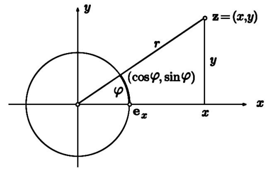
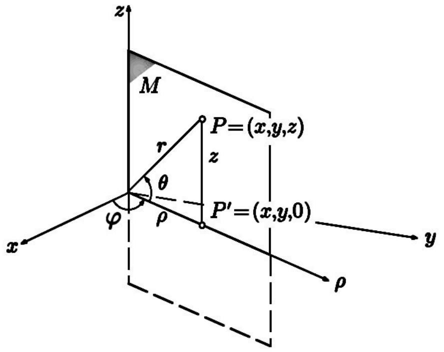
1 Koordinatentransformationen

$\mathbb{R}^2$: Polarkoordinaten (r, φ)



$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \cdot \sin\varphi \qquad \varphi = \arg(x, y)$$

$\mathbb{R}^3$: Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)



$$x = \rho \cdot \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho \cdot \sin\varphi \qquad \varphi = arg(x, y) \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$
$$z = z$$

$\mathbb{R}^3$: Kugelkoordinaten (r, φ, θ)

$$x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \qquad \varphi = arg(x, y) \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$
$$z = r \cdot \sin\theta \qquad \theta = arg\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$\mathbb{R}^3$: Elliptische Koordinaten $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$x = ar\cos\theta\cos\varphi \qquad \varphi \in (0 \leq \varphi < 2\pi)$$
$$y = br\cos\theta\sin\varphi \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$z = cr\sin\theta \qquad r \in [0, 1]$$

$\mathbb{R}^3$: Toruskoordinaten (φ, ϑ)

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi \qquad \varphi \in (0 \leq \varphi < 2\pi)$$
$$y = (R + r\sin\theta)\sin\varphi \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$z = r\sin\theta \qquad r \in [0, k] \quad k < R$$

Argument (auch Polarwinkel zwischen $Z(x, y)$ und $\vec{e}_x$)

$$\tan\varphi := \left(\frac{y}{x}\right) \to \arg(x, y) := \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x \geq 0 \\ -\arctan(\frac{y}{x}) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \frac{3}{2}\pi & x = 0, y > 0 \end{cases}$$

Regeln: $\arg z = \varphi \mod 2\pi$
$\arg(z_1 z_2) = (\arg z_1 + \arg z_2) \mod 2\pi$
$\arg \frac{z_1}{z_2} = (\arg z_1 - \arg z_2) \mod 2\pi$

Integralsubstitutionen bei Koordinatenwechsel $= |det(df)|$

Polarkoordinaten	$dxdy$	$\longrightarrow r \cdot drd\varphi$	Zylinderkoordinaten	$dxdydz$	$\longrightarrow \rho \cdot drd\varphi dz$
Kugelkoordinaten	$dxdydz$	$\longrightarrow r^2 \cdot cos(\theta) \cdot drd\varphi d\theta$	Toruskoordinaten	$drd\varphi d\theta$	$\longrightarrow r \cdot (R + r\cos\theta)\sin\varphi drd\varphi d\theta$

2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

komplexe Zahl
Ein $z \in \mathbb{C}$, wobei $i^2 = -1$.
$$z = x + iy = Re(z) + i \cdot Im(z)$$

reelle Zahlenebene z lässt sich bijektiv auf einer $\mathbb{R}^2$-Ebene darstellen

konjugiert wenn $z = x + iy$, dann ist $\overline{z} := x - iy$

Rechenregeln

Normalform $z = x + iy$

Polarkoordinaten
$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$$\varphi = \begin{cases} +\arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Euler'sche Form
$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$
$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
$1 = -e^{i\pi}$
$e^{i\varphi} = 1 \Leftrightarrow \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Realteil $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Addition $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

Multiplikation
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$

Potenz $z^n = [r \cdot e^{i\varphi}]^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

Betrag $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Wurzel $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{i\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)}$
$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, Hauptwert für $k = 0$

Konjugationen
$\overline{\overline{z}} = z$
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$

3 Mengenlehre

Definition von Mengen
durch Aufzählung $A = \{1, \pi, 3, ..\}$ oder durch Eigenschaften $A = \{x|\text{ist eine gerade Zahl}\}$

Leere Menge
$\emptyset$ oder $\{\}$ Die Menge, die kein Element enthält

ZFC: Extensionalität (Gleichheit von Mengen)
$A = B \longleftrightarrow \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Mengenbildung

Teilmenge $A \subseteq B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$
Schnitt $x \in A \cap B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ x \in B)$
Vereinigung $x \in A \cup B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \vee \ x \in B)$
Differenz $x \in A \setminus B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B)$
Symm. Differenz $x \in A \triangle B \leftrightarrow ((x \in A) \oplus (x \in B))$
Komplement $x \in \overline{A} \ \leftrightarrow \ x \notin A, \quad \overline{A} = U(\text{Grundmenge}) \setminus A$

Potenzmenge (= Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge)
$\mathcal{P}(A) = 2^A : x \in \mathcal{P} \ \leftrightarrow \ x \subseteq A$

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Rechenregeln für Mengen

Idempotenz	$A \cap A = A, \ A \cup A = A$
Kommutativität	$A \cap B = B \cap A, \ A \cup B = B \cup A$
Assoziativität	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Absorption	$A \cap (A \cup B) = A, \ A \cup (A \cap B) = A$

Komplement	$A \cap A' = \emptyset, \ A \cup A' = I$
Konsistenz	$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
Distributivität	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

de Morgan
$\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcap_{i=1}^k A_i^c \qquad \bigcap i = 1^k A_i = \bigcup_{i=1}^k A_i^c$

Beispiel: $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Beweis $x \in (A \cup B)^c \leftrightarrow x \notin (A \cup B)$
$x \in (A \cup B)^c \leftrightarrow x \notin (A \cup B)$
$\leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B)$
$\leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
$\leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$
für $\cap \cup$ analog einfach und und oder vertauschen

Ordnungsrelation
Reflexivität $\forall x \in X : x \leq x$
Transitivität $\forall x, y, z \in X : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
Identitivität $\forall x, y \in X : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
$(X, \leq)$ heisst *total* oder *linear geordnet*, falls gilt:
$\forall x, y \in X : x \leq y$ oder $y \leq x$

Äquivalenzrelation

Reflexivität	$\forall x \in X : x \sim x$
Symmetrie	$\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$
Transitivität	$\forall x, y, z \in X : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Zornsches Lemma
Zu jeder total geordneten Teilmenge L von M gibt es ein $m \in M$ mit $l \leq m, \forall l \in L$, eine *obere Schranke* für L
Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein maximales Element $m \in M$ mit $x \leq m$

Zwei Mengen X und Y heissen *gleichmässig*, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt

Für jede Menge X ist $P(X)$ mächtiger als X, das heisst es gibt keine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow P(X)$

Eine Menge X heisst *abzählbar*, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, das heisst es existiert eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$
Bsp. *Q ist abzählbar, $\mathbb{R}$ nicht abzählbar*

4 Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung $f : X \to Y$ ordnet jedem Punkt $x \in X$ genau ein Bild $y = f(x) \in Y$ zu.

X ist der **Definitionsbereich** $\mathrm{dom}(f)$, Y der **Zielbereich** $\mathrm{range}(f)$ und die Menge der tatsächlich angenommenen Werte aus B heisst **Bild- oder Wertebereich** $\mathrm{im}(f)$.

injektiv $\forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Jedes Element Zielbereich **höchstens** einmal bzw. besitzt höchstens ein Urbild

surjektiv $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$
Jedes Element Zielbereich **mindestens** einmal bzw.falls jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild $x \in X$ mit $f(x) = y$

bijektiv
Jedes Element Zielbereich **genau** einmal, injektiv und surjektiv. Eine bijektive Abbildung besitzt auch eine inverse Abbildung

Bijektivität einer Funktion zeigen
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

- Zeige die *Surjektivität*

  Mit ZWS $\forall y \in [f(a), f(b)] \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

  Via Stetigkeit Zeige, dass die Funktion auf dem Intervall I stetig ist (für $g(x)$ und $h(x)$ separat beweisen) (dann gilt der ZWS) und das gesamte Intervall abdeckt $\lim_{x \to \sup(I)} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x \to \inf(I)} f(x) \mp \infty$. Dann ist die Funktion Surjektiv.

- Zeige die *Injektivität*

  Mittels Monotonie Zeige, dass die Funktion $f(x)$ monoton fallend/wachsend ist (starke Bedingung)

  Ableitung betrachten Falls $f'(x) > 0 \forall x \in I$, dann ist die Funktion monoton wachsend (alternativ, fallend)

Urbildfunktion
Ist eine Funktion, welche den Bild- oder Wertebereich dem Definitionsbereich zuweist $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$
Achtung: f muss **nicht bijektiv** sein!

f ist bijektiv genau dann, wenn $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ genau ein Element enthält.
Falls f bijektiv ist, so heisst die Urbildfunktion auch Umkehrfunktion oder Inverse.

stetig
Eine Funktion ist stetig, wenn sie keine Sprungstellen im Graphen aufweist. Sie ist in einem Punkt P stetig, wenn der $lim_{x^+ \to P} = lim_{x^- \to P}$ mit anderen Worten, der rechtseitige Grenzwert ist gleich dem linksseitigen Grenzwert!

C^0-Funktionen
$f \in C^0$, falls f stetig.

C^1-Funktionen
$f \in C^1$, falls f' stetig ist.

C^2-Funktionen
Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$\frac{\delta}{x^i}\left(\frac{\delta f}{\delta x^j}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j} = \frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta f}{\delta x^i}\right) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Beispiel C^2-Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$f_{xy} = f_{yx}$$

Somit ist die Funktion $f(x,y)$ eine C^2 Funktion.

C^m-Funktionen
$f \in C^m(\Omega)$, falls f m-mal partiell Differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m stetig sind.

4.1 Stetige Funktionen

Lipschitzstetig
Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst Lipschitzstetig, wenn

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega \qquad L\text{: Lipschitzkonstante}$$

Eine Lipschitzstetige Funktion ist an jeder Stelle $x_0 \in \overline{\Omega}$ stetig ergänzbar

Stetigkeit einer Funktion
Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heisst stetig auf Ω falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ ist.

Folgenkriterium
$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen $x_k \in D$ die gegen x_0 konvergiert auch $f(x_k)$ gegen x_0 konvergiert. Also

$$x_k \to x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x_k) \to f(x_0)$$

ε-δ-Kriterium
$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Komposition von stetigen Funktionen
Seien $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to R^l$ stetig so ist auch $f \circ g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$, also deren Komposition, stetig.

5 Die reellen Zahlen

Aeblsche/ kommutative Gruppe

Assoziativität	$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$
Neutrales Element	$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$
Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$
Kommutativität	$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

d.h. $\mathbb{R}$ bildet eine *abelsche* Gruppe bezüglich der Addition
Die Multiplikation ist mit der Addition verträglich im Sinne des *Distributivgesetzes*:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + x) = x \cdot y + x \cdot z$

ordnungsvollständig
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \Rightarrow x + y \leq y + z$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad$ x $\leq y, 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
Zu je zwei nicht leeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b, \forall a \in A, b \in B$ gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit:
$\forall a \in A, b \in B : \quad a \leq c \leq b$
Somit ist $\mathbb{R}$ *ordnungsvollständig*, Q jedoch nicht!!

5.1 Supremum und Infimum

beschränkt, kompakt
$A \subset \mathbb{R}$ heisst *nach oben beschränkt*, falls gilt:
$\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in A : a \leq b$
Jedes derartige b heisst ***obere Schranke***

$A \subset \mathbb{R}$ heisst *nach unten beschränkt*, falls gilt:
$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : A \geq b$
Jedes derartige b heisst ***untere Schranke*** für A

Eine stetige Funktion ist kompakt, wenn f ein globales Maximum und Minimum annimmt.
M kompakt (z.B. $[a, b]$) $\quad\Rightarrow\quad \sup = \max = b \;\wedge\; \inf = \min = a \qquad sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

Supremum
Die kleinste *obere Schranke* von einer Menge A wird als *Supremum* von A bezeichnet. Diese Schranke muss in einem Intervall **nicht** angenommen werden.

Infimum
Die grösste *untere Schranke* von einer menge A Wird als *Infimum* von A bezeichnet. Diese Schranke muss in einem Intervall **nicht** angenommen werden.

Jedes Intervall respektiv Menge besitzt wenn sie nach oben beschränkt ist ein Supremum, wenn sie nach unten beschränkt ist ein Infimum!

Maximum
Ist ein spezieller Fall des Supremum, ist die kleinste obere Schranke einer Menge, welche tatsächlich angenommen wird.

Minimum
Ist ein spezieller Fall des Infimum, ist die grösste untere Schranke einer Menge, welche tatsächlich angenommen wird.

monoton wachsend
$A > B$ dann gilt $f(A) \geq f(B)$
wenn $f(A) > f(B)$ ist die Funktion **streng** monoton wachsend

monoton fallend
$A > B$ dann gilt $f(A) \leq f(B)$
wenn $f(A) < f(B)$ ist die Funktion **streng** monoton fallend

5.2 Polynome und komplexe Zahlen

Fundamentalsatz der Algebra (gekürzt)
Ein komplexes Polynom vom Grad n hat genau n (evt. doppelte und / oder komplexe) Nullstellen

Komplexe Nullstellen
Komplexe Nullstellen treten immer doppelt auf, d.h. ist z eine Nullstelle ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle.

6 Folgen und Reihen

6.1 Folgen

Konvergenz
$(a_n)_{n\in N}$ konvergiert gegen a, falls gilt: $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in N, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
In diesem Fall heisst a der *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in N}$

Nicht jede Folge $(a_n)_{n\in N}$ konvergiert. Zum Beispiel:
$a_n = (-1)^n, n \in N \quad a_n = n, n \in N$ Fibonaccizahlen

Divergenz
Falls eine Folge nicht konvergiert, divergiert die Folge

monotone Konvergenz
Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend, d.h. eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gilt:
$a_1 \leq a_2 \dots a_n \leq a_{n+1} \leq \dots b \quad \forall n \in N$ Dann ist a_n konvergent, und $lim_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in N} a_n$

Rechenregeln für Grenzwerte
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent mit $lim_{n\to\infty} a_n = n, lim_{n\to\infty} b_n = n$.
Dann konvergiert die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ $(b_n \neq 0)$

- $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = lim_{n\to\infty} a_n + lim_{n\to\infty} b_n$
- $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = lim_{n\to\infty} a_n \cdot lim_{n\to\infty} b_n$
- $lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$, falls zusätzlich $b_n \neq 0 \neq b$
- Falls $a_n \leq b_n$ für $n \in N$, so auch $a \leq b$

beschränkt
$(a_n)_{n\in N}$ ist beschränkt, falls gilt:
$\exists C \in \mathbb{R} \forall n \in N : \quad ||a_n|| \leq \mathbb{C}$

Falls $(a_n)_{n\in N}$ konvergent ist, dann ist $(a_n)_{n\in N}$ beschränkt
Achtung: Beschränktheit ist notwendig, aber nicht hinreichend für Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend, dann ist $(a_n)_{n\in N}$ konvergent

Grenzwert/ Häufungspunkt
Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge. Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\in N}$, falls gilt:
$\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Beispiel Häufungspunkt
Die Folge $a_n = (-1)^{n+1}$ besitzt die Häufungspunkte $+1$ und -1.

Bolzano Weierstrass
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch mindestens einen Häufungspunkt.

Limes superior
Der *limsup* bezeichnet den grössten Grenzwert. Wenn die Menge nicht beschränkt ist, also ins $+\infty$ geht, ist der $limsup = +\infty$

Limes inferior
Der *liminf* bezeichnet den kleinsten Grenzwert. Wenn die Menge nicht beschränkt ist, also ins $-\infty$ geht, ist der $limsup = -\infty$

Cauchy-Folgen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \epsilon$$

Für alle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen, sie sind somit in $\mathbb{R}$ konvergent und beschränkt

harmonische Reihe
Bsp. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{k} \quad n \in \mathbb{N}$
konvergiert nicht und ist somit auch keine Cauchy-Folge, da:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

alternierende harmonische Reihe
Bsp. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad n \in \mathbb{N}$
ist eine Cauchy Folge, da

$$|a_n - a_l| \leq \frac{1}{l} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

Satz von L'Hôpital

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{nur falls} \quad (\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \vee \infty)$$

BSP Konvergenz einer Reihe
Gegeben sei eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die gegen den Wert a konvergiert. Zeige nun, dass das arithm. Mittel der Summe von $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ auch gegen a konvergiert . Idee Zeige, dass $|a - s_n|$ konvergiert.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a - s_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N_0$$

$$\text{da } a_n \to a \text{ existiert ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass gilt: } |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

$$|a - a_n| = \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a \right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a - a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |a - a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} \underbrace{|a - a_k|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

Der zweite Term is nun $\leq \frac{n-n_0}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$
Der erste Term wird nun folgendermassen abgeschätzt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |a - a_k| \leq \frac{n_0}{n} \cdot \max\{|a_k - a| : \quad 1 \leq k \leq n_0\} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{falls } n \geq \max\left\{ n_0, \frac{n_0 \cdot \max\{|a_k - a| : \quad 1 \leq k \leq n_0\}}{\frac{\epsilon}{2}} \right\} := N_0 \quad \text{(das } N_0 \text{ der Cauchyfolge)}$$

Also gilt:

$$|a - s_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0 \text{ (mit entspr. } N_0)$$

6.2 Reihen

6.2.1 Grenzwerte

Grenzwert

Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert a falls gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Tricks zur Bestimmung der Grenzwerte

$u(x)v(x) = \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$, falls $\lim u(x)v(x) = 0 \cdot \infty$

$u(x)v(x) = \frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$, falls $\lim u(x)v(x) = \infty \cdot 0$

$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$, falls $\lim u(x)^{v(x)} = 0^0, \infty^\infty, 1^\infty$

$u(x) + v(x) = \frac{[u(x)+v(x)][u(x)-v(x)]}{u(x)-v(x)}$

$u(x) - v(x) = \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)v(x)}}$, falls $\lim u(x) - v(x) = \infty - \infty$

$u(x)$ erweitern mit $\frac{u(x)}{u(x)}$

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{u(x)} + v(x)$ erweitern mit $\frac{\sqrt{u(x)} - v(x)}{\sqrt{u(x)} - v(x)}$

$\frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ erweitern mit $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

6.3 Konvergenz

Partialsumme

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Folge der **Partialsummen**
$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad n \in \mathbb{N}$

eine Folge ist konvergent

falls $lim_{n \to \infty} A_n = lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

absolute konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

Cauchy

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn gilt
$|\sum_{k=l}^{n} a_k| \to 0 (n \leq l, l \to \infty)$

Quotientenkriterium

Sei $a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}$

- Falls $lim_{k \to \infty} sup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
- falls $lim_{k \to \infty} sup \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Wurzelkriterium

- falls $lim_{k \to \infty} sup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe
- falls $lim_{k \to \infty} sup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert die Reihe

ist stärker als Quotientenkriterium

Majorantenkriterium

Gibt es eine Reihe $M = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und gilt $\quad |a_i| \leq |b_i|$

Dann wird R von M majorisiert $\quad \Rightarrow \quad$ Wenn M konvergiert, dann konvergiert auch R

Die Kriterien sind Kriterien für die ***absolute konvergenz***
wichtig: die Bedingung, dass $a_k \to 0 (k \to \infty)$ ist *notwendig* aber nicht hinnreichend, bsp. harmonische Reihe

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen (hinreichend)

Eine alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ konvergiert, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots \qquad \text{und} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Beweisideen um die Konvergenz von Reihen/Folgen zu beweisen

- Cauchy (siehe BSP oben)
- Quotientenkriterium anwenden
- Konvergenz und Beschränktheit durch Induktion beweisen
- Wurzelkriterium
- Das Majorantenkriterium anwenden
- Abschätzen anhand von Folgen/Reihen, deren Konvergenz man kennt.

Abschätzen von Reihen mit uneigentlichen Integralen

Sei $f(x)$ stetig auf $[n_0, \infty)$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ und monoton fallend $(f(x) \to 0 (x \to 0)$, $a_n = f(n))$.

- $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$ divergiert falls

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{divergiert (Obersumme)} \qquad \left(\sum a_n \geq \int f(x)dx\right)$$

- $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert falls

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{konvergiert (Untersumme)} \qquad \left(\sum a_n - a_{n_0} \leq \int f(x)dx\right)$$

Konvergenz und Beschränktheit via Induktion beweisen

Die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}, \quad n \geq 1$$

Bestimme den Grenzwert. (Als Hinweis sei gegeben, dass man beweisen muss, dass diese Folge wächst und durch $c = 2$ beschränkt ist).

$$\begin{aligned}
\text{Beh 1} \quad & a_n \leq 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\
\text{Beweis durch Induktion} \quad & a_1 = 1 \leq 2 && \checkmark \\
\text{Schritt} \quad & n \to n+1 \\
& \text{da } a_n \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1+2} \leq 2 && \checkmark \\
\\
\text{Beh 2} \quad & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist monoton wachsend, d.h. } a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\text{Beweis durch Induktion} \quad & a_1 = 1 \leq \sqrt{1+1} = a_2 && \checkmark \\
\text{Schritt} \quad & n \to n+1 \\
& \text{da } a_n \leq a_{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2} && \checkmark \\
& \text{dies gilt, da es ja schon für die vorhergehenden Elemente galt}
\end{aligned}$$

Weil jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge konvergent ist, konvergiert $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Falls also a der Grenzwert der Folge ist, muss a festbleiben so lässt sich a relativ einfach bestimmen:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{1+a} \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 = a + 1 \ (a \text{ wächst nicht, wenn }) \\
a &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

6.3.1 Potenzreihen / Konvergenzradius

Potenzreihe

Eine Potenzreihe ist eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um einen Entwicklungspunkt x_0 gegeben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad \text{Potenzreihe mit den Koeffizienten } a_n \text{ um den Entwicklungspunkt } x_0$$

Die wichtigste Frage ist nun für welche x diese Reihe konvergiert. Dazu genügt es den Spezialfall $x = 0$ zu beachten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Als Konvergenzradius einer Potenzreihe der Form $\sum a_k(z-a)^k$ ist die grösse Zahl r definiert für welche die Potenzreihe $\forall x$ mit $|x - x_0| < r$ konvergiert

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| && \text{(Quotientenkriterium)} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} && \text{(Wurzelkriterium)} \end{aligned}$$

Konvergenzradius
Mittels Potenzreihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \qquad s \text{ ist eine Potenreihe, } a_k = 1$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

diese Reihe konvergiert nun für $x < 1 = R$

Konventionell (beachte, dass hier einfach das hier einfach das Quotientenkriterium für Reihen angewandt wird und der Endwert so abgeschätzt wird, dass die Reihe konvergiert.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{q^n}{q^{n+1}}\right| = |q| < 1 \qquad \text{(Falls also } q < 1 \text{ Konvergiert die Reihe)}$$

Beachte, dass hier der Konvergenzradius von $|q|$ berechnet wird. Falls also $a_n = (-1)^n b_n$ muss der negative Fall auch noch beachtet werden.

6.4 Konvergenz von Funktionenfolgen

Punktweise Konvergenz

Sei (f_n) eine Funktionenfolge, wobei $f_n \supseteq I \to W \subset \mathbb{R}$. (f_n) konvergiert Punktweise gegen die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, wenn die (Zahlen)folge $f_n(x) \forall x \in I$ gegen f konvergiert.

Gleichmässige Konvergenz

Sei (f_n) konvergiert gleichmässig gegen f wenn

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Beispiel Konvergenz einer Funktionenfolge

$$f_n : [0, r] \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x > 1 \end{cases}$$

Dies Funktion ist Punktweise konvergent $\forall x \in [0, 1]$. $\forall x \in (1, r]$ ist die Funktion divergent.

Beispiel gleichmässige Konvergenz

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$$
$$\Rightarrow f(x) = 0$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |0 - \frac{\sin(x)}{n}|$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{n}| = \frac{1}{n} \quad \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

6.4.1 Konvergenz von uneigentlichen Integralen

Betrachte Integrale wie Funktionenfolgen und wende die selben Regeln an um Konvergenz/Divergenz zu beweisen.

Beispiel: Konvergenz einer Reihe

Bestimme ob das Integral $\int_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1+n^2 2^{-n}}{n^3-2}$ konvergiert. Es gilt:

$$a_n = \frac{n^2 + 1 + n^2 2^{-n}}{n^3 - 2} \geq \frac{n^2 + 1}{n^3 - 2} \geq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert folgt auch, dass das Integral $\int_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert (Majorantenkriterium).

7 Topologie

Der Abschluss einer Menge Ω

$$\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d ; \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega : x_k \to x (k \to \infty)\}$$

Es gilt $\Omega \subset \overline{\Omega}$.

Abgeschlossene Mengen auf $\mathbb{R}^d$

- A_1, A_2 abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ abgeschlossen
- A_i abgeschlossen für $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen

Der offene Ball

Der offene Ball vom Radius $r > 0$ um x_0 ist die Menge:

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d ; |x - x_0| < r\}$$

Das Innere einer Menge (offener Kern)

$$int(\Omega) = \bigcup_{U\subset\Omega, U \text{ offen}} U =: \Omega^o$$

Offene Mengen auf $\mathbb{R}^d$

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^d$ sind offen.
- Ω_1 , $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^s$ offen $\Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen
- $\Omega_i \subset \mathbb{R}^d$ offen, $l \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ offen

Abschluss einer Menge

$$clos(\Omega) = \bigcap_{A\supset\Omega,\ A \text{ abgeschlossen}} A = \overline{\Omega}$$

$\overline{\Omega}$ ist abgeschlossen. $\overline{\Omega}$ ist sogar die kleinste Abgeschlossene Menge, die Ω enthält.

Abgeschlossenheit

$A \subset \mathbb{R}^d$ heisst abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.

Rand einer Menge

$$\delta\Omega = clos(\Omega) \setminus int(\Omega)$$

Der Rand ist *abgeschlossen*. Eine alternative Definition: $\delta\Omega = \{x_0 \in \mathbb{R}^d ; \forall r > 0 : B_r(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset \neq B_r(x_0) \setminus \Omega\}$

8 Differentialrechnung

Ableitung einer Funktion

Steigung der Tangente an die Funktion in einem Punkt x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{mit } h = x - x_0)$$

Rechenregeln der Differentialrechnung

Summenregel	$(f+g)' = f' + g'$	Kettenregel	$(g \circ f)(x) = g'(f) \cdot f'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	Umkehrfunktion	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	Logarithmus	$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei f streng monoton und differenzierbar in x_0 wobei $f(x_0) \neq 0$. Dann ist f' differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

1D Kurvendiskussion

Extremstelle	$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$
Minimalstelle	$f''(x_E) > 0$
Maximalstelle	$f''(x_E) < 0$
Wendestelle	$f'(x_W) \neq 0$ und $f''(x_W) = 0$ und $f^{(3)}(x_W) \neq 0$
Sattelstelle	$f'(x_W) = 0$ und $f''(x_W) = 0$ und $f^{(3)}(x_W) \neq 0$

8.1 Wichtige Sätze der Differentialrechnung

Satz von Rolle

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, diff'bar und sei $f(a) = f(b)$, dann gilt:
$\exists \tau \in (a,b)$ mit $f'(\tau) = 0$

Mittelwertsatz

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig und diff'bar, dann gilt.

$$\exists \tau \in [a,b] \quad \text{mit} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\tau)$$

Daraus folgt direkt: Falls $f' \geq 0 (f' > 0) \forall x \in]a,b[$, so ist f (streng) monoton wachsend.

Anschaulich Unter den obigen Voraussetzungen gibt es im Intervall $[a,b]$ mindestens einen Kurvenpunkt, der die gleiche Steigung hat wie die direkte Verbindung zwischen a und b

Variante Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig, diff'bar und $g'(x) \neq 0$, dann gilt
$\forall x \in [a,b]\ \exists \tau \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}$

Anwendung Mittelwertsatz

Zeige, dass $\forall x > 0$ gilt: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$
Betrachte $f(x) = \sqrt{1+x}$. Diese Funktion ist differenzierbar für $x > -1$ mit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Also gilt mit nach dem Mittelwertsatz, dass für jedes $x > 0$ ein $u \in]0,1[$ existiert mit:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{1+u}} < \frac{1}{2} \quad \text{da } u > 0$$

Somit gilt $\sqrt{1+x} < 1 + x/2$ (die Funktion besitzt die maximale Steigung $\frac{1}{2}$)

Zwischenwertsatz
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert zu jedem $t \in [f(a), f(b)]$ mindestens ein $s \in [a,b]$ für das gilt $f(t) = s$. Haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so existiert mindestens eine Nullstelle in $f : [a,b]$

8.2 Fixpunkt / Kontraktion

Kontraktion
Eine Kontraktion in $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $f : I \to I$, ($I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall). $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

mit $L \leq 1$ existiert. Das heisst f ist Lipschitzstetig mit Likpschitzkonstante $L \leq 1$.

Aus dem MWS folgt dann, falls $f : I \longrightarrow I$ stetig und $f'(x) < 1 \forall x \in I$ (offen) $\Longrightarrow f$ ist eine Kontraktion.

Beispiele zu Kontraktion

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} :& [1,\infty[\longrightarrow [1,\infty[\\
& \text{ist eine Kontraktion} \\
\sqrt{x} :& [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[\\
& \text{ist keine Kontraktion, da für } x = 0 \text{ ,} y \in (0,1] \text{ gilt} \\
& \frac{|\sqrt{0} - \sqrt{y}|}{|0 - y|} = \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 1
\end{aligned}$$

Kontraktion zeigen
Sei $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x) + x} [0,\infty[\to [0,\infty[$.

Zeige zunächst, dass $f(x) \geq 1 \forall x \in [0,\infty)$

Beh: $f(x)$ ist kontraktiv auf I

Bew: Es gilt $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)+x}}(1 + \cos(x))$ und damit

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \sin(x) + x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = q < 1 \text{ für } x \geq 1$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt daher:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \leq q \cdot |x - y|$$

Damit folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz, dass es genau einen Fixpunkt in $[1,\infty)$ gibt.

Banach'scher Fixpunktsatz
Ist f eine Kontraktion auf $I \subset \mathbb{R}$, dann hat f *genau* einen Fixpunkt, d.h. $\exists k \in I$ mit $f(k) = k$

Banach'scher Fixpunktsatz / Kontraktion
Bemerkung: Der Begriff der Kontraktion, als auch der der Banach'sche Fixpunktsatz sind allgemein für vollständige metrische Räume definiert. Bezogen auf $\mathbb{R}$ heisst dies, dass I vollständig, d.h. abgeschlossen sein muss.

$[a,\infty)$ ist in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ($a \in \mathbb{R}$)

9 Differentialgleichungen

9.1 DGL 1. Ordnung ($F(x, y, y') = 0$)

Elementare DGL ($y' = f(x)$)

- Allg. Lösung: $y(x) = \int f(x)dx$

Separierbare DGL ($y' = g(x) \cdot h(x)$)

- Allg. Lösung: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(x)$, durch Umformen folgt Lösung $\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$
- Partikuläre Lösung: Bei $P_0 = (x_0, y_0)$ Anfangspunkt ist PL: $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx$

Variation der Konstanten

$$\text{Geg: } y'(x) = a(x) \cdot y(x) + q(x)$$
$$\text{Allgemeine Lösung: } y = y_H + y_I$$

- Finde y_H mit Separationsansatz: $y'(x) = a(x) \cdot y(x)$

$$y_H = C \cdot f(x) \qquad \text{siehe Ansatz für Separierbare DGL}$$

- Finde y_I: Falls $C \equiv c(x)$ bekommnt man wegen der Produktregel einen zusätzlichen Term: Setze $y_H = c(x) \cdot f(x)$ in die DGL ($y'(x) = a(x) \cdot y(x) + q(x)$) ein.

$$\overbrace{c'(x) \cdot f(x) + \underbrace{\cancel{c(x) \cdot f'(x)}}_{=(y_H)'}}^{y'(x)} = \underbrace{\cancel{a(x) y(x)}}_{=(y_H)'} + q(x) \qquad \text{da: } y_H' = Cf'(x) + \underbrace{C' f(x)}_{=0}$$
$$c'(x) \cdot f(x) = q(x)$$
$$c(x) = \int \frac{q(x)}{f(x)}dx$$
$$y_I = c(x) \cdot f(x)$$
$$\implies \quad y(x) = y_H + y_I = C \cdot f(x) + c(x) \cdot f(x)$$

Differentialgleichung mittel Substitution lösen (weiteres BSP auf Rückseite)

$$u' = \frac{1}{1+x}y + 1 + x \qquad \text{substituiere mit } y(x) = \frac{1}{u(x)}$$
$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{1}{u^2} \cdot \left(\frac{1}{1+x}y + 1 + x\right) = -2\frac{1}{u} - \sin(x) = -2y - \sin(x)$$

Differentialgleichung nach $y(x)$ lösen und Gleichung wieder in $u(x) = \frac{1}{y(x)}$ einsetzen

Durch Substitution lösbare DGL
homogene DGL $\rightarrow y'(x) = f(\frac{y}{x})$

$u = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ $\qquad$ $\Rightarrow$ Separierbare DGL

Einfache $\rightarrow y'(x) = f(ax + by + c)$

$u = ax + by + c$ $\qquad$ $u' = a + b \cdot f(u)$ $\qquad$ $\Rightarrow$ Separierbare DGL

Bernoullische DGL $\rightarrow y' + g(x) \cdot y = h(x) \cdot y^n$

$u = y^{1-n}$ $\qquad$ $u' + (1-n)g(x) \cdot u = (1-n)h(x)$ $\qquad$ $\Rightarrow$ Lineare DGL

9.2 DGL höherer Ordnung ($F(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0$)

Durch Substitution lösbare DGL → Rückführung auf DGLen 1. Ordnung

(A) $y'' = f(y)$ $y' = \frac{dy}{dx} = u$, $y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u$	$u\frac{du}{dy} = f(y)$	
(B) $y'' = f(y')$	$y' = u$, $y'' = u'$	$u' = f(u)$
(C) $y'' = f(x; y')$	$y' = u$, $y'' = u'$	$u' = f(x; u)$
(D) $y'' = f(y; y')$	$y' = \frac{dy}{dx} = u$, $y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u$	$u\frac{du}{dy} = f(y; u)$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten ($y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = q(x)$)

- Allg. Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
- Homogene DGL lösen: $q(x) = 0$
  1. Bestimme $chp(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ 1
  2. Bestimme $chp(\lambda) = 0 \Rightarrow$ Eigenwerte ($\equiv$ Nullstellen): $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
  3. drei mögliche Fälle:
     (a) λ_i ist einfache (reelle) Nullstelle:
     $\Rightarrow y_i(x) = C_i \cdot e^{\lambda_i x}$
     (b) λ_i ist k-fache (reelle) Nullstelle:
     $\Rightarrow y_{i+j}(x) = C_{i+j} \cdot x^j \cdot e^{\lambda_i x}$ für $j = 0, \ldots, k-1$ (Ergibt k Gleichungen)
     (c) λ_i ist konjugiert komplexe Nullstelle: $(\alpha \pm \beta\imath)$
     $\Rightarrow y_i = C_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
     (d) Tipp: Behandle komplexe Nullstellen ohne Realteile vereinfacht wie eine reelle Nullstelle (siehe Punkt 3b und Beispiel. komplexe NST ohne Realteil).
  4. Füge alle Gleichungen y_i zu einer Gesamtlösung $y_h(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_n(x)$ zusammen
  5. Bei gegebenen Anfangsbedingungen bestimme die Konstanten $C_1, \ldots, C_n$
- Partikuläre Lösung finden: $q(x) \neq 0$
  1. Bestimme allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL (wie oben) $\Rightarrow y_h(x)$.
  2. Mache einen geeigneten Ansatz $y_p(x)$ für die partikuläre Lösung und setze ihn in die DGL ein.
  3. Bestimme dadurch die Konstanten im Ansatz $\Rightarrow y_p(x)$.
  4. Allgemeine Lösung ist $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

$g(x)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(x)$
x^r	$0 \notin Eigenwerte$	$A_0 + A_1x + \ldots + A_rx^r$
	$0 \in Eigenwerte$, m-fach	$A_0x^m + A_1x^{m+1} + \ldots + A_rx^{m+r}$
Polynom $b_0 + b_1x + \ldots + b_rx^r$, $b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin Eigenwerte$	$A_0 + A_1x + \ldots + A_rx^r$
$(a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m) \cdot e^{\mu x}$	$\mu \notin Eigenwerte$	$(A_0 + A_1x + \ldots + A_rx^r) \cdot e^{\mu x}$
	$\mu \in Eigenwerte$, m-fach	$(A_0 + A_1x + \ldots + A_rx^r) \cdot x^m \cdot e^{\mu x}$
$e^{\lambda_0 x}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin Eigenwerte$	$Ae^{\lambda_0 x}$
	$\lambda_0 \in Eigenwerte$, m-fach	$Ax^m e^{\lambda_0 x}$
$\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$	$\pm\imath\omega \notin Eigenwerte$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
	$\pm\imath\omega \in Eigenwerte$, einfach	$x \cdot (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$
$\cosh(\omega x)$, $\sinh(\omega x)$	$\pm\omega \notin Eigenwerte$	$A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x)$
	$\pm\omega \in Eigenwerte$	$x \cdot (A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x))$
x^2e^{-x}	$-1 \notin Eigenwerte$	$(A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{-x}$
xe^{-x}	$-1 \notin Eigenwerte$	$(A_0 + A_1x)e^{-x}$
$c := const$		wähle $a_n y_p^{(n)} = g(x)$ für kleinstes n mit $a_n \neq 0$ und löse nach y_p auf

Beispiel

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \cos(x)$$

1. Homogene Lösung bestimmen:
$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$
2. Inhomogene Lösung, Ansatz:
$$\begin{aligned} y_p &= A\cos(x) + B\sin(x) \\ y_p' &= -A\sin(x) + B\cos(x) \\ y_p'' &= -A\cos(x) - B\sin(x) \end{aligned}$$
3. Ansatz einsetzen in $y'' + 3y' + 2y$:
Koeffizienten so anordnen, dass man sie vergleichen kann (nicht zu fest kürzen)
$$\underbrace{(A+3B)}_{=1}\cos(x) + \underbrace{(B-3A)}_{=0}\sin(x) = \cos(x)$$
$$\text{GLS aufstellen: } \begin{cases} A + 3B &= 1 \\ B - 3A &= 0 \end{cases}$$
$$\implies \quad A = \frac{1}{10} \qquad B = \frac{3}{10}$$
4. Lösung:
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{3}{10}\sin(x)$$

Beispiel mit $g(x) = const$

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 6$$

1. Homogene Lösung bestimmen:
$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$$
2. Inhomogene Lösung, Ansatz:
$$\begin{aligned} -3y_p &= 6 \\ \implies y_p &= -2 \end{aligned}$$
3. Lösung:
$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - 2$$

Beispiel mit komplizierterem $q(t)$

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = \underbrace{t + t \cdot e^{-2t}}_{=q(t)}$$

1. Homogene Lösung
$$y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}$$
2. Inhomogene Lösung Erstelle 2 Separate Ansätze für:
$$q(x) = \begin{cases} y_{P_1}(t) = \ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = t \\ y_{P_2}(t) = \ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = te^{-2t} \end{cases}$$
und löse für jeden Ansatz ein GLS
   (a) $q_1(x) = t$, Ansatz: $y_{P_1}(t) = A_0 + A_1 t$
   $$y_{P_1}(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$$
   (b) $q_2(x) = te^{-2t}$, Ansatz: $y_{P_2}(t) = (A_0 + A_1 t)e^{2t}$
   $$y_{P_2}(t) = \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{6}t\right) e^{-2t}$$
Füge für die Partikuläre Lösung alles Zusammen
$$y_P(t) = y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t) = \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{6}t\right) e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$$
3. Allgemeine Lösung $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$:
$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} + \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{6}t\right) e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$$

Beispiel: komplexe NST ohne Realteil

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$
$$\Rightarrow chp(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i$$
$$y(x) = (C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix}) + (C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix})$$

Diffgleichung mittel Substitution lösen

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} \quad \implies \quad \text{substituiere mit } u = \frac{y}{x}$$
$$y' = \left(x \cdot \frac{y}{x}\right)' = (x \cdot u)' = \frac{3y^2}{2xy} - \frac{x^2}{2xy} = 3u - \frac{1}{2u} \quad \implies \quad u + x \cdot u' = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u}$$
$$u' = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

Beispiel Separierbare DGL

Geg: $(\log y)(1 + \sqrt{x})y' - (1 - \sqrt{x})y = 0$

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{y' \log y}{y} \quad \to \quad \int_0^x \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} dt = \int_0^x \frac{y(t)' \log y(t)}{y(t)} dt$$

Beide Seiten separat Integrieren. und nach $y(x)$ auflösen (durch die Integration wird das $y(t)$ zu $y(x)$).

10 Integralrechnung

Riemannsche Summe

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\cdot\Delta x \qquad \text{wobei } \Delta x := \frac{b-a}{N} \quad \text{und} \quad x_k := a + k\frac{b-a}{N}$$

Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Intervall $[a,b]$

riemannsches Integral

$$\int_B f\ d\mu := \lim_{\partial(Z)\to 0}\sum_{k=1}^{N}[f(x_k)\cdot\mu(B_k)]$$

Beispiel: Berechnung eines Integrals mittels riemannscher Summe

Sei $\partial(Z) = \frac{b-a}{N}$

$$\int_a^b e^{\lambda x}dx = \lim_{\partial(Z)\to 0}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\lambda(a+k\frac{b-a}{N})}\cdot\left(\frac{b-a}{N}\right) = \lim_{\partial(Z)\to 0}\frac{b-a}{N}e^{\lambda a}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{\lambda\frac{b-a}{N}}\right)^k = \lim_{\partial(Z)\to 0}\frac{b-a}{N}e^{\lambda a}\frac{1-e^{\lambda(b-a)}}{1-e^{\lambda\frac{b-a}{N}}}$$

$$\int_a^b e^{\lambda x}dx = \lim_{\partial(Z)\to 0}\partial e^{\lambda a}\frac{1-e^{\lambda(b-a)}}{1-e^{\lambda\partial}} =^{\text{de l'Hôpital}} \lim_{\partial\to 0}\frac{e^{\lambda a}-e^{\lambda b}}{-\lambda e^{\lambda\partial}} = \frac{e^{\lambda a}-e^{\lambda b}}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda b}-e^{\lambda a}\right)$$

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Fkt. und $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = F(b)-F(a)$$

Leibniz-Regel

$$\frac{d}{dt}\int\limits_B f(\vec{x},t)d\mu(\vec{x}) = \int\limits_B f_t(\vec{x},t)d\mu(\vec{x})$$

Rechenregeln für Integrale

- $\int(f+g) = \int f + \int g$
- $\int\lambda f = \lambda\int f$
- $\int_{A\bigcap B} g = \int_A g + \int_B g$ (Wenn A und B disjunkt)
- $|\int f| \leq \int|f|$
- $\int_b^a f = -\int_a^b f$
- $\int_a^a f = 0$

Substitutionsregel

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(g(x))g'(x)dx = (f\circ g)|_{x=x_0}^{x_1} = f(g(x_1)) - f(g(x_0)) = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(z)dz$$

Funktionen als Integrationsgrenze

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))\cdot g'(x) \qquad \frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{b} f(t)dt = -f(g(x))\cdot g'(x)$$

Mittelwertsatz für die Integralrechnung

Ist $f:B\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf B so gibt es einen Punkt $\xi\in B$ mit

$$\int\limits_B f\ d\mu = f(\xi)\cdot\mu(B)$$

10.1 Integrationstechniken

Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx \quad = \quad u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Beispiel: Substitution nach partieller Integration

$\underbrace{\int \cos(x)\sin(x)dx}_{=X} = -\cos(x)^2 - \underbrace{\int \cos(x)\sin(x)dx}_{=X} \quad \Rightarrow \quad X = -\cos(x)^2 - X \quad \Rightarrow \quad \int \cos(x)\sin(x)dx = -\cos(x)^2 + \frac{1}{2}\cos(x)^2$

Substitution

Idee Funktion und ihre Ableitung im Integral vorhanden

1 Ersetzen beider durch Substitutionsgleichung:

$$u = f(x), \qquad \frac{du}{dx} = f'(x), \qquad dx = \frac{du}{u'}, \qquad \left(x = f^{-1}(u)\right)$$

2 Integrieren und zurück ersetzen

Beispiel Substitution

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{(t)})dt \quad \text{Substitution:} \quad \left\{ \begin{array}{rl|rl} u & = \sqrt{t} & t & = u^2 \text{ (Bilde Inverse)} \\ \frac{du}{dt} & = \frac{1}{2\sqrt{t}} & \frac{dt}{du} & = 2u \\ dt & = 2\sqrt{t}du & dt & = 2udu \end{array} \right.$$

Substitution einsetzen. Hier wird die “rechte” Substitution verwendet, da man nichts streichen kann.

$$\int_0^{\pi=\sqrt{\pi^2}} \sin(u) \cdot 2udu = \left[-\cos(u) \cdot 2u + 2\int \cos(u)du\right]_0^{\pi} = [2\sin(u) - 2u \cdot \cos(u)]_0^{\pi}$$

Beispiel Substitution mit Jacobi Determinante

$$\begin{aligned}
\text{Geg:} \quad & f(x,y) = x^{\frac{3}{2}}y \quad \text{auf} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x \le 3; \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}\right\} \\
& \int_1^3 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^{\frac{3}{2}}ydydx \\
\text{Substitution mit:} \quad & x = u \quad y = \frac{v}{u} \\
\text{Abbildung:} \quad & \Phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{v}{u} \end{pmatrix} \\
& |det(d\Phi)| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{u} \\
\text{neuer Bereich:} \quad & D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 1 \le u \le 3, 1 \le v \le 2\} \\
\Longrightarrow \quad & \int_1^3 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^{\frac{3}{2}}ydydx = \int_1^3 \int_1^2 u^{\frac{3}{2}} \frac{v}{u}\frac{1}{u}dvdu = \int_1^2 vdv \int_1^3 u^{-\frac{1}{2}}du
\end{aligned}$$

Beispiel Vertauschung von Parameter und Integral

$G(u) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1}dx$ gesucht: $G'(0)$, da $f_u(x,u)$ stetig, kann man Ableitung und Integral vertauschen

$$G'(u) = \frac{d}{du}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial u}\cos ux \cdot \frac{x+u}{x^2+x+1}dx = \dots_{\text{nach } u \text{ ableiten}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Spezielle Integraltypen

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$$
$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(|f(x)|) + C$$

Alle diese speziellen Integraltypen können mit entsprechender Substitution hergeleitet werden.

Anwendung Kettenregel
Sei $g :]a,b[\to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ an der Stelle $t_0 \in]a,b[$ mit $g(t_0) = x_0$ diffbar, $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 diffbar.
Dann ist die Funktion $f \circ g :]a,b[\to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar:

$$d\,(f \circ g)\,(x_0) = f'(g(x_0)) dg(x_0)$$

Anwendung:

$$u(t) = \int_0^t h(s,t) ds \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt}(t) = h(t,t) + \int_0^t \frac{\delta h}{\delta t}(s,t) ds$$

10.2 Konvergenz

Konvergenz/Divergenz eines Integrals zeigen

- Berechne die Stammfunktion, setze ein und berechne den lim für alle Kritischen Punkte.

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}$$

Da $t = 1$ ein Nullpunkt: $\lim\limits_{t \to 1^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \lim\limits_{t \to 1^-} -\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3} = +\infty$ Funktion divergiert

- Schätze die Funktion ab:

11 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

11.1 Partielle Ableitungen und Differential

Eine Funktion $f(x)$ heisst differenzierbar, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) \quad \Rightarrow \quad df(x_0) := A \text{ heisst das Differential von } f \text{ an der Stelle } x_0$$

Partielle Differenzierbarkeit
Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle x_0 partiell nach x^i (oder in Richtung e_i diffbar, falls:

$$f_{x^i} = \frac{\delta f}{\delta x^i} = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \qquad \text{existiert}$$

$f(x,y) = |xy| \qquad f_x = \lim\limits_{h \to 0} \frac{|(x_0 + h)y| - |x_0 y|}{h}$ für $x_0 = 0$ ist diese Funktion nicht differenzierbar da

$$f_x(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{|(0+h)y| - |0y|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|hy|}{h} = \pm y \quad \text{nicht existiert}$$

Differenzierbarkeit auf einer Ebene D

Vorgehen: Zz: f diffbar auf $D \Leftrightarrow df$ existiert.

1. Partiell ableiten, falls part. Ableitungen existieren
2. Sind part. Ableitungen stetig? Wenn ja $\Rightarrow df$ existiert

f ist diffbar in $(0,0)$ falls gilt:

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{|(x,y)|} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ existiert}$$

Vektorfeld

Ein Vektorfeld auf Ω ist eine Abbildung: $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{llll} v(\vec{x}): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \equiv \mathbb{R}^n \\ & \vec{x} & \mapsto & \equiv v(\vec{x}) \end{array}$$

Gradient ∇

Vektor aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f:

$$\text{grad} f = f_x \vec{e_x} + f_y \vec{e_y} + f_z \vec{e_z} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f$$

steht immer senkrecht bzgl. der Niveaulinie

- $\text{grad} f(P_0)$ zeigt in die Richtung der max. Zuwachsrate von f an der Stelle P_0. $|\text{grad} f(P_0)|$ ist der Wert der Zuwachsrate

Richtungsableitung

Mass für die Veränderung des Fkt.wertes von P aus in Richtung $\vec{v}$. Projektion des Gradienten in P in Richtung $\vec{v}$:

$$D_{\vec{v}} f = \frac{1}{|\vec{v}|} \langle \nabla f, \vec{v} \rangle$$

Tangentialebene

Analogon zur Tangente im mehrdim. Fall. Tangentialebene im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\left\langle \nabla f(P_0), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_0 \right\rangle = 0$$

im 2 Dimensionalen Fall: $z = f(x_o, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Der 2-dimensionale Fall ist insbesondere, dann interessant, wenn man das Taylorpolynom schon berechnet hat, da $\equiv$ Taylorpolynom 1. Grades

Divergenz

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad \to \quad div(\vec{v}) = P_x + Q_y + R_z$$

- $div\vec{v} > 0$ in dV gibt es eine Quelle
- $div\vec{v} < 0$ in dV gibt es eine Senke
- $div\vec{v} = 0$ in dV das Feld ist Quellenfrei

Rotation

$$\mathbb{R}^2 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad \to \quad rot(\vec{v}) = (Q_x - P_y)$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad \to \quad rot(\vec{v}) = \nabla \times v = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

Für Divergenz, Rotation und Gradient gilt

$$\begin{aligned} rot(\nabla \cdot f) &= 0 \\ div(rot(\vec{K}) &= 0 \\ div(f \cdot \vec{K}) &= \nabla f \cdot \vec{K} + f \cdot div(\vec{K}) \\ div(\vec{K} \times \vec{L}) &= \vec{L} \cdot rot(\vec{K}) - K \cdot rot(\vec{L}) \\ div(f \cdot rot(\vec{K})) &= \nabla f \cdot rot(\vec{K}) \end{aligned}$$

11.2 Differentiationsregeln

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Differentiationsregeln in $\mathbb{R}^n$
Sein $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$.

- $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
- $d(fg)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)$
- $d(\frac{d}{g})(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$

Kettenregel
Seien $f : \mathbb{R}^n \ni \Omega \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar und $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ diffbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ Dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0 diffbar mit:

$$d(g \circ f)(x_0) = \underbrace{dg(f(x_0))}_{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m} \cdot \underbrace{df(x_0)}_{\text{lin. Abb. } R^n \to \mathbb{R}^l}$$

Bemerkung Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l, g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ linear mit $f(x) = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n$ $g(y) = By, y \in \mathbb{R}^l$ wo A $l \times n$-Matrix, B $m \times l$-Matrix, dann gilt: $(g \circ f)(x) = BAx, x \in \mathbb{R}^n$

BSP Kettenregel
Betrachte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^2 - (xyz)^2 \\ 2(x^2+y^2+z^2)xyz \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \qquad df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$dg(f(x,y,z)) \cdot df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2) \cdot 2x - 2xyz \cdot yz \ldots \\ \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix
fasst die partiellen Ableitungen 2. Ordnung in einer Matrix zusammen

$$H(f) = \nabla^2 f = \left(\frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \right) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{Beispiel für 3-dim Fall}$$

Diese Matrix ist positiv (bzw negativ) definit. Da sie symmetrisch ist.

$$H_f \langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i,j} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \xi^i \xi^j > 0$$

(positiv definit: $x^H Ax > 0 \forall x, x \neq 0$)

11.3 Kritische Punkte

Kritischer Punkt
x_0 is ein kritischer Punkt von f, falls

$$df(x_0) = 0$$

Extremalstellen einer mehrdimensionalen Funktion
Werden analog zum eindimensionalen Fall über die kritischen Punkte der 'ersten Ableitung', dem Gradienten, bestimmt. Diese Punkte werden dann mit der 'zweiten Ableitung', der Hesse-Matrix, auf ihren Typ überprüft:

1. Kritische Punkte von f: Alle P_i für die gilt: $\vec{\nabla} f(P_i) = \vec{0}$

2. Typ der krit. Punkte bestimmen: über Eigenwerte der Hesse-Matrix $\vec{\nabla}^2 f$ im Punkt P_i:

- **Alle EW** $> 0 \Rightarrow$ lok. Maximum
- **Alle EW** $< 0 \Rightarrow$ lok. Minimum
- **Sowohl** $>$ **als auch** $< \Rightarrow$ Sattelpunkt
- **weder noch (semidefinit)** $\Rightarrow$ keine Entscheidung

Bem: falls $\vec{\nabla}^2 f$ symmetrisch $\Rightarrow$ alle EW positiv

BSP Extremalstellen
Sei $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \alpha y^2) + \beta xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $df(x,y) = (x + \beta y, \alpha y + \beta x)$. Die Hessische Matrix lautet somit:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{(\delta x)^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{(\delta y)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Falls $\alpha \neq \beta^2$, ist $(x_0, y_0) = (0,0)$ der einzige kritische Punkt. Die Eigenwerte von $Hess_f(0,0)$ bestimmen den qualitativen Verlauf von f. Wir erhalten sie aus:

$$p(\lambda) = det(H_f(0,0) - \lambda 1) = (1-\lambda)(\alpha - \lambda) - \beta^2 = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha - \beta^2 = 0$$

Es folgt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\alpha}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) - \alpha + \beta^2}}_{\geq 0, \text{ da } (1+\alpha)^2 - 4\alpha = (1-\alpha)^2}$$

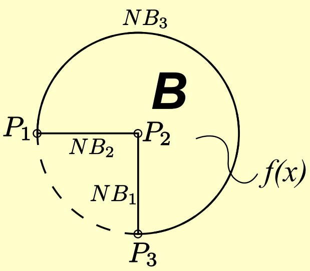
Falls

- $\alpha > \beta^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 :$ $(0,0)$ ist ein Minimalstelle
- $\alpha < \beta^2 \Rightarrow \lambda_1 > 0 > \lambda_2 :$ $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt

Typbestimmung der kritischen Punkte bei 2×2-Matrix

1. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ an der Stelle (x_0, y_0)
   (a) $f_{XX}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum
   (b) $f_{XX}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
2. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$ an der Stelle (x_0, y_0)
   $\Rightarrow$ keine lokale Extremalstelle: Sattelpunkt
3. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0$ an der Stelle (x_0, y_0)
   $\Rightarrow$ Entartung

Extremalstellen unter Nebenbedingungen: Auf einem Bereich



1. Bestimme Extrema von f und prüfe, ob diese in B
2. Bestimme Extrema des Randes (Bsp NB_1, NB_3, NB_3)
3. Prüfe Schnittpunkte (Bsp P_1, P_2, P_3) auf Extrema

Eigenwerte einer Diagonalmatrix

entsprechen genau den Diagonalelementen

Allg. Berechnung der EW

1. Char. Polynom aufstellen

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. Nullstellen (=Eigenwerte) bestimmten

11.4 Vektorwertige Funktionen

Differenzierbarkeit

f heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar , falls jede Funktion $f^i, 1 \leq i \leq n$ dort diffbar ist und

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ \vdots \\ df^l(x_0) \end{pmatrix} : T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{f(x_0)}\mathbb{R}^l$$

Jacobi Matrix

$$\begin{aligned} df(x_0) &= \left(\frac{\delta f^i}{\delta x^j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq l \wedge 1 \leq j \leq n} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta x^n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta f^l}{\delta x^1}(x_0) & \dots & \frac{\delta f^l}{\delta x^n}(x_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

BSP Jacobi Matrix

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch: $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ Dann ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

11.5 Umkehrsatz

Satz der Umkehrbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Falls nun $df(a)$ ein Isomorphismus dh: ($\exists$ Umkehrfunktion: $df(a)^{-1}$). Dann ist f auf einer genügend kleinen Umgebung um a invertierbar.

$$det(df(a)) \neq 0 \qquad \exists \text{ Umkehrfunktion für die Umgebung } a$$

BSP

Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Da

$$det(df(x,y)) = 4(x^2 + y^2) > 0 \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

ist f lokal invertierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit der Identifikation $(x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2$$

Da $f(z) = z^2 = (-z)^2 = f(-z), \forall z \in \mathbb{C}$ ist f nicht global invertierbar.

11.6 Implizite Funktionen

regulärer Punkt

Der Punkt p_0 heisst regulärer Punkt von f falls $Rang(df_{(p_0)}) = \min\{n, l\}$ maximal.

Satz über implizite Funktionen

Sei $F(x,y)$ differenzierbar, $x, y \in \mathbb{R}$ und (x_0, y_0) eine Lösung von $F(x,y) = 0$. Falls $\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0) \neq 0$, dann lässt sich $F(x,y)$ lokal, d.h. in einer Umgebung von (x_0, y_0) nach y auflösen.

Aufstellen der impliziten Funktion

$\mathbf{f_y(x_0, y_0) \neq 0}$:
Es gibt Fenster mit Zentrum (x_0, y_0) in dem gilt $x \mapsto y = \phi(x)$, wobei $\phi(x_0) = y_0$:

$$\phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

$$\phi''(x_0) = [\frac{f_{xx} f_y^2 + 2 f_x f_{xy} f_y - f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}]$$

$\mathbf{f_x(x_0, y_0) \neq 0}$:
Dann gibt es aber eine Funktion $y \mapsto x = \psi(y)$ und die Ableitungen lauten:

$$\psi'(y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)}$$

$$\psi''(y_0) = [\frac{f_{yy} f_x^2 + 2 f_y f_{xy} f_x - f_y^2 f_{xx}}{f_x^3}]$$

11.6.1 Mehrdimensionaler Fall

Satz über implizite Funktionen in höheren Dimensionen

Wir schreiben F als $F(x, y)$ für $\begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_n) & \in \mathbb{R}^n \\ y = (y_1, \ldots, y_e) & \in \mathbb{R}^e \end{cases}$. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ ist dann ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit e Gleichungen und $n + e$ Unbekannten.
Die Idee des Satzes ist, dass unter geeigneten Voraussetzungen diese Gleichungen lokal (in der Umgebung einer bekannten) Lösung nach y aufgelöst werden kann. Man kann aus gegebenen $x_1, \ldots, x_n$ entsprechende $y_1, \ldots, y_e$ berechnen, so dass $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_e)$ die Gleichung löst.
Man kann also Funktionen $n_1(x), \ldots, n_e(x)$ finden, so dass sich die Lösungsmenge *lokal* als $(x_1, \ldots, x_n, n_1(x), \ldots, n_e(x))$ schreiben lässt.
Diese Funktionen kann man im Allgemeinen nicht explizit ausrechnen. Der Satz besagt nur, dass es solche Funktionen gibt und dass sie differenzierbar sind.

Die einfachsten Funktionen $f : \mathbb{R}^{n+e} \to \mathbb{R}^e$ sind lineare Funktionen

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

A	$e \times (n + e)$
x	$\mathbb{R}^n$
y	$\mathbb{R}^e$
b	$\mathbb{R}^e$

Wenn wir A schreiben als $A = (\underbrace{Ax}_{e\times n} \quad \underbrace{Ay}_{e\times e})$ ist $f(x, y) = A_x \cdot x + A_y \cdot y + b = 0$ nach y auflösbar, falls die Matrix A_y invertierbar ist.

Für allgemeine Funktionen ist das ähnlich. Die Bedingung der Invertierbarkeit muss dann für den Teil der Jacobimatrix gelten, der von den Ableitungen nach y_i, $i = 1, \ldots, e$. Dazu teilt man die Jacobimatrix in 2 Blöcke auf

$$df(x, y) = (\underbrace{\delta_x f(x, y)}_{e\times n \text{ Matrix}} \mid \underbrace{\delta_y f(x, y)}_{e\times e \text{ Matrix}})$$

und prüft ob $\delta_y f(x_0, y_0)$ in einem Punkt (x_0, y_0) invertierbar ist (siehe Umkehrsatz).

Beispiel Mehrdimensionaler Fall

Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegebenen durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - zx + y \\ xyz \end{pmatrix}$$

$$dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - x & 1 & -x \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

1. Zeige, dass die Niveaumenge $g^{-1}(\{(1, 1)\}) = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = (1, 1)\}$ in einer Umgebung als $\gamma(x) = (x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ geschrieben werden kann.

   $$\left(\frac{\delta g}{\delta y}(1, 1, 1), \frac{\delta g}{\delta z}(1, 1, 1)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ist invertierbar, und aus diesem Grund ist g^{-1} definiert

2. Berechne den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(1)$

$$d\varphi(x) = -\left(\frac{\delta g}{\delta y}(x, \varphi(x)), \frac{\delta g}{\delta z}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\delta g}{\delta x}(x, \varphi(x))$$

$$d\varphi(1) = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11.7 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Regulärer Punkt einer Funktion f
Ein Punkt x_0 ist dann regulär, wenn er in der Ableitungsmatrix $df(x_0)$ den maximalen Rang erzeugt.

$$Rang(df(x_0)) = min\{n, m\} \text{ für } df \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Finde globale Extrema einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ unter Nebenbedingung $g_i = 0$

Multiplikatorenregel von Lagrange → Extrema auf einem Bereich mit Nebenbedingungen bestimmen
Sei f und $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}$ stetig differenzierbar auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei zudem $x_0 \in U$ ein *regulärer* ($Rang(dg(x_0)) = k$, $k \equiv$ maximaler Rang) Punkt von g.
Dann gilt: Falls x_0 ein Extremum von f und x_0 erfüllt Nebenbedingung ($g(x_0) = 0$), dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, so dass

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(x_0) \Longleftrightarrow \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Falls } k = 1: \quad & \nabla f = \lambda \nabla g \\ k = 2: \quad & \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \end{aligned}$$

Vorgehen:

1. Finde alle *nicht regulären Punkte* von g, welche Nebenbedingung erfüllen ⇒ Kandidaten
   Erstelle für jeden Rang $\in 0, \dots, \min(n, m) - 1$ ein GLS um die nicht Regulären Punkte zu erhalten.
   Alternativ:
   $$\begin{aligned} \text{Löse GLS (für } g_1 \text{ und } g_2) \qquad \nabla g_1 \cdot &= \nabla g_2 \cdot t \\ g_1 &= 0 \\ g_2 &= 0 \end{aligned}$$
2. Für reguläre Werte lösen wir das Gleichungssystem. *Achte auf Fallunterscheidungen!*
   $$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda_1 \nabla g_1 + \ldots + \lambda_k \nabla g_k \\ g_1 &= 0 \\ &\vdots \\ g_k &= 0 \end{aligned}$$
3. vergleiche Kandidaten

Es folgt also die Existens von impliziten Funktionen $u = g_1(x, y)$ und $v = g_2(x, y)$

Beispiel zu Lagrange

Funktion: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 1$ Nebenbedingung: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

1. $dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = (0,0)!$ (damit $Rang(dg) = 0$. Der maximale Rang von dg ist 1)

   $(x,y) = (0,0)$ einziger nicht regulärer Punkt. Er erfüllt aber die Nebenbedingung nicht und ist daher kein Kandidat.

2. Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ g &= 0 \\ &\Downarrow \\ 2x - 2 &= \lambda \cdot 2x \\ 2y &= \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

   (a) Fall $y = 0$

$$\begin{aligned} x &= \pm 2 \\ x = 2 \Longrightarrow \lambda &= \frac{1}{2} && \lambda \text{ existiert: es ist also eine Lösung} \\ x = -2 \Longrightarrow \lambda &= \frac{3}{2} && \lambda \text{ existiert: es ist also eine Lösung} \end{aligned}$$

   2 Kandidaten: $P_1 = (2,0)$ und $P_2 = (-2,0)$

   (b) Fall $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y \neq 0 &\Longrightarrow \lambda = 1 \\ &\Longrightarrow 2x - 2 = 2x \rightarrow \text{ Keine Lösung} \end{aligned}$$

3. Vergleiche Kandidaten

$$\begin{aligned} P_1 &= (2,0) && = f(P_2) = 1 \Rightarrow \min \\ P_2 &= (-2,0) && = f(P_1) = 9 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

12 Integration in $\mathbb{R}^n$

Mehrdimensionale Integrale

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \underbrace{\Omega \in \mathbb{R}^n}_{\text{Def-Bereich}}$

- Falls $f \equiv 1$:

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega 1 d\mu = \text{ Volumen}(\Omega)$$

- Falls $f \equiv \rho$ eine Dichte (oder eine Dichtefunktion)

$$\int_\Omega \rho d\mu = \text{ Masse von Volumen}(\Omega)$$

Linearität

$$\int_Q (l \circ f) d\mu = l \int_Q f d\mu \qquad l \in \mathbb{R}$$

$$\int_Q f_1 + f_2 d\mu = = \int_Q f_1 d\mu + \int_Q f_2 d\mu$$

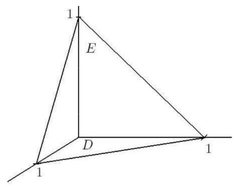
1-Formen

Eine 1 Form ist eine spezielle Darstellung der Differentiation eines Vektors. Im $\mathbb{R}^n$ hat eine 1- Form die Form

$$dw(\vec{x}) = w_1(\vec{x})dx_1 + \ldots + w_n(\vec{x})dx_n$$

Über einen Tetraeder integrieren

Ein Tetraeder ist gegeben durch die Eckpunkte $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$



Das untere Dreieck D wird durch die Achsen und die Gerade $x + y = 1$ begrenzt und ist bestimmt durch:

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Das obere Dreieck, E, das durch die x, y und z Achsen aufgespannt wird lässt sich durch eine Ebenengleichung bestimmen.

$$\text{Der Normalenvektor von } E \text{ berechnet sich durch } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei dann die Ebenengleichung bestimmt wird durch: $x + y + z + d = 0$. $(1,0,0)$ in Gleichung einsetzen um die Konstante d zu erhalten $(d = -1)$

$$z = 1 - x - yE \qquad = \{(x,y,z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

So lässt sich dann das Integral Einfach aufstellen

$$\int_\Omega f(x,y,z) d\mu = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z) dz dy dx$$

12.1 Wegintegrale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\gamma : [0,1] \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, $\gamma \in\subset C^1([0,1], \Omega)$ mit $\dot{\gamma}(t) = \frac{dy}{dt}(t) \in T_{\gamma(t)} R^n$ (Geschwindigkeitsvektor).

Wegintegral

Im 1-dimensionalen Fall

$$\int_\gamma \lambda := \int_0^1 \lambda(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$$

Im mehrdimensionalen Fall

$$\int_\gamma \lambda = \int_\gamma v \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{R^n} \, dt$$

Ist das Wegintegral von λ längs γ.

Unabhängigkeit des Wegintegrals

Falls ein Potentioal $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Vektorfeld $v(\vec{x})$ dh. $\nabla f = v$. Dann ist das Wegintegral unabhängig vom gewählten weg, so dass für 2 verschiedene Wege $\gamma_1 : a \to b$ und $\gamma_2 : a \to b$ gilt:

$$\int_{\gamma_1} \lambda(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_{\gamma_2} \lambda(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \lambda(\gamma(a)) - \lambda(\gamma(b))$$

Potential

Falls ein Potential $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu einem Vektorfeld $v(\vec{x})$ existiert. $\vec{v}$ heisst dann konservativ Dh. es gilt:

$$v(\vec{x}) = \nabla f \tag{1}$$

$$\frac{\delta v^i}{\delta x^j} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j} = \frac{\delta v^j}{\delta x^i} \qquad 1 \geq i, j \geq n \tag{2}$$

Um nun zu bestimmen ob v ein Potential besitzt, kann man nun Def. (1) benutzen (integrieren) oder man benutzt Def. (2) und differenziert die 1. Komponente nach y und die 2. Komponente nach x.
Dann ist das Wegintegral über den Weg γ von $\gamma(a) \to \gamma(b)$ unabhängig vom gewählten Weg:

$$\int_\gamma v d\vec{s} = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt = f(b) - f(a)$$

$$\int_\gamma v d\vec{s} = 0 \qquad \text{für } \gamma(0) = \gamma(1) \text{ dh. der Weg geschlossen ist}$$

Es ist äquivalent

Ein Potential zu einem gegebenen $v(\vec{x})$ finden (Integrieren)

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \end{pmatrix} = \nabla f$$

Alle Komponenten von $v(\vec{x})$ Separat integrieren

$$\int 2x + ydx = x^2 + xy + C(y)$$

$$\int x + 1dy = xy + y + C(x)$$

$$x^2 + xy + C(y) = xy + y + C(x)$$

$$C(y) = y \qquad C(x) = x^2$$

$$f = x^2 + xy + y + d$$

f existiert also und es gibt ein Potential für die Funktion $v(\vec{x})$

Bestimmen ob $\vec{v}$ ein Potential besitzt (Differenzieren)

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta v^1}{\delta y} = 1$$

$$\frac{\delta v^2}{\delta x} = 1$$

$$\implies \frac{\delta v^1}{\delta y} = \frac{\delta v^2}{\delta x} \qquad \vec{v} \text{ besitzt ein Potential}$$

Man leitet dabei die 1. Komponente nach y ab und die 2. Komponente nach y. Wenn sie gleich sind, besitzen sie ein Potential.

BSP zum Wegintegral mit Potential

Sei $v(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 1 \end{pmatrix} = \nabla f$, $\gamma(a) = (0, 0)$ und $\gamma(b) = (1, 1)$ Also gilt:

$$f : \int 2x + ydx = x^2 + yx + C(y)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y} = x^2 + xy + C(y) = x + \frac{\delta C}{\delta y} = x + 1$$

$$\implies C(y) = y$$

$$\text{Einsetzen} \qquad \int_\gamma vds = f(1, 1) - f(0, 0) = 3$$

BSP zum Wegintegral mit einer Gammafunktion

Es sei $\gamma(t) : y = \sqrt{x} \quad \longrightarrow \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$ und $v(t) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ 2t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 2t + t^2 + 2t^2 + 2t dt = \left[2t^2 + t^2\right]_0^1 = 3 \end{aligned}$$

12.2 Der Satz von Green

Satz von Green in $\mathbb{R}^2$

Der Satz von Green erlaubt es das Integral über eine *ebene Fläche* durch ein Kurvenintegral auszudrücken:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse $C^1_{p\omega}$ und seien g, $h \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta h}{\delta x} - \frac{\delta g}{\delta y} \right) d\mu = \int_{\delta\Omega} (g dx + h dy)$$

wobei $\delta\Omega$ so orientiert, dass Ω zur Liunken liegt. $\delta\Omega$: Rand, Ω: Fläche

Beispiel zu Green

$$\begin{aligned} & w = y dx + x dy \\ & \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in [0,\pi], 0 \le y \le sin(x)\} \\ \text{Gesucht: } & \int_{\delta\Omega} w d\mu = \int_\Omega \frac{\delta w_1}{\delta x} - \frac{\delta w_2}{\delta y} d\mu = \int_\Omega 1 - 1 d\mu = 0 \end{aligned}$$

12.3 Transformationsregeln

Substitutionsregel

Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Koordinatentransformation

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann gilt: } \int_\Omega f(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \int_{\phi(\Omega)} f(\phi(x)) \cdot |det(d\phi)| \mu(\vec{y})$$

Beispiel Transformationsregel

Integration über einen Kreis mit Koordinantentransformation Φ

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} 1 dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 * |det(d\Phi)| dr d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 * |r| dr d\phi$$

Flächeninhalt einer 2-dim Fläche S in $\mathbb{R}^3$

Sei $\Phi(u, v)$ eine Parameterisierung der Fläche S

$$\mu(S) = \int_S d\sigma = \iint |\Phi_u \times \Phi_v| du dv$$

Mantelfläche eines Zylinders mit Radius R und Höhe H

$$\Phi(\phi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \phi & \in [0, 2\pi] \\ z & \in [0, H] \end{cases}$$

$$|\Phi_\phi \times \Phi_z| = R$$

$$\mu(M) = \int_0^H \int_0^{2\pi} |\Phi_\phi \times \Phi_z| d\phi dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} R d\phi dz = 2\pi RH$$

Fluss eines Vektorfelds durch eine Fläche S

Fluss von v durch die Fläche S (parametrisiert durch $\Phi(u,v)$), $\vec{n} \perp S$ und $|\vec{n}| = 1$. Wichtig: Hier findet eine Koordinatentransformation statt! Man braucht den Korrekturfaktor jedoch nicht hinzuzufügen.

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$$

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) |\Phi_u \times \Phi_v| dudv = \iint \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|} |\Phi_u \times \Phi_v| dudv$$

$$= \iint \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot \Phi_u \times \Phi_v dudv$$

Beispiel Fluss eines Vektorfelds v durch den Rand eines Zylinders

Zylinder: $Z = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ $\qquad \phi = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

Fluss: $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y + z \\ z + z^2 \end{pmatrix}$

$$\phi_\varphi \times \phi_z = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mantelfläche: $\displaystyle\iint_M \vec{v} \cdot n d\mu = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi + z \\ \cos\varphi + \sin\varphi + z \\ z + z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dz = 4\pi$

Da hier nur der Fluss durch die Mantelfläche berechnet wurde
muss man noch den Fluss durch den Deckel und den Boden berechnen

Deckel: Normalenvektor: $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi + z \\ \cos\varphi + \sin\varphi + z \\ z + z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} |\phi_\varphi \times \phi_r| dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{z + z^2}_{z=1} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dr d\varphi = 4\pi$$

Boden: Normalenvektor: $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 -(\underbrace{z + z^2}_{z=-1}) dr d\varphi = 0$$

Fluss: $4\pi + 4\pi = 8\pi$

12.4 Satz von Gauss

Divergenz

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad div(\vec{v}) = P_x + Q_y + R_z$$

Satz von Gauss (Fluss durch einen Körper V)

$$\begin{aligned} \text{Gegeben:} \quad & V \text{ kompakt in } \mathbb{R}^3 \\ & \delta V = A \text{ die Oberfläche von } V\text{: } S^2 \\ \text{Fluss durch } A = \int_{A=\delta V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V div(\vec{v}) d\mu = \int_V \frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} + \frac{\delta v_3}{\delta z} d\mu \end{aligned}$$

Beispiel Satz von Gauss

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V &= \text{ Einheitskugel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V div(v) d\mu &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \phi(div(\vec{v})) |det(d\phi)| dr d\varphi d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \phi(div(\vec{v})) r^2 \cos(\theta) dr d\varphi d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \cdot r^2 \cos(\theta) dr d\varphi d\theta = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

$div(v) = 0$ ausnutzen
Falls die $div(v)$ über ein Vektorfeld 0 ist ($div(v) = 0$), dann weiss man, dass der Fluss über alle Aussenflächen 0 ist.

$$\int_G div(\vec{v}) d\vec{\sigma} = \int_B \vec{v} \cdot n d\mu + \int_D \vec{v} \cdot n d\mu = 0 \qquad \begin{cases} G & \text{Volumen} \\ B & \text{Fläche} \\ D & \text{Fläche} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_B \vec{v} \cdot n d\mu = - \int_D \vec{v} \cdot n d\mu$$

Die Flächen muss man so wählen, dass sie an den Rand des Flussintegrals angrenzen.

12.5 Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Rotation von K ("Wirbelstärke", engl: curl)

$$\overrightarrow{rotK} = \vec{\nabla} \times \vec{K} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_y - Y_z \\ X_z - Z_x \\ Y_x - X_y \end{pmatrix}$$

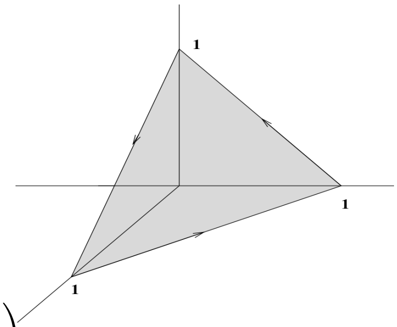
Der Satz von Stokes (Fluss durch eine Oberfläche)
Sei S eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ (mit einem Rand) und $\vec{v}$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$:

$$\int_S \overrightarrow{rotK} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\delta S} K \cdot d\vec{s}$$

Der Satz von Green, ist ein Spezialfall vom Satz von Stokes (Green $\in \mathbb{R}^2$ und Stokes $\in \mathbb{R}^3$).
Wenn man S von oben betrachtet muss man den Weg δS gegen den Uhrzeigersinn integrieren ($\vec{n}$ Positiv). *Falls man im Uhrzeigersinn integriert, muss man den Normalenvektor $\vec{n}$ umkehren, das heisst mit -1 multiplizieren.*

Beispiel zu Stokes

Berechne das Wegintegral $\int_\gamma K \cdot ds$ für das Vektorfeld $K(x,y,z) = (x-y+z, y-z+x, z-x+y)$ über das Dreieck



$$D : (1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1)$$

Parametrisierung: $$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$rot(K) = \begin{pmatrix} \delta_y Kz - \delta_z K_y \\ \delta_z K_x - \delta_x K_z \\ \delta_x K_y - \delta_y K_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz von Stokes: $$\int_\lambda K ds = \int_G rot(K) \cdot \vec{n} do = \int_D \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\mu(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 6 dy dx = 3$$

13 Approximationsverfahren

Newton-Verfahren
Nullpunktbestimmung einer Funktion durch Folgenentwicklung. Anwenden der rekursiven Formel:

$$(x_n) \to \begin{cases} x_0 & \text{Startpunkt} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

13.1 Taylorreihe

Taylorreihe
beliebig genaue Annäherung an einer Kurve, durch

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \quad + \quad R_n(t)$$

a : Entwicklungspunkt (Punkt, den man einfach ausrechnen kann, z.B.: approximiere $\sqrt{65}$ mit $a := \sqrt{64}$)

$R_n(t)$: Restglied

Tipp: Alle Ableitungen $f^{(n)}(a)$ im vornherein ausrechnen. Dann muss man weniger schreiben.

Restglied, Fehler
Der Fehler der Taylorreihe, also die Abweichung zur eig. Funktion, wird Restglied genannt:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1} \leq \sup_{\xi \in]a,t[} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}$$

13.1.1 Mehrdimensionaler Fall

Mehrdimensionale Taylorreihe
Entspricht im wesentlichen 1-dim Fall. Ableitung wird allerdings durch Gradient, Hesse-Matrix, usw. ersetzt:

$$T_n(\vec{t}) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k f(\vec{a})}{k!}(\vec{t} - \vec{a})^k$$

$\vec{a} :=$ Entwicklungspunkt

Beispiel Taylorreihe

Taylorreihe mit 2 Variabeln

$$\begin{aligned} P^N_{x_0,y_0}(x,y) =& f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_2)^2\right) \\ &+ ... + ... \\ &+ \frac{1}{N!}\left(\binom{N}{0} f_{x^N}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^N + \binom{N}{1} f_{x^{N-1}y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^{N-1}(y-y_0) + ...\right) \end{aligned}$$

Taylorreihe mit 3 Variabeln $\quad \Delta x = (x-x_0), \Delta y = (y-y_0).\Delta z = (z-z_0)$

$$\begin{aligned} P^N_{x_0,y_0,z_0}(x,y,z) =& f(x_0,y_0,z_0) + f_x\Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z \\ &+ \frac{1}{2}[f_{xx}\Delta x^2 + f_{yy}\Delta y^2 + f_{zz}\Delta z^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + 2f_{xz}\Delta x \Delta z + 2f_{yz}\Delta y \Delta z] + \ldots + R_N \end{aligned}$$

Restglied Taylorreihe

Das $R-$te Restglied der Taylorreihe von f:

$$R_n = \frac{1}{n!} H_f(\xi)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Punkt $\vec{\xi}$ ein Punkt im Defenitionsbereich darstellt.

Restglied Taylorreihe

$$R_2 = \frac{1}{2} H_f(\xi)(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{2} f_{xx}(\vec{\xi})(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(\vec{x}i)(y - y_0)^2 + f_{xy}(\vec{\xi})(x - x_0)(y - y_0)$$

Beispiel zu Taylorreihe und Restglied

Bestimme das Taylorpolynom 3. Grades um $t_0 = \frac{\pi}{3}$ von $f(x) = \sin(x)$ und gib eine Schranke für den Fehler für $t = 59°$ an.

$$\begin{aligned} P_3(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} f''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(t_0)(t - t_0)^3 \\ &= \sin(t_0) + \cos(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2!} \sin(t_0)(t - t_0)^2 - \frac{1}{3!} \cos(t_0)(t - t_0)^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Für den Fehler R_n, den man bei einer Näherung durch den Wert dieses Polynoms begeht gilt allgemein:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t - a)^{n+1} \qquad \xi \in]t, t_0[$$

Demnach gilt (für $t = 59°$, $t - t_0 = 1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$)

$$|R_3| = \frac{\left(t - \frac{\pi}{3}\right)^4}{4!} |\sin(\xi)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{24} \sup_{\xi \in]t, t_0[} \sin(\xi) = \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{24} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Alternativ: } \sup_{\xi \in]t, t_0[} \sin(\xi) = 1$$

Appendix

A Tafeln und Tabellen

Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
cx	c
$\|x\|$	$\frac{\|x\|}{x} = \frac{x}{\|x\|}$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^{cx}	ce^{cx}
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\log_a\|x\|$	$(\log_a(e))\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
a^{cx}	$a^{cx} \cdot (c\ln(a))$
x^x	$(1+\ln(x))x^x$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$-\frac{x}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{x}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$-\frac{x}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1+\cot^2(x))$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)$
$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1-\coth^2(x)$
$\mathrm{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{artanh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arcoth}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Standardsubstitutionen

Integral	Substitution	Differential	Bemerkungen
$\int f(g(x), g'(x))dx$	$t = g(x)$	$dx = \frac{dt}{g'(x)}$	Lsg: $\frac{1}{2}[f(x)^2] + C$
$\int f((ax+b))dx$	$t = ax+b$	$dx = \frac{dt}{a}$	Lsg: $\frac{1}{a}\int f(u)du$
$\int f(x, \sqrt{ax+b})dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2tdt}{a}$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	$x = \alpha t + \beta$	$dx = \alpha dt$	wähle α und β so, dass gilt $ax^2+bx+c = \gamma \cdot (\pm t^2 \pm 1)$
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a \cdot \sin t$	$dx = a \cdot \cos t dt$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$	$x = a \cdot \sinh t$	$dx = a \cdot \cosh t dt$ $t \in \mathbb{R}$	
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = a \cdot \cosh t$	$dx = a \cdot \sinh t dt$	$t \geq 0$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{dt}{t}$	$t > 0$, und dabei gilt $\sinh x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	$-\frac{\Pi}{2} < t < \frac{\Pi}{2}$, und dabei gilt $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Integrale (ohne Integrationskonstante)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
const	const $\cdot x$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\lvert x\rvert$ nur $\Rightarrow$	$\frac{1}{2}x^2$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\lvert f(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$
x^s	$\frac{1}{s+1}x^{s+1},\ s\neq -1$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$(ax+b)^s$	$\frac{(ax+b)^{s+1}}{a(s+1)}$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$
$(ax^p+b)^s x^{p-1}$	$\frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)}$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$(ax^p+b)^{-1}x^{p-1}$	$\frac{\ln\lvert ax^p+b\rvert}{ap}$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax}{c}-\frac{ad-bc}{c^2}\cdot\ln\lvert cx+d\rvert$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\tan^2(x)$	$\tan(x)-x$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\cot^2(x)$	$-\cot(x)-x$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert\sqrt{a^2+x^2}+x\right\rvert$	$\sin^3(x)$	$\frac{1}{12}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(x)$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\cos^3(x)$	$\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)+$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)$	$\sin^4(x)$	$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert$	$\cos^4(x)$	$\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\frac{-1}{\tan(x)}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\arcsin(x)$	$x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\arccos(x)$	$x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\arctan(x)$	$x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\operatorname{arccot}(x)$	$x\cdot\operatorname{arccot}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$
e^{cx}	$\frac{e^{cx}}{c}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
a^{cx}	$\frac{a^{cx}}{c\ln a}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$e^{cx}\sin(ax+b)$	$\frac{e^{cx}}{a^2+c^2}\cdot[c\sin(ax+b)-a\cos(ax+b)]$	$\tanh(x)$	$ln(\cosh(x))$
$e^{cx}\cos(ax+b)$	$\frac{e^{cx}}{a^2+c^2}\cdot[c\cos(ax+b)+a\sin(ax+b)]$	$\coth(x)$	$ln(\sinh(x))$
$x\cdot e^{cx}$	$\left(\frac{cx-1}{c^2}\right)\cdot e^{cx}$	$\frac{1}{sinh^2(x)}$	$-\coth(x)$
$x^n\cdot e^{cx}$	$\frac{x^n\cdot e^{cx}}{c}-\frac{n}{c}\cdot\int x^{n-1}\cdot e^{cx}dx$	$\frac{1}{cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\cdot(\ln\lvert x\rvert-1)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$x\cdot\operatorname{arsinh}(x)-\sqrt{x^2+1}$
$(\ln(x))^2$	$x(\ln(x))^n-n\cdot\int(\ln(x))^{n-1}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x\cdot\operatorname{arcosh}(x)-\sqrt{x^2-1}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$x\cdot(\log_a\lvert x\rvert-\log_a e)$	$\operatorname{artanh}(x)$	$x\cdot\operatorname{artanh}(x)+\frac{1}{2}ln\left(1-x^2\right)$
$x^s\cdot\ln x$	$\frac{x^{s+1}}{s+1}\cdot\left(\ln x-\frac{1}{s+1}\right)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$x\cdot\operatorname{arcoth}(x)+\frac{1}{2}ln\left(x^2-1\right)$
$\frac{1}{x}(\ln x)^n$	$\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}$	$\sin^n(x)$	$s_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x)+\frac{n-1}{n}s_{n-2}$
$e^{ax}p(x)$	$e^{ax}[a^{-1}p(x)-a^{-2}p'(x)$		Rekursion mit: $s_0=x,\ s_1=-\cos(x)$
	$+-...+(-1)^n a^{-n-1}p^{(n)}(x)]$	$\cos^n(x)$	$c_n=\frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}c_{n-2}$
	p: Polynom n-ten Grades		Rekursion mit: $c_0=x,\ c_1=\sin(x)$
$\left(\frac{a}{c}x^2+\frac{2b}{c}x+\frac{b^2+1}{ac}\right)^{-1}$	$c\cdot\arctan(ax+b)$	$x^n\cdot\sin(ax)$	$-\frac{x^n}{a}\cos(ax)+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)dx$
			$,\ (n>0)$
		$x^n\cdot\cos(ax)$	$\frac{x^n\sin(ax)}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin(ax)dx$
			$,\ (n>0)$

Trigonometrische Umformungen

$$
\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= Re(e^{i\varphi}) = \tfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\
\sin(\varphi) &= Im(e^{i\varphi}) = \tfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \\
\sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi) \\
\cos(-\varphi) &= \cos(\varphi) \\
\cos(\varphi) &= \sin(\varphi+\pi/2) \\
\sin(\arccos(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\
\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \tfrac{\tan(\alpha\pm\tan(\beta))}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi) &= 1 \\
\sin(2\varphi) &= 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\
\sin(3\varphi) &= 3\sin(\varphi)-4\sin^3(\varphi) \\
\cos(2\varphi) &= 1-2\sin^2(\varphi) = 2\cos^2(\varphi)-1 \\
\cos(3\varphi) &= 4\cos^3(\varphi)-3\cos(\varphi) \\
\tan(\tfrac{\varphi}{2}) &= \tfrac{1-cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \tfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} \\
\tan(2\varphi) &= \tfrac{2\tan(\varphi)}{1-\tan^2(\varphi)} \\
\tan(3\varphi) &= \tfrac{3\tan(\varphi)-\tan^3(\varphi)}{1-3\tan^2(\varphi)} \\
\sin^2(\tfrac{\varphi}{2}) &= \tfrac{1-\cos(\varphi)}{2} \\
\cos^2(\tfrac{\varphi}{2}) &= \tfrac{1+\cos(\varphi)}{2} \\
\tan^2(\tfrac{\varphi}{2}) &= \tfrac{1-\cos(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} \\
\sin^2(x)\cos^2(x) &= \tfrac{1}{4}\sin^2(2t) = \tfrac{1}{8}(1-\cos(4t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \tfrac{e^x-e^{-x}}{2} \\
\sinh x &= -i\sin ix \\
\sinh(2x) &= \tfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = 2\cdot\cosh(x)\cdot\sinh(x) \\
\sinh(x\pm y) &= \sinh(x)\cdot\cosh(y)\pm\cosh(x)\sinh(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \tfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\
\cosh x &= \cos ix \\
\cosh(2x) &= \tfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \cosh^2(x)+\sinh^2(x) \\
\cosh(x\pm y) &= \cosh(x)\cdot\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y) \\
\tanh x &= \tfrac{\cosh x}{\sinh x} \\
\coth x &= \tfrac{1}{\tanh x} = \tfrac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \cosh^2(x)-\sinh^2(x) \\
e^x &= \cosh(x)+\sinh(x) \\
e^{-x} &= \cosh(x)-\sinh(x)
\end{aligned}
$$

Grenzwerte

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\tfrac{1}{x} &= \infty \\
\lim_{x\to 0-}\tfrac{1}{x} &= -\infty \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{1}{x^2} &= \infty \\
\lim_{x\to 0}(x^a\ln x) &= 0 \quad (a>0) \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{e^x-1}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{\ln(1+x)}{x} &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\tfrac{e^n-1}{n} &= 1 \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin(x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos(x)}{x} &= 0 \\
\lim_{x\to\infty}\tfrac{e^x}{x^n} &= \infty \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{\log_a(1+x)}{x} &= \tfrac{1}{\ln a} \\
\lim_{x\to 0}\tfrac{a^x-1}{x} &= \ln a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\tfrac{\ln x}{x-1} &= 1 \\
\lim_{x\to\infty}x^m e^{-ax} &= 0 \quad (a>0) \\
\lim_{x\to\infty}x^{-a}\ln x &= 0 \quad (a>0) \\
\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n &= e^x \\
\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} &= 1 \\
\lim_{x\to\infty}\tfrac{f(x)}{g(x)} &= 0 \\
\forall\alpha>0 : \lim_{t\to\infty}t^\alpha e^{-t} &= 0 \quad (\alpha\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Reihen

geometrische Partialsumme $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i \qquad a_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a\cdot q^k = a\cdot\dfrac{1}{1-q}$ konvergiert nur falls $|q|<1$

harmon. Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots$ (divergent) Näherung $n>5 : ln(n)+0,577$

altern. harmon. Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots = \log 2$

binomische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot z^k = (1+z)^\alpha$ Konvergenzradius $\rho=\infty$ für $\alpha\in\mathbb{N}, \rho=1$, sonst

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a^{n-k}\left(=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}b^k a^{n-k}\right)$$

Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \tfrac{z}{(1-z)^2} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = \tfrac{1}{1-az} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k = \ln \tfrac{1}{1-z}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = \tfrac{z(1+z)}{(1-z)^3} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{c+k-1}{k} a^k z^k = \tfrac{1}{(1-az)^c} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

B Weitere Formeln

Auflösungsformel 2. Grades (Mitternachtsformel)

Gegeben: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Vandermonde Identität:

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{r-k}$$

Pascals Identität:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \text{ wenn } n \geq 0$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Skalar-,Kreuz-,Spatprodukt

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\gamma \longleftarrow \text{WTF?}$$

Spatprodukt::

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \text{Volumen des aufgesp. Raumes}$$

Rechenregeln Logarithmus

$\log a - \log b = \log(\frac{a}{b})$ $\qquad$ $\log(1/a) = -\log a$

$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$ $\qquad$ $\log x^r = r \log x$

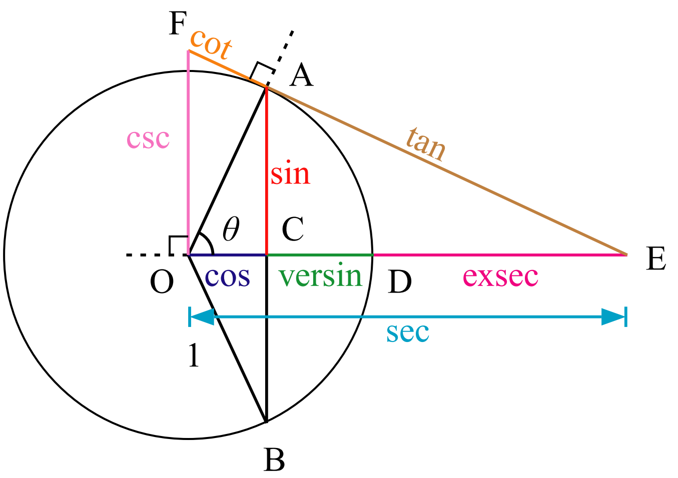
Basiswechsel $\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$ $\qquad$ $x^{\log(y)} = y^{\log(x)}$

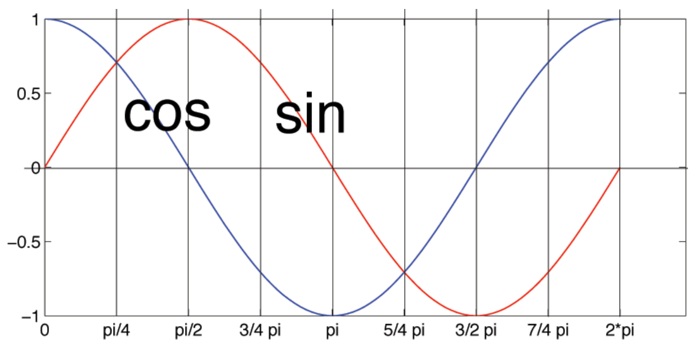
Dreiecksungleichung

$||x \pm y|| \leq ||x|| \cdot ||y||$

C Spezielle Funktionen

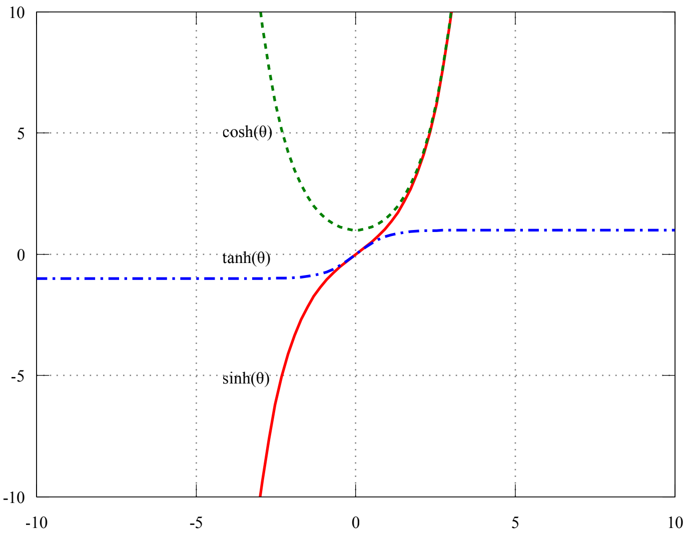
C.1 Trigonometrische Funktionen



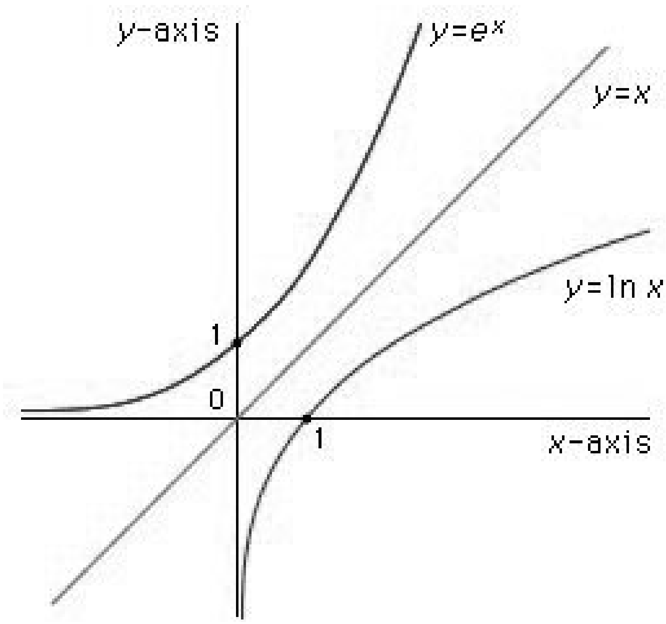


Winkel	0	30	45	60	90	180	270
Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tangens	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-

C.2 Hyperbolische Funktionen



C.3 Exponentialfunktionen



D Sonstiges

Partialbruchzerlegung

Idee Gebrochenrationale Funktion zerlegen

1 Polynomdivision durchführen

2 Nenner des Divisionsrests $q(x)$ faktorisieren, damit Rest umschreiben:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{u_1} + \ldots + \frac{A_n}{u_n} \qquad \text{wobei } u_1 \cdot \ldots \cdot u_n = q(x)$$

Beachte: Doppelte Faktoren u müssen bis im Quadrat, Dreifache bis hoch 3 usw. vorkommen! $\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \ldots\right)$

3 rechte Seite der oberen Gl. auf selben Nenner bringen

4 A_1 bis A_n mit Koeffizientenvergleich und Auflösen eines LGS berechnen

Spezielle Taylorreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{für } -1 \leq x \leq 1$$

Spezialfall Ausklammern

$$(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Signum-Funktion

$$sgnx = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

D.1 Flächen, Volumenformeln

Kreis	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
Kugeloberfläche	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

D.1.1 Masse von speziellen Gebieten

Zylinder	$V = \pi r^2 h$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} G h$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3} abc$

D.2 Euklidischer Raum

Euklidische Norm
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Eigenschaften der Euklidischen Norm

positive Definitheit:	$\forall x \in \mathbb{R}^n$:	$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
positive Homogenität:	$\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in R$:	$\|\alpha x\| = \|\alpha\|\|x\|$
Dreiecksgleichung:	$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Cauchy-Schwarz
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Euklidische Metrik
$d(x,y) = \|x-y\|$ (d: Distanz)

positive Definitheit:	$d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Symmetrie:	$d(x,y) = d(y,x)$
Dreiecksgleichung:	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Metrik
Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heisst Metrik auf M, falls gilt:
$d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
$d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

D.3 Konstanten

Eulersche Zahl
$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$

Goldener Schnitt
$g = 1 + \frac{1}{g} \qquad h = \frac{1}{g}$:= Goldener Schnitt