# Inegalitatea izoperimetrică (continuare)

$|\Omega| \to$ aria lui $\Omega$ $\qquad \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$Per(\Omega) \to$ perimetrul lui $\Omega$.

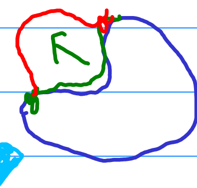
$\boxed{c>0}$

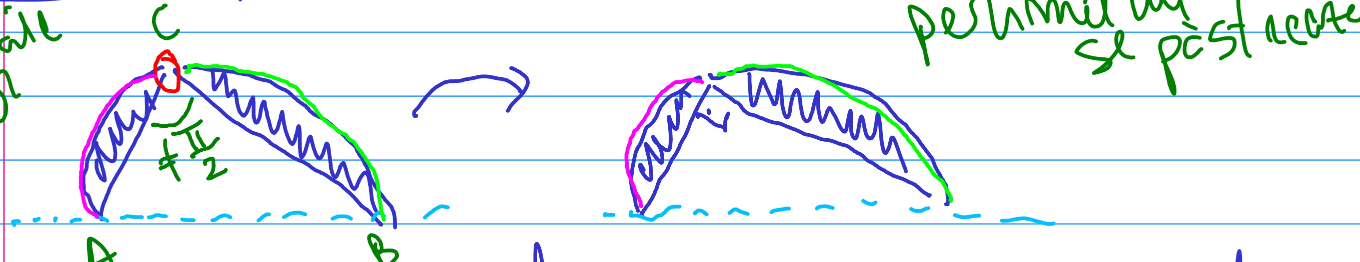
P1 $\quad \min Per(\Omega)$, $\quad |\Omega| = c$ $\qquad$ - formulări duale - echivalente.

P2 $\quad \max |\Omega|$, $\quad Per(\Omega) = c$

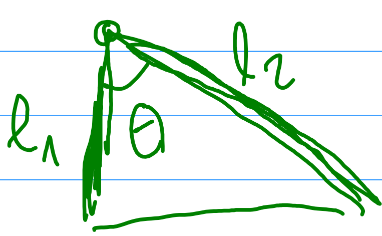
Soluția: Discul

P2 metoda I: convexitate → simetrie →




- Dacă avem un domeniu care nu e disc acesta poate fi îmbunătățit.




$$\text{Aria} = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \underbrace{\sin\theta}_{\le 1}}{2}$$

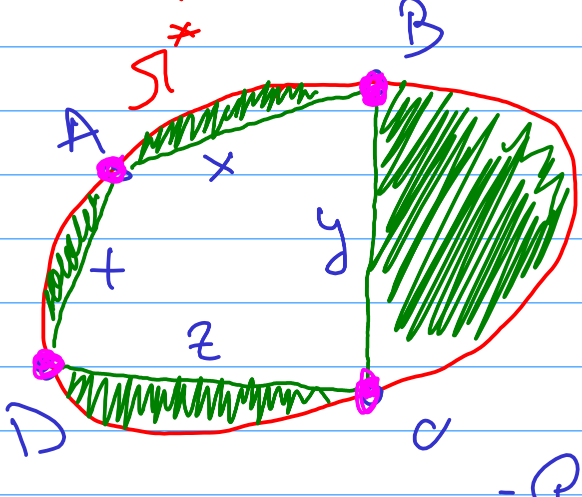
## Bibliografie:


1. The Isoperimetric problem
   Viktor Blasjo
   American Math. Monthly
2. Inequalities that imply the isoperimetric problem
   Andrejs Treibergs


## Metoda a II-a:

Fie $\Omega^*$ soluţia problemei $P_2$ (perimetru fixat; se maximizează aria). ($\Omega^*$ convexă)

Presupunem $\Omega^*$ nu este disc $\Rightarrow \exists A, B, C, D$ distincte pe $\partial\Omega$ a.î. patrulaterul ABCD să nu fie ciclic.




- adăugăm "balamele" în A, B, C, D
- permitem schimbarea unghiurilor

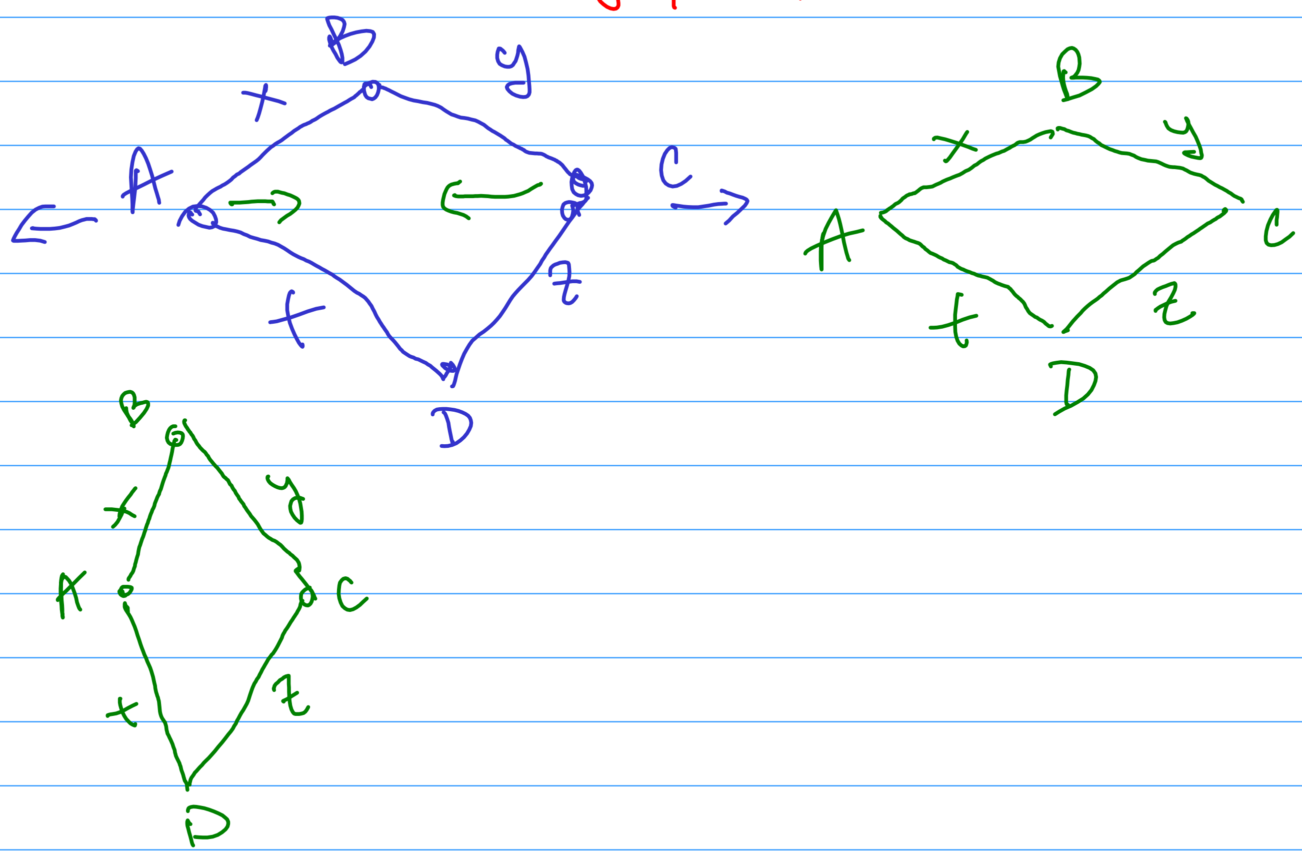
- regiunile sublimiate cu verde nu se modifică.

Patrulaterul ABCD are laturile x, y, z, t

1.) Ce condiții verifică x, y, z, t

2.) Dacă ABCD nu e ciclic se poate modifica patrulaterul pentru a-i mări aria? DA

3) Care este configurația ce dă arie maximală? Configurația patrulaterului ciclic




Dacă admitem că se poate mări aria lui ABCD dacă acesta nu e ciclic atunci s.* se poate îmbunătăți.

Contradicție cu optimalitatea lui $\Omega^*$.

Schema: - alegem $\Omega^*$ soluție pt $P_2$

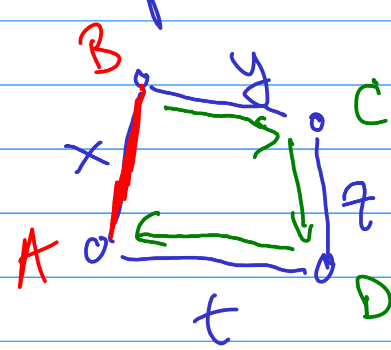
- presupunem $\Omega^*$ nu este disc
- găsim un $\Omega'$ a.i. $|\Omega'| > |\Omega^*|$
  $P_{er}(\Omega') = P_{er}(\Omega^*)$
- deci $\Omega^*$ nu este soluție

Contradicție: $\Rightarrow$ presupunerea este falsă. $\Rightarrow$ Soluția este discul.

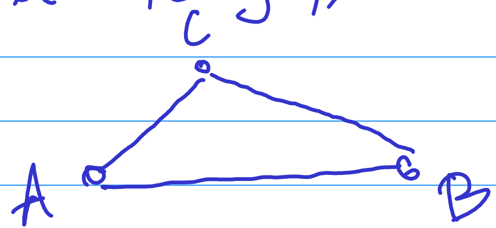
Proprietăți: Fie $x, y, z, t > 0$ patru numere reale.

a) $x, y, z, t$ laturile unui patrulater $\Leftrightarrow$

$$x+y+z > t$$
$$y+z+t > x$$
$$z+t+x > y$$
$$t+x+y > z$$




$\Rightarrow$ " (inegalitatea triunghiului; drumul de lungime minimală între 2 puncte este segmentul ce le leagă).
"

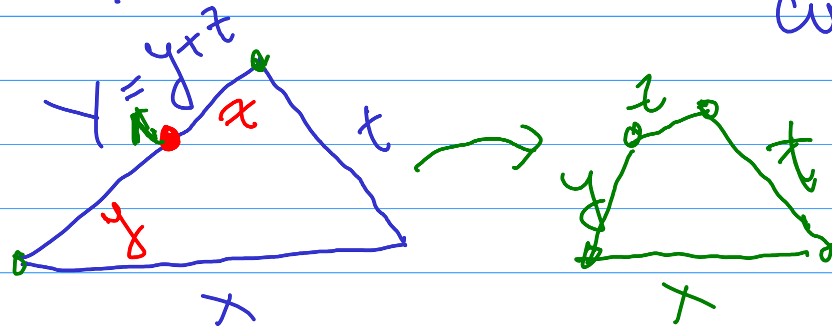



$$\boxed{AB < AC + CB}$$

"⇐" Presupunem $x$ este maxim între $x, y, z, t$
(trebuie aleasă perechea de laturi consecutive cu suma minimă)

$\underbrace{y+z}_{\text{(minimă)}}+t > x$

$Y + t > x \Rightarrow$ Există un triunghi cu laturile $x, Y, t$

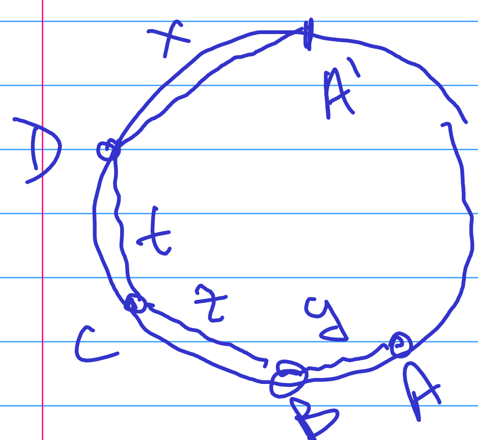



$Y + t > x$
$x + Y > t$ ✓
$x + t > Y$

b) Există un patrulater ciclic cu laturile $x, y, z, t$. Presupunem $x > y, z, t$.

Dem: Luăm $R$ suficient de mare.

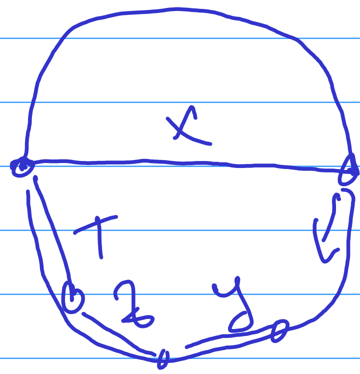
Pe un cerc de rază $R$ considerăm $A, B, C, D, A'$ a.î. $AB = y$, $BC = z$, $CD = t$, $DA' = x$



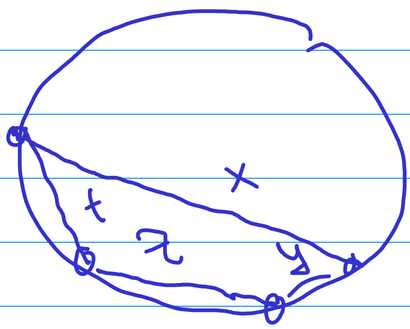

- micșorăm $R$ păstrând distanțele.
- punctul $A'$ se va apropia de $A$

- ne oprim în momentul în care A și A' coincid. => ABCD - ciclic

va avea laturile x, y, z, t

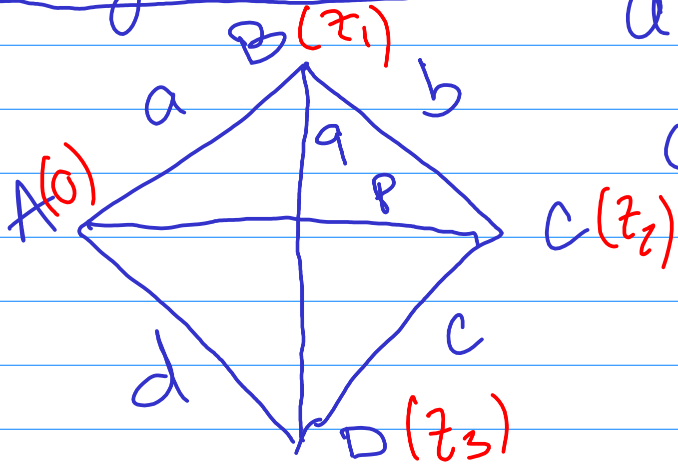



Dacă x ajunge un diametru atunci mărim R apropiind A' de A




c) Dacă $x, y, z, t$ sunt laturile unui patrulater => cel ciclic are aria maximă.

<u>Ineg. Ptolemeu</u>




$ac + bd \geq pq$

cu egalitate $\Leftrightarrow$ ABCD este ciclic.

$O, z_1, z_2, z_3$ afixele punctelor $A, B, C, D$.

$z_i \neq 0$

Ineg triunghiului:

$$\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|+\left|\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3}\right| \geq \left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}\right|$$

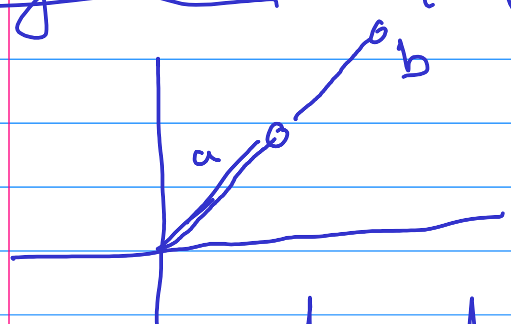
$$\frac{|z_1-z_3|}{|z_1||z_3|} \leq \frac{|z_2-z_3|}{|z_2||z_3|}+\frac{|z_1-z_2|}{|z_1||z_2|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |z_1-z_3|\cdot|z_2| \leq |z_2-z_3|\cdot|z_1|+|z_1-z_2|\cdot|z_3|$$

$$BD \cdot AC \leq AB\cdot CD + BC\cdot AD$$

$$p \cdot q \leq a\cdot c + b\cdot d$$

Egalitate: $|a|+|b| = |a+b|$




$a, b, O$ sunt coliniare.

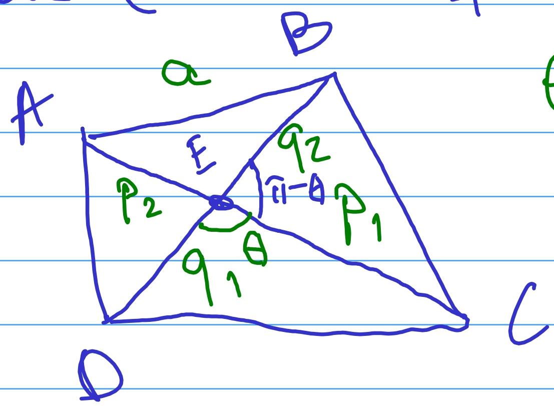
$\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ coliniare

$\Rightarrow z_1, z_2, z_3, O$ sunt conciclice

Prop: $a,b,c,d$ lungimile laturilor unui patrulater și $F$ este aria sa atunci

$$16F^2 \le \underbrace{(a+b+c-d)}_{>0}\underbrace{(a+b-c+d)}_{>0}\underbrace{(a-b+c+d)}_{>0}\underbrace{(-a+b+c+d)}_{>0}$$

Egalitatea are loc pt patrulaterul ciclic (cu aceleași laturi).




$\theta = \sphericalangle CED$

$\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$

$$2F = 2(|\Delta AEB| + |\Delta BEC| + |\Delta CED| + |\Delta DEA|)$$
$$= \sin\theta\,(p_1q_1 + q_1p_2 + p_2q_2 + p_1q_2)$$
$$= \sin\theta\,(p_1+p_2)(q_1+q_2)$$
$$= \sin\theta\; pq$$

Teorema cosinusului: pt fiecare triunghi cu vf în $E$.

$$a^2 = p_2^2 + q_2^2 - 2p_2q_2\cos\theta$$

$$b^2 =$$

$$c^2 \vdots$$

$$d^2$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = -\cos\theta\, 2pq$$

$$16F^2 = 4p^2q^2\sin^2\theta = 4p^2q^2 - 4p^2q^2\cos^2\theta$$

(Ptolemeu)

Ptolemeu

$$\leq 4(ac+bd)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2$$

$$= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$$

<u>Egalitate?</u> $\Longleftrightarrow$ avem egalitate în <u>Ptolemeu</u>

$\Longleftrightarrow$ ABCD este <u>ciclic</u>

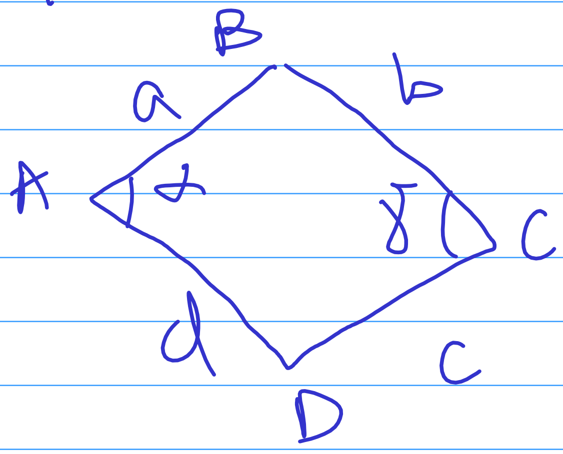
Teoremă: Dacă a, b, c, d sunt laturile unui patrulater și F este aria sa atunci: aria maximă este $\sqrt{(a+b+c-d)(\ldots)(\quad)(\quad)}$

Patrulaterul de arie maximă este ciclic.


+ reordonarea laturilor nu schimbă aria.

Orice formă care nu este un disc poate fi modificată păstrând perimetrul și mărind aria.

# Formula lui Brahmagupta.




$\alpha, \gamma$ unghiuri opuse

$F$ = aria

$p, q$ diagonale

$$16F^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - \underbrace{16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}_{\geq 0}$$

Egalitate: $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha+\gamma = \pi$$

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ ciclic}$$