简单线性回归方程beta0与beta1的推导

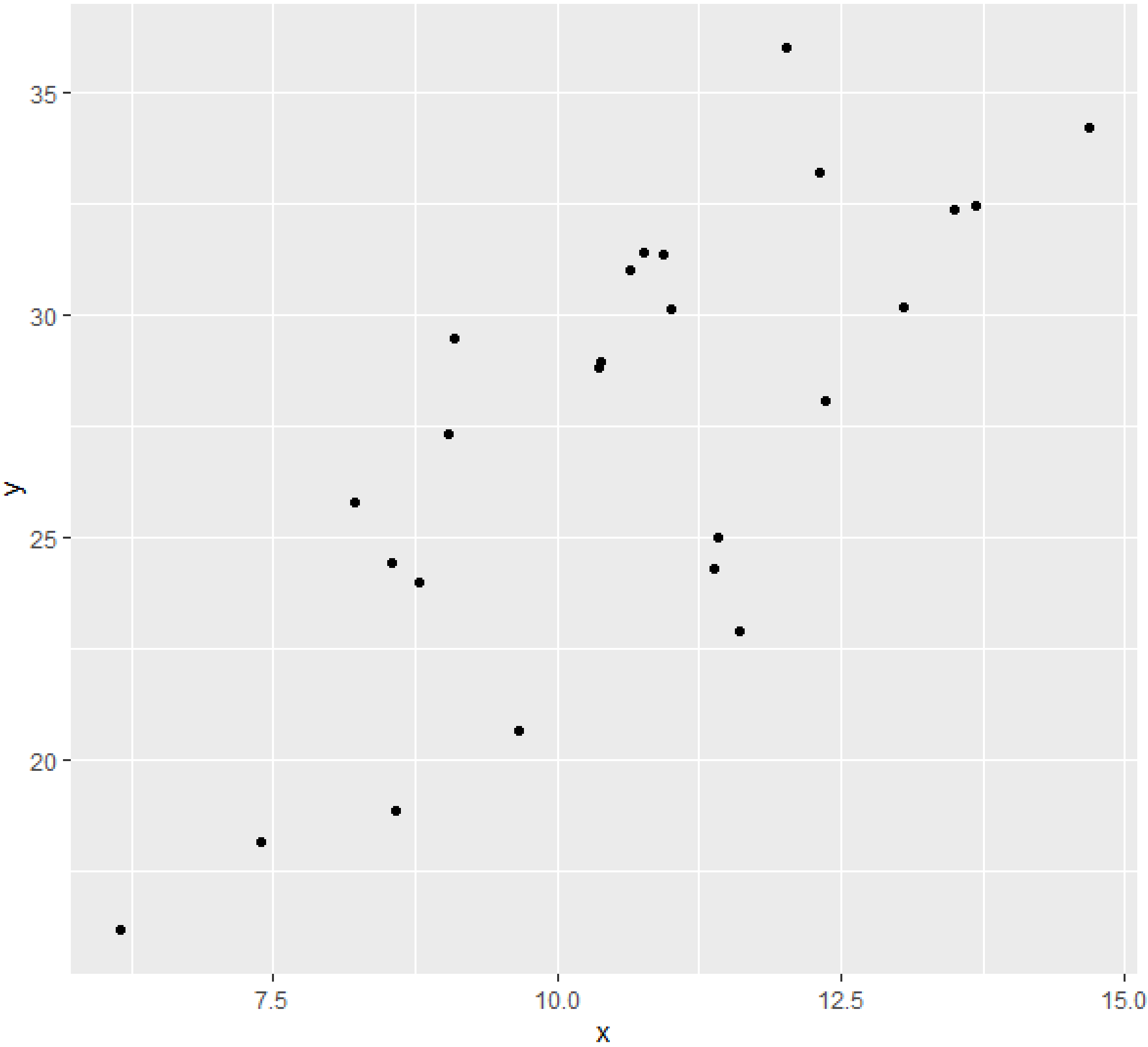
> 思路来源于eco375f的tutorial，已经搬运到b站，可以前往这里

假如我们测量了一群小鼠的身长（x）与体重（y），获得了如下的数据：

id	x	y
1	9.52	31.78
2	11.01	29.57
3	9.12	29.65
4	13.28	30.91
5	9.24	26.79
6	9.78	30.69
7	10.49	20.31
8	8.91	27.65
9	10.28	31.93
10	8.81	30.01
11	7.92	35.21
12	10.83	26.93
13	12.72	36.24
14	11.60	25.93
15	11.51	30.59
16	12.40	37.81
17	4.89	16.66
18	11.62	27.25
19	7.90	20.41
20	14.06	35.16
21	9.99	34.06

id	x	y
22	11.88	37.74
23	10.60	25.18
24	9.27	26.71
25	11.10	28.79

如果我们绘制一个散点图可以看到：



线性模型

体重y与身长x似乎有线性的相关性。照理说身长长的老鼠体重应该也会相应增加，所以可以考虑两者之间存在一个解释的关系（身长作为自变量可以解释体重的大小），也就是会有下面的线性关系：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

其中u表示**无法被线性方程解释的误差**

但是由于我们只拿到了一个样本量为25的样本，无法对真实的β_0, β_1去进行计算，只能从样本去计算样本的统计量去对总体参数作估计，而β_0, β_1的样本统计量则记为$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$

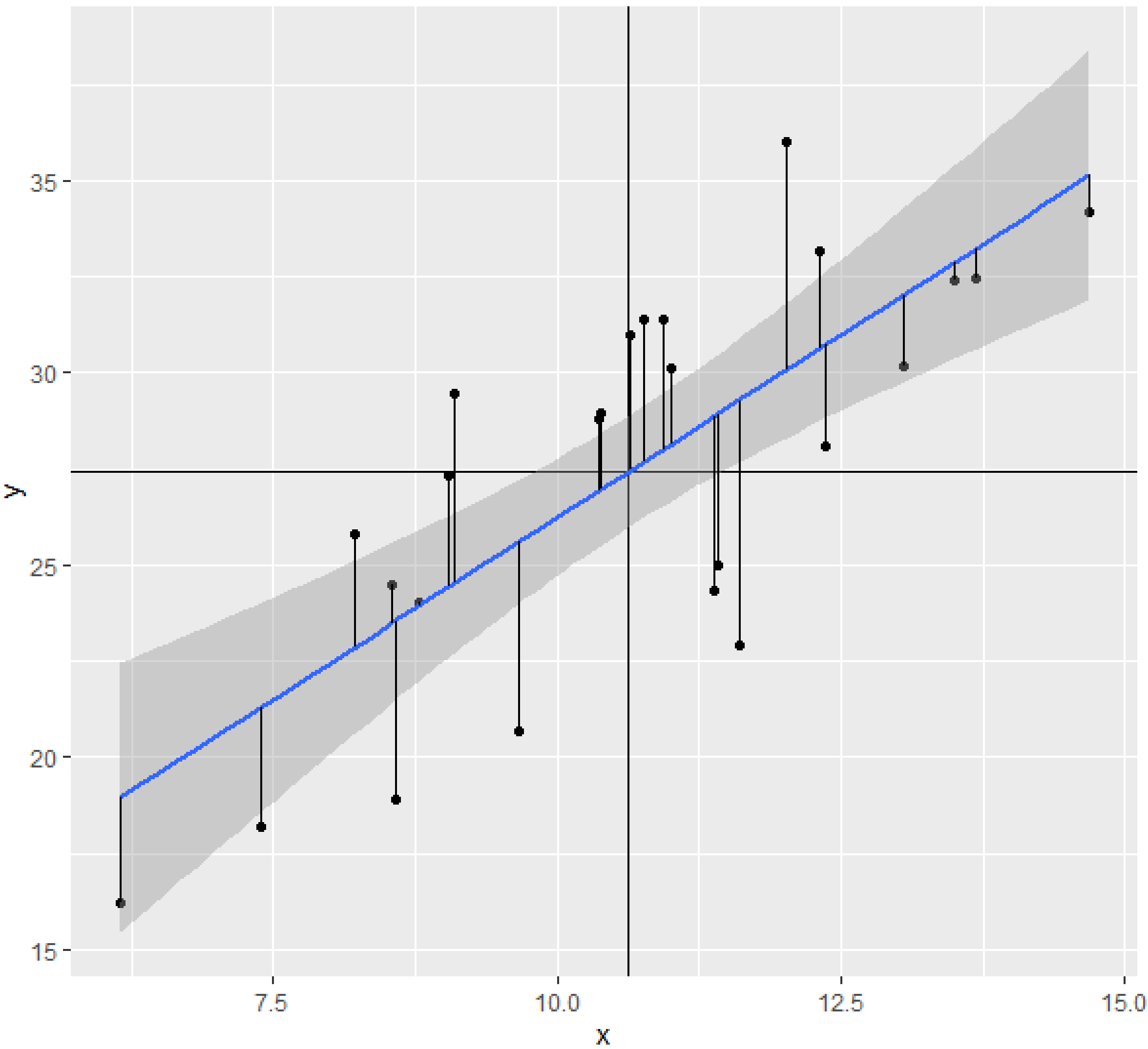
而使用下面式子计算出来的则记为$\hat{y}$，是根据x（自变量，身长）对因变量y，也就是体重的估算：

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

而这个式子也就是一个最简单的**线性模型**。这个模型的输入是自变量x（身长），输出是因变量$\hat{y}$（体重），而通过一定的规则去调整$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$，我们可以对这个模型进行优化。

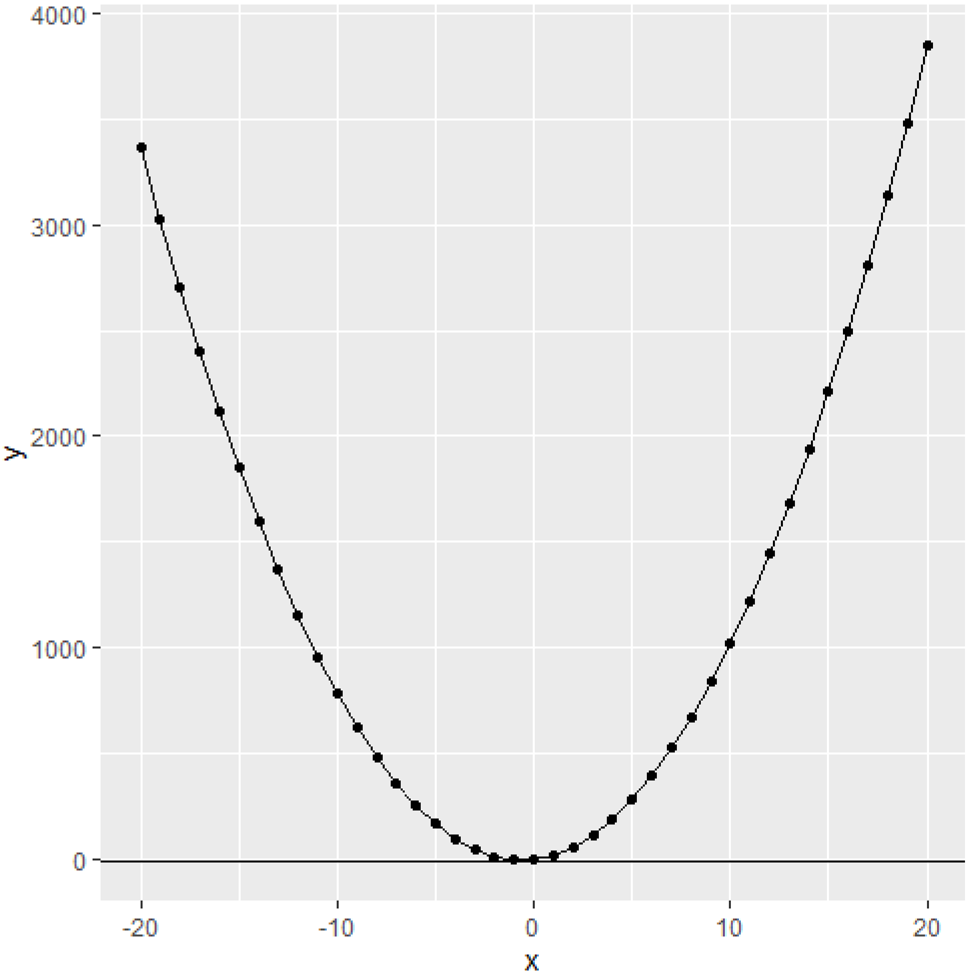
优化

对于简单线性回归方程这种线性模型，我们一般采用**最小二乘法**来进行优化。对于一组$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$，我们可以获取一条线$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$，于是对于刚才数据表中的25个数据点，每一个x都可以计算出一个$\hat{y}$，可以预见的是，每一个数据点的y和方程计算出来的$\hat{y}$之间肯定是有一个差距的，我们可以将其记为$\hat{u}$，（也就是下图中的黑色线段），于是有



$$\hat{u} = y - \hat{y} = y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x$$

所以当$\sum \hat{u}^2 = \sum (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)^2$取最小值的时候，各个数据点实际的y与线性模型预测的$\hat{y}$的距离平方的总和最小，这时候模型预测的值与真实值偏离的水平最小，$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$是最好的。所以接下来的问题就是，$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$分别取什么值的时候，$\sum \hat{u}^2$最小呢？可以看到这是一个2次方程的优化问题，对于$(a + bx)^2$这样的二次方程，其一阶导数为0的时候取极小值



上图中，对$(a + bx)^2$求导$\frac{d(a+bx)^2}{dx}$可得当$x = -\frac{a}{b}$的时候该二次函数取极小值。

FOC1

回到$\sum (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)^2$的极小值问题，我们可以分别对$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$求导，得到两个微分方程,也就是在$\hat{u}^2$取极小值的时候有：

FOC1，对$\hat{\beta}_0$求导:

$$\sum (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x) = 0$$

FOC2，对$\hat{\beta}_1$求导:

$$\sum (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)x = 0$$

这里首先是根据求和运算的性质将求导符号写到了求和符号里面。比如对于$\sum a + bx = (a + bx_1) + (a + bx_2) + ...(a + bx_n)$, 这个和对b求导的时候则有$\frac{d(a+bx_1)}{db} + \frac{d(a+bx_2)}{db} + ... \frac{d(a+bx_n)}{db} = \sum \frac{d(a+bx)}{db}$。

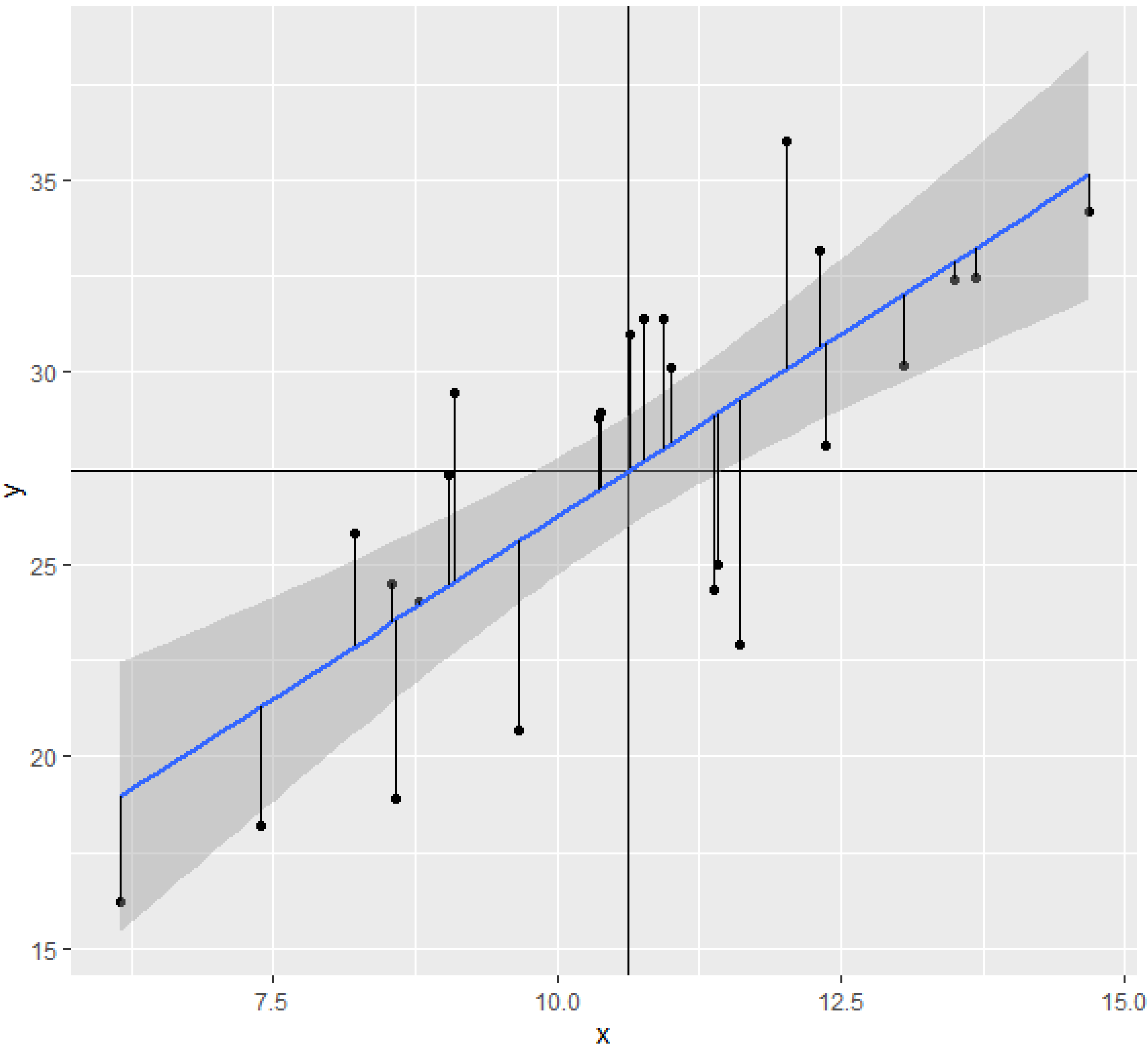
然后用到了求导的链式规则，比如对于$y=(a+bx)^2$求b的导数：$\frac{d(a+bx)^2}{db}$，首先可以令$z=a+bx$，而$y=z^2$，那么当我们求y关于b的导数的时候，这个式子可以写成$\frac{dy}{db}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{db}$，其中$\frac{dy}{dz}=2z=2(a+bx)$，$\frac{dz}{db}=x$，所以$\frac{dy}{db}=2(a+bx)x$

尝试自己根据上面的提示推导FOC1和FOC2

根据FOC1，可以知道$\sum y-n\beta_0-\beta_1\sum x=0$，除以n，将$\beta_0$，$x$转移到右边，有

$$\bar{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\bar{x}$$

也就是说，下面这幅图



对于最优化的线，这条线必然经过$(\bar{x},\bar{y})$这个点。

另一方面，由于$\sum(y-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x)=\sum\hat{u}=0$，也就是说，对于样本中所有的数据点，上图中黑色数据点y减去对应在线性模型上的$\hat{y}$的差值，其总和为0。

此外还可以根据FOC1推出$\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0=\sum(y-\hat{\beta}_1x)/n=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}$$

FOC2

进一步说明以前，先看一下x与y协方差的分子部分：

$$\sum(y-\bar{y})(x-\bar{x})=\sum xy-\bar{y}\sum x-\bar{x}\sum y+n\bar{x}\bar{y}=\sum xy-n\bar{x}\bar{y}$$

其实将上面式子中的y替换成x就变成了方差公式分子的变换：

$$\sum(x-\bar{x})^2=\sum x^2-n\bar{x}^2$$

接下来看FOC2

$$\sum(y-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x)x=0$$
$$\sum(yx-\hat{\beta}_0x-\hat{\beta}_1x^2)=0$$

将求和符号分别对三项求和

$$\sum yx-\hat{\beta}_0\sum x-\hat{\beta}_1\sum x^2=0$$

将FOC1中关于$\hat{\beta}_0$的结果带入，有

$$\sum yx-(\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}))\sum x-\hat{\beta}_1\sum x^2=0$$
$$\sum yx-n\bar{y}\bar{x}-\hat{\beta}_1(\sum x^2-n\bar{x}^2)=0$$

于是有

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum yx-n\bar{y}\bar{x}}{\sum x^2-n\bar{x}^2}$$

如果分子分母同时除以n，则分子变成cov(x,y)，分母变成var(x)，于是也有

$$\hat{\beta}_1=\frac{cov\hat{(x,y)}}{va\hat{r}(x)}$$

分别加帽是强调这都是根据样本获得的统计量，不是参数。