Inegalitatea Izoperimetrică

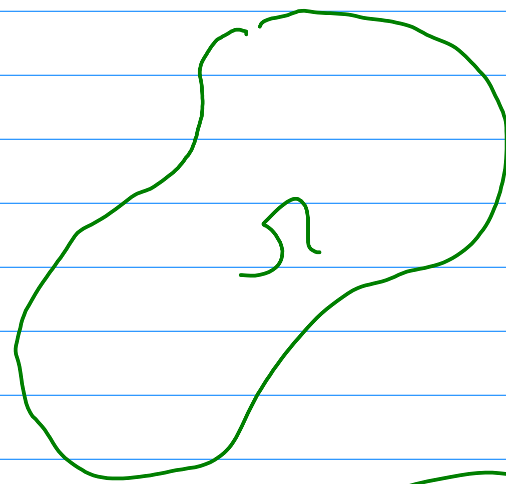
→ dimensiunea 2

$Per(\Omega) \to$ perimetrul

$|\Omega| \to$ aria

P₁: $\min Per(\Omega)$, $|\Omega| = c$

P₂: $\max |\Omega|$, $Per(\Omega) = c$



$\boxed{P_1}$ pt poligoane

$\min Per(\Omega)$

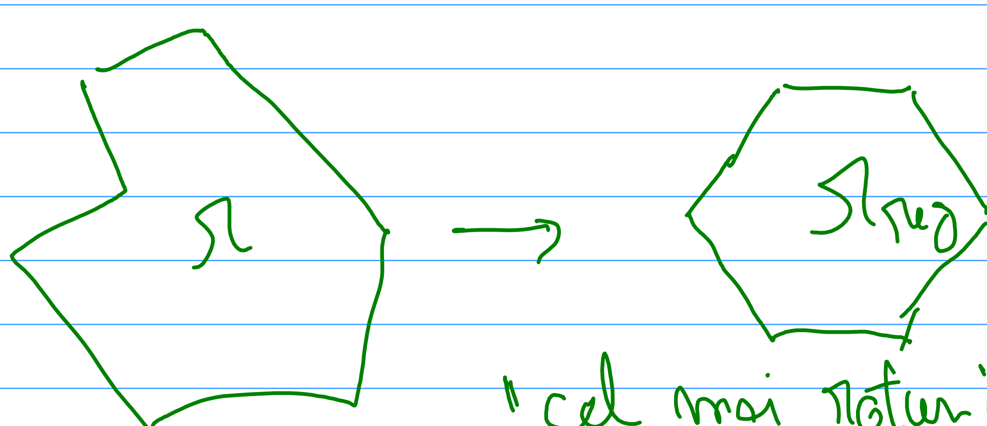
$|\Omega| = c$

Ω - poligon cu n laturi

$\Rightarrow \Omega_{opt}$ = poligonul regulat

(Demonstrații: mult)

Lagrange $\nabla Arie = \lambda \nabla Per$



"cel mai rotunjit poligon"

Conjectură: un rezultat plauzibil, intuitiv pe care am putea să încercăm să îl demonstrăm.

Poligoanele

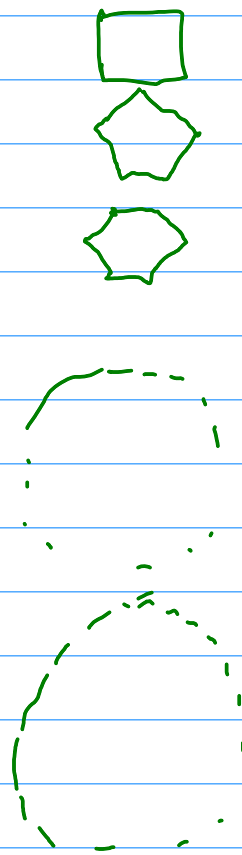
$n=4$

$n=5$

$n=6$

$n=20$

$n=100$



Când n este "mare" poligoanele regulate se apropie tot mai mult de un disc

Conjectură: P_1 este rezolvată de un disc.

• Dacă soluția pentru problema P_1 atunci și P_2 este soluționată de un disc.

$\boxed{P_1}$ $\min\limits_{|\Omega| = c} Per(\Omega) \to \Omega^*$ disc. $\boxed{c \in \mathbb{R}_+}$

$\boxed{P_2}$ $\max\limits_{Per(\Omega) = c \in \mathbb{R}_+} |\Omega|$

Presupunem că Ω_0 este soluție pt P_2

Ω_0 maximizează $|\Omega_0|$ când $Per(\Omega_0)$ este fix $= c$

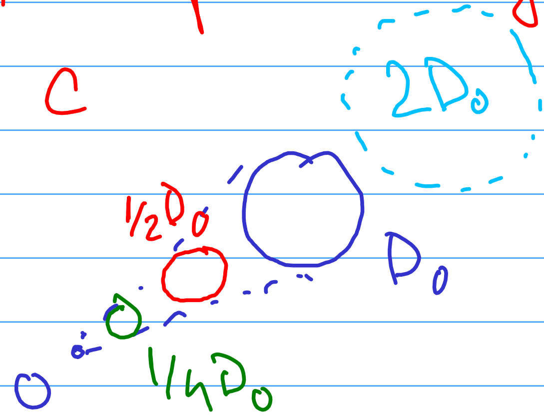
Luăm discul D_0 a.î. $|D_0| = |\Omega_0|$

Discul D_0 este optimal pt P_1 $\Rightarrow$

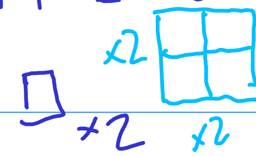
$$Per(D_0) \le Per(\Omega_0) = c$$

Printr-o dilatare (omotetie) se poate modifica D_0 pt a avea perimetrul c

Dilatare $t > 0 \mapsto tD_0$



Comportamentul ariei și perim la dilatări



$$|t\Omega| \overset{2D}{=} t^2|\Omega|$$

$$Per(t\Omega) \overset{2D}{=} t\,Per(\Omega)$$

$$D_0 \rightsquigarrow tD_0$$

$$Per(tD_0) = c$$

$$t\,Per(D_0) = c$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{c}{Per(D_0)} \geq 1}$$

Ce avem: $\Omega_0 \to$ sol pt P_2

$|D_0| = |\Omega_0|$ min. perim la arie constantă

tD_0 are același perimetru cu Ω_0

$\Rightarrow tD_0$ este formă admisibilă pt P_2 (verifică constrângerea)

$$|\Omega_0| \underset{\text{alegerea}}{=} |D_0| \underset{t\geq 1}{\leq} |tD_0| = t^2|D_0|$$

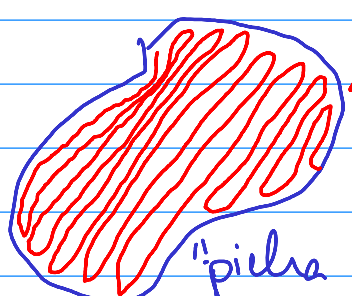
tD_0 are aceeași perimetru cu Ω_0 dar are arie $\geq |\Omega_0|$ care era deja cea mai mare arie posibilă pt $\{Per(\Omega) = c\}$

tD_0 este un disc. care este cel puțin la fel de performant ca și soluția optimală pt P_2.

$\Rightarrow$ P_2 are soluții care sunt <u>discuri</u>

<u>Pb izoperimetrică</u>

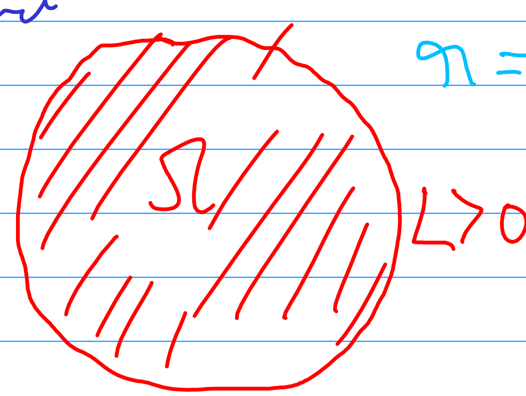
- <u>istoric</u> : legenda lui Dido.



o "frânghie" subțire de lungime considerabilă $L>0$

"pielea unui animal"

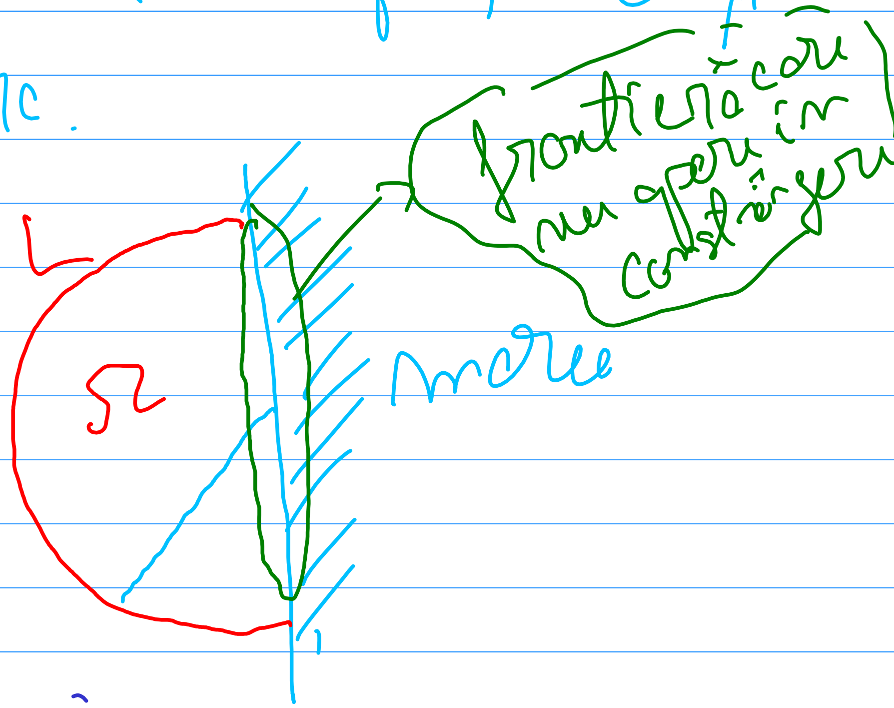
$r = \frac{L}{2\pi}$



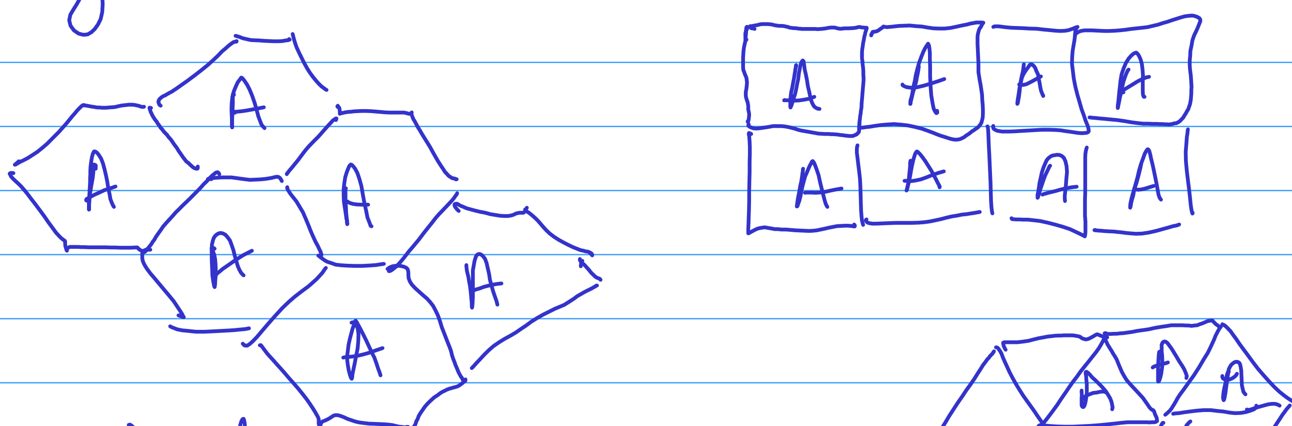
<u>Soluția</u>

Dacă putem utiliza o frontieră existentă (marea de exemplu) soluția este un semicerc.

$\Omega = \frac{L}{\pi}$



Fagurii de miere.



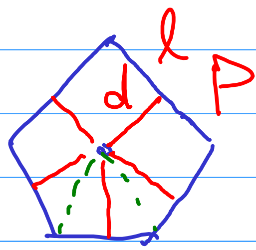
→ se poate calcula lungimea laturii → perim total

→ perim ~ costul construcției

→ prin comparație → rețeaua hexagonală minimizează perim.

Teoremă: Poligoanele regulate care au aceleași perimetru: mai multe laturi vor genera o arie mai mare.

(cest part pt P_2)



$$|P| = \frac{d}{2}\cdot \underbrace{l \cdot n}_{\text{const}} = C \cdot \frac{d}{2}$$

$$|P| \sim d$$

mai multe laturi $\Rightarrow$ d mai mare

$\Rightarrow$ $|P|$ crește.

Teoremă: Discul are aria mai mare decât orice poligon regulat cu aceleași perimetru.

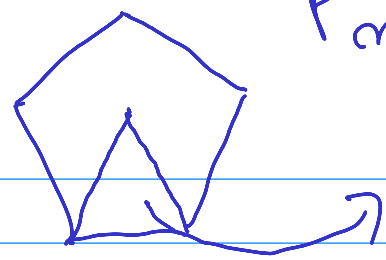
Dem: $P_n \rightarrow$ polig. reg. n laturi

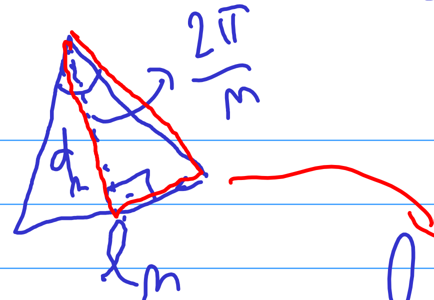
$Per(P_n) = c$

$|P_n|$ crescătoare în raport cu n

$n \rightarrow \infty \Rightarrow P_n \rightarrow D$

P_n (n laturi) $Per(P_n)=c$





$$l_n = \frac{1}{n}c = \frac{c}{n}$$

$$\frac{\frac{l_n}{2}}{d_n} = \tan\frac{\pi}{n}$$

$$d_n = \frac{l_n}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{c}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$d_n = \frac{c}{2\pi \dfrac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}} \to \frac{c}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \searrow 1$$

$$|P_n| \nearrow |D|$$

Demonstrație pt (P_2):

- Ω poligon cu n laturi și $Per(\Omega)=c$

$$\Rightarrow |\Omega| \underset{\text{(data trecută)}}{\leq} |P_n| \overset{\text{thm}}{\underset{\text{precedentă}}{\leq}} |D|$$

P_n: pol. reg. cu n laturi, perim $= c$

D: discul cu același perim.

- Ω poligon arbitrar cu $Per(\Omega) = C$
atunci $|\Omega| \le |D|$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad per(D) = C$

- Dacă orice formă în 2D poate fi aproximată oricât de bine cu poligoane de perim $= C$ atunci demonstrația lui P_2 este finalizată.

- Ω arbitrară în 2D de perim C
- P_n un șir de poligoane cu perim $= C$ a.î. $\boxed{P_n \to \Omega}$ (∂P_n se apropie din ce în ce mai mult de $\partial\Omega$)

$$|P_n| \le |D| \quad (Per(D) = C)$$
$$\downarrow n\to\infty \qquad \downarrow$$
$$|\Omega| \le |D|$$

$\Rightarrow$ $|\Omega| \le |D|$ și discul D rezolvă P_2

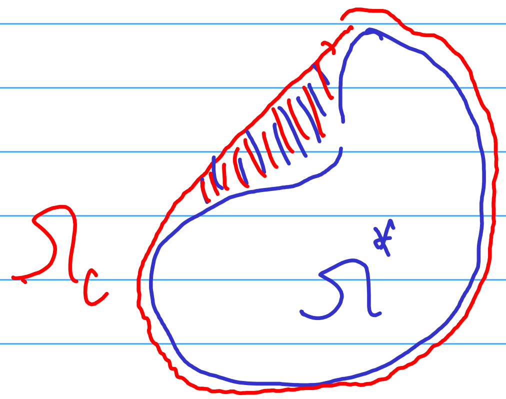
Rezolvăm P_2 $\max_{Per(\Omega)=c} |\Omega|$

Presupunem: există o soluție Ω^*

Găsim proprietăți pt Ω^*

1. Convexitatea (2D): presupunem Ω^* neconvexă

înlocuim Ω^* cu anvelopa convexă



→ cea mai "mică" mulțime convexă ce conține Ω^*

→ se mărește aria

→ se micșorează perimetrul

$|\Omega^*| \le |\Omega_c|$

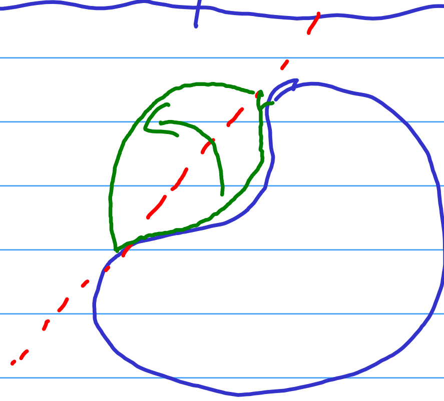
$Per(\Omega^*) \ge Per(\Omega_c)$

Dilatăm Ω_c pt a recupera perim. $= c$ ⇒ aria se mărește și mai mult.

Pt orice formă neconvexă există una convexă cu arie mai mare și același perimetru.

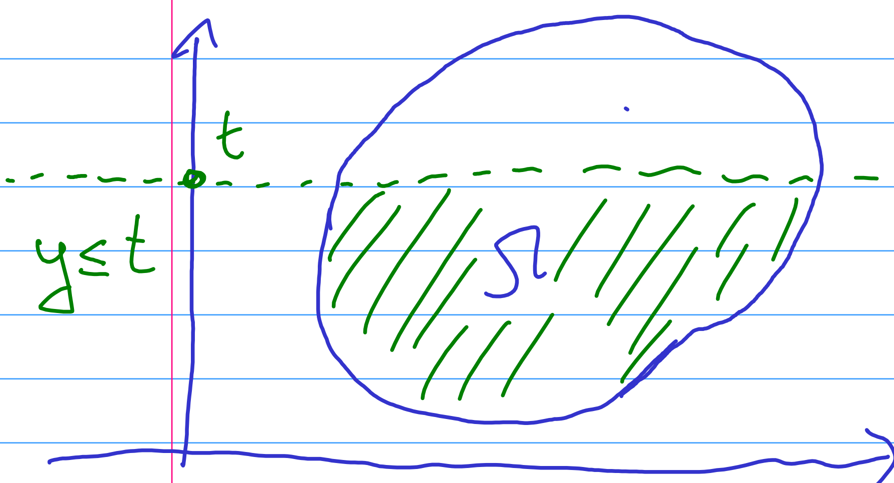
⇒ **soluția este convexă**

Demonstrații alternative



- reflectăm partea ne convexă.
- mărim aria
- păstrăm perimetrul

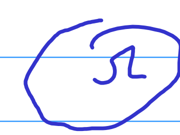
Soluția este un disc:



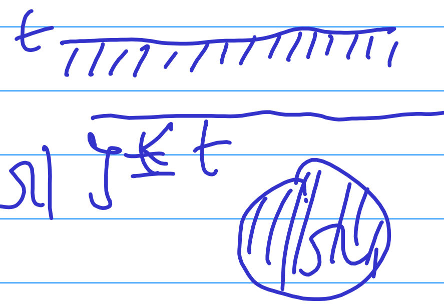
- există soluții simetrice
- $t \in \mathbb{R}$ considerăm $f(t) = |\Omega \cap \{y \leq t\}|$

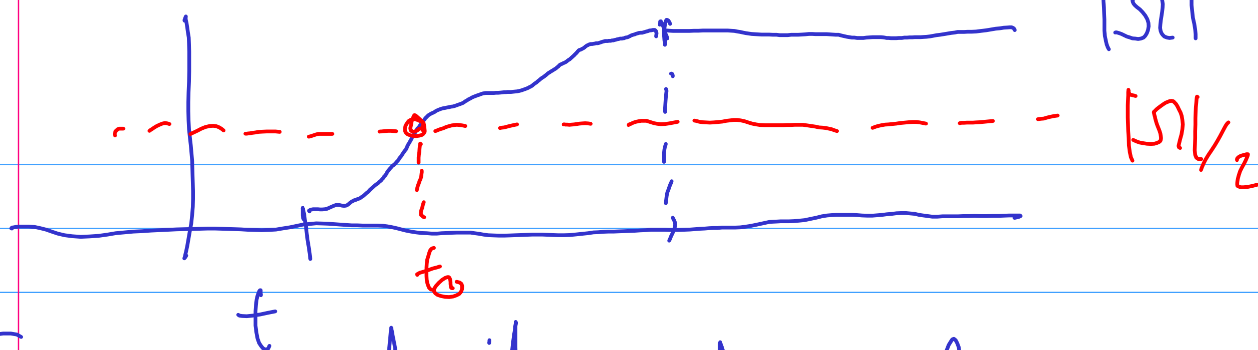
Proprietăți: a) f este continuă

- t suficient de mic $\Rightarrow f(t) = 0$



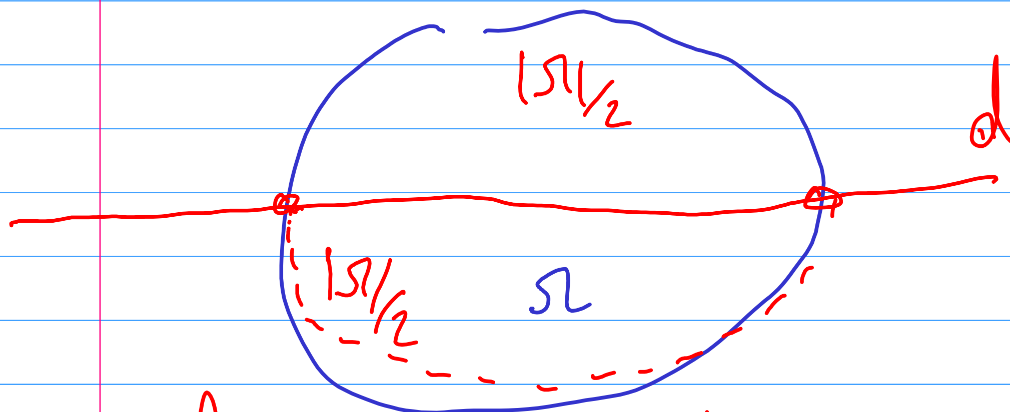
- t suficient de mare $\Rightarrow f(t) = |\Omega|$





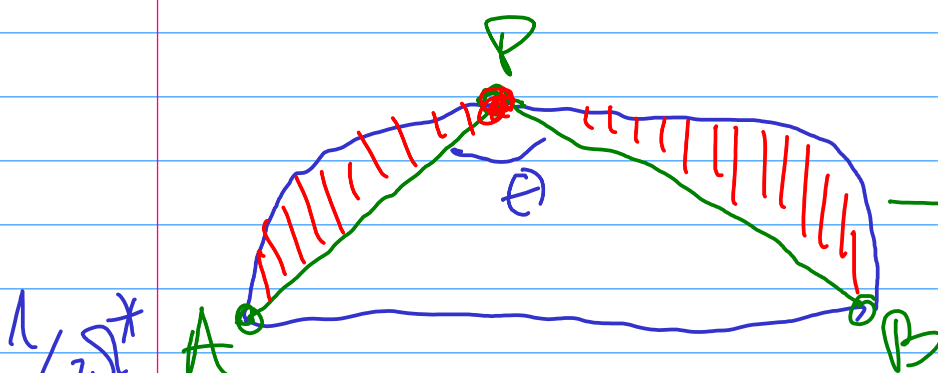
Teorema valorilor intermediare

$\Rightarrow$ $\exists\ t_0$ a.î. $|\Omega \cap \{y \le t_0\}| = \dfrac{|\Omega|}{2}$



- alegem jumătatea cu cel mai mic perimetru $\Rightarrow$ prin simetrizare obținem o formă simetrică care are aceeași arie dar un perimetru mai mic.
- există soluții simetrice pt P_1 (și pt P_2)

Luăm jumătate din Ω^* și presupunem că această jumătate nu este un semi disc.



- Fie P un pct arb $P \in \partial\Omega^*$.
- AB axa de simetrie

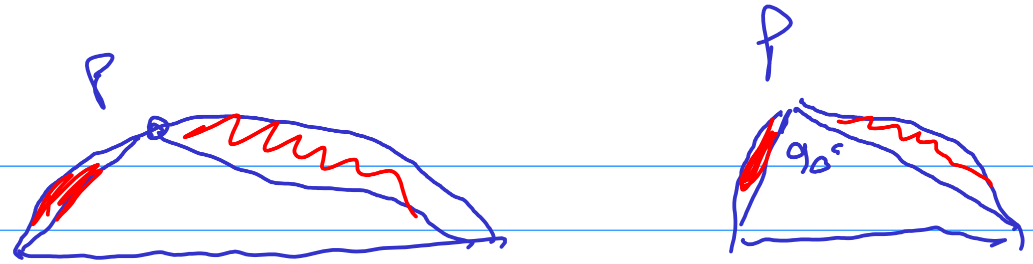
Ω^* nu e disc $\Rightarrow \exists P$ a.î. $\measuredangle APB \neq 90^\circ$

- modificăm figura păstrând regiunile hașurate fixe.
- perimetrul se păstrează.
- aria ΔAPB se modifică

$$\Delta APB = \frac{PA \cdot PB \cdot \sin\theta}{2}$$

- $\sin\theta \leq 1$ și $\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Configurația de arie maximă coincide cu $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ contradicție cu optimalitatea lui Ω^*



$\Rightarrow$ prin urmare: $\forall P \in \partial\Omega^*$

avem $\sphericalangle APB = 90°$

$\Rightarrow$ Ω^* este un disc.