FONDEMENTS SUR LA THEORIE DES ENSEMBLES

Lajoie BENGONE AKOU

2025

TABLES DE MATIERES

1.1 Ensembles

1.1 Axiome d'extensionalité

Au sens mathématique, un ensemble est défini à partir de l'énumération des éléments qui le compose. On parle de d'une définition en extension.

$$(\forall x, x \in F \ \Leftrightarrow x \in F) \Rightarrow E = F$$

1.2 Ensemble vide

Un ensemble est vide est un ensemble qui ne contient aucun élément.

$$\exists E: \forall x, x \notin E \Rightarrow E = \emptyset$$

1.3 Singleton

Un singleton est un cas particulier d'un ensemble qui ne contient qu'un seul élément ou plusieurs éléments identiques.

$$\forall x\ , \ \ x \in E \Leftrightarrow \ \ x = a \ ou \ \{a\}$$

1.4 Axiome de la paire

Une paire ou encore appelée couple, est un ensemble qui contient deux éléments distincts. Si ces éléments sont identiques on retrouve le cas d'un singleton, s'ils sont nuls il s'agit d'un ensemble vide.

$$\forall x\ , x \in E \Leftrightarrow x = a \ ou \ x = b) \Leftrightarrow x = \{a, b\}$$

1.5 Définition en compréhension

La définition en compréhension est une autre définition d'un ensemble. Ici, plutôt que d'énumérer les éléments de ce derniers, on va constituer un ensemble à partir des éléments qui répondent à une propriété spécifique ou prédicat.

$$Si \ \exists E \ / \ \forall x, x \in E \Leftrightarrow p(x) \ noté \ \{x/p(x)\}$$

1.6 Réunion

La réunion, est une opération fondamentale de l'algèbre qui consiste à créer un ensemble à partir des éléments appartement de chaque des ensembles.

$$\forall x, x \in E \ ou \ x \in F \ noté \ E \cup F$$

1.7 Intersection

L'intersection, elle aussi fondamentale, est une opération qui crée un ensemble à partir de l'éléments partagés entre plusieurs ensembles.

$$\forall x, x \in E \ et \ x \in F \ noté \ E \cap F$$

1.8 Différence

$$\forall x, x \in E \ et \ x \notin F \ noté \ E \backslash F$$

1.9 Opération sur les ensembles

- $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G$
- $\mathrm{E} \cup \mathrm{F} = \mathrm{F} \cap \mathrm{E}$

- $\emptyset \cup E = E \cup \emptyset \ = \ E$
- $E \cup E = E$
- $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$
- $E \cap F = F \cap E$
- $\emptyset \cap E = E \cap \emptyset = E$
- $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
- $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
- $E \subset F \Leftrightarrow E \cap F = E$
- $E \subset F \Leftrightarrow E \cup F = F$

1.10 Produit cartésien

$$G \coloneqq \{x \backslash \exists a \in E \; et \; \exists b \in F : x = (a, b)\}$$

$$E \times F \coloneqq \{(a, b) \backslash a \in E \; et \; b \in F\}$$

1.2 Applications

1.11 Définition

Souvent confondues avec la fonction, une application peut être définie non rigoureusement comme un procédé mathématique permettant d'obtenir des résultats (sortis) à partir des données d'entrée.

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

1.12 Egalité de deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si :

$$f = g \Rightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$$

Autrement dit :

- f et g ont le même ensemble de départ
- f et g ont le même ensemble d'arrivé
- les images de f et g sont toutes identiques

1.13 Graphe d'une application

$$\Gamma_f \coloneqq \{(x, y) \in E \times F \ \backslash y = f(x)\}$$

1.14 Image

$$Im(f) \coloneqq \{y \in F, \exists x \in E : y = f(x)\}$$

1.15 Surjection

$$\forall y \in F, \forall x \in E : y = f(x)$$

1.16 Injection

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

1.17 Bijection

$$\forall y \in F \exists! \, x \in E : y = f(x)$$

1.18 Composée

$$\begin{array}{l} E \to F \to G \\ x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

1.19 Image réciproque

$$\forall B \subset F, f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in E \backslash f(x) \in B\}$$

1.20 Diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \to & F' \end{array}$$

1.3 Suite d'elements d'une famille

Définition d'une suite de famille d'un ensemble :

Une famille d'élément de l'ensemble Eindéxé par l'ensemble I est une application de I dans E. On note sous la forme $x := (x_i)_{\in I}$, une telle famille. L'image de l'indice $i \in I$ étant l'élément $x_i \in E$. L'ensemble $F(I, E)$ de ces familles est alors noté E^I

Famille d'ensembles

$$\forall x, x \in G \;\Leftrightarrow (\exists \; i \in G, x \in E_i)$$

C'est ensemble est unique (axiome d'extensionalité). On a donc