**Métodos Numéricos**
**Exercícios**

# Cadeias de Markov

1. Uma sorveteria da cidade faz uma pesquisa com seus clientes, que devem responder com Sim ou Não a esta pergunta:

   *O nosso sorvete de chocolate é melhor do que o das outras sorveterias?*

   Depois de coletarem muitas respostas, eles guardaram os dados e repetiram a pesquisa um mês depois. Para as pessoas que responderam nas duas vezes, surgiu a tabela abaixo:

   | | | Segunda resposta | |
   |---|---|---|---|
   | Primeira resposta | | Sim | Não |
   | | Sim | 70% | 30% |
   | | Não | 60% | 40% |

   Então, supondo que as pessoas sempre mudem de opinião de acordo com a tabela, quantos dos 1000 clientes da sorveteria acharão que o sorvete de chocolate é o melhor depois da sua quarta visita? E a longo prazo, com um número ilimitado de visitas?

2. Em um país imaginário existem três times de futebol: Trêmio, Intencional e Cassis. De acordo com os resultados dos jogos, no final do ano os torcedores podem trocar de time em busca de um time mais do seu agrado:

   (a) De Trêmio para Intencional com 12% de probabilidade;
   (b) De Intencional para Cassis com 8% de probabilidade;
   (c) De Cassis para Trêmio com 11% de probabilidade;
   (d) De Intencional para Trêmio com 7% de probabilidade;
   (e) De Cassis para Intencional com 9% de probabilidade;
   (f) De Trêmio para Cassis com 10% de probabilidade;

   Se no ano 0 o time do Trêmio tinha 10000 torcedores, o Cassis tinha 6000 e o Intencional tinha 11000, calcule quantos torcedores terá cada time ano a ano, até que as torcidas estabilizem.

3. Um lobo guará costuma caçar seu almoço em uma de três regiões diferentes. Se hoje ele caça em uma região, amanhã ele tem 50% de probabilidade de repetir esta região. Se ele caça na região A, amanhã ele não caça em B. Se ele caça em B (ou em C), no dia seguinte ele escolhe uma das outras duas regiões, escolhendo cada uma com probabilidade de 50%. Com estas informações, cumpra as etapas abaixo:

   (a) Apresente a matriz de transições;
   (b) Se na segunda feira ele caça em A, qual a probabilidade dele estar caçando em C na quarta feira?
   (c) À medida que o tempo passar, em que percentagem das vezes ele estará caçando em B?

4. Em um país existem Ricos, Médios e Pobres. Depois de muito estudo chegou-se à conclusão de que a mobilidade social segue estas regras:

   (a) Das crianças Ricas, 70% permanecem Ricas enquanto 20% delas passam a ser Médias e 10% passam a ser Pobres;

(b) Das crianças Médias, 70% permanecem Médias enquanto o resto é dividido igualmente entre Ricos e Pobres.

(c) Para as crianças Pobres, 60% permanecem Pobres enquanto 30% tornam-se Médias e 10% passam a Ricas.

Agora cumpra as tarefas a seguir:

(a) Apresente a matriz de transições;

(b) Determine a probabilidade de uma pessoa Pobre ter netos Ricos.

(c) E se forem bisnetos, qual a probabilidade?

(d) Determine a proporção esperada de Ricos, Médios e Pobres, a longo prazo;

(e) Devido a uma ação de redistribuição de renda do governo, o comportmento para as crianças Pobres se altera: agora 50% permanecem Pobres enquanto 40% tornam-se Médias e 10% passam a Ricas. Determine a proporção esperada de Ricos, Médios e Pobres, a longo prazo.

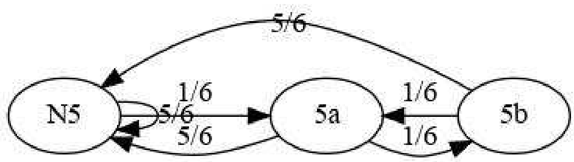
5. Guilherme e Christian jogam um jogo de dados de acordo com as seguintes regras:

   (a) Guilherme vence o jogo se tirar um 5 e na próxima jogada tirar outro 5;

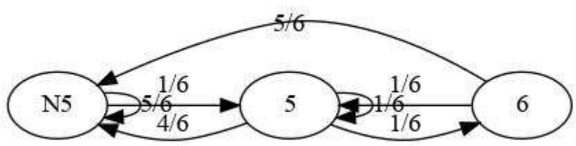
   (b) Christian vence o jogo se tirar um 5 e na próxima jogada tirar um 6.

   Depois de pensar um pouco, você faz o diagrama abaixo para cada um dos jogadores, onde N5 significa "não é 5":

   Guilherme precisa chegar ao seu primeiro 5 e depois ao segundo 5, quando vencerá o jogo.




   Christian precisa chegar ao seu primeiro 5 e depois ao 6, quando vencerá o jogo.




   Agora use os diagramas acima para calcular a probabilidade de cada um dos jogadores vencer o jogo.

6. Quando as letras de A a F forem colocadas em fila, pode-se saltar de uma letra para suas vizinhas com probabilidades iguais (uma vizinha: 100%, duas vizinhas: 50% para cada uma). Modele o problema como uma cadeia de Markov e mostre a matriz correspondente;

7. Use a matriz anterior para descobrir a distribuição de probabilidades de visitar as letras à medida que o número de saltos aumenta e ache a letra que será mais visitada;

8. Altere a matriz para refletir uma nova situação: se estivermos em uma vogal também temos uma probabilidade de 2% de pular para uma letra duas posições adiante (isto deve ser descontado das probabilidades já existentes!).

9. Calcule a distribuição de probabilidades para esta nova situação e verifique se a letra mais visitada se altera.