Optimizarea formelor.

Șiruri de forme: convergența.

Dățile trecute: Problema izoperimetrică

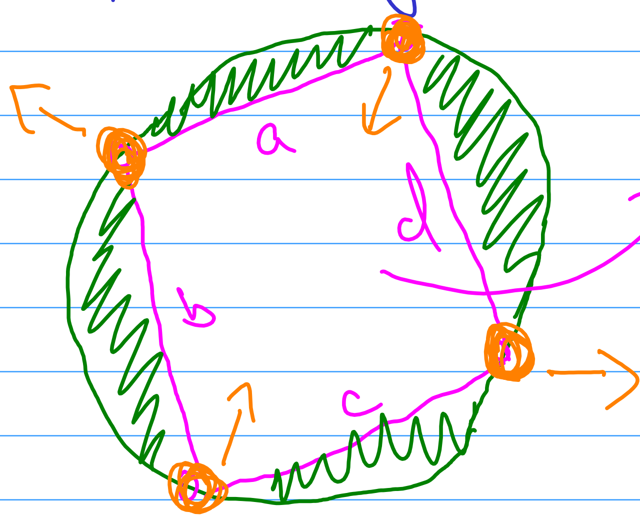
(P$_1$) $\min\limits_{|\Omega|=c} \mathrm{Per}(\Omega)$ $\qquad c>0$

(P$_2$) $\max\limits_{\mathrm{Per}(\Omega)=c} |\Omega|$

Soluția = discul

Idei de demonstrație: 2D

- orice domeniu care nu este un disc poate fi „îmbunătățit".



patrulaterul cu laturile a, b, c, d și arie max este ciclic.

– nu am demonstrat existența soluției

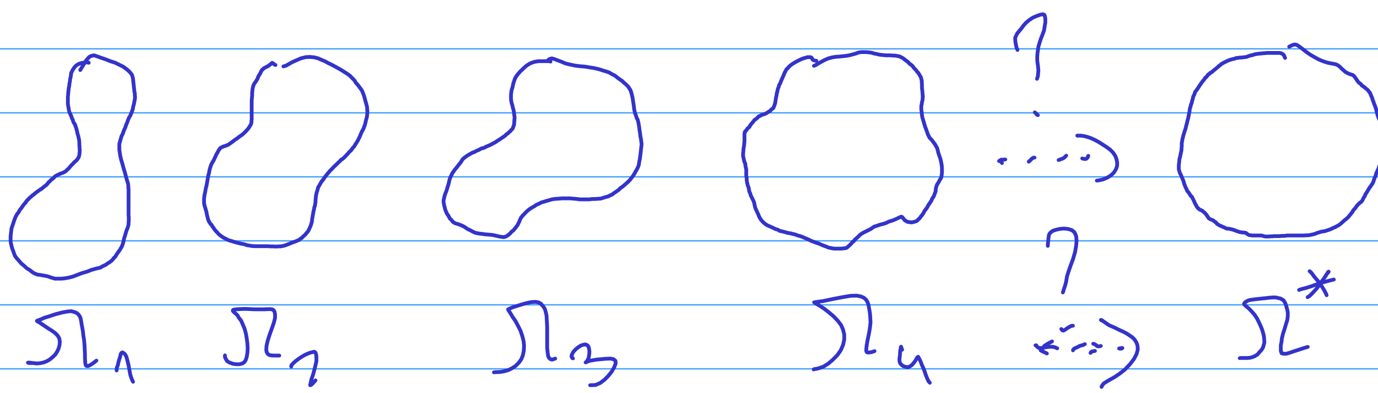
Cum demonstrăm existența unei soluții?

Compacitate(ℝ) ↗ mărginire

↘ mulțime închisă K

$$\left.\begin{cases} (x_n) \subset K \\ x_n \to x \end{cases}\right\} \Rightarrow x \in K$$

Cum extindem această idee de convergență la spațiul formelor?

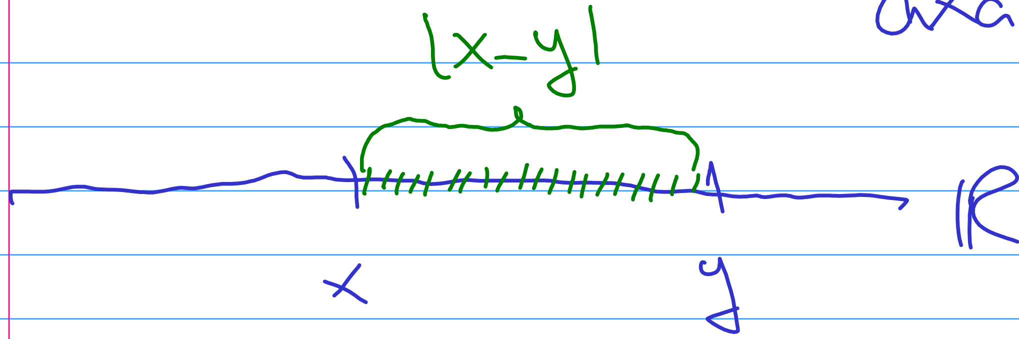


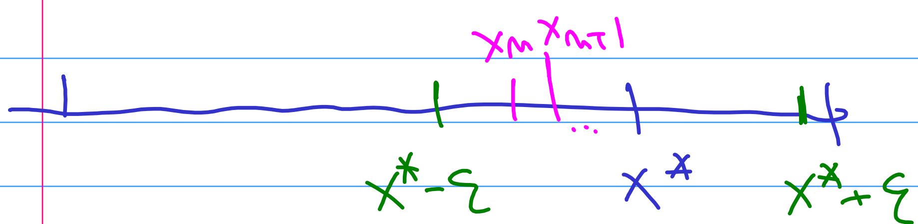
$\Omega_n \to \Omega^*$ dacă

$x_n \to x$ în $\mathbb{R}$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x| < \varepsilon$

$|x_n - x| < \varepsilon \iff$ distanța între x și x_n este $< \varepsilon$

În $\mathbb{R}$: $|x-y| \Leftrightarrow$ distanța între x și y pe axa reală





Dacă X este un spațiu abstract și $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o distanță

$$\left[d(x,x) = 0, \quad d(x,y) = d(y,x), \quad d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \right]$$

• **Atunci**: $(x_n) \subset X$ tinde la x dacă $d(x_n, x) \to 0$

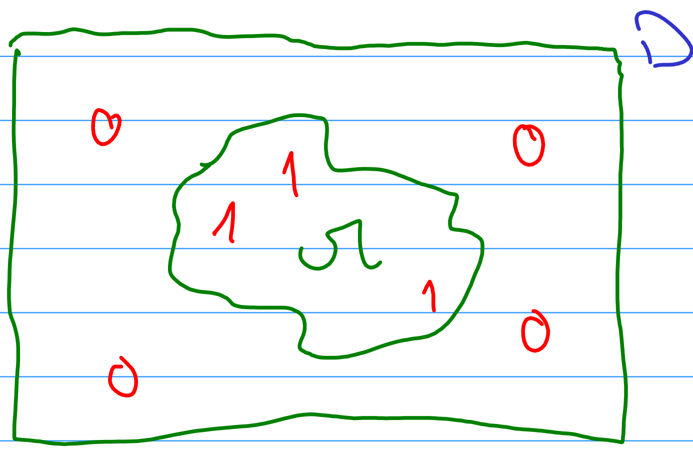
Obiectiv: Cum definim o distanță între 2 forme Ω_1 și Ω_2?

[Henrot, Pierre, Shape Variation and Optimization]

Cum definim o distanță între 2 forme

$\Omega \to$ îi asociem funcția caracteristică

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$



Putem calcula distanțe între funcții

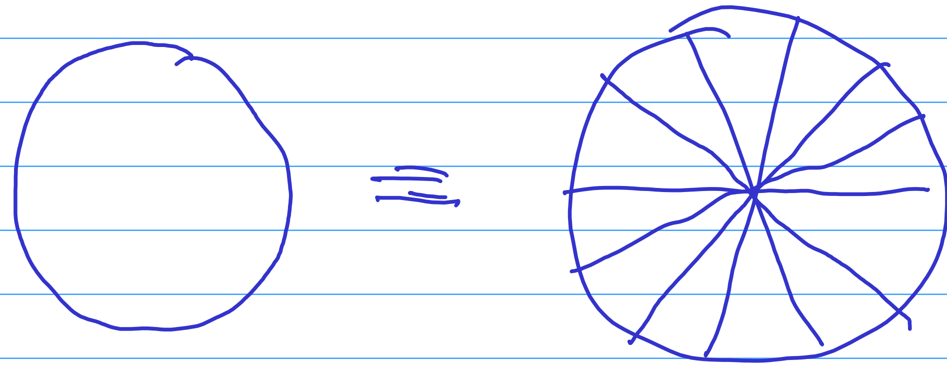
Distanța L^1: $d(\Omega_1, \Omega_2) = \int_D |\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}|$

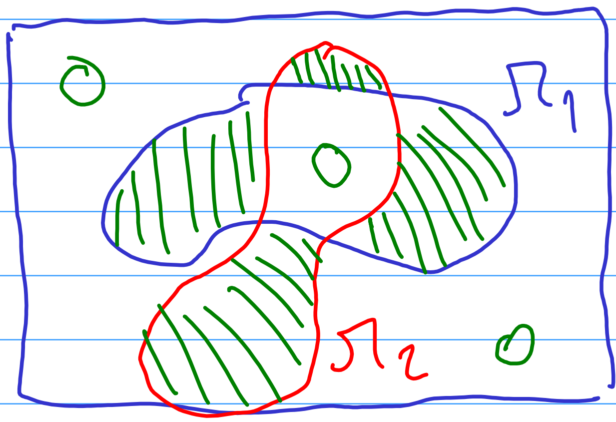
$$d(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \Rightarrow |\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \Omega_1 \simeq \Omega_2$$

Problemă: Distanța L^1 nu "vede" mulțimile de dimensiune mai mică.

Din pct de vedere L^1





$$|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}| = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_1^c \cap \Omega_2^c \\ & \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ 1 & \text{in } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ & \Omega_2 \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

$$\int_\Omega 1 = \text{Aria lui } \Omega$$

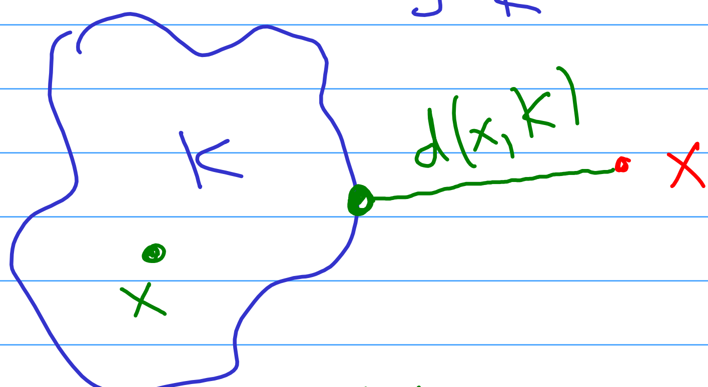
$$\Rightarrow \int_D |\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}| = |\Omega_1 \setminus \Omega_2| + |\Omega_2 \setminus \Omega_1|$$

$$= |\Omega_1 \Delta \Omega_2|$$

2. Distanța Hausdorff

K mulțime compactă

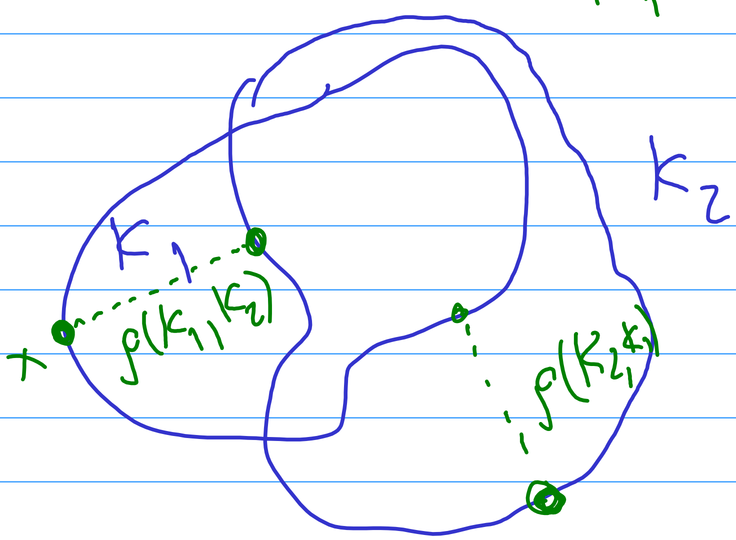
notăm • $d(x,K) = \inf\limits_{y \in K} d(x,y)$



$x \in K \Rightarrow d(x,K) = \underline{d(x,x) = 0}$

• $\rho(K_1, K_2) = \sup\limits_{x \in K_1} d(x, K_2)$

$\rho(K_2, K_1) = \sup\limits_{x \in K_2} d(x, K_1)$



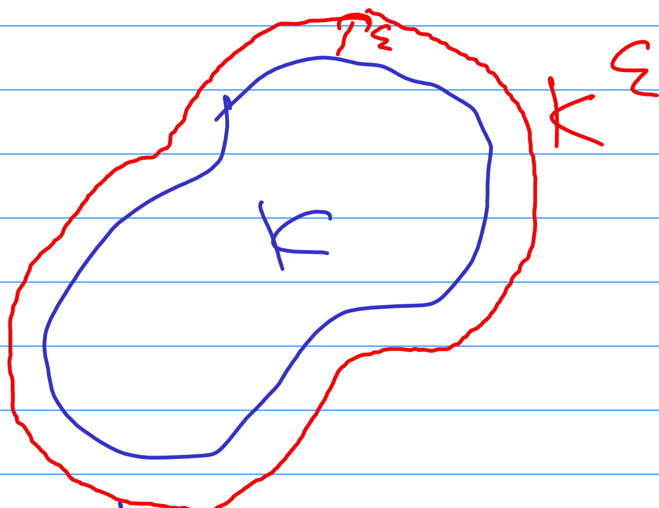
<u>Dist. Hausdorff</u>: $d^H(K_1, K_2) =$

$= \max\{\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)\}$

Def echivalentă:

Pentru K compactă definim nivelul exterior ε ca fiind

$$K^\varepsilon = \{x : d(x,K) \le \varepsilon\}$$



Def. alternativă:

$$d^H(K_1,K_2) = \inf\left\{\varepsilon : \boxed{\begin{cases} K_1 \subset K_2^\varepsilon \\ K_2 \subset K_1^\varepsilon \end{cases}}\right\}$$

Dacă $d^H(K_1,K_2) = \varepsilon$ (mic)

$K_1 \subset K_2^\varepsilon$

$K_2 \subset K_1^\varepsilon$

$\Rightarrow$ <u>K_1 e aproape de K_2</u>

Proprietăți:

1) (K_n) un şir de compacţi.

$$K_{n+1} \subset K_n$$

$$K = \bigcap_{n \geq 1} K_n \Rightarrow d^H(K_n, K) \to 0$$

2) (K_n) şir de compacţi

$$K_n \subset K_{n+1} \subset B \text{ ("bilă mare")}$$

$$K_n \xrightarrow{H} \overline{\bigcup K_n}$$

3)
$$\left.\begin{array}{l} K_1^n \to K_1 \\ K_2^n \to K_2 \\ K_1^n \subset K_2^n \end{array}\right\} \Rightarrow K_1 \subset K_2$$

4) $\boxed{K_n \xrightarrow{H} K \iff d(\cdot, K_n) \underset{\text{conv. uniformă}}{\longrightarrow} d(\cdot, K)}$

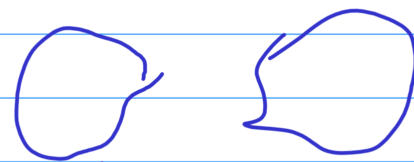
Consecință: $x \in D$, $K_n, K \subset D$

$$K_n \to K \Rightarrow d(x, K_n) \to d(x, K)$$

5) $K_n \xrightarrow{H} K$ şi K_n sunt convexe $\Rightarrow K$ este convex.

6) $K_n \xrightarrow{H} K$ şi K_n conexe

$\Rightarrow K$ conexă

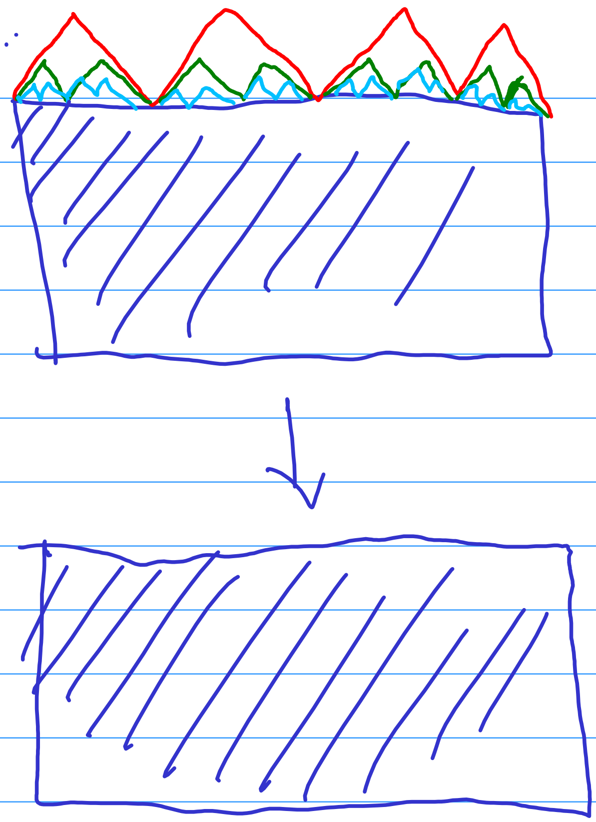


disconexă

7) $K_n \xrightarrow{H} K \overset{?}{\Rightarrow} |K_n| \to |K|$

Nu

8) Aici perimetrul nu este continuu



"Zimți" care oscilează tot mai rapid, dar cu aceeași pantă
- perimetrul se păstrează
- mulțimea limită are perimetrul mai mic.

Rezultat de compacitate

(K_n) compacte, $\underbrace{K_n \subset B}$ (bilă fixată)

$\Rightarrow \exists\, K \subset B$ compact și un subșir (K_{n_k}) care converge la K în sens Hausdorff

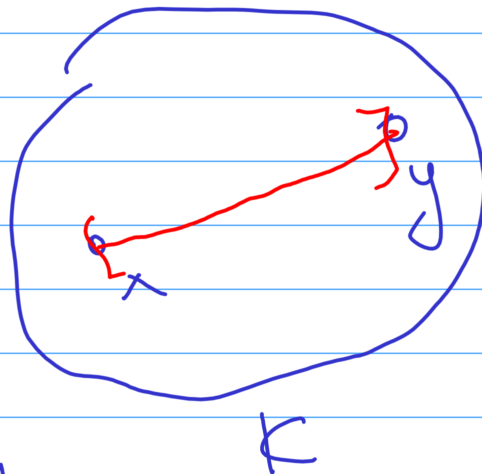
- putem extrage subșiruri convergente

Demonstrație: Teorema Ascoli-Arzela

Cazul domeniilor convexe

$\mathcal{C} = \{ K$ compacte, convexe, $K \subset B \}$
bilă fixă

K convex:



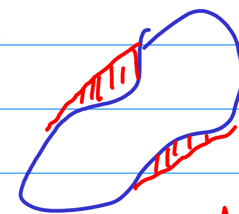
$x, y \in K \Rightarrow [x, y] \subset K$
$\lambda x + (1-\lambda) y, \ \lambda \in [0, 1]$

$(K_n) \subset \mathcal{C}$, $K_n \to K$ (convexe) **atunci**

- $|K_n| \to |K|$
- $\mathrm{Per}(K_n) \to K$
- $\mathrm{diam}(K_n) \to \mathrm{diam}(K)$

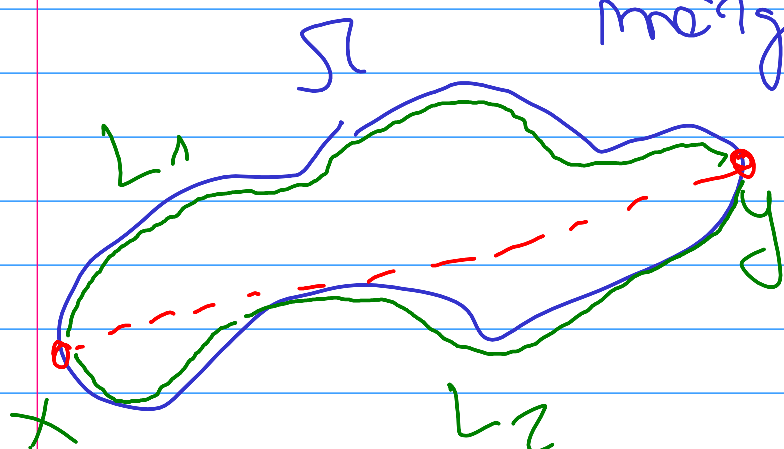
Demonstrația existenței soluțiilor pt inegalitatea izoperimetrică.

$$\max_{Per(\Omega)=c} |\Omega| \quad , \; c>0 \text{ fix}$$



<u>Observații</u>: (considerăm doar mulțimi convexe)

i) $Per(\Omega)=c \Rightarrow$ diametrul este mărginit.



diametrul

$$diam(\Omega) := \max_{x,y\in\Omega} |x-y|$$

$$diam(\Omega) \le \min\{L_1, L_2\} \le Per(\Omega) = c$$

$$\Rightarrow \; diam(\Omega) \le c$$

$\Rightarrow$ Putem presupune că $\Omega \subset B(Per(\Omega))$ fixă.

ii) $\Omega \subset B \Rightarrow |\Omega| \leq |B|$

$\Rightarrow \exists$ un șir maximizant

$(\Omega_n) \subset B$

$Per(\Omega_n) = c$

$$|\Omega_n| \to \sup_{Per(\Omega)=c} |\Omega|$$

$\left.\begin{array}{l} \Omega_n \subset B \\ \Omega_n \text{ convexe} \\ \quad\text{compacte.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ un subșir convergent Hausdorff

$$\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega^* \subset B$$

$$|\Omega_{n_k}| \to |\Omega^*| \quad , \quad Per(\Omega_{n_k}) \to Per(\Omega^*)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{c}$$

$$\sup_{Per(\Omega)=c} |\Omega| \Rightarrow |\Omega^*| = \sup_{Per(\Omega)=c} |\Omega|$$

$$Per(\Omega^*) = c$$

$\Rightarrow \Omega^*$ este soluția problemei izoperimetrice.