MBA em Ciência de Dados

Estatística para Ciência de Dados

Avaliação Final

Aluno: Benicio Ramos Magalhaes

Material Produzido por Mariana Cúri
Cemeai - ICMC/USP São Carlos

As respostas devem ser fornecidas no Moodle. O notebook é apenas para a implementação dos códigos que fornecerão as respostas

Os dados do arquivo Brain, em anexo, referem-se ao peso do cérebro (g), tamanho da cabeça (cm3) de 237 adultos, identificados por sexo e grupo etário. O estudo teve por objetivo verificar se:

1) Há diferença no peso cerebral entre os sexos? E entre os grupos etários?
2) O tamanho da cabeça é preditor do peso cerebral e, neste caso, há diferença nessa relação entre os sexos e entre os grupos etários?

3) Estime o peso médio do cérebro de homens e de mulheres (pontual e intervalar).

Interprete seus resultados e verifique se as suposições dos métodos são adequadas a estes dados.

Se uma das suas respostas (aos itens 1, 2 ou 3) aplicar, além da estatística clássica, também a inferencial (de maneira adequada, claro), sua nota será acrescida de 1 ponto (ou seja, sua prova fica valendo 11 pontos).

O formato de entrega será de dois arquivos:

1 PDF, com os resultados resumidos e comentados e outro em Jupyter Notebook, com os códigos usados para a obtenção dos resultados. Este notebook, deve ser comentado de forma a facilmente identificar os códigos de cada análise.

1) Há diferença no peso cerebral entre os sexos? E entre os grupos etários?

Como o objetivo é comparar duas populações com relação a uma variável quantitativa (peso cerebral) baseado numa amostra, o ideal é usarmos um teste de hipótese. Portanto, iremos verificar se existe diferença no peso cerebral entre os sexos aplicando um teste de hipótese para igualdade das médias.

Para isto, algumas suposições que devemos verificar:

- **Se existe ou não dependência entre as amostras (medições pareadas ou não pareadas)**
- **Se os dados seguem uma distribuição normal.**

OBS: Após análise para os sexos, iremos fazer a mesma análise para faixa etária.

Passos para o teste de hipótese:

a) Especificar as hipóteses H_0 e H_a;

H_0: $\mu_1 = \mu_2$
Peso cerebral do homem é igual ao peso cerebral da mulher (hipótese nula)

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$
Peso cerebral do homem não é igual ao peso cerebral da mulher (hipótese alternativa)

b) Especificar a estatística do teste e sua distribuição, sob H_0;

```
Estatística dos dados para Homem:

count     134.000000
mean     1331.858209
std       108.933390
min      1120.000000
25%      1252.750000
50%      1313.500000
75%      1400.000000
max      1635.000000
Name: Peso, dtype: float64

Estatística dos dados para Mulher:

count     103.000000
mean     1219.145631
std       103.829933
min       955.000000
25%      1146.000000
50%      1220.000000
75%      1290.000000
max      1520.000000
Name: Peso, dtype: float64
```

Vamos verificar a normalidade da distribuição com a realização de alguns testes.

Vamos considerar os seguintes testes para distribuição normal:

- **Kolmogorov-Smirnov**
- **Anderson-Darling**
- **Shapiro-Wilk**

Resultados dos testes de normalidade para homem:

Teste	Estatística	P-Valor	Resultado (IC 5%)
Kolmogorov-Smirnov	0.07319296053954616	0.4535070134115867	Distribuição é normal
Anderson-Darling	0.7592588134145046	0.765	Distribuição é normal
Shapiro-Wilk	0.9780169129371643	0.02875436283648014	Distribuição NÃO é normal

O resultado de 2 testes foram favoráveis a dizer que os dados tem distribuição normal dado o intervalo de confiança de 5%. Assim, iremos considerar o peso para homem com uma distribuição normal gaussiana.

Resultados dos testes de normalidade para mulher:

Teste	Estatística	P-Valor	Resultado (IC 5%)
Kolmogorov-Smirnov	0.04574294927683009	0.9823678682451854	Distribuição é normal
Anderson-Darling	0.14292747443232656	0.759	Distribuição é normal
Shapiro-Wilk	0.9959982633590698	0.9919323921203613	Distribuição é normal

Os resultados de todos os testes foram favoráveis a dizer que os dados tem distribuição normal dado o intervalo de confiança de 5%. Assim, iremos considerar o peso para mulher com uma distribuição normal gaussiana.

Análise de dependência:

Considerando a natureza dos dados, as medições sugerem que as amostras são independentes, pois a medição do peso do cérebro são feitos em indivíduos diferentes e, portanto, não aparentam ter relação de dependência. Para fundamentarmos melhor essa afirmação, iremos realizar um teste Z para a hipótese nula de que a média das amostras são iguais.

Resultado: 0.9999769904283696
Amostras independentes

c) Fixar o nível de significância do teste (α)

Iremos considerar o nível de significância do teste de 5%, ou seja, α = 0.05

d) Calcular o p-valor (ou região crítica do teste)

Como já concluímos que as amostras são independentes e ambas seguem distribuição normal, precisamos avaliar agora se existe uma relação de igualdade das variâncias para decidir qual teste t de Student para médias de duas amostras iremos aplicar.

Para isso, iremos aplicar um teste de levene.

Resultado: 0.767016022271913
Não existe grande diferença na variância.

Teste t de student (bicaudal):

Iremos agora fazer o teste de hipótese das médias da variável média do peso cerebral entre os sexos serem iguais. Para isso, será realizado o teste t de Student (bicaudal) para média de duas populações Normais com variâncias iguais.

Resultado: 3.919241152559185e-14
Rejeita hipótese H0

e) Decidir entre H_0 e H_a, comparando com o p-valor com α

Considerando os resultados obtidos no teste t de Student, precisamos rejeitar a hipótese H0, ou seja, com α = 0.05 podemos afirmar que o peso cerebral do homem não é igual ao peso cerebral da mulher.

Resposta:

Sim. Existe diferença no peso cerebral entre os sexos.

E entre os grupos etários?

Realizando mesma análise anterior para os grupos etários.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$
O peso cerebral de pessoas acima de 45 anos é igual ao de pessoas abaixo de 45 anos. (hipótese nula)

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$
O peso cerebral de pessoas acima de 45 anos não é igual ao de pessoas abaixo de 45 anos. (hipótese alternativa)

```
Idade maior que 45 anos:
count     127.000000
mean     1263.937008
std       120.925712
min       955.000000
25%      1180.000000
50%      1250.000000
75%      1332.500000
max      1620.000000
Name: Peso, dtype: float64

Idade menor que 45 anos:
count     110.000000
mean     1304.736364
std       116.409959
min      1027.000000
25%      1227.500000
50%      1301.000000
75%      1370.750000
max      1635.000000
Name: Peso, dtype: float64
```

Resultados dos testes de normalidade para idade maior que 45 anos:

Teste	Estatística	P-Valor	Resultado (IC 5%)
Kolmogorov-Smirnov	0.054175986782391106	0.8500369044822889	Distribuição é normal
Anderson-Darling	0.32573942729172245	0.764	Distribuição é normal
Shapiro-Wilk	0.9917106032371521	0.6554725170135498	Distribuição é normal

Resultados dos testes de normalidade para idade menor que 45 anos:

Teste	Estatística	P-Valor	Resultado (IC 5%)
Kolmogorov-Smirnov	0.06000072085469621	0.8232879168286493	Distribuição é normal
Anderson-Darling	0.41369054165920716	0.761	Distribuição é normal
Shapiro-Wilk	0.9877879619598389	0.42216619849205017	Distribuição é normal

Resultado teste Z:

Resultado: 0.09191724753887 57
Amostras independentes

Iremos considerar o nível de significância do teste de 5%, ou seja, α = 0.05

Resultado t de Student (bicaudal, independente e distribuição normal):

Resultado: 0.008959602315452554
Rejeita hipótese H0

Considerando os resultados obtidos no teste t de Student, precisamos rejeitar a hipótese H0, ou seja, com α = 0.05 podemos afirmar que o peso cerebral de pessoas acima de 45 anos não é igual ao de pessoas abaixo de 45 anos.

Resposta:

Sim. Existe diferença no peso cerebral entre os grupos etários.

2) O tamanho da cabeça é preditor do peso cerebral e, neste caso, há diferença nessa relação entre os sexos e entre os grupos etários?

Inicialmente iremos verificar se o tamanho da cabeça é realmente preditor do peso cerebral. Vamos utilizar um modelo de regressão linear simples sendo X composto de uma única variável explicativa (tamanho da cabeça). A interpretação para este modelo nos ajudará a encontrar a resposta para essa primeira parte da pergunta.

Modelo 1 - Peso ~ Tamanho

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Peso	R-squared:	0.639
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.638
Method:	Least Squares	F-statistic:	416.5
Date:	Thu, 18 Jun 2020	Prob (F-statistic):	5.96e-54
Time:	01:00:06	Log-Likelihood:	-1350.3
No. Observations:	237	AIC:	2705.
Df Residuals:	235	BIC:	2711.
Df Model:	1		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	325.5734	47.141	6.906	0.000	232.701	418.446
Tamanho	0.2634	0.013	20.409	0.000	0.238	0.289

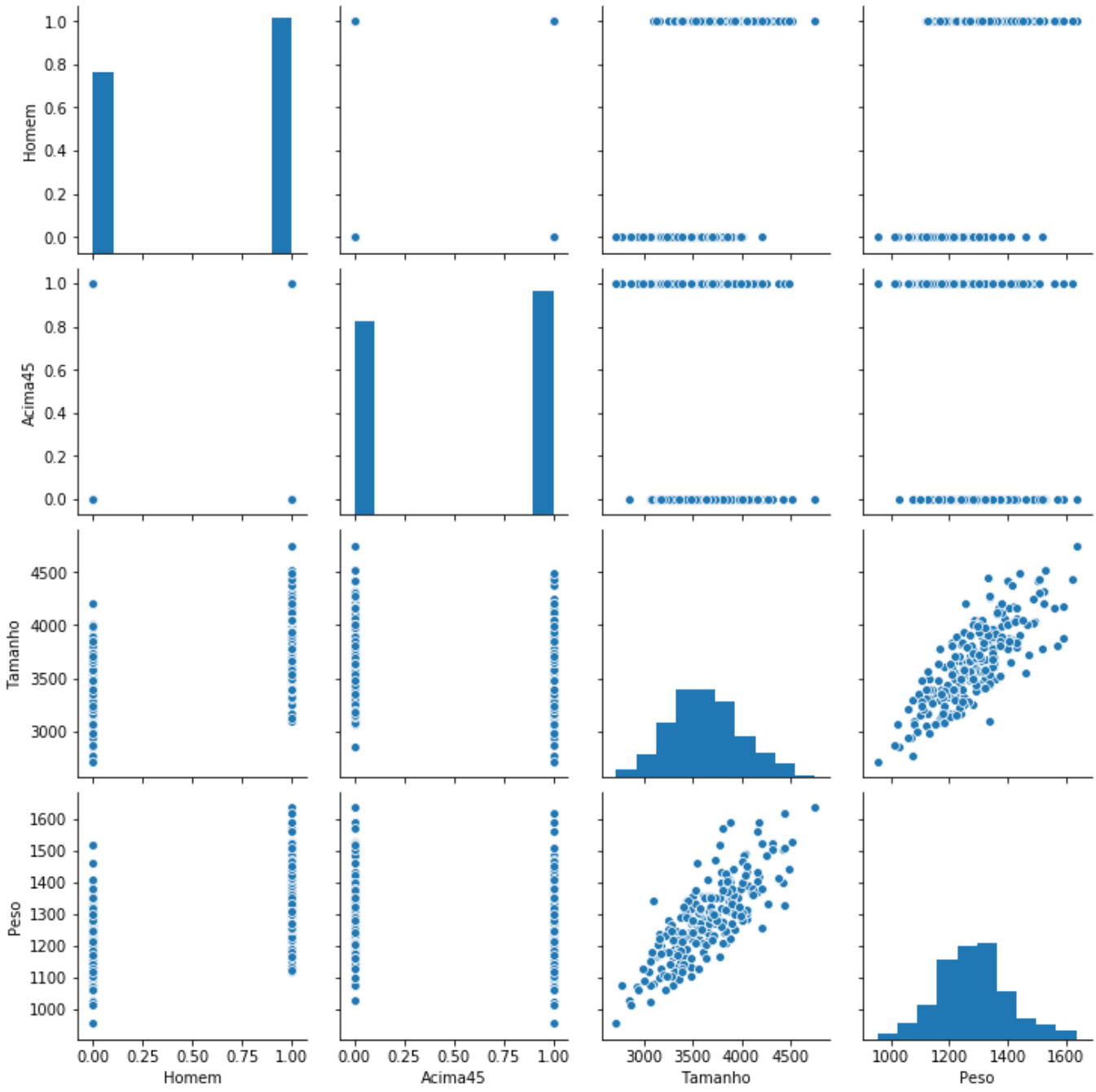
Omnibus:	8.329	Durbin-Watson:	1.843
Prob(Omnibus):	0.016	Jarque-Bera (JB):	8.665
Skew:	0.366	Prob(JB):	0.0131
Kurtosis:	3.584	Cond. No.	3.66e+04

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 3.66e+04. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.

O parâmetro $R^2_{Ajustado}$ nos diz que apenas com o Intercepto e Tamanho já temos 64% da variabilidade da variável Peso explicada, portanto, isso é um forte indicador de ser um preditor para Peso.

Iremos realizar também uma análise de correlação e dos gráficos de dispersão com dois objetivos:

- **Verificar a correlação entre Tamanho e Peso, para embasar melhor o fato de que Tamanho é preditor de Peso.**
- **Verificar problemas de multicolinearidade e simplificar o modelo final. Se as variáveis preditoras apresentarem correlações altas entre si, resulta na possibilidade de termos fatores redundantes no modelo e isso poderá aumentar a variância dos coeficientes da regressão, tornando-os instáveis.**



Correlação:

	Homem	Acima45	Tamanho	Peso
Homem	1.000000	0.088652	0.514050	0.465266
Acima45	0.088652	1.000000	-0.105428	-0.169438

É possível observar uma forte relação entre a variável preditora Tamanho e a variável resposta Peso (80%), o que sugere que de fato ela está bem correlacionada com Peso e, portanto, pode ser muito útil para predizer seus valores.

Analisando as preditoras, destacamos a relação entre Tamanho e Homem (51%), o que poderia gerar um problema de multicolinearidade.

Vamos iniciar a criação do modelo com todas as variáveis e interações possíveis e através da técnica de stepwise, iremos adequar e otimizar o modelo final, eliminando as variáveis ou interações não significativas. Após ajustarmos o modelo, vamos aplicar mais algumas técnicas para analisar com maiores detalhes as questões de multicolinearidade e verificar se há diferença na relação Tamanho e Peso quando consideramos grupo etário e gênero.

Modelo 2 - Peso ~ Tamanho Homem Acima45

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   Peso   R-squared:                       0.661
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.650
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     63.68
Date:                Wed, 17 Jun 2020   Prob (F-statistic):           2.90e-50
Time:                        17:35:25   Log-Likelihood:                -1343.0
No. Observations:                 237   AIC:                             2702.
Df Residuals:                     229   BIC:                             2730.
Df Model:                           7
Covariance Type:            nonrobust
================================================================================
                   coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
--------------------------------------------------------------------------------
Intercept      399.8990    125.610      3.184      0.002     152.399     647.399
Tamanho          0.2419      0.036      6.706      0.000       0.171       0.313
Homem          197.9397    166.771      1.187      0.236    -130.662     526.542
Tamanho:Homem   -0.0434      0.046     -0.947      0.345      -0.134       0.047
Acima45       -180.3591    167.602     -1.076      0.283    -510.598     149.880
Tamanho:Acima45   0.0486      0.049      0.995      0.321      -0.048       0.145
Homem:Acima45   -65.0907    222.855     -0.292      0.770    -504.200     374.018
Tamanho:Homem:Acima45     0.0076      0.062      0.122      0.903      -0.115       0.130
==============================================================================
Omnibus:                        8.421   Durbin-Watson:                   1.922
Prob(Omnibus):                  0.015   Jarque-Bera (JB):                8.927
Skew:                           0.359   Prob(JB):                       0.0115
Kurtosis:                       3.624   Cond. No.                     3.43e+05
==============================================================================

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 3.43e+05. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.
```

Vamos analisar a interação Tamanho:Homem:Acima45.

Neste caso, temos um teste de hipótese que considera:
H_0: β_0 **= 0**
H_a: $\beta_0 \neq$ **0**

Com um p-valor de 90%, coeficiente de regressão 0.0076 e intervalo de confiança entre -0.115 e 0.130, nós aceitamos a hipótese que β_0 = 0 no modelo, portanto, esta interação torna-se insignificante e será retirada.

Vamos continuar aplicando a técnica de stepwise para a seleção das demais variáveis para melhorarmos o modelo final.

Modelo 3 - Peso ~ Tamanho Homem + Tamanho Acima45 + Homem * Acima45

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Peso	R-squared:	0.661
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.652
Method:	Least Squares	F-statistic:	74.60
Date:	Wed, 17 Jun 2020	Prob (F-statistic):	3.24e-51
Time:	17:36:42	Log-Likelihood:	-1343.1
No. Observations:	237	AIC:	2700.
Df Residuals:	230	BIC:	2724.
Df Model:	6		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	408.7992	102.157	4.002	0.000	207.515	610.083
Tamanho	0.2394	0.029	8.171	0.000	0.182	0.297
Homem	182.9501	112.841	1.621	0.106	-39.384	405.284
Tamanho:Homem	-0.0392	0.031	-1.273	0.204	-0.100	0.022
Acima45	-196.4062	104.039	-1.888	0.060	-401.398	8.585
Tamanho:Acima45	0.0532	0.030	1.769	0.078	-0.006	0.113
Homem:Acima45	-37.9756	22.315	-1.702	0.090	-81.943	5.992

Omnibus:	8.547	Durbin-Watson:	1.924
Prob(Omnibus):	0.014	Jarque-Bera (JB):	9.088
Skew:	0.362	Prob(JB):	0.0106
Kurtosis:	3.630	Cond. No.	1.50e+05

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 1.5e+05. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.

Analisando a interação Tamanho:Homem, temos p-valor > 0.05 e intervalo de confiança que pode assumir o valor 0. Com isso, também aceitamos a hipótese de β_0 = 0, retirando-a do modelo.

Modelo 4 - Peso ~ Tamanho + Tamanho Acima45 + Homem Acima45

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Peso	R-squared:	0.658
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.651
Method:	Least Squares	F-statistic:	88.96
Date:	Wed, 17 Jun 2020	Prob (F-statistic):	7.24e-52
Time:	17:46:27	Log-Likelihood:	-1343.9
No. Observations:	237	AIC:	2700.
Df Residuals:	231	BIC:	2721.
Df Model:	5		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	493.1839	77.814	6.338	0.000	339.869	646.499
Tamanho	0.2151	0.022	9.671	0.000	0.171	0.259
Acima45	-199.5159	104.150	-1.916	0.057	-404.721	5.689
Tamanho:Acima45	0.0534	0.030	1.772	0.078	-0.006	0.113
Homem	40.8304	16.146	2.529	0.012	9.018	72.642
Homem:Acima45	-33.7466	22.095	-1.527	0.128	-77.281	9.788

Omnibus:	8.311	Durbin-Watson:	1.939
Prob(Omnibus):	0.016	Jarque-Bera (JB):	9.043
Skew:	0.341	Prob(JB):	0.0109
Kurtosis:	3.671	Cond. No.	1.12e+05

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 1.12e+05. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.

Considerando a mesma análise anterior (p-valor > 0.05 e IC inclui o zero), iremos retirar a interação Homem:Acima45.

Modelo 5 - Peso ~ Tamanho + Homem + Tamanho * Acima45

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Peso	R-squared:	0.655
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.649
Method:	Least Squares	F-statistic:	110.0
Date:	Wed, 17 Jun 2020	Prob (F-statistic):	2.05e-52
Time:	17:47:13	Log-Likelihood:	-1345.1
No. Observations:	237	AIC:	2700.
Df Residuals:	232	BIC:	2717.
Df Model:	4		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	453.0924	73.463	6.168	0.000	308.353	597.831
Tamanho	0.2285	0.020	11.158	0.000	0.188	0.269
Homem	22.8107	11.054	2.064	0.040	1.032	44.589
Acima45	-129.5307	93.796	-1.381	0.169	-314.332	55.270
Tamanho:Acima45	0.0290	0.026	1.131	0.259	-0.022	0.079

Omnibus:	7.248	Durbin-Watson:	1.918
Prob(Omnibus):	0.027	Jarque-Bera (JB):	7.449
Skew:	0.331	Prob(JB):	0.0241
Kurtosis:	3.562	Cond. No.	1.01e+05

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 1.01e+05. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.

Considerando a mesma análise anterior (p-valor > 0.05 e IC inclui o zero), iremos retirar a interação Tamanho:Acima45.

Modelo 6 - Peso ~ Tamanho + Homem + Acima45

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Peso	R-squared:	0.653
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.648
Method:	Least Squares	F-statistic:	146.0
Date:	Wed, 17 Jun 2020	Prob (F-statistic):	2.94e-53
Time:	17:48:59	Log-Likelihood:	-1345.7
No. Observations:	237	AIC:	2699.
Df Residuals:	233	BIC:	2713.
Df Model:	3		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	395.5079	52.999	7.463	0.000	291.090	499.926
Tamanho	0.2442	0.015	16.212	0.000	0.215	0.274
Homem	22.5433	11.058	2.039	0.043	0.757	44.329
Acima45	-23.9684	9.481	-2.528	0.012	-42.647	-5.290

Omnibus:	7.989	Durbin-Watson:	1.922
Prob(Omnibus):	0.018	Jarque-Bera (JB):	8.255
Skew:	0.357	Prob(JB):	0.0161
Kurtosis:	3.571	Cond. No.	4.20e+04

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 4.2e+04. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.

Para este último modelo temos um p-valor < 0.05, com coeficientes de regressão e IC que não incluem o valor 0, portanto, rejeitamos a hipótese β_0 = 0 e não iremos retirar mais variáveis.

Multicolinearidade:

Voltando com as suspeitas de multicolinearidade identificadas no início da análise, iremos utilizar o cálculo do fator de inflação da variância (VIF) para as variáveis explicativas do modelo. O critério a ser utilizado para análise do VIF será:

- **VIF for igual à 1 não há multicolinearidade entre os fatores;**
- **VIF acima de 1, as preditoras podem estar correlacionadas.**
  - **De 1 até 5: indica alguma correlação, porém, não o suficiente para impactar no modelo;**
  - **De 5 até 10: alta correlação podendo gerar impacto no modelo;**
  - **Acima de 10: coeficientes de regressão estão mal estimados devidos à multicolinearidade;**

fonte: [https://blog.minitab.com/pt/basta-lidando-com-a-multicolinearidade-na-analise-de-regressao (https://blog.minitab.com/pt/basta-lidando-com-a-multicolinearidade-na-analise-de-regressao)](https://blog.minitab.com/pt/basta-lidando-com-a-multicolinearidade-na-analise-de-regressao)

Variáveis	VIF
Intercept	130.72596546224784
Tamanho	1.402975195652195
Homem	1.3983710653327666
Acima45	1.0404193672560635

Para as variáveis Tamanho, Homem e Acima45 os valores do VIF indicam que temos alguma correlação, porém, ela não é forte o suficiente para impactar no modelo. Para o Intercepto tivemos um VIF bem alto, porém, para podermos aplicar a remoção do mesmo, devemos primeiro padronizar as variáveis preditoras e de resposta, com isso o intercepto passará pela origem (0,0). Essa abordagem dificulta a interpretação das variáveis explicativas do modelo, portanto, para evitarmos complicar essa interpretação, uma outra abordagem é padronizar apenas a variável quantitativa (Tamanho) para tentarmos dar sentido ao Intercepto e tentar eliminar o VIF alto.

Modelo 7 - Peso ~ Tamanho_p + Homem + Acima45

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Peso	R-squared:	0.653
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.648
Method:	Least Squares	F-statistic:	146.0
Date:	Wed, 17 Jun 2020	Prob (F-statistic):	2.94e-53
Time:	20:21:53	Log-Likelihood:	-1345.7
No. Observations:	237	AIC:	2699.
Df Residuals:	233	BIC:	2713.
Df Model:	3		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	1282.9713	8.703	147.412	0.000	1265.824	1300.118
Tamanho_p	89.0127	5.490	16.212	0.000	78.195	99.830
Homem	22.5433	11.058	2.039	0.043	0.757	44.329
Acima45	-23.9684	9.481	-2.528	0.012	-42.647	-5.290

Omnibus:	7.989	Durbin-Watson:	1.922
Prob(Omnibus):	0.018	Jarque-Bera (JB):	8.255
Skew:	0.357	Prob(JB):	0.0161
Kurtosis:	3.571	Cond. No.	3.72

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

Variáveis	VIF
Intercept	3.5253225566754294
Tamanho_p	1.402975195652195
Homem	1.3983710653327661
Acima45	1.0404193672560633

Com estes resultados para o VIF, temos a indicação que existe alguma correlação entre as variáveis, porém, ela não é suficiente para impactar no modelo, portanto, vamos considerar esse como sendo o modelo final ajustado.

Análise de resíduos:

As suposições do nosso modelo ajustado precisam ser validadas para que os resultados sejam confiáveis, para isso vamos realizar a análise de resíduos. A idéia por trás é que se o modelo for apropriado, os resíduos devem refletir algumas propriedades:

i. ε_i **e** ε_j **são independentes** $(i \neq j)$**;**

ii. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ **(constante);**

iii. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ **(normalidade);**

iv. Modelo é linear;

v. Não existir outliers (pontos atípicos) influentes.

fonte: http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/analise-dos-residuos (http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/analise-dos-residuos)

Diagnóstico de independência:

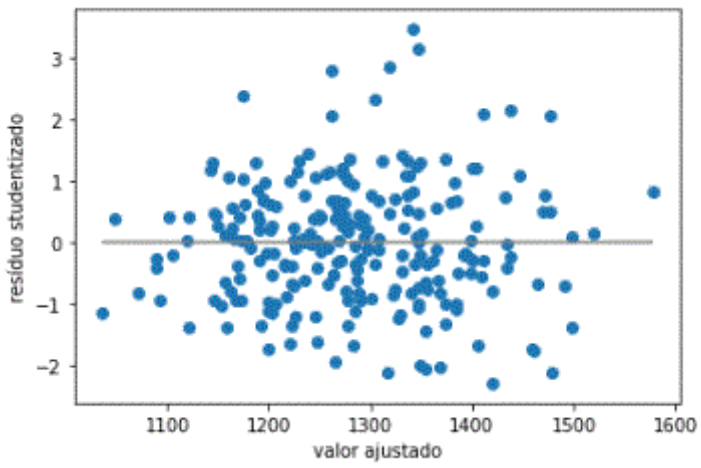
Estatística de Durbin Watson: 1.9224232061579223

Este teste serve para detectar dependência nos resíduos de uma análise de regressão. A estatística do teste sempre irá variar entre 0 e 4. Quanto mais próximo de 0, maior a evidência de uma correlação positiva e quanto mais próxima de 4, correlação negativa. Uma estatística próxima de 2, indica que não temos correlação nos resíduos, ou seja, são independentes.

Neste caso, a estatística obtida está próxima de 2 (1.92), logo, não temos dependência.

fonte: https://www.statsmodels.org/stable/generated/statsmodels.stats.stattools.durbin_watson.html (https://www.statsmodels.org/stable/generated/statsmodels.stats.stattools.durbin_watson.html)

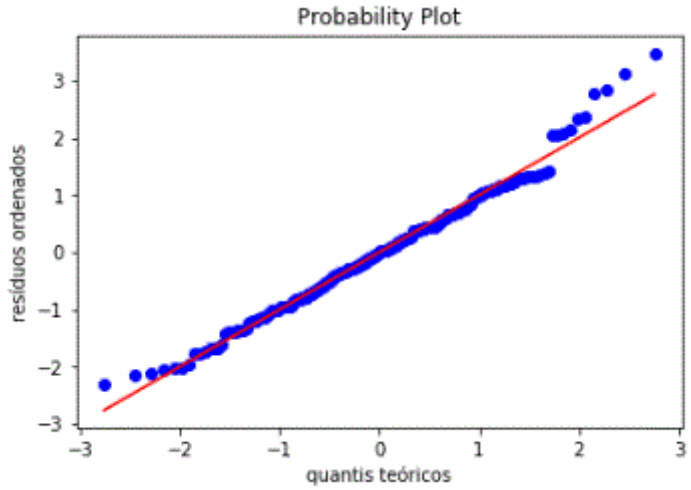
Diagnóstico de homoscedasticidade (variância constante):



Neste caso, os pontos estão aleatoriamente distribuídos em torno do zero, sem nenhum comportamento ou tendência, o comportamento é o esperado para a distribuição dos erros e há indícios de que a variância dos resíduos é homoscedástica.

Importante notar que algumas observações cujo o valor do resíduo studenizado é maior que 3 são apresentadas como críticas. Estes valores são os índices 43 e 102.

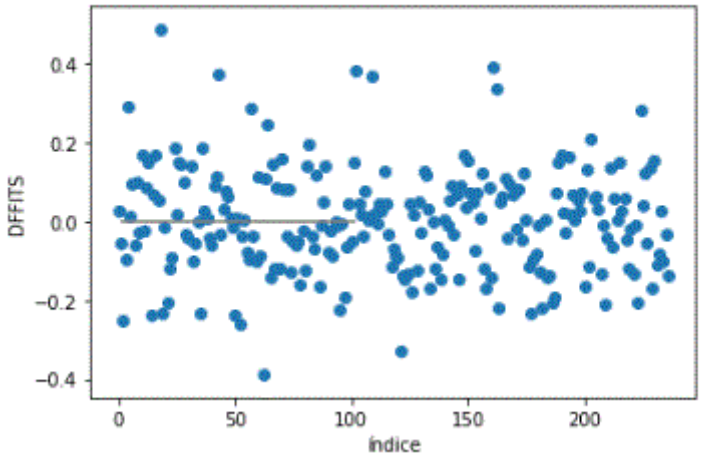
Diagnóstico de normalidade:



Para este teste esperamos que caso a suposição de normalidade esteja adequada, o comportamento dos pontos tem que ser linear. Graficamente observamos que os pontos seguem o comportamento da reta (não estão tão distantes dela), porém, algumas observações com resíduos studentizados abaixo de -2 e acima de 2 parecem ser as responsáveis pela fuga da normalidade dos dados. Tais observações são: 14, 35, 50, 62, 95, 121 e 4, 18, 43, 57, 64, 102, 109, 161, 162, 224, respectivamente.

Pontos influentes (DFFITS):

```
Int64Index([], dtype='int64')
```



O DFFITS mede a influência que a observação i tem sobre seu próprio valor ajustado. Uma observação é um ponto influente, se:

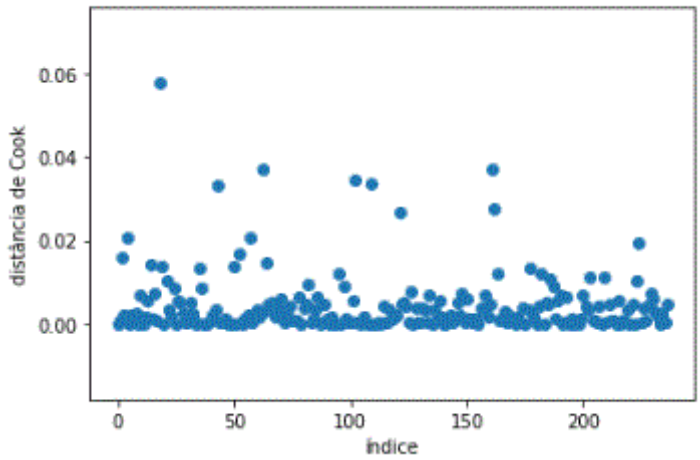
- $|DFFITS_{(i)}| > 1$, **para amostras pequenas ou médias**
- $|DFFITS_{(i)}| > 2\sqrt{(p+1)/n}$, **para amostras grandes, no qual** $(p+1)$ **é o número de parâmetros.**

Neste caso, não temos valores que estão acima de 1, portanto, não temos pontos influentes.

fonte: [http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/343-pontos-influentes (http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/343-pontos-influentes)](http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/343-pontos-influentes)

Pontos influentes (Distância de Cook):

```
Int64Index([], dtype='int64')
```



A distância de Cook mede a influência da observação i sobre todos n valores ajustados. Uma observação é um ponto influente, se:

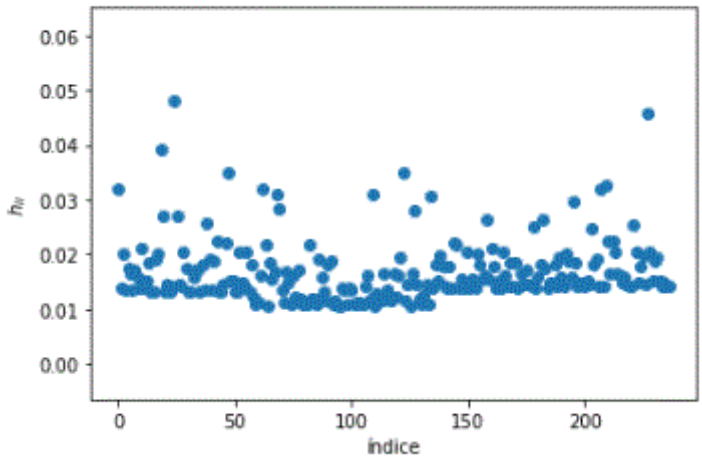
- $D_i > 1.$

Neste caso, não temos valores que estão acima de 1, portanto, não temos pontos influentes.

fonte: [http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/343-pontos-influentes (http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/343-pontos-influentes)](http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/343-pontos-influentes)

Pontos influentes (Diagonal da Matriz Chapéu):

```
Int64Index([], dtype='int64')
```



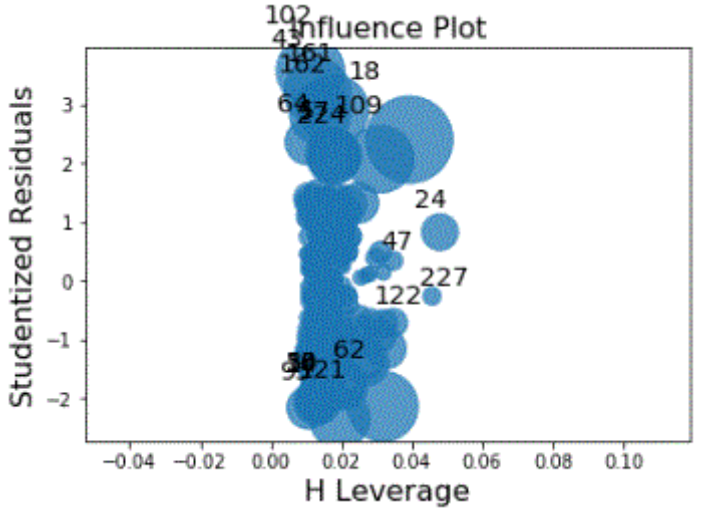
A diagonal da matriz chapéu H é uma medida padronizada da distância da i-ésima observação para o centro do espaço definido pelas variáveis explicativas. Uma observação é um ponto influente, se:

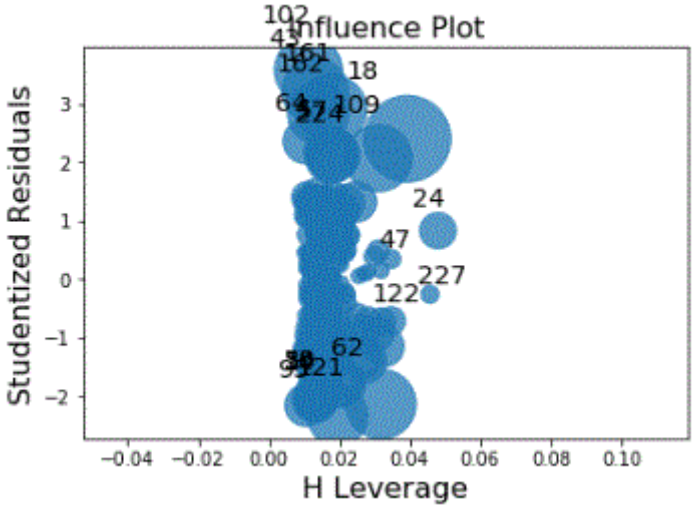
- $h_{ii} > 2(p+1)/n$

Neste caso, não temos ocorrências destacadas.

fonte: http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/341-ponto-de-alavanca (http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao/341-ponto-de-alavanca)

Gráficos de Resíduos:





Considerando os resultados dos resíduos studentizados, pode-se observar alguns valores mais críticos como as observações de índices 43 e 102, porém, dado que os testes de pontos influentes não geraram ocorrências, decidimos por manter o modelo final sem alterações.

Seleção do Modelo Final:

Podemos confirmar a escolha do modelo final, comparando-se os índices AIC, BIC e R_a^2 , conforme tabela abaixo. O modelo escolhido (número 7) foi um dos que apresentaram os melhores índices (R_a^2 entre um dos maiores valroes e com os menores AIC, BIC) e, além disso, melhorou o problema de alto fator de inflação de variância (VIF) encontrado no modelo 6.

Modelo	Variáveis	AIC	BIC	R_a^2
1	tamanho	2705	2711	63,8%
2	tamanho, homem, acima45, todas as interações	2702	2730	65,0%
3	tamanho, homem, acima45, interações de 1a ordem	2700	2724	65,2%
4	tamanho, homem, acima45, tamanho*acima45, homem*acima45	2700	2721	65,1%
5	tamanho, homem, acima45, tamanho*acima45	2700	2717	64,9%
6	tamanho, homem, acima45, sem interações	2699	2713	64,8%
7	tamanho_p, homem, acima45, sem interações	2699	2713	64,8%

Modelo escolhido para interpretação dos resultados:

```
Média Tamanho: 3633.9915611814345 e Desvio Padrão Tamanho: 364.49001411962064

                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                   Peso   R-squared:                       0.653
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.648
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     146.0
Date:                Thu, 18 Jun 2020   Prob (F-statistic):           2.94e-53
Time:                        04:14:26   Log-Likelihood:                -1345.7
No. Observations:                 237   AIC:                             2699.
Df Residuals:                     233   BIC:                             2713.
Df Model:                           3
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
Intercept   1282.9713      8.703    147.412      0.000    1265.824    1300.118
Tamanho_p     89.0127      5.490     16.212      0.000      78.195      99.830
Homem         22.5433     11.058      2.039      0.043       0.757      44.329
Acima45      -23.9684      9.481     -2.528      0.012     -42.647      -5.290
==============================================================================
Omnibus:                        7.989   Durbin-Watson:                   1.922
Prob(Omnibus):                  0.018   Jarque-Bera (JB):                8.255
Skew:                           0.357   Prob(JB):                       0.0161
Kurtosis:                       3.571   Cond. No.                         3.72
==============================================================================

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
```

Interpretação dos resultados:

1) Intercepto: 1282.97[g] é o valor esperado do peso cerebral para indíviduos do gênero feminino (homem = 0) com idade menor que 45 anos (acima45 = 0) e que tenham o tamanho da cabeça com os valores de média e desvio padrão sendo 3634[cm3] e 364[cm3], respectivamente.

2) Tamanho_p: 89[g] é o aumento esperado do peso cerebral para cada aumento no tamanho padronizado da cabeça[cm3], ou seja, esse crescimento padronizado é equivalente ao tamanho da cabeça multiplicado pelo desvio padrão menos sua média. E para estimar esse valor, devemos considerar indivíduos de um mesmo gênero (seja ele qual for) e uma mesma faixa etária (maior que 45 anos ou menor que 45 anos).

3) Homem: 22.5[g] é quanto o peso cerebral de um indivíduo irá variar quando considerarmos apenas seu gênero (masculino ou feminino) para um mesmo tamanho de cabeça com valores de média e desvio padrão (3634[cm3] e 364[cm3], respectivamente) e para uma mesma faixa etária (classificada em maior que 45 anos ou menor que 45 anos).

4) Acima45: -23.9[g] é quanto o peso cerebral de um indivíduo irá variar quando considerarmos apenas sua faixa etária (maior que 45 anos ou menor que 45 anos) para um mesmo tamanho de cabeça com valores de média e desvio padrão (3634[cm3] e 364[cm3], respectivamente) e para um mesmo gênero (seja ele qual for).

O tamanho da cabeça é preditor do peso cerebral...

Resposta:

Sim.

Olhando para o modelo 1, onde temos apenas o tamanho da cabeça como variável preditora, observamos um $R^2_{ajustado}$ = 63.8%, ou seja, apenas essa variável consegue explicar mais de 60% dos valores obtidos para o peso do cérebro, logo, ele pode ser considerado sim um preditor de Peso.

...e, neste caso, há diferença nessa relação entre os sexos e entre os grupos etários?

Resposta:

Ao considerarmos as variáveis gênero e faixa etária como parte do modelo final, podemos concluir que existe sim uma relação que ajuda a explicar um pouco da variável resposta peso do cérebro, porém, algumas considerações podem ser feitas para entendermos qual o impacto que elas geram na estimativa da variável resposta e entender se há uma diferença significativa nos resultados.

Entre os sexos:

O peso médio cerebral da nossa amostra é cerca de 1282[g] e o β do modelo apresenta um valor de 22[g], ou seja, ele é um percentual muito pequeno do peso cerebral, logo, isso indica que ele não gera muito impacto no resultado caso o indivíduo seja homem ou mulher. Além disso, temos também um intervalo de confiança variando de 0.7 até 44, que também não nos diz muita coisa, uma vez que gera uma incerteza muito grande e diminui nossa confiança na variável estimada.

Portanto, concluímos que para os resultados encontrados na predição do peso a diferença devido ao gênero não é significativa.

Entre os grupos etários:

Podemos fazer uma análise similar para o caso dos grupos etários. O β do modelo indica um percentual pequeno na variação do peso cerebral se o indivíduo estiver acima ou abaixo dos 45 anos. Analisando o intervalo de confiança (-42 até -5), também gera incerteza e pouca confiança na variável.

Portanto, concluímos novamente que para os resultados encontrados na predição do peso a diferença devido à faixa etária não é significativa.

Resumo:

Em resumo, temos que o tamanho da cabeça é o principal preditor do peso do cérebro e que, apesar do gênero e faixa etária terem uma relação que explica um pouco da variável resposta, seus valores não são significativos o suficiente para gerar uma diferença nos resultados do modelo.

3) Estime o peso médio do cérebro de homens e de mulheres (pontual e intervalar).

Como estamos trabalhando com amostras, iremos utilizar os estimadores de parâmetros para verificar o peso médio do cérebro. Para a estimação pontual iremos utilizar o método da máxima verossimilhança (MV).

Como vimos que os dados para homens e mulheres são variáveis independentes e com distribuição normal N(μ, σ^2), temos que os estimadores são:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Com isso, a estimativa do peso médio pontual será dado pela própria média amostral:

Resposta:

Pontual:

Estimador-Pontual	
Sexo	Média-Estimada
Homem	1331.858208955224
Mulher	1219.1456310679612

Para estimação intervalar iremos utilizar a quantidade pivotal com variância populacional desconhecida.

Assim:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

onde S: desvio-padrão amostral e distribuição t com n-1 graus de liberdade.

Construiremos o intervalo de confiança de (1-α) = 0.95 para a média: IC_{μ}(95%).

Logo, temos:

$$P(? \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq ?) = 0.95$$

Intervalo à esquerda da curva: -1.9599639845400545
Intervalo à direita da curva: 1.959963984540054

Aplicando os ajustes para obtermos o intervalo de confiança da média:

- **multiplicar por:** $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- **subtrair:** $\bar{X}$
- **multiplicar por (-1), invertendo o sinal da inequação**

$$P(\bar{X} - \frac{1.96 \cdot S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{1.96 \cdot S}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

O cálculo do intervalo será executado pela função do Python DescrStatsW, com os seguintes parâmetros:

- α **= 0.05**

Resposta:

Intervalar:

Estimador-Intervalar		
Sexo	Limite-Inferior	Limite-Superior
Homem	1313.2447792718747	1350.4716386385733
Mulher	1198.8531509366069	1239.4381111993155