GENERALITES SUR LES BARYCENTRES

Lajoie BENGONE AKOU

2024

TABLES DE MATIERES

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Définition

Soit A et B, deux points plan et a, b deux réels. Pour tout couple $(A, a)\ et\ (B, b)$ il existe un point G tel que :

- ⇨ $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- ⇨ $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

Remarque : On dit que G est barycentre des point pondérés $(A, a)\ et\ (B, b)$.

2. Homogénéité

G barycentre $(A, a)\ et\ (B, b)$ alors pour tout réel k on a :

- ⇨ $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- ⇨ $ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Remarque : La propriété reste inchangée.

3. Réduction d'une somme de vecteurs

G barycentre des points pondérés $(A, a)\ et\ (B, b)$ alors on a, pour tout réel M appartenant au plan on a :

- Si $a + b \neq 0$: $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$
- Si $a + b = 0$: la relation $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendante de M

4. Coordonnées de barycentre

Soit les points $A\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et a, b leurs réels respectifs. G barycentre des points pondérés $(A, a)\ et\ (B, b)$ alors, les coordonées de G sont :

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{ax_a + bx_b}{a + b} \\ \dfrac{ay_a + by_b}{a + b} \end{pmatrix}$$

II. Barycentre de plus de deux points pondérés

5. Définition

Soit A,B et C, trois points du plan et a, b et c des réels. Pour tout couple (A, a) , (B, b) et (C, c) il existe un point G tel que :

$$\Rightarrow\ a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b}\overrightarrow{AC}$$

6. Homogénéité

G barycentre $(A, a), (B, b)$ et (C,c) alors pour tout réel k on a :

$$\Rightarrow\ a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow\ ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} + kc\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

7. Isobarycentre

G est isobarycentre des couples (A, a) , (B, b) et (C, c) lorsque les coefficients respectifs de A, B et C sont égaux.

Remarques

- L'isobarycentre d'un segment $[AB]$ est le milieu du segment
- L'isobarycentre d'un triangle ABC est le centre de gravité du triangle

8. Réduction de la somme des vecteurs

G barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b) et\ (C, c)$ alors pour tout réel M appartenant au plan on a :

- Si $a + b + c \neq 0$: $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$
- Si $a + b + c = 0$: la relation $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendante de M

9. Coordonnées de barycentre

Soit les points $A\binom{x_A}{y_A}, B\binom{x_B}{y_B}\, et\ C\binom{x_C}{y_C}$ et a, b, c . G barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)\ \ et\ (C, c)$ alors, les coordonées de G sont :

$$G\left(\begin{array}{c}\dfrac{ax_a + bx_b +\ cx_C}{a+b+c} \\ \dfrac{ay_a + by_b +\ cy_C}{a+b+c}\end{array}\right)$$

10. Barycentre partiels

Soit G barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)\ \ et\ (C, c)$ avec $a + b + c\ \neq 0$. Si $a + b \neq\ 0$, alors il existe un unique point H barycentre des points pondérés $(A, a)\ et\ (B, b)$. Par conséquent, G barycentre de $(A, a), (B, b)\ \ et\ (C, c)$ devient G barycentre de $(H, a + b), (C, c)$

III. Application barycentre

11. Alignement

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si, l'un des points est barycentre des deux autres.

12. Concours

G barycentre $\{(A, a), (B, b)\}, \{(C, c), (D, d)\}\ et\ \{(E, e), (F, f)\}$ alors les droites $(AB), (CD) et\ (EF)$ sont concourantes.