

Teoria optimizării

$$\min_{x \in A} f(x)$$

$$f \in \mathbb{R}^n$$

→ Existența soluțiilor:

$$\exists x^*_{\text{eff}} \text{ a.i. } f(x^*) = \min_{x \in A} f(x)$$

Exemplu $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$$

Compact

↗ marginită

$$\rightarrow f \text{ continuu}$$

↘ închisă

=> existența asigurată

→ Condiții de optimalitate A

$\min_{x \in A} f(x)$ este atins în



$$\rightarrow x^* \in \text{int } A$$

→ și f derivabilă
atunci $\nabla f(x^*) = 0$ ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)
(sistem de n ecuații)

Câteodată condițiile de optimalitate
determină complet soluția.

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ } pb de minimizare

Exemplu $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
 $\min f(x)$ fără constrângeri

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 - x_2 = 0 \\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

> constrângeri

- egalități

- inegalități (canta variabile
sau funcții care depind
de x .)

→ Optimizarea producției de 2 produse
în cantități x, y

\max Profit
(constrângeri
practice)

$$\text{Profit} = x \cdot (\text{Preț}_x - \text{Cost}_x) + y \cdot (\text{Preț}_y - \text{Cost}_y)$$

Constrângeri: $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \}$ cant produse / zi

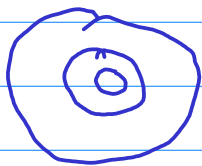
$$\begin{matrix} x \leq 100 \\ y \leq 500 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \right\} \text{limitări}$$

$$\begin{matrix} x \geq 10 \\ y \geq 300 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \right\} \text{cereri.}$$

Optim formulor

$$Val(\Omega) \geq 0$$

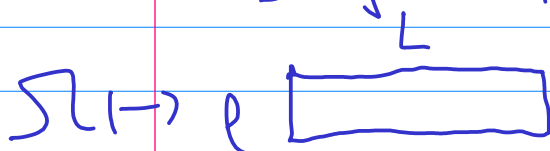
1. min $Val(\Omega)$
 Ω formă



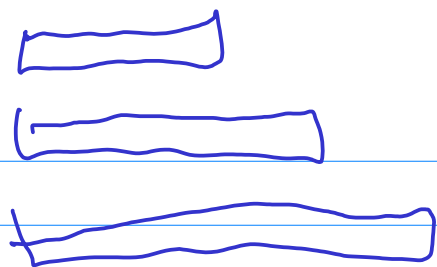
$$\exists \Omega_m \text{ a.c. } Val(\Omega_m) \rightarrow 0$$

Soluție :- Ω un punct
- Ω un segment
Soluție trivială.

2. max $Per(\Omega)$
 Ω formă $\in \mathbb{R}^2$



$$Per(\Omega) = 2L + 2l$$



$$L \rightarrow \emptyset$$

$$= |\varphi_{\Omega}(\Omega)| - 1 + \infty$$

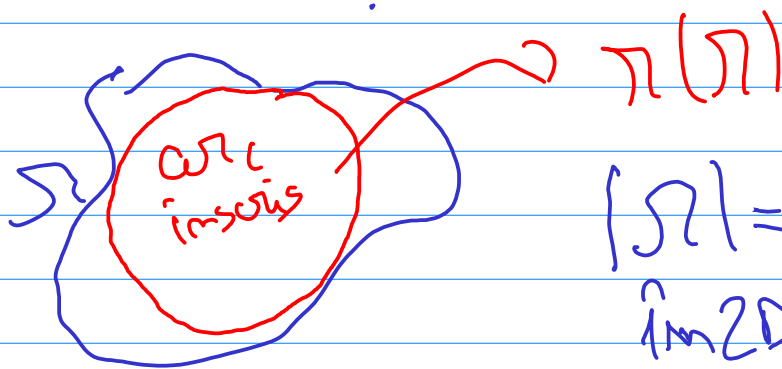
nu avem solutii

Ca constrangeri:

$$\min V(\Omega)$$

$$\pi(\Omega) = 1$$

$\pi(\Omega) \rightarrow$ Nota cercului "cel mai mare"
continut în Ω



$$|\Omega| = \text{Vol}(\Omega) = \text{"volumul"}$$

în 2D volumul = aria

Ω conține un cerc de raza $\pi(\Omega) = 1$

$$|\Omega| \geq |C_{\pi}| = \pi$$

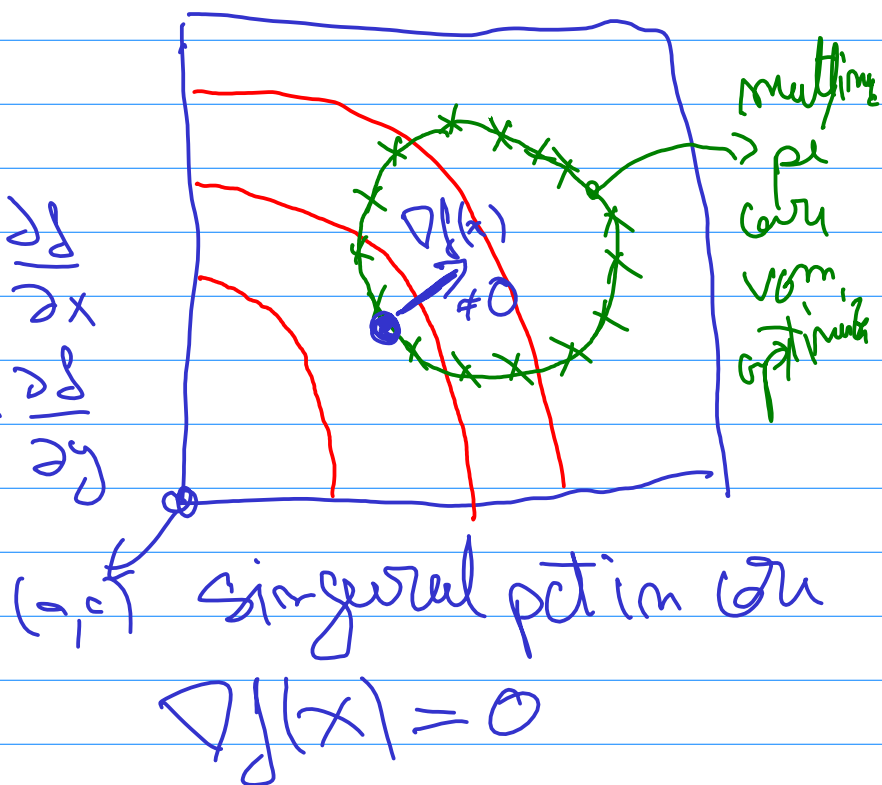
$V(\pi) \geq \pi$
 \Rightarrow soluția problemei este discul
 de rază $\pi = 1$

Scop: extindem teorema lui Fermat
 $(x \text{ min} \Rightarrow \nabla f(x) = 0)$ și în cazul
 constrăngerilor.

Exemplu:

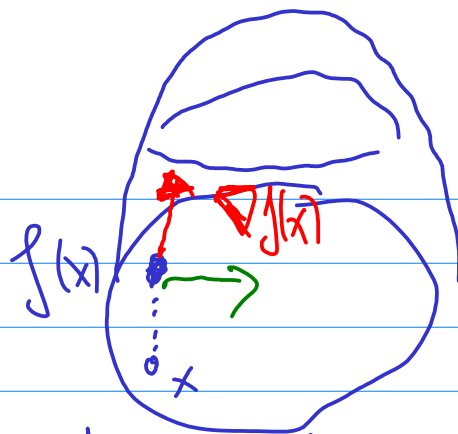
$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{matrix}$$



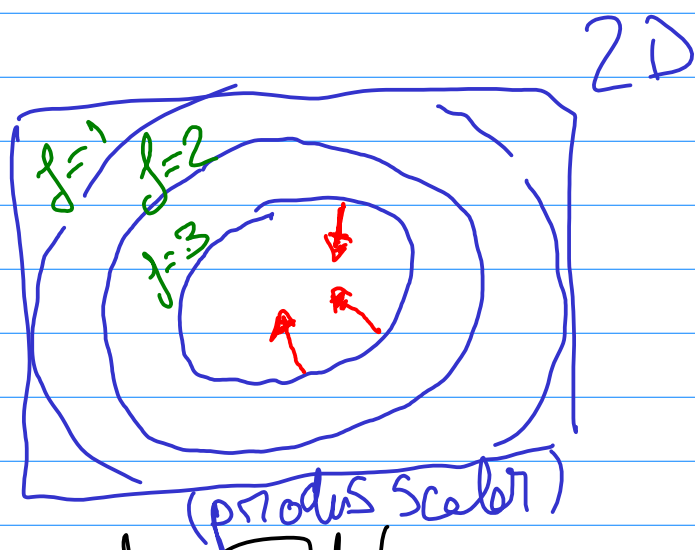
Proprietăți ale gradientului:

- $\nabla f(x)$ este direcția în care funcția f crește cel mai rapid în jurul lui x
 "dir. în care poți da un pas pe grafic & câștigi cel mai mult"



- $\nabla f(x)$ este ortogonal nivelului

$$N_x = \{y \mid f(y) = f(x)\}$$



$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

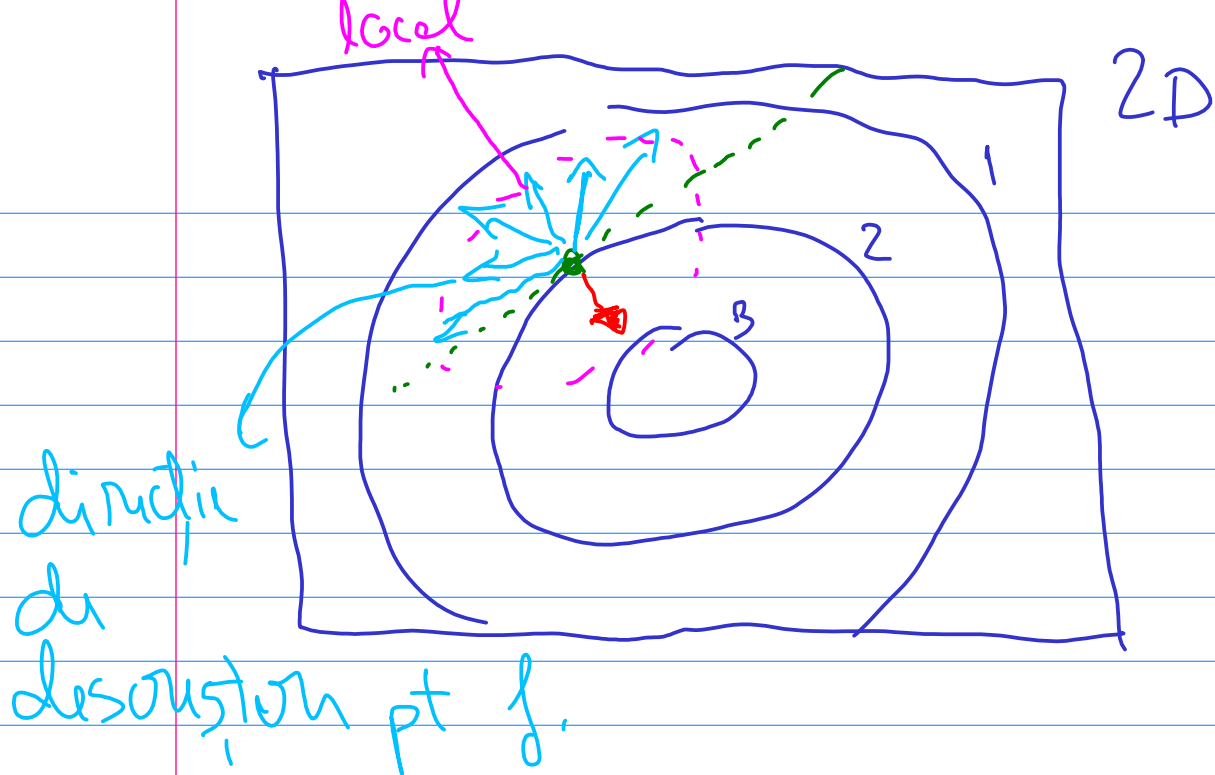
- $d \in \mathbb{R}^m$ a.i. $d \cdot \nabla f(x) < 0$

atunci valoarea lui f discrește în
direcția d (local)

$$q: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, q(t) = f(x + t \cdot d)$$

q discrește pe $[0, \varepsilon]$

$$u \cdot v = |u| |v| \cdot \cos(\angle u, v) = |u \cdot v| = \begin{cases} 0 & \text{cu } v \\ + & \angle < \frac{\pi}{2} \\ - & \angle > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Dem: formula lin Taylor: $f \in C^1$

$$f(x+h) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot h$$

$$h = t \cdot d \quad \downarrow \text{"mic"}$$

$$\underline{d \cdot \nabla f(x)} < 0, t > 0$$

$$\Rightarrow f(x + \underline{t \cdot d}) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot \underbrace{(t \cdot d)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\approx f(x) + t \cdot (\underline{\nabla f(x) \cdot d})$$

$$f(x + t \cdot d) < f(x) \quad \begin{matrix} > 0 & < 0 \\ & (+ > 0 \text{ "mic"}) \end{matrix}$$

$f, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, h \in C^1$
 $\min f(x, y)$
 $h(x, y) = 0$

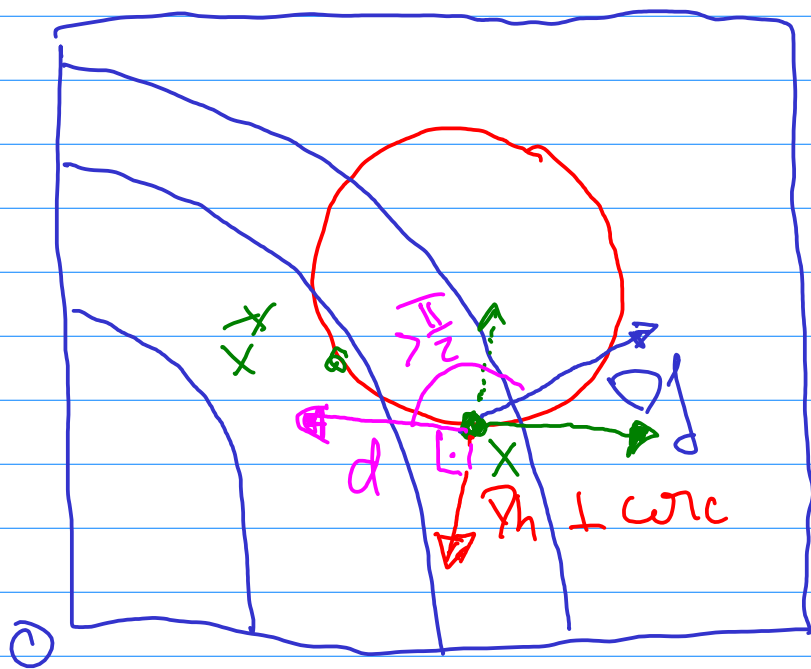
Deci $x^* = (x, y)$ atunci

$\nabla f(x^*)$ este coliniar cu $\nabla h(x^*)$

Cond opt

$$d \cdot \nabla h = 0$$

$$-d \cdot \nabla f < 0$$



Deci mergem în direcția d
 - scădem valorile lui f
 - $d \cdot \nabla h = 0$ putem să păstrăm
 constanta $h = 0$ deci mergem
 în dir. d .

$\Rightarrow x$ nu este optimal.

$$\min f(x)$$

$$g_1(x)=0$$

\vdots

$$g_m(x)=0$$

Si x^* este soluție atunci

- Dacă $\{\nabla g_i(x^*)\}$ este un set
independent

atunci $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

(multiplicatori Lagrange) a.i.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\boxed{m=1}$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0$$

\Rightarrow Coliniaritatea
gradientilor.

$$\min_{x+y+z=1} \underbrace{x^2+y^2+z^2}$$

$$f(x) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$h(x) = x + y + z - 1$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\{h=0\}$ plan in \mathbb{R}^3 (nemărginit)
 f este ∞ la ∞ , f continuă
 \Rightarrow existența unui minimum
 x^*

$\nabla h \neq 0 \Rightarrow$ putem aplica teorema

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ a.i. } \nabla f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) = 0$$

(sistem de ecuații)

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \end{cases}$$

$$x = y = z$$

Constraint: $x + y + z = 1$ \leftarrow
 $x = y = z = \frac{1}{3}$

Remark: problems poss. for inequality
 follow from Cauchy-Schwarz

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq \left(\sum a_i b_i \right)^2$$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3 \geq (\underline{x + y + z})^2$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$

Equality (\Leftrightarrow) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$

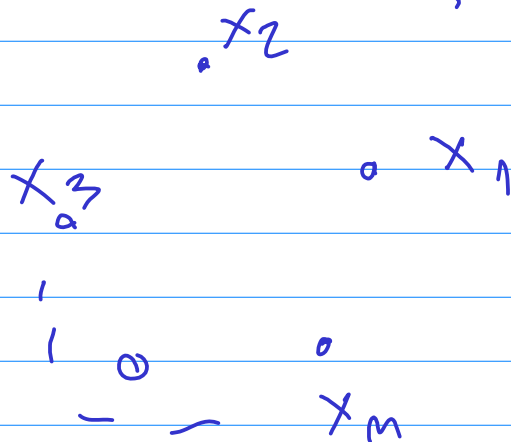
In Continuous:

- problems isoperimetrico
 - definim o distanță într-o formă
 - min $Per(\gamma)$ (2D)
 $|\gamma| = c$

- min ariei sub constrangeri de
lungimi constante

Problema izoperimetrică discretă

$\Omega \rightarrow$ poligon \rightarrow
 $\in \mathbb{R}^2$



n vârfuri $\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$

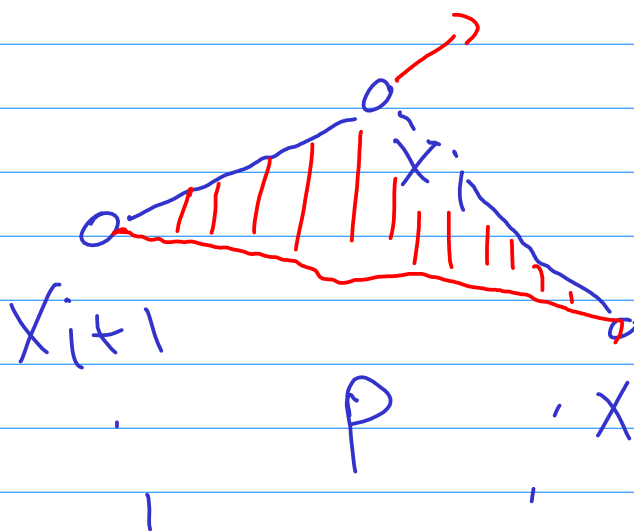
aria: $|\Omega| = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

perim $Per(\Omega) = G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Pb isop discretă: P este un ^{fixat} poligon cu n laturi și arie $A > 0$
atunci poligonul regulat

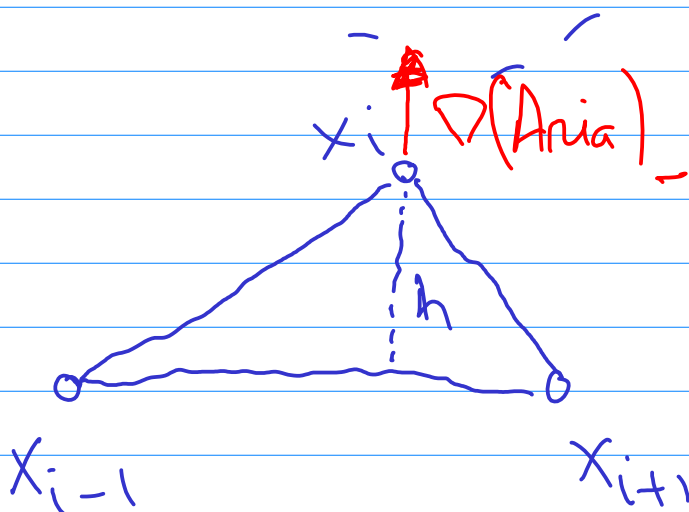
problema
 min $P(x)$
 $|P| = A$

- Asumim că $\frac{\partial P}{\partial x_i}, \frac{\partial |P|}{\partial x_i}$
- Existență: presupunem $P(x_i)$
- Aplicăm cond opt
- Concluzionăm



- Dacă mișcăm x_i schimbăm
 și aria/perimetrul
 sau loc
 deosebi în

$$\Delta x_{i-1} x_i x_{i+1}$$

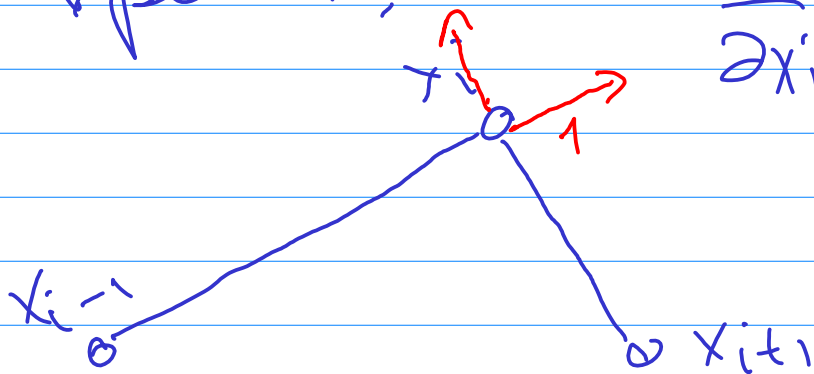


$\nabla(Aria)$ - ∇ = direcția în care
 funcția crește cel mai
 rapid, baza fixă

$$A_{i,i} = \frac{|x_{i-1} - x_{i+1}| \cdot h}{2}$$

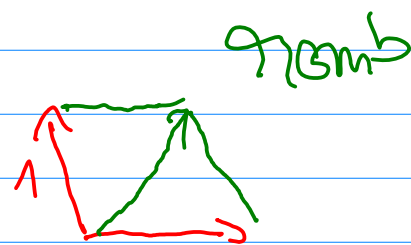
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = |x_{i-1} - x_{i+1}|$$

• ∇ perim?



$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x_i - x_{i-1}| + \frac{\partial}{\partial x_i} |x_i - x_{i+1}|$$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}$$



\Rightarrow diagonale = bisectoare

• ∇ perim în $\nabla x_{i-1} x_i x_{i+1}$
 în rap cu x_i e egal cu
 bisectoare din x_i

Teorema: $\min P_{\text{or}}(P)$
 $|P| = A$

$\Rightarrow \nabla P, \nabla A$ coliniari

\Rightarrow în $\nabla x_{i-1} x_i x_{i+1}$
înălțimea și bisectora
coincd.

$\Rightarrow \Delta$ isoscel $\Rightarrow |x_i x_{i-1}| = |x_i x_{i+1}|$

$\Rightarrow P$ cu laturile egale.

P unghiuri egale deoarece

$$\nabla P + \lambda \nabla A = 0$$

\uparrow
un același factor pt
fiecare triunghi

\Rightarrow soluția este poligonul regulat.

Detalii: A geometric proof of
the Polygon isop-ineq.
B. Bogosil.