Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2019

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. (Sec 1), Ricardo Olea O. (Sec 2) y Alonso Molina N. (Sec 3)**

Pauta Interrogación 1

Pregunta 1

Considere una viga de madera de $n \times 1 \times 1$ pulgadas a la cual se le aplica un barnizado. Luego se divide la viga en n partes, quedando algunos cubos con una cara sin barniz y otros con dos. Si se ensamblan al azar nuevamente los cubos, ¿cuál es la probabilidad que no hayan sectores sin barniz?

Respuesta

Definamos como A al evento en que el ensamblaje no deja sectores sin barniz a la vista.

Tenemos $\#\, S = n! \cdot 6^n$ formas de ensamblar los cubos. **[2.0 Ptos]**

Para $\#\, A$ tenemos 2 opciones para fijar los cubos con una cara de barniz en los extremos **[1.0 Ptos]** y $(n-2)! \cdot 2^{n-2}$ opciones para las con dos caras sin barniz al centro **[2.0 Ptos]**, que aseguran no dejar ningún sector sin barniz a la vista.

Por lo tanto

$$P(A) = \frac{\#\, A}{\#\, S} = \frac{2^{n-1}}{6^n\, n\,(n-1)} = \frac{1}{2 \cdot 3^n\, n\,(n-1)} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Nota: El alumno podría además rotar las caras de los cubos, pero las 4 *posiciones elevadas a* n *se cancelan al calcular* $P(A) = \dfrac{\#\, A}{\#\, S}$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

La Onemi actualizó la información sobre el estado de los incendios forestales que afectan a nivel nacional que afectan actualmente la zona centro-sur del país. Mediciones de la expansión del fuego por segundo muestran un comportamiento que puede ser modelado por la siguiente función de densidad

$$f(x) = \frac{\lambda^4\, x^3\, e^{-\lambda\, x}}{6},$$

con $\lambda > 0$ y $x \geq 0$.

(a) **[3.0 Ptos.]** Obtenga la función generadora de momento del modelo propuesto.

(b) **[3.0 Ptos.]** Muestre que el coeficiente de asimetría, θ_X, es igual a uno.

Respuesta

(a) *Alternativa 1*: Tenemos que

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathrm{E}(e^{X\,t}) &= \int_0^\infty e^{x\,t} \cdot \frac{\lambda^4\, x^3\, e^{-\lambda\, x}}{6}\, dx \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{\lambda^4}{(\lambda - t)^4} \int_0^\infty \frac{(\lambda - t)^4\, x^3\, e^{-(\lambda - t)\, x}}{6}\, dx \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^4 \cdot 1, \quad \text{si } t < \lambda \text{ y área bajo todo el soporte de una densidad} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^4, \quad t < \lambda \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Alternativa 2: Tenemos que

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathrm{E}(e^{X\,t}) &= \int_0^\infty e^{x\,t} \cdot \frac{\lambda^4\, x^3\, e^{-\lambda\, x}}{6}\, dx \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{\lambda^4}{6} \int_0^\infty x^3\, e^{-(\lambda - t)\, x}\, dx \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{\lambda^4}{6\,(\lambda - t)^4} \int_0^\infty u^3\, e^{-u}\, du, \quad \text{si } t < \lambda \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{\lambda^4}{6\,(\lambda - t)^4} \int_0^\infty u^{4-1}\, e^{-u}\, du, \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{\lambda^4}{6\,(\lambda - t)^4} \cdot \Gamma(4), \quad \text{por formulario} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^4, \quad t < \lambda \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) Derivando hasta tres veces con respecto a t la función generadora de momento obtenida en (a):

$$M^r(t) = \frac{\lambda \times 4 \times (4+1) \times \cdots \times (4 + r - 1)}{(\lambda - t)^{4+r}} \quad \textbf{[1.2 Ptos]}$$

y luego igualando a cero se tiene que:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{4}{\lambda} = \mu_X \quad \textbf{[0.2 Ptos]}, \quad \mathrm{E}(X^2) = \frac{4\,(4+1)}{\lambda^2} \quad \textbf{[0.3 Ptos]}, \quad \mathrm{E}(X^3) = \frac{4\,(4+1)\,(4+2)}{\lambda^3} \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

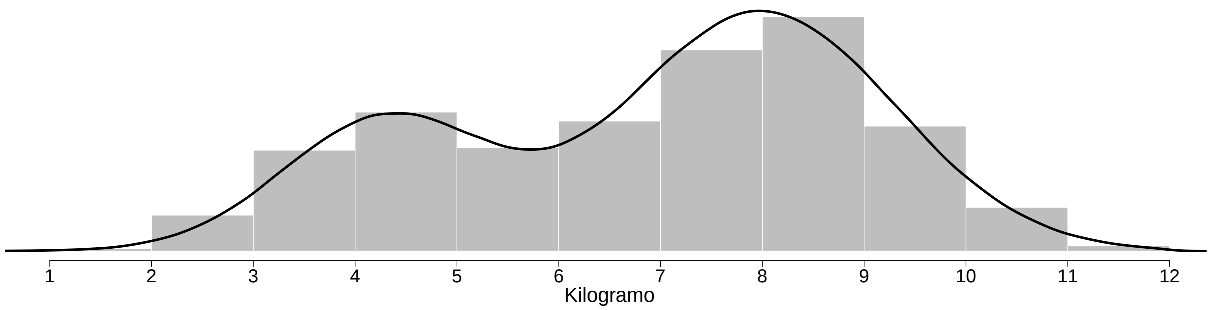
Luego

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \theta_X = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\,\mathrm{E}(X^2)\,\mu_X + 2\mu_X^3}{\sigma_X^3} = \frac{(120 - 3 \cdot 80 + 2 \cdot 64)/\lambda^3}{(20/\lambda^2 - 16/\lambda^2)^{3/2}} = \frac{8/\lambda^3}{8/\lambda^3} = 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

La salmonicultura en una de las actividades industriales más importantes de Chile, siendo además el segundo mayor productor del mundo. Para esta industria es clave estimar con anticipación el comportamiento frecuentista de los pesos, pero la ubicación de los centros de cultivos, como también el tipo de tratamiento hace que una mezcla aleatoria de peces presente un comportamiento frecuentista con marcada asimétrias y en alguna ocasiones comportamientos bimodales (dos modas). La siguiente figura muestra el comportamiento frecuentista de una muestra aleatoria obtenida desde dos centros de cultivos que utilizaban además dos tipos tratamientos 1 y 2.



Dada la cercanía de los centros, la distribución de los pesos solo depende del tipo de tratamiento, que en el 1er tratamiento es una Normal con media de 8 kilos y un c.o.v del 15 %, mientras que en 2do los pesos se rigen por una Log-Normal con un c.o.v del 23 % y un IQR de 1.50 kilos.

El 70 % de los peces fue sometido al tratamiento 1, de los cuales un 30 % estaban en el centro 1. Mientras que los sometidos al tratamiento 2, la mitad estaban en el centro 2. Si un salmón pesa más de 7 kilos, ¿cuál es la probabilidad que haya sido sometido al tratamiento 1?

Respuesta

Definamos los siguientes eventos:

> A: Tratamiento 1.
>
> B: Centro 1.

Del enunciado se tiene que

$$P(A) = 0{,}7, \quad P(\overline{A}) = 0{,}3, \quad P(B \,|\, A) = 0{,}3, \quad P(\overline{B} \,|\, A) = 0{,}7, \quad P(B \,|\, \overline{A}) = P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) = 0{,}5$$

Si X representa el peso del pez, entonces

$$\textbf{[0.3 Ptos]} \quad X \,|\, A \sim \text{Normal}(\mu,\, \sigma) \qquad \text{y} \qquad X \,|\, \overline{A} \sim \text{Log-Normal}(\lambda,\, \zeta) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con

$$\mu = 8 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}; \qquad \sigma = 8 \cdot 0{,}15 = 1{,}2 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}; \qquad \zeta = \sqrt{\ln(1 + 0{,}23^2)} = 0{,}2270424 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

$$\lambda = \ln\left(\frac{\text{IQR}}{e^{\zeta \cdot \Phi^{-1}(0{,}75)} - e^{\zeta \cdot \Phi^{-1}(0{,}25)}}\right) \approx 1{,}584068 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

donde $\Phi^{-1}(0{,}25) = -\Phi^{-1}(0{,}75)$ y $\Phi^{-1}(0{,}75) \approx 0{,}675$.

Luego

$$P(X > 7 \,|\, A) = 1 - \Phi\left(\frac{7 - 8}{1{,}2}\right) \approx 1 - \Phi(-0{,}83) = \Phi(0{,}83) = 0{,}7967 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

y

$$P(X > 7 \,|\, \overline{A}) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(7) - 1{,}584068}{0{,}2270424}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}59) = 1 - 0{,}9441 = 0{,}0559 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos]}\ P(A \,|\, X > 7) = \frac{P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(A)}{P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(A) + P(X > 7 \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A})} = \frac{0{,}7967 \cdot 0{,}70}{0{,}7967 \cdot 0{,}70 + 0{,}0559 \cdot 0{,}30} = 0{,}9708\ \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Notar que, por la independencia de B con respecto a los pesos no es necesario considerar a B en el cálculo, ya que

$$\begin{aligned}
P(X > 7 \,|\, A \cap B) \cdot P(B \,|\, A) \cdot P(A) + P(X > 7 \,|\, A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \,|\, A) \cdot P(A) &= P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(B \,|\, A) \cdot P(A) + \\
&\ P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(\overline{B} \,|\, A) \cdot P(A) \\
&= P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(A) \cdot \left[P(B \,|\, A) + P(\overline{B} \,|\, A)\right] \\
&= P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(A) \cdot 1 \\
&= P(X > 7 \,|\, A) \cdot P(A) \\
P(X > 7 \,|\, \overline{A} \cap B) \cdot P(B \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) + P(X > 7 \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) &= P(X > 7 \,|\, \overline{A}) \cdot P(B \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) + \\
&\ P(X > 7 \,|\, \overline{A} \cap) \cdot P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \\
&= P(X > 7 \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot \left[P(B \,|\, \overline{A}) + P(\overline{B} \,|\, \overline{A})\right] \\
&= P(X > 7 \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot 1 \\
&= P(X > 7 \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A})
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base