Curs 3. Introducere: teoria optimizării matematice

Opt formelor

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$$

Ω → formă geometrică

$\mathcal{A}$ ← clasă forme admisibile

↓

Opt. pentru funcții $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

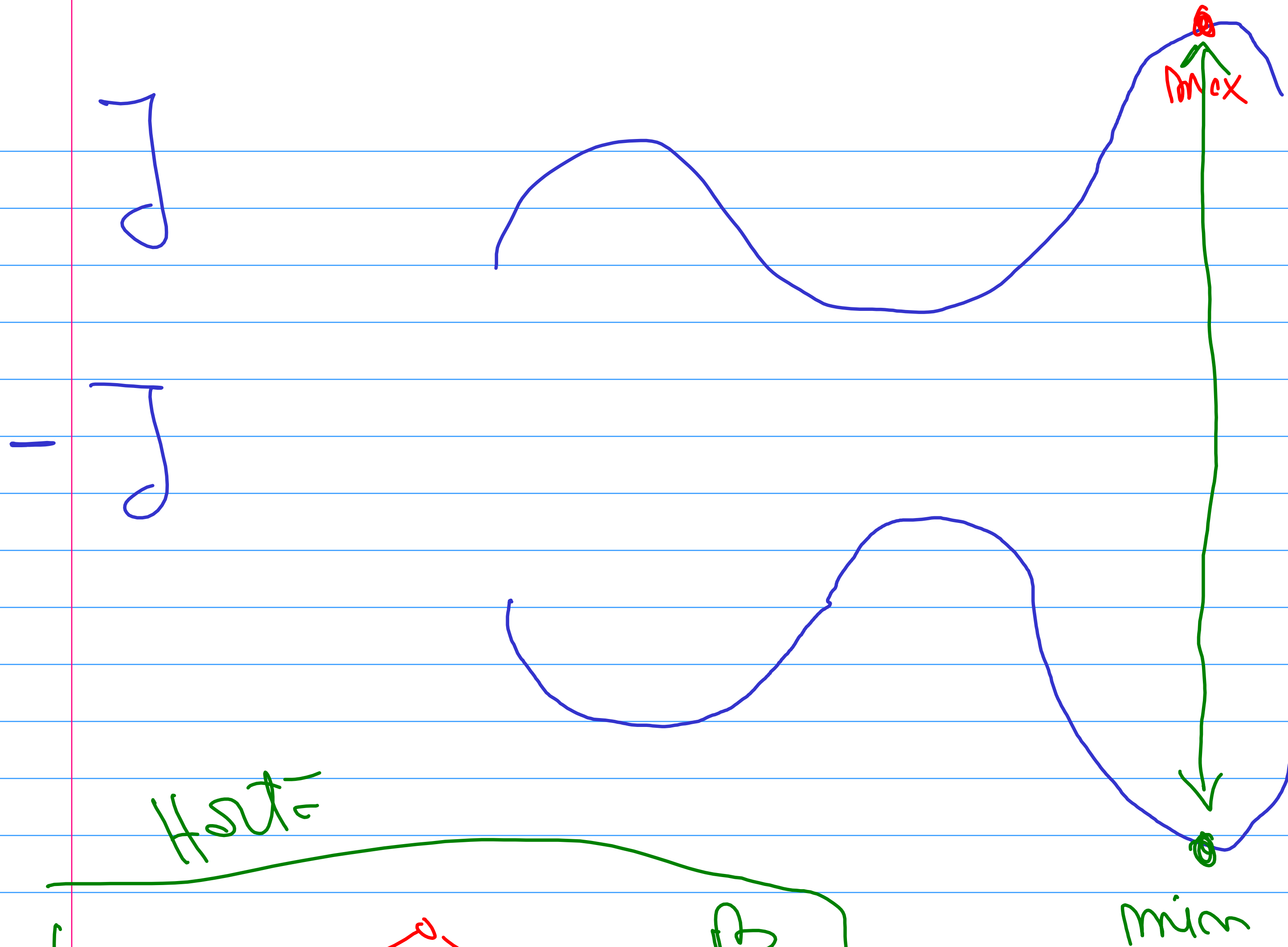
$$\min_{x \in X} J(x)$$

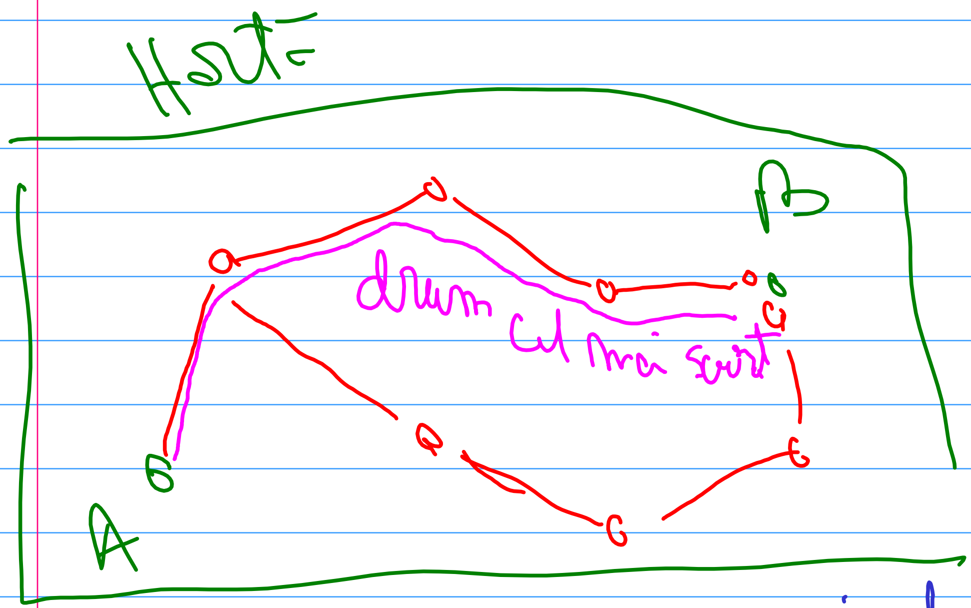
x → variabilă de opt

X ← mulțimea var. admisibile

J o funcție ce se evaluează pornind de la variabila x

$$\max J(x) \rightsquigarrow \min(-J(x))$$



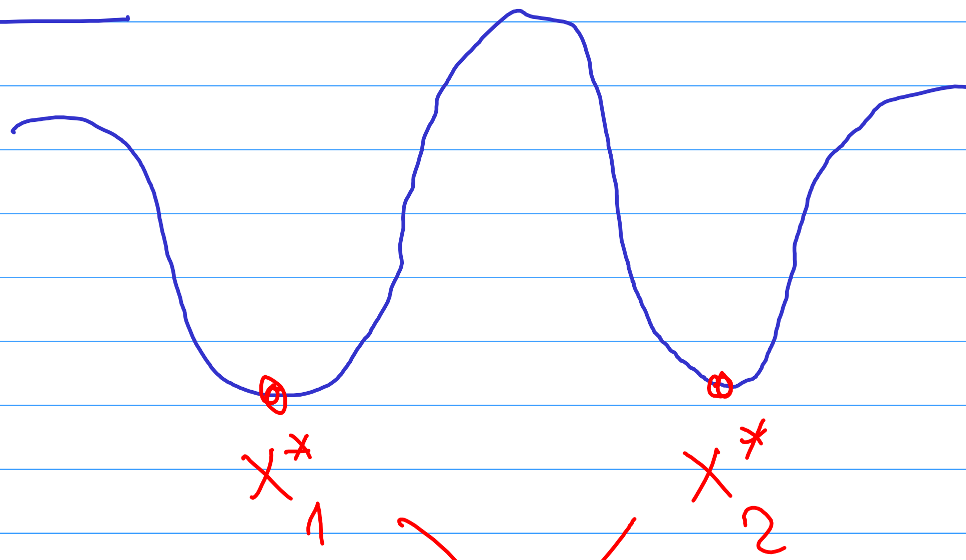


$$\min_{x \in A} J(x) \quad \rightarrow \quad \inf_{x \in A} J(x) > -\infty$$

$$\rightarrow \quad \exists\, x^* \in A \text{ astfel încât } J(x^*) = \inf_{x \in A} J(x)$$

existență

unicitate?



ambele minime globale pentru funcția ilustrată.

Ideal: să găsim soluția

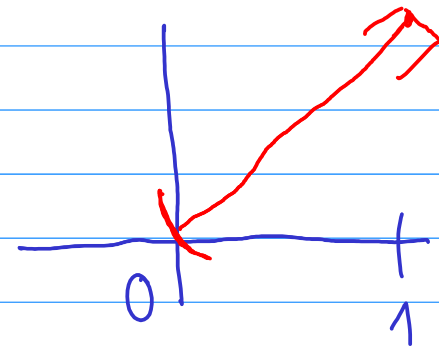
- să demonstrăm explicit că

$$J(x^*) \leq J(x) \quad \forall x \in A$$

- găsirea unor ecuații verificate de soluția x^* și rezolvarea acestora (condiții de optimalitate)

Existența soluțiilor:

1. $\inf_{x\in(0,1]} x$



→ grafic: soluția ar trebui să fie $x=0$

– <u>DAR</u>: $x=0$ nu aparține mulțimii pt care efectuăm optimizarea.

$\forall x\in(0,1]$ avem $x\geq 0$

$$\Rightarrow \inf_{x\in(0,1]} x = 0 \quad \text{DAR} \quad x\neq 0 \ \forall x\in(0,1]$$

– $f(x)=x$ este funcție continuă

– $(0,1]$ nu este compact (nu este închisă)

$\Rightarrow$ nu există soluții pt $\min_{x\in(0,1]} x$

$$\inf_{x\in[0,1)} 1-x$$

(dim finită)

Remember: K compactă:

$$\begin{cases} - K \text{ mărginită} \\ \quad \exists M>0 \text{ a.î. } K \subset [-M, M] \\ - K \text{ închisă} \end{cases}$$

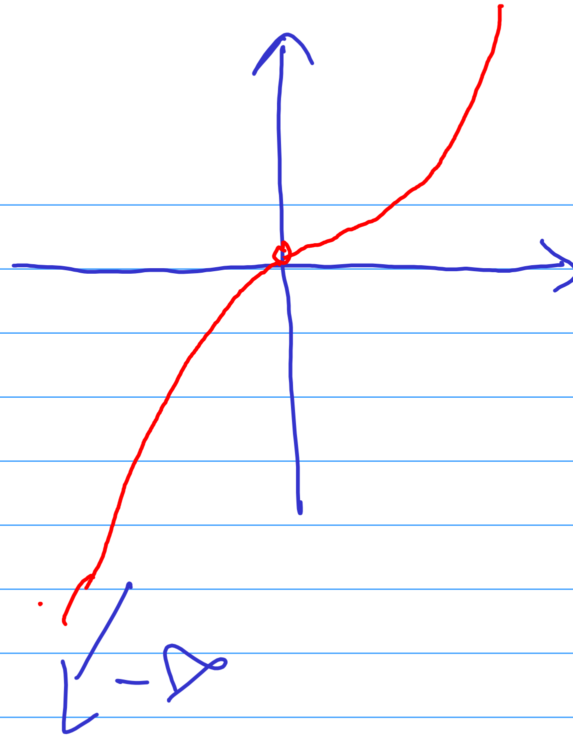
$(x_n) \subset K$ și $x_n \to x^*$

$\Rightarrow x^* \in K$

2. $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$, f continuă

- o funcții continuă își atinge valorile extremele pe o mulțime compactă.

3. $\inf_{x\in\mathbb{R}} x^3$



$\inf_{x\in\mathbb{R}} x^3 = -\infty$

$\Rightarrow$ nu există soluții.

$\rightarrow \inf_{x\in\mathbb{R}} e^x$

$\inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = 0$, $e^x > 0$

Dar nu există $x\in\mathbb{R}$ a.î. $e^x = 0$

$\Rightarrow \min_{x\in\mathbb{R}} e^x$ nu admite soluții

$$\boxed{\text{Thm: } K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ compactă}\quad \min_{x \in K} f(x) \text{ admite soluţie.}\quad (f \text{ continuă})}$$

$$\min_{x \in \mathcal{A}} J(x) \qquad \mathcal{A} \neq \emptyset$$

1. $\boxed{\inf_{x \in \mathcal{A}} J(x) > -\infty}$ mărginire inferioară

$\exists (x_n) \subset \mathcal{A}$ a.î. $J(x_n) \to \inf_{x \in \mathcal{A}} J(x)$

ŞIR MINIMIZANT

2. Compacitate: extragem un subşir convergent $x_{n_k} \to x^* \in \mathcal{A}$

3. Continuitate: $J(x_{m_k}) \to J(x^*)$

Regrupăm informațiile

$$J(x_{m_k}) \nearrow \inf_{x \in A} J(x) = J(x^*), \quad J(x_{m_k}) \searrow J(x^*)$$

$x^* \in A$

$$J(x^*) = \inf_{x \in A} J(x)$$

$\Rightarrow \min_{x \in A} J(x)$ admite soluție

Relaxare pt continuitate:

$$\liminf J(x_n) \geq J(x^*)$$

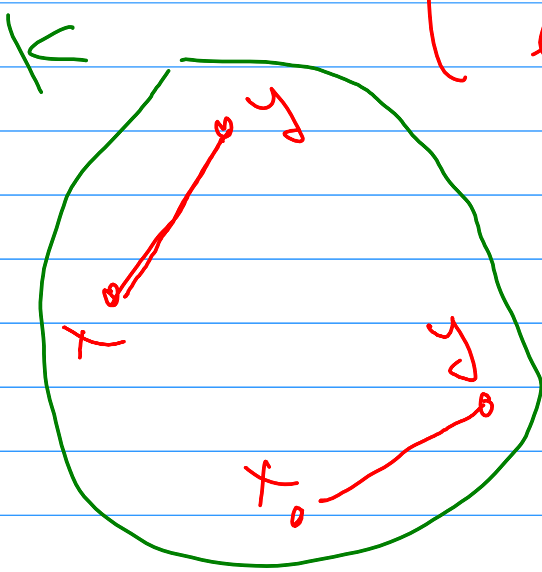
J semi continuu inferior.

Unicitati:

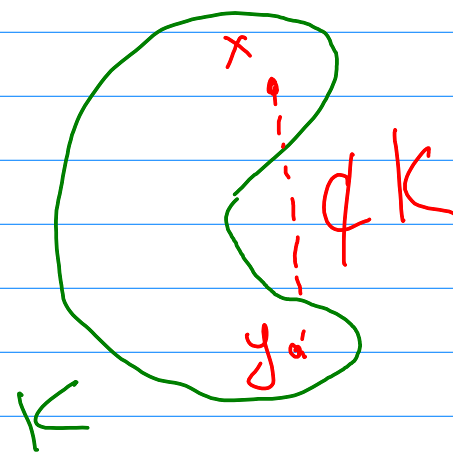
K convexă: $x, y \in K$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$

segmentul $[x,y]$ este conținut în K



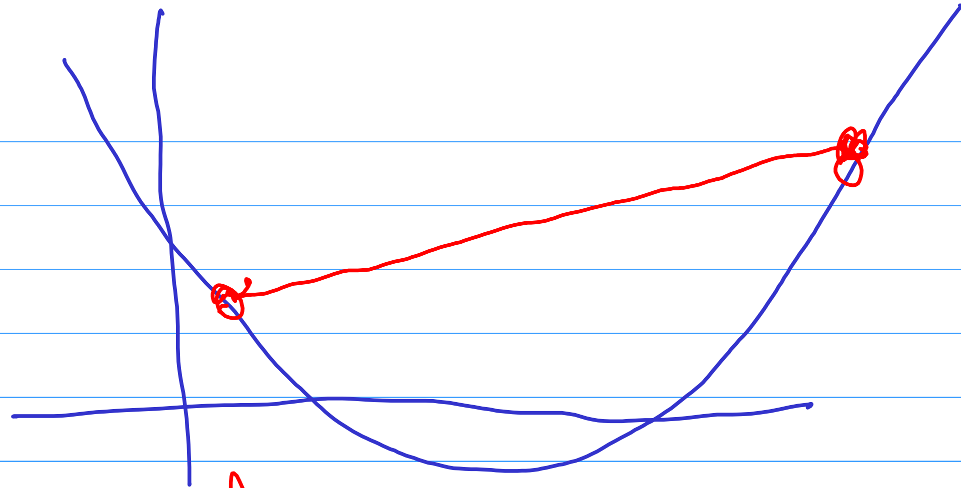
convex



non-convex

$f : K \to \mathbb{R}$ convexă

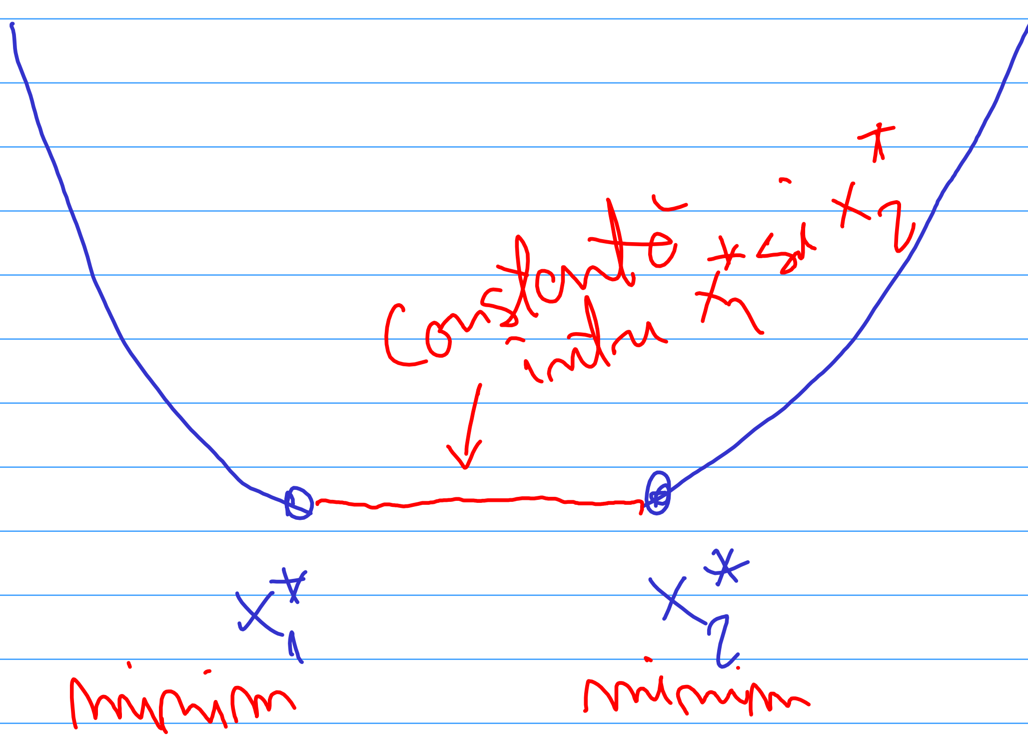
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



→ graficul funcției convexe este "sub" orice secțiune cu hiperplan

→ graficul funcției este "deasupra" oricărei tangente".

Funcție convexă cu 2 minime

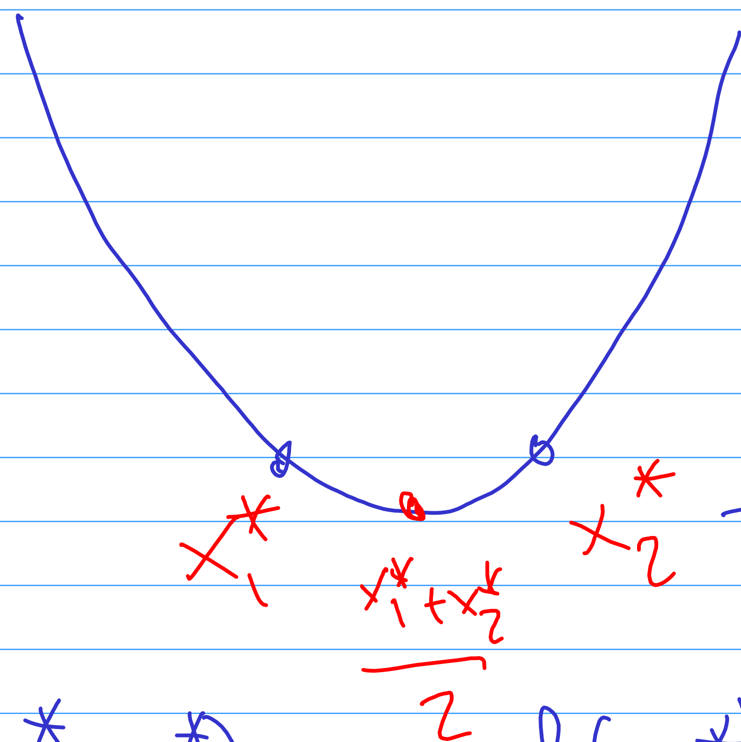


- strict convexă dacă

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

$x \neq y$

$\lambda \in (0,1)$



f str. convexă

$\to$ puncte de minim

$$f\left(\frac{x_1^*+x_2^*}{2}\right) < \frac{f(x_1^*)+f(x_2^*)}{2} = \inf f$$

Contradicție cu minimalitatea lui x_1^*, x_2^*. Deci minimul (dacă există) este unic.

Identificarea unei soluții

$f(x) = (x-1)^2 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

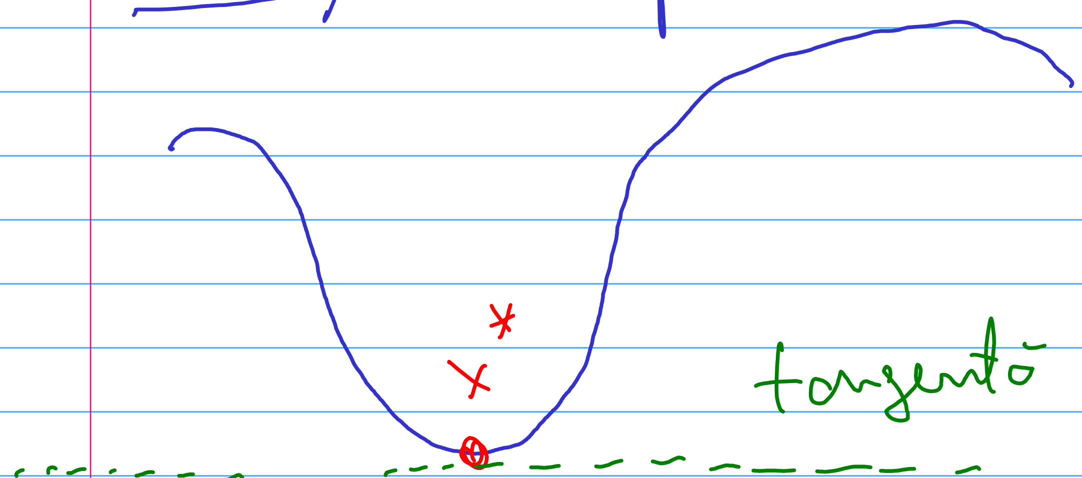
- $f(x) \geq 0$ (un nr. la pătrat)
- Marginea inf 0 este atinsă?

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 0$

x^*

Condiții de optimalitate



tangentă orizontală.

$\Updownarrow$

$f'(x^*) = 0$

<u>Remember</u>: ecuația tangentei în $(x_0, f(x_0))$ la graficul unei funcții derivabile.

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{panta dreptei}} (x - x_0) + f(x_0)$$

polinomul Taylor de ordin 1

<u>Thm Fermat</u>

Dacă $x^* \in (a,b)$ și x^* este minim / maxim local pentru $f \in C^1$ atunci $f'(x^*) = 0$.

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (x-1)^2$$

Dacă avem soluție atunci derivata se anulează.

$$f'(x) = 0 \iff 2(x-1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 1$$

$f'(x) = 0$ se reduce problema la un nr. finit de cazuri (în anumite cazuri)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ = derivata în rap cu x_i presupunând că celelalte sunt constante.

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 0 + 1 + 0$$

(x_2 constantă) $= 2x_1 + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$$

- $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2} \cdot x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^2 \cdot e^{x_1^2} \cdot 2x_1$$

punctul în care evaluăm derivata

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_1^2} \cdot 2x_2$$

- $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

gradient

- Dacă x minimizează f pe $\mathbb{R}^n$ atunci $\underbrace{\nabla f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n}_{\text{sistem de ecuații}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Funcția pătratică: analogul funcției de gradul 2.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dim m?

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T \underset{\in \mathbb{R}^{m\times m}}{A} x - \underset{\in \mathbb{R}^{m}}{b^T} x$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \underset{1\times m}{\left(x^T \right)} \underset{m \times m}{\left(A \right)} \underset{m\times 1}{\left(x \right)}}_{(1\times m)(m\times m)(m\times 1)} - \underbrace{\underset{1\times m}{\left(b \right)} \underset{m\times 1}{\left(x \right)}}_{\in \mathbb{R}}$$

$$(1\times m)(m\times m)(m\times 1) \rightarrow 1\times 1$$

$f(x) \in \mathbb{R}$

Remarcă: $b^T x =$ produs scalar

$$(b_1 \dots b_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m$$

$$= \sum b_i x_i$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod scalar}}}{b \cdot x}$$

Desc. Taylor:

$$f(x + \underset{\substack{\uparrow \\ h \text{ "mic"}}}{h}) = f(x) + \nabla f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod scalar}}}{\cdot} h + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{rest de ordin} \geq 2}}{(\quad)}$$

$$f(x+h) = \frac{1}{2}(x+h)^T \cdot A(x+h) - b^T(x+h)$$

$$= \frac{1}{2}x^TAx + \frac{1}{2}x^TAh + \frac{1}{2}h^TAx + \frac{1}{2}h^TAh - b^Tx - b^Th$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x^TAx - b^Tx}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}x^TAh + \frac{1}{2}h^TAx - b^Th}_{\text{ordinul 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}h^TAh}_{\text{ord 2}}$$

$$= f(x) + \underbrace{(Ax-b)}_{\nabla f(x)} \cdot h + \underbrace{\frac{1}{2}h^TAh}_{\text{rest ord} \geq 2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = Ax - b$$

Dacă $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow Ax = b$

Pt o funcție pătratică dacă avem un minim x^* atunci x^* verifică sistemul de ecuații $Ax^* = b$

$$x^* = \underbrace{A^{-1}b}_{\text{găsim soluția}}$$

Aplicații:

- A sym. definit pozitivă

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^T A x \geq 0$

$$A^T = A$$

(dificil verificabilă)

A sym, A pozitiv definită $\Leftrightarrow$ valorile proprii ale lui A sunt > 0

Val proprie: $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\exists v \in \mathbb{R}^n$

$$Av = \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} v$$

$(A)(v) =$ un vector colinear cu v

- Caracterizare mai precisă

A sym poz def $\iff$

$$\boxed{x^T A x \geq \lambda_1(A) |x|^2}$$

Problemă: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ admite

~~Soluții.~~

Soluție:

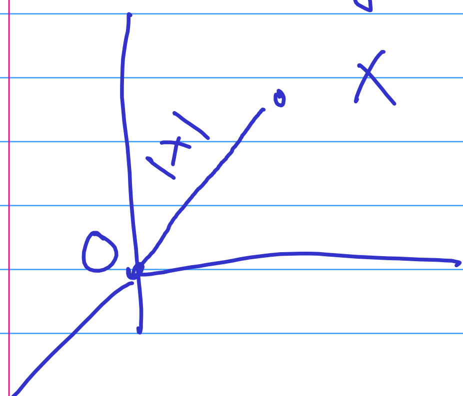
$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \geq \frac{\lambda_1}{2} |x|^2 - b^T x$$

Ineg Cauchy-Schwarz

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$|b \cdot x| \leq \|b\| \cdot \|x\|$$

$$f(x) \geq \underbrace{\frac{\lambda}{2}|x|^2 - |b| \cdot |x|}_{\text{funcție de gradul 2 în } |x|}$$



$|x| \to \infty$

$\Rightarrow f(x) \to \infty$

Dacă dorim să minimizăm f nu are rost să ne depărtăm prea mult de origine.

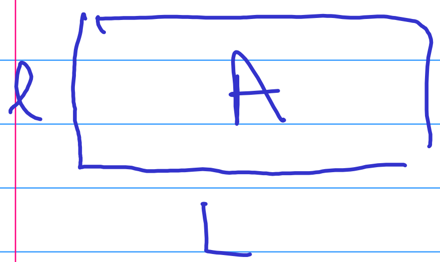
$\Rightarrow$ e suficient să studiem f într-o regiune compactă

- f continuă

$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ admite soluții

<u>Probleme</u>

1. Minimizați perimetrul unui dreptunghi de arie $A > 0$ dată.



$$l \cdot L = A$$

$$\min_{l \cdot L = A} 2(l + L)$$

<u>Aplicații</u>: o casă de înălțime dată, dorim să avem o suprafață A dată, minimizăm costul construcției.

- se optimizează izolația casei dacă se limitează lungimea pereților ext.

Rezolvare: $L \cdot l = A$ fix > 0

- putem exprima L în funcție de l: $L = \frac{A}{l}$

Problema devine

$$\min_{l>0} \left(l + \frac{A}{l} \right)$$

Dem 1: tabel de variație pt $l \in (0, \infty)$

$$f(l) = l + \frac{A}{l}$$

$$f'(l) = 1 - \frac{A}{l^2}$$

Studiem semnul lui f':

$$f'(l) = 0 \qquad \text{(ec. lui Fermat)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{A}{l^2} \Rightarrow l = \sqrt{A}$$

l	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
$f'(l)$		$-$	0	$+$	
$f(l)$		$\searrow$		$\nearrow$	

val minimală atinsă pentru $l = \sqrt{A}$

$$L = \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$ perimetrul este minimal pentru pătrat.