Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2019

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EYP1113** |
| **Profesores** | **:** | **Ricardo Aravena C. (Sec 02 - Sec 04 - Sec 05) y Ricardo Olea O. (Sec 01 - Sec 03).** |

# PAUTA INTERROGACIÓN 2

## Problema 1

Producto del cambio climático, se ha empezado a observar con mayor frecuencia grandes marejadas en las costas chilenas. Mediciones realizadas por el SHOA (Servicio Hidrográfico y Oceanográfico del la Armada) muestran que las grandes marejadas producen olas cuya altura distribuye Log-Normal, con mediana de 2 metros y un coeficiente de variación del 60 %.

Si en promedio se observan cuatro olas sobre 3 metros por minuto, ¿cuántos minutos espera que transcurran entre tres olas de 4 metros o más? Suponga que las olas se rigen por un proceso Poisson.

### Solución

**Logro 1: Obtener parámetros $\lambda$ y $\zeta$ de la Log-Normal**

Sea $X$ la altura de una ola cualquiera durante grandes marejadas.

$$X \sim \text{Log-Normal}(\lambda,\, \zeta)$$

con

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \qquad \lambda = \ln(2) = 0{,}6931472 \qquad \text{y} \qquad \zeta = \sqrt{\ln(1 + 0{,}6^2)} = 0{,}554513 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

**Logro 2: Obtener probabilidad que una ola esté sobre 3 metros**

$$\begin{aligned} p = P(X > 3) &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(3) - 0{,}6931472}{0{,}554513}\right) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &\approx 1 - \Phi(0{,}73) = 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

**Logro 3: Obtener probabilidad que una ola sea de 4 metros o más**

$$\begin{aligned} q = P(X \geq 4) &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(4) - 0{,}6931472}{0{,}554513}\right) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &\approx 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

**Logro 4: Obtener la tasa $\nu$ esperada entre olas y entre olas de 4 metros o más**

Sean $Y_t$ el número de olas en $t$ minutos, $Z_t$ el número de olas sobre 3 metros en $t$ minutos y $W_t$ el número de olas de 4 metros o más en $t$ minutos.

$$\begin{aligned} Y_t &\sim \text{Poisson}(\nu\, t) \\ Z_t &\sim \text{Poisson}(\nu\, p\, t) \\ W_t &\sim \text{Poisson}(\nu\, q\, t) \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos que

$$\mathrm{E}(Z_t) = 4 \cdot t = \nu \cdot p \cdot t \to \nu = 17{,}18951 \text{ [0.5 Ptos] } \to \mathrm{E}(W_t) = \nu \cdot q \cdot t = 1{,}815213 \cdot t \text{ [0.5 Ptos]}$$

**Logro 5: Determinar la distribución del tiempo entre tres olas de 4 metros o más**

Sea $T$ el tiempo, en minutos, transcurrido entre $k$ olas de 4 metros o más (origen se pone en la 1ra):

$$T \sim \text{Gamma}(k-1;\, 1{,}815213) \qquad \text{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 6: Entregar el tiempo esperado entre tres olas de 4 metros o más**

Se pide

$$\mathrm{E}(T) = \frac{k-1}{1{,}815213} = \frac{3-1}{1{,}815213} = 1{,}101799 \,\text{minutos} \qquad \text{[1.0 Ptos]}$$

**+ 1 Punto Base**

**Problema 2**

El aumento del nivel del mar, inducido por el incremento de la temperatura a causa de fenómenos naturales y del calentamiento global, entre otros, se traduce en impactos bióticos (naturaleza y ecosistemas), en el paisaje, agricultura, recursos hídricos, acuicultura, infraestructura y pérdida de vida humana, animal y vegetal.

Suponga que el número de especies bentónicas (diversidad de especies que conviven armoniosamente) en una playa se ha reducido proporcionalmente al área que esta ha perdido producto del aumento del nivel del mar. Si la reducción del área puede ser modelada de acuerdo a una distribución Weibull($\eta = 3$, $\beta = 2$) y para una reducción del área de la playa en $x$ mts$^2$, el número de especies bentónicas que desaparece se comporta como una variable aleatoria Poisson($10\,x$).

Los expertos indican que si el grado de asociación (covarianza) que existe entre la reducción y el número de especies bentónicas que desaparece es superior a 20 mts$^2$ $\times$ número, implicaría una "muerte total del ecosistema" de la playa en el corto plazo. ¿Qué dice usted frente a la afirmación? (Fundamente)

**Solución**

**Logro 1: Definir las variables aleatorias y sus distribuciones (marginal y condicional)**

Sea $X$ el área perdida producto del aumento del nivel del mar:

$$X \sim \text{Weibull}(\eta = 3,\, \beta = 2) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Sea $Y$ el número de especies bentónicas que desaparece por $x$ mts$^2$ de pérdida de la playa:

$$Y \,|\, X = x \sim \text{Poisson}(10\,x) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Lo que se pide está dado por (formualario)

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(X \cdot Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y)$$

**Logro 2: Obtener valor esperado del área perdida producto del aumento del nivel del mar**

Del formulario se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \qquad \text{E}(X) = 3 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

**Logro 3: Obtener número de especies esperada que desaparecen producto del aumento del nivel del mar, incondicional al área que se pierde.**

Aplicando teoremas de esperanzas condicionales (iteradas)

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(10 \cdot X) = 10 \cdot \text{E}(X) = \frac{30\sqrt{\pi}}{2} \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 4: Obtener el valor esperado del producto (Parte I)**

$$\text{E}(X \cdot Y) = \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \,|\, X)] = \text{E}[X \cdot \text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(X \cdot 10 \cdot X) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 5: Obtener el valor esperado del producto (Parte II)**

$$\text{E}(X \cdot Y) = 10 \cdot \text{E}(X^2) = 10 \cdot 3^2 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 90 \cdot \Gamma(2) = 90 \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 6: Reemplazar y comentar**

Reemplazando

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 90 - \frac{90\,\pi}{4} = 19{,}31417 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Por lo tanto, no se espera una muerte total del ecosistema afectado. **[0.5 Ptos]**

*Nota: Si el alumno se da cuenta que* $Cov(X,Y) = 10 \cdot Var(X)$ *y resuelve correctamente, asignar todos los logros*

**+ 1 Punto Base**

**Problema 3**

El servicio de encargo y búsqueda de vehículos (SEBV) de Carabineros de Chile, ha incrementado y mejorado la eficiencia de sus unidades de búsqueda utilizando ciencia de datos. Suponga que la eficiencia de una unidad en la búsqueda de vehículos se comporta como una variable aleatoria Beta$(3, 5)$ medida en el intervalo $[0, 1]$.

Si este fin de semana una unidad cualquiera recibe 10 encargos, ¿cuál es la probabilidad que dé con el paradero de al menos dos vehículos?

**Solución**

**Logro 1: Definir las variables aleatorias y sus distribuciones (marginal y condicional)**

Sea $X$ la eficiencia en la búsqueda por encargo de una unidad:

$$X \sim \text{Beta}(3, 5), \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

con $\Theta_X = [0, 1]$.

Definamos como $Y$ el número de vehículos que una unidad con eficiencia $x$ da con su paradero al recibir $n$ encargos:

$$Y \mid X = x \sim \text{Binomial}(n, x) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Se pide $P(Y \geq 2)$.

**Logro 2: Obtener distribución marginal de $Y$ (Parte I: límites de integración)**

Por teorema de probabilidades totales (formulario):

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y \mid X=x}(y) \cdot f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \binom{n}{y} x^y \, (1-x)^{n-y} \cdot \frac{x^{3-1}\,(1-x)^{5-1}}{B(3,5)} dx \qquad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

**Logro 3: Obtener distribución marginal de $Y$ (Parte II: construir nueva densidad Beta)**

Por teorema de probabilidades totales (formulario):

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \binom{n}{y} \frac{B(y+3, n-y+5)}{B(3,5)} \int_0^1 \frac{x^{y+3-1}\,(1-x)^{n-y+5-1}}{B(y+3, n-y+5)}\, dx \\ &= \binom{n}{y} \frac{B(y+3, n-y+5)}{B(3,5)} \cdot 1 \qquad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

**Logro 4: Obtener distribución marginal de $Y$ (Parte III: expresar función $B(\cdot, \cdot)$ en términos de función $\Gamma(\cdot)$)**

Por teorema de probabilidades totales (formulario):

$$p_Y(y) = \frac{n!}{y!\,(n-y)!} \cdot \frac{\Gamma(y+3)\,\Gamma(n-y+5)\,\Gamma(3+5)}{\Gamma(n+3+5)\,\Gamma(3)\,\Gamma(5)} \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 5: Obtener distribución marginal de $Y$ (Parte VI: reemplazar función $\Gamma(\cdot)$ por factoriales**

Por teorema de probabilidades totales (formulario):

$$p_Y(y) = \frac{n!}{y!\,(n-y)!} \cdot \frac{(n+2)!\,(n-y+4)!\,7!}{(n+7)!\,2!\,4!} \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 6: Calcular factoriales, reemplazar y obtener probabilidad solicitada**

Para $n$ igual a 10 se tiene que

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - p_Y(0) - p_Y(1) = 1 - 0{,}05147059 - 0{,}11029412 = 0{,}8382353$ **[1.0 Ptos]**

*Nota: Si el alumno calcula $P(Y \geq 2 \,|\, X = 3/8) = 0{,}9363354$, asignar 1.0 puntos en Logro 2 y 1/2 punto en Logro 6, ya que que la respuesta sería incorrecta y además la dificultad del problema también baja. A los Logros 3, 4 y 5 asignar 0 puntos.*

**+ 1 Punto Base**

**Problema 4**

En la Salmonicultura, es clave controlar y predecir el peso (en Kg) de los peces. Un muy buen predictor es el alimento, en gramos, que el pez come. Un análisis post cosecha de una jaula muestran un comportamiento Normal Bivariado entre el peso ($Y$) y el alimento consumido ($X$).

La siguiente salida de R entrega un resumen de los datos obtenidos en la jaula:

```
 mean(X)  mean(Y)    sd(X)     sd(Y) cov(X,Y)
201.8555 3.498261 47.89279 0.5088417  16.8959
```

¿Cuál sería su pronóstico para el peso, si el pez comió 350 gramos de alimento?

**Solución**

**Logro 1: Mejor predictor**

El mejor predictor está dado por $\mathrm{E}(Y \mid X)$. **[1.0 Ptos]**

**Logro 2: Distribución condicional a utilizar**

$$Y \mid X = x \sim \text{Normal}\left(\mu_Y + \frac{\rho\,\sigma_Y}{\sigma_X}\,(x - \mu_X),\, \sigma_Y\,\sqrt{(1-\rho^2)}\right) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 3: Expresión mejor predictor**

El mejor predictor está dado por una línea recta

$$\mathrm{E}(Y \mid X) = \left(\mu_Y - \mu_X \cdot \frac{\rho\,\sigma_Y}{\sigma_X}\right) + \frac{\rho\,\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot X \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 4: Evaluar medidas de centro y dispersión empíricas a teóricas**

$$\mu_X = 201{,}8555; \quad \mu_Y = 3{,}498261 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\sigma_X = 47{,}89279; \quad \sigma_Y = 0{,}5088417 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

**Logro 5: Obtener parámetro $\rho$ (correlación)**

$$\rho = \frac{16{,}8959}{47{,}89279 \cdot 0{,}5088417} = 0{,}6933117 \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**Logro 6: Realizar pronóstico**

Se tiene que

$$\mathrm{E}(Y \mid X) = 2{,}011361 + 0{,}007366158 \cdot X$$

Por lo tanto, si el pez comió 350 gramos de alimento, el pronóstico de su peso será de 4.589516 kilos.
**[1.0 Ptos]**

**+ 1 Punto Base**