GENERALITE SUR LES ANGLES ORIENTES ET LA TRIGONOMETRIE

Lajoie BENGONE AKOU

2024

TABLES DE MATIERES

I. Angles orientés

1. Définition

On appelle mesure de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tout réel de la forme : $\alpha + 2k\pi, k \in Z$ ou α est la mesure principale définie sur $]-\pi,\pi]$.

2. Congruence modulo 2π

Deux mesures quelconques d'un même angle orienté sont congru modulo 2π lorsqu'elle diffère d'un multiple entier de 2π.

On écrit : $x \equiv y[2\pi]$

3. Somme de deux angles orientés

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesure respectives α et β. On appelle sommes des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et on note $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle orienté de mesure $\alpha + \beta$.

II. Propriétés des angles orientés

4. Relation de Chasles

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. D'après la propriété de Chasles, on a :

$$(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) + (\widehat{\vec{w},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Par conséquent, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$:

$$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}})\ \tau \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{u'}}) + (\widehat{\vec{v},\overrightarrow{v'}})$$

5. Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $d$eux vecteus et k un nombre réel non nul. On a

- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v},\vec{u}});$
- $si\ k > 0, alors, (\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{kv}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- $si\ k < 0, alors, (\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{kv}}) = \pi + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- $(\widehat{k\vec{u},\overrightarrow{kv}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- Propriété 3 : Pour tout réel a et b d'image symétrique de A et B sur le cercle trigonométrique, $(\widehat{\overrightarrow{0A},\overrightarrow{OB}}) = b - a$

6. Double d'un angle orienté

Soit l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. On appelle le double de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, et on note $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle orienté défini par :

$$2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

7. Propriété

Soit $\hat{\alpha}\ et\ \hat{\beta}$ deux angles orienté $et\ \hat{\delta}$ l'angle orienté droit direct. On a :

(1). $2\hat{\alpha} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$

(2). $2\hat{\alpha} = \widehat{2\beta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$

(3). $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\delta}$ ou $\hat{\alpha} = -\hat{\delta}$

8. Angles orientés et cercle – Caractérisation d'un cercle

Soit C un cercle de centre 0, A et B deux points distinct de ce cercle. Pour tout point M distinct de A et B, on a :

$$M \in (C) \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$$

III. Trigonométrie

9. Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur le cercle (C). M a pour coordonnées :

$$M\binom{\cos\alpha}{sin\alpha}$$

10. Propriété

(1). $\cos(-\alpha) = \cos\ \alpha$

(2). $\sin(-\alpha) = -\sin\ \alpha$

(3). $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\ \alpha$

(4). $\sin(\pi - \alpha) = sin\ \alpha$

(5). $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\ \alpha$

(6). $\sin(\pi + \alpha) = -sin\ \alpha$

(7). $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\ \alpha$

(8). $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\ \alpha$

11. Formule de duplication et de linéarisation

Pour tout réel a, on a :

Formule de duplication

$$cos2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$sin2a = 2sina * cosa$$

Formule de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1 + cos2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - cos2a}{2}$$

IV. Equations et Inéquations trigonométriques

12. Equations trigonométriques

Pour tout nombre réels x et α, on :

(1). $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \; ou \; x = -\alpha + 2k\pi$

(2). $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \; ou \; x = \pi - \alpha + 2k\pi$

(3). $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \; ou \; x = -\alpha + 2\pi$