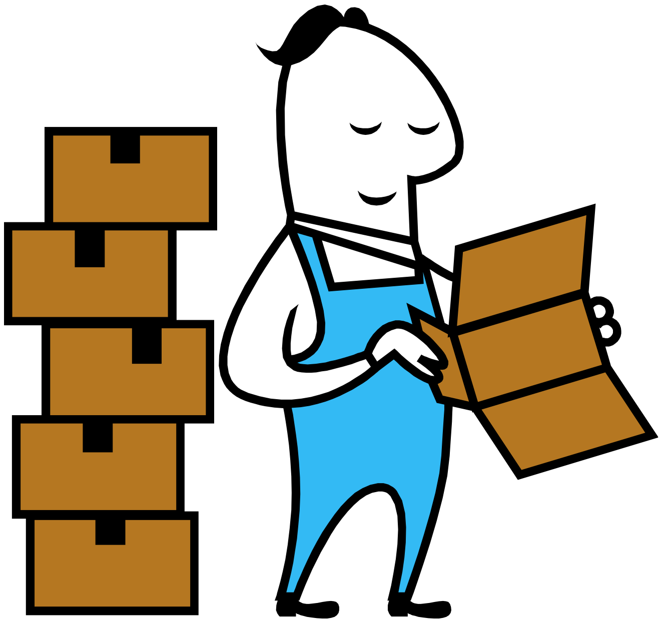
מיון טופולוגי



מיון טופולוגי

הגדרת הבעיה

קלט: 1. אוסף משימות $\{1, \ldots, n\}$

2. אוסף של אילוצים מהצורה (i,j), המבטא שמשימה i צריכה להתבצע לפני משימה j

פלט: סידור המשימות בסדר שאינו מפר אף אילוץ,
או הודעה שלא קיים סידור כזה.

מיון טופולוגי

הגדרת הבעיה

קלט: 1. אוסף משימות $\{1, \ldots, n\}$

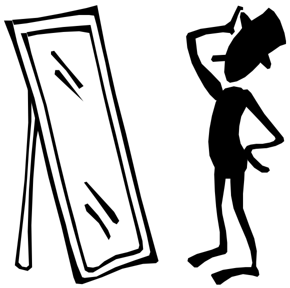
2. אוסף של אילוצים מהצורה (i,j), המבטא שמשימה i צריכה להתבצע לפני משימה j

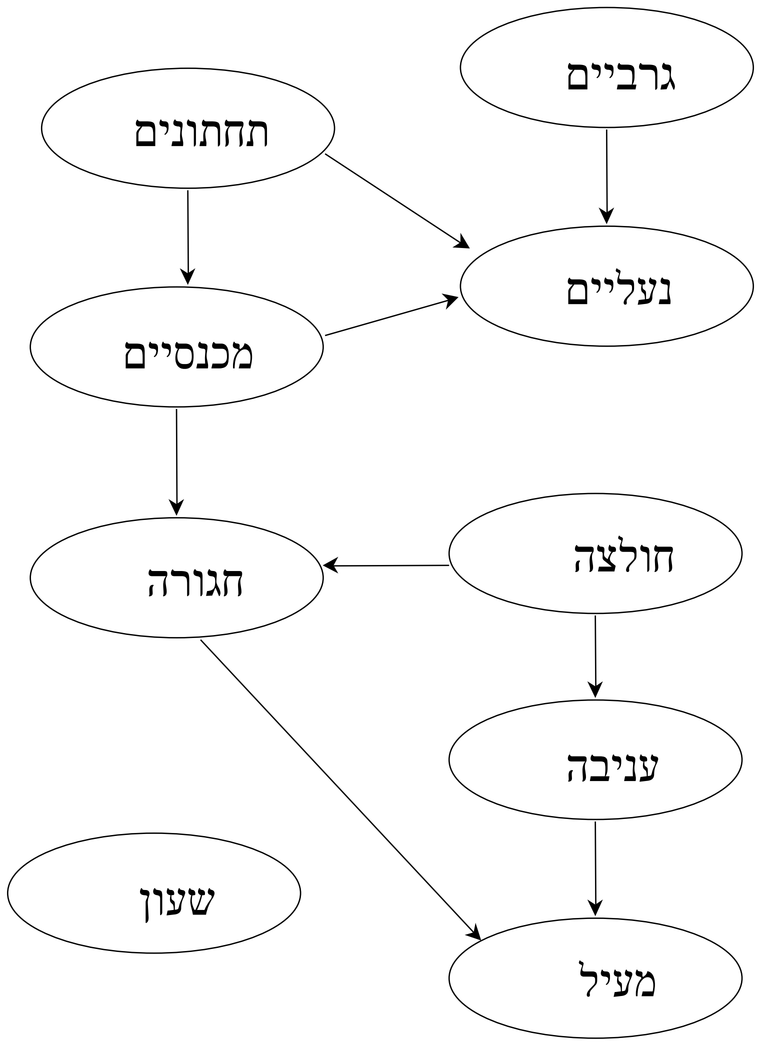
פלט: סידור המשימות בסדר שאינו מפר אף אילוץ, או הודעה שלא קיים סידור כזה.

שימושים:

- באיזה סדר ללמוד את הקורסים במכללה כך שיתקיימו כל דרישות הקדם ?
- באיזה סדר יש להרכיב את חלקיה של מכונית ?
- כיצד יתלבש הפרופסור המפוזר בבוקר ?

דוגמה





מיון טופולוגי

הגדרת הבעיה

קלט: 1. אוסף משימות $\{1, \ldots, n\}$

2. אוסף של אילוצים מהצורה (i,j), המבטא שמשימה i צריכה להתבצע לפני משימה j

פלט: סידור המשימות בסדר שאינו מפר אף אילוץ,
או הודעה שלא קיים סידור כזה.

תרגום הבעיה לגרפים:

- נבנה גרף: קודקודי הגרף ייצגו משימות.
- נחבר זוג קודקודים בקשת, אם מופיע האילוץ (i,j).

מיון טופולוגי של גרף

הגדרת הבעיה (בהתאם למודל המתמטי שנבחר)

קלט: **גרף מכוון** $G = (V,E)$

פלט: סידור ליניארי של קדקודי הגרף

(כלומר, כל הקודקודים מופיעים בסידור וכל קודקוד מופיע בדיוק

פעם אחת), כך שלכל זוג קודקודים בגרף:

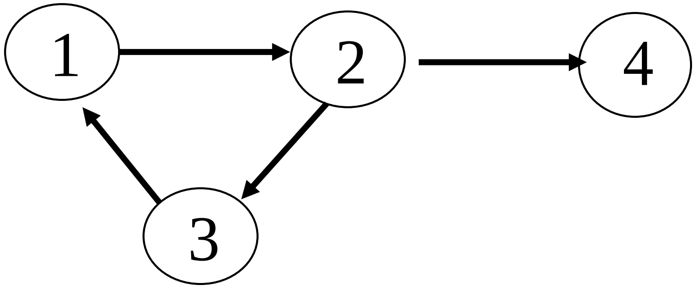
אם $E \in (u,v)$ אז u יופיע לפני v בסידור.

או הודעה שאין כזה סידור.

מיון טופולוגי – וקיום מעגלים

משפט: יהי G גרף מכוון.

קיים מיון טופולוגי לקודקודי G אם"ם G חסר מעגלים.



הוכחה:

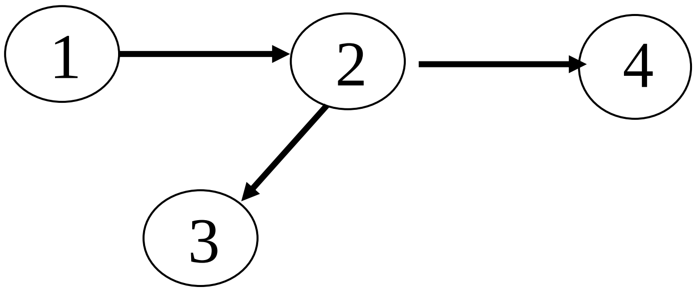
כיוון I: אם ב-G יש מעגל אז **לא קיים** מיון טופולוגי של קדקודיו.

אם יש מעגל אז אף קדקוד במעגל אינו יכול להיות ראשון במיון.

מיון טופולוגי – וקיום מעגלים

משפט: יהי G גרף מכוון.

קיים מיון טופולוגי לקודקודי G אם"ם G חסר מעגלים.



הוכחה:

כיוון II: אם G חסר מעגלים מעגל אז <u>**קיים**</u> מיון טופולוגי של קדקודיו.

נוכיח באמצעות המשפט הבא.

משפט 2: קיים אלגוריתם שבהנתן גרף מכוון G מחזיר כפלט:

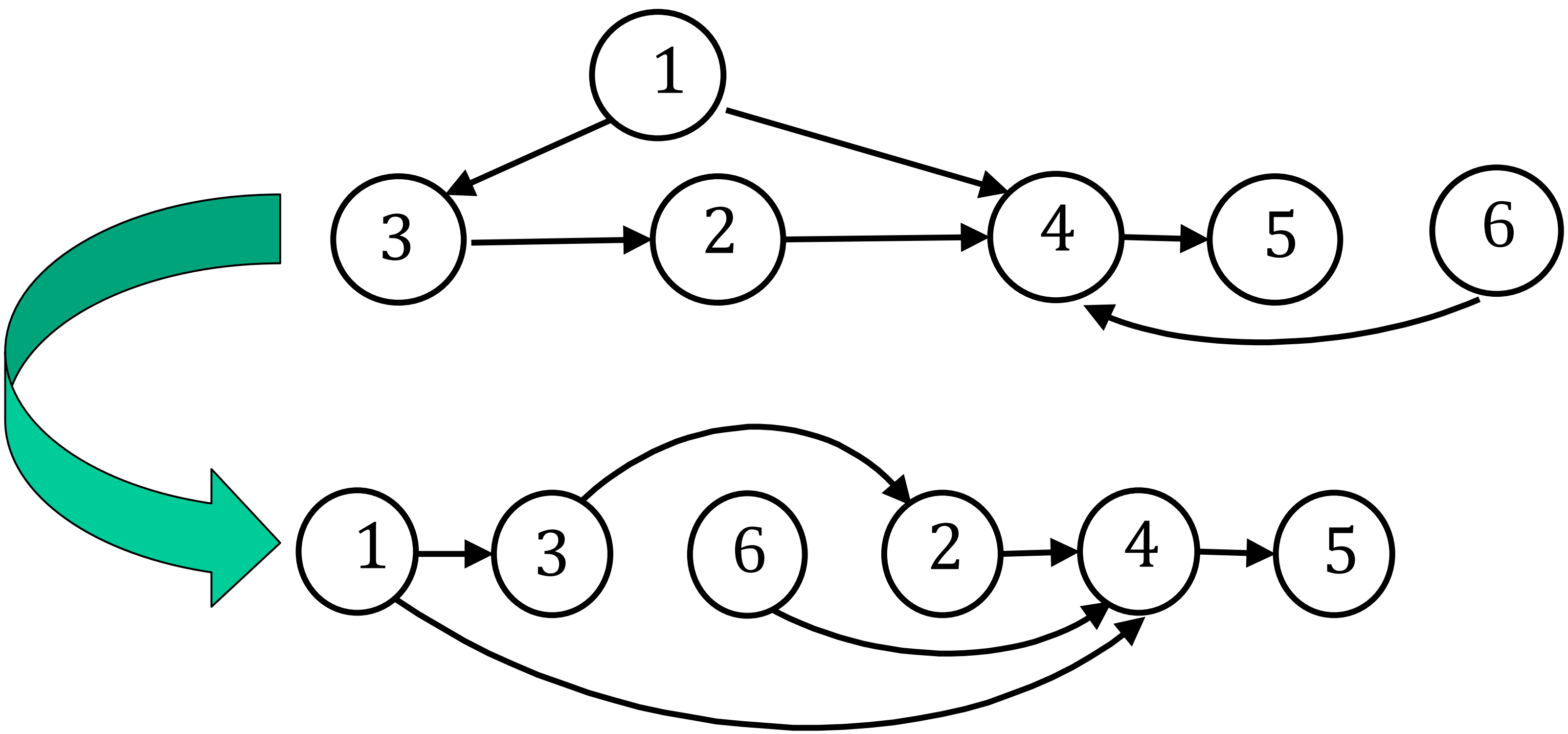
- אם G חסר מעגלים: מיון טופולוגי של קודקודיו.
- אם ב- G קיים מעגל: אין מיון טופולוגי.

ממשפט 2 נסיק שאם G חסר מעגלים, אז פלט האלגוריתם, הינו מיון טופולוגי של קודקודיו ולכן בפרט קיים מיון שכזה.

מיון טופולוגי – ניתוח הבעיה

הבחנות נוספות:

1. ניתן להסתכל על מיון טופולוגי כעל סידור של הקדקודים בשורה משמאל לימין, כך שכל הקשתות מכוונות ימינה.

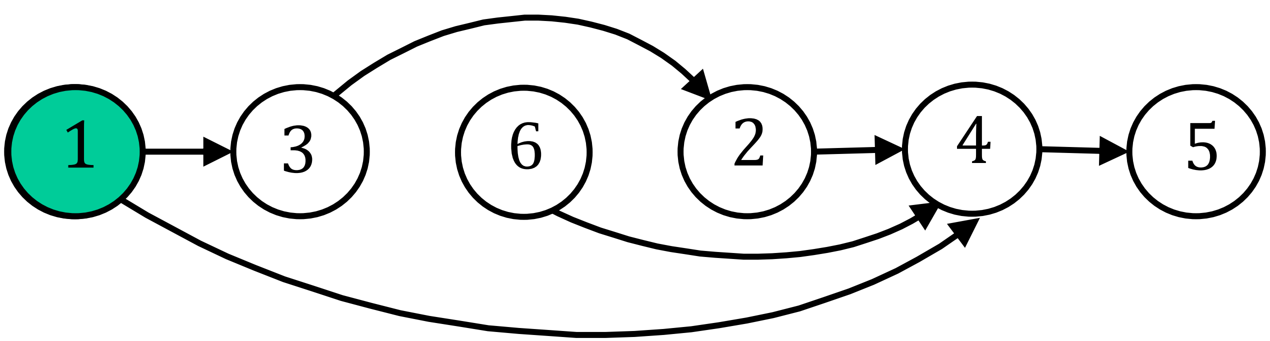


מיון טופולוגי – ניתוח הבעיה

הבחנות נוספות:

2. מיון טופולוגי תמיד מתחיל מ"**מקור**"

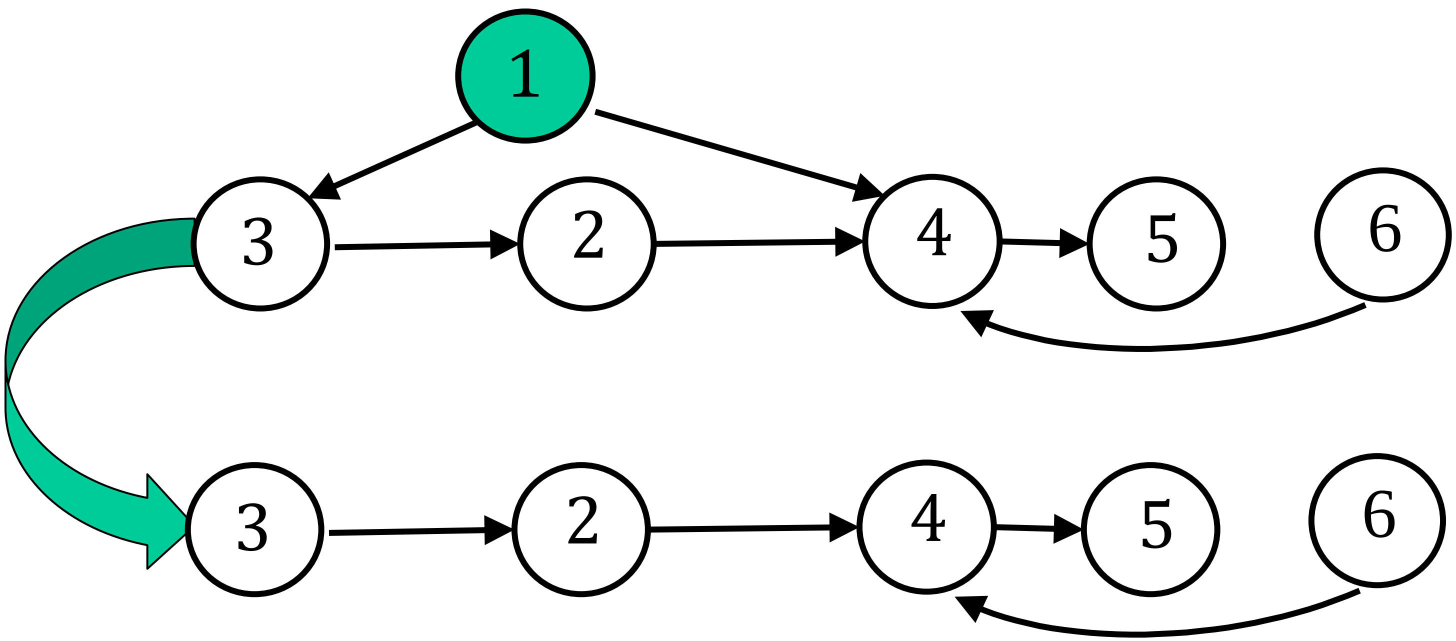
(קדקוד שדרגת הכניסה שלו היא 0) (מדוע?).



אלגוריתם למיון טופולוגי

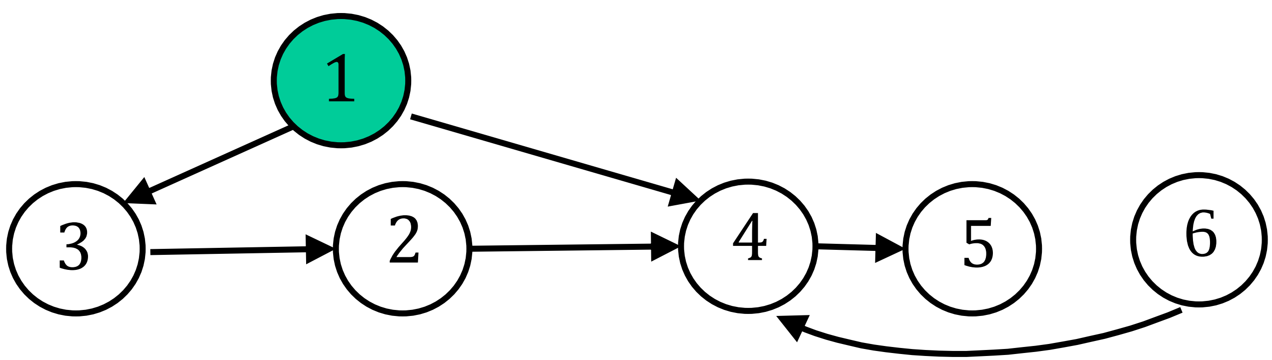
הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף.

נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.



אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף. נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.



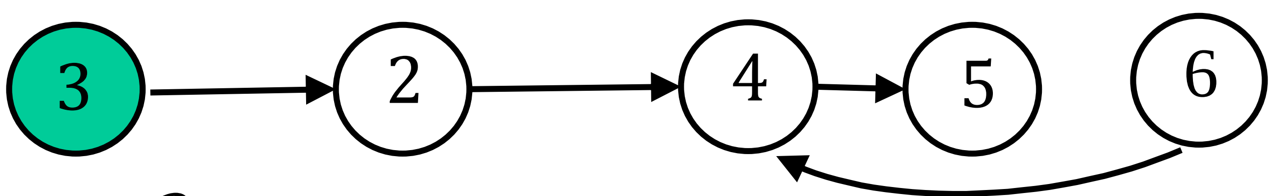
פלט:

1

אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף.

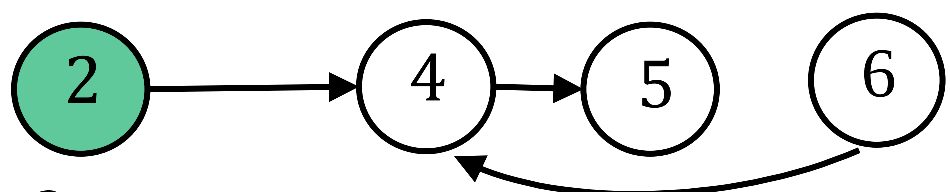
נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.



פלט: 3 1

אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף. נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.

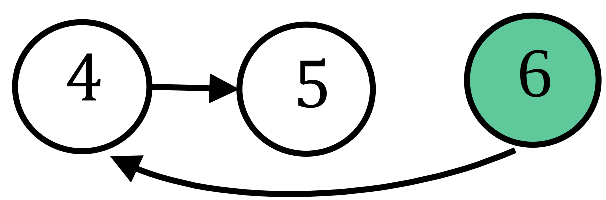


פלט: 1 3 2

אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף.

נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.

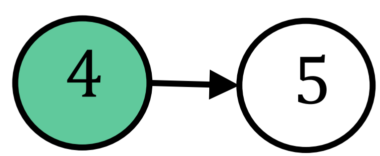


פלט: 6 2 3 1

אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף.

נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.



פלט: 4 6 2 3 1

אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף. נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.

פלט: 5 4 6 2 3 1

אלגוריתם למיון טופולוגי

הרעיון: בכל שלב נמצא קדקוד המהווה "מקור", נוסיף אותו לרשימת הפלט ונסיר אותו ואת הקשתות שיוצאות ממנו מהגרף. נמשיך רקורסיבית עם הגרף החדש.

פלט: 5 4 6 2 3 1

אלגוריתם למיון טופולוגי

שאלות:

1. האם מובטח לנו שבכל שלב יימצא מקור בגרף ?
2. אם אכן יש מקור, כיצד נמצא אותו בצורה יעילה ?
3. מתי נעצור את התהליך ?

אלגוריתם למיון טופולוגי

מימוש נאיבי: בכל שלב על מנת למצוא את קודקוד מקור,

נסרוק את קודקודי הגרף שנותר ונחפש מי מהם מקור.

לאחר שהסרנו את המקור, יש להסיר מהגרף את כל הקשתות

היוצאות ממנו.

יעילות: $\theta(n^2)$.

זו אינה יעילות לינארית עבור גרפים בהם מספר הקשתות קטן.

אלגוריתם למיון טופולוגי

מבני נתונים:

- **Q** – תור המקורות (יחזיק בכל שלב את כל המקורות בגרף הנוכחי)
- **indegree[n]** – מערך דרגות הכניסה של הקדקודים בגרף הנוכחי

אלגוריתם למיון טופולוגי

אלגוריתם:

- **אתחול:**

נמצא לכל קדקוד את דרגת הכניסה שלו (אתחול המערך indegree).

נכניס לתור Q את כל הקדקודים שדרגת הכניסה שלהם 0 (**מקורות**).

אלגוריתם למיון טופולוגי

אלגוריתם:

- **אתחול:**

  נמצא לכל קדקוד את דרגת הכניסה שלו (אתחול המערך indegree).

  נכניס לתור Q את כל הקדקודים שדרגת הכניסה שלהם 0 (**מקורות**).

- **כל עוד** התור Q לא ריק:

  נוריד קדקוד מראש התור Q ונוסיף אותו לסוף רשימת הפלט L.

  נעבור על כל אחד משכניו ונקטין באחד את דרגת הכניסה שלהם.

  אם דרגת הכניסה של קדקוד כלשהו התאפסה - נכניס אותו לתור Q.

אלגוריתם למיון טופולוגי

אלגוריתם:

- **אתחול**:
  נמצא לכל קדקוד את דרגת הכניסה שלו (אתחול המערך indegree).
  נכניס לתור Q את כל הקדקודים שדרגת הכניסה שלהם 0 (**מקורות**).

- **כל עוד** התור Q לא ריק:
  נוריד קדקוד מראש התור Q ונוסיף אותו לסוף רשימת הפלט L.
  נעבור על כל אחד משכניו ונקטין ב-1 את דרגת הכניסה שלהם.
  אם דרגת הכניסה של קדקוד כלשהו התאפסה - נכניס אותו לתור Q.

- אם יש בסיום קדקוד שדרגת הכניסה שלו > 0 נודיע שאין מיון טופולוגי.

- נחזיר כפלט את הרשימה L.

אלגוריתם למיון טופולוגי

אלגוריתם:

- **אתחול**:

  נמצא לכל קדקוד את דרגת הכניסה שלו (אתחול המערך indegree).

  נכניס לתור Q את כל הקדקודים שדרגת הכניסה שלהם 0 (**מקורות**).

- **כל עוד** התור Q לא ריק:

  נוריד קדקוד מראש התור Q ונוסיף אותו לסוף רשימת הפלט L.

  נעבור על כל אחד משכניו ונקטין ב-1 את דרגת הכניסה שלהם.

  אם דרגת הכניסה של קדקוד כלשהו התאפסה - נכניס אותו לתור Q.

- אם יש בסיום קדקוד שדרגת הכניסה שלו > ע שאין מיון טופולוגי.

- נחזיר כפלט את הרשימה L.

שקול למחיקת הקשתות היוצאות מהמקור

TOPOLOGICAL-SORT(Graph G)

```
Queue Q              // queue of sources
List L               // output list
for each v∈ V do              // INIT
        indegree[v] ← 0
for each (u,v)∈ E do
        indegree[v] ← indegree[v]+1
for each v∈ V do
        if indegree[v]=0 then  Q.Enqueue(v)

while Q ≠∅ do                      // MAIN LOOP
        v ← Q.Dequeue()
        L.Append(v)
        for each u∈ Adj[v] do
                indegree[u] ← indegree[u]-1
                if indegree[u]=0 then
                        Q.Enqueue(u)

for each v∈V do        // check if all nodes reached
        if indegree[v] ≠ 0 then
                print "No Topological Sort!"; stop
return L
```

אז איפה היינו ?

רצינו להוכיח את **משפט 2**:

קיים אלגוריתם שבהנתן גרף מכוון G מחזיר כפלט:

- אם G חסר מעגלים: מיון טופולוגי של קודקודיו.
- אם ב- G קיים מעגל: אין מיון טופולוגי.

לצורך כך **כתבנו אלגוריתם**.

כעת עלינו להוכיח את נכונות האלגוריתם, כלומר להוכיח שהוא אכן עושה את מה שהוא אמור לעשות (כפי שמפורט במשפט).

הוכחת נכונות

על מנת להוכיח את נכונות האלגוריתם נוכיח שתי טענות עזר,
הנכונות לכל גרף (ללא קשר אם הוא חסר מעגלים):

טענת עזר 1: כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת.

טענת עזר 2: תהי $(u,v) \in E$,
אם v נמצא ברשימת הפלט אזי:
u נמצא אף הוא ברשימת הפלט, ולפני v.

הוכחת נכונות

טענת עזר 1: כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת.

הוכחה:

מספיק להראות שכל קדקוד נכנס לתור לכל היותר פעם אחת.

1. לכל קדקוד v: ערך התא $indegree[v]$ יכול רק לרדת במהלך זמן הריצה.

הוכחת נכונות

טענת עזר 1: כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת.

הוכחה:

מספיק להראות שכל קדקוד נכנס לתור לכל היותר פעם אחת.

2. קדקוד v נכנס לתור באחד מ-2 מצבים:

- בזמן האתחול, אם $\text{indegree}[v] = 0$.
- בזמן הלולאה, כאשר $\text{indegree}[v]$ הופך מ-1 ל-0.

הוכחת נכונות

טענת עזר 1: כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת.

הוכחה:

מספיק להראות שכל קדקוד נכנס לתור לכל היותר פעם אחת.

3. יהי v קדקוד בגרף:

- אם $\mathrm{d_{in}}[v] = 0$,
אז הוא ייכנס לתור בזמן האתחול ומ-1 נקבל שלא ייכנס שוב לתור במהלך הלולאה (כי אם הערך לא יעלה, אז הוא גם לא ירד חזרה ל- 0 ולכן הקודקוד לא יוכנס שוב).
- אם $\mathrm{d_{in}}[v] > 0$
אז הערך $\mathrm{indegree}[v]$ יתחלף מ-1 ל-0 לכל היותר פעם יחידה במהלך הלולאה (מ-1).

ומכאן שייכנס לתור לכל היותר פעם אחת.

הוכחת נכונות

טענת עזר 2: תהי $(u,v) \in E$,

אם v נמצא ברשימת הפלט אזי:

u נמצא אף הוא ברשימת הפלט, ולפני v.

הוכחה: תהי $(u,v) \in E$.

- אם v נמצא ברשימת הפלט סימן שהוא היה קודם לכן בתור.
- הקודקוד v לא יכול היה להיכנס לתור לפני שעברנו של רשימת השכנים של u ו"הסרנו" את הקשת (u,v) (כי דרגתו לא הייתה מתאפסת).
- על רשימת השכנים של u עוברים רק אחרי ש- u כבר יצא מהתור והוכנס לסוף רשימת הפלט L.
- ולכן v נכנס לתור ובפרט הוכנס לרשימת הפלט רק אחרי ש- u הוכנס אליה.

הוכחת נכונות

בחזרה להוכחת הנכונות של ה**אלגוריתם**:

טענת הנכונות: בהנתן גרף מכוון G,

- אם G חסר מעגלים, האלגוריתם יחזיר כפלט מיון טופולוגי של קודקודיו.
- אם ב- G קיים מעגל, האלגוריתם יודיע שאין מיון טופולוגי.

נפרק את הוכחת המשפט לשתי הטענות הבאות:

טענה 1: אם G חסר מעגלים אז האלגוריתם מוצא מיון טופולוגי.

טענה 2: אם קיים ב- G מעגל אז האלגוריתם יודיע שאין מיון טופולוגי.

הוכחת נכונות

טענה 1: אם G חסר מעגלים אז האלגוריתם מוצא מיון טופולוגי.

הוכחה: נניח G חסר מעגלים, נראה:

I) כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת

II) כל קדקודי הגרף יוכנסו לרשימת הפלט

III) הסדר ברשימת הפלט נכון

פלט האלגוריתם הינו סידור מחדש

הוכחת נכונות

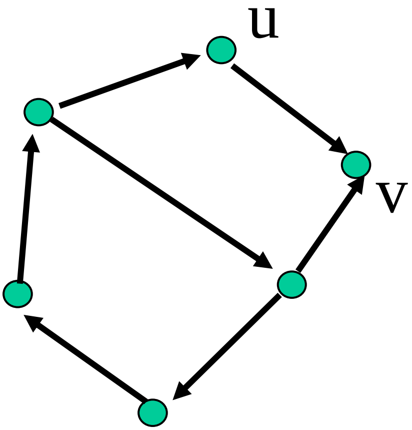
טענה 1: אם G חסר מעגלים אז האלגוריתם מוצא מיון טופולוגי.

הוכחה: נניח G חסר מעגלים, נראה:

I) כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת
נובע מ**טענת עזר 1**.

הוכחת נכונות

טענה 1: אם G חסר מעגלים אז האלגוריתם מוצא מיון טופולוגי.



הוכחה: נניח G חסר מעגלים, נראה:

I) כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת

II) כל קדקודי הגרף יוכנסו לרשימת הפלט

- נניח בשלילה שקיים קודקוד v שלא הוכנס לרשימה L.
- קיים קודקוד u כך ש- $u \rightarrow v$ וגם u לא הוכנס לרשימה.
- נמשיך כך עד שנחזור לקודקוד w שכבר הופיע ברשימת הקודקודים שלא הוכנסו לרשימה L.

  (מספר הקדקודים סופי ולכן נחזור לקדקוד שכבר היינו בו).
- קיבלנו מעגל בגרף (של קודקודים שאינם ב-L).
- בסתירה להנחה – לכן לא קיים קדקוד שלא יוכנס ל-L.

הוכחת נכונות

טענה 1: אם G חסר מעגלים אז האלגוריתם מוצא מיון טופולוגי.

הוכחה: נניח G חסר מעגלים, נראה:

I) כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת

II) כל קדקודי הגרף יוכנסו לרשימת הפלט

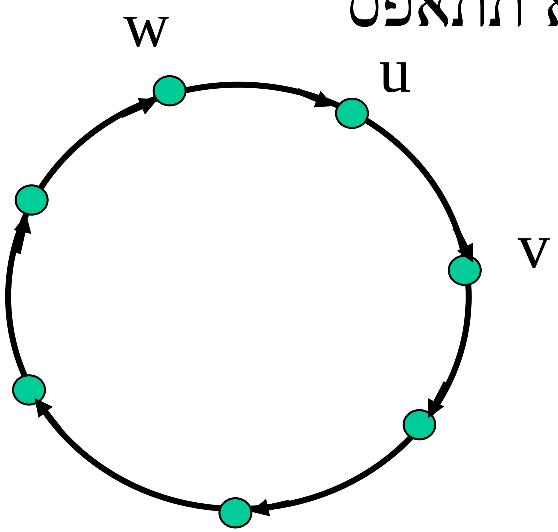
III) הסדר ברשימת הפלט נכון

נובע מ**טענת עזר 2**.

המשך הוכחה

טענה 2: אם ב- G יש מעגל - האלגוריתם ידפיס שאין מיון טופולוגי.

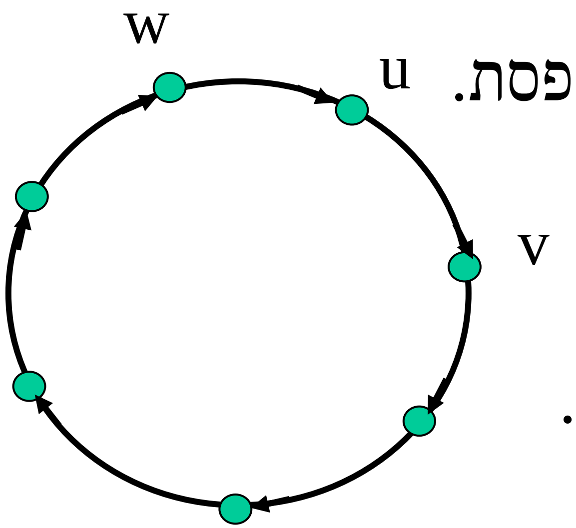
הוכחה: נניח שקיים מעגל בגרף.
נוכיח שדרגת הכניסה של כל הקדקודים במעגל לא תתאפס
ולכן יודפס שאין מיון טופולוגי.



המשך הוכחה

טענה 2: אם ב- G יש מעגל - האלגוריתם ידפיס שאין מיון טופולוגי.

הוכחה: נניח שקיים מעגל בגרף.



- יהי v קודקוד במעגל, נראה שדרגת v לא מתאפסת.
- נניח בשלילה שדרגתו התאפסה.
- יהי u הקדקוד הקודם ל- v על המעגל.
- u הוכנס לרשימת הפלט לפני v (טענת עזר 2).
- נמשיך כך לאורך המעגל (ונחזור ל- v).
- נקבל ש- v הוכנס לרשימת הפלט גם לפני u, וזו סתירה ל**טענת עזר 1**.

ניתוח יעילות

יעילות הלולאה הראשית:

מטענת עזר 1, כל קדקוד יוכנס לרשימת הפלט לכל היותר פעם אחת. על כן בלולאה הראשית נעבור לכל היותר פעם אחת על כל קדקוד.

לכל קדקוד שכזה נבצע מעבר על רשימת השכנים שלו.

לכל אחד מהשכנים נבצע מספר קבוע של פעולות.

לכן היעילות תהיה לכל היותר:

$$\Theta\left(\sum_{v\in V}\left(1+d_{out}(v)\right)\right)=O(n+m)$$

יעילות מחוץ ללולאה הראשית: $\Theta(n+m)$

סה"כ: $\Theta(n+m)$

תרגילים

- האם אפשר להשתמש במחסנית במקום בתור?

- מה המספר המקסימלי של קדקודים שיכולים להיות בתור בעת ובעונה אחת?

  באילו גרפים זה יקרה?