Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2018

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**I2**
Profesores	:	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

El marketing digital (o marketing online) engloba todas aquellas acciones y estrategias publicitarias o comerciales que se ejecutan en los medios y canales de internet: webs y blogs, redes sociales, plataformas de vídeo, foros, entre otros. Este fenómeno viene aplicándose desde los años 90 como una forma de trasladar las técnicas offline al universo digital. Paralelamente al tremendo desarrollo y evolución de la tecnología digital, el marketing online ha ido experimentando, de manera progresiva y muy rápida, profundos cambios tanto en las técnicas y herramientas utilizadas (y en su complejidad) como en las posibilidades que ofrece a los receptores. Suponga que cierta estrategia de publicidad es enviada a N plataformas distintas de manera independiente:

(a) Determine paso-a-paso la distribución de probabilidad exacta del número de éxitos cuando el número de plataformas a las que se envía distribuye Poisson(ν). Suponga que la probabilidad de éxito de un envío es constante e igual a p.

(b) Si cuando se envía la publicidad, la probabilidad de éxito es una variable aleatoria Beta(1,1), ¿cuál es el coeficiente de variación del número envíos exitosos?

Solución

(a) Tenemos que $N \sim \text{Poisson}(\nu)$ y nos piden mostrar que el número de éxitos Y ditribuye Poisson($\nu\, p$).

[1.0 Ptos.]

$$\textbf{[0.2 Ptos.]} \quad N \sim \text{Poisson}(\nu) \quad \text{y} \quad Y \,|\, N = n \sim \text{Binomial}(n,\, p) \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Luego

$$p_{N,Y}(n, y) = p_{Y\,|\,N=n}(y) \cdot p_N(n) = \binom{n}{y} p^y\,(1-p)^{n-y} \cdot \frac{\nu^n\,e^{-\nu}}{n!} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$\Theta_{N,Y} = \{(n, y) \,|\, n \in \mathbb{N}_0,\, y \in \mathbb{N}_0,\, y \leq n\}$. **[0.2 Ptos.]**

Por probabilidades totales se tiene que

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= \sum_{n=y}^{\infty} \binom{n}{y} p^y\,(1-p)^{n-y} \cdot \frac{\nu^n\,e^{-\nu}}{n!} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{(\nu\,p)^y\,e^{-\nu}}{y!} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{1}{(n-y)!}\,[\nu\,(1-p)]^{n-y} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{(\nu\,p)^y\,e^{-\nu}}{y!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{[\nu\,(1-p)]^z}{z!} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{(\nu\,p)^y\,e^{-\nu}}{y!}\,e^{-\nu\,(1-p)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{(\nu\,p)^y\,e^{-\nu\,p}}{y!}, \quad y \in \mathbb{N}_0 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \to Y \sim \text{Poisson}(\nu\,p)
\end{aligned}$$

(b) Definamos como X a la probabilidad de éxito, la cual distribuye Beta$(1, 1)$, es decir

$$Y \mid X = x \sim \text{Poisson}(\nu\, x) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Se pide $\delta_Y = \sigma_Y / \mu_Y$. **[0.4 Ptos.]**

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= \text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \text{E}(\nu\, X) = \nu\, \text{E}(X) = \nu/2 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
\sigma_Y^2 &= \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y \mid X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X)] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \text{Var}(\nu\, X) + \text{E}(\nu\, X) = \frac{\nu^2}{12} + \frac{\nu}{2} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Luego

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \delta_Y = \frac{\sqrt{\frac{\nu^2}{12} + \frac{\nu}{2}}}{\nu/2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{\nu}} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

+1 Punto Base

Problema 2

Cuando un alumno enfrenta un problema se incrementa la probabilidad de cometer errores a medida que demora más en encontrar la solución. Suponga que T es el tiempo en minutos que le toma al alumno desarrollar, el cuál se comporta de acuerdo a una variable aleatoria Gamma$(k,\, \nu)$, mientras que el número de errores que se cometen en un minuto distribuye Poisson$(1/\nu)$.

(a) Determine la distribución del tiempo dado que cometieron k errores durante el desarrollo.

(b) Determine el grado de asociación entre el tiempo en resolver el problema y la cantidad de errores cometidos.

Solución

(a) Si definen como X el número de errores que se cometen en t minutos.

Tenemos que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \quad \text{y} \quad X \,|\, T = t \sim \text{Poisson}(t/\nu) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{\Gamma(k+x)\,\nu^{k-x}}{\left(\frac{\nu^2+1}{\nu}\right)^{k+x} x!\,\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\nu^2+1}{\nu}\right)^{2\,k}}{\Gamma(2\,k)}\, t^{2\,k-1}\, e^{-\left(\frac{\nu^2+1}{\nu}\right)\,t}\, dt \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= \frac{\Gamma(k+x)\,\nu^{k-x}}{\left(\frac{\nu^2+1}{\nu}\right)^{k+x} x!\,\Gamma(k)} = \binom{k+x-1}{k-1} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+1}\right)^k \left(\frac{1}{\nu^2+1}\right)^x,\ x \in \mathbb{N}_0 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

lo que implica que

$$T \,|\, X = k \sim \text{Gamma}\left(2\,k,\, \frac{\nu^2+1}{\nu}\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

(b) Se pide $\text{Cov}(T,\, X) = E(T \cdot X) - E(T) \cdot E(X)$, donde

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^\infty x \cdot \binom{k+x-1}{k-1} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+1}\right)^k \left(\frac{1}{\nu^2+1}\right)^x = \sum_{y=k}^\infty (y-k) \cdot \binom{y-1}{k-1} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+1}\right)^k \left(\frac{1}{\nu^2+1}\right)^{y-k} \\ &= \sum_{y=k}^\infty (y-k) \cdot \binom{y-1}{k-1} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+1}\right)^k \left(1 - \frac{\nu^2}{\nu^2+1}\right)^{y-k} = \frac{k}{\nu^2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ E(T) &= \frac{k}{\nu} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ E(T \cdot X) &= E[E(T \cdot X \,|\, T)] = E[T \cdot E(X \,|\, T)] = E\left(\frac{T^2}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{k\,(k+1)}{\nu^2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Cov}(T,\, X) = \frac{k\,(k+1)}{\nu^3} - \frac{k^2}{\nu^3} = \frac{k}{\nu^3} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+1 Punto Base

Problema 3

Suponga que X e Y tienen distribución conjunta Normal Bivariada dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{1-\rho^2}}\,\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 - 2\,x\,y\rho + y^2\right]\right\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Determine la distribución de $Z = \frac{Y - \rho\,X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ y la distribución de X, ¿Para que valores de $\rho \in (-1,\,+1)$, Z y X son independientes?

Solución

Como la distribución conjunta es una Normal Bivariada con parámetros $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ y $-1 < \rho < +1$ **[0.3 Ptos.]**, se tiene que X e Y distribuyen Normal$(0,1)$. **[0.3 Ptos.]**

Como

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot Y - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot X, \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

entonces

$$\begin{aligned} Z &\sim \text{Normal}\left(0,\,\sqrt{\frac{1}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} - 2\,\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\ &\sim \text{Normal}\,(0,\,1) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\textbf{[0.6 Ptos.]} \quad Y\,|\,X = x \sim \text{Normal}\left(\rho\,x,\,\sqrt{1-\rho^2}\right) \to Z\,|\,X = x \sim \text{Normal}(0,\,1) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

ya que

$$\mu_{Y\,|\,X=x} = \mu_Y + \frac{\rho\,\sigma_Y}{\sigma_X}\,(x - \mu_X) \quad \text{y} \quad \sigma_{Y\,|\,X=x} = \sigma_Y\,\sqrt{1-\rho^2}$$

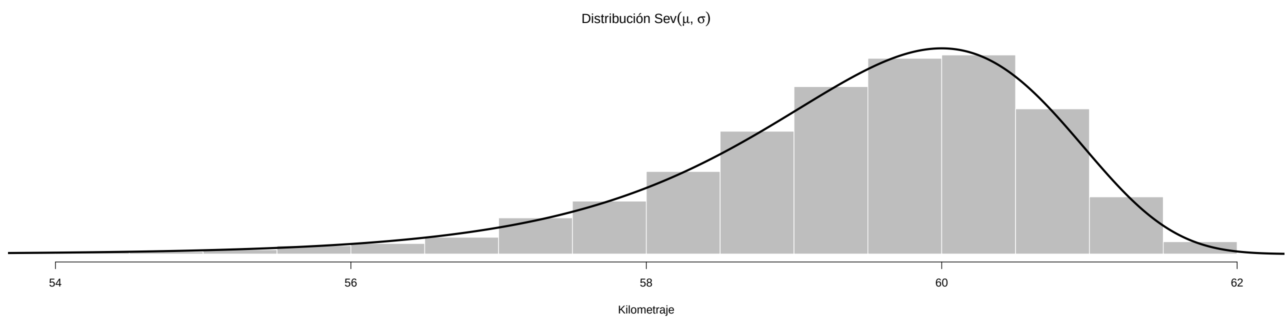
Para cualquier valor de $\rho \in (-1,+1)$ se tiene que

$$f_{Z\,|\,X=x}(z) = f_Z(z) \to X \text{ y } Z \text{ independientes} \quad \textbf{[0.6 Ptos.]}$$

+1 Punto Base

Problema 4

El kilometraje diario en vehículos de Leasing Operativo que entregan empresas de Renta Car, muestran que el comportamiento del kilometraje puede ser modelado con una distribución SEV(μ, σ).



Esta distribución tiene las siguientes características

$$f(x) = \exp\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right], \qquad F(x) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Al construir un gráfico de probabilidad, le recta que mejor ajusta presenta una pendiente igual a uno. Si X representa el kilometraje diario de estos vehículos:

(a) Determine la distribución de $Y = e^X$.

(b) Determine la distribución del mínimo valor de Y entre n vehículos. (Asuma independencia)

Solución

(a) Tenemos que si x_p es el percentil $p \times 100\,\%$ de una Sev(μ, σ), entonces

$$x_p = \mu + \sigma\,\ln[-\ln(1-p)] \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Como la pendiente es uno, entonces $X \sim \text{Sev}(\mu, 1)$ **[0.5 Ptos.]** $\rightarrow Y = e^X \sim \text{Exp}(e^{-\mu})$ **[0.5 Ptos.]** , ya que

$$Y = g(X) = e^X \rightarrow X = g^{-1}(Y) = \ln(Y) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

$$f_Y(y) = f_X[\ln(y)]\,\frac{1}{|y|} = e^{-\mu}\,e^{-e^{-\mu}\,y}, \quad y > 0 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Como $Y \sim \text{Exp}(e^{-\mu})$, entonces el mínimo distribuye $\text{Exp}(n\,e^{-\nu})$. **[1.0 Ptos.]** , ya que si

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad Z = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\} \rightarrow f_Z(z) = n\,[1 - F_Y(z)]^{n-1}\,f_Y(z) = \left(n\,e^{-\mu}\right)\,e^{-\left(n\,e^{-\mu}\right)z} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+1 Punto Base