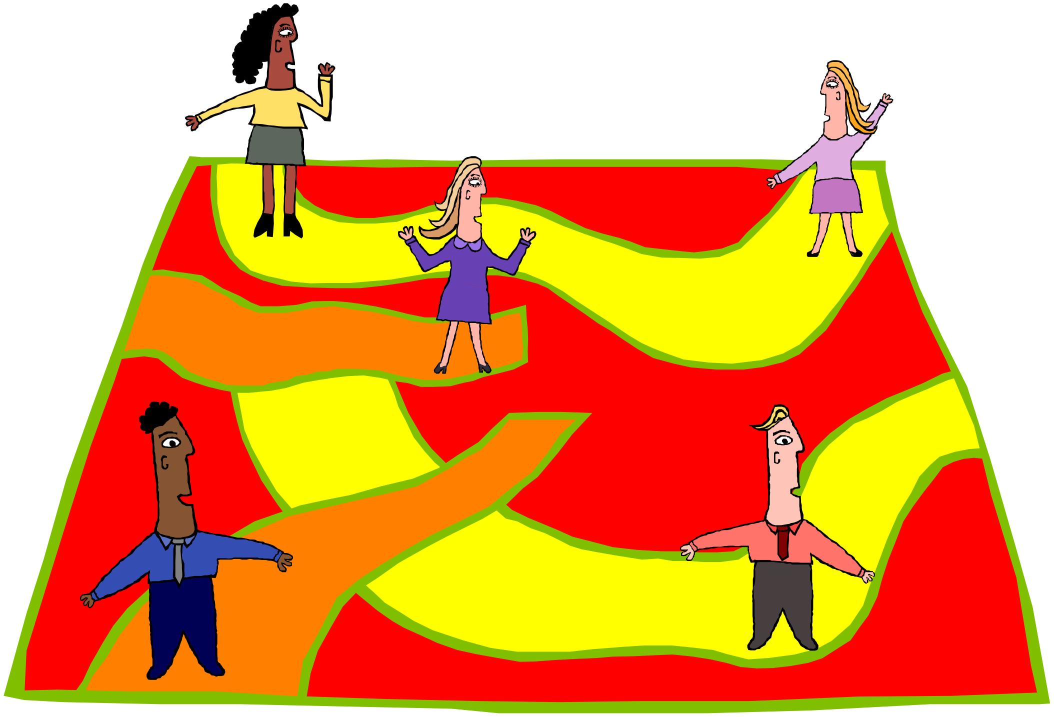
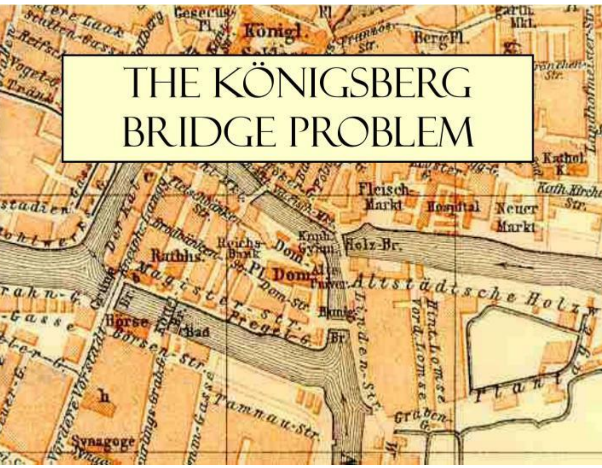
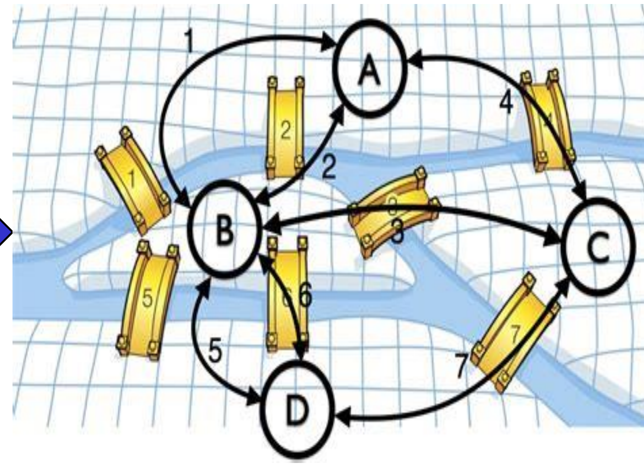
מעגל אוילר

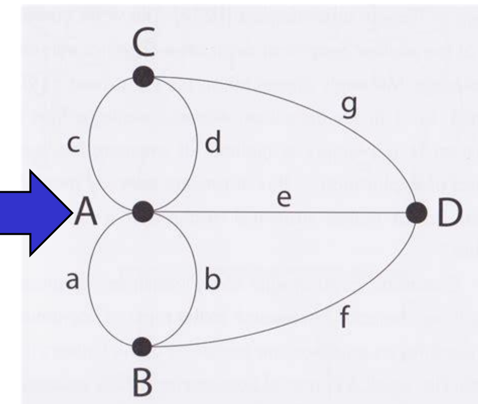


מעגל אוילר (Euler)

בעיית הגשרים של קניגסברג Königsberg







האם ניתן לבצע טיול מעגלי בעיר, כך שעל כל גשר עוברים בדיוק פעם אחת ?

מעגל אוילר

לאונרד אוילר (1707-1783):

מתמטיקאי ופיזיקאי שוויצרי, שנחשב למוביל בתחומו במאה ה-18.

אוילר הוכיח בשנת 1735 כי הטיול איננו אפשרי.

זה היה המאמר הראשון ב"תורת הגרפים".

משפט למעגל אוילר

הגדרה - מעגל אוילר Euler Tour:

יהי G גרף (מכוון/ לא מכוון),

סדרת קודקודים תקרא **מעגל אוילר** אם היא

1. מהווה מעגל בגרף.
2. המעגל מבקר בכל קשת בגרף בדיוק פעם אחת
   (אולם יכול לבקר בקדקוד יותר מפעם אחת).

אפיון מעגלי אוילר

משפט (לגרף לא מכוון): יהי G גרף לא מכוון וקשיר. אזי מתקיים:

יש ב- G מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ דרגת כל קודקודי G זוגית.

משפט (לגרף מכוון): יהי G גרף מכוון וקשיר חזק. אזי מתקיים:

יש ב- G מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ לכל קדקוד v מתקיים: $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

גרף לא מכוון - הוכחת הכרחיות

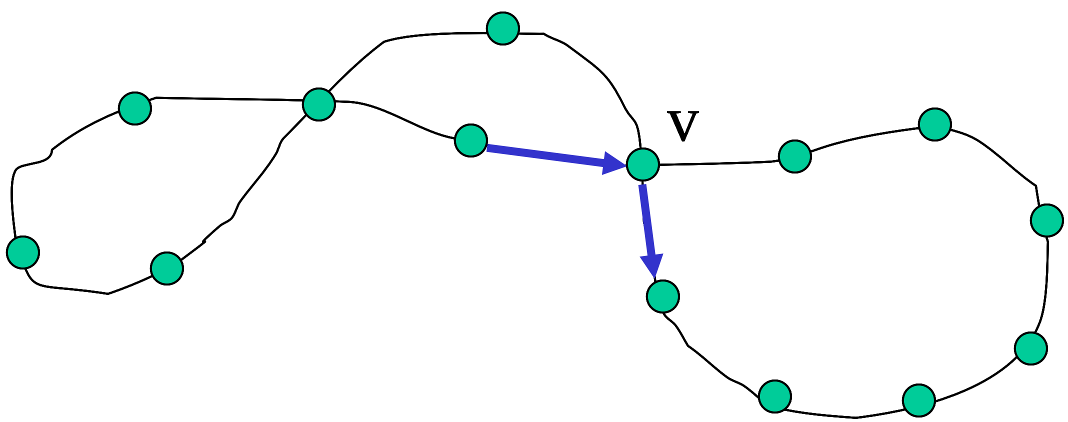
הוכחת המשפט:

כיוון I: יהי G גרף לא-מכוון קשיר.

נניח כי קיים ב- G מעגל אוילר C.

נראה שכל קודקוד בעל דרגה זוגית.

הוכחה: יהי v קדקוד, נראה שדרגתו זוגית.

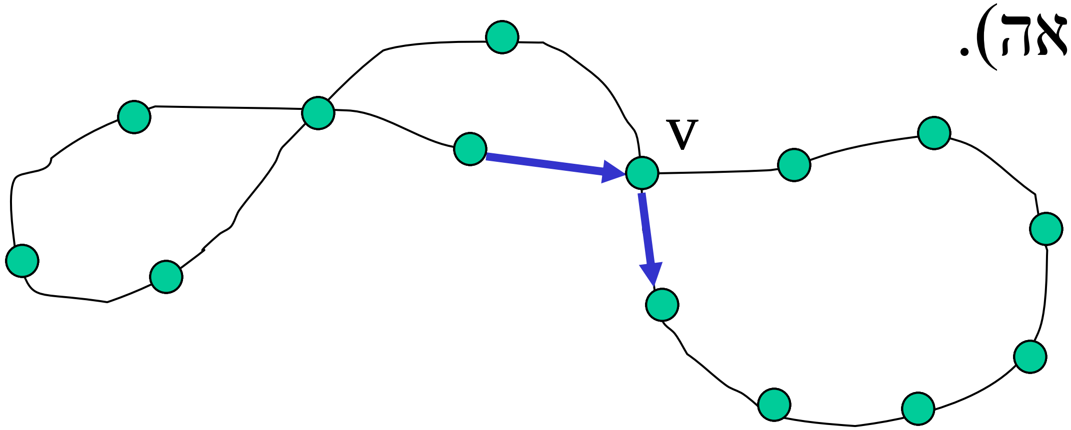


גרף לא מכוון - הוכחת הכרחיות

נסתכל על הצלעות דרכן הגענו ויצאנו אל v במעגל C.

כל מעבר של C דרך v מכסה שתי צלעות המכילות את v

(1 בכניסה ו- 1 ביציאה).



מכיוון ש- C מעגל אוילר והוא מבקר בכל הצלעות בדיוק פעם אחת,

בפרט הוא מבקר בכל הצלעות המכילות את v פעם אחת,

ולכן לכל צלע דרכה נכנסנו ל- v ניתן להתאים את הצלע דרכה

יצאנו ממנו.

לכן v בעל דרגה זוגית.

גרף לא מכוון - הוכחת מספיקות

הוכחה שכזו נקראת
"הוכחה קונסטרוקטיבית"

הוכחת המשפט:

כיוון II: יהי G גרף לא-מכוון קשיר.

נניח שכל קדקוד בעל דרגה זוגית.

ונראה **אלגוריתם שמוצא מעגל אוילר ב-** G.

קלט: גרף לא-מכוון וקשיר $G=(V,E)$ שכל דרגות קדקודיו זוגיות.

פלט: מעגל אוילר ב-G.

גרף לא מכוון - הוכחת מספיקות

הרעיון:

- נניח שיש בידינו מעגל שאינו מבקר בכל הקשתות:
- נבחר קודקוד המחובר בקשת בה לא ביקרנו.
- נמצא מעגל (לא בהכרח פשוט), המתחיל ומסתיים בקודקוד זה.
  בבניית המעגל נקפיד שלא נחזור על קשתות בהן ביקרנו.
- את כל המעגלים שמצאנו נחבר זה לזה כך שנקבל מעגל אוילר.

את ה**מעגלים** נמצא בעזרת פונקציית העזר **Find-Circuit**

פונקציית העזר Find-Circuit

קלט:

1. **גרף לא-מכוון G**, ובו לכל קשת ישנו סימון: מסומנת/ לא מסומנת המקיים:

   לכל קודקוד: מספר הקשתות שא*ינן* מסומנות העוברות דרכו - זוגי.

2. **קדקוד v_0** שיוצאת ממנו לפחות קשת אחת שא*ינה* מסומנת.

פלט: **L** – מעגל (המיוצג כסדרת קודקודים) בגרף G, המקיים:

1. המעגל עובר רק בקשתות שאינן מסומנות.
2. המעגל מתחיל ומסתיים ב-v_0 .
3. המעגל עובר בכל קשת לכל היותר פעם אחת.

שימו לב: הפלט אינו בהכרח מעגל אוילר.

Find-Circuit פונקציית העזר

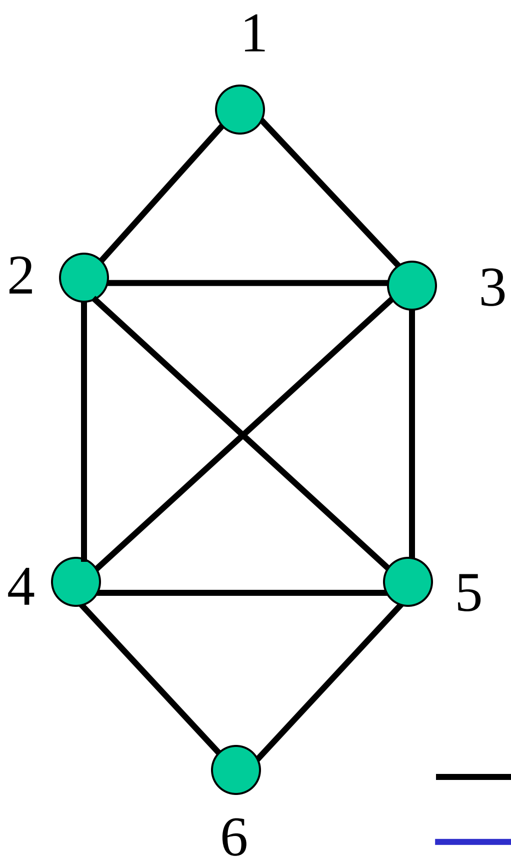
<u>FIND-CIRCUIT(Graph G, Vertex v_0)</u>

// Find a circuit starting at v_0. Return list of vertices.

```
v ← v0
List  L ← (v0)                // initialize list
repeat
        u ← a neighbor of v via an unused edge
        mark {u, v} used
        L.Append(u)
        v ← u
until  v  has no unused edge
return L
```

הערה: הפונקציה מסמנת כל קשת דרכה היא עוברת, ולא עוברת דרך קשתות מסומנות.

דוגמת הרצה

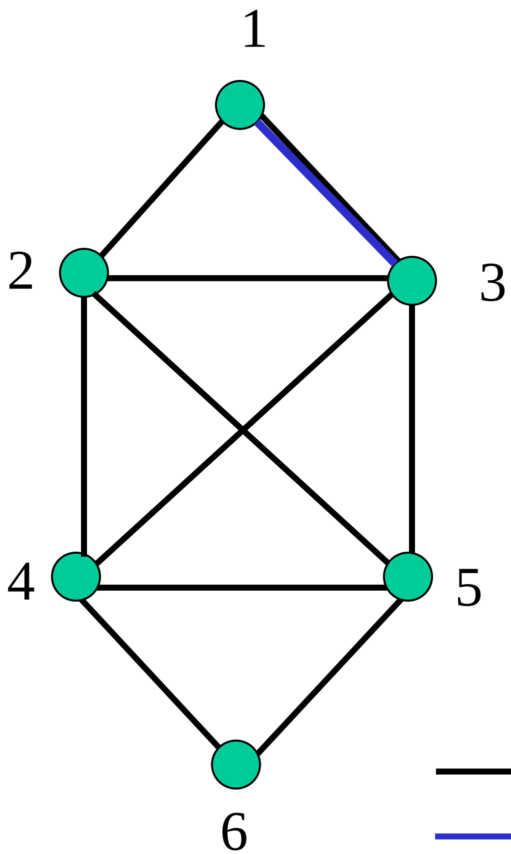


$$v_0 = 3$$
$$L = (3)$$

צלע לא מסומנת

צלע מסומנת

דוגמת הרצה

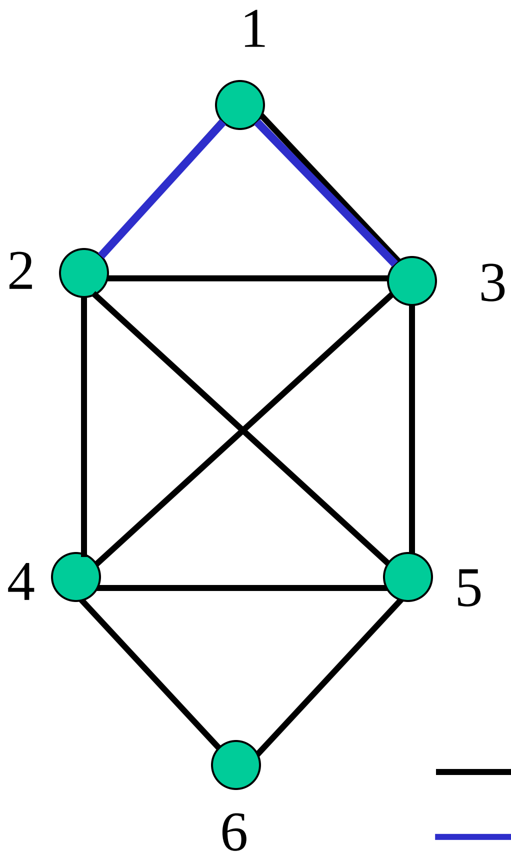


$$L = (3,1)$$

צלע לא מסומנת

צלע מסומנת

דוגמת הרצה

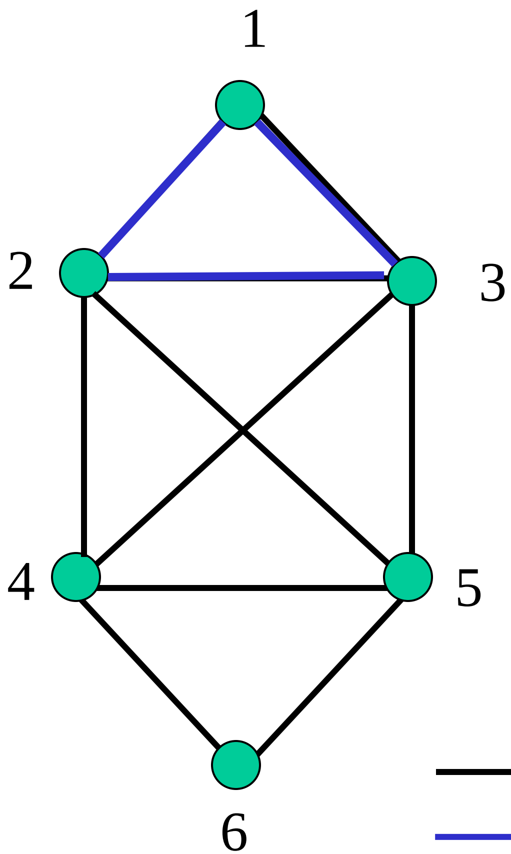


$$L = (3,1,2)$$

צלע לא מסומנת

צלע מסומנת

דוגמת הרצה

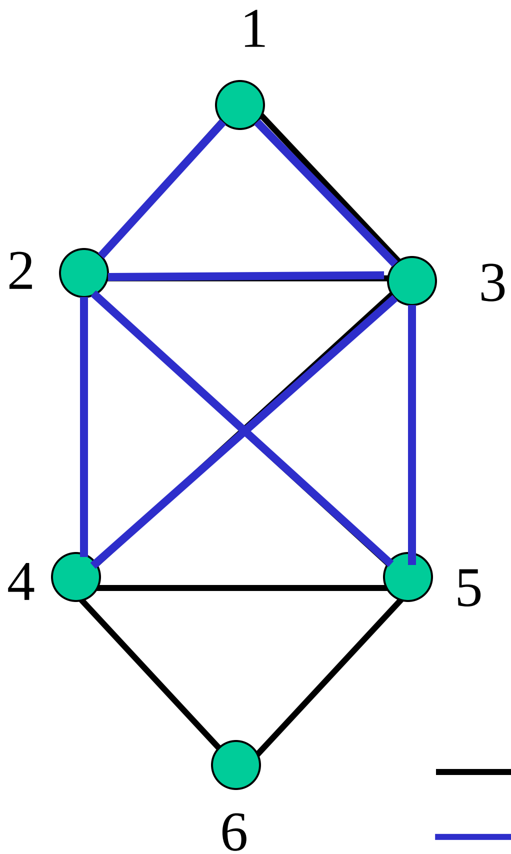


$$L = (3,1,2,3)$$

צלע לא מסומנת

צלע מסומנת

דוגמת הרצה



$$L = (3,1,3,4,2,5,3)$$

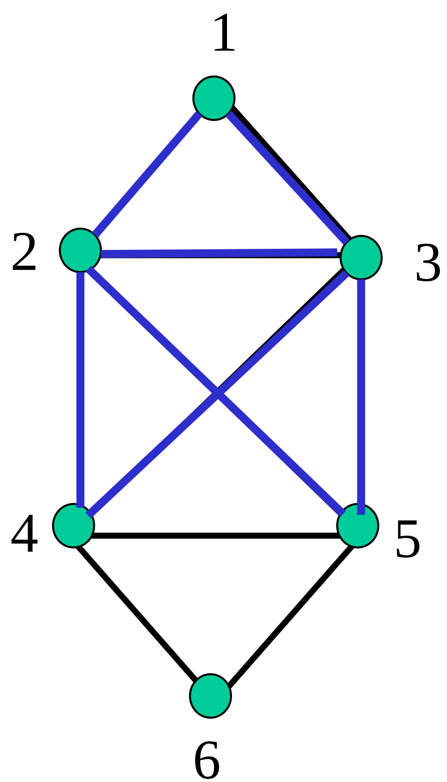
צלע לא מסומנת

צלע מסומנת

נכונות Find-Circuit

הגדרה: יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון ובו לכל קשת ישנו סימון: מסומנת/ לא מסומנת, ויהי $v \in V$.

נגדיר את **דרגתו הלא מסומנת של v** להיות מספר הקשתות הלא מסומנות שבהן v משתתף.



לדוגמה: דרגתו הלא מסומנת של קודקוד 4 בגרף הנתון היא 2.

נכונות Find-Circuit

טענה: יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון.

נניח שהדרגה הלא מסומנת של כל קודקוד הינה זוגית.

אם דרגתו הלא מסומנת של v_0 חיובית, אזי Find-Circuit(v_0) תחזיר מעגל המורכב מקשתות שאינן מסומנות, המתחיל ומסתיים ב- v_0.

נכונות Find-Circuit

טענה: יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון.

נניח שהדרגה הלא מסומנת של כל קודקוד הינה זוגית.

אם דרגתו הלא מסומנת של v_0 חיובית, אזי Find-Circuit(v_0) תחזיר מעגל המורכב מקשתות שאינן מסומנות, המתחיל ומסתיים ב- v_0.

הוכחה:

I) נראה שהתהליך מסתיים

II) נראה שהתהליך מסתיים בקדקוד v_0

נכונות Find-Circuit

הוכחה:

I) נראה שהתהליך מסתיים

מספר הצלעות בגרף סופי, ומבקרים בכל צלע לכל היותר פעם אחת.

נכונות Find-Circuit

הוכחה:

I) נראה שהתהליך מסתיים

II) נראה שהתהליך מסתיים בקדקוד v_0

נניח בשלילה שהתהליך מסתיים בקדקוד x שאינו v_0.
היות והתחלנו מקודקוד שאינו מבודד, אזי נתקדם במסלול
שאורכו לפחות 1.
כל מעבר של המסלול ב- x (כניסה ויציאה) סימן 2 צלעות
המכילות את x,
פרט לצעד האחרון שסימן רק כניסה.
אם לא ניתן להתקדם מ-x משמע שדרגתו הלא מסומנת של x
הינה אי-זוגית, בסתירה להנחה.

אלגוריתם למציאת מעגל אוילר

קלט: **G=(V,E)** - לא-מכוון וקשיר, שכל דרגות קדקודיו זוגיות.

פלט: **L** – רשימת קדקודים המייצגת מעגל אוילר ב-G.

<u>רעיון האלגוריתם:</u>

- נתחיל ממעגל ריק.
- נוסיף לו מעגלים המורכבים מקשתות שאינן מסומנות בעזרת הפונקציה Find Circuit, כל עוד ניתן.

סימון: במהלך ריצת האלגוריתם קודקוד $V \ni v$ יקרא $unmarked$ אם קיימת קשת $\{v,u\}$ שאינה מסומנת.

אלגוריתם למציאת מעגל אוילר

קלט: $\boldsymbol{G = (V,E)}$ - לא-מכוון וקשיר, שכל דרגות קדקודיו זוגיות.

פלט: **L** – רשימת קדקודים המייצגת מעגל אוילר ב-G.

<u>EULER(Graph G)</u> // Find an Euler circuit.

Choose $v_0 \in V$

$L \leftarrow (v_0)$

while $\exists v \in L$ unmarked vertex

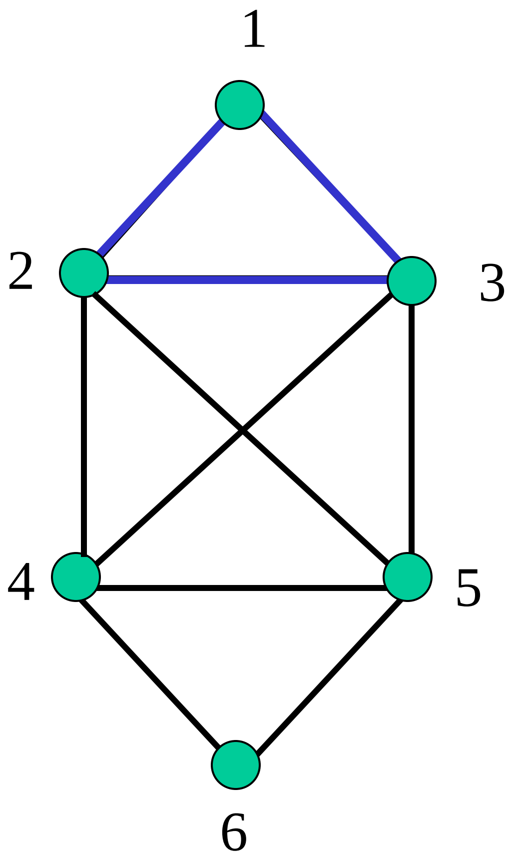
    Choose an unmarked vertex v

    $L_1 \leftarrow FIND - CIRCUIT(G, v)$

    Replace v by L_1 in L

return L

דוגמת הרצה



שלב 1:

$$L = (1)$$

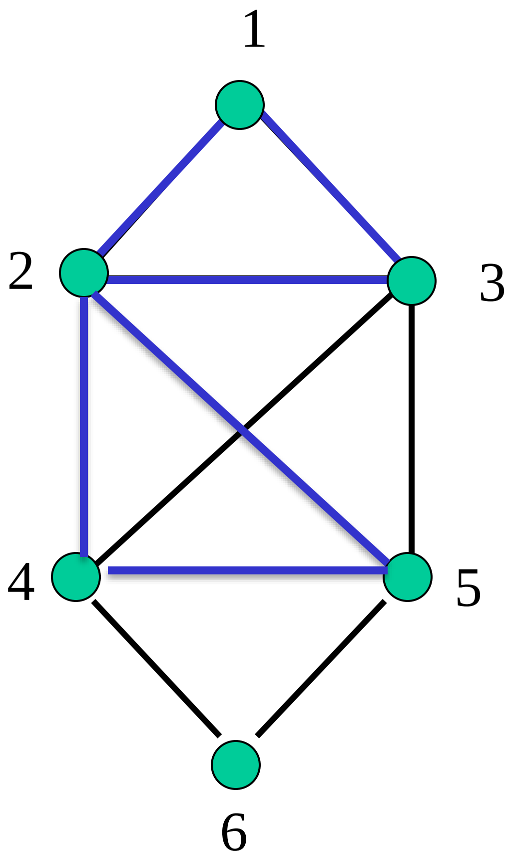
1 הוא קודקוד שאינו מסומן.

נפעיל את $FIND - CIRCUIT$ על $v = 1$

ונמצא את $L_1 = (1,2,3,1)$

$L = (1,2,3,1)$.

דוגמת הרצה



שלב 2:

$L = (1,2,3,1)$

2 הוא קודקוד שאינו מסומן.

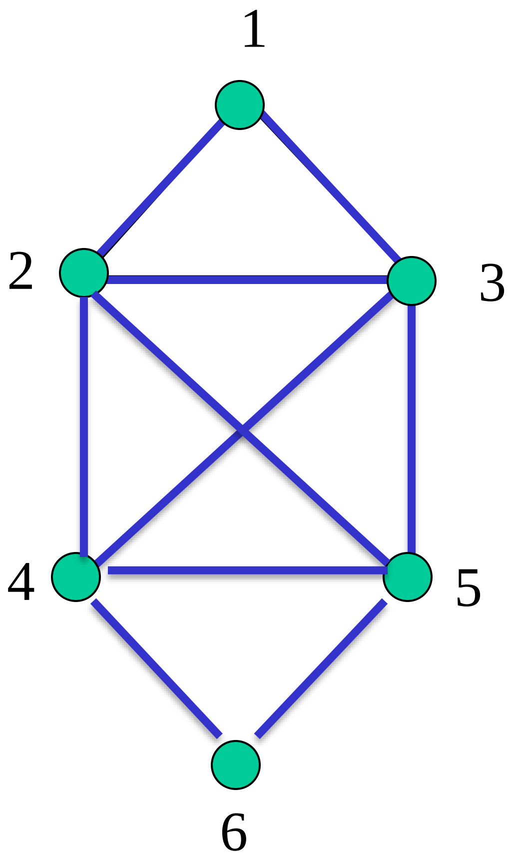
נפעיל את $FIND - CIRCUIT$ על $v = 2$

ונמצא את $L_1 = (2,4,5,2)$

לאחר הדבקת L_1 נקבל:

$L = (1,2,4,5,2,3,1)$.

דוגמת הרצה



שלב 3:

$$L = (1,2,4,5,2,3,1)$$

4 הוא קודקוד שאינו מסומן.

נפעיל את $FIND - CIRCUIT$ על $v = 4$

ונמצא את $L_1 = (4,6,5,3,4)$

לאחר הדבקת L_1 נקבל:

$L = (1,2,4,6,5,3,4,5,2,3,1)$.

נכונות Euler

משפט: אם הגרף G קשיר וכל הדרגות זוגיות,
האלגוריתם מוצא מעגל אוילר.

הוכחה:

I) כל קריאה ל- Find-Circuit תצליח

II) האלגוריתם יסתיים

III) L תמיד מהווה מעגל

IV) המעגל יכיל את כל הצלעות

V) המעגל לא יעבור על קשת יותר מפעם אחת

נכונות Euler

משפט: אם הגרף G קשיר וכל הדרגות זוגיות,
האלגוריתם מוצא מעגל אוילר.

הוכחה:

I) כל קריאה ל- Find-Circuit תצליח

יש להראות שלאחר כל הפעלה של Find-Circuit

1. הדרגה הלא מסומנת של כל קודקוד זוגית.
2. קדקוד ההתחלה בכל הפעלה בעל דרגה לא מסומנת זוגית.

החלק הראשון, נובע מהעובדה שכל הפעלה של Find-Circuit מקטינה את דרגתו המסומנת של כל קודקוד במספר זוגי.

החלק השני, נובע מאופן בחירת קודקוד ההתחלה כקודקוד לא מסומן.

נכונות Euler

משפט: אם הגרף G קשיר וכל הדרגות זוגיות,

האלגוריתם מוצא מעגל אוילר.

הוכחה:

II) האלגוריתם יסתיים

כי מספר הצלעות סופי, ובכל שלב בו מסמנים מעגל נוסף,

מסמנים לפחות קשת אחת.

נכונות Euler

משפט: אם הגרף G קשיר וכל הדרגות זוגיות, האלגוריתם מוצא מעגל אוילר.

הוכחה:

III) L תמיד מהווה מעגל

ראשית L תמיד תתחיל ותסתיים בקודקוד ההתחלה.

שנית, נטען כי כאשר אנו מחליפים קודקוד v ב- L במעגל התוצאה נותרת מעגל, ובפרט שכל זוג קודקודים עוקבים ב- L מחוברים בקשת.

זה נובע מכך שלפני ההדבקה כל זוג קודקודים עוקבים חוברו בקשת, ובתוך המעגל שהודבק כל זוג קודקודים עוקבים חוברו בקשת.

פורמלית, באינדוקציה על מספר ההפעלות של FindCircuit.

נכונות Euler

משפט: אם הגרף G קשיר וכל הדרגות זוגיות,

האלגוריתם מוצא מעגל אוילר.

הוכחה:

IV) המעגל יכיל את כל הצלעות

נניח בשלילה שקיימת צלע $\{u,v\}$ בה לא ביקרנו.

אז u,v אינם ברשימה L (אחרת, לא היינו מסיימים).

מצד שני, הגרף קשיר ולכן יש מסלול מ- v_0 ל-u.

כל קודקוד הקודם ל- u במסלול לא נמצא ב- L (מדוע?),

בפרט $L \notin v_0$, סתירה.

נכונות Euler

משפט: אם הגרף G קשיר וכל הדרגות זוגיות,

האלגוריתם מוצא מעגל אוילר.

הוכחה:

V) המעגל לא יעבור על קשת יותר מפעם אחת

הקשתות במעגל התקבלו כפלט מהפרוצדורה Find Circuit,

שאינה עוברת על קשת יותר מפעם אחת.

מעגל אוילר בגרף מכוון

ברמת פסאודו-קוד — אין שום הבדל

ההוכחות שונות במקצת (הוכיחו!)

ניתוח יעילות

<u>EULER(Graph G)</u>

Choose $v_0 \in V$
$L \leftarrow (v_0)$

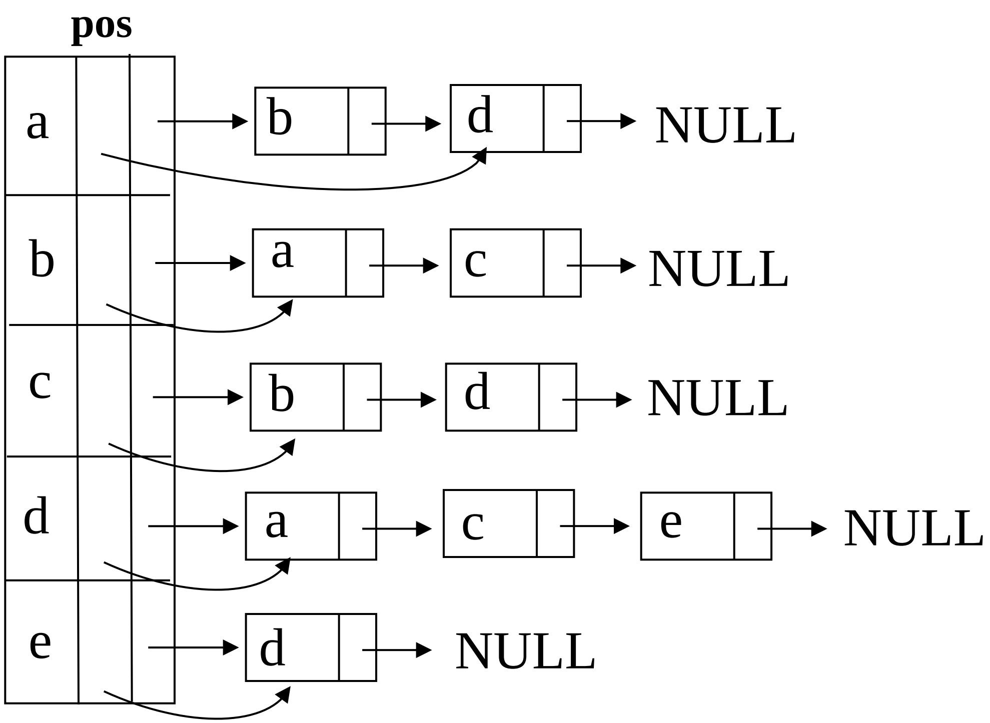
while $\exists v \in L$ unmarked vertex
    $v \leftarrow$ unmarked vertex
    $L_1 \leftarrow FIND - CIRCUIT(G, v)$
    “paste” L_1 into L instead of v

return L

1) זמן ריצה **מצטבר** של הפעולות FIND-CIRCUIT.

2) זמן ריצה של EULER **מחוץ** ל-FIND-CIRCUIT.

מבני נתונים ויעילות: גרף מכוון

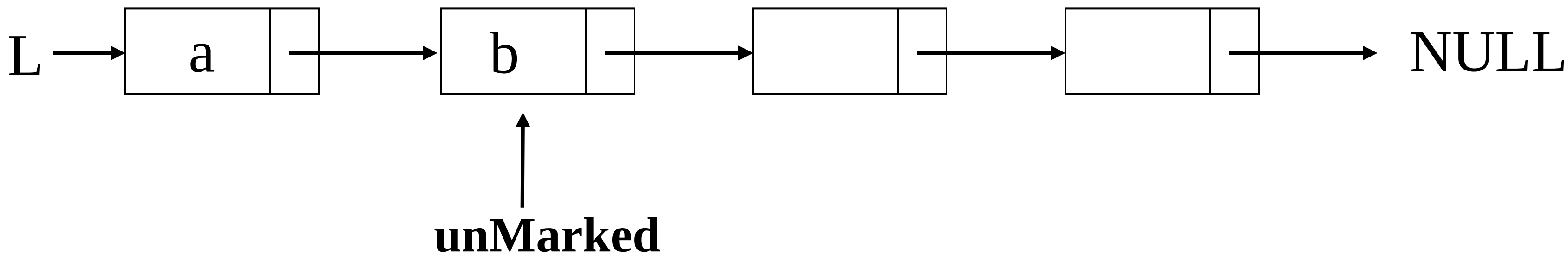


בנוסף לרשימת השכנויות,
לכל קודקוד נחזיק מצביע **pos**
שיצביע לקשת הבאה שאינה
מסומנת ברשימת השכנים שלו.

מצביעי **pos** זזים רק קדימה בכל רשימת שכנים,
ולכן סה"כ הם זזים m פעמים.

$\Leftarrow$ זמן ריצה כולל ב-FIND-CIRCUIT: **Θ(m)**

מבני נתונים ויעילות – אחזקת L



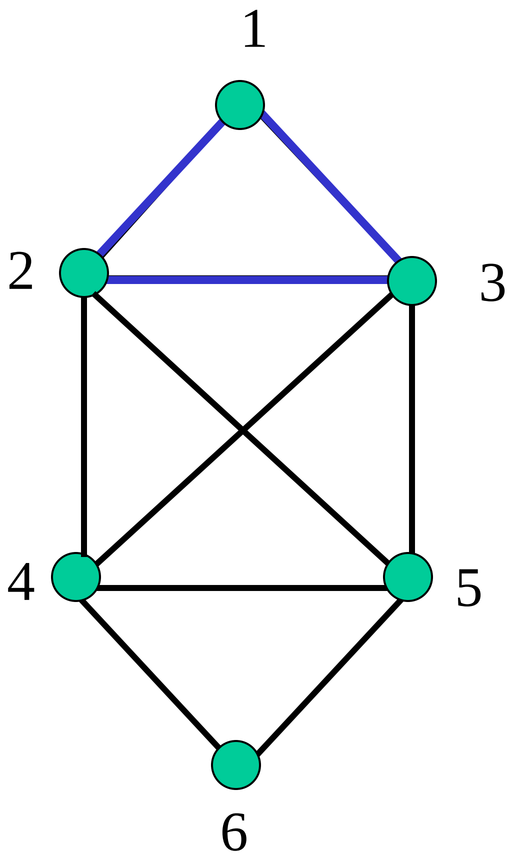
- נשמור מצביע **unMarked** לקדקוד הראשון ב- L שאינו מסומן.
- המעגל שנמצא בעזרת Find-Circuit "יודבק" לרשימה אחרי הקדקוד עליו מצביע unMarked.
- המצביע unMarked יתקדם על L, עד שיגיע לקדקוד הבא שאינו מסומן (או לסוף הרשימה).

בסה"כ unMarked יתקדם m פעמים.

$\Leftarrow$ זמן ריצה כולל מחוץ ל-FIND-CIRCUIT: **$\Theta(m)$**

יעילות האלגוריתם: **$\Theta(m)$**

אחזקת L - דוגמת הרצה

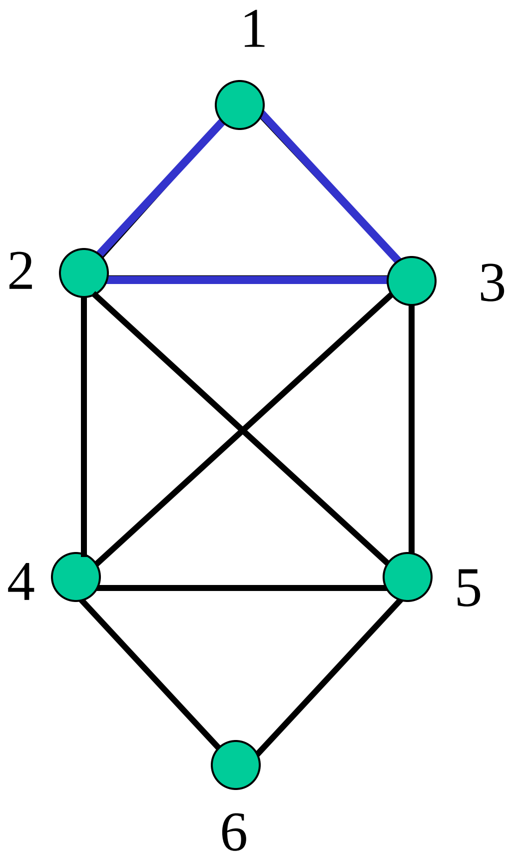


לאחר שלב 1:

L = (**1,2,3,1**)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

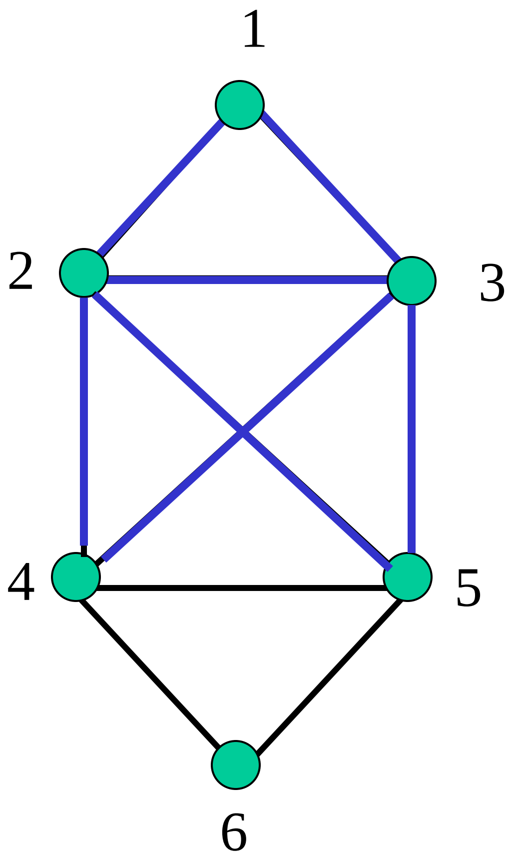


לאחר שלב 1:

L = (**1,2,3,1**)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

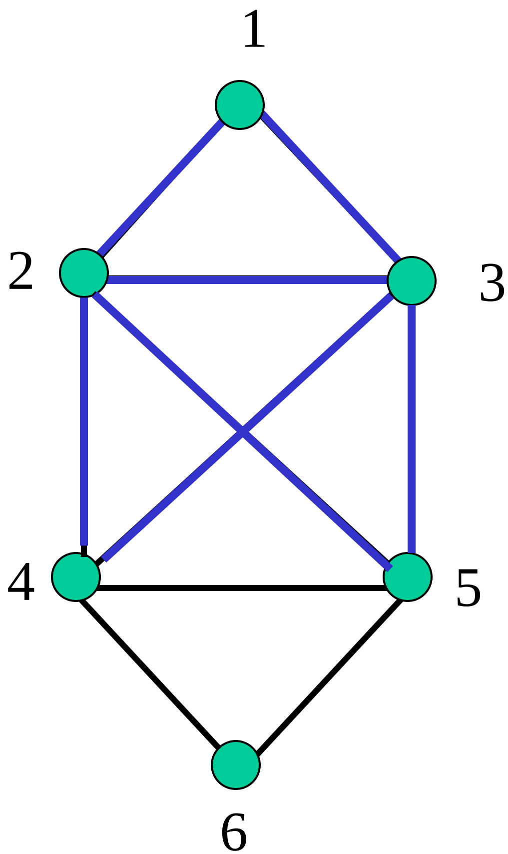


לאחר שלב 2:

L = (1,**2,4,3,5,2**,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

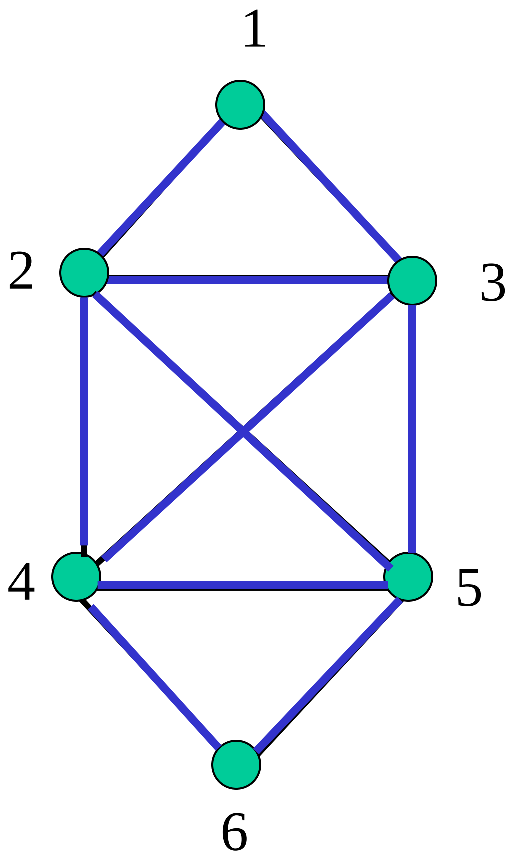


לאחר שלב 2:

L = (1,**2,4,3,5,2**,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

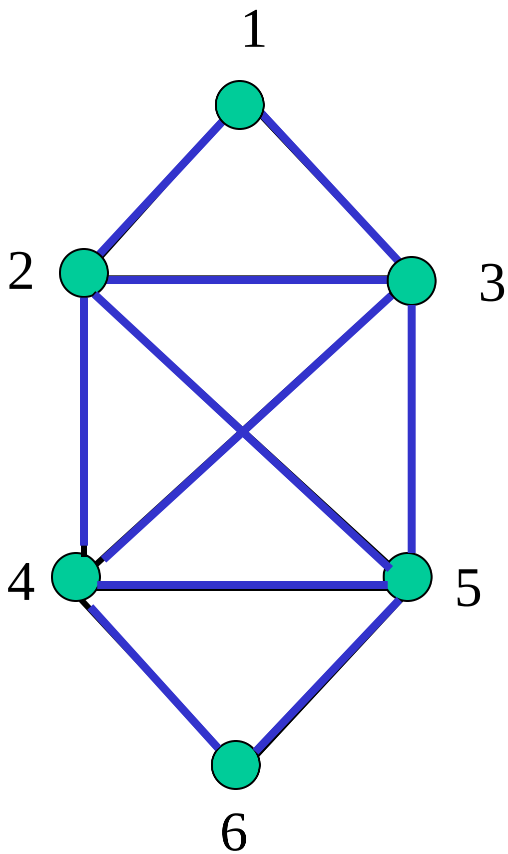


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

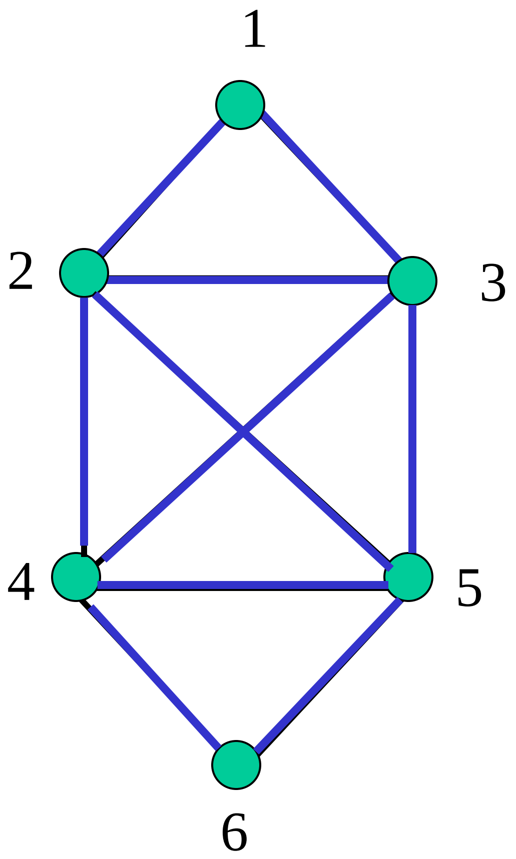


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

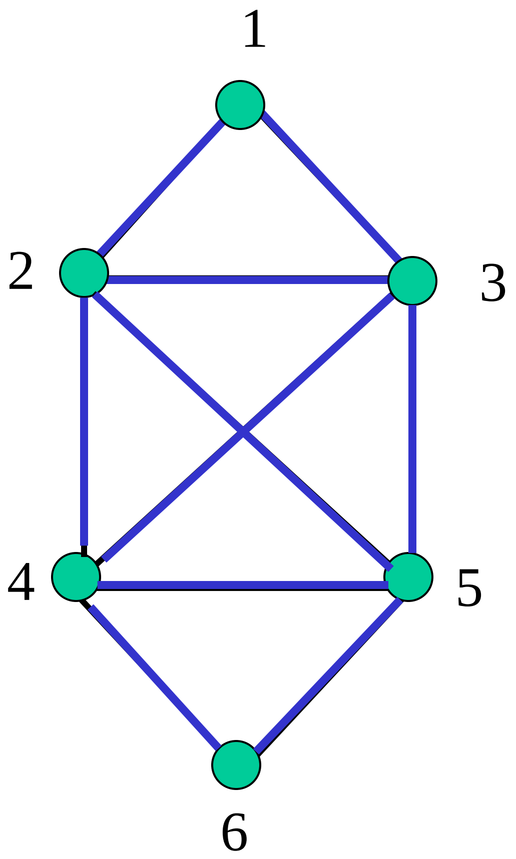


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

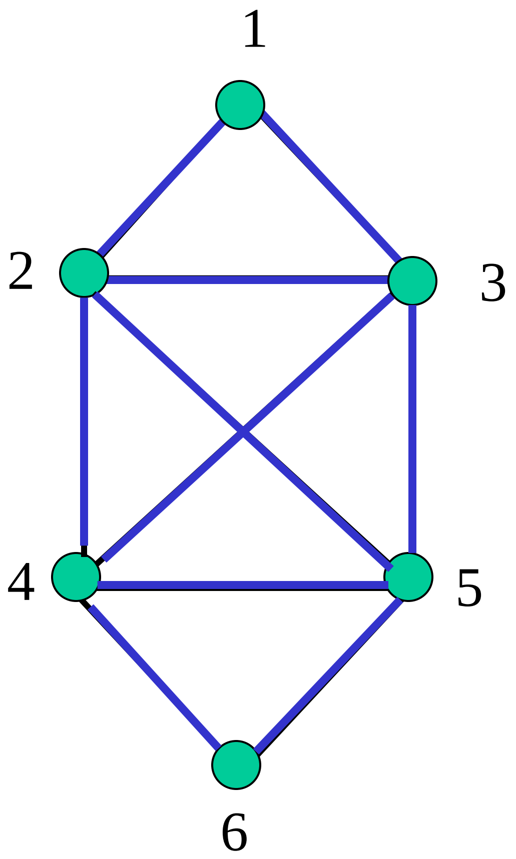


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

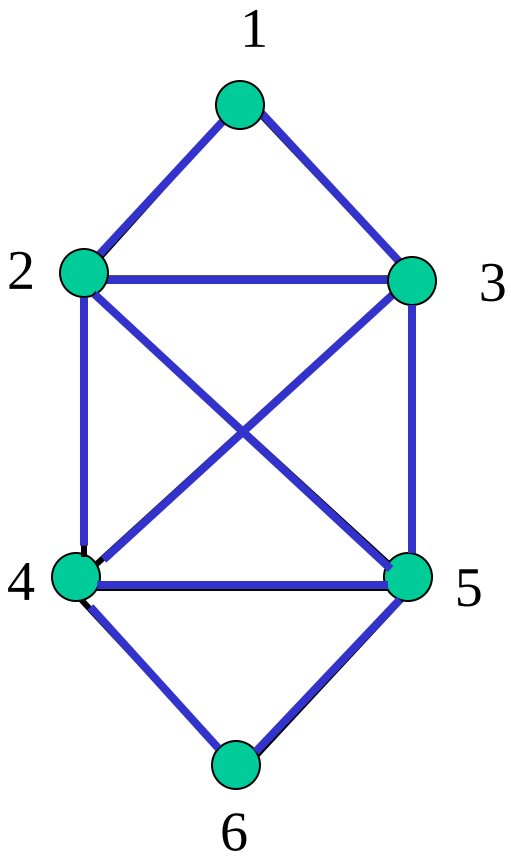


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

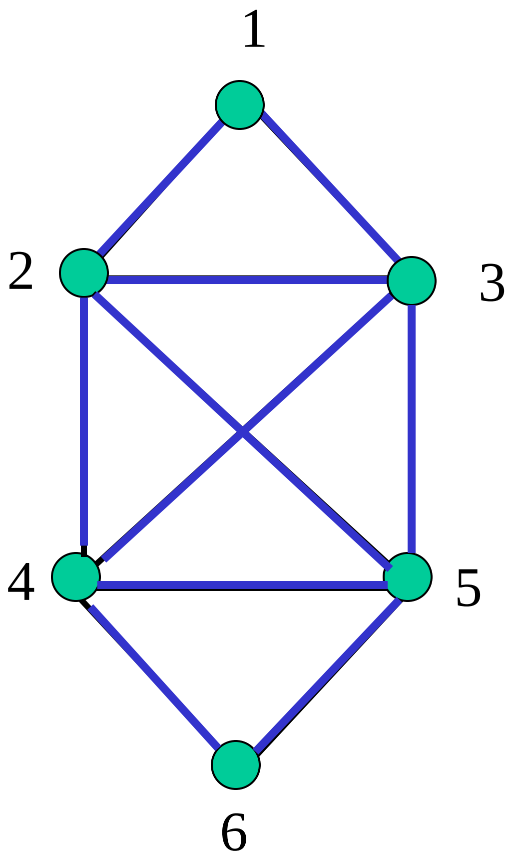


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

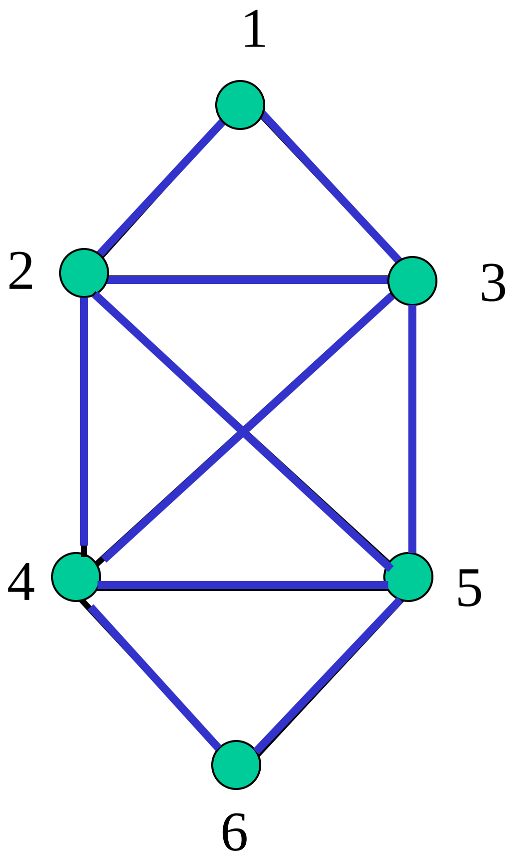


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה

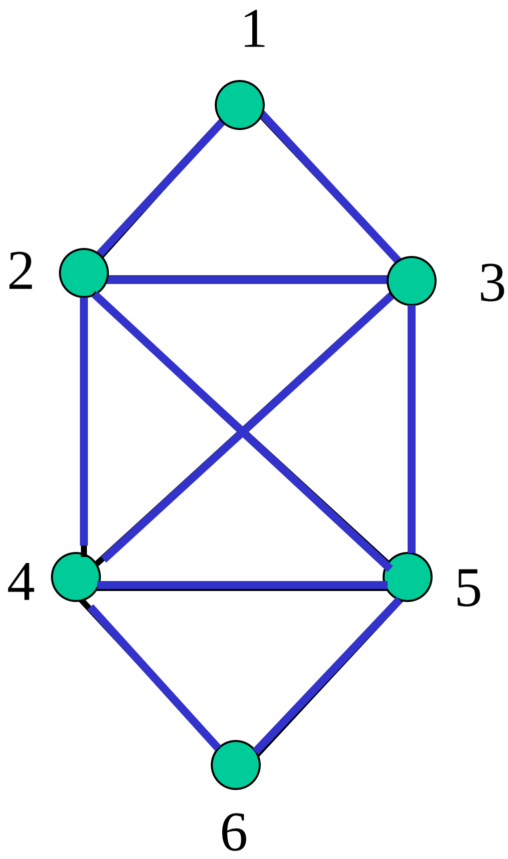


לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

unMarked

אחזקת L - דוגמת הרצה



לאחר שלב 3:

L = (1,2,**4,5,6,4**,3,5,2,3,1)

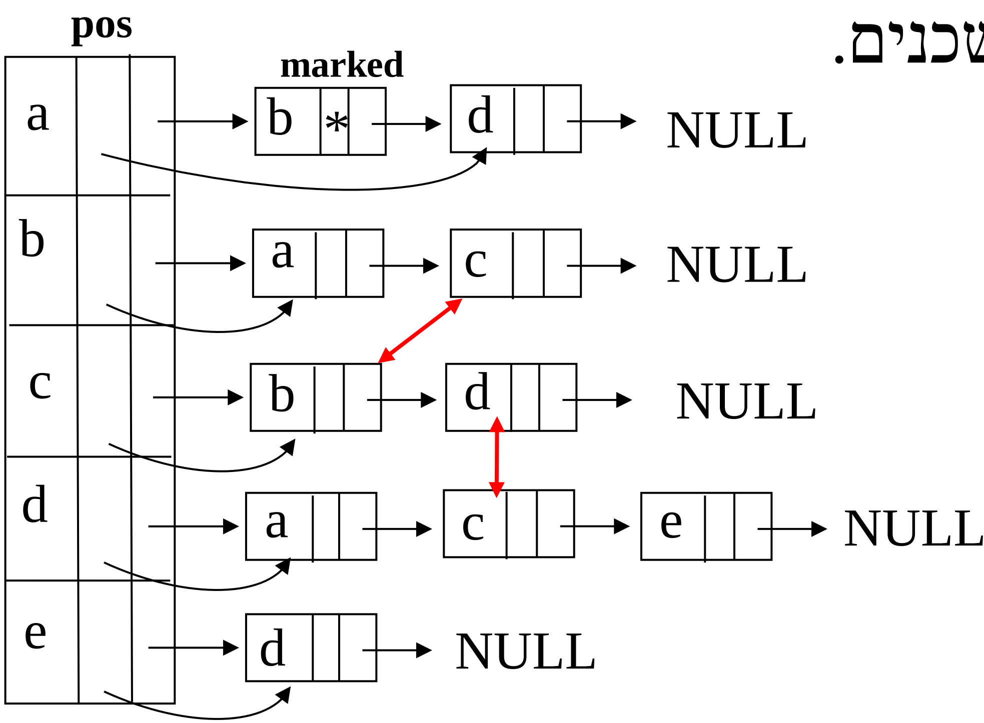
unMarked

מבני נתונים ויעילות: גרף לא מכוון

הבעיה:

כל צלע מיוצגת בשתי רשימות שכנים.

כיצד נפתור אותה?



- לכל צלע: דגל **marked** (מסומנת/לא מסומנת).
- לכל קדקוד: מצביע **pos** לצלע הלא-מסומנת הבאה.
- נשמור מצביעים דו-כיווניים בין "עותקים" של אותה צלע.

מסלול אוילר

מסלול אוילר Euler Path: **מסלול** בגרף המבקר בכל קשת בדיוק פעם אחת (אולם יכול לבקר בקדקוד יותר מפעם אחת).

משפט (לגרף לא-מכוון): יהי G גרף לא מכוון קשיר.
ב- G יש מסלול אוילר $\Leftrightarrow$ קיימים 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

מסלול אוילר

משפט (לגרף לא-מכוון): יהי G גרף לא מכוון קשיר.
ב- G יש מסלול אוילר $\Leftrightarrow$ קיימים 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

הוכחת המשפט:

כיוון I: יהי G גרף לא מכוון קשיר. נניח שב-G יש מסלול אוילר.

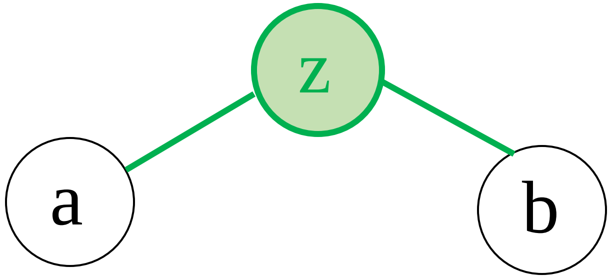
אם המסלול הוא גם מעגל אז יש 0 קדקודים שדרגתם אי-זוגית.
אחרת, לקדקוד הראשון והאחרון לאורך המסלול יש דרגה אי-זוגית
ולכל יתר הקדקודים דרגה זוגית (ההוכחה דומה למקרה של מעגל).

כיוון II: יהי G גרף לא מכוון וקשיר.

אם יש 0 קדקודים שדרגתם אי-זוגית אז יש מעגל אוילר ולכן גם מסלול.

אחרת - קיימים 2 קדקודים עם דרגה אי-זוגית, a,b.

בניית עזר: נוסיף קדקוד חדש z וצלעות (a,z), (z,b).



קיבלנו גרף חדש קשיר שכל דרגותיו זוגיות.

קיים בגרף מעגל אוילר, שמבקר ב-z פעם אחת.

נשמיט מהמעגל את הצלעות שהוספנו ואת הקדקוד z,

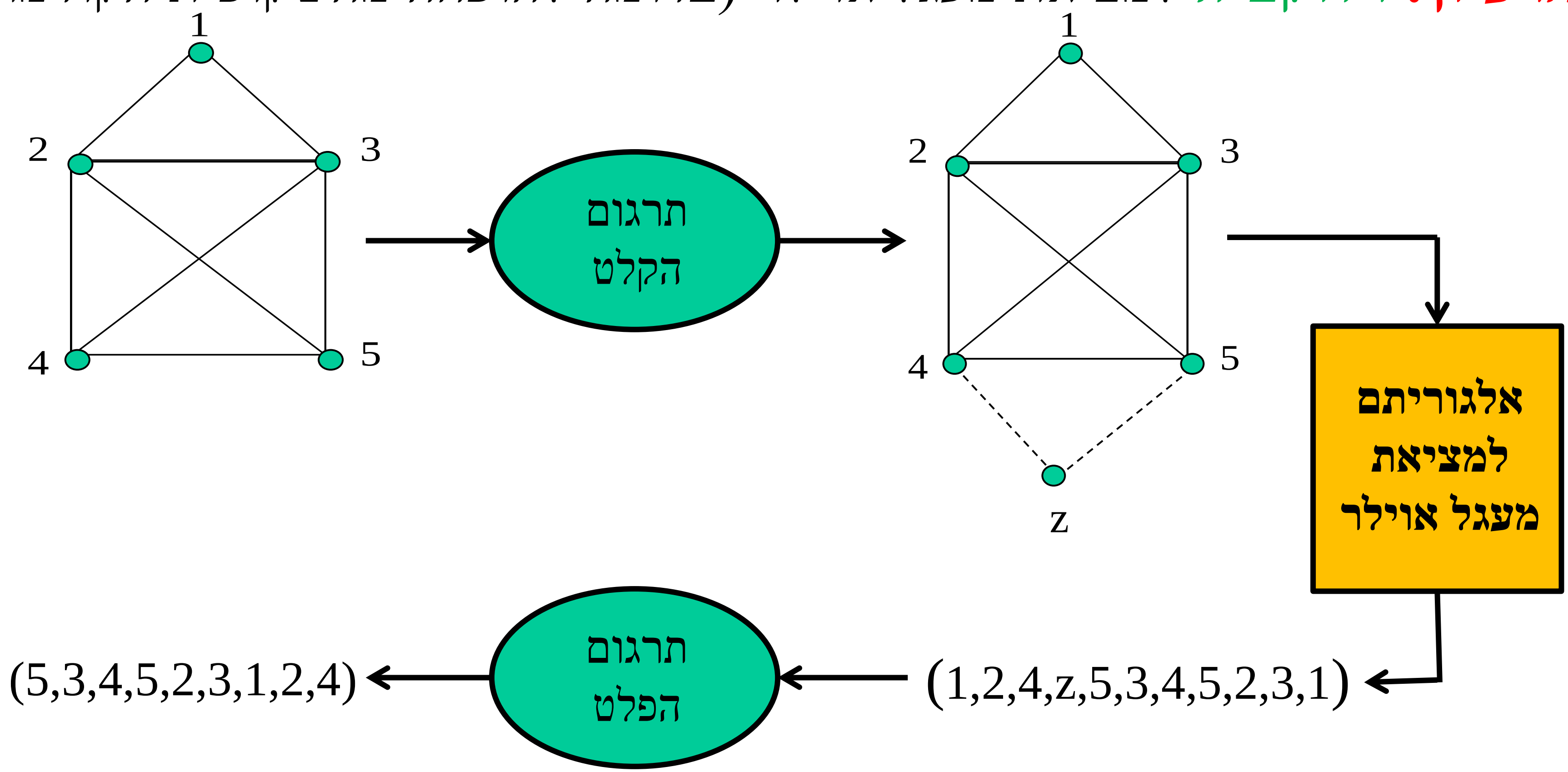
ונקבל מסלול אוילר שמתחיל ב- a ומסתיים ב- b.

אלגוריתם למציאת מסלול אוילר

קלט: **G=(V,E)** - לא-מכוון וקשיר, שבו 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה א"ז.

פלט: **L** – רשימת קדקודים המייצגת מסלול אוילר ב-G.

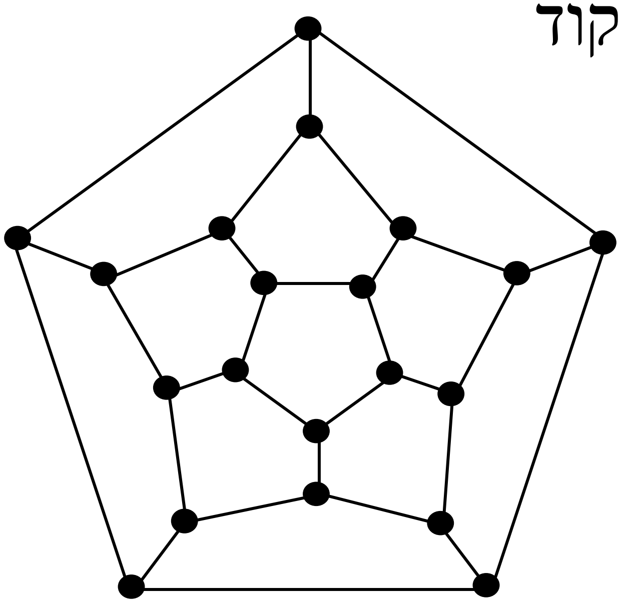
הרעיון: **רדוקציה** למציאת מעגל אוילר (בדומה להוכחה מהשקופית הקודמת).



מעגל המילטון

מעגל המילטון:

מעגל המבקר בכל **קדקודי** הגרף ובכל קודקוד בדיוק פעם אחת (למעט קודקוד ההתחלה).

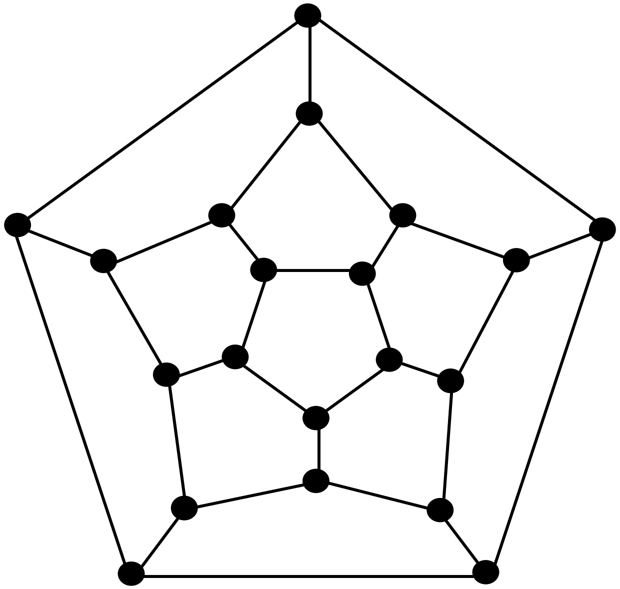


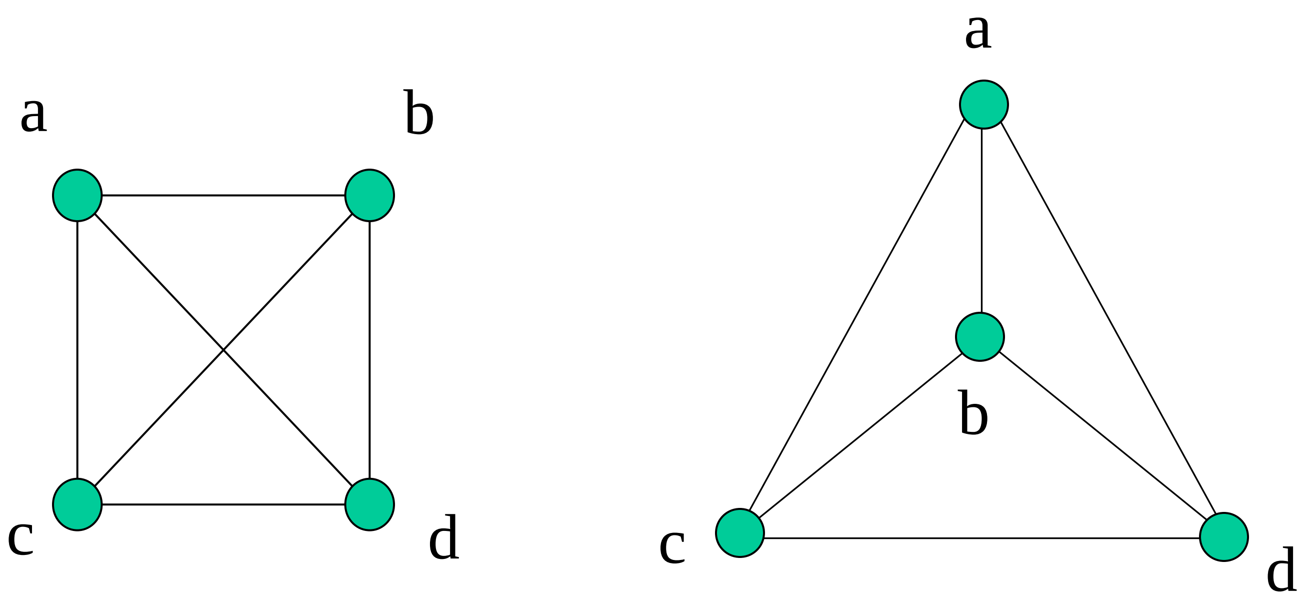
מעגל המילטון

מסלול המילטון:

מסלול המבקר בכל **קדקודי** הגרף

ובכל קודקוד בדיוק פעם אחת.





K_4: אין מעגל אוילר. יש מעגל המילטון.

אלגוריתם למציאת מעגל המילטון?

בעיית המעגל ההמילטוני היא שלמה ל-NP (NP-Complete):

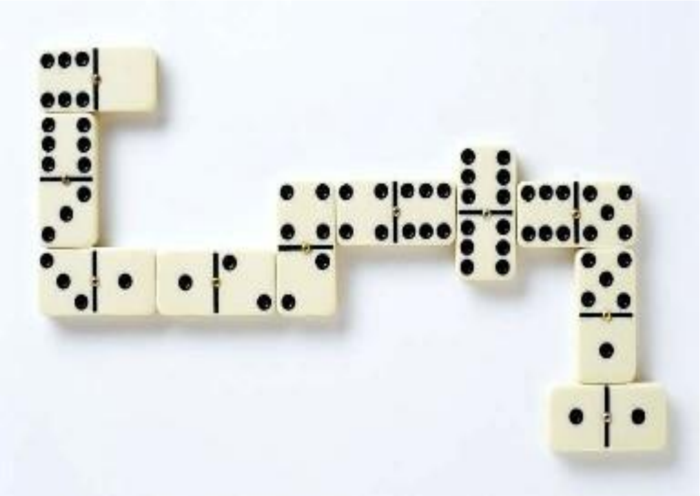
קל לבדוק האם מעגל נתון הוא אכן המילטוני, אולם קשה למצוא מעגל המילטוני.

(יש אלגוריתם מעריכי, לא ידוע אם יש פולינומיאלי).

⇦ פרטים נוספים בקורסים הבאים...

תרגיל 1 – סידור אבני דומינו

נתונה ערימה של m אבני דומינו שונות, בה כל אבן מכילה שני מספרים שונים בין 1 ל- n (אין חשיבות לסדר בין המספרים, וכל מספר מופיע לפחות על אבן אחת).



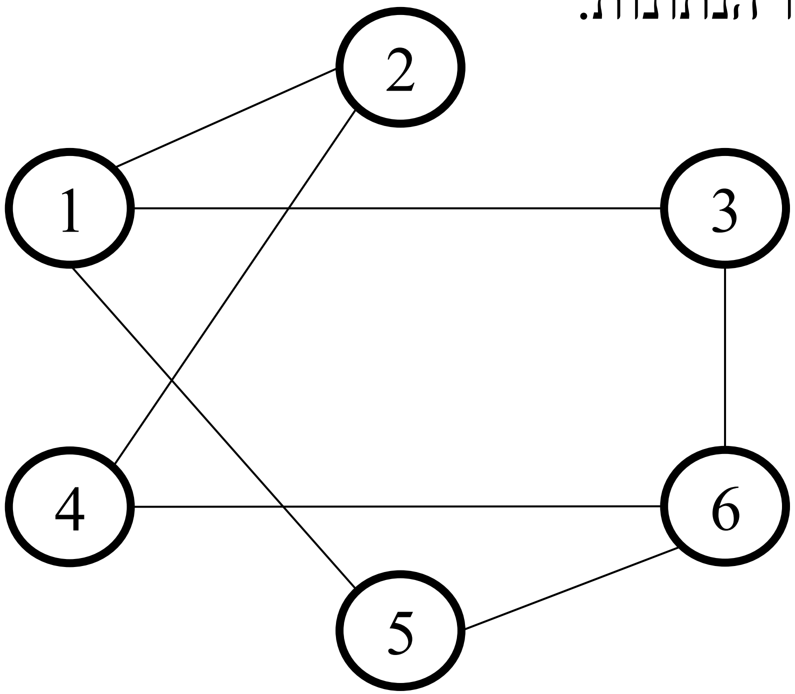
נגדיר **סידור חוקי של אבני הדומינו** באופן הבא:
האבנים יסודרו בשורה (כל אבן תונח במאוזן), כאשר ניתן להניח שתי אבנים זו לצד זו אם המספר הכתוב בצד הימני של האבן שמונחת משמאל שווה למספר שכתוב בצד השמאלי של האבן שמונחת מימין.

הציעו אלגוריתם המכריע **האם קיים סידור חוקי של <u>כל</u> אבני הדומינו**.

תרגיל 1 – דוגמה 1

קלט: {1,3}, {1,2}, {1,5}, {2,4}, {3,6}, {4,6}, {5,6}

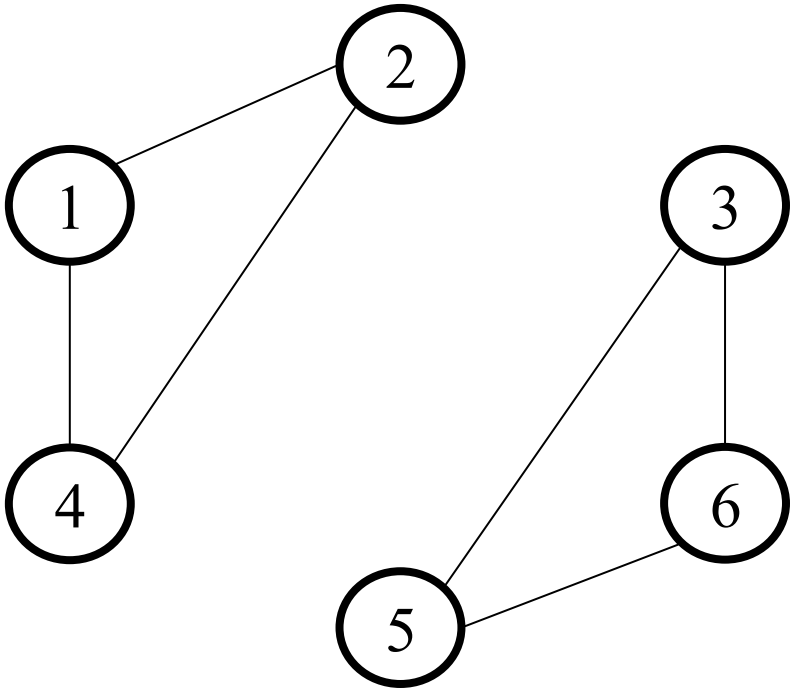
נוח להציג את הקלט **כגרף לא מכוון** G = (V,E) כאשר V = {1,…,n} ו-E היא קבוצת אבני הדומינו הנתונות.



בעיה שקולה: האם קיים מסלול אוילר בגרף ? כן.

תרגיל 1 – דוגמה 2

קלט: {1,3}, {1,2}, {1,5}, {2,4}, {3,6}, {4,6}, {5,6}



בעיה שקולה: האם קיים מסלול אוילר בגרף ? לא. (הגרף כלל לא קשיר)

תרגיל 1 – פתרון

אלגוריתם:

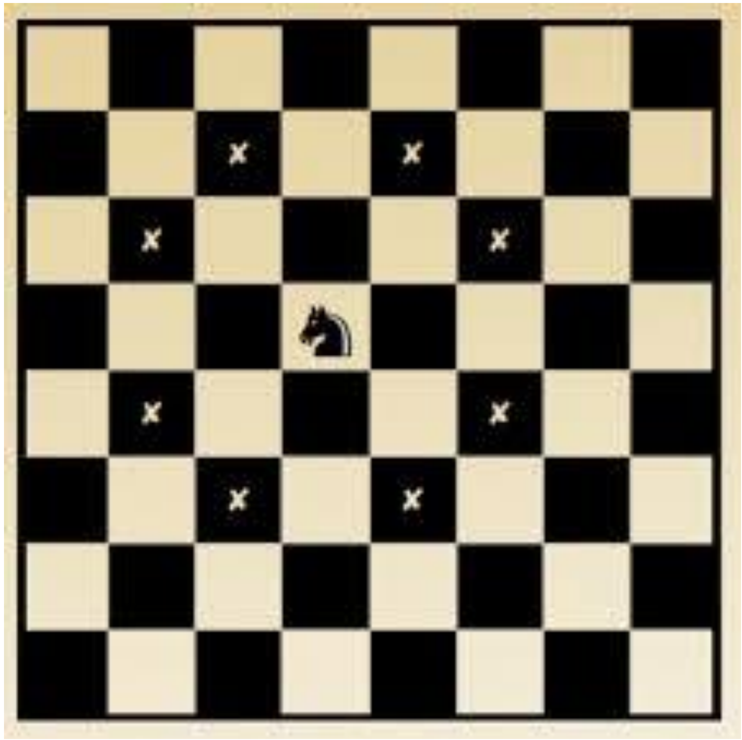
1. נעבור על הגרף ונחשב את דרגת כל הקדקודים.
2. אם קיימים יותר משני קדקודים עם דרגה אי-זוגית – נחזיר "לא".
3. אם קיימים בדיוק שני קדקודים a,b עם דרגה אי-זוגית - נוסיף קדקוד חדש z וקשתות (z,a),(z,b) לגרף.
4. נריץ את האלגוריתם Euler על הגרף.
5. נעבור על כל קשתות הגרף ונבדוק האם ישנן קשתות שאינן מסומנות.
   אם קיימות כאלה – נחזיר "לא"
   אחרת – נחזיר "כן".

יעילות: $\Theta(n+m)$

תרגיל 2 – חידת מסע הפרש

א- **הציעו ניסוח שקול** לבעיה הבאה כבעיית גרפים:

האם ניתן לכסות לוח בגודל $n \times n$ על יד צעדי פרש, כאשר אסור לפרש לדרוך פעמיים על אותה משבצת?

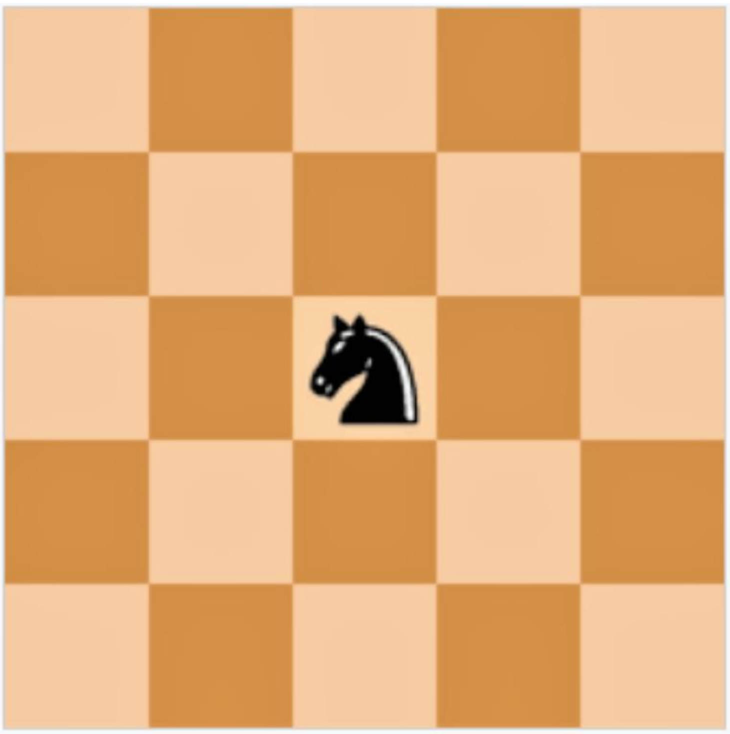


תרגיל 2 – חידת מסע הפרש

ב- מקרה פרטי: האם ניתן לכסות לוח בגודל 5x5 על ידי צעדי פרש,

כאשר אסור לפרש לדרוך פעמיים על אותה משבצת, ועליו <u>לסיים</u>

<u>באותה משבצת בה הוא התחיל</u> ?



תרגיל 2 – חידת מסע הפרש

אמנם לא קיים מסלול <u>מעגלי</u> של צעדי פרש שמבקר בכל המשבצות בדיוק פעם אחת, אך קיים מסלול שאינו מעגלי:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ca/Knights-Tour-Animation.gif

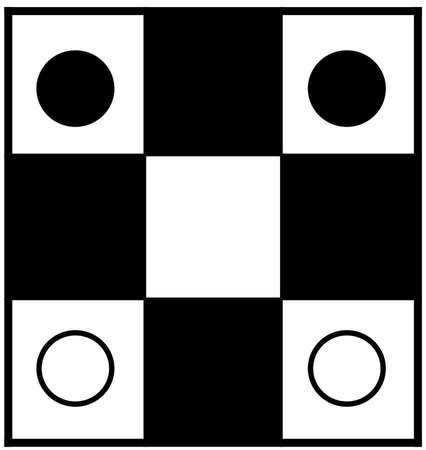
תרגיל 3 – החלפת פרשים

נתון לוח 3x3 שעליו מונחים 4 פרשים:

2 שחורים ו-2 לבנים, כפי שמתואר בציור.

האם ניתן להחליף את המקומות של הפרשים השחורים והלבנים בעזרת צעדי פרש בלבד, כאשר אסור ש-2 כלים יהיו בו-זמנית על אותה משבצת ?

אחרת – הוכיחו כי לא ניתן.



תרגיל 4

יהי G גרף קשיר ולא-מכוון.

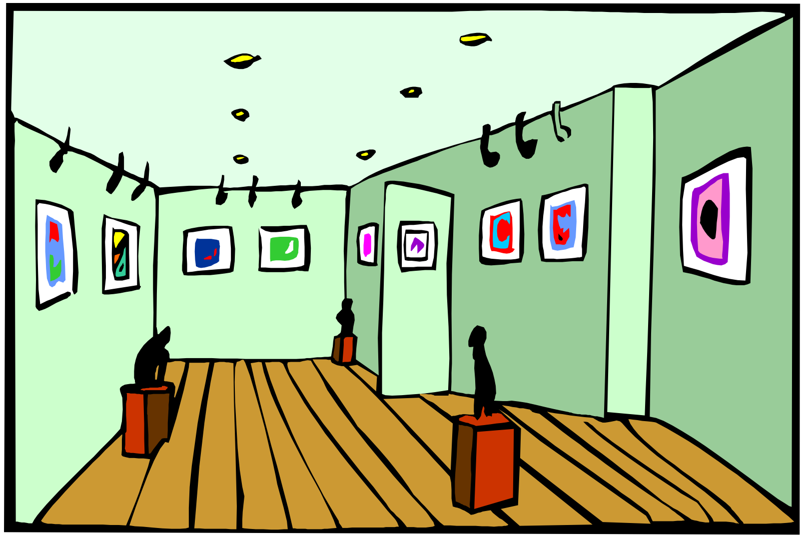
נניח שקיים ב-G קיים מעגל אוילר ובנוסף קיים קודקוד v הנמצא על כל מעגל פשוט של G.

הוכיחו: כל הפעלה של הפונקציה Find-Circuit החל מקדקוד v תחזיר מעגל אוילר (ללא תלות בסדר הביקור בקשתות).

ביקור במוזיאון

במוזיאון התמונות תלויות במסדרונות וברצוננו לראות את כל התמונות באופן הבא:

- לעבור בכל מסדרון בדיוק פעמיים, פעם לכל כיוון.
- לחזור בסיום לנקודת ההתחלה.



באילו תנאים זה אפשרי?

כיצד נמצא את המעגל?