

# Teoria optimizării

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

→ Existența soluției:

$$\exists x^* \in \mathcal{X} \text{ s.t. } f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Exemplu:  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \text{ (compact)}$$

$$\rightarrow f \text{ continuu}$$

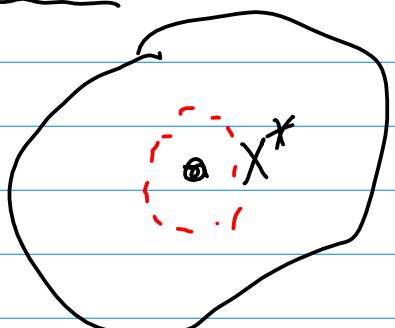
=> existență asigurată

→ margini

→ inchis

→ Condiții de optimizabilitate

$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$  este atins im



→  $x^* \in \text{int } \mathcal{X}$

→ și \$f\$ derivabilă ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ )

atunci  $\nabla f(x^*) = 0$  (sisteme n-euati)

Căriodată condiții de optimizare  
dintrumimă completă soluția!

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{pb de minimizare} \\ f \text{ este constanță} \end{array} \right\}$$

Exemplu

$$\min f(x) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{array} \right. \\ x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{constanțe} \\ \text{- egalități} \\ \text{- inegalități între variabile} \\ \text{sau funcții condinționante} \\ \text{de } x. \end{array}$$

→ Optimizare a producției de 2 produse  
(conținut:  $x, y$ )

Max Profit  
(constraintă  
producție)

$$\begin{aligned} \text{Profit} &= x \cdot (\text{Profit}_x - \text{Cost}_x) \\ &\quad + y \cdot (\text{Profit}_y - \text{Cost}_x) \end{aligned}$$

Constrângeri:  $x \geq 100$ ,  $y \geq 500$  → const producă /zi

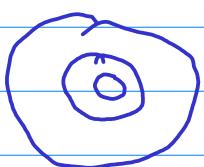
$$x \leq 100 \\ y \leq 500$$

$$x \geq 10 \\ y \geq 300$$

Optim formular

$$V(S) \geq 0$$

1.  $\min V(S)$   
Sfărnic

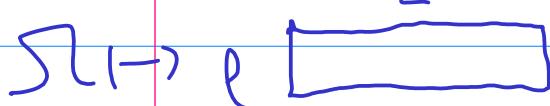


$\exists S_m$  ast.  $V(S_m) \rightarrow 0$

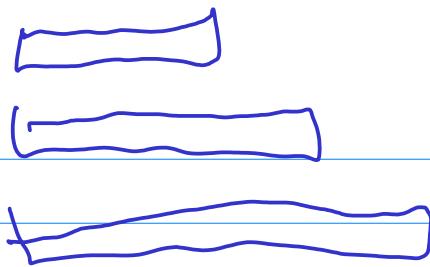
Soluții: -  $S$  un punct  
-  $S$  un segment

Soluții triviale.

2.  $\max P(S)$   
 $S$  sfărnic  $\in \mathbb{R}^2$



$$P(S) = 2L + 2l$$



$$L \rightarrow \infty \\ = \text{Per}(S) - 1 + \infty$$

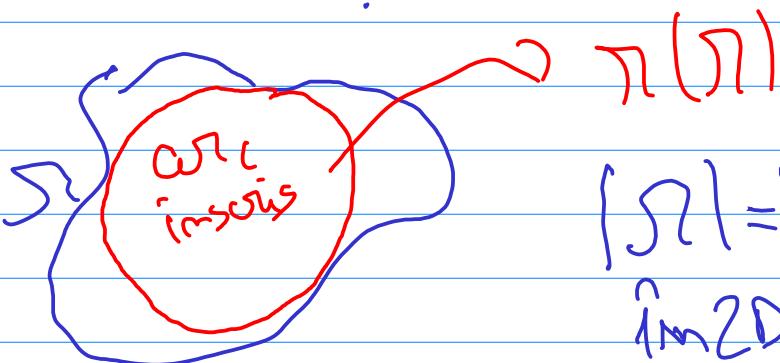
nu avem soluții

Ca constrângere:

min  $V(S)$

$$\pi(S) = 1$$

$\pi(S) \rightarrow$  Notă cercului "al mai multe"  
conținut în  $S$



$$|S| = V_G(S) = \underline{\text{volumul}} \\ \text{în 2D volumul} = \text{aria}$$

$S$  conține un cerc de raza  $\pi(S) = 1$

$$|S| \geq |C_\pi| = \pi$$

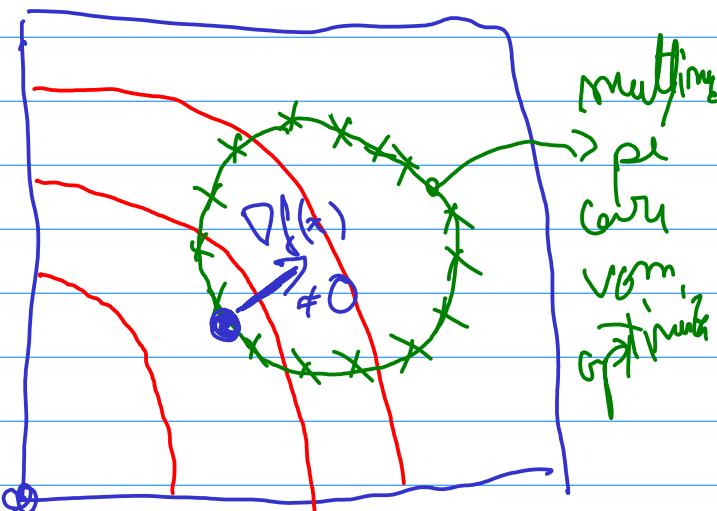
$v(\pi) \geq \bar{\pi}$   
 $\Rightarrow$  Soluția problemei este dicțială  
 de tip  $\bar{\pi} = 1$

Scop: extindem teoremele lui Fermat  
 ( $x$  min  $\Rightarrow \nabla f(x)=0$ ) și în cazul  
 constanțelor.

Exemplu:

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}$$

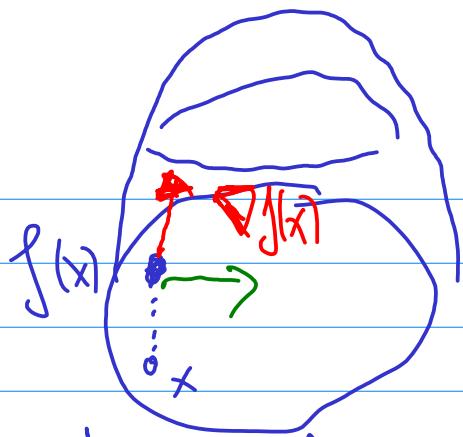


$(-, \infty)$  singurul punct de minimizare

$$\nabla f(x) = 0$$

Proprietăți ale gradientului:

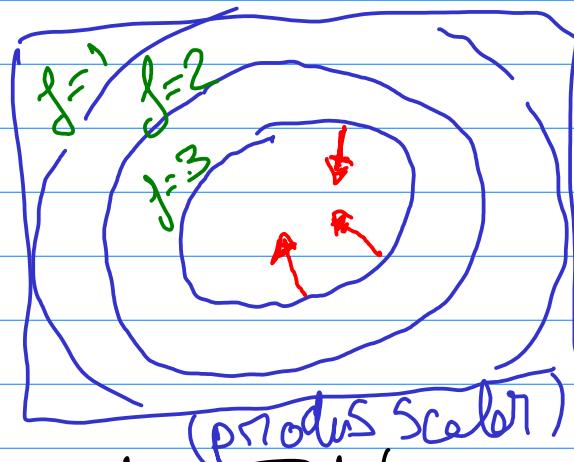
- $\nabla f(x)$  este direcția în care funcția  $f$  crește cel mai rapid în jurul lui  $x$ .  
 "dir. în care punctul locul pe grafic e cel mai"



-  $\nabla f(x)$  este ortogonal nivrelui

$$f_x = \{ y \mid f(y) = f(x) \}$$

2D



$$a - b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

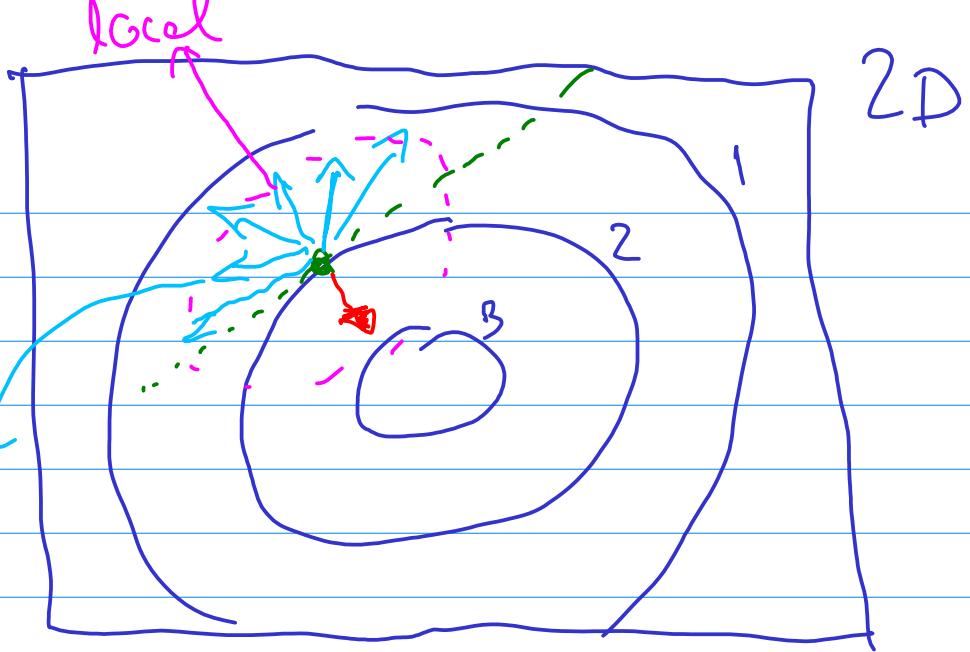
-  $d \in \mathbb{R}^m$  a:  $d \cdot \nabla f(x) < 0$

atunci valoarea lui  $f$  discuzeaza in  
direcția  $d$

$$q: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, q(t) = f(x + t \cdot d)$$

q discuzeaza pe  $[0, \varepsilon]$

$$u \cdot v = |u| |v| \cos(\pi u, v) = \begin{cases} u \cdot v & \text{if } \pi u < \frac{\pi}{2} \\ -u \cdot v & \text{if } \pi u > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



dimin  
di  
descent pt f.

Derm: formula bei Taylor:  $f \in C^1$

$$f(x+h) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot h$$

$$h = t \cdot d$$

"mic"

$$d \cdot \nabla f(x) < 0, t > 0$$

$$\Rightarrow f(x+t \cdot d) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot (t \cdot d)$$

EIR

$$\approx f(x) + t \cdot (\nabla f(x) - d)$$

$$f(x+t \cdot d) \leq f(x) \quad (t > 0 \text{ "mic"})$$

$> 0 \quad < 0$

$f, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, h \in C^1$   
 min  $f(x, y)$

$$h(x, y) = 0$$

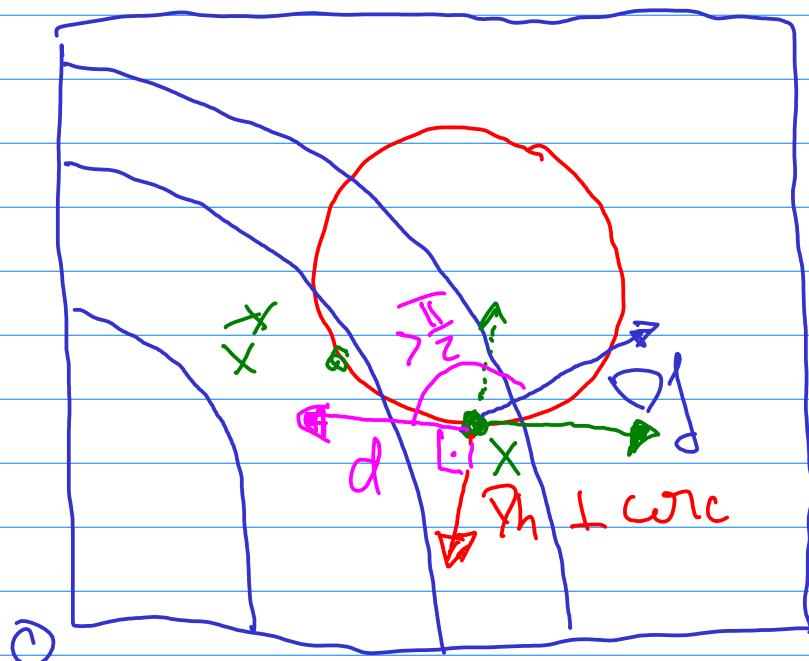
Dacă  $x^* = (x, y)$  atunci

$\nabla f(x^*)$  este colinear cu  $\nabla h(x^*)$

cond opt

$$-\mathbf{d} \cdot \nabla h = 0$$

$$-\mathbf{d} \cdot \nabla f < 0$$



Dacă mărgeam în direcția  $d$   
 - scădem valoarea lui  $f$

-  $d \cdot \nabla h = 0$  pentru să rămânem  
 constanță pe  $h=0$  dacă mărgeam  
 în dir.  $d$ .

$\Rightarrow x^*$  nu este optimul.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x) = 0 \end{aligned}$$

Să  $x^*$  este soluția optimă

- Dacă  $\{\nabla g_i(x^*)\}$  este linieă independentă

atunci  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \in \mathbb{R}$

(multiplicatori de Lagrange) a.i.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$m=1$

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0$$

$\Rightarrow$  Coliniaritatea  
gradiente

$$\min \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x+y+z=1$$

\hbar

$$f(x) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$h(x) = x + y + z - 1$$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} h=0 \\ f \text{ estl } \infty \text{ b. } \infty, f \text{ continu} \end{array} \right.$  plan im  $\mathbb{R}^3$  (nemängint)  
 $\Rightarrow$  Existenz einer lokaler minimum

$\nabla h \neq 0 \Rightarrow$  putum aplice tukerma  $x^*$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ a.t. } \nabla f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) = 0$$

(Sistem di ecuasi)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x=y=z \\ \end{array} \right\}$$

Constrangere:  $x+y+z=1$

$$x=y=z=\frac{1}{3}$$

Remark: problema posti fi Tertolveti  
flosind imo Cauchy-Schwarz

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq \left( \sum a_i b_i \right)^2$$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3 \geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} = 1$$

Egality ( $\Leftrightarrow$ )  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$

In continuu:

- problema isotropicnică
  - definitie si distorsiunea formă
  - min  $P(\gamma)$   $(2D)$   
 $|\gamma|=c$

- minim ariei sub constrainte de  
Lagrange constantă

## Problema izoperimetrică discutată

$\Omega \rightarrow$  poligon  $\rightarrow$  E2D  $x_1$   $x_2$   $x_3$

$m$  vârfuri  $\rightarrow$   $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$

aria:  $|\Omega| = f\left(\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right)$

perim  $P(\Omega) = G\left(\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right)$

Pb izop discutată: P este cota-

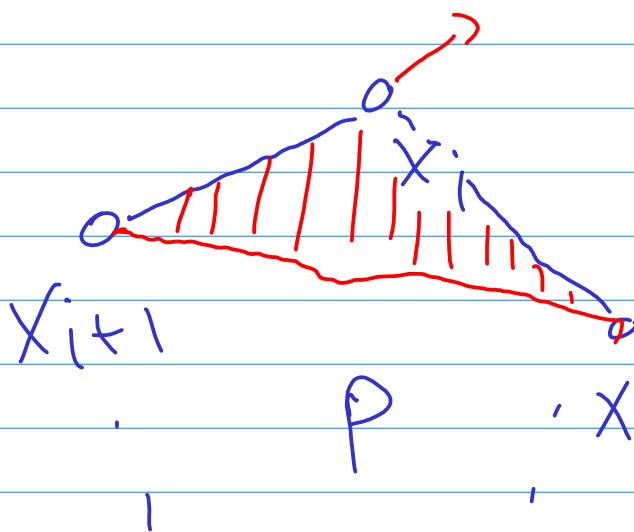
poligon cu  $m$  laturi și  $\forall i A_i > 0$

atunci Poligonul Regulat

# Necesitate problema min $P(x)$

$$|P|=A$$

- Că suministrat căruia  $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial |P|}{\partial x_i}$
- Existență: presupunem  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Aplicăm condiții optime
- Concluzionam



- Determinăm cu ajutorul schimbările de la loc/plurim  
că locul de la loc

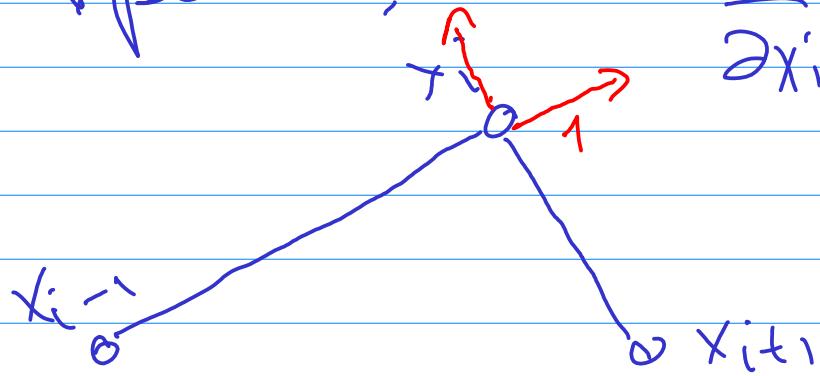


$\Delta x_{i-1} x_i x_{i+1}$   
-  $\nabla$  = direcția în care funcția crește cel mai rapid, beta fixă

$$A_{xi} = \frac{|x_{i-1} \cdot x_{i+1}| \cdot h}{2}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = |x_{i-1} \cdot x_{i+1}|$$

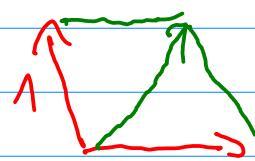
• Dperim?



$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x_i - x_{i-1}| + \frac{\partial}{\partial x_i} |x_i - x_{i+1}|$$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}$$

analog



→ diagonale = bisection

• Dperim in  $D_{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}}$   
in Rep an  $x_i$  & Colminor an  
bisectione dim  $x_i$

Tetraeder:

$$\min P_{\text{DT}}(P)$$

$$(\mathcal{P}) = f$$

$\Leftrightarrow \nabla P_{\text{Per}}, \nabla A_{\text{aria}} \text{ colinori}$

$\Rightarrow \text{in } \nabla x_{i-1} x_i x_{i+1}$

Intertimplo si bisectoare  
coincid.

$\Rightarrow \Delta \text{ isoscel} \Rightarrow |x_i x_{i-1}| = |x_i x_{i+1}|$

$\Rightarrow P$  și laturile egale.

Pt unghiuri egale folosim că

$$\nabla P + \lambda \nabla A_{\text{aria}} = 0$$

in acelasi factor pt  
fiecare unghi

$\Rightarrow$  Soluția este poligonul regulat.

Detalii: A geometric proof of  
the Polygonal isoperimetry  
B-Bogosel.