Projet INF402

Ben Gaudry, Rémi Cortial, Kevin Bertaux

Problème choisi : Jeu du Makaro
https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/makaro/

I - Présentation du problème choisi

Présentation des règles

Le Makaro est un jeu de logique sous la forme d'une grille carrée divisée en plusieurs salles. Certaines cellules de la grille peuvent contenir des chiffres, d'autres des flèches. Les règles du jeu sont les suivantes :

1) L'objectif est pour chaque salle, de remplir chaque cellule de cette salle avec un nombre compris entre 1 et N (N étant le nombre de cases de la salle). Chaque nombre ne peut apparaître qu'une seule fois par case.

2) La grille peut contenir des cases noires avec des flèches. La case pointée par la flèche contient un chiffre strictement supérieur aux chiffres des cases voisines (en haut, en bas, à gauche, à droite) de la case contenant la flèche.

Illustration:
On a $a > b, c, d$ *dans cette situation.*

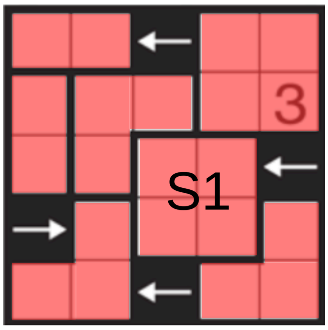
	b	
a	←	**c**
	d	

3) Deux cellules voisines ne peuvent pas contenir le même chiffre, même si elles ne sont pas dans la même salle:

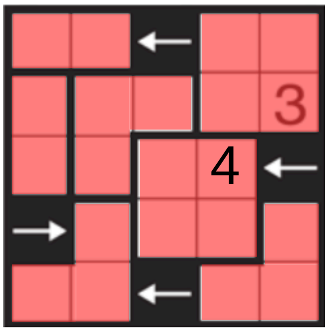
Illustration :
Ici $a \neq b, c$
$b \neq a, d$
$c \neq a, d$
et $d \neq b, c$

a	**b**
c	**d**

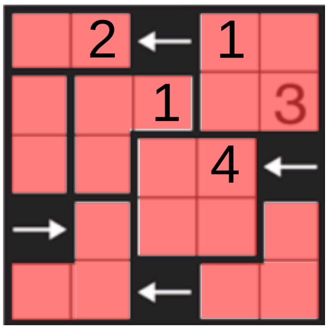
Mise en situation



Dans cette configuration initiale, on a une case contenant 3 pour débuter le jeu (5, 2).
Les salles sont représentées en rouge.
Par exemple, la salle S1 contient 4 cases qui devront contenir les chiffres de 1 à 4.



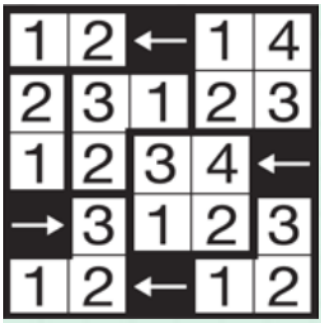
On ajoute 4 dans la case (4, 3) car elle est pointée par une flèche, et l'une des cases voisines de cette flèche contient 3. Donc la case pointée contient un chiffre supérieur strictement à 3, or la salle est de taille 4. Donc forcément il faut mettre 4.



Comme la case (2, 1) est pointée par une flèche, forcément elle contient un chiffre supérieur à 1, et comme elle se trouve dans une salle de taille 2, alors forcément on remplit cette case avec 2.

On peut aussi remplir les deux cases (3, 2) et (4, 1) avec des 1 car elles doivent contenir un nombre strictement inférieur à celui de la case (2, 1) c'est à dire inférieur à 2, donc 1.

En suivant cette logique, on arrive au résultat final :



II - Traduction du problème en logique

Notations

- n le nombre de lignes/colonnes
- $D = \{1, ..., n\}$

- $x_{k,i,j} \in \{0, 1\}$: La case (i,j) contient l'entier k

- S: l'ensemble des salles
- $C(s)$: L'ensemble des cellules de la salle s
- S(i, j) la salle associée à la cellule de coordonnées (i, j)

- F: L'ensemble des cases contenant des flèches
- $P(f) \in D \times D$: La case pointée par la flèche f
- $V(f)$: L'ensemble des voisins de la flèche f (sans la case pointée par f)

Traduction en logique

On modélise d'abord chaque règle avec la logique du premier ordre, puis on convertira ceci en logique propositionnelle sous forme de forme normale conjonctive.

1) Chaque cellule est différente de ses voisines
   $\forall (i, j) \in D \times D, \forall k \in \{1, ..., |C(S(i, j))|\},$
   $x_{k,i,j} \Rightarrow \left(\neg x_{k,\, i+1,\, j} \wedge \neg x_{k,\, i,\, j+1} \wedge \neg x_{k,\, i,\, j-1} \wedge \neg x_{k,\, i-1,\, j}\right)$
   (pour chaque valeur possible de la case, on vérifie que si la case contient cette valeur, alors les cases voisines ne la contiennent pas)

2) Chaque salle contient chaque nombre de 1 jusqu'à la taille de la salle
$\forall s \in S,\ \forall k \in \{1, ..., |C(s)|\}$

i) $\forall(i,\ j) \in C(s),\ x_{1,\,i,\,j} \vee ... \vee x_{|C(s)|,\,i,\,j}$
(pour chaque valeur possible, au moins une case de la salle contient cette valeur)

ii) $\forall((i_1,\ j_1) \neq (i_2,\ j_2)) \in C(s)^2,\ x_{k,\,i_1,j_1} \Rightarrow \neg x_{k,i_2,j_2}$ (unicité)

3) Le nombre pointé par chaque flèche est strictement plus grand que chacun des voisins de la flèche.
On remarque que si une case est pointée par une flèche, sa valeur vaut au moins 2 (car il y aura toujours des cases voisines de la flèche, qui valent au moins 1).
Donc :

$\forall f \in F\ avec\ (i\ ,\ j) = P(f),\ \forall(i',\ j') \in V(f),\ \forall k \in \{2,\ ...,\ |C(S(i,\ j)|\}$
$x_{k,\,i,\,j} \Rightarrow \left(x_{1,\,i',\,j'} \vee x_{2,\,i',\,j'} \vee ... \vee x_{k-1,\,i',\,j'}\right)$

Transformation en forme normale conjonctive

1) $\forall(i,\ j) \in D \times D,\ \forall k \in \{1,\ ...,\ |C(S(i,\ j))|\},$
$x_{k,i,j} \Rightarrow \left(\neg x_{k,\,i+1,\,j} \wedge \neg x_{k,\,i,\,j+1} \wedge \neg x_{k,\,i,\,j-1} \wedge \neg x_{k,\,i-1,\,j}\right)$
$\equiv \neg x_{k,i,j} \vee (\neg x_{k,\,i+1,\,j} \wedge \neg x_{k,\,i,\,j+1} \wedge \neg x_{k,\,i,\,j-1} \wedge \neg x_{k,\,i-1,\,j})$
$\equiv (\neg x_{k,i,j} \vee \neg x_{k,\,i+1,\,j}) \wedge (\neg x_{k,i,j} \vee \neg x_{k,\,i,\,j+1}) \wedge (\neg x_{k,i,j} \vee \neg x_{k,\,i,\,j-1}) \wedge (\neg x_{k,i,j} \vee \neg x_{k,\,i-1,\,j})$

Ce qui donne l'ensemble de clauses suivant :
$H_1 = \left\{\overline{x_{k,i,j}} + \overline{x_{k,\,i+1,\,j}},\ \overline{x_{k,i,j}} + \overline{x_{k,\,i,\,j+1}},\ \overline{x_{k,i,j}} + \overline{x_{k,\,i,\,j-1,}},\ \overline{x_{k,i,j}} + \overline{x_{k,\,i-1,\,j}}\right\}$

2) $\forall s \in S$
i) $\forall(i,\ j) \in C(s),\ x_{1,\,i,\,j} \vee ... \vee x_{|C(s)|,\,i,\,j}$ est déjà en FNC
ii) $\forall((i_1,\ j_1) \neq (i_2,\ j_2)) \in C(s)^2,$
$\forall k \in \{1,\ ...,\ |C(s)|\},\ x_{k,\,i_1,j_1} \Rightarrow \neg x_{k,i_2,j_2}$ (unicité)
$\equiv \left(x_{1,\,i_1,j_1} \Rightarrow \neg x_{1,i_2,j_2}\right) \wedge ... \wedge \left(x_{|C(s)|,\,i_1,j_1} \Rightarrow \neg x_{|C(s|,i_2,j_2}\right)$
$\equiv \left(\neg x_{1,\,i_1,j_1} \vee \neg x_{1,i_2,j_2}\right) \wedge ... \wedge \left(\neg x_{|C(s)|,\,i_1,j_1} \vee \neg x_{|C(s|,i_2,j_2}\right)$

Donc en ensemble de clauses :
$H_2 = \left\{x_{1,\,i,\,j} + ... + x_{|C(s)|,\,i,\,j}\right\}$
$H_2' = \left\{\overline{x_{1,\,i_1,j_1}} + \overline{x_{1,i_2,j_2}},\ ...,\ \overline{x_{|C(s)|,\,i_1,j_1}} + \overline{x_{|C(s|,i_2,j_2}}\right\}$

3) $\forall f \in F \, avec \, (i, j) = P(f), \forall (i', j') \in V(f), \forall k \in \{2, ..., |C(S(i, j)|\}$
$x_{k, i, j} \Rightarrow \left(x_{1, i', j'} \vee x_{2, i', j'} \vee ... x_{k-1, i', j'}\right)$
$\equiv \neg x_{k, i, j} \vee \left(x_{1, i', j'} \vee x_{2, i', j'} \vee ... \vee x_{k-1, i', j'}\right)$

Donc on a $H_3 = \left\{\overline{x_{k, i, j}} + x_{1, i', j'} + ... + x_{k-1, i', j'}\right\}$

Remarque : On peut facilement remplacer les ∀ en utilisant des conjonctions sur chaque entier, ou chaque coordonnée, mais par souci de clarté, on laisse certains quantificateurs.