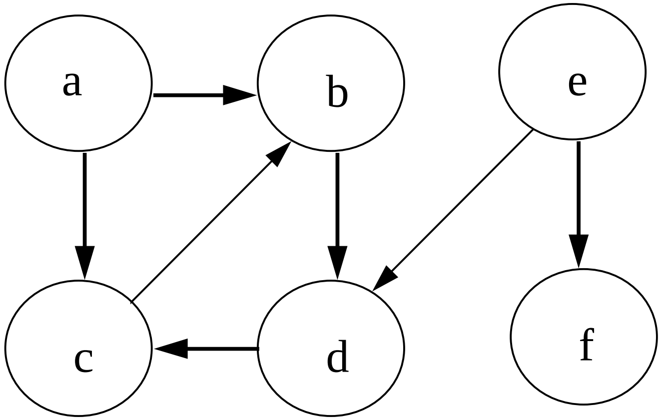
חיפוש עומק בגרף

סריקת גרפים

המטרה: למפות את הגרף – לחשוף תכונות מבניות של הגרף.

השיטה: סריקה של קדקודי הגרף וקשתותיו לפי סדר מסוים.



שיטות לסריקה של גרף:

חיפוש עומק: DFS, Depth First Search

חיפוש רוחב: BFS, Breadth First Search

חיפוש עומק - DFS

רעיון בסיסי: כאשר אנחנו סורקים קודקוד,
נסרוק (רקורסיבית) את שכניו בהם
עדיין לא ביקרנו.

בנוסף, נסמן את זמני הגילוי וסיום הסריקה של כל קדקוד.
נסמן קשתות גילוי של קדקודים.

חיפוש עומק - DFS

מבני נתונים: מערך צבעים שגודלו כמספר הקודקודים
כאשר צבעו של קודקוד v יוגדר באופן הבא:

לבן: אם טרם ביקרנו ב- v.
אפור: ביקרנו ב- v אבל טרם ביקרנו בכל שכניו.
שחור: ביקרנו ב- v ובכל שכניו.

visit - פונקציית עזר – חיפוש עומק

```
VISIT(Vertex  u)

Color[u] ← gray                    // begin processing of u
for each v ∈ Adj[u] do
        if Color[v] = white then
                mark edge (u, v)
                VISIT(v)
Color[u] ← black                   // end processing of u
```

חיפוש עומק – פונקציית עזר - visit

```
VISIT(Vertex  u)

Color[u] ← gray                    // begin processing of u
for each v ∈ Adj[u] do
        if Color[v] = white then
                mark edge (u, v)
                VISIT(v)
Color[u] ← black                   // end processing of u
```

נשים לב:

גם אם הגרף G אינו מכוון,

במהלך המעבר על הקשתות וסימונן,

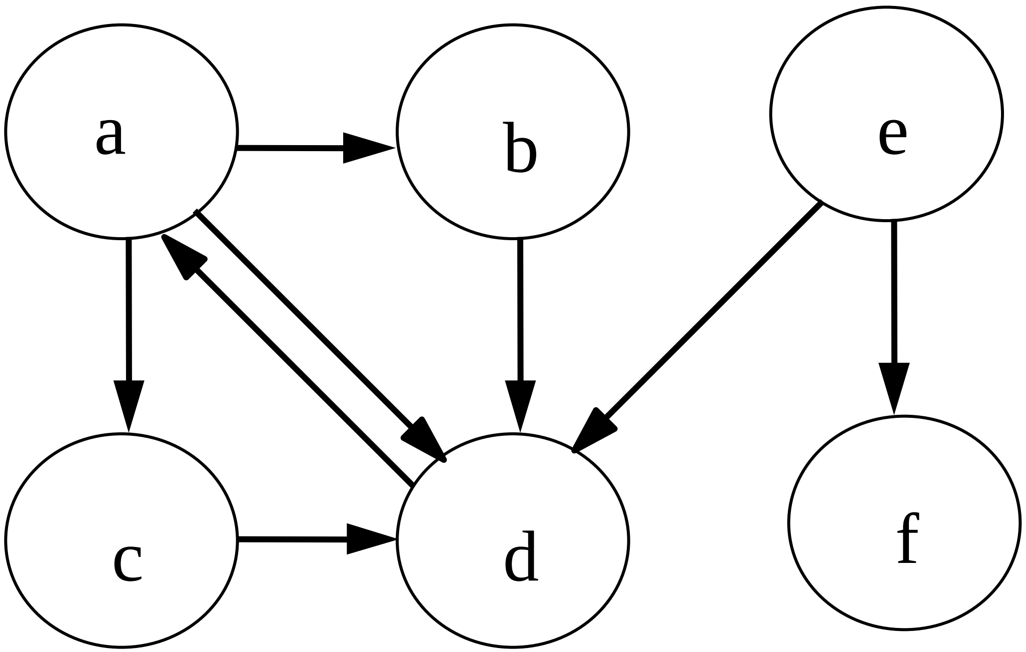
אנו מכוונים את הקשתות.

DFS - חיפוש עומק

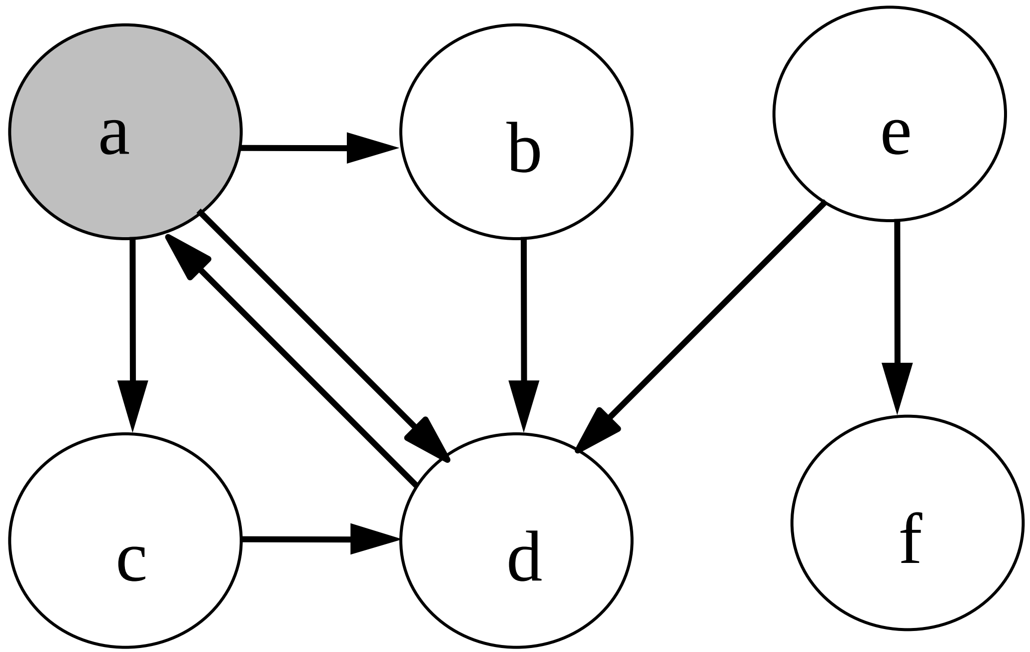
```
DFS(Graph G)

// INIT
for each vertex u do
        Color[u] ← white            // white = unprocessed

// MAIN LOOP
for each vertex u do
        if Color[u] = white then VISIT(u)
```

יעילות: עוברים פעם אחת על כל אחת מרשימות השכנים $\Theta(n+m)$

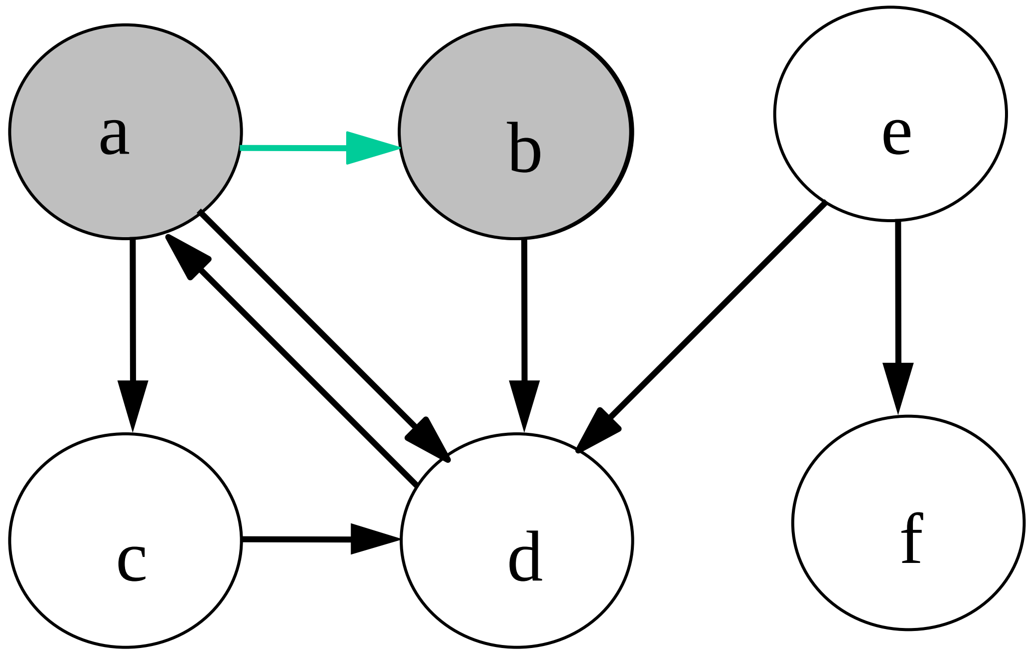
דוגמה



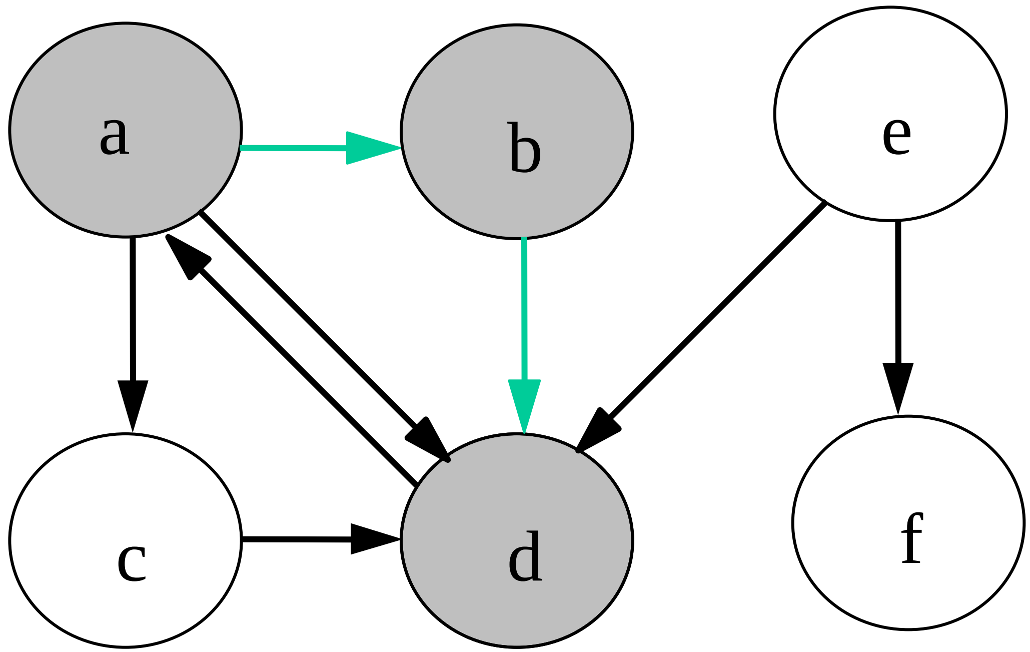
דוגמה



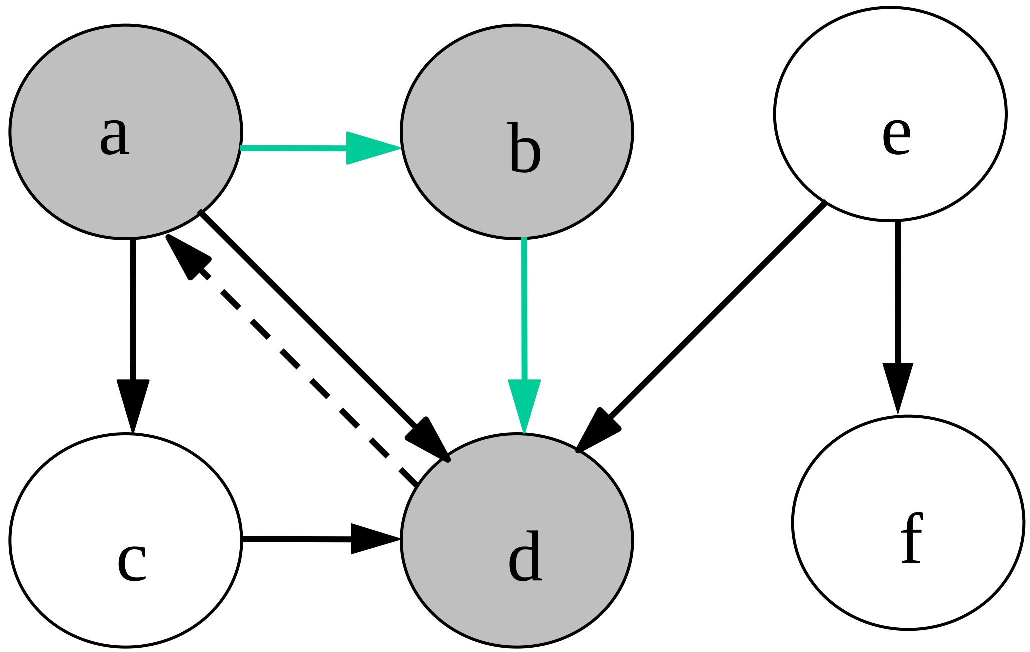
דוגמה



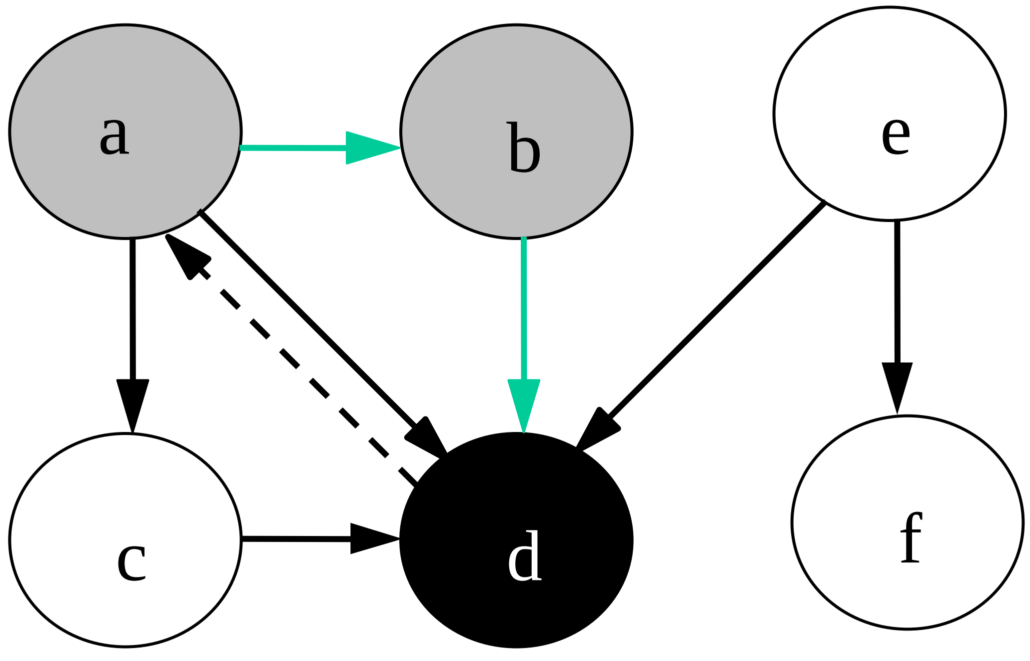
דוגמה



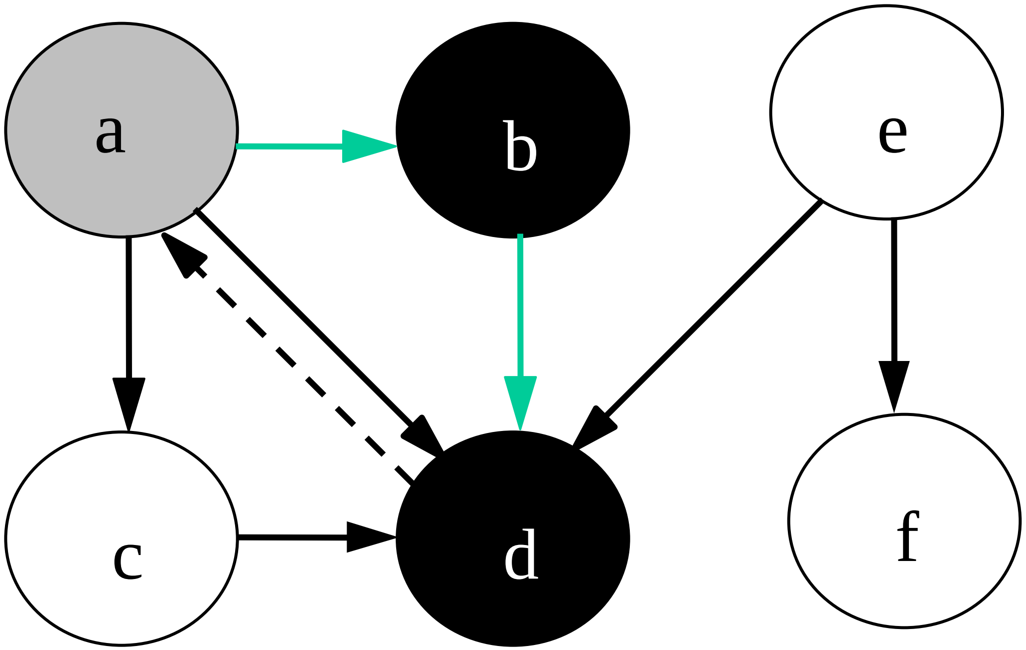
דוגמה



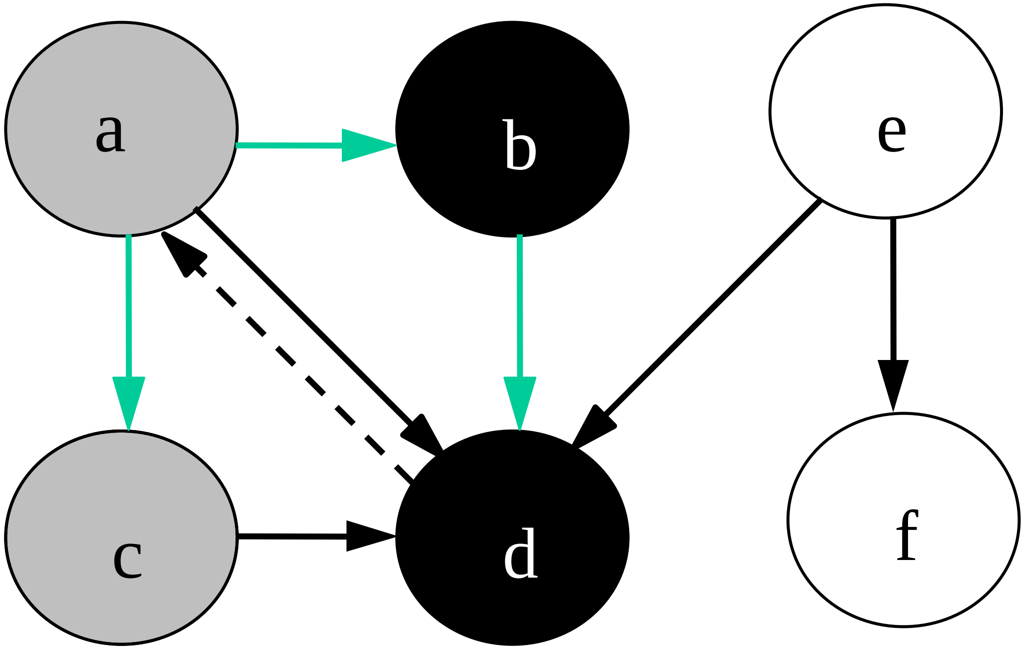
דוגמה



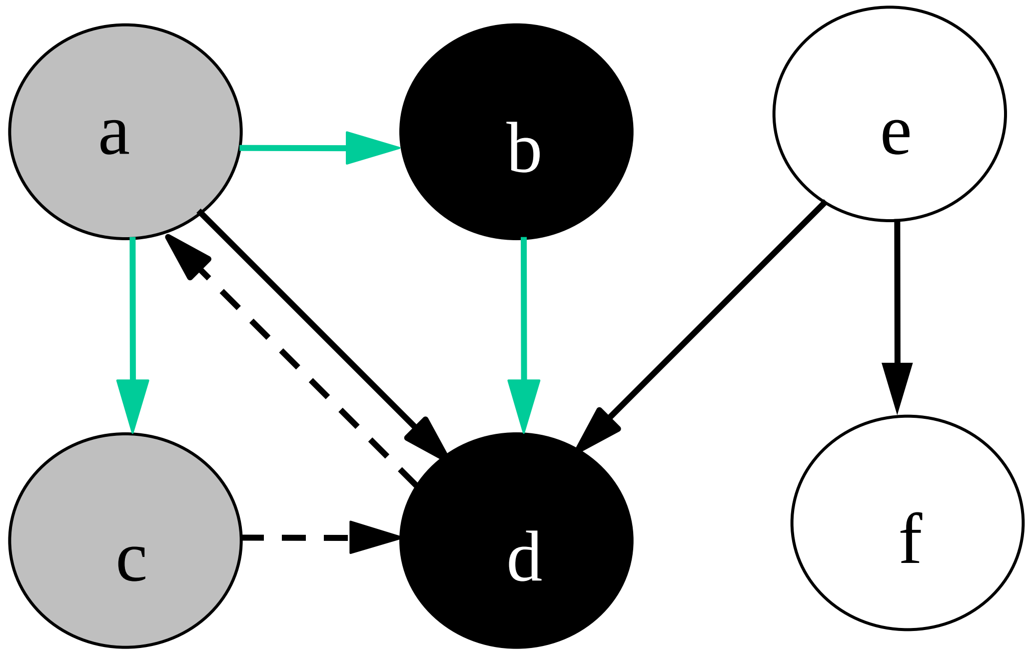
דוגמה



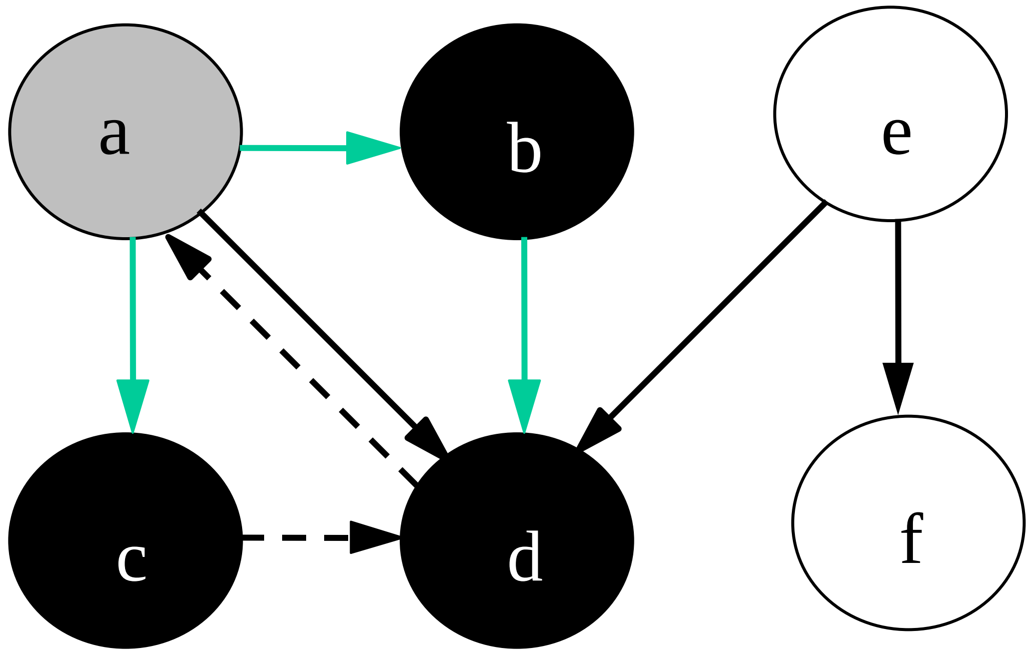
דוגמה



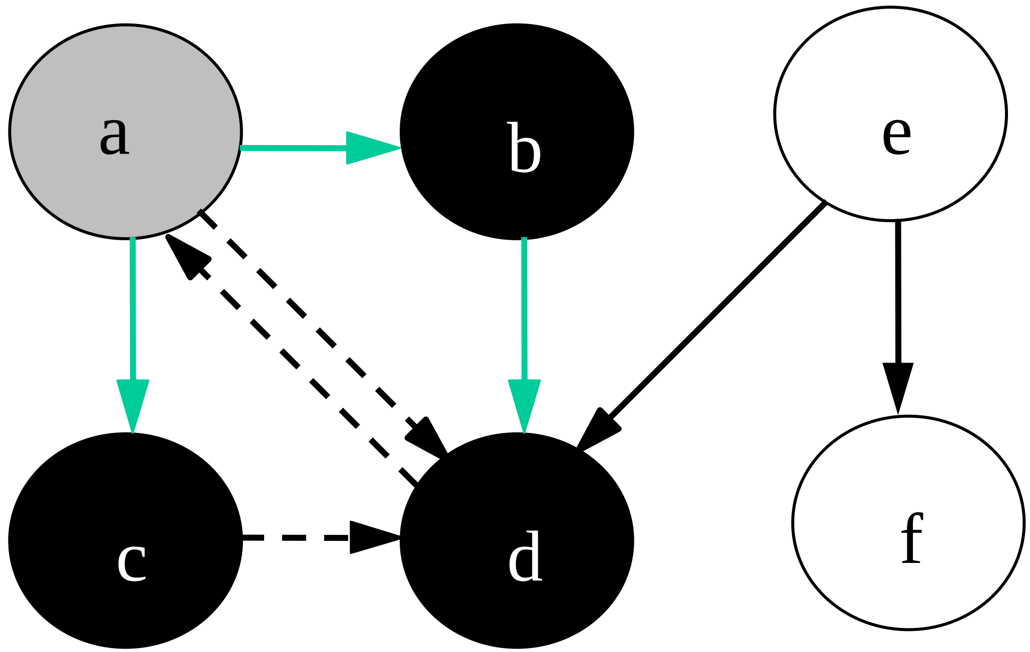
דוגמה



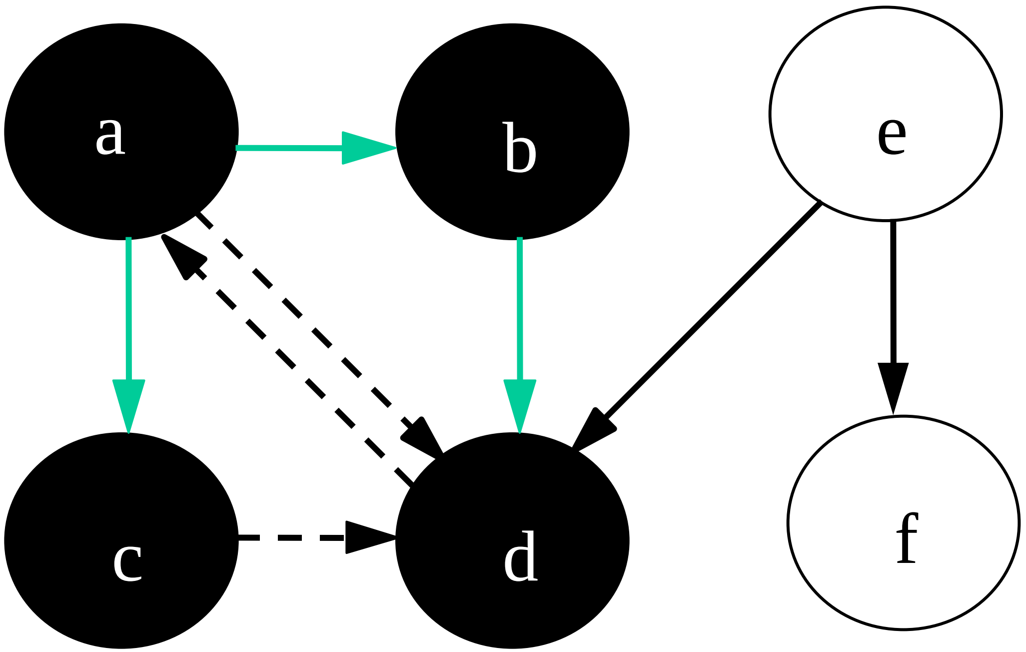
דוגמה



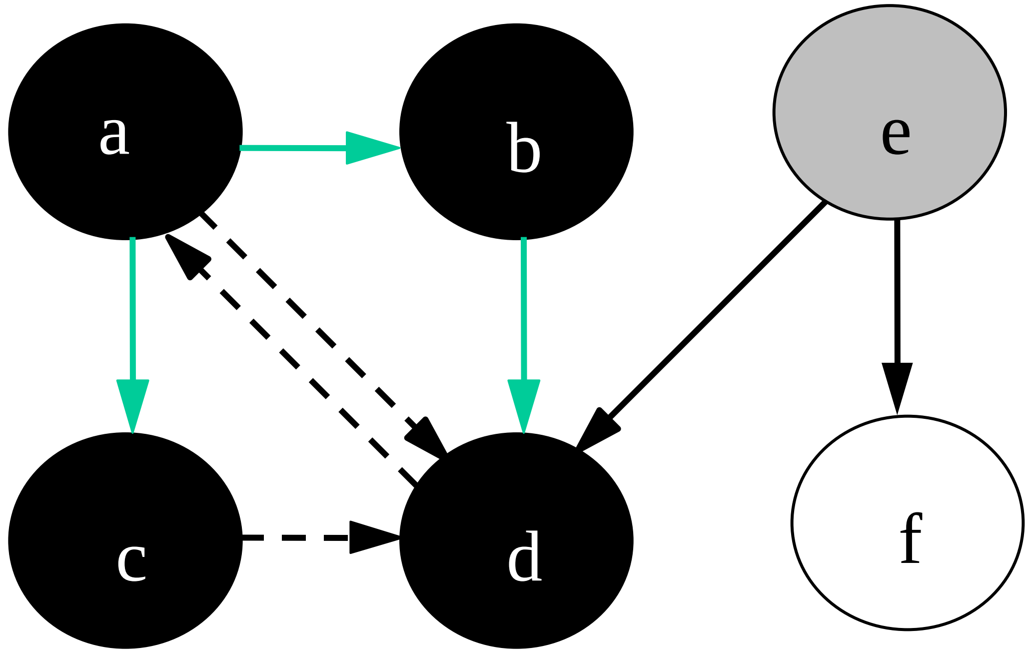
דוגמה



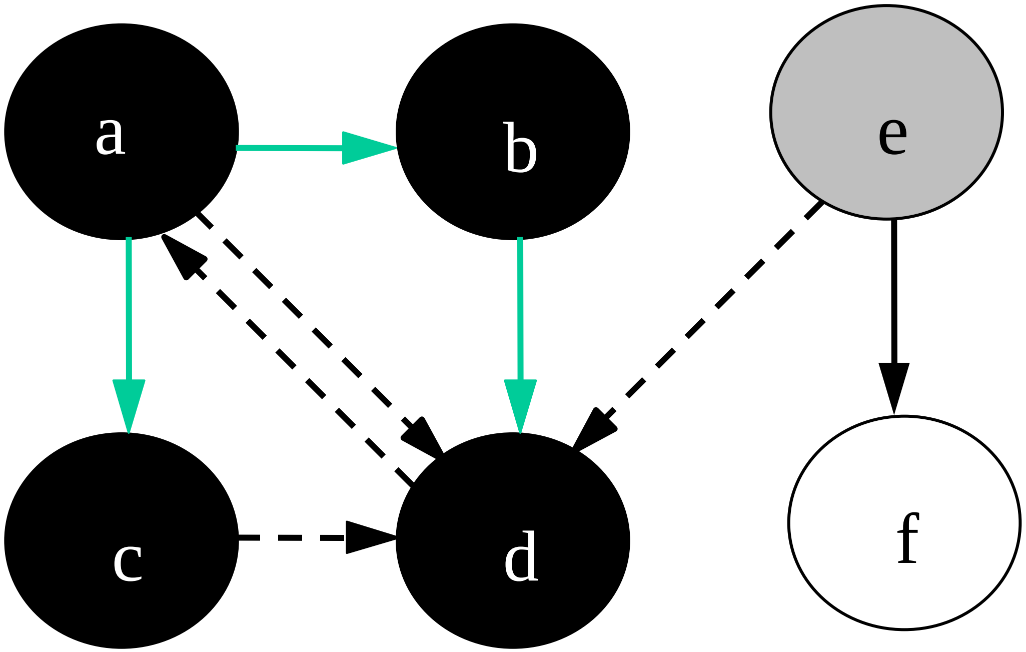
דוגמה



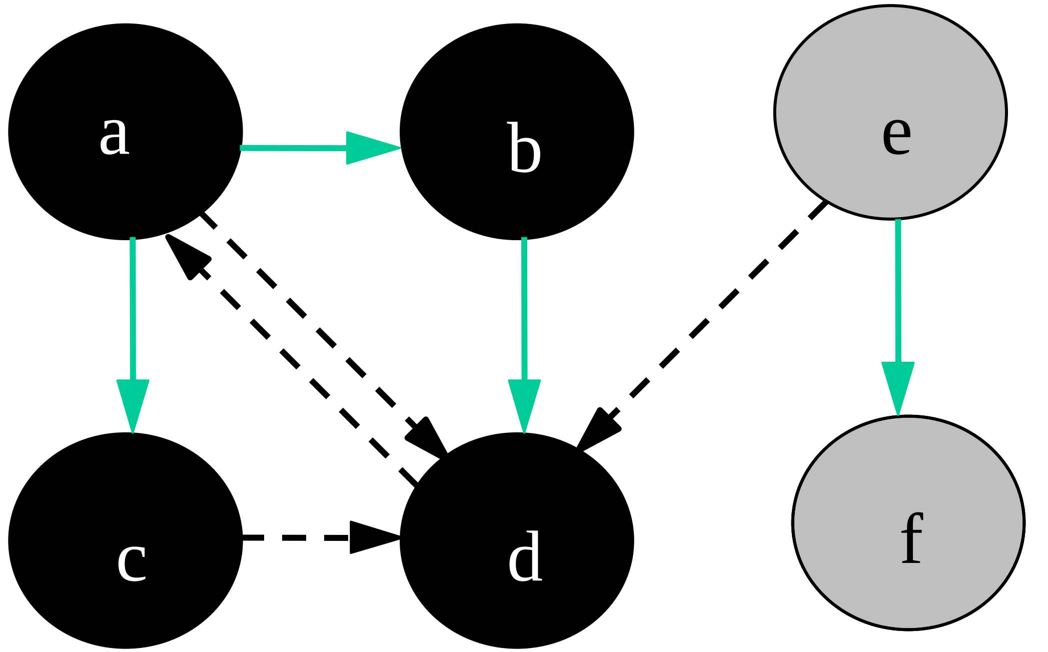
דוגמה



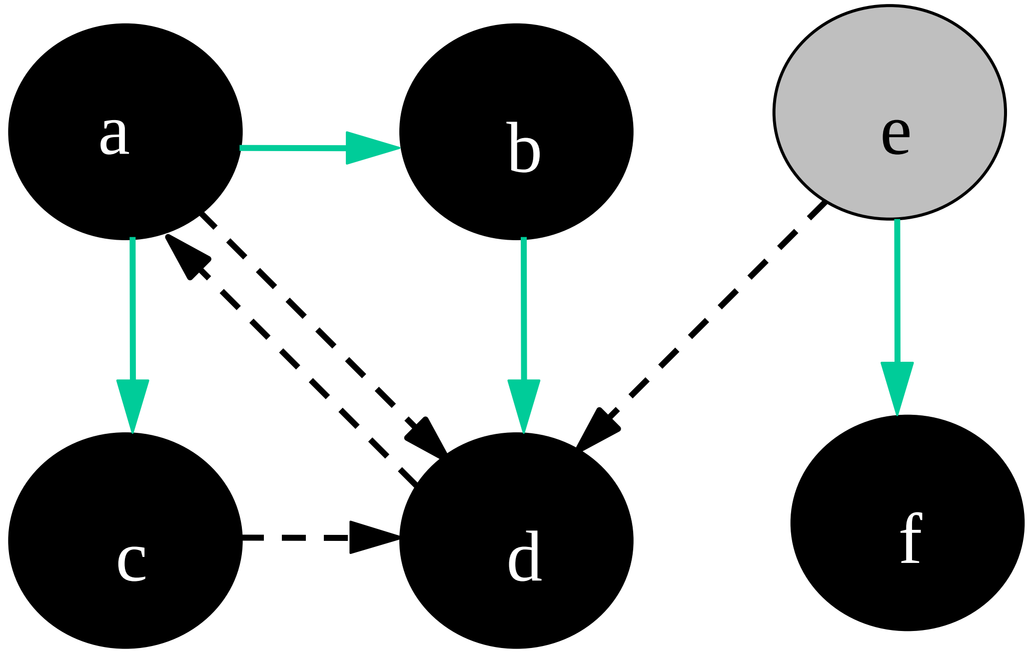
דוגמה



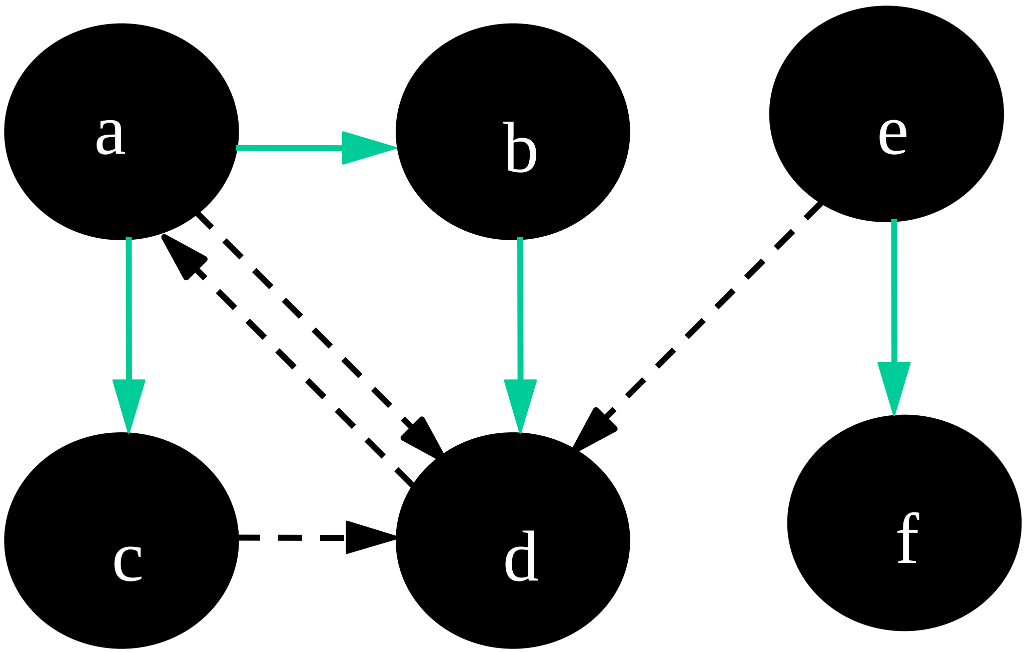
דוגמה



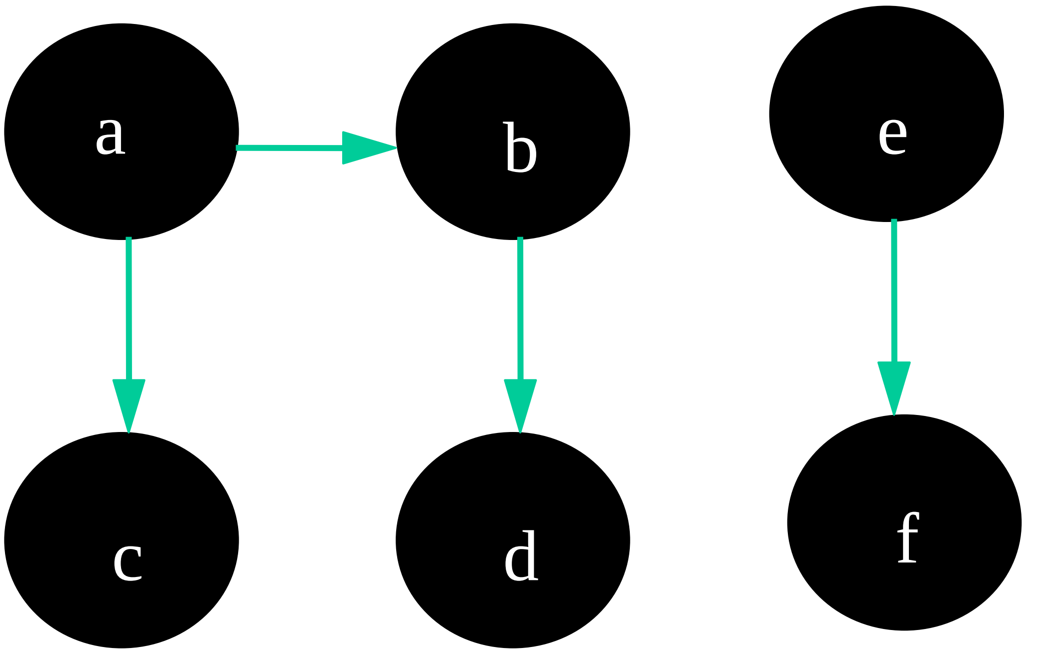
דוגמה



דוגמה

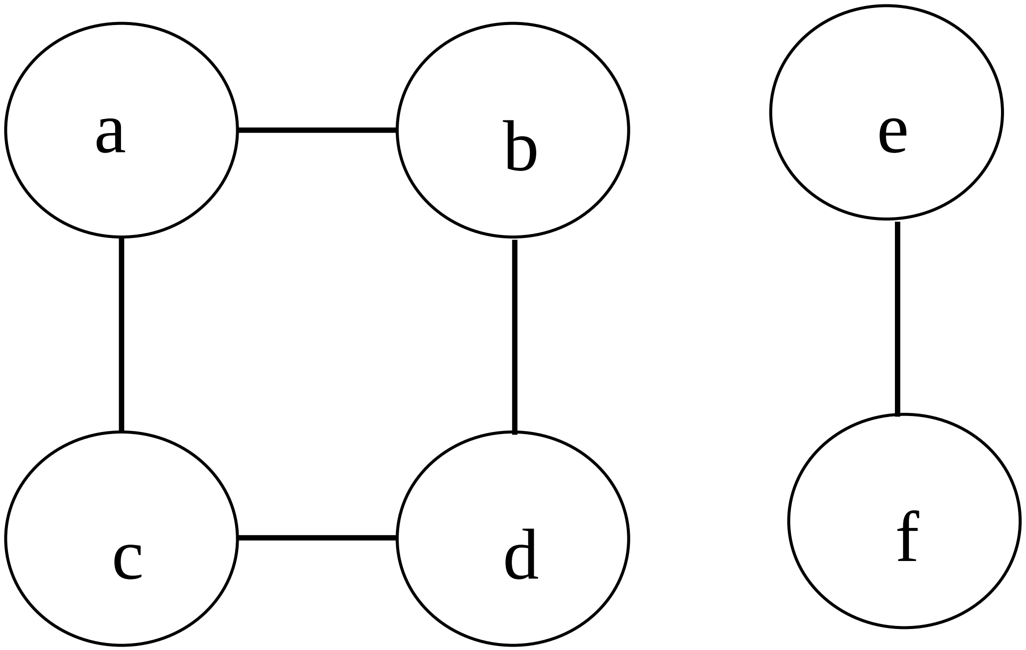


דוגמה

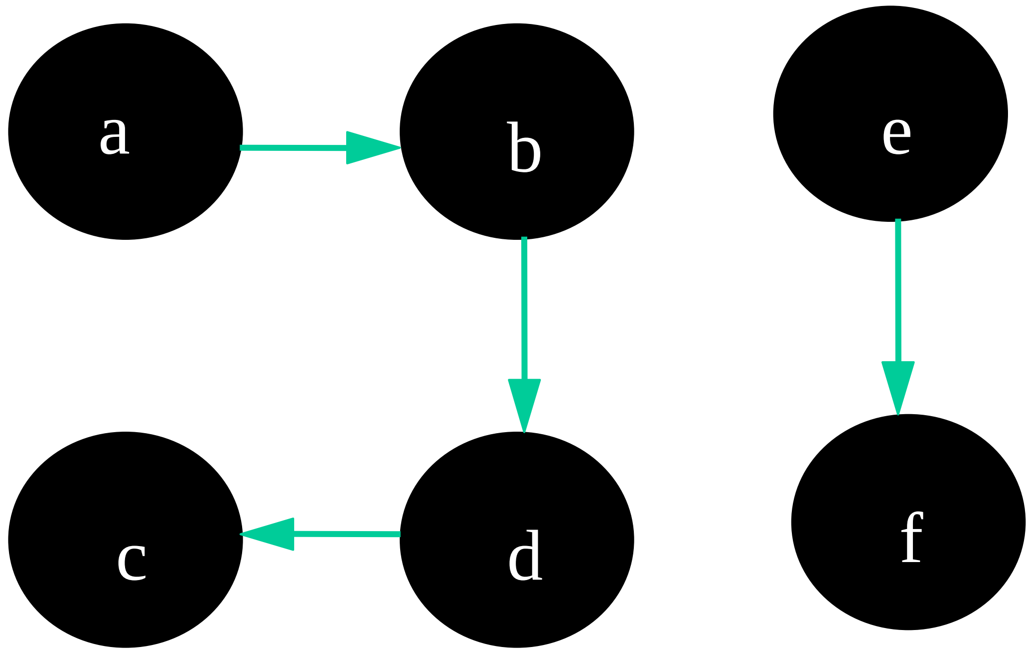


נטען שהתהליך מחלק את הגרף לעצי DFS.

דוגמה להרצה על גרף לא מכוון



דוגמה להרצה על גרף לא מכוון



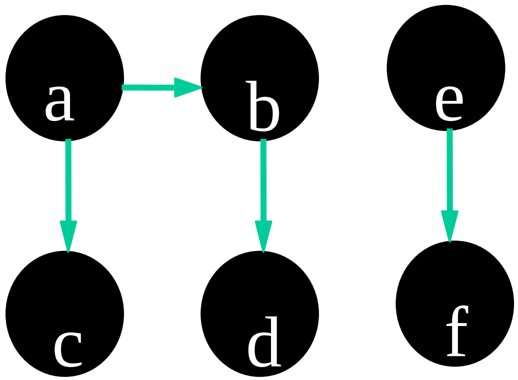
עצים בגרפים מכוונים

הגדרה: יהי G גרף מכוון.
נאמר שהגרף G מהווה עץ אם:

1. הגרף חסר מעגלים.
2. קיים בו קודקוד מקור יחיד.
3. לכל קודקוד פרט למקור מתקיים שדרגת הכניסה היא 1.

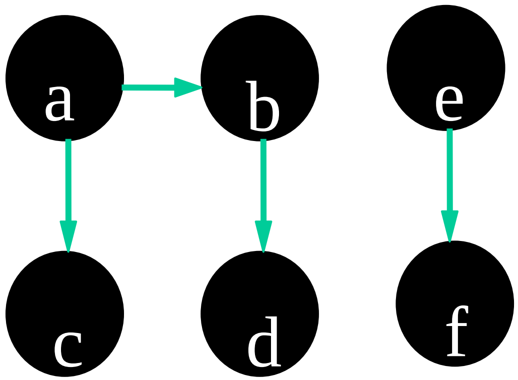
הגרף יקרא יער, אם ניתן לחלקו לעצים (זרים).

עצי DFS



טענה: יהי G גרף מכוון.
נסתכל על הרצת DFS כלשהי על הגרף, ועל תת הגרף G' המתקבל רק מהצלעות המסומנות.
אזי G' הינו יער.

עצי DFS



טענה: יהי G גרף מכוון.
נסתכל על הרצת DFS כלשהי על הגרף, ועל תת הגרף G' המתקבל מהצלעות המסומנות בלבד.
אזי G' הינו יער.

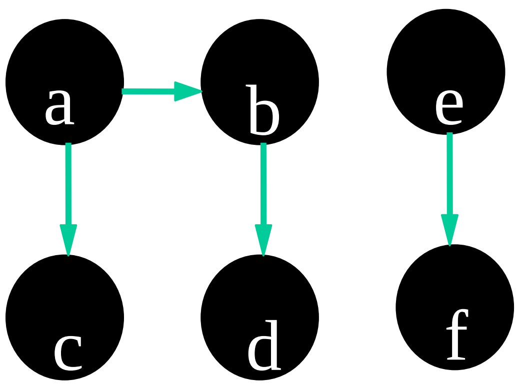
הוכחה:
ראשית נראה, ש- G' חסר מעגלים.
נניח בשלילה שב- G' ישנו מעגל.

יהי v הקודקוד הראשון שהתגלה לאורך המעגל, ותהי (u,v) הצלע הסוגרת את המעגל.

בזמן שביקרנו בקודקוד u הקודקוד v לא היה לבן, לכן הקשת לא תסומן.

בסתירה לכך שב- G' נסגר מעגל על ידי הקשת (u,v).

עצי DFS



המשך ההוכחה:

נטען שבכל הפעלה של הפונקציה $visit$ הצלעות המסומנות יוצרות עץ מכוון.

ואכן, מהחלק הראשון של ההוכחה לא יווצר מעגל.

הקודקוד היחיד שהינו מקור יהיה הקודקוד ממנו התחלנו את הקריאה ל- $visit$.

כל קודקוד אחר v שהתגלה במהלך הקריאה, הדרגה הנכנסת שלו תהיה 1, מכיוון שהצלע המסומנת היחידה הנכנסת ל- v הינה צלע הגילוי שלו (רק כאשר צבעו של v לבן, הפונקציה מסמנת את הקשת הנכנסת ל- v).

עצי DFS

טענה: יהי G גרף לא-מכוון.
נסתכל על הרצת DFS כלשהי על הגרף,
ועל תת הגרף G' המתקבל רק מהצלעות
המסומנות בלבד.
אזי G' הינו יער.

הוכחה: בדומה למקרה המכוון.

סידור הקדקודים ע"י DFS

- רשימת גילוי: רושמים קדקוד כאשר הוא מתגלה.
- רשימת סיום: רושמים קדקוד כאשר הטיפול בו מסתיים.

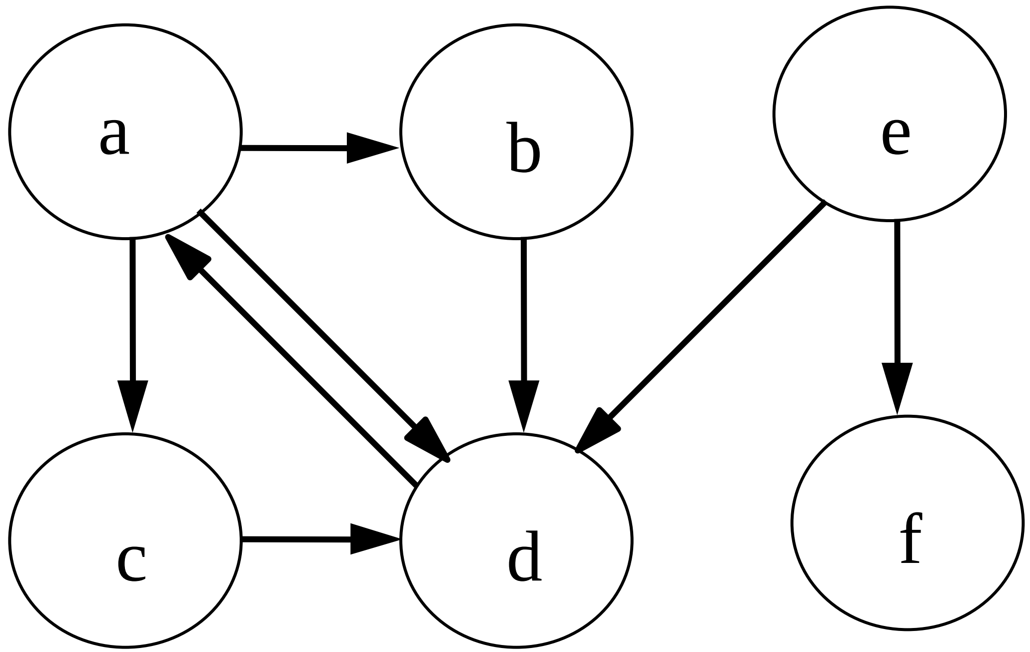
סידור הקדקודים ע"י DFS

<u>מספרי DFS</u>

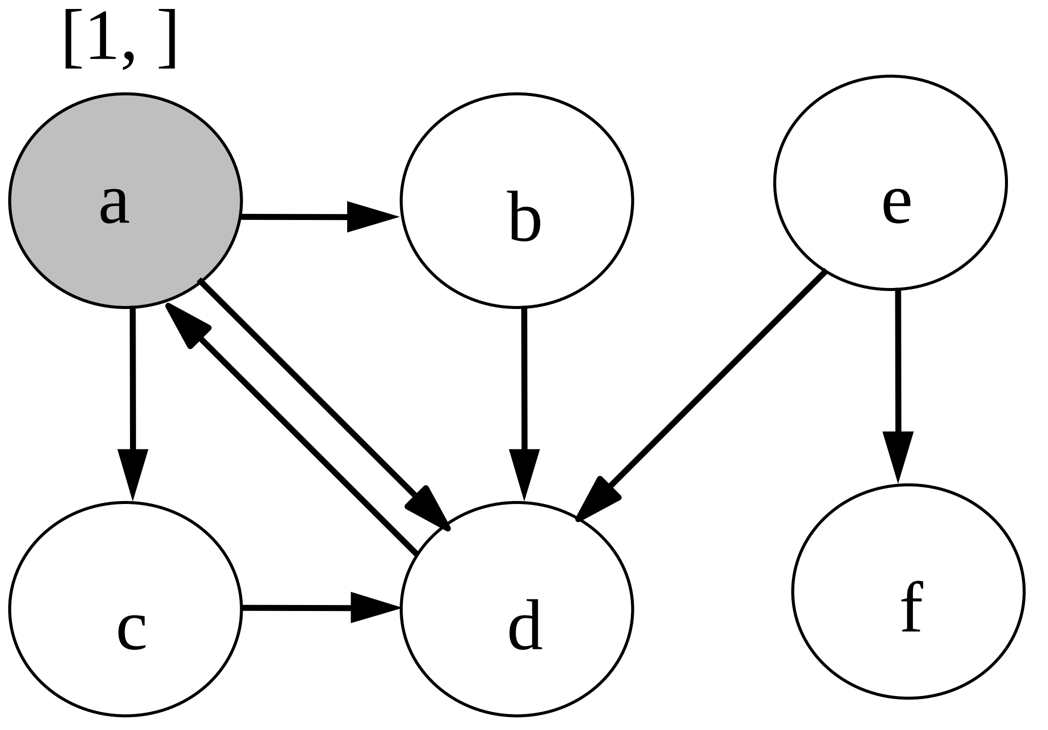
נחזיק מונה של זמני גילוי/סיום של קדקודים.
המונה יקודם כאשר נגלה או נסיים טיפול בקודקוד.

- מספרי גילוי: ממספרים את זמן הגילוי של כל קדקוד, סימון: $d(v)$.
- מספרי סיום: ממספרים את זמן הסיום של כל קדקוד, סימון: $f(v)$.

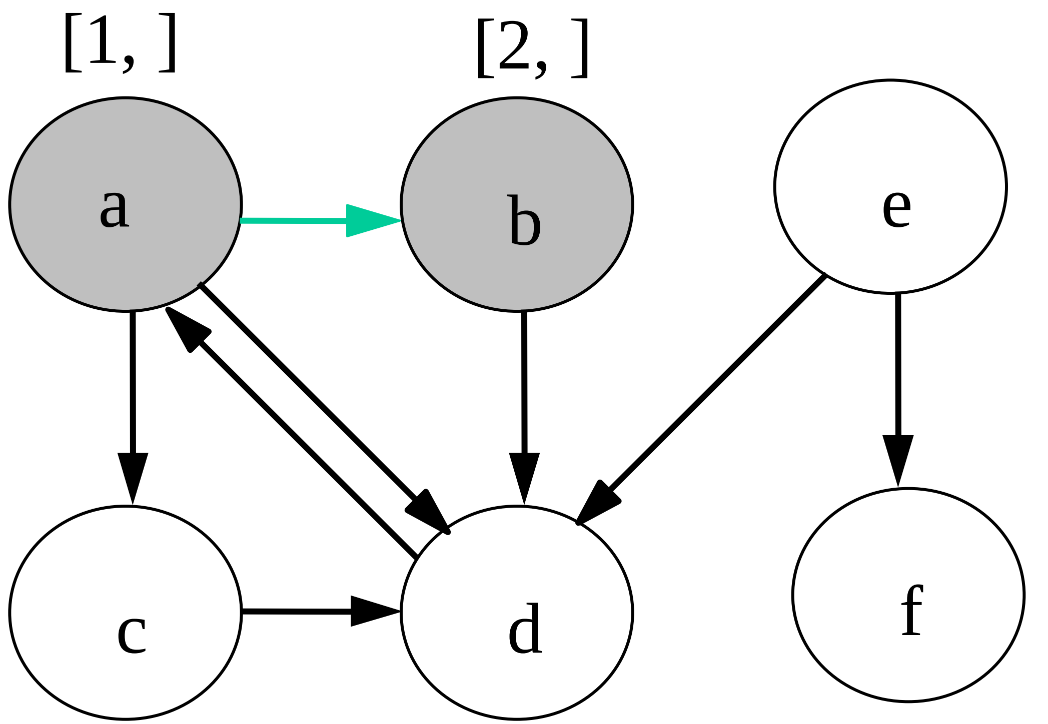
דוגמה



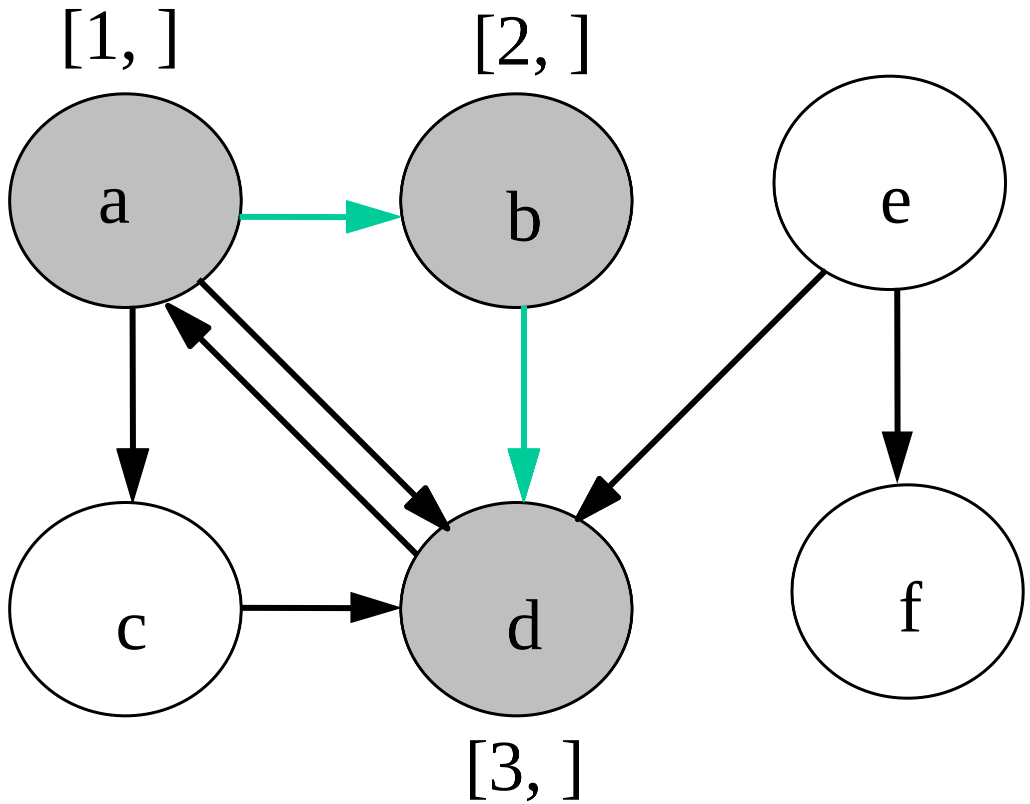
דוגמה



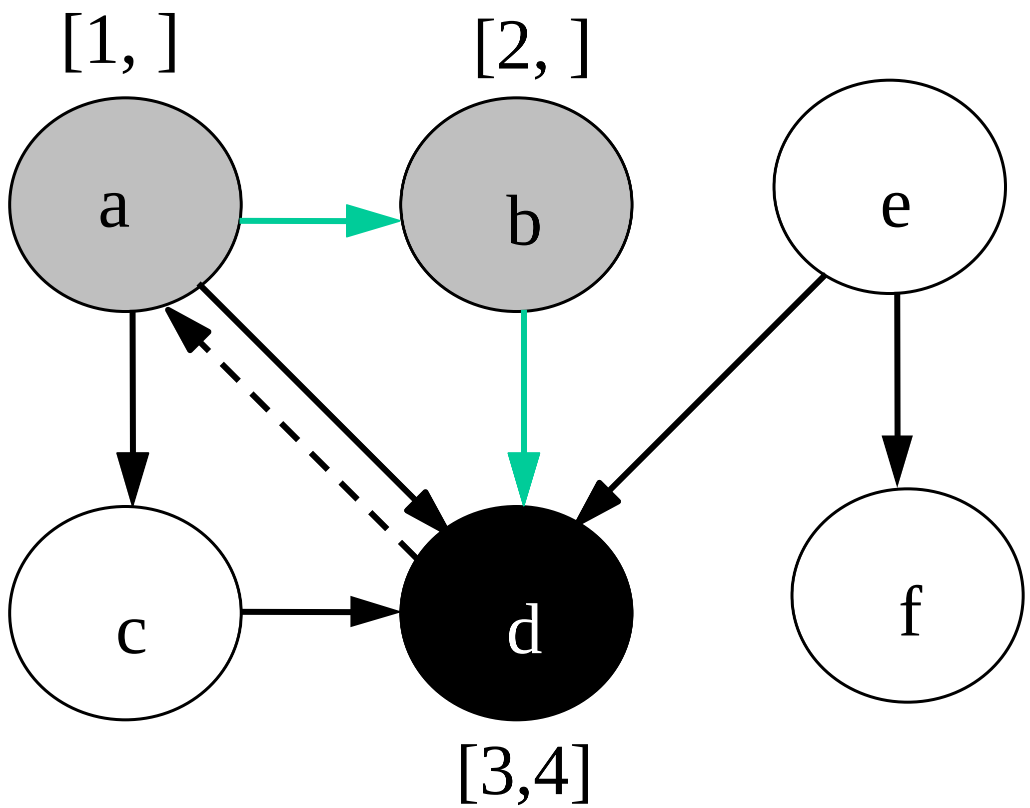
דוגמה



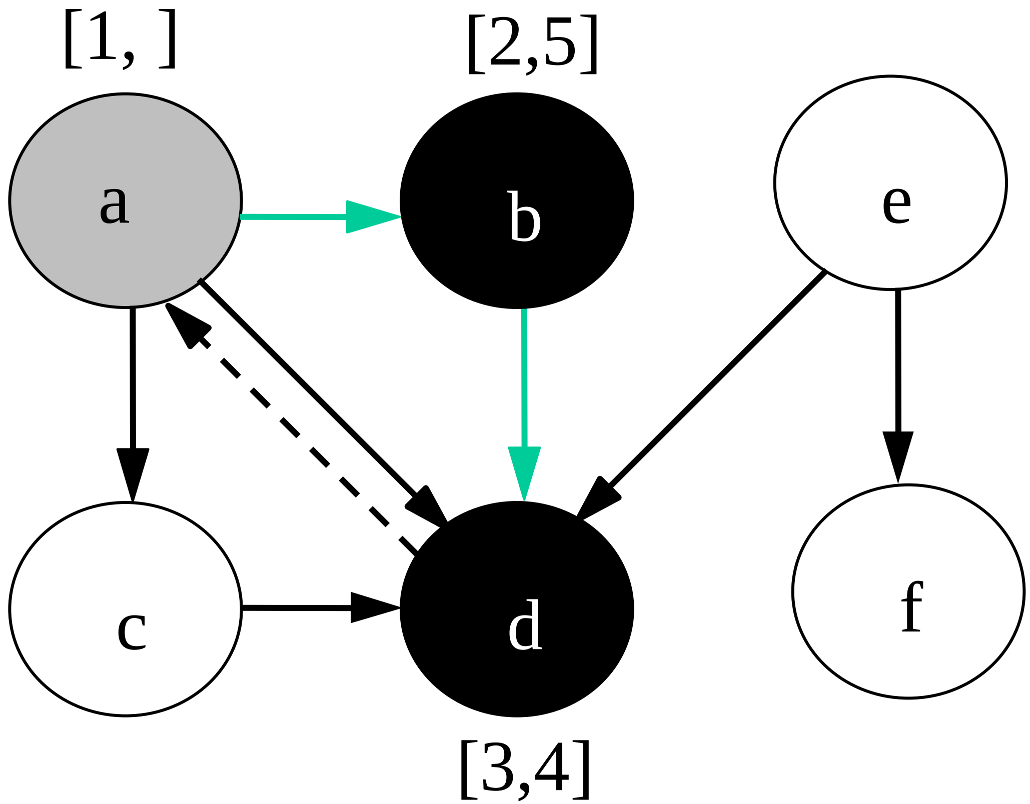
דוגמה



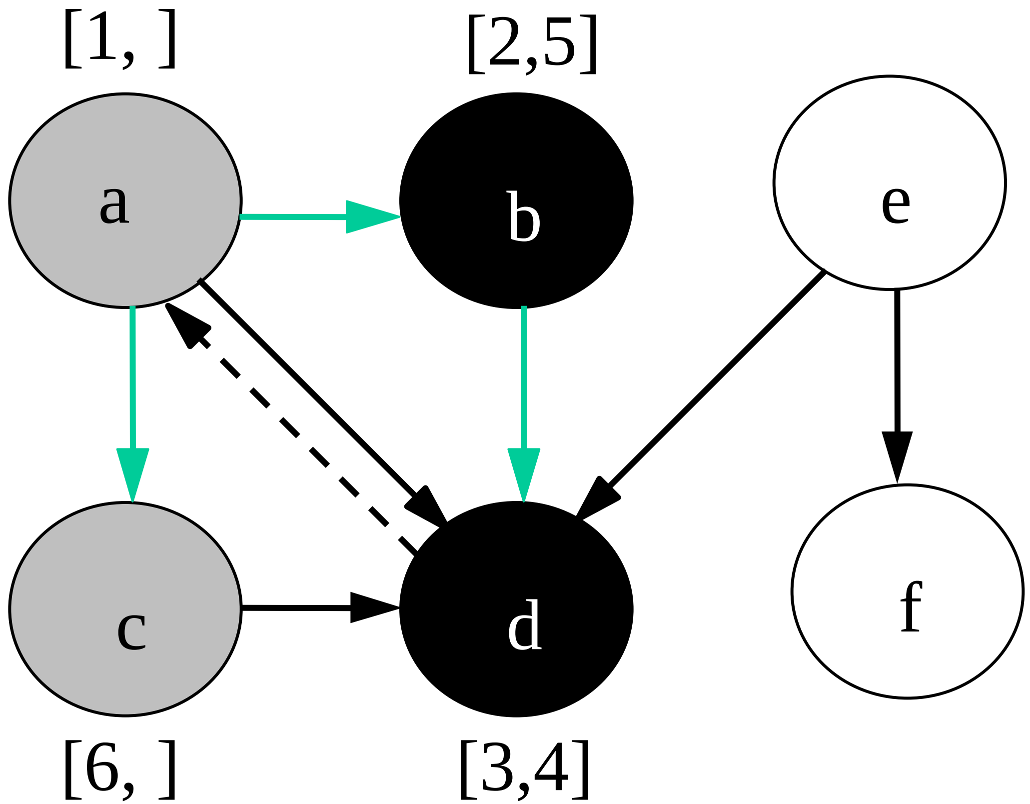
דוגמה



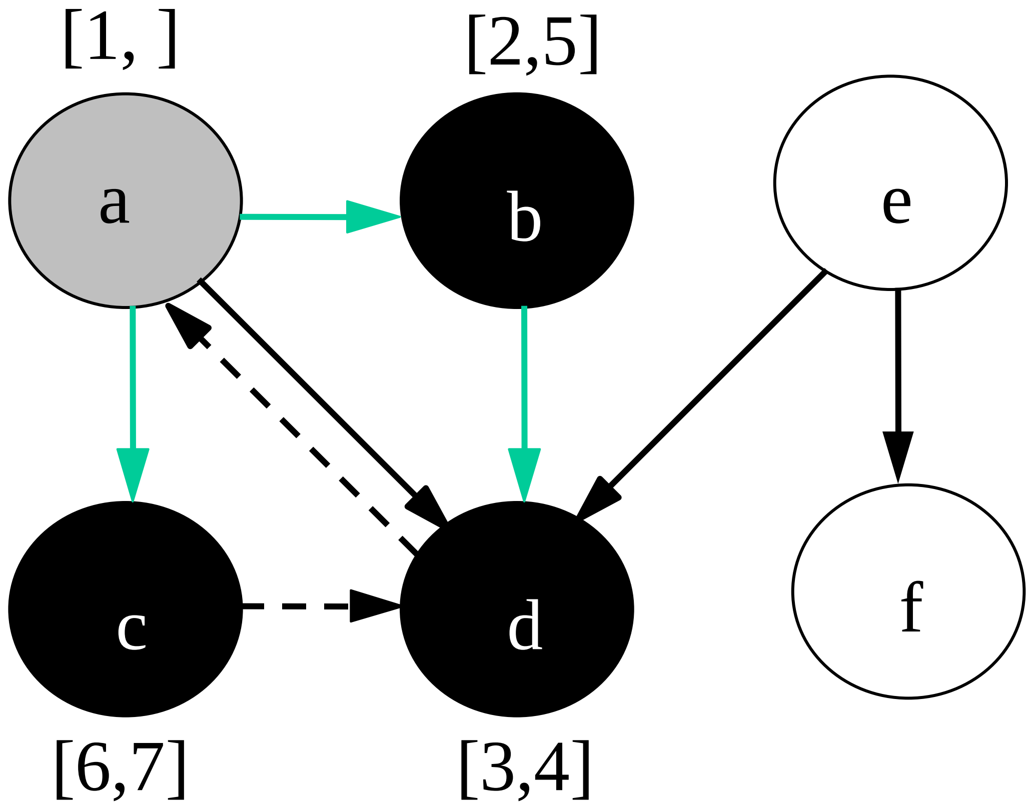
דוגמה



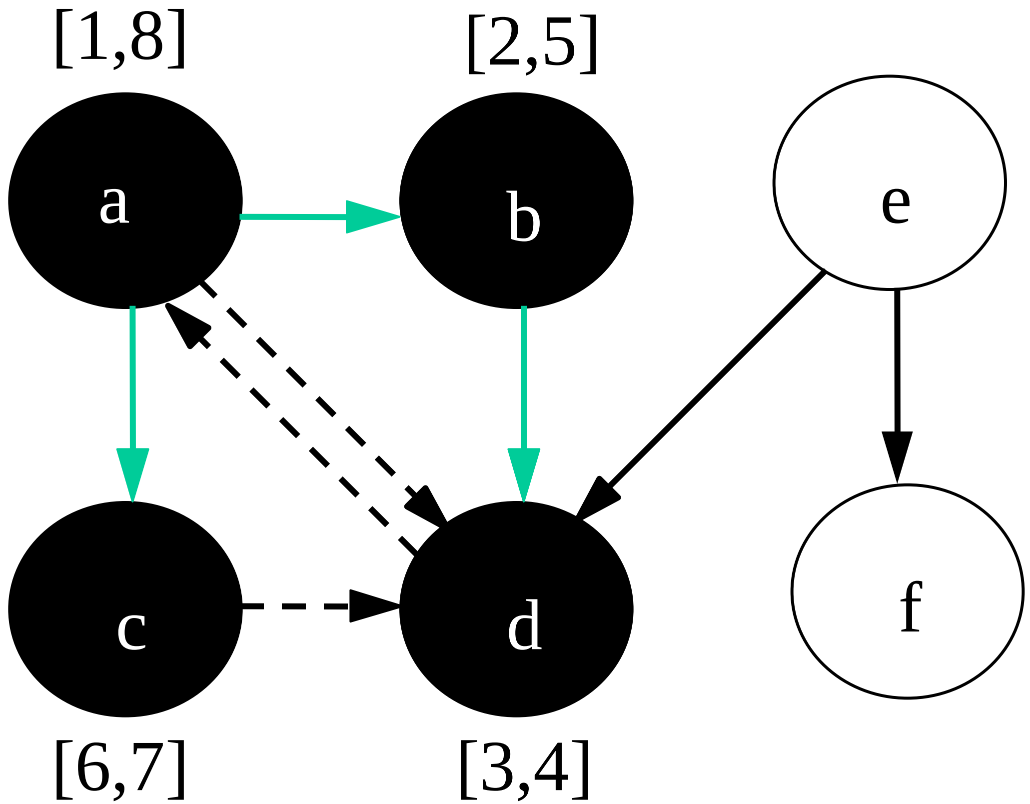
דוגמה



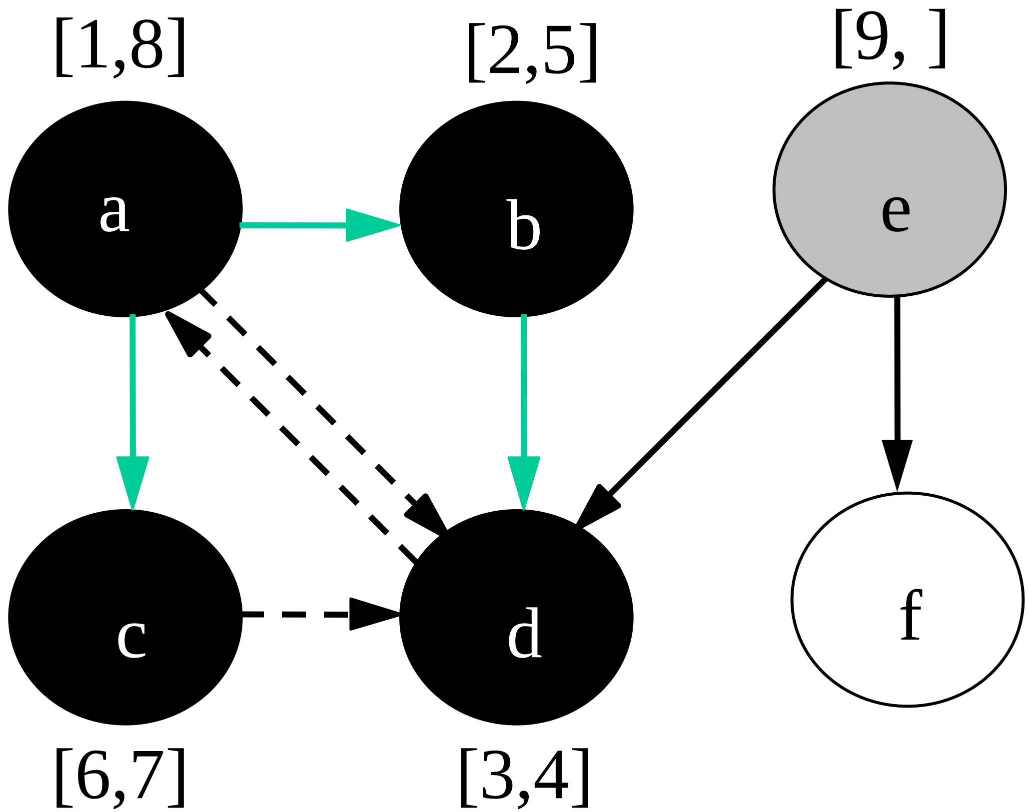
דוגמה



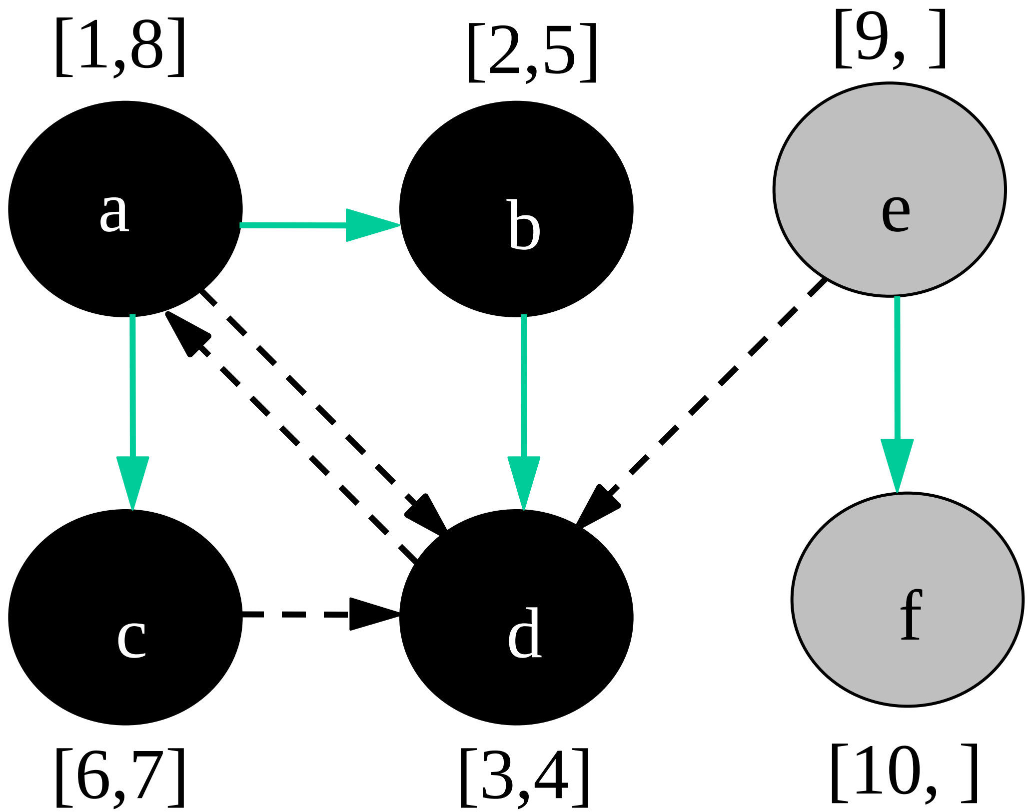
דוגמה



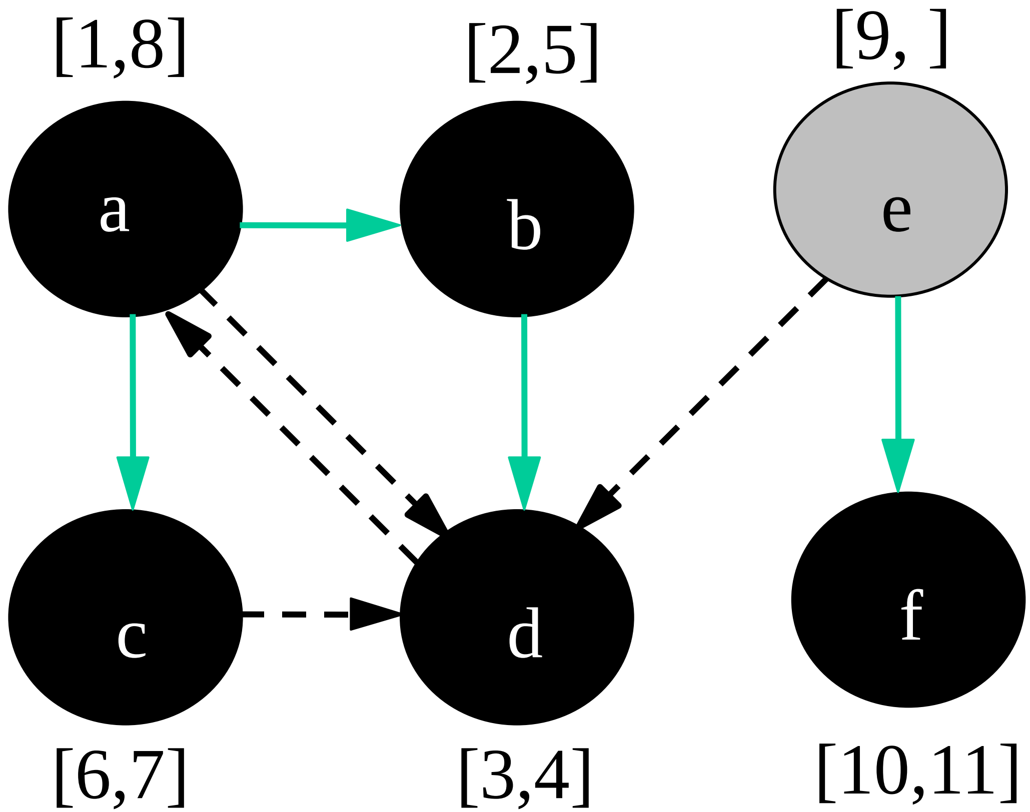
דוגמה



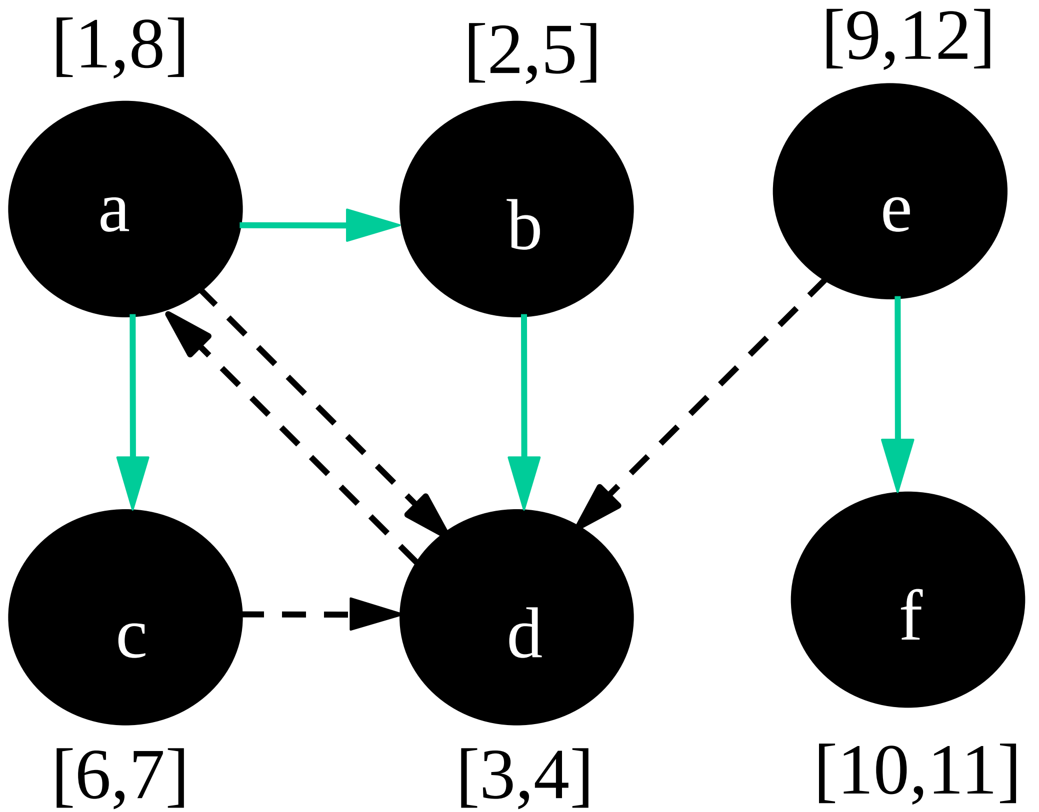
דוגמה



דוגמה



דוגמה



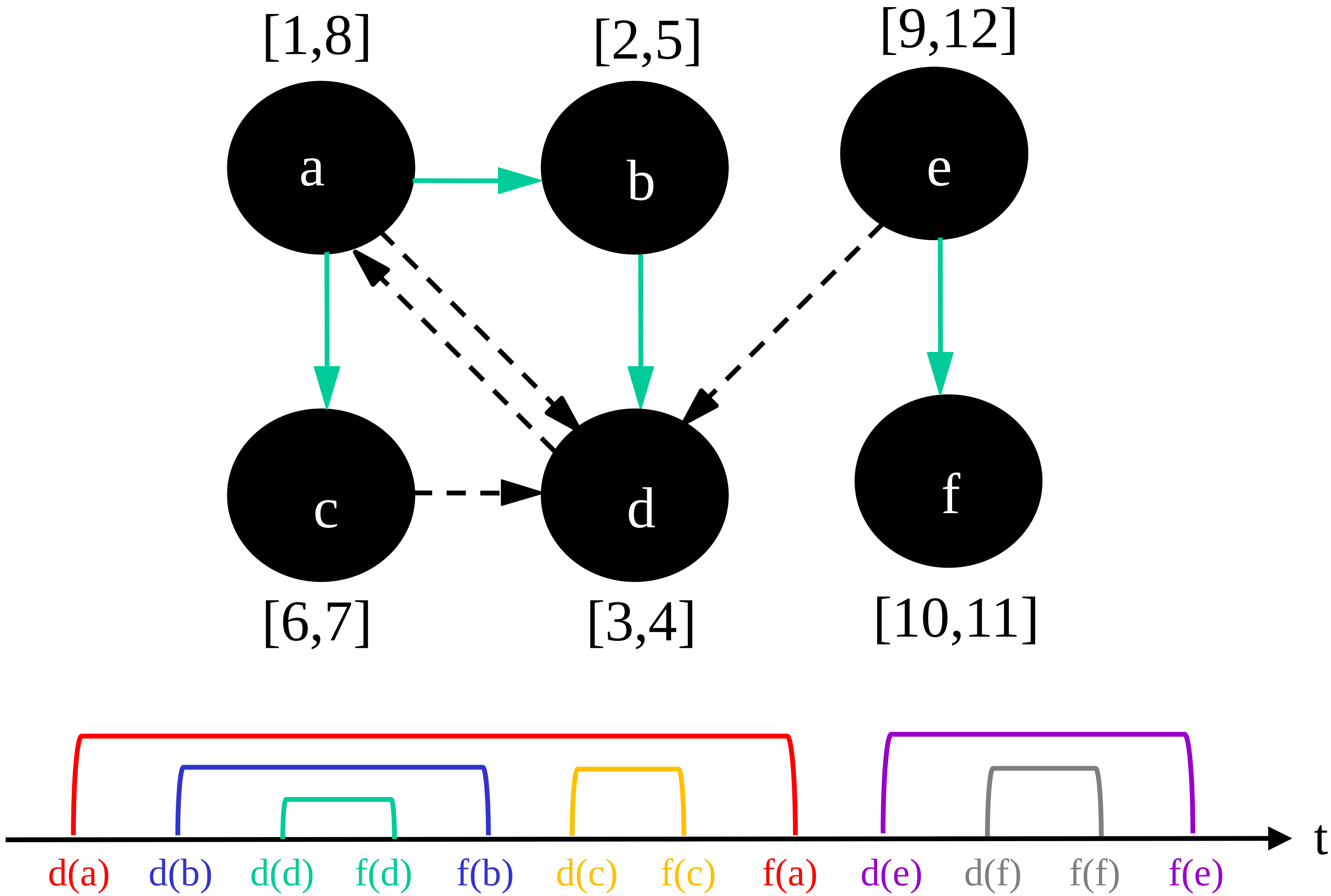
סידור הקדקודים ע"י DFS

- אינטרוול של קודקוד:

לכל קודקוד v נגדיר את האינטרוול $I_v = [d(v), f(v)]$
המייצג את פרק הזמן שבו הקדקוד v מטופל.

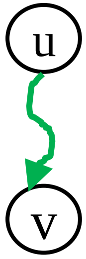
במילים אחרות,
האינטרוול הוא הקטע על הציר המספרים הממשיים,
המתחיל ב- $d(v)$ ומסתיים ב- $f(v)$.

דוגמה



צאצא ואב קדמון

הגדרה: יהי G גרף מכוון/ לא מכוון.
נניח שביצענו הרצת DFS על הגרף.

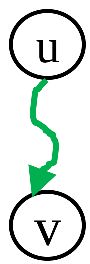


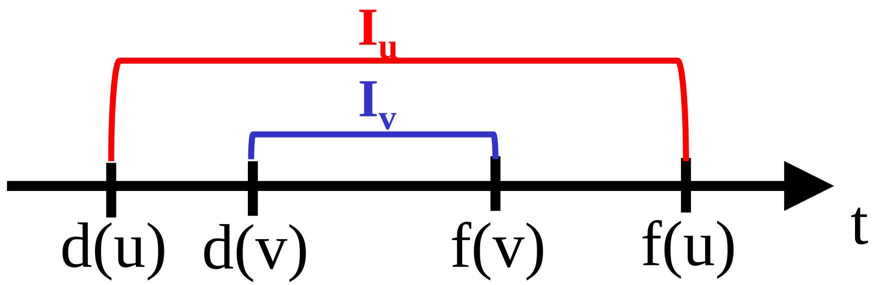
נאמר שקדקוד v **צאצא** של u אם:
שניהם באותו עץ DFS ויש מסלול **בעץ** מ- u ל- v.
במקרה זה u הוא **אב קדמון** של v.

עקרון הקינון

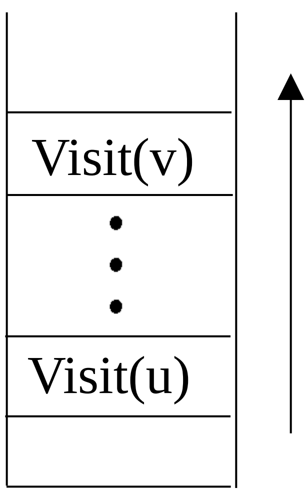
עקרון הקינון: יהיו v ו- u קדקודים. אזי מתקיים:

(v צאצא של u בעץ ה- DFS) $\leftrightarrow$ $I_v \subset I_u$





הסבר אינטואיטיבי: נובע מתכונת הרקורסיה.

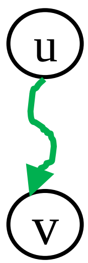


מחסנית הרקורסיה

עקרון הקינון

עקרון הקינון: יהיו v ו- u קדקודים. אזי מתקיים:

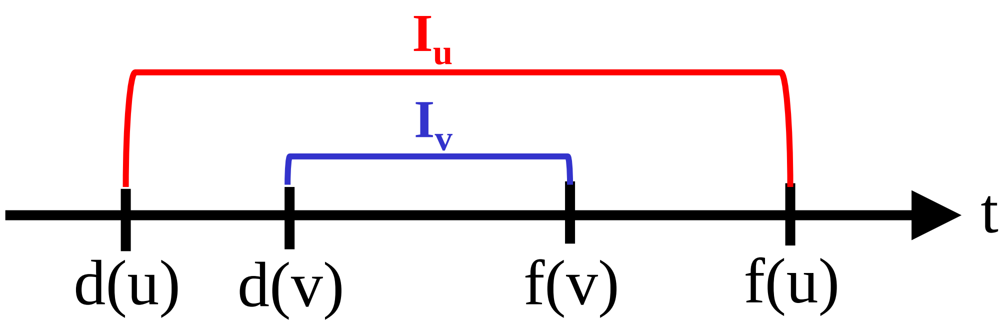
$$I_v \subset I_u \;\leftrightarrow\; (\text{DFS-ה בעץ } u \text{ צאצא של } v)$$



הוכחה:

($\rightarrow$) נניח v צאצא של u בעץ ה- DFS.

נוכיח $I_v \subset I_u$



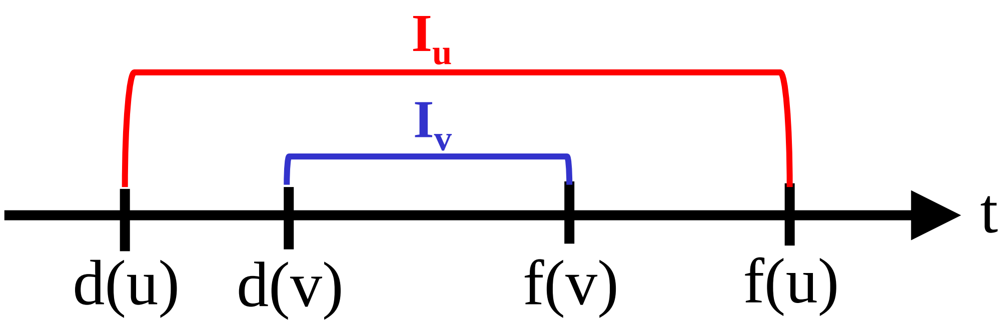
- $d(u) < d(v)$
  (כי u התגלה לפני v).
- $f(v) < f(u)$
  (כי בזמן שסיימנו לטפל ב u סיימנו את הטיפול בכל צאצאיו ובפרט ב- v).

מסקנה: $I_v \subset I_u$.

עקרון הקינון

עקרון הקינון: יהיו v ו- u קדקודים. אזי מתקיים:

$I_v \subset I_u$ $\leftrightarrow$ (v צאצא של u בעץ ה- DFS)



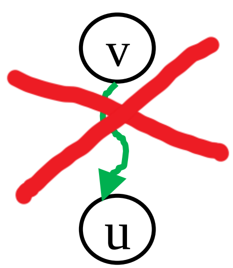
הוכחה:

(←) נניח $I_v \subset I_u$

נוכיח ש-v צאצא של u.

נניח בשלילה שזהו אינו המצב:

מקרה 1: u צאצא של v.



במקרה זה, מהוכחת הכיוון הראשון:

$I_u \subset I_v$, **סתירה!**

עקרון הקינון

עקרון הקינון: יהיו v ו- u קדקודים. אזי מתקיים:

$$(DFS\text{ -ה בעץ } u \text{ של צאצא } v) \leftrightarrow I_v \subset I_u$$

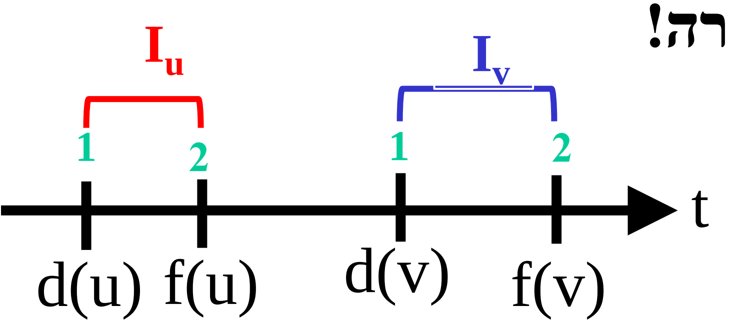
הוכחה:

$(\leftarrow)$ נניח $I_v \subset I_u$

מקרה 2: u,v בעצי DFS נפרדים או בתתי-עץ נפרדים.

1. מהנחתנו, $I_u \subset I_v$ מתקיים שהגילוי של u קודם לגילוי v.

2. על מנת ש- u,v ב(תת) עצים DFS נפרדים,
הטיפול ב- u חייב להסתיים לפני שמגלים את v, **סתירה!**



הבחנות נוספות לגבי DFS

הבחנה 1: לכל גרף, במהלך כל הריצה של ה- DFS
לא תתכן קשת מקדקוד שחור לקדקוד לבן.

הוכחה: אם הקדקוד שחור פירוש הדבר שניסינו לבקר בכל שכניו.

הבחנות נוספות לגבי DFS

הבחנה 2: יהיו $u,v\in V$. אזי אחד משלושת התנאים הבאים מתקיים:

1. $[d(v),f(v)] \subset [d(u),f(u)]$
2. $[d(u),f(u)] \subset [d(v),f(v)]$
3. $[d(v),f(v)] \cap [d(u),f(u)] = \emptyset$

מסקנה: מתקיים אחד משלושה מקרים:לכל זוג קודקודים u,v
האינטרוולים המתאימים זרים או מוכלים.

הבחנות נוספות לגבי DFS

הבחנה 2: יהיו $u,v \in V$. אזי אחד משלושת התנאים הבאים מתקיים:

1. $[d(v),f(v)] \subset [d(u),f(u)]$
2. $[d(u),f(u)] \subset [d(v),f(v)]$
3. $[d(v),f(v)] \cap [d(u),f(u)] = \emptyset$

הוכחה: מתקיים אחד משלושה מקרים:

1. v צאצא של u ומתקיים מקרה 1.
2. u צאצא של v ומתקיים מקרה 2.
3. u ו- v בעצים או בתת עצים שונים ומתקיים מקרה 3.

עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן:

יהי $G=(V,E)$ גרף,

יהי $v_k \to \dots \to v_2 \to v_1$ מסלול בגרף,

נניח שבסריקת DFS הקודקוד v_1 **התגלה ראשון** לאורך המסלול,

אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן: יהי $v_k \to \ldots \to v_2 \to v_1$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

הוכחה: באינדוקציה על k אורך המסלול.
בסיס: $k = 0$, טריוויאלי. (קודקוד צאצא של עצמו באופן ריק).

נניח נכונות למסלולים באורך $(k-1)$ ונוכיח עבור k.

מהנחת האינדוקציה הקדקודים $v_2, \ldots, v_{k-1}$
יהיו צאצאיו של v_1 בעץ ה- DFS.
נותר להוכיח עבור v_k.

עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן: יהי $v_1 \to v_2 \to \ \dots \to v_k$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

הוכחה:

מהנחת האינדוקציה הקדקודים $v_2, \dots, v_{k-1}$
יהיו צאצאיו של v_1 בעץ ה- DFS.
נותר להוכיח עבור v_k.

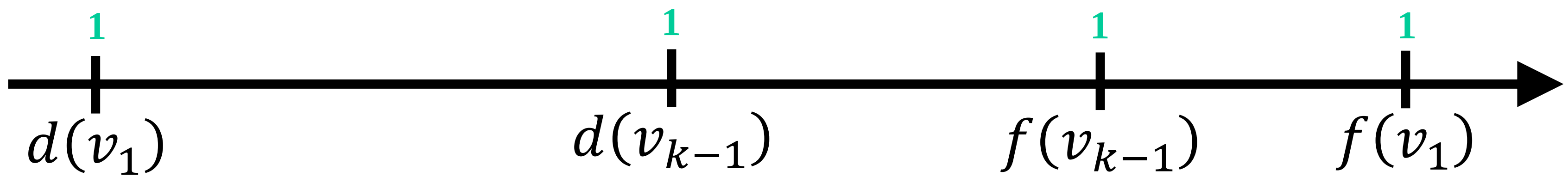
נטען $I_{v_k} \subset I_{v_1}$ ומ**עיקרון הקינון** נסיק את הנדרש.

עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן: יהי $v_k \rightarrow \ldots \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

המשך הוכחה:

1. לפי הנחת האינדוקציה v_{k-1} הוא צאצא של v_1 בעץ ה-DFS
ולכן מעיקרון הקינון $I_{v_{k-1}} \subset I_{v_1}$
ובפרט $d(v_1) < f(v_{k-1}) < f(v_1)$.



עקרון המסלול הלבן

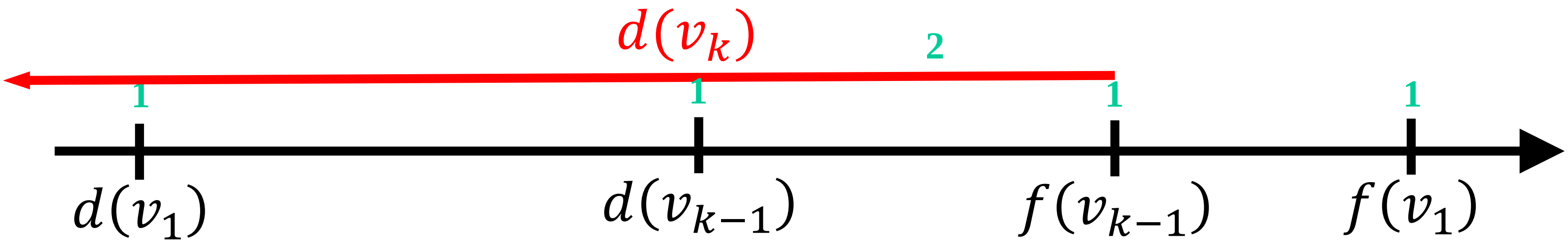
עקרון המסלול הלבן: יהי $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

המשך הוכחה:

2. נסתכל על **הרגע שבו** v_{k-1} הושחר.

לא ייתכן שבשלב הזה v_k לבן (**הבחנה 1:** לא תתכן קשת מקדקוד שחור ללבן).

v_k התגלה לפני סיום הביקור ב- v_{k-1},
כלומר $d(v_k) < f(v_{k-1})$.



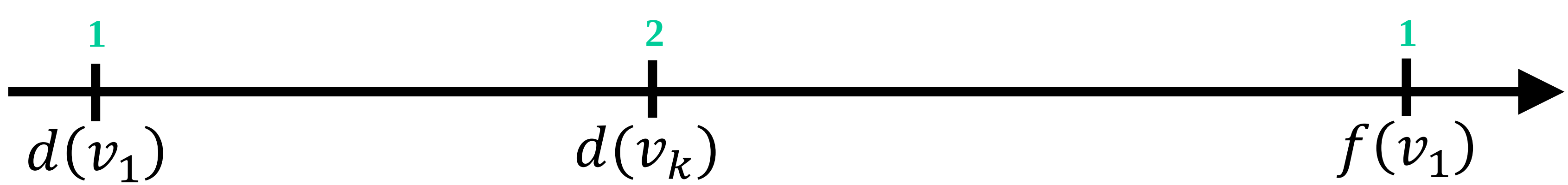
עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן: יהי $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ \dots \rightarrow v_k$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

המשך הוכחה:

2. נסתכל על הרגע שבו v_{k-1} הושחר.
לא ייתכן שבשלב הזה v_k לבן
⇐ v_k התגלה לפני סיום הביקור ב- v_{k-1},
כלומר $f(v_{k-1}) > d(v_k)$.
בנוסף, מהנחתנו v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול, ולכן:

$$d(v_1) < d(v_k) < f(v_1)$$



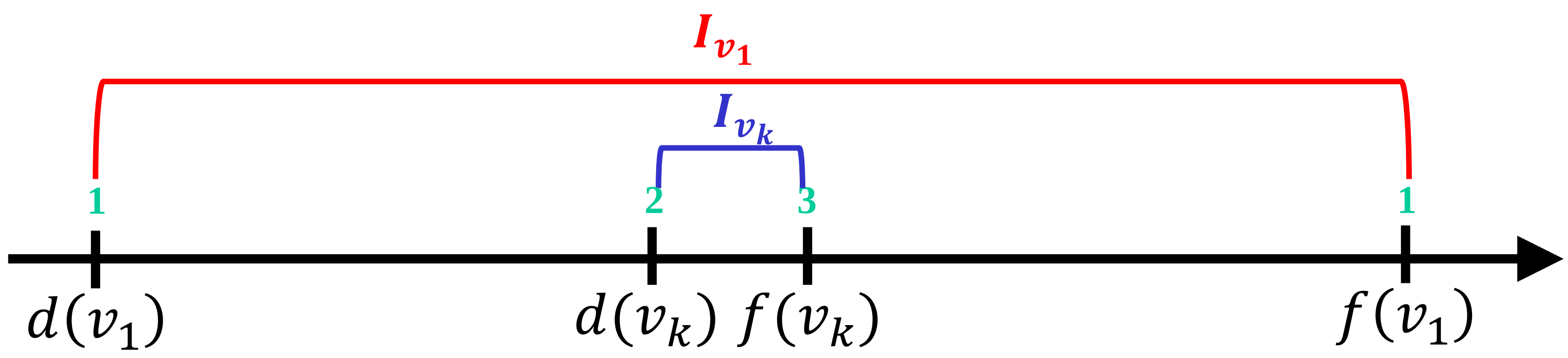
עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן: יהי $v_k \rightarrow \ldots \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

המשך הוכחה:

3. מכיוון ש-v_k התגלה בין גילוי v_1 לבין סיום v_1,
ומכיוון שבין אינטרוולים מתקיים יחס הכלה או זרות,
נסיק כי מתקיימת הכלה

$$\mathbf{I_{v_k} \subset I_{v_1}}$$

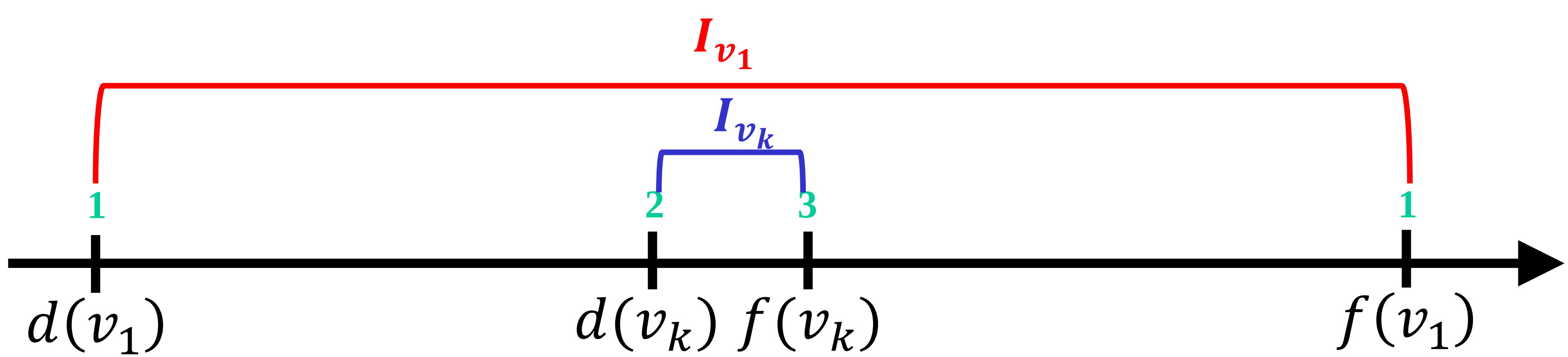


עקרון המסלול הלבן

עקרון המסלול הלבן: יהי $v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ מסלול בגרף,
נניח ש- v_1 התגלה ראשון לאורך המסלול,
אז כל הקדקודים במסלול יהיו צאצאים של v_1 בעץ ה- DFS.

המשך הוכחה:

4. מעיקרון הקינון נסיק ש- v_k צאצא של v_1 בעץ ה- DFS.

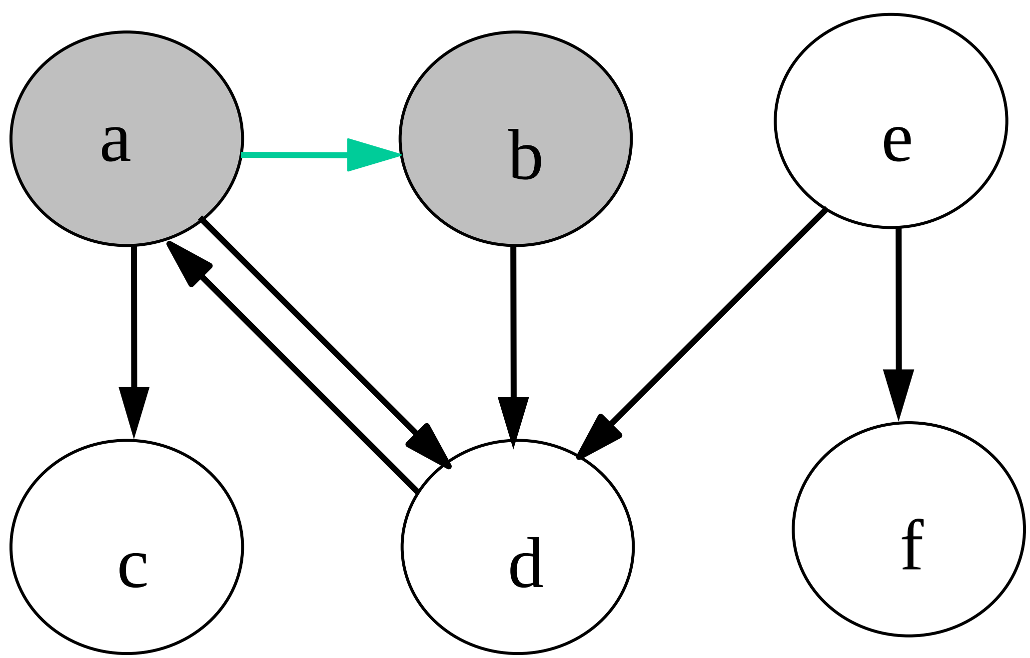


סיווג קשתות

נסווג במהלך ביצוע ה- DFS את הקשתות שאנחנו סורקים.

נניח שאנחנו כרגע בקדקוד u ובודקים את שכנו v. הקשת (u,v) היא:

- **קשת עץ Tree Edge:** אם v לבן, במקרה זה u יהיה אביו של v בעץ.

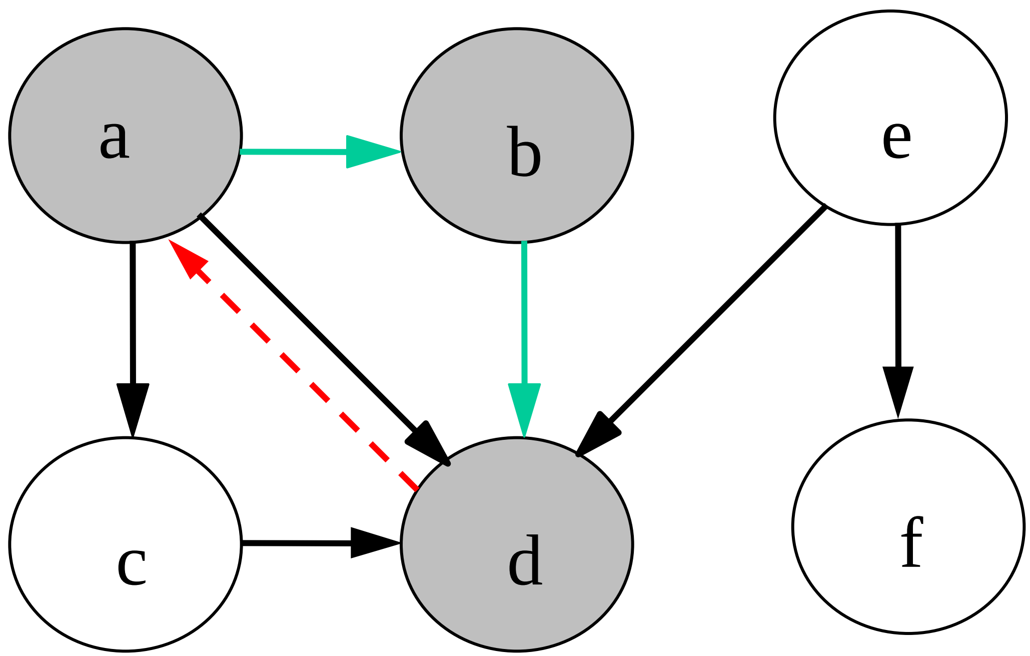


סיווג קשתות

נסווג במהלך ביצוע ה- DFS את הקשתות שאנחנו סורקים.

נניח שאנחנו כרגע בקדקוד u ובודקים את שכנו v. הקשת (u,v) היא:

- **קשת חוזרת Back Edge:** אם v אפור, כלומר v הוא אב קדמון של u בעץ.



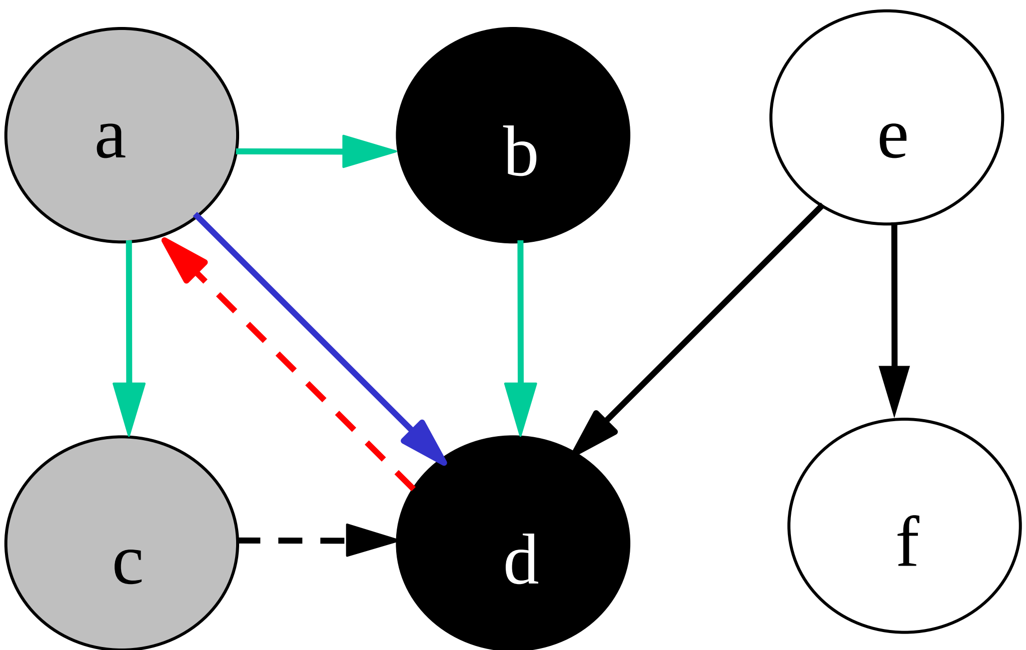
סיווג קשתות

נסווג במהלך ביצוע ה- DFS את הקשתות שאנחנו סורקים.

נניח שאנחנו כרגע בקדקוד u ובודקים את שכנו v. הקשת (u,v) היא:

• **קשת קדמית Forward Edge**

אם v שחור ובנוסף v הוא צאצא של u.



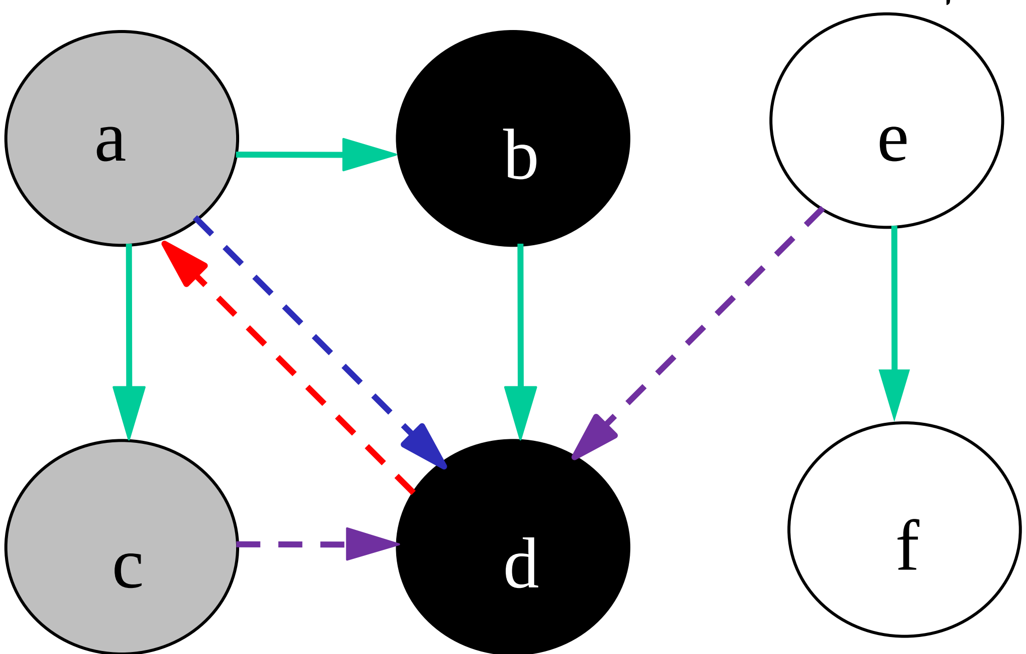
סיווג קשתות

נסווג במהלך ביצוע ה- DFS את הקשתות שאנחנו סורקים.

נניח שאנחנו כרגע בקדקוד u ובודקים את שכנו v. הקשת (u,v) היא:

קשת חוצה Cross Edge:

אם v שחור אך v אינו צאצא של u.



סוגי קשתות בגרף לא-מכוון

טענה: בגרף לא-מכוון יש רק **קשתות עץ** ו**קשתות חוזרות**.

סוגי קשתות בגרף לא-מכוון

טענה: בגרף לא-מכוון יש רק **קשתות עץ** ו**קשתות חוזרות**.

הוכחה: תהי $E \in \{u,v\}$ קשת.
נניח (בה"כ) ש- u התגלה לפני v.
לכן מעיקרון המסלול הלבן v יהיה צאצא של u בעץ ה- DFS.
נחלק למקרים לפי שני סוגים של צאצא:

סוגי קשתות בגרף לא-מכוון

טענה: בגרף לא-מכוון יש רק **קשתות עץ** ו**קשתות חוזרות**.

הוכחה: תהי $E \in \{u,v\}$ קשת.
נניח (בה"כ) ש- u התגלה לפני v.
לכן מעיקרון המסלול הלבן v יהיה צאצא של u בעץ ה- DFS.

מקרה I. u הורה של v, כלומר בסריקת שכניו של u צבעו של v היה לבן,
הקשת תסווג **כקשת עץ.**
הקשת תכוון כך (u, v)

סוגי קשתות בגרף לא-מכוון

טענה: בגרף לא-מכוון יש רק **קשתות עץ** ו**קשתות חוזרות**.

הוכחה: תהי $E \in \{u,v\}$ קשת.
נניח (בה"כ) ש- u התגלה לפני v.
לכן מעיקרון המסלול הלבן v יהיה צאצא של u בעץ ה- DFS.

מקרה II. u אב קדמון שאינו הורה של v, אז כשנגיע ל- v במסלול מ- u
הקודקוד v יבדוק את שכנו, u ויראה אותו בצבע אפור. (ממתין
לצאצאיו מההקריאות הרקורסיביות). הקשת תסווג **כקשת חוזרת.**
הקשת תכוון כך (v, u)

אלגוריתם לסיווג קשתות בגרף לא-מכוון

```
VISIT(Vertex u)     //   print tree and backward arcs.

Color[u] ← gray                // begin processing of u
for each v ∈Adj[u] do
        if Color[v] = white then
                print (u,v) “is a tree arc”
                mark edge (u,v)
                VISIT(v)
        else
                print (u,v) “is a back arc”
Color[u] ← black               // end processing of u
```

נשים לב:

פונקציית המעטפת של
ה- DFS תוותר ללא שינוי.

מהם השינויים
הנדרשים
באלגוריתם על מנת
שיעבוד גם על גרף
מכוון ?