Curs 2:

Probleme izoperimetrice:

2D

$$\begin{cases} \min \text{Per}(\Omega) \\ \text{Aria}(\Omega) = c \end{cases}$$

→ Soluția este discul

$$\begin{cases} \max \text{Aria}(\Omega) \\ \text{Per}(\Omega) = p \end{cases}$$

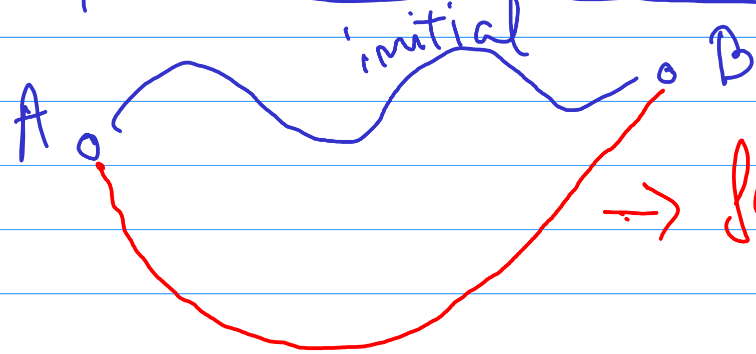
→ soluția este discul

3D

$$\begin{cases} \min \text{Aria suprafeței}(\Omega) \\ \text{Vol}(\Omega) = c \end{cases}$$

→ soluția este bila.

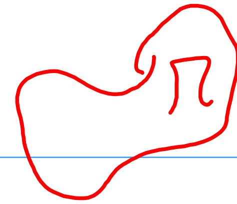
Lanț care atârnă sub greutatea lui



→ formă catenară

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\Omega)$$

Ω → formă



$\mathcal{F}$ → funcție obiectiv / cost

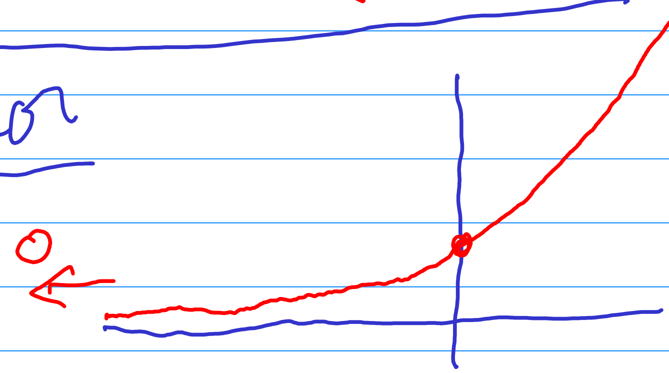
- perimetru
- arie
- rezistența, etc.

$\mathcal{A}$ → clasa în care optimizăm

Ω:
- convexe
- poligoanelor cu n laturi
- dreptunghiurilor, etc.
- aria / perim sunt fixe

Existența soluțiilor

$$\min_{x \in \mathbb{R}} e^x$$



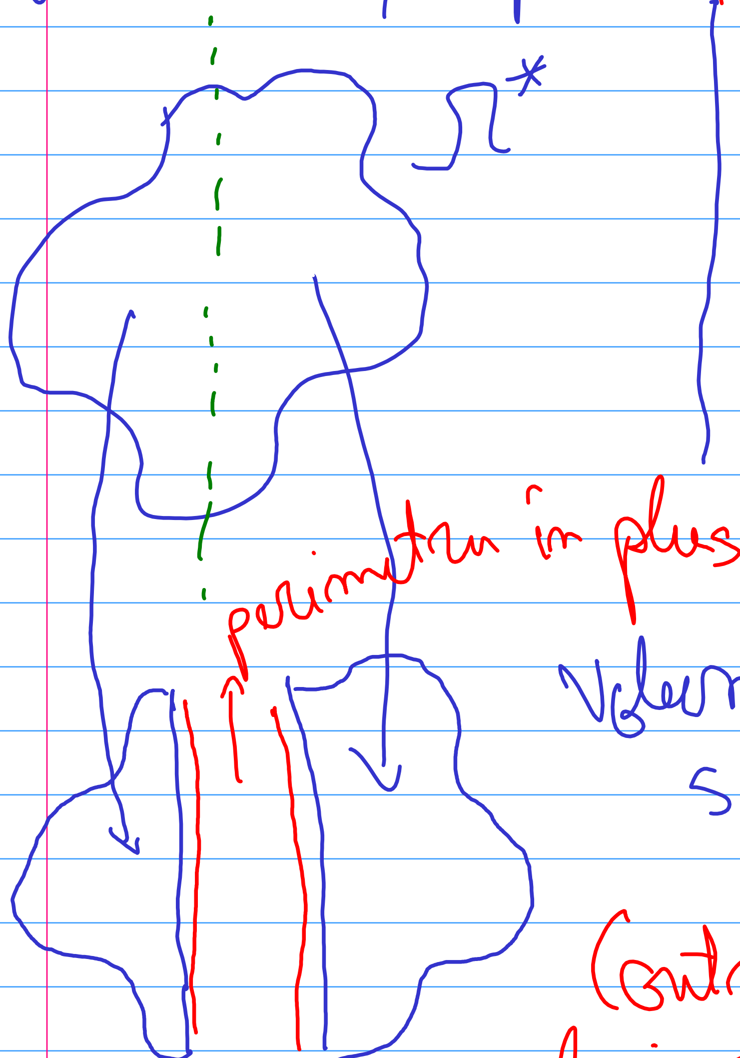
$$\inf_{x \in \mathbb{R}} e^x = 0 \quad \text{dar} \quad e^x > 0$$

⇒ problema dată nu are soluție.

Exemplu: în 2D

(P) $\max \operatorname{Per}(\Omega)$
$\quad \operatorname{Aria}(\Omega) = c$

• presupunem că Ω^* este soluție pt (P)

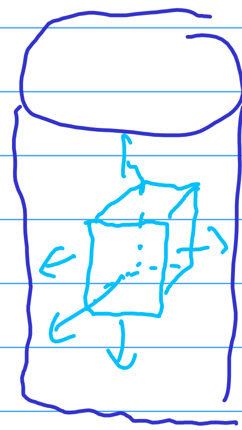


Volumul s-a păstrat

Contradicție cu optimalitatea lui Ω^*.

Care este forma optimală pt un cub de gheață de un volum dat?

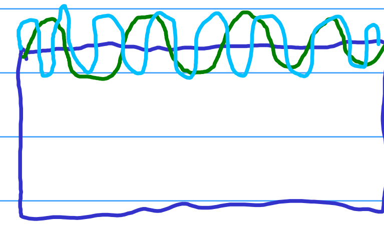
– transferul de căldură este proporțional cu suprafața obiectului



$\Rightarrow$ (P) nu are soluții.

$\max \mathrm{Per}(\Omega)$

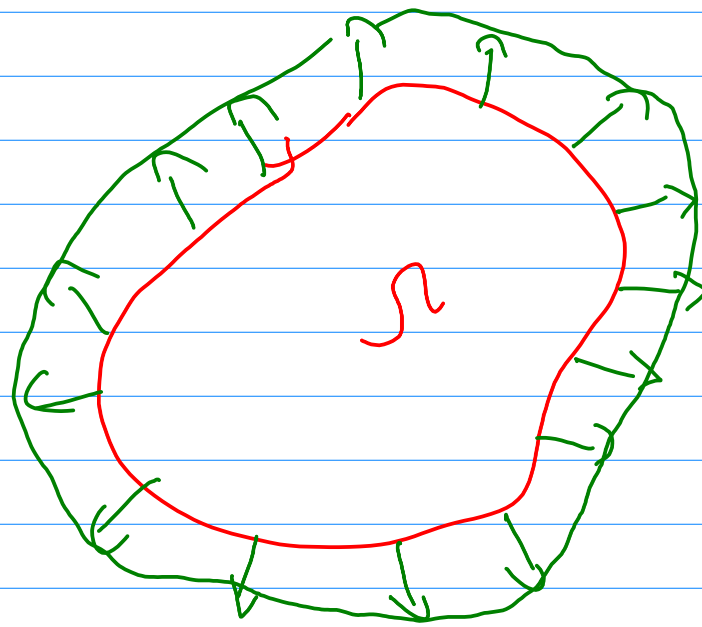
$\mathrm{Aria}(\Omega) = c$



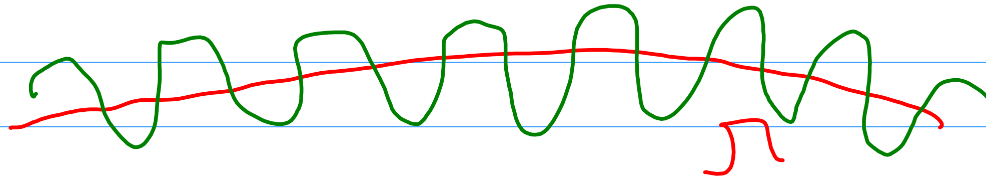
$\rightarrow$ oscilațiile măresc perimetrul.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă} \\ x_n \to x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

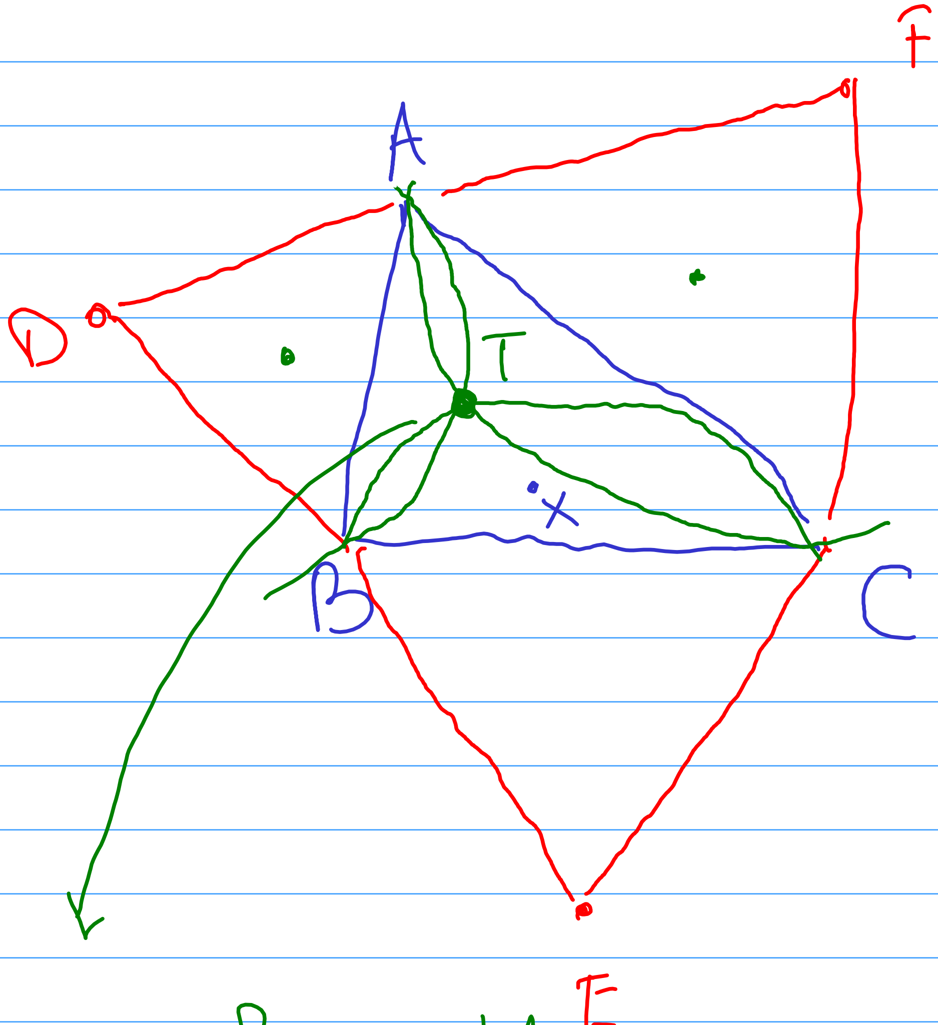
• mări aria



• mărirea perimetrului

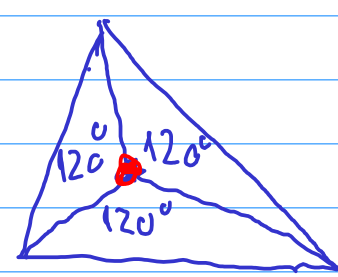


Seminar: Punctul lui Torricelli

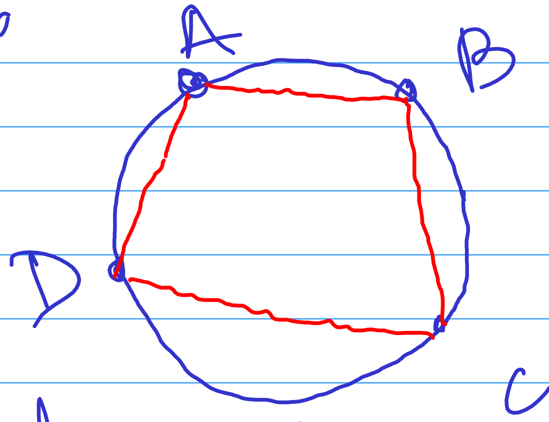


T rezolvă problema $\min_{X \in \triangle ABC} XA+XB+XC$

a) unghiurile în jurul lui T sunt egale



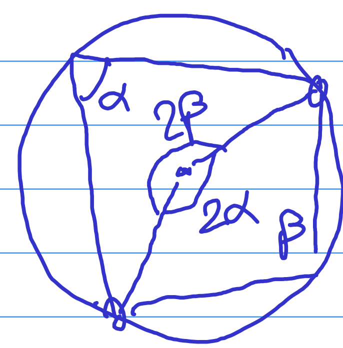
Pentru un patrulater înscris într-un cerc cât este suma unghiurilor opuse? R: 180°

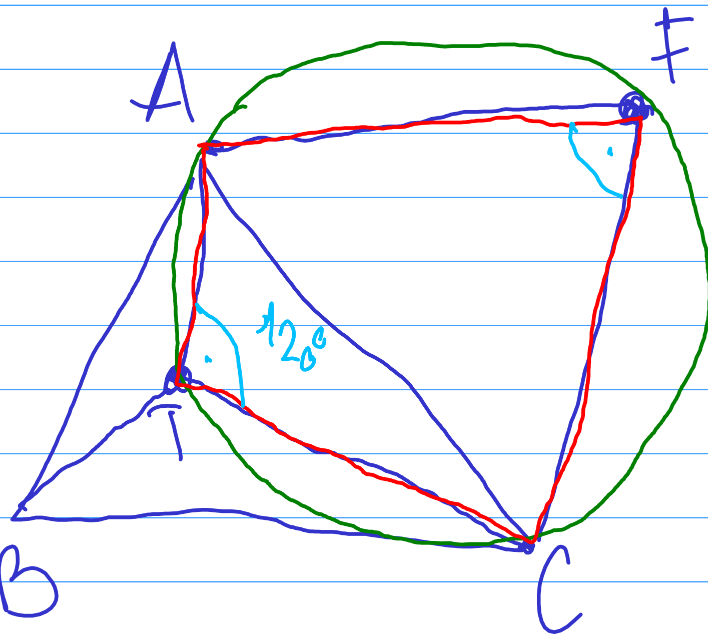


$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$

$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$

- suma unghiurilor în triunghi $= 180^\circ$
- suma —"— patrulater $= 360^\circ$





ATCF este un patrulater înscris într-un cerc.

$\Rightarrow$ Suma unghiurilor opuse $= 180^\circ$

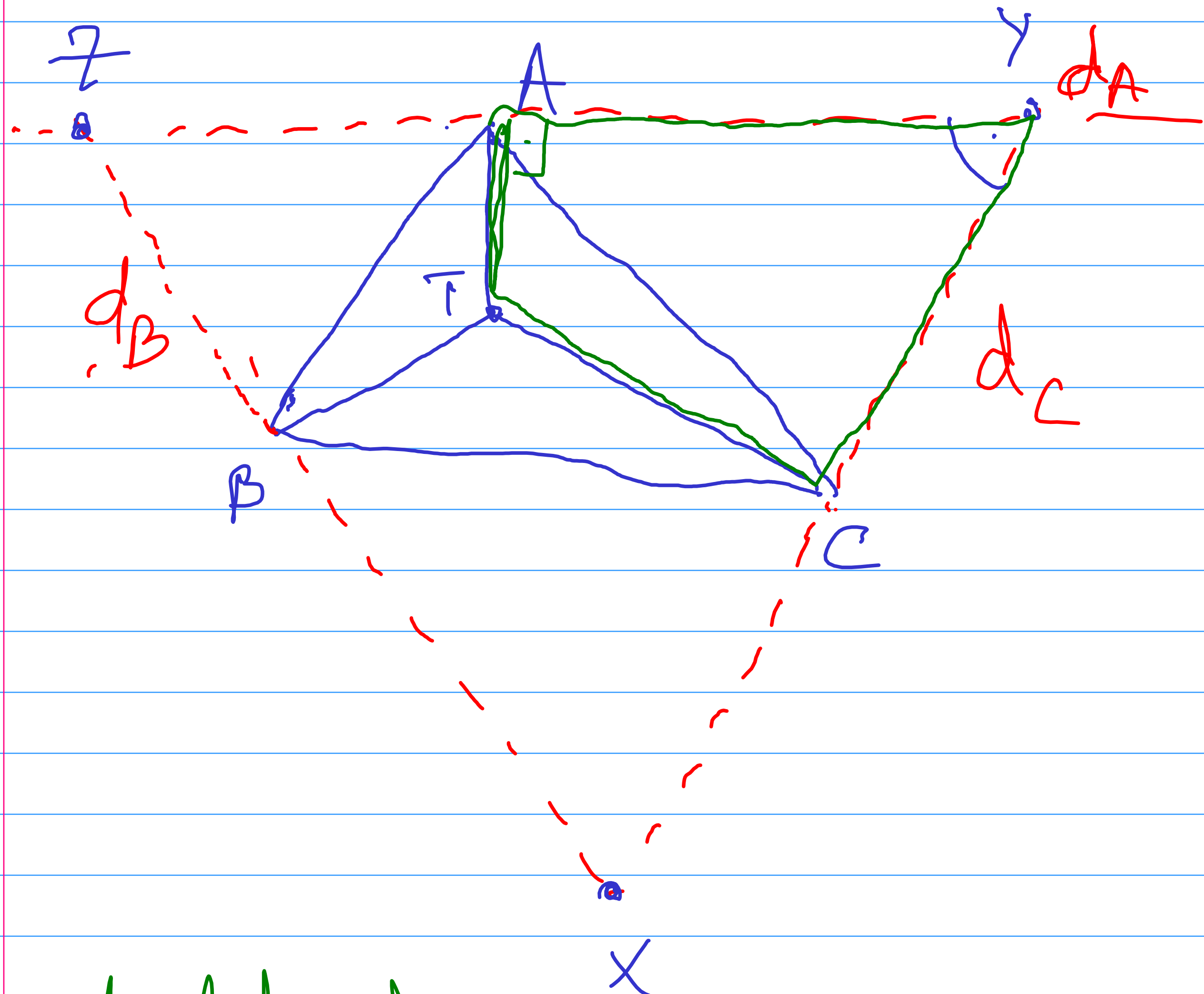
$\sphericalangle T = \sphericalangle ATC = 180^\circ - \underset{60^\circ}{\underset{\shortparallel}{\sphericalangle F}} = 120^\circ$

În mod analog obținem

$\sphericalangle BTC = \sphericalangle ATB = 120^\circ$

$\Rightarrow$ a) este demonstrat

b)



În patrulaterul ATCY:

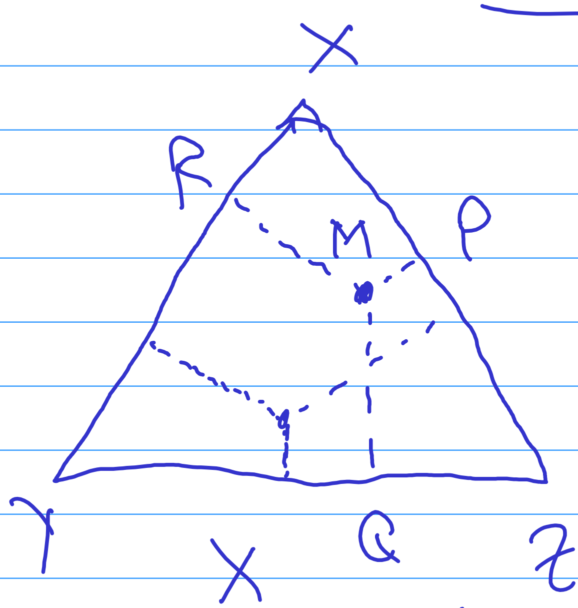
$\sphericalangle A = 90^\circ$
$\sphericalangle C = 90^\circ$
a) $\Rightarrow$ $\sphericalangle T = 120^\circ$

$\Rightarrow$ $\underline{\sphericalangle Y = 60^\circ}$

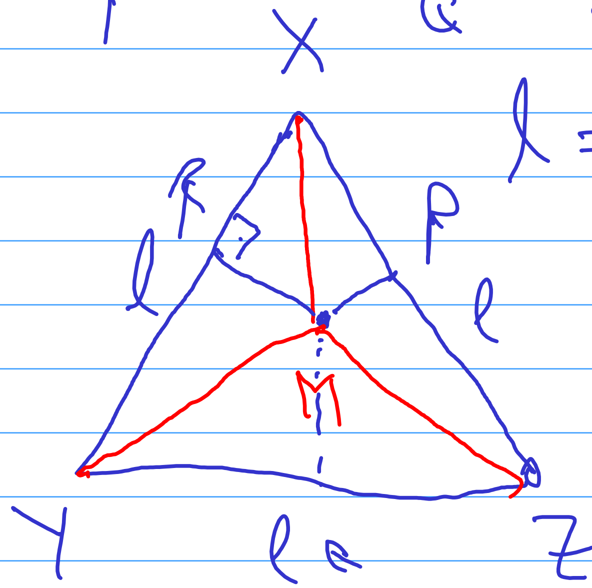
Analog $\sphericalangle X = \sphericalangle Z = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta XYZ$ este echilateral

c)



$MP + MQ + MR =$ const



l = lungimea laturii

aria Δ echi

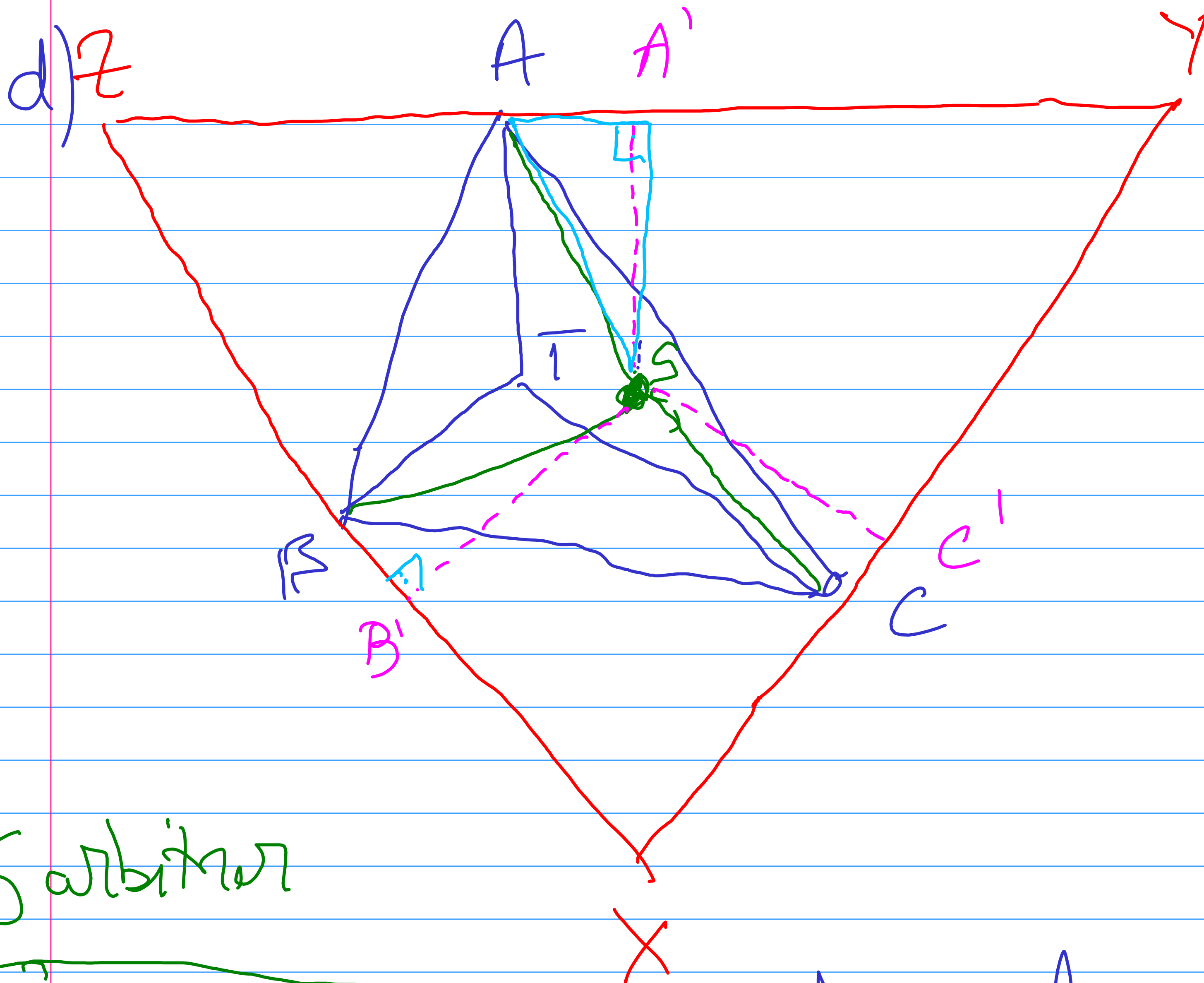
$$A[MXY] + A[MYZ] + A[MZX] = A$$

$$\frac{MR \cdot l}{2} + \frac{MQ \cdot l}{2} + \frac{MP\,l}{2} = A$$

$$\Rightarrow MP + MQ + MR = \frac{2A}{l}$$

constant

d)



S arbitrar

$TA+TB+TC$ = suma dist T la laturile lui XYZ (equi)

= const.

$= SA'+SB'+SC' \leq SA+SB+SC$

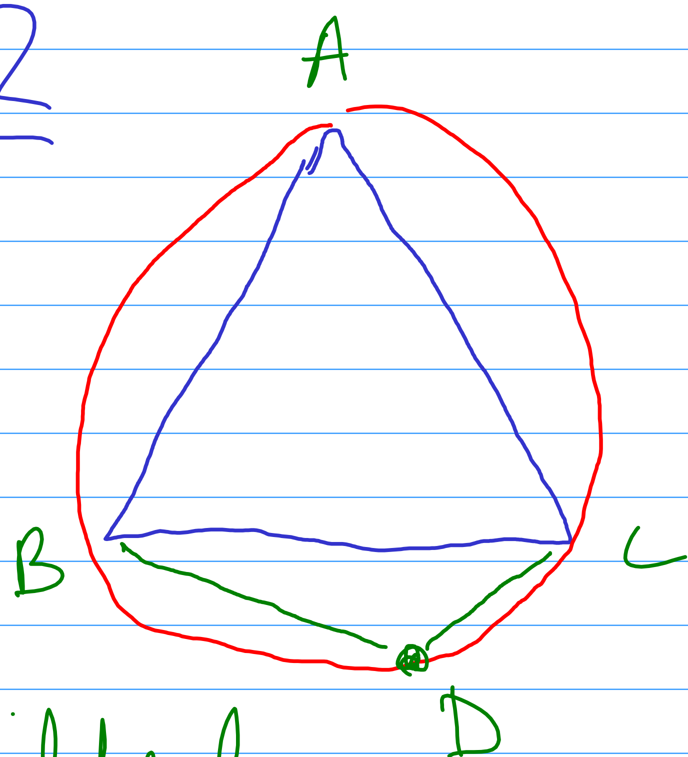
Prin urmare $\forall S \in \Delta ABC$

$SA+SB+SC \geq TA+TB+TC$

⇒ T s-a dat pb date.

∎

Metoda 2



ABC echilateral

D aparține $\widehat{BC}$ al cercului circ

$$\Rightarrow \quad \boxed{AD = BD + DC}$$

Egalitatea lui Ptolomeu:

ABCD înscris în cerc atunci

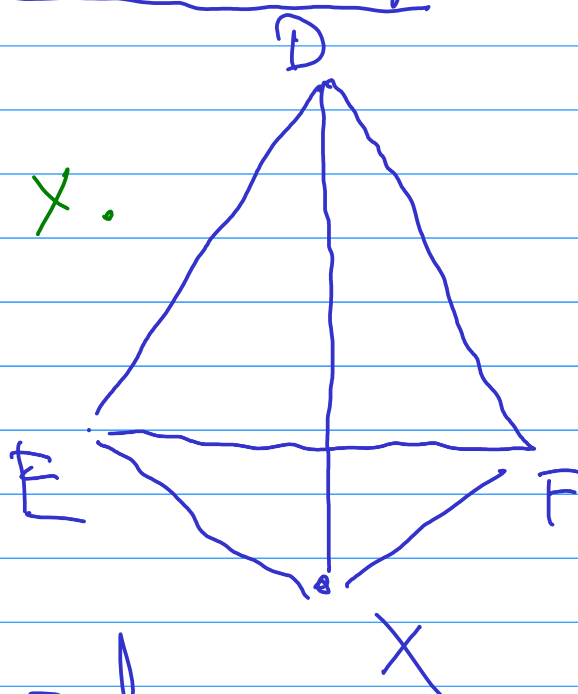
produsul diagonalelor = suma

produselor laturilor opuse

$$AD\cdot \underset{\downarrow}{\underset{l}{BC}} = \underset{\downarrow}{\underset{l}{AC}}\cdot BD + \underset{\downarrow}{\underset{l}{AB}}\cdot CD \quad \Big|:l$$

$$\Rightarrow AD = BD + CD$$

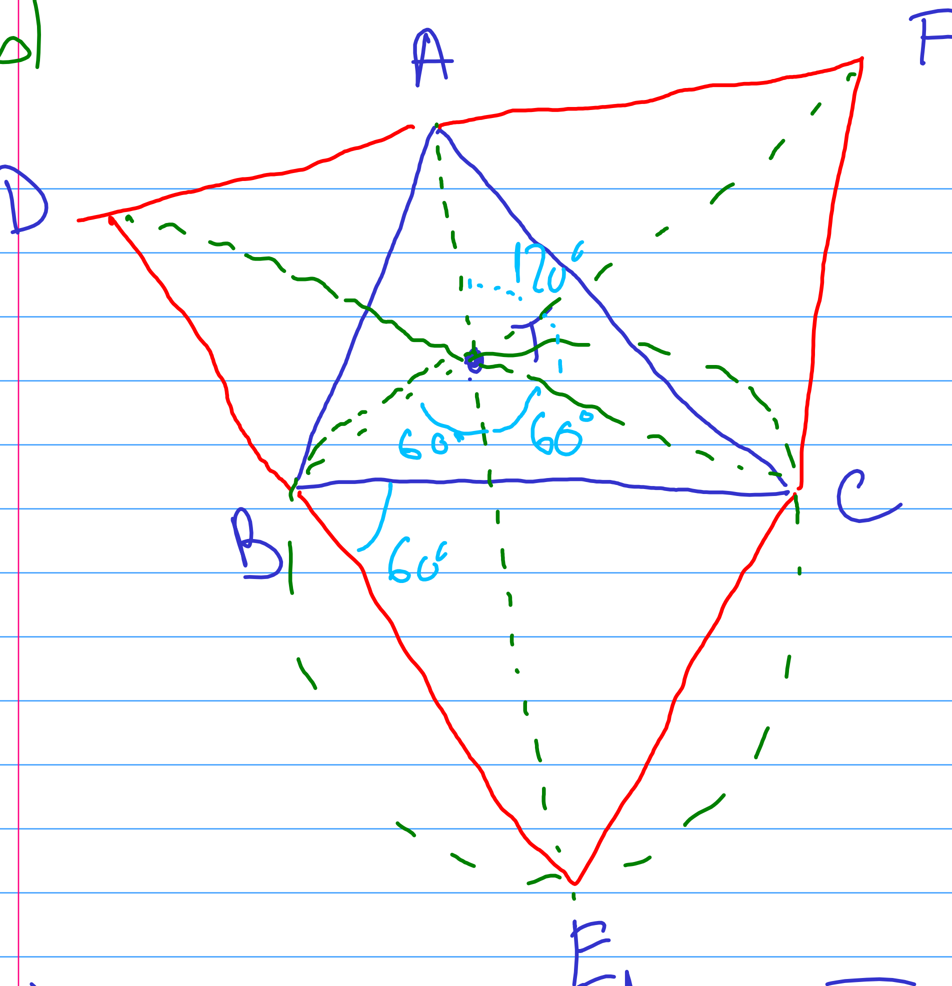
<u>Aceeași demonstrație:</u>

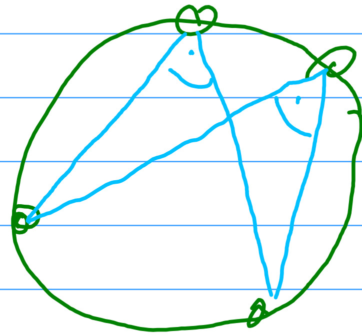


În general: suma prod. lat. opuse $\geq$ prod. diag.

$$XE\cdot \underset{l}{\cancel{DF}} + XF\cdot \underset{l}{\cancel{DE}} \geq XD\cdot \underset{l}{\cancel{EF}}$$

b)

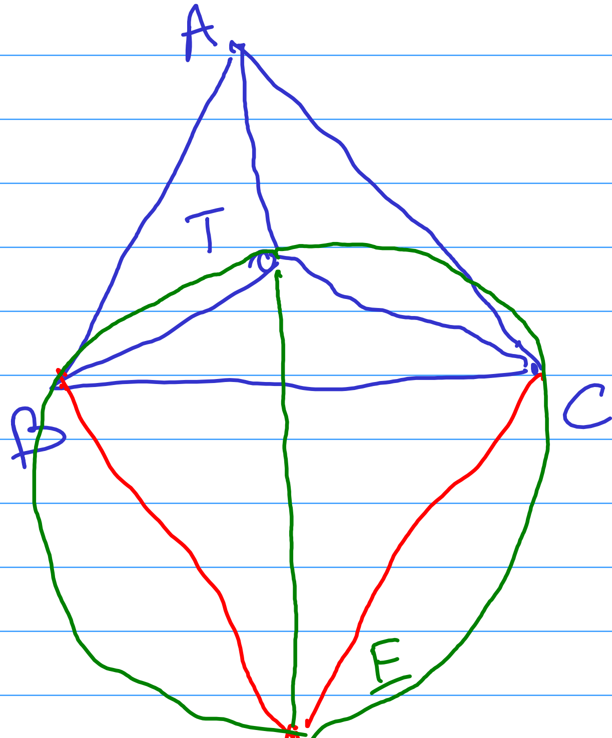




b) $\sphericalangle$ în jurul lui T sunt de 120°

$\sphericalangle ETC = \sphericalangle EBC = 60^\circ$

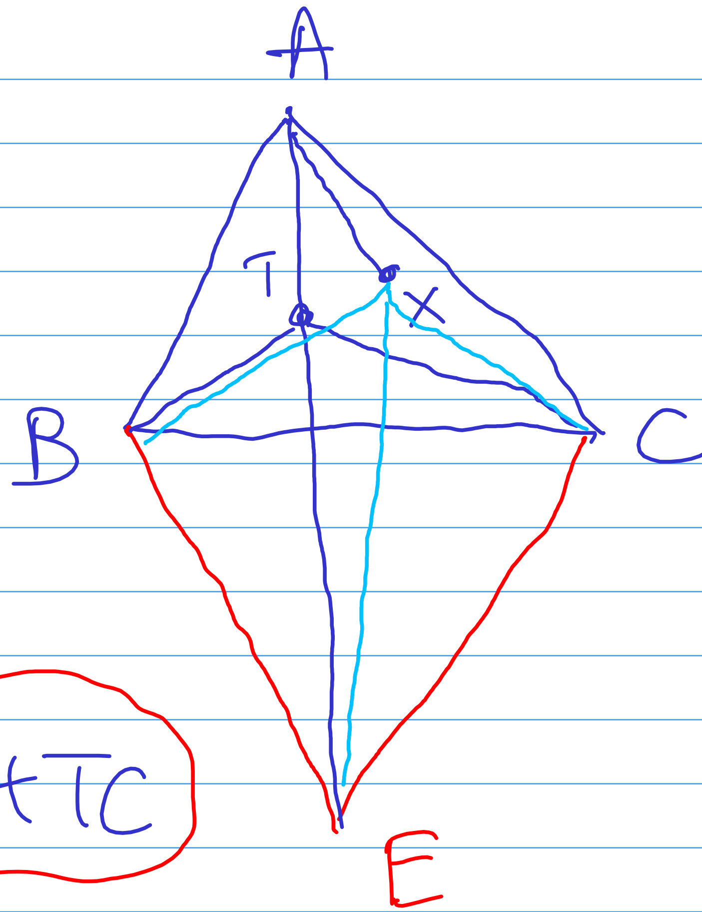
(unghiuri înscrise în arc)



TB+TC=TE

$\Rightarrow TA + TB + TC = AE$

$\underbrace{XA + XB + XC}_{a) \geq XE}$



$\geq XA + XE$

$\overset{\text{ineg}}{\underset{\text{tri}}{\geq}} AE = TA + TB + TC$

Prin urmare oricare ar fi X

Avem $XA + XB + XC \geq TA + TB + TC$