1. ESPACIO MUESTRAL (S) | I |

$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$

- Para definir el espacio muestral se debe enumerar TODAS las situaciones que podrían ser un resultado del evento de interés.
  - El espacio muestral varía según si se está observando 1 ó más objetos, si estos se analizan como grupo ó como individuo, o si (en el caso de ser más de 1 objeto) el suceso ocurre en todos simultáneamente (importa el orden, lo cual 'agranda' S) o si se analiza cada objeto que define el evento por separado (no importa el orden, y un evento se define sólo por el resultado en cada objeto sin importar cuál objeto tuvo el resultado)
  - Lanzar 5 monedas → importa el orden → 1 experimento
  - Lanzar 1 moneda 5 veces → no importa el orden → 5 experimentos
- Los eventos posibles (#S) se definen a partir de una 'característica' ó 'resultado' observado en 1 ó + objetos, y pueden ser equiprobables o no.

2. TEORIA DE CONJUNTOS

- Ley conmutativa. $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- Ley asociativa. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(AB)C = A(BC)$
- Ley distributiva. $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C = AC \cup BC$
  $(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Ley de Morgan. $\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots E_n} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \cdots \cap \bar{E}_n$
  $\overline{E_1 \cdot E_2 \cdots E_n} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \cdots \cup \bar{E}_n$

3. MATEMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

- Axiomas de probabilidades: $P(E) \geq 0$
  $P(S) = 1$
  Para eventos mutuamente excluyentes: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- Propiedades de los axiomas.
  1. $\forall E \subseteq S$:
     $P(E) = 1 - P(\bar{E})$
     $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
  2. $\forall E_1, E_2 \subseteq S$
     $P(E_1 \cup E_2) = P[E_1 \cup (E_2 \cap \bar{E}_1)]$
     $= P(E_1) + P(E_2 \cap \bar{E}_1)$
- Ley Aditiva. $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots E_n) = 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots E_n})$
  $= 1 - P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \cdots \bar{E}_n)$
- Ley Multiplicativa. $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1 | E_2 \cap E_3) \cdot P(E_3 | E_2) \cdot P(E_2)$
  $= P(E_1 | E_2 \cap E_3) \cdot P(E_2 | E_3) \cdot P(E_3)$

  * Puede elegirse E_1, E_2, E_3 en cualquier orden y da el mismo resultado.

4. CÓMO 'CONTAR'

→ Herramientas para establecer la cardinalidad # de un conjunto (La cantidad de eventos que contiene).

- Principio de multiplicación.

Si el 'evento de interés' se define a partir de K experimentos de tamaños muestrales $n_1, n_2, \cdots, n_K$, para el espacio muestral de este se cumple:

$$\#S = n_1 \cdot n_2 \cdots n_K$$

- Herramientas para identificar los valores $n_1, \cdots n_K$:
  - Permutación. - n objetos $\in C = \{c_1, c_2, \cdots c_n\}$
    - se tiene r 'cupos' para situar estos objetos
    - Los objetos son 'individuales', es decir, es relevante el orden en que se los elija (qué 'puesto' va a ocupar el objeto i)

    (a) con reemplazo. Los n elementos se encuentran disponibles en cada 'muestreo' (elección de candidato para un puesto), es decir, el elemento c_i puede repetirse.

    $$\# = n^r$$

    (b) sin reemplazo. Si un elemento es elegido para un 'puesto', no puede volver a ser elegido y 'desaparece' del conjunto C para el siguiente muestreo.

    $$\# = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) = \boxed{nPr}$$ en la calculadora

  - Combinación. - n objetos $\in C = \{c_1, c_2, c_n\}$
    - se quiere formar 'grupos' de tamaño r (sin reemplazo, los elementos no pueden repetirse en el grupo) en que no importa qué 'puesto' tome cada elemento.

    $$\# = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \boxed{nCr}$$ en la calculadora

  - Ordenamiento multinomial. - n objetos $\in C\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$
    - Se quiere formar K 'grupos' (sin orden de entrada, sin reemplazo) de tamaños $n_1, \cdots n_K$ donde $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$

    $$\# = \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_K} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_K!}$$

5. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE EVENTOS

- **Probabilidad condicional.**

Cuando 2 eventos son dependientes y se tiene la certeza de que uno ocurrió, se puede tomar el evento ocurrido como espacio muestral.

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

→ El espacio muestral se reduce a aquellos puntos muestrales en que ocurre E_2

- **Propiedades de la condicionalidad.**

$$P(E|S) = P(E)$$

$$P(\bar{E}_1|E_2) = \frac{P(\bar{E}_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = 1 - P(E_1|E_2)$$

- **Independencia estadística.**

Dos eventos son estadísticamente independientes si:

$P(E_1|E_2) = P(E_1)$ ó $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ → La ocurrencia o no de E_2 no cambia al reducir el espacio muestral.

$\rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

- **eventos mutuamente independientes.**

Se tiene n eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Si cualquier subconjunto de ellos cumple con $P(E_a \cap \cdots \cap E_m) = P(E_a) \cdots P(E_m)$ se dice que son mutuamente independientes.

→ Es condición necesaria pero no suficiente que exista independencia estadística en cada 'par' de eventos.

6. OTROS TEOREMAS

- **Teorema de Probabilidades Totales.**

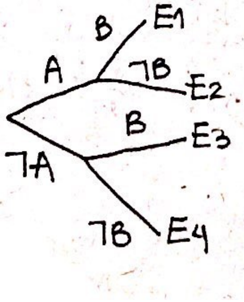
– n eventos $E_1, \ldots, E_n$ colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes.

⇝ La probabilidad de un evento cualquiera A es:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$

- **Teorema de Bayes.**

– n eventos $E_1, \ldots, E_n$ colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes.



$$P(E_j|A) = \frac{P(A|E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot P(E_i)}$$

7. VARIABLES ALEATORIAS

VARIABLE ALEATORIA: $\mathbf{X}: S \to \mathbb{R}$

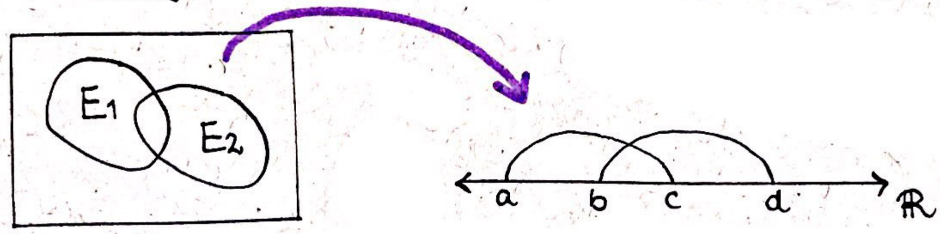
Toma un EVENTO del espacio muestral y le asigna un número real. Los valores que $\mathbf{X}$ pueden tomar se conocen como el SOPORTE DE X, Θ_X.

Los eventos se representan según el valor que queremos que tome $\mathbf{X}$:

$\mathbf{X} = x$ $\quad$ $\mathbf{X} < x$ $\quad$ $\mathbf{X} > x$ $\quad$ $x_1 \geq \mathbf{X} > x_2$ ← minúscula el valor que "queremos" q tome. ← mayúscula es la variable.

⇝ El valor que tome dentro de los que permite Θ_X es ALEATORIO, pero algunos eventos son más probables que otros.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD: Es la "regla" ó transformación que "mapea" la variable



FUNCIÓN DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD ACUMULADA: Para CUALQUIER variable aleatoria, $F_X(x)$ entrega la PROBABILIDAD de que $\mathbf{X}$ tome (dentro de su soporte) un valor menor ó igual a x.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$\mathbf{X}, \Theta_X$

DISCRETA ← * $p_X(x)$: Función de distribución de probabilidad

$$p_X(x) = P(\mathbf{X} = x)$$

$$P(a < \mathbf{X} \leq b) = \sum_{x_i \leq b} p_X(x_i) - \sum_{x_i \leq a} p_X(x_i)$$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

CONTINUA $[P(\mathbf{X} < x) = P(\mathbf{X} \leq x)]$ ← * $f_X(x)$: Función de densidad

$$f_X(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$$

$$\int_a^b f_X(x) = P(a < \mathbf{X} \leq b)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$P(a < \mathbf{X} \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

En ambos casos... ← * $F_X(x)$ es la función de distribución de probabilidad acumulada

$$F_X(x) = P(\mathbf{X} \leq x)$$

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

$F_X(x)$ es continua por la derecha

8. MEDIDAS DESCRIPTIVAS

VALOR MEDIO / VALOR ESPERADO μ_X = ESPERANZA $E(X)$

⇝ Es el 'promedio ponderado' del soporte de la variable, Θ_X

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_X} x \cdot p_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx \end{cases}$$

* Existe si $E(|X|) < \infty$

⇝ Muchas veces necesitamos la esperanza de X^2, X^3, u otras funciones de X. $E[g(X)] = \sum / \int g(x) \cdot p_X/f_X(x)$

⇝ Pero, la mayoría de las veces es útil calcular potencias de X con la

FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS M_X

(Función específica para cada variable aleatoria)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_X} e^{tx} p_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx \end{cases}$$

Una vez calculada $M_X(t)$, puedo derivarla n veces y evaluar en $t=0$; esto me entrega $E(X^n)$.

MEDIANA: $x_{med} = x_{0,5}$

$$F_X(x_{med}) = 1/2$$

PERCENTIL $p \times 100\%$: x_p

x_p es el valor del dato que se encuentra en el percentil $p \times 100\%$.

$$F_X(x_p) = p$$

VARIANZA: σ_X^2

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = E[X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2]$$
$$= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2 = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2$$

DESVIACION ESTANDAR: σ_X $\quad \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{M_X''(0) - [M_X'(0)]^2}$

COEFICIENTE DE VARIACION: δ_X $\quad \delta_X = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X}$

IQR: $IQR = x_{0,75} - x_{0,25}$

ASIMETRÍA (SKEWNESS) $= E[(X-\mu_x)^3] = E[X^3 - 3X^2\mu_x + 3X\mu_x^2 - \mu_x^3]$

$$= E(X^3) - \mu_x E(X^2)\cdot 3 + 3\mu_x^2 E(X) - \mu_x^3$$

$$= E(X^3) - 3E(X)\cdot E(X^2) + 3[E(X)]^3 - [E(X)]^3$$

$$= E(X^3) + 3E(X)[E(X)^2 - E(X^2)]$$

$$= E(X^3) - 3E(X)\cdot Var(X)$$

$$= M_x'''(0) - 3M_x'(0)[M_x''(0) - (M_x'(0))^2]$$

COEFICIENTE DE ASIMETRIA: θ_x

$$\theta_x = \frac{E[(X-\mu_x)^3]}{\sigma_x^3}$$

$$= \frac{E(X^3) - 3E(X)Var(X)}{[Var(X)]^{3/2}}$$

$$= \frac{M_x'''(0) - 3M_x'(0)[M''_x(0) - (M_x'(0))^2]}{[M''_x(0) - (M_x'(0))^2]^{3/2}}$$

KURTOSIS $= E[(X-\mu_x)^4] = E[X^4 - 4X^3\mu_x + 6X^2\mu_x^2 - 4X\mu_x^3 + \cancel{4}\mu_x^4]$

$$= E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)[E(X)]^2 - 4E(X)^4 + E(X)^4$$

$$= E(X^4) + E(X)[-4E(X^3) + 6E(X)E(X^2) - 3E(X)^3]$$

$$= M_x^{(4)}(0) + M_x'(0)[6M_x'(0)\cdot M''(0) - 4M_x'''(0) - 3(M_x'(0))^3]$$

COEFICIENTE DE KURTOSIS : $K_x = \frac{E[(X-\mu_x)^4]}{\sigma_x^4} - 3$

$$= \frac{M_x^{(4)}(0) + M_x'(0)[6M_x'(0)\cdot M''(0) - 4M_x'''(0) - 3(M_x'(0))^3]}{[M''_x(0) - (M_x'(0))^2]^2} - 3$$

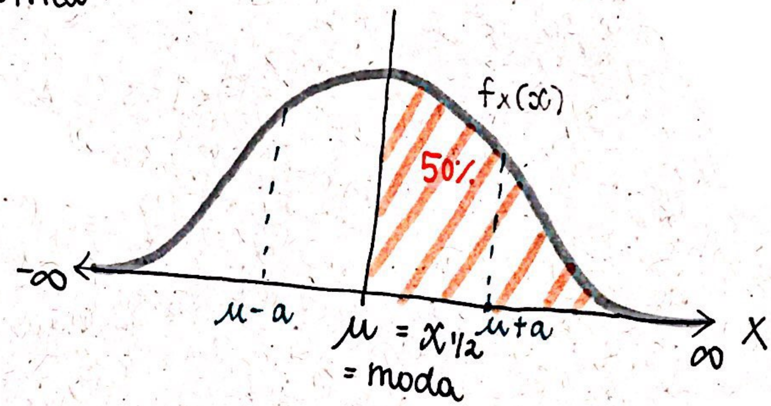
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. DISTRIBUCION NORMAL (μ, σ)

- Continua
- $\Theta_X: -\infty < x < \infty$
  $-\infty < \mu < \infty$
  $0 < \sigma < \infty$

- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

- Es simétrica:



- Función generadora de momentos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$$

$$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 1/2$$

$$P(X \leq \mu + a) = P(X \geq \mu - a) = 1 - P(X \leq \mu - a)$$

$$P(X \leq \mu - a) = P(X \geq \mu + a) = 1 - P(X \leq \mu + a)$$

- Función de distribución de probabilidad acumulada: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt$

⇝ Es una integral imposible de calcular.

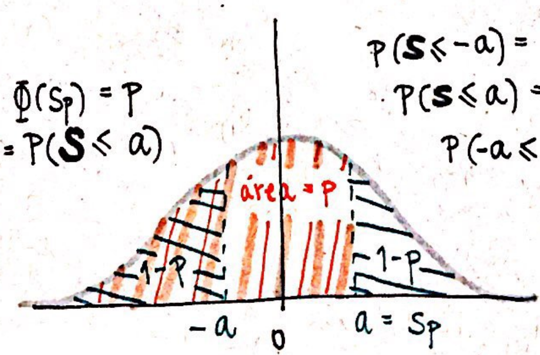
$\therefore F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow \Phi(s)$ es la función de distribución de probabilidad acumulada de una normal (0,1).

DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$S \sim$ normal - estandar $\longleftrightarrow S \sim$ Normal (0,1)

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = F_S(s) = \Phi(s) = P(S \leq s)$$

$\Phi(S_p) = p$
$= P(S \leq a)$



$$P(S \leq -a) = P(S \geq a) = 1 - \Phi(a)$$

$$P(S \leq a) = P(S \geq -a) = \Phi(a)$$

$$P(-a \leq S \leq b) = \Phi(b) - \Phi(-a)$$

$$= \Phi(b) - (1 - \Phi(a))$$

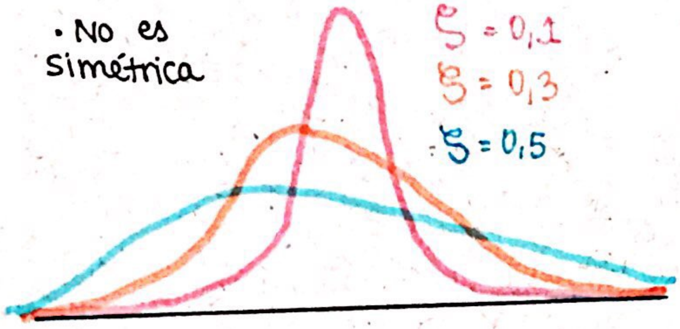
$S_p = \Phi^{-1}(p)$

- Si: $P(S \leq s) = a$
  $s = \Phi^{-1}(a)$
- Si: $P(S > s) = a$
  $P(S \leq s) = 1 - a$
  $s = \Phi^{-1}(1-a)$
- Si $P(-s < S < s) = a$
  $P(S \leq s) = 0{,}5 + \frac{a}{2}$ $\quad s = \Phi^{-1}\left(0{,}5 + \frac{a}{2}\right)$

Distribución log-normal

• Continua

• No es simétrica



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(\delta x)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\delta}\right)^2\right]$$

$; x > 0$

$\lambda = E(\ln X)$

$\delta = \sqrt{var(\ln X)}$

• Si $X \sim$ log-normal (λ, δ), el logaritmo de X distribuye normal.

• $\log X \sim$ Normal (λ, δ)

• $Y = \log X \quad ; \quad X = \exp Y$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(\delta x)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\delta}\right)^2\right] dx \quad \Big/ \quad \begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{1}{x} \cdot dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\delta} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\lambda}{\delta}\right)^2\right] du = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\delta}\right)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\delta}\right)$$

$$M_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(\delta x)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\delta}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(\delta x)} \cdot \exp\left[tx - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\delta}\right)^2\right] dx \rightsquigarrow X^{(s)} = e^{s \ln x}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d^{(s)}}{dt^{(s)}} M_X(0) = \exp\left[s\lambda + \frac{\delta^2 s^2}{2}\right]$$

$F(X_m) = \frac{1}{2}$

$$\Phi\underbrace{\left(\frac{\ln(X_m) - \lambda}{\delta}\right)}_{0} = \frac{1}{2}$$

$\ln(X_m) - \lambda = 0$

$\ln(X_m) = \lambda$

$X_m = e^{\lambda}$ mediana $= e^{\lambda}$

Scanned with CamScanner

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(\varsigma x)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \lambda}{\varsigma}\right)^2\right] dx \quad \Big/ \quad \begin{matrix} y = \ln x \\ dy = \frac{dx}{x} \\ x = e^y \end{matrix} \quad \Big/ \quad \begin{matrix} x \to 0 \,;\, y \to -\infty \\ x \to \infty \,;\, y \to \infty \end{matrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^y}{\varsigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\lambda}{\varsigma}\right)^2\right] dy$$

$$= e^{\lambda + \frac{1}{2}\varsigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\varsigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\cdot\varsigma^2}\left[y - (\lambda + \varsigma^2)\right]^2\right] dy}_{\text{Normal}(\lambda + \varsigma^2,\ \varsigma)}$$

$$\left.\begin{matrix} \mu_X = E(X) = e^{\lambda + \frac{1}{2}\varsigma^2} \\ \sigma_X^2 = \mu_X^2 (e^{\varsigma^2} - 1) \end{matrix}\right\} \text{teniendo } \mu_X \text{ y } \sigma_X \text{ se pueden despejar } \lambda \text{ y } \varsigma$$

- Obteniendo los parametros.

con $\mu_X \to \lambda = \ln \mu_X - \frac{1}{2}\varsigma^2$

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{\mu_X^2 (e^{\varsigma^2} - 1)}{\mu_X} = e^{\varsigma^2} - 1 \to \varsigma^2 = \ln(1 + \delta_X^2)$$

$$\varsigma = \sqrt{\ln(1 + \delta_X^2)}$$

- Si $\delta_X \leq 0{,}3 \to \varsigma \approx \delta_X$

Bernoulli

- Experimento con 2 resultados posibles: éxito ó fracaso.
- Hay una probabilidad p de éxito ; $p \in (0,1)$

$X \sim$ Bernoulli (p):

$$p_X(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad ; \Theta X = 0, 1$$

éxito $\rightarrow X = 1 \rightarrow p = P(\text{éxito}) = P(X = 1)$ / fracaso: $X = 0$

⇝ si tengo una sucesión de eventos Bernoulli:

Distribución Binomial

- Discreta
- n eventos Bernoulli independientes

$X \sim$ Binomial (n, p)

X = Cantidad de éxitos en n ensayos.

$$p(X = x) = p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad ; \Theta x = 0, 1, 2 \cdots, n$$

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{[X]} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad ; 0 \leq x \leq n$$

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$a = pe^t$

$b = 1-p$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \underset{\text{por propiedad}}{=} (pe^t + (1-p))^n$$

$$M_X(t) = [pe^t + (1-p)]^n$$

$$M_X'(0) = pe^t \cdot n [pe^t + (1-p)]^{n-1} \Big|_{t=0} = pn [\cancel{p} + (1 - \cancel{p})]^{n-1} = pn$$

$$E(X) = \mu_X = n \cdot p$$

$$M_X''(0) = E(X^2) = np[(n-1)p + 1]$$

$$var(X) = E(X)^2 - E(X^2) = n^2 p^2 - np[(n-1)p + 1] = \cancel{n^2 p^2} - \cancel{n^2 p^2} + np^2 - np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Distribución geométrica

· Discreta

$X \sim$ Geométrica (p)

X = nº de ensayos Bernoulli que pasan hasta el 1° éxito (ó cuántos faltan para el siguiente).

⇝ También se conoce como "tiempo de retorno" a su esperanza

$$\bar{T} = E(X)$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x p (1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}$$

Probabilidad de que falten x experimentos ó periodos para el sgte éxito : $p_X(x) = p(1-p)^{x-1}$; $n = 1, 2, \dots$

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} = 1-(1-p)^{[x]}$$

Probabilidad de que no hayan éxitos en $x-1$ ensayos

⇝ La distribución geométrica no tiene memoria

$$P(X = a+b \mid X > a) = P(X = b)$$

$$M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}$$

Distribución binomial negativa

· Discreta

$X \sim$ Binomial - negativa (r, p)

X = Número de ensayos Bernoulli que transcurren hasta observar r éxitos.

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad ; \Theta_X = r, r+1, r+2, \dots$$

⇝ Esto implica que hay $r-1$ éxitos a lo largo de $X-1$ ensayos.

$$P[\text{Binomial negativa } (r,p) = x] = P[\text{Binomial}(r-1, p) = x-1]$$

$$F_X(x) = \sum_{k=r}^{[x]} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

Poisson

· Discreta

· Describe eventos con una 'tasa de ocurrencia'
↳ se lleva el tiempo a una "unidad" (día, hora, s, etc.)

$X \sim \text{Poisson}(\nu t)$,

$\lambda = \nu t$

↳ Donde t es la "unidad" y ν es eventos x unidad.

X = número de eventos x unidad de tiempo.

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad \Theta_X = 0, 1, 2, \dots$$

Intuición: Si se divide el tiempo en porciones diferenciales, en cada porción hay una variable Bernoulli (pasa ó no pasa) $(n \to \infty)$

* $\lambda = \nu t$ → t es el intervalo (0,t) (su duración) en que se analiza la ocurrencia del evento
→ ν es la ocurrencia media del evento x unidad de tiempo

⇝ entonces, λ es la ocurrencia media del evento en cualquier intervalo del largo de (0,t).

$E(X_t) = \nu t = \lambda$

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\cdot\lambda)^x}{x!} \qquad * \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

$$= e^{-\lambda}\exp(e^t\cdot\lambda) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Propiedad útil:

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\to \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1$$

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Distribución exponencial

· Continua

· Describe el tiempo entre eventos Poisson, ó el tiempo que falta para el sgte. evento en cualquier instante.

Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$; $T_1 \sim \text{exponencial}(\nu)$.

$P(T_1 > t) = P(X = 0) = e^{-\nu t}$

$$\therefore \quad F_{T_1}(t) = P(t \geq T_1) = 1 - e^{-\nu t}$$

$$f_{T_1}(t) = \nu e^{-\nu t} \quad ; \quad \Theta_X = X \geq 0$$

⇝ No tiene memoria: $P(T_1 > t+s \mid T_1 > s) = P(T_1 > t)$

$$M_{T_1}(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\, \nu e^{-\nu x}\, dx = \nu \int_0^{\infty} e^{x(t-\nu)} dx$$

$$= \nu \left[\frac{1}{t-\nu} e^{x(t-\nu)} \right]_{x=0}^{x=\infty}$$

si $t < \nu$: $M_{T_1}(t) = \dfrac{\nu}{\nu - t}$

(siempre será el caso ya que M se evalúa en 0 para usarla)

$$E(X) = M_{T_1}'(0) = \frac{-\nu}{(\nu-t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\nu}$$

$E(T_1) = \dfrac{1}{\nu}$

$$M_{T_1}''(0) = \frac{\nu \cdot 2(\nu - t)}{(\nu-t)^4}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\nu^2}$$

$$Var(T_1) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 - \frac{2}{\nu^2}$$

$Var(T_1) = \dfrac{1}{\nu^2}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) = \int_0^x \nu e^{-\nu x} dx \quad ; x \geq 0$$

$$= \nu \int_0^x e^{-\nu x} dx = \nu \left[\left(-\frac{1}{\nu}\right) e^{-\nu x} \Big|_{x=0}^{x=x} \right]$$

$$= -e^{-\nu x} + 1$$

Distribución gamma

· continua

$X \sim Gamma(\kappa, \nu)$

X = Tiempo que pasa desde el 'presente' hasta el κ-ésimo evento Poisson.

$f_X(x) = \dfrac{\nu^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \cdot x^{\kappa-1} \cdot e^{-\nu x}$; $\Theta_X = X \geq 0$ * $\Gamma(\kappa) = \int_0^{\infty} u^{\kappa-1} e^{-u} du$

Si $X_t \sim Poisson(\nu t)$:

$$P(X > t) = P(X_t \leq \kappa - 1) = \sum_{x=0}^{\kappa-1} \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}$$

$$\therefore F_X(x) = 1 - \sum_{x=0}^{\kappa-1} \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}$$

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\nu^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \cdot x^{\kappa-1} \cdot e^{-\nu x} dx = \frac{\nu^\kappa}{(\nu-t)^\kappa} \overbrace{\int_0^{\infty} \frac{(\nu-t)^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-(\nu-t)x} dx}^{1}$$

Gamma$(\kappa, \nu - t)$

$M_X(t) = \dfrac{\nu^\kappa}{(\nu-t)^\kappa}$

$$M_X'(0) = \frac{\nu^\kappa (-1)(\kappa)(\nu-t)^{\kappa-1}}{[(\nu-t)^\kappa]^2}\Big|_{t=0} = \frac{-\nu^\kappa \cdot \kappa \cdot \nu^{\kappa-1}}{\nu^{2\kappa}} = \frac{\kappa}{\nu}$$

$E(X) = \dfrac{\kappa}{\nu}$

$$M_X''(0) = \frac{\kappa^2}{\nu^2} + \frac{\kappa}{\nu^2}$$

$Var(X) = \dfrac{\kappa}{\nu^2}$

Distribución Hipergeométrica

- Discreta

$X \sim$ Hipergeométrica (N, m, n) → Donde
- N = tamaño de muestra
- m = cantidad de elementos de la muestra que pertenecen a una categoría
- n = cantidad de elementos que se toma de la muestra.

X = cantidad de los elementos tomados que pertenece a la categoría.

$$P_X(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{[x]} \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = n\frac{m}{N}$$

$$Var(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)$$

Distribución Beta

- continua

$X \sim$ Beta(q, r)

Si no se especifican valores para a y b: $a=0$, $b=1$, $\Theta_X = 0,1$

→ X distribuye valores entre a y b con proporciones entregadas por q(parámetro de forma) y r(parámetro de forma 2)

⇝ Para $a=0$, $b=1$: $f_X(x) = \frac{1}{B(q,r)}\left(x^{q-1}(1-x)^{r-1}\right)$

Distribución Weibull (AKA 'LA WEIBULL')

- Continua

$T \sim$ Weibull(η, β) → Donde β = Parámetro de forma, η = Parámetro de escala
- $\beta<1$: Tasa de fallos decrece con el tiempo
- $\beta=1$: Tasa de fallos cte.
- $\beta>1$: Tasa de fallos crece con el tiempo

T = 'Tiempo' hasta que algo falla.

$$f_T(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad ; t>0$$

• Importante: Saber integrar / derivar la weibull

$$F_T(t) = \int_0^t \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] dx. \qquad \mu = \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta} \qquad d\mu = \beta\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{\eta}\, dx$$

$$= \int_0^t -\exp[\mu]\, d\mu = -\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=t} = -\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] + 1$$

$$F_T(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = -\left[\frac{d}{dt}(-)\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

$$E(T) = \int_0^{\infty} \frac{t\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] dt \qquad \mu = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \qquad d\mu = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

$$* \; \Gamma(K) = \int_0^{\infty} \mu^{K-1} e^{-\mu}\, d\mu \qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

$$= \int_0^{\infty} t \exp(-u)\, du$$

$$= \int_0^{\infty} \mu^{1/\beta} \eta \exp(-\mu)\, d\mu = \eta\,\Gamma(1/\beta + 1) = \frac{\eta}{\beta}\Gamma(1/\beta) \qquad E(T) = \frac{\eta}{\beta}\Gamma(1/\beta)$$

$$M_T(\mu) = \int_0^{\infty} \exp(\mu t) \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] dt = \text{Imposible}$$

• Para obtener los parámetros se despeja un sistema de ecuaciones con los percentiles:

$$\ln(t_p) = \ln(\eta) + \frac{1}{\beta}\,\Phi^{-1}_{weibull}(p)$$

$$\Phi^{-1}_{weibull}(p) = \ln[-\ln(1-p)]$$

Scanned with CamScanner

Distribución logística

· continua

$$F_Y(y) = \frac{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{1+\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\left[1+\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^2}$$

· Parámetros μ y σ se despejan de los percentiles

Log - logística

$$F_T(t) = F_Y(\ln(y)) \qquad f_t(t) = \frac{1}{t} f_Y(\ln(y))$$

· σ y μ se despejan de los percentiles.

Distribución T-Student

· continua

⇝ T se parece a una distribución normal a medida que el parámetro ν crece

Para $\nu > 30$ $T \approx \text{Normal}(\mu_T, \sigma_T)$ y se puede usar la tabla.

ν = grados de libertad

⇝ Si $X_1, \dots X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$

$$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n} \quad ; \quad T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \quad \rightsquigarrow \nu = n-1$$

Distribución de Pearson (ó Chi cuadrado)

· continua

· no esta en el formulario.

$$X_k^2 = Z_1^2 + \dots + Z_k^2 \sim \text{Chi-cuadrado}(k)$$

donde $Z_i \sim \text{Normal}(0,1)$

$$f_{X_k^2}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}\, x^{(k/2)-1} e^{-x/2} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

MÚLTIPLES VARIABLES ALEATORIAS

⇝ caso bidimensional: $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

CASO DISCRETO.

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{XY}(x,y) \qquad f_{XY}(x,y) = \frac{d^2}{dx\,dy} F_{XY}(x,y)$$

- Distribuciones marginales:

$$p_X(x) = \sum_{y \in \Theta_Y} p_{XY}(x,y) = \sum_{y \in \Theta_X} p_{X|Y=y}(x) \cdot p_Y(y)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \Theta_X} p_{XY}(x,y) = \sum_{x \in \Theta_X} p_{Y|X=x}(y) \cdot p_X(x)$$

- Distribución condicional:

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}$$

ya evaluadas en $Y=y$ ó $X=x$

⇝ si no se tiene la conjunta se puede despejar de la condicional.

APLICACION

$\Theta_X = a, b$

$\Theta_Y = c, d, e$

		Y		
		c	d	e
X	a	p_1	p_2	p_3
	b	p_4	p_5	p_6

$$p_X(x) = \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3, & x = a \\ p_4 + p_5 + p_6, & x = b \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$

$$\Theta_{XY} = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_1 + p_4 & ; y = c \\ p_2 + p_5 & ; y = d \\ p_3 + p_6 & ; y = e \end{cases}$$

$$p_{X|Y=c} = \begin{cases} \dfrac{p_1}{p_1+p_4}, & x = a \\ \dfrac{p_4}{p_1+p_4}, & x = b \end{cases}$$

CASO CONTINUO.

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

Integrar sobre Θ_Y

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)\,dx$$

Integrar sobre Θ_X

CASO MIXTO

X discreta, Y continua

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y=y}(x) f_Y(y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in \Theta_X} f_{Y|X=x}(y) \cdot p_X(x)$$

CASO INDEPENDIENTE

Si X e Y son independientes

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

IMPORTANTE!!

En cualquiera de los casos, cuando se busca la marginal, integrar ó sumar sobre el dominio de la variable.

FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

$$Y = g(X) \leftrightarrow X = g^{-1}(Y)$$

(a) Si g^{-1} tiene raíz única:

CASO DISCRETO $P(Y=y) = P(X = g^{-1}(y))$

⇝ Si $P(X=x) = a \rightarrow P(Y = g(x)) = a$

⇝ Si $P(Y=y) = b \rightarrow P(X = g^{-1}(y)) = b$

CASO CONTINUO ⇝ Si conozco la distribución de x:

$$f_Y(y) = \underbrace{f_X(g^{-1}(y))}_{\text{Para sacar la marginal de } y \text{ escribo la distribución de } x \text{ "en función de } y\text{"}} \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

"Jacobiano" de la transformación

⇝ Si conozco la distribución de y:

$$f_X(x) = f_Y(g(x)) \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|$$

CASO ACUMULADO $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} P[X \leq g^{-1}(y)] & ; g(\,) \text{ creciente} \\ P(X \geq g^{-1}(y)] & ; g(\,) \text{ decreciente} \end{cases}$

(b) Si g^{-1} tiene múltiples soluciones:

$$Y = g(X) \longrightarrow X = g^{-1}(y) = x_1, x_2, \dots x_K$$

⇝ Si $\left.\begin{array}{l} P(X = x_1) = a_1 \\ P(X = x_2) = a_2 \\ \vdots \\ P(X = x_K) = a_K \end{array}\right\} P(Y = g(x_1) = g(x_2) = \cdots g(x_K)) = a_1 + a_2 + \cdots a_K$

⇝ Si conozco la distribución de x:

$$P(Y=y) = \sum_{i=1}^{K} P(X_i = g^{-1}(y)) \quad \text{tal que } g(x_1) = g(x_2) = \cdots g(x_K) = y$$

CASO DISCRETO $P_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} P_X(g_i^{-1}(y))$

CASO CONTINUO $f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right|$

FUNCIONES DE MULTIPLES VARIABLES ALEATORIAS

$Z = g(X,Y) \longleftrightarrow P(Z=z) = P(g(X,Y)=z) \leftrightarrow X = g_1^{-1}(Y,Z)$
$Y = g_2^{-1}(X,Z)$

CASO DISCRETO $p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{XY}(x,y)$

• cuando conozco $p_X(x)$ y $p_Y(y)$ y X, Y son INDEPENDIENTES:

⇝ Despejo de g la que sea más fácil:

$y = h_1(z,x)$ ó $x = h_2(z,y)$ (A PARTIR de g)

luego,

$p_Z(z) = \sum_{x \in \Theta_X} p_X(x) \cdot p_Y(x,z)$ ó $p_Z(z) = \sum_{y \in \Theta_Y} p_Y(y) \cdot p_X(y,z)$

CASO CONTINUO $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f_{XY}(g^{-1}, y) \left|\frac{d}{du} g^{-1}\right| du\, dy$ donde $g^{-1} = g^{-1}(z,y)$

SUMA DE V.A.

$Z = X+Y \longleftrightarrow x = z-y \leftrightarrow y = -x+z$ Jacobiano $= 1$

CASO DISCRETO $p_Z(z) = \sum_{x \in \Theta_X} p_{XY}(x, z-x) = \sum_{y \in \Theta_Y} p_{XY}(z-y, y)$

⇝ si X e Y son independientes,

$p_{XY} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

DIVISION

$Z = XY \leftrightarrow x = \frac{z}{y}$; $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{y} \leftrightarrow y = \frac{z}{x}$; $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{x}$

FUNCIONES TÍPICAS

1. Suma de Poisson Si $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$ INDEPENDIENTES

$$Z = \sum_i X_i \sim Poisson(\lambda_Z = \sum_i \lambda_i)$$

2. Suma de gammas Si $X_i \sim Gamma(K_i, \nu)$ INDEPENDIENTES

$$Z = \sum_i X_i \sim Gamma(\sum_i K_i, \nu)$$

3. Suma de normales Si $X_i \sim Normal(\mu_i, \sigma_i)$ INDEPENDIENTES

$$Z = \sum a_i X_i \sim Normal(\sum a_i \mu_i, \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^2})$$

4. Multiplicación de log-normales Si $X_i \sim log\text{-}normal(\lambda_i, S_i)$ INDEPENDIENTES

$$Z = \prod X_i^{a_i} \sim log\text{-}normal(\sum a_i \lambda_i, \sqrt{\sum a_i^2 S_i^2})$$

$$Y = \log(X_i) \sim Normal(\lambda_i, S_i)$$

5. Normal al cuadrado Si $X \sim Normal(0,1)$

$$CX^2 \sim \chi^2(1)$$

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS TÍPICAS

Normal bivariada

$X = (X_1, \cdots, X_n)$ es normal multivariada si

$Y = a_1 x_1 + \cdots + a_n X_n \sim$ Normal

⇝ si X, Y distribuyen normal y son independientes, (X, Y) distribuye Normal-bivariada, pero si existe dependencia, (X, Y) no necesariamente distribuye normal-bivariada.

Si $X \sim \text{Normal}(0, \sigma_X)$
$Y \sim \text{Normal}(0, \sigma_Y)$

$$f_{XY}(X,Y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\text{Corr}(X,Y)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\text{Corr}(X,Y)^2)}\left(\frac{X^2}{\sigma_X^2} + \frac{Y^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2xy\,\text{Corr}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right)\right)$$

MEDIDAS DE TENDENCIA MULTIVARIABLES

- Esperanza: $E(XY) = \int_{\Theta_Y}\int_{\Theta_X} xy \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

  ⇝ Si X e Y son independientes, $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

  ✱ Si X e Y son independientes $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

- Covarianza: $\text{Cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

  ⇝ Si X e Y son independientes, $\text{Cov}(XY) = 0$

- Correlación: $\text{Corr}(XY) = \frac{\text{Cov}(XY)}{E(X) \cdot E(Y)}$; $\text{Corr}(XY) \in (-1,1)$

- Esperanza condicional: $E(Y|X=x) = \sum_{y \in \Theta_{Y|X=x}} y \cdot P(Y=y|X=x)$

  $\int_{y \in \Theta_{Y|X=x}} y \cdot f_{Y|X=x}(y)\,dy$

- Esperanza iterada: $E(Y) = E(E(Y|X))$