ist Eigenvektor (**EV**) von A, wenn er durch Multiplikation mit A nur um einen Wert λ gestreckt wird.

Die Eigenvektoren einer Matrix sind linear unabhängig

Eigenwerte
λ heißt Eigenwert (**EW**) der Abbildung A. Es ist der Wert, um den x gestreckt wird

Eigenwerte sind Diagonalelemente
Sei A eine $\triangle$-Matrix, so sind die EW die Diagonalelemente.

Spektrum
$\sigma(A) :\equiv$ Die Menge der Eigenwerte einer Matrix

Eigenraum (ER)
Ist λ EW, so ist der zugehörige Eigenraum E_λ gleich der um den Nullvektor erweiterten Menge der EV zu λ:
$E_\lambda :\equiv \{v \in V; Av = \lambda v\}$

geom. Vielfachheit
Die geometrische Vielfachheit eines EW λ ist gleich der Dimension von E_λ, also die Anz. EV von λ
$\dim E_\lambda = \dim(ker(A - \lambda I)) = n - \text{rang}(A - \lambda I)$

algbr. Vielfachheit
Die algebraische Vielfachheit eines EW λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des char. Polynoms

$\forall$ EW: geom. Vielfachheit $\leq$ algebr. Vielfachheit
(geom. = algebr. Vielfachheit $\Leftrightarrow$ Matrix diagonalisierbar $\leftrightarrow$ Wenn A lauter verschiedene EW hat, ist sie diagonalisierbar

Eigenschaften falls A sym./herm.
- Alle EW sind reell
- Kommen alle EV von verschiedenen EW, dann sind sie orthogonal
- Es existiert eine Eigenbasis (Basis aus EV), die orthogonal ist
- Für U unitär gilt: $U^H AU = D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$

Berechnung der EV und EW
1. Char. Polynom aufstellen

$$\text{chp}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \chi_A$$

2. Nullstellen (=Eigenwerte) bestimmten
3. Eigenvektoren berechnen

$$(A - \lambda_i I)v = 0 \text{ oder } Av = \lambda v \text{ lösen}$$

d. h. berechnen maximal vieler unabhängiger Lösungen durch Nullsetzen aller freien Parameter ausser einem, den wir auf 1 setzen (wiederholen für jeden Param.)

Eigenbasis
Basis aus Eigenvektoren

A, B ähnlich
A und B heißen ähnlich, wenn

$$A = TBT^{-1} \quad B = T^{-1}AT$$

$\rightarrow$ A,B: gleiche Spur, Det und Eigenwerte

Zu A gibt es eine ähnliche Diagonalmatrix D gdw. $\exists$ Eigenbasis von A

Eigenwertzerlegung (Spektralzerlegung)
Zu A gibt es die ähnliche Diag.Matrix Λ genau dann, wenn es eine Eigenbasis von A gibt. Für diese Basis V gilt:

$$AV = V\Lambda \quad A = V\Lambda V^{-1}$$

wobei V eine Matrix mit den Eigenvektoren als Spalten und Λ eine Matrix mit den Eigenwerten in der Diagonalen ist (kann evt. nicht funktionieren)

A heißt diagonalisierbar, wenn Λ eine Diagonalmatrix ist

Spur von A
Die Spur von A ist gleich der Summe der Diagonalelemente von A

Spezialfall A ($n = 2, 3$)
$n = 2$: $\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$
$n = 3$: $\text{chp}(\lambda) = \lambda^3 - \text{spur}(A) \cdot \lambda^2 +$
$(\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3)) \cdot \lambda - \det(A)$

wobei A_i die 2×2 - Matrix A ohne die i-te Zeile und Spalte ist.

7.1 Funktionen von Matrizen

Anwenden einer Funktion

$$f(\Lambda) := \text{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$$
$$f(\Lambda) := Vf(\Lambda)V^{-1}$$

e-Funktion

$$e^A = V \cdot e^\Lambda V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} V^{-1}$$

7.2 Anwendungen der Eigenwertzerlegung

Schema für homogene, lineare Differentialgleichungen
Gegeben ist ein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \ldots + a_{2n}y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \ldots + a_{nn}y_n(t) \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen:

$$y_1(0) = x_1 \quad y_2(0) = x_2 \quad \cdots \quad y_n(0) = x_n$$

Schreibe das System um:

$$y'(t) = Ay(t)$$

und erstelle die Eigenwertzerlegung von $A = V\Lambda V$

$$\underbrace{V^{-1}y'(t)}_{z'(t)} = \underbrace{V^{-1}AV}_{\Lambda}\underbrace{V^{-1}y(t)}_{z(t)} \xrightarrow{subst.} z'(t) = \Lambda z(t)$$

Das durch Substitution entstandene System $z'(t) = \Lambda z(t)$ hat nun die allgemeine Lösung:

$$\left.\begin{aligned} z_1(t) &= \gamma_1 e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ z_2(t) &= \gamma_2 e^{\lambda_n t} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow z(t) = e^{t\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow z(t) = c \cdot e^{t\Lambda}$$

Die allgemeine Lösung lautet nun:

$$y(t) = Vz(t) = Ve^{t\Lambda}c$$

8 Singulärwertzerlegung

Sei A eine "hohe" $m \times n$ Matrix. mit $m \geqslant n$ und $Rang(A) = n$. So ist die Matrix $A^T \cdot A$ symmetrisch, positiv definit und invertierbar. So lässt sich in A^TA in Eigenvektoren und Eigenwerte zerlegen:

$$\begin{aligned} A^TA &= V\Lambda V^T \\ \text{wobei } \Lambda = \Sigma \cdot \Sigma = \Sigma^2 \text{ da } \Sigma \text{ Diagnoalmatrix } \Sigma &= \sqrt{\Lambda} \\ A^T \cdot A &= V\Sigma\Sigma V \\ &\text{umgeformt...} \\ \underbrace{(A \cdot V \cdot \Sigma^{-1})^T}_{U_1^T} \cdot \underbrace{(A \cdot V \cdot \Sigma^{-1})}_{U_1} &= I \\ U_1 = AV\Sigma^{-1} \text{ ist eine orthogonale } m \times n \text{ Matrix.} \end{aligned}$$

Die Singulärwertzerlegung der Matrix A ist nun folgendermassen definiert:

$$A \cdot V \cdot \Sigma^{-1} = U_1 \Rightarrow AV = U_1 \cdot \Sigma$$

$$\mathbf{A = U_1 \cdot \Sigma \cdot V^T}$$

$U_1 = A \cdot V \cdot \Sigma^{-1}$
V: Eigenvektoren von $A^T \cdot A$
$\Sigma = \sqrt{\Lambda}$: Eigenwerte von $A^T \cdot A$

U = Eigenvektoren von $A \cdot A^T$
(Orthonormale Basis im Spaltenraum von A)
V = Eigenvektoren von $A^T \cdot A$
(Orthonormale Basis im Zeilenraum von A

Matlab
Eigenwerte und Eigenvektoren

```
[U,V]=eig(A)
```

Singulärwertzerlegung

```
[S,V,D]=svd(A)
```

9 Endliche Arithmetik

IEEE Floating Point Standard

Single Precision (32Bit)

$\underbrace{0}_{}^{S}$ $\overbrace{1 \ldots 8}^{e}$ $\overbrace{9 \ldots 31}^{m}$

Double Precision (64 Bit)

$\overbrace{0}^{S}$ $\overbrace{1 \ldots 11}^{e}$ $\overbrace{12 \ldots 63}^{m}$

Umwandlung IEEE $\leftrightarrow$ Dez

Single: $a = (-1)^S \cdot 2^{e-127} \cdot 1,m$

Double: $a = (-1)^S \cdot 2^{e-1023} \cdot 1,m$

Bsp: $m = 010010\ldots0 = 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{32} + \ldots + 0$

Umwandlung Dez $\leftrightarrow$ IEEE

	30	$\rightarrow$	/2		15		$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	/2	$\rightarrow$
	$\downarrow$				$\downarrow$						
Bsp 30,4	gerade				ungerade						
	$\downarrow$				$\downarrow$						
	0				1						
0.4	$\rightarrow$ *2	$\rightarrow$	0.8	$\rightarrow$	*2	$\rightarrow$	1.6	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	
$\downarrow$			$\downarrow$				$\downarrow$				
<1			<1				≥ 1				
$\downarrow$			$\downarrow$				$\downarrow$				
0			0				1				

Ausnahmen

	$m = 0$	$m \neq 0$
$e = 255$	$\pm$ INF	NaN (Not A Number)
$e = 0$	Zahl 0	$a = (-1)^S \cdot 2^{-\mathbf{126}} \cdot 0,m$
		$\uparrow$ **Denormalisierte Zahlen**

normalisiert

$m = 1, \ldots$

Maschinengenauigkeit

Kleinste Zahl ϵ für die gilt $\epsilon + 1 \neq 1$

Single: 2^{-24}, Double: 2^{-53}

$m :=$ kleinste normalisierte positive Maschinenzahl

$\overline{m} :=$ kleinste denormalisierte positive Maschinenzahl

$m \cdot \epsilon = \overline{m}$

Absoluter / relativer Fehler

$e_{abs} = |\hat{c} - c|$

$e_{rel} = \frac{e_{abs}}{|c|}$

Auslöschung

Bei Subtraktion fast gleich grosser Zahlen wird das Ergebnis falsch. Bsp. 4-stellige Arithmetik: $\pi - 3.141 = 5.927 \cdot 10^{-4} \simeq 3.142 - 3.141 = 1.00 \cdot 10^{-3}$

Kahan-Summation

Mit Hilfe von Kahan kann man den Summationsfehler minimieren. Die Summe $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ berechnet sich wie folgt, wobei $\ominus$ und $\oplus$ fehlerbehaftete $+$ und $-$ darstellen.

Intitialisierung: $s_1 := x_1$, $c_1 := 0$

$$\left.\begin{array}{l} Y = x_j \ominus c_{j-1} \\ T = s_{j-1} \oplus Y \\ c_j = (T \ominus s_{j-1}) \ominus Y \\ s_j = T \end{array}\right\} \text{Für } j = 2, \ldots, n$$

10 Appendix

Horner-Schema

Idee: Algorithmus zur Auswertung eines Polynoms

Beispiel: $x^3 + 4x + 6$ an Stelle $x = 2$ lässt sich auch schreiben als $(((\mathbf{1}) \cdot x + \mathbf{0}) \cdot x + \mathbf{4}) \cdot x + \mathbf{6}$

1	0	4	6
+	+	+	+
0	$\cdot$x $\rightarrow$ x	$\cdot$x $\rightarrow$ x²	$\cdot$x $\rightarrow$ 4x+x³
1	x	4 +x²	6+4x+x³

Ergebnis: 22

Reguläre Matizen

Ist A regulär, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $\det(A) \neq 0$
- A ist invertierbar
- Alle Zeilen- / Spaltenvektoren linear unabhängig
- 0 ist kein Eigenwert von A
- $\ker(A) = 0$
- $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung

Matrix-Exponentialfunktion

$e^A = I + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$

$e^A = Ve^DV^{-1}$ falls A diagonalisierbar

A Matlab

Maschinengenauigkeit	eps
Transponieren	$A^T \rightarrow A'$
Bereich	$x =$ Anfang: Schritt: Ende
Betrag	abs(x)
LR-Zerlegung	$A = LU$, [L,U,P] = lu(A)
Cholesky-Zerlegung	$A = R^T \cdot R$, R = chol(A)
EW-Zerlegung	[V,D] = eig(A)
Determinante	det(A)

ones(n)	$n \times n$ Matrix mit lauter 1en
zeros(n)	$n \times n$ Matrix mit lauter 0en
eye(n)	$n \times n$ Einheitsmatrix
abs(a)	$\|a\|$, elementweise bei Matrix
$[m, n]$ = size(A)	Größe einer Matrix
norm(x)	Vektornorm
norm(x,p)	p-Norm
norm(x,inf)	∞-Norm
tril(A)/triu(A)	Unteres/oberes Dreieck (inkl. Diag.)
A^-1 = inv(A)	Inverses von A
$x = A\backslash b$	Lösung von $Ax = b$
diag(A)	Diagonale von A
sum(diag(A))	Spur von A
v=linspace(a,b,n)	$\leftrightarrow a : \frac{a-b}{n} : b$
axis([a,b,c,d])	Setze X- und Y-Achsen manuell
hold on bzw. off	Hält den aktuellen Plot
plot(x,y)	z.B. plot(cosx,sinx)
polar(ϕ, $r(\phi)$)	Plottet ϕ gegen $r(\phi)$
pol2cart(ϕ, r)	Wandelt Polar in Kart. Koord.
cart2sph(x,y,z)	Kart. nach Kugelkoord.

Achtung!
Semicolon nicht vergessen

A.1 Syntax

Operatoren	Bedeutung
.+, .−, .∗, ./, .^	Elementweise Operatoren
+, −, ∗, /, ^	Matrizen Addition, Multipl., etc.
A'	A^H
>, <, <=, >=, ~=, ==	Vergleichsoperatoren
&&, ||	Boolsche Operatoren

```
for i=1:5
end

while (a < A)
end

if (x == 1)
elseif (x == 2)
else
end

function [a,b] = name(arg1, arg2)
return;       % optional
end        % optional

function summe=test1(A)
[m,n]=size(A);
summe=0;      % Initialisierung
for i=1:m       % i geht von 1 bis m (Zeile)
for j=1:n      % j geht von 1 bis n (Spalte)
summe=summe+A(i,j);
end
```

```
end
```