Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2018

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Pauta Interrogación 2

Pregunta 1

En el Juicio sobre el río (o estero) Silala, un perito ha afirmado que si la correlación entre la pendiente y flujo es mayor a 0,45 entonces puede ser considerado como río (postura de Chile), en caso contrario corresponde a un estero (postura de Bolivia).

Usted toma múltiples mediciones y determina que la pendiente (en grados) se comporta como una variable aleatoria Beta(2, 1) con observaciones que van de 0º y 16º, mientras que el flujo, dada una pendiente igual a x, se comporta como una variable aleatoria Gamma(k, $1/x$) con c.o.v igual a 50 %.

¿Qué opina usted, es río o estero?

Solución

Definamos cómo X a la pendiente en grados e Y al flujo.

[0.6 Ptos] $\quad X \sim \text{Beta}(2,\, 1), \quad \Theta_X = [0,\, 16] \quad \text{e} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Gamma}(k = 4,\, \nu = 1/x)$ **[0.6 Ptos]**

Se pide

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,\, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{E}(X \cdot Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \textbf{[0.6 Ptos]}$$

con

$$\text{E}(X) = 0 + \frac{2}{(2+1)} \cdot 16 = \frac{16 \cdot 2}{3} = \frac{32}{3} \qquad \textbf{[0.6 Ptos]}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2 \cdot 1\,(16-0)^2}{(2+1)^2\,(2+1+1)} = \frac{16^2}{3^3 \cdot 2} = \frac{128}{9} \qquad \textbf{[0.6 Ptos]}$$

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(4\,X) = 4\,\text{E}(X) = \frac{128}{3} \qquad \textbf{[0.6 Ptos]}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \text{Var}[\text{E}(Y \,|\, X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \,|\, X)] \\ &= \text{Var}(4\,X) + \text{E}(4\,X^2) = 4^2\,\text{Var}(X) + 4\,\text{E}(X^2) = 4^2\,\text{Var}(X) + 4\,\text{Var}(X) + 4\,[\text{E}(X)]^2 \\ &= \frac{128 \cdot 52}{9}\end{aligned}$$

[0.6 Ptos]

$$\text{E}(X \cdot Y) = \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \,|\, X)] = \text{E}[X \cdot \text{E}(Y \,|\, X)] = \text{E}(X \cdot 4 \cdot X) = 4 \cdot \text{E}(X^2) = 4 \cdot 128 = 512 \qquad \textbf{[0.6 Ptos]}$$

Reemplazando

$$\rho = 0{,}5547002 \qquad \textbf{[0.6 Ptos]}$$

Es un río! Chile tiene razón. **[0.6 Ptos]**

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Esta semana 284 marcas participaron oficialmente en el CyberMonday. El número de visitas fue de 87 millones, de las cuales 1.7 millones terminaron en transacciones exitosas. Para el eCommerce chileno, estos tres días implicaron ventas por 233 millones de dólares, todo un récord.

Análisis preliminares de las transacciones indican que el c.o.v de los montos en dólares fue de un 35 % con un comportamiento de tipo Log-Normal. Además, distintos medios de pagos, por ejemplo Transbank y Multicaja, reportaron problemas en algunas solicitudes de transacción debido a que el sistema colapsaba, datos preliminares estiman que esto ocurrió en el 10 % de los casos. Suponiendo que el comportamiento de los cibernautas durante tres días fue estacionario, es decir, la tasa de solicitudes permaneció constante durante los tres días y estas ocurrían según un modelo Poisson.

(a) **[2.0 Ptos]** ¿Cuántos segundos se esperaba que transcurrieran entre 10 transacciones exitosas?

(b) **[2.0 Ptos]** ¿Cuántas solicitudes por más de 250 dólares se esperaban cada 20 segundos?

(c) **[2.0 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que en 10 segundos ocurran a lo más dos transacciones exitosas por más de 250 dólares?

Solución

(a) Sea X_t el número de transacciones exitosas realizada por los cibernautas durante t segundos del CyberMonday.

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu\, t) \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Con $\nu = \dfrac{1{,}7 \cdot 10^6}{3 \times 24 \times 60 \times 60} = 6{,}558642.$ **[0.9 Ptos]**

Sea T tiempo tiempo transcurrido entre k transacciones exitosas.

$$T \sim \text{Gamma}(k-1,\, \nu) \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Se pide

$$\textbf{[0.3 Ptos]} \qquad \text{E}(T) = \frac{(k-1)}{\nu} = \frac{9}{6{,}558642} = 1{,}372235 \text{ seg} \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

(b) Sea p la probabilidad que una solicitud de transacción supere los 250 dólares.

Sea Y el monto en dólares de una solicitud de transacción, la cual es una variable aleatoria Log-Normal$(\lambda,\, \zeta)$

$$\textbf{[0.3 Ptos]} \qquad \zeta = \sqrt{\ln(1 + 0{,}35^2)} = 0{,}3399387 \qquad \text{y} \qquad \lambda = \ln\left(\frac{233}{1{,}7}\right) - \frac{1}{2}\,\zeta^2 = 4{,}862631 \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

$$\textbf{[0.3 Ptos]} \qquad p = P(Y > 250) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(250) - \lambda}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(1{,}938084)$$
$$\approx 1 - \Phi(1{,}94) = 1 - 0{,}9738 = 0{,}0262 \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Sea Z_t el número de solicitudes realizada por los cibernautas durante t segundos del CyberMonday por más de 250 dólares.

$$Z_t \sim \text{Poisson}(\lambda\, p\, t) \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Con $\lambda = \dfrac{\nu}{0{,}9} = 7{,}28738.$ **[0.3 Ptos]**

Se pide

$$\text{E}(Z_{20}) = \lambda \cdot p \cdot 20 = 3{,}818587 \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

(c) Sea W_t el número de solicitudes exitosas realizada por los cibernautas durante t segundos del Cyber-Monday por más de 250 dólares.

$$W_t \sim \text{Poisson}(\nu\, p\, t) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Se pide

$$P(W_{10} \leq 2) = \sum_{w=0}^{2} \frac{\lambda^w\, e^{-\lambda}}{w!} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

con $\lambda = 6{,}558642 \cdot 0{,}0262 \cdot 10 = 1{,}718364.$ **[0.5 Ptos]**

Reemplazando, se tiene que

$$P(W_{10} \leq 2) = 0{,}7523678 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

En Física y Astronomía la precisión de las mediciones (micro y macro) es crucial. Con el objetivo de calibrar un instrumento se toman varias mediciones con dos instrumentos de referencia, registrando su precisión y variabilidad de tal forma que la estimación de la incerteza es igual a

$$I = \frac{\ln\sqrt{X/Y}}{\ln\sqrt{U\,V}},$$

donde X e Y representan la precisión obtenida con cada instrumento, Mientras que U y V representan la variabilidad registrada con cada uno. Teniendo en cuenta que X, Y, U y V son variables aleatoria independientes de tipo Log-Normal, con mismo c.o.v, misma media para X e Y y mediana igual a uno para U y V igual a uno, determine la función de densidad de la incerteza.

Solución

Tenemos que las cuatro variables aleatorias son independientes con distribuyen Log-Normal.

Los parámetros de las Log-Normales son:

$$\lambda_X = \lambda_Y; \quad \lambda_U = \lambda_V = 0; \quad \zeta_X = \zeta_Y = \zeta_U = \zeta_V = \zeta \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Sean

$$\begin{aligned} T = \ln\sqrt{X/Y} &\sim \text{Normal}\left(\frac{1}{2}\,\lambda_X - \frac{1}{2}\,\lambda_Y,\, \sqrt{\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^2}\right) \\ &\sim \text{Normal}\left(\frac{\lambda_X - \lambda_Y}{2},\, \frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

Alternativamente se puede considerar también

$$\begin{aligned} T = \ln\, X/Y &\sim \text{Normal}\left(\lambda_X - \lambda_Y,\, \sqrt{\zeta^2 + \zeta^2}\right) \\ &\sim \text{Normal}\left(\lambda_X - \lambda_Y,\, \sqrt{2}\,\zeta\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Z = \ln\sqrt{U\,V} &\sim \text{Normal}\left(\frac{1}{2}\,\lambda_U + \frac{1}{2}\,\lambda_V,\, \sqrt{\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^2}\right) \\ &\sim \text{Normal}\left(0,\, \zeta/\sqrt{2}\right) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

como alternativa

$$\begin{aligned} Z = \ln U\,V &\sim \text{Normal}\left(\lambda_U + \lambda_V,\, \sqrt{\zeta^2 + \zeta^2}\right) \\ &\sim \text{Normal}\left(0,\, \sqrt{2}\,\zeta\right) \end{aligned}$$

Por independencia y tomando $T = g^{-1}(I, Z) = I \cdot Z$:

$$\begin{aligned} f_I(i) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T(g^{-1}) \cdot f_Z(z) \left|\frac{\partial}{\partial\, i}\, g^{-1}\right| dz \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\,\pi\,\sigma^2}\, \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z\,\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right] |z|\, dz, \quad \text{con } \sigma^2 = \zeta^2/2 \text{ (para la alternativa } \sigma^2 = 2\,\zeta^2) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi\,\sigma^2}\int_0^\infty z\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z\,\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right]dz \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$= \frac{1}{\pi\,(i^2+1)}\int_0^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2 \exp\left[-\frac{u}{2}\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right]du \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$= \frac{1}{\pi\,(i^2+1)}\cdot 1, \quad \text{por área bajo todo su soporte de una Exp}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$= \frac{1}{\pi\,(i^2+1)}, \qquad i \in \mathbb{R} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Pregunta 4

Un problema que enfrentan los países es la inmigración ilegal y una manera de estimarla es a partir de una muestra aleatoria de tamaño n en la población N de inmigrantes (legales e ilegales). Desde aduana se saben que en el país hay actualmente 960 mil extranjeros residentes en Chile.

(a) **[2.0 Ptos]** Si la muestra es sin reemplazo, ¿cómo distribuye el número de inmigrantes legales en la muestra?

(b) **[2.0 Ptos]** Calcule la probabilidad de observar x inmigrantes legales en la muestra suponiendo que la población de inmigrantes es de tamaño N y lo mismo suponiendo que es de tamaño $N-1$. Como estas dos probabilidades son prácticamente iguales, obtenga una estimación de N en términos de x, n y los 960 mil extranjeros residentes en Chile.

(c) **[2.0 Ptos]** Si la muestra fue de tamaño 50 y el número de extranjeros legales observados fue de 40, ¿cuál es su estimación para el número de inmigrantes ilegales residentes en Chile?

Solución

(a) Sea X el número del número de inmigrantes legales en la muestra.

$$X \sim \text{Hipergeomética}(n, N, m) \qquad \textbf{[1.5 Ptos]}$$

con n igual al tamaño de la muestra, N correspondiente al tamaño de la población de inmigrantes y m los 960 mil extranjeros residentes en Chile que pasaron por aduana. **[0.5 Ptos]**

(b) Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos]} \qquad \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cdot \frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{m}{x}\binom{N-1-m}{n-x}} \approx 1 \to N \approx \frac{960.000 \cdot n}{x} \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(c) Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos]} \qquad N - m \approx m \cdot \left(\frac{n}{x} - 1\right) = 960.000 \cdot \left(\frac{50}{40} - 1\right) = 960.000 \cdot \frac{10}{40} = 240.000 \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base