Métodos Numéricos
Lista geral de exercícios
Prof. João B. Oliveira

Sistemas de ponto flutuante

1. Examine o algoritmo abaixo e responda as perguntas a seguir:

```
double aux = 1.0;
while 1 + aux > 1 {
    print aux;
    aux = aux / 2;
}
```

   (a) O algoritmo termina? Por que?

   (b) O que significa o valor impresso na última linha do algoritmo (se um dia ele terminar?)

   (c) Teste o algoritmo na sua linguagem de programação preferida e verifique se ele termina e qual o valor impresso. Se desejar, adicione um contador para informar quantas vezes `aux` foi dividido dentro do laço. Esse valor é interessante?

2. Você deve implementar um programa que cumpra as seguintes tarefas:

   (a) Ele recebe uma expressão no formato

$$val_1 \ op \ val_2$$

   onde *op* é uma operação $(+,-,*,/)$ e val_1 e val_2 são dois valores em ponto flutuante, NaN ou $\pm\infty$. Os valores são armazenados em variáveis float de 32 bits.

   (b) Depois de receber a expressão seu programa deve limpar o registrador de exceções de ponto flutuante;

   (c) Depois ele deve realizar a operação *op* e mostrar o resultado dela;

   (d) Seu programa também deve mostrar a configuração de bits das duas entradas e do resultado. Tome cuidado com a *endianness* do seu processador para que a saída seja apresentada corretamente;

   (e) Seu programa também deve informar se alguma exceção do padrão IEEE-754 foi sinalizada quando a operação foi feita. Use o registrador de status e não tente prever você mesmo quais vão ser as exceções!

   Por exemplo, seu programa poderia funcionar assim:

```
> calculeitor   21  /  -0

    Recebi 21.000000 / -0.000000 e resultado deu -inf

    val1 = 0 10000011 01010000000000000000000 = 21
    val2 = 1 00000000 00000000000000000000000 = -0
    res  = 1 11111111 00000000000000000000000 = -inf

    Exceção FE_INEXACT: 0
    Exceção FE_DIVBYZERO: 1
```

```
Exceção FE_UNDERFLOW: 0
Exceção FE_OVERFLOW: 0
Exceção FE_INVALID: 0
```

Teste seu programa com operações diferentes, como $0/0$, $10^{35}*10^{35}$, $1/\infty$, $0*\infty$, $10^{-40}/10^{-40}$ e outras.

3. Usando software para plotagem de funções, plote a função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

na região em torno de $x = 1$. Tente por exemplo $x = [0.99, 1.01]$. Depois tente plotar a função em intervalos ainda menores em torno de 1. Explique o que começa a acontecer quando você fizer o gráfico perto de $x = [0.999975, 1.000025]$ e intervalos ainda menores. Depois repita a aventura com

$$g(x) = x^3$$

e veja se o problema acontece da mesma forma.

4. Você resolveu calcular $\exp(x)$ através da série dada por

$$\text{meuexp}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Você calcula $\text{meuexp}(x)$ para alguns valores de x e tudo sai bem. Infelizmente, ao tentar calcular $\text{meuexp}(x)$ para x negativo as coisas começam a sair errado. Tente entender o que está acontecendo cumprindo as seguintes etapas:

(a) Plote $\text{meuexp}(x)$ e a função $\exp(x)$ no intervalo $x = [1, 5]$. Adicione mais termos à série se achar necessário. Veja se as duas funções são razoavelmente próximas.

(b) Agora tente os números negativos: plote as mesmas funções para $x = [-5, -1]$. Interprete o que você está vendo. Era para ser assim? Tem problema? Qual o problema?

(c) Teste esta idéia de última hora: para tentar resolver o problema quando x for negativo, você pode experimentar calcular $\text{meuexp}(x)$ como se fosse $1/\text{meuexp}(-x)$ e ver o que acontece. Teste esta idéia e verifique se ela tem um comportamento melhor.

Resolução de equações

1. Plote as funções $f(x)$ e $g(x)$ abaixo para x bem próximo de zero. Porém, **antes** de fazer isso vá para o papel (ou use seu software predileto) e divida $f(x)$ por $g(x)$, confirmando que $f(x)/g(x) = 1$. Ou seja, estas duas funcões são **idênticas** e devem dar sempre os mesmos resultados, independente de x. Plote e confirme se isso acontece. Se não acontecer, determine qual a função que foi desenhada corretamente e qual o problema da função que dá resultados incorretos.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+1} - 1 \\ g(x) &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} \end{aligned}$$

2. Seu sistema de plotagem de funções tem um *bug* e só consegue plotar funções para x variando entre -1 e 1. Com esta restrição, você quer achar as quatro soluções reais de $f(x) = 0$ para

$$f(x) = 8x^4 - 238x^3 + 1047x^2 - 953x + 154$$

Se você não pode olhar para a função fora do intervalo $[-1, 1]$, descubra como plotar $f(1/x)$ pode ajudar a resolver o problema.

3. Implemente o método de Heron para encontrar a raiz quadrada de um número p.

4. Crie um polinômio que tem 2, 3 e 4 como raizes. Depois disso use o método da bissecção para encontrar uma raiz no intervalo [1, 5]. Ele encontra raizes? Uma delas? Todas? Quais? Sempre?

5. Agora crie um polinômio que tem 2, 3, 4 e 5 como raizes e procure uma raiz no intervalo [1, 6]. O que aconteceu? Você pode adaptar seu algoritmo para se ajustar a esta situação?

6. Se você tem um polinômio dado por $p(x) = x^5 + 18x^3 + 34x^2 - 493x + 1431$, analise o algoritmo abaixo e determine o que significam os valores que ele irá imprimir. Implemente-o em sua linguagem preferida e teste-o para vários valores de `x`, se for necessário.

```
void metodo( double x ) :
  double a[] = {1, 0, 18, 34, -493, 1431};
  double p = 0;
  para i = 0 a tamanho(a)-1 faça
    p = x * p + a[i];
  imprima x, p;
```

7. Use o pedaço de código do problema 6 para implementar o método da secante para encontrar as raizes reais do polinômio. Talvez você deva começar perguntando quantas raizes reais podem existir.

8. O algoritmo do problema 6 foi mudado misteriosamente. Analise o novo algoritmo e determine o que significam os valores que ele irá imprimir. Implemente-o em sua linguagem preferida e teste-o para vários valores de `x`, se for necessário.

```
void metodo( double x ) :
  double a[] = {1, 0, 18, 34, -493, 1431};
  double p = 0;
  double q = 0;
  para i = 0 a tamanho(a)-1 faça
      q = x * q + p;
      p = x * p + a[i];
  imprima x, p, q;
```

9. Adapte o algoritmo apresentado no problema 8 para criar um algoritmo que usa o método de Newton para encontrar uma solução do polinômio dado naquele problema. Use este roteiro:

   (a) Calcule a cota de Lagrange para $p(x)$;

   (b) Calcule a cota de Cauchy para $p(x)$;

   (c) Decida pela a melhor cota;

   (d) Use a informação da cota para ter alguma estimativa inicial e teste seu algoritmo para achar raizes.

   (e) Se sua linguagem preferida tem uma classe para números complexos, use-os para implementar o método de Newton usando números complexos para tentar encontrar todas as raizes do polinômio. Por que "tentar"?

10. Leia o que tem em `https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_long_division` e veja se você reconhece isso da escola. Depois pense nisso:

   (a) Temos um polinômio $p(x)$ para encontrar as raizes;

(b) Usamos o método de Newton e encontramos uma raiz;

(c) Usamos o processo descrito no link para obter um polinômio $p'(x)$ que tem as mesmas raizes de $p(x)$, exceto a que já encontramos;

(d) Continuamos o processo usando $p'(x)$ como novo polinômio e achamos mais uma raiz.

O plano é ir achando as raizes de $p(x)$ de uma em uma, gerando novos polinômios que tem apenas as raizes que ainda não encontramos, sem as que já foram encontradas. Você resolve fazer um teste:

- Comece com o polinômio $p(x) = x^5 - 20x^4 + 155x^3 - 580x^2 + 1044x - 720$. As raízes dele são 2, 3, 4, 5 e 6.
- Implemente o algoritmo de divisão de polinômios.
- Ache uma das raizes de $p(x)$ usando seu método preferido.
- Crie um novo polinômio $p'(x)$ que não tem mais a raiz que você achou.
- Ache mais uma raiz usando $p'(x)$ e produza $p''(x)$, e assim por diante.

Você achou problemas neste plano? Se existirem, você propõe maneiras de contorná-los?

Sistemas lineares

1. Um parquinho tem 4 brinquedos para as crianças, chamados de A, B, C e D. Você sabe isto sobre o parque:

   (a) O brinquedo A fica bem perto do portão principal por onde chegam 20 pessoas por hora.

   (b) O brinquedo C fica perto de um portão secundário por onde chegam 10 pessoas por hora.

   (c) As pessoas sempre vão primeiro para o brinquedo mais perto do portão por onde entraram;

   (d) Depois deste brinquedo, metade das pessoas quer ir para o brinquedo B e o resto se divide em três partes: uma parte vai embora e cada uma das outras partes vai para um dos outros dois brinquedos do parque;

   (e) Depois de brincar em B ou D as pessoas se dividem igualmente entre A, C e D.

   Com estas informações, calcule quantas pessoas vão brincar em cada um dos 4 brinquedos.

2. Use o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema abaixo partindo da estimativa inicial $[1, 1, 1, 1]$. Você pode fazer à mão (vai demorar um pouco) ou escrever um programa

$$\begin{bmatrix} -8x & +2y & +4z & +5w & = & 7 \\ -x & -4y & +3z & +w & = & 10 \\ 3x & +y & +2z & -w & = & 4 \\ -2x & -3y & -z & +3w & = & -3 \end{bmatrix}$$

   Agora resolva usando Gauss-Seidel e veja como a resposta é encontrada mais depressa.

3. Você gostaria de encontrar o polinômio de terceiro grau que passa pelos quatro pontos $(-1, -3)$, $(0, -1)$, $(1, 2)$ e $(2, -2)$. Use um sistema linear para resolver o problema.

4. Um amigo químico pede a sua ajuda: ele está analisando um composto X e acha que ele pode ser constituído de 4 substâncias (A, B, C e D), cada uma por sua vez constituída de vários componentes (a, b, $c\ldots$), mas ele não sabe em que proporção as substâncias foram misturadas. Ao passar uma amostra por um cromatógrafo, ele descobre a proporção dos componentes em X :

	Proporção				
Componente	em X	em A	em B	em C	em D
a	26%	15%	36%	20%	31%
b	19%	28%	11%	15%	22%
c	31%	27%	36%	33%	24%
d	24%	30%	17%	32%	23%

Usando estas informações, determine como as substâncias A, B, C e D foram misturadas para que seja obtida a substância X.

5. Esta é uma versão do exercício 4 que é mais próxima da vida real. O composto X pode ser constituído de 4 substâncias (A, B, C e D), cada uma por sua vez constituída de vários componentes (a, b, $c\ldots$), mas desta vez os exames mostram que existem outras substâncias ainda desconhecidas em X. Por isso, a composição de X na tabela não soma 100% e as percentagens que faltam são outros componentes ainda não identificados ou considerados pouco importantes:

	Proporção				
Componente	em X	em A	em B	em C	em D
a	24.3%	15%	36%	20%	31%
b	15%	28%	11%	15%	22%
c	26.2%	27%	36%	33%	24%
d	21.5%	30%	17%	32%	23%

Usando estas informações, determine mais uma vez como A, B, C e D foram misturadas para que seja obtida a substância X. Interprete sua resposta com cuidado.

6. Esta é mais uma versão do exercício 4 ainda mais próxima da vida real. Agora o composto X pode ser constituído de 4 substâncias (A, B, C e D), cada uma por sua vez constituída de vários componentes (a, b, $c\ldots$), mas desta vez os exames mostram que existem outras substâncias ainda desconhecidas também em A, B, C e D. Por isso, os números da tabela abaixo não somam 100% e as percentagens que faltam são outros componentes ainda não identificados ou considerados pouco importantes:

	Proporção				
Componente	em X	em A	em B	em C	em D
a	8%	5%	6%	11%	17%
b	7%	8%	11%	5%	6%
c	12%	7%	16%	13%	14%
d	12%	11%	12%	14%	2%

Usando estas informações, determine mais uma vez como A, B, C e D foram misturadas para que seja obtida a substância X. Interprete sua resposta com cuidado.

Cadeias de Markov

1. Uma sorveteria da cidade faz uma pesquisa com seus clientes, que devem responder com Sim ou Não a esta pergunta:

   O nosso sorvete de chocolate é melhor do que o das outras sorveterias?

   Depois de coletarem muitas respostas, eles guardaram os dados e repetiram a pesquisa um mês depois. Para as pessoas que responderam nas duas vezes, surgiu a tabela abaixo:

Primeira resposta	Segunda resposta	
	Sim	Não
Sim	70%	30%
Não	60%	40%

   Então, supondo que as pessoas sempre mudem de opinião de acordo com a tabela, quantos dos 1000 clientes da sorveteria acharão que o sorvete de chocolate é o melhor depois da sua quarta visita? E a longo prazo, com um número ilimitado de visitas?

2. Em um país imaginário existem três times de futebol: Trêmio, Intencional e Cassis. De acordo com os resultados dos jogos, no final do ano os torcedores podem trocar de time em busca de um time mais do seu agrado:

   (a) De Trêmio para Intencional com 12% de probabilidade;
   (b) De Intencional para Cassis com 8% de probabilidade;
   (c) De Cassis para Trêmio com 11% de probabilidade;
   (d) De Intencional para Trêmio com 7% de probabilidade;
   (e) De Cassis para Intencional com 9% de probabilidade;
   (f) De Trêmio para Cassis com 10% de probabilidade;

   Se no ano 0 o time do Trêmio tinha 10000 torcedores, o Cassis tinha 6000 e o Intencional tinha 11000, calcule quantos torcedores terá cada time ano a ano, até que as torcidas estabilizem.

3. Um lobo guará costuma caçar seu almoço em uma de três regiões diferentes. Se hoje ele caça em uma região, amanhã ele tem 50% de probabilidade de repetir esta região. Se ele caça na região A, amanhã ele não caça em B. Se ele caça em B (ou em C), no dia seguinte ele escolhe uma das outras duas regiões, escolhendo cada uma com probabilidade de 50%. Com estas informações, cumpra as etapas abaixo:

   (a) Apresente a matriz de transições;

   (b) Se na segunda feira ele caça em A, qual a probabilidade dele estar caçando em C na quarta feira?
   (c) À medida que o tempo passar, em que percentagem das vezes ele estará caçando em B?

4. Em um país existem Ricos, Médios e Pobres. Depois de muito estudo chegou-se à conclusão de que a mobilidade social segue estas regras:

   (a) Das crianças Ricas, 70% permanecem Ricas enquanto 20% delas passam a ser Médias e 10% passam a ser Pobres;

(b) Das crianças Médias, 70% permanecem Médias enquanto o resto é dividido igualmente entre Ricos e Pobres.

(c) Para as crianças Pobres, 60% permanecem Pobres enquanto 30% tornam-se Médias e 10% passam a Ricas.

Agora cumpra as tarefas a seguir:

(a) Apresente a matriz de transições;

(b) Determine a probabilidade de uma pessoa Pobre ter netos Ricos.

(c) E se forem bisnetos, qual a probabilidade?

(d) Determine a proporção esperada de Ricos, Médios e Pobres, a longo prazo;

(e) Devido a uma ação de redistribuição de renda do governo, o comportmento para as crianças Pobres se altera: agora 50% permanecem Pobres enquanto 40% tornam-se Médias e 10% passam a Ricas. Determine a proporção esperada de Ricos, Médios e Pobres, a longo prazo.

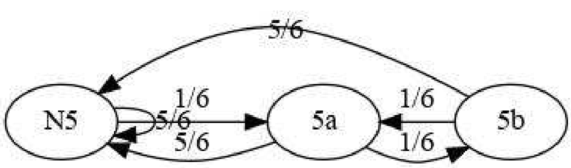
5. Guilherme e Christian jogam um jogo de dados de acordo com as seguintes regras:

(a) Guilherme vence o jogo se tirar um 5 e na próxima jogada tirar outro 5;

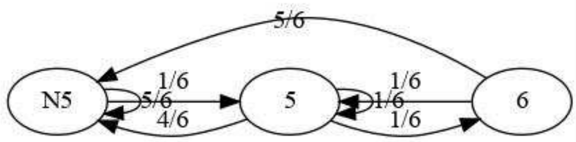
(b) Christian vence o jogo se tirar um 5 e na próxima jogada tirar um 6.

Depois de pensar um pouco, você faz o diagrama abaixo para cada um dos jogadores, onde N5 significa "não é 5":

Guilherme precisa chegar ao seu primeiro 5 e depois ao segundo 5, quando vencerá o jogo.



Christian precisa chegar ao seu primeiro 5 e depois ao 6, quando vencerá o jogo.



Agora use os diagramas acima para calcular a probabilidade de cada um dos jogadores vencer o jogo.

6. Quando as letras de A a F forem colocadas em fila, pode-se saltar de uma letra para suas vizinhas com probabilidades iguais (uma vizinha: 100%, duas vizinhas: 50% para cada uma). Modele o problema como uma cadeia de Markov e mostre a matriz correspondente;

7. Use a matriz anterior para descobrir a distribuição de probabilidades de visitar as letras à medida que o número de saltos aumenta e ache a letra que será mais visitada;

8. Altere a matriz para refletir uma nova situação: se estivermos em uma vogal também temos uma probabilidade de 2% de pular para uma letra duas posições adiante (isto deve ser descontado das probabilidades já existentes!).

9. Calcule a distribuição de probabilidades para esta nova situação e verifique se a letra mais visitada se altera.

1 Interpolação

1. Existe somente uma parábola $p(x)$ que passa nos pontos $(2,3)$, $(3,5)$ e $(5,7)$. Encontre-a e depois encontre os pontos x^* em que $p(x^*) = 0$.

2. Três cientistas estão analisando dados e querem usar interpolação de Newton para achar o polinômio de menor grau que passa por alguns pontos. Para ter certeza da análise eles estão trabalhando separadamente e depois só vão comparar os seus polinômios. Ana organiza seus pontos da seguinte forma:

x	y			
1	2			
3	5			
5	4			
7	8			

Beto pegou seus pontos na ordem inversa:

x	y			
7	8			
5	4			
3	5			
1	2			

E finalmente Carol bagunçou suas anotações e usou os pontos assim:

x	y			
5	4			
1	2			
7	8			
3	5			

Descubra os polinômios que os três vão encontrar e determine se eles são o mesmo polinômio ou se não são. Explique o que aconteceu.

3. A tabela a seguir contém os dados sobre a produção chinesa de aço (mais especificamente o tipo de aço chamado "ferro gusa") na década de 1990. Seu desafio é experimentar a interpolação polinomial para tentar prever o futuro (ou seja, fazer extrapolação, que costuma ser mais arriscado que interpolação.

Para fazer um teste, ignore o **último** ano da tabela e use os pontos anteriores para prever a produção para o **último** ano e compare com o valor verdadeiro.

Se você confiar no resultado, pode tentar prever o valor no ano que vai vir **depois** do fim da tabela. Mais tarde procure a informação na Internet e confira com seu resultado.

Ano	Produção (em Mton)
1990	62,4
1991	67,7
1992	75,9
1993	87,4
1994	97,4
1995	105,3
1996	107,2

4. A tabela a seguir contém os dados sobre a produção brasileira de ovos em anos recentes. Ajuste os dados e preveja a produção para o ano de 2022. Lembre-se de que extrapolação é uma atividade perigosa, por isso mesmo tente encontrar o número correto no site do IBGE.

Ano	Produção (em mil dúzias)
2016	3.097.841
2017	3.313.061
2018	3.606.747
2019	3.842.136
2020	3.967.138
2021	4.012.512

5. A tabela a seguir contém os dados sobre a produção brasileira de camarão cultivado, em anos recentes. Faça de conta que não sabe o valor para o ano de 2017 e tente estimá-lo usando os outros anos como pontos de referência. Se confiar no resultado obtido, preveja a produção para o ano de 2021. Confira no IBGE

Ano	Produção (em ton)
2013	64.678
2014	65.028
2015	70.521
2016	52.127
2017	41.078
2018	47.316
2019	56.667
2020	66.561
2021	

6. Usando o método dos mínimos quadrados, faça um ajuste dos dados da tabela anterior: encontre a melhor reta que aproxima os dados e depois encontre o melhor polinômio de grau 3 que aproxima os mesmos dados.

2 Diferenciação automática

1. Use a função abaixo nas etapas a seguir:

$$f(x, y, z) = 3x^2y/z + x * (y - z)$$

   (a) Decomponha a avaliação da função $f(x, y, z)$ em passos com apenas uma operação aritmética a cada passo;

   (b) Usando a decomposição anterior, calcule $f(2, 3, 5)$.

   (c) Agora calcule as três derivadas parciais $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$ no ponto $(2, 3, 5)$. Se você preferir usar diferenciação progressiva, terá que usar um vetor. Se preferir a regressiva, será mais econômico mas precisa ter mais cuidado nas operações para não cometer erros. De qualquer maneira, confira o resultado!!

3 Sistemas dinâmicos

1. Você tem uma função $f(x)$ e também conhece a derivada dela, como por exemplo $f(x) = \cos(x)$ e portanto $df/dx = -\sin(x)$. Agora cumpra as tarefas:

(a) Se você tem $f(x)$, então pode escrever um programinha para fazer uma lista de valores de $f(x)$ para x entre 0 e 5, por exemplo. Escolha um valor Δx e avalie a função em $f(0)$, $f(\Delta x)$, $f(2\Delta x)$, $f(3\Delta x)$, ..., $f(5)$.

(b) Se você tem df/dx, então pode fazer uma aproximação para $f(x)$:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + df/dx(x) * \Delta x$$

Use o mesmo valor Δx do item anterior e avalie a função em $f(0)$, $f(\Delta x)$, $f(2\Delta x)$, $f(3\Delta x)$, ..., $f(5)$.

(c) Agora plote os dois conjuntos de resultados para ver como se comportam a função verdadeira e a aproximação.

(d) Repita o exercício com alguma outra função.

2. Você tem N_0 átomos de uma substância radioativa, mas sabe que um átomo sofre decaimento a cada τ unidades de tempo, em média. As leis da física dizem que o número de átomos $N(t)$ ao longo do tempo segue a expressão

$$N(t) = N_0 * e^{-t/\tau}.$$

Sabendo disso, escreva um programa que recebe os valores de N_0 e τ e depois calcula a quantidade de átomos a cada instante, até um tempo determinado.

Agora compare esse resultado exato com a aproximação abaixo, usando o método de Euler para aproximar os valores e compare os dois conjuntos de resultados:

$$N(t + \Delta t) \approx N(t) - \tau N(t)\Delta t.$$

3. Você tem um pêndulo de comprimento L onde está pendurado um peso qualquer. O pêndulo está oscilando com um ângulo $\theta(t)$ e uma velocidade angular $\omega(t)$ e sabemos que as funções θ e ω seguem as aproximações abaixo:

$$\begin{aligned}
\theta(t + \Delta t) &\approx \theta(t) + \Delta t * \omega(t) \\
\omega(t + \Delta t) &\approx \omega(t) - \Delta t * (g/L * \sin\theta(t))
\end{aligned}$$

onde g é a aceleração da gravidade. Escreva um programa que recebe os valores de $\theta(0)$ e $\omega(0)$, um valor para Δt e depois usa o método de Euler para calcular as posições x e y do pêndulo a cada instante, até um tempo determinado. Os valores de x e y são obtidos a partir do ângulo $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= L\sin(\theta(t)) \\
y(t) &= L * (1 - \cos(\theta(t)))
\end{aligned}$$