Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2018

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Un grupo de 4 amigas/os se juntan a planificar sus vacaciones. En una primera selección, entre todos los lugares planteados, escogieron seis lugares potenciales, cada uno con los respectivos atractivos - playa, sol, diversión, carrete, etc, pero no logran concordar en uno. Así que plantean llevar a cabo un experimento aleatorio de tal forma que el azar decida por ellos. Como son seis alternativas, se les ocurrió asociar las caras de un dado a cada lugar. Cada uno lanzará el dado y si un valor resulta tener mayor frecuencia, entonces el lugar asociado a ese número será el lugar de vacaciones. ¿Cuál es la probabilidad que en el primer intento lleguen a un acuerdo?

Solución

El primer intento tiene $\# S = 6^4$ casos posibles. **[2.0 Ptos]**

Alternativa 1

Si A es el evento en que se llega a un acuerdo en el primer intento, entonces esto ocurre cuando hay:

- cuatro coincidencias: 6 casos. **[1.0 Ptos]**
- tres coincidencias: $6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} = 120$ casos. **[1.0 Ptos]**
- dos coincidencias y dos distintas: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 720$ casos. **[1.0 Ptos]**

Es decir,

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \# A = 6 + 120 + 720 = 846 \to P(A) = \frac{846}{6^4} = 0.6527778 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Alternativa 2

Si A es el evento en que se llega a un acuerdo en el primer intento, entonces su complemento, $\overline{A}$, ocurre cuando hay:

- dos pares de coincidencias: $6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2}/2 = 90$ casos. **[1.5 Ptos]**
- no hay coincidencias: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ casos. **[1.5 Ptos]**

Es decir,

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \# \overline{A} = 90 + 360 = 450 \to P(A) = 1 - \frac{450}{6^4} = 0.6527778 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

En cierto país acostumbran a lanzar fuegos artificiales en el cambio de año. Sin embargo, por diversos motivos puede resultar un fracaso. Con el objetivo de acotar los riesgos usted ha analizado esta situación en varios países y años de tal manera que puede asignar probabilidades a las ocurrencias de ciertas causas que pueden provocar un fracaso.

Entre las potenciales causas de un fracaso se relaciona con dos aspectos. El primero es el humano (como siempre y cuando falla se asocia a la ansiedad). De hecho los estudios muestran que hay dos alternativas: que la secuencia la inicie el responsable (quien no sufre de ansiedad) lo que sucede en 3 de cada 4 oportunidades. O bien, que sea un reemplazante quien si puede sufrir de ansiedad con probabilidad 1/3. El otro aspecto que influye en los fracasos son los no humanos y estos son divididos en dos opciones: electro-mecánicos (EM) o ambientales (AMB), los cuales se pueden presentar en forma aislada o conjunta. Después de un análisis usted asigna

- Cuando no hay factores externos o humanos presente, el lanzamiento es exitoso. En cambio, cuando solo hay ansiedad en la mitad de las oportunidades el lanzamiento es exitoso.
- Cuando solo hay un problema: EM o AMB, el responsable logra controlar la situación y se produce una falla (o fracaso) solo en una de cada 5 oportunidades. En cambio, si es el reemplazante a cargo, se duplica la probabilidad de fracaso.
- Si hay al menos un factor presente y la ansiedad esta presente, se produce un fracaso con probabilidad 1.
- La presencia conjunta de los problemas EM y AMB, simplemente suma las probabilidades de fracaso asignadas a cada factor (ya sea con o sin ansiedad).
- Al analizar la presencia y ausencia de los factores EM y AMB se determina que en la mitad de las ocasiones están ausentes y que la presencia individual se da en la misma proporción y que solo el 10 % de la veces se han observado en forma conjunta (obviamente la presencia o ausencia de estos factores no dependen de si es el responsable o su reemplazante quien está a cargo)

Determine:

(a) Probabilidad de fracaso

(b) Dado que ha resultado un fiasco (se realizó el lanzamiento casi dos minutos antes de la hora), ¿cuál es la probabilidad que la causa sea únicamente falla EM?

(c) ¿Cuál es la probabilidad que el fracaso sea producto de que el responsable no llegó a trabajar ese día?

Solución

Definamos los eventos

R: secuencia la inicia el responsable.

$\overline{R}$: secuencia la inicia el sustituro.

A: sufre de ansiedad.

$\overline{A}$: no sufre de ansiedad.

E_1: no hay aspecto no humano.

E_2: solo aspecto electro-mecánico (EM).

E_3: solo aspecto ambiental (AMB).

E_4: aspecto EM y AMB presentes.

F: hay falla (fracaso).

$\overline{F}$: no hay falla.

Del enunciado se tiene que

$$P(R) = 3/4,\ P(\overline{R}) = 1/4,\ P(A\,|\,\overline{R}) = 1/3,\ P(\overline{A}\,|\,\overline{R}) = 2/3$$

además de deduce que $P(A\,|\,R) = 0$ y $P(\overline{A}\,|\,R) = 1$. **[0.5 Ptos.]**

Respecto a la partición, los cuales "no son dependientes":

$$P(E_1) = 0.5, \quad P(E_2) = 0.2, \quad P(E_3) = 0.2, \quad P(E_4) = 0.1$$

mientras que la probabilidad de fracaso (falla) serían:

$$\begin{aligned}
P(F\,|\,R \cap \overline{A} \cap E_1) &= 0\\
P(F\,|\,\overline{R} \cap \overline{A} \cap E_1) &= 0\\
P(F\,|\,\overline{R} \cap A \cap E_1) &= 1/2
\end{aligned}$$

[0.5 Ptos.]

$$\begin{aligned}
P(F\,|\,R \cap \overline{A} \cap E_2) &= 1/5\\
P(F\,|\,R \cap \overline{A} \cap E_3) &= 1/5\\
P(F\,|\,R \cap \overline{A} \cap E_4) &= 2/5\\
P(F\,|\,\overline{R} \cap \overline{A} \cap E_2) &= 2/5\\
P(F\,|\,\overline{R} \cap \overline{A} \cap E_3) &= 2/5\\
P(F\,|\,\overline{R} \cap \overline{A} \cap E_4) &= 4/5
\end{aligned}$$

[0.5 Ptos.]

(a) Por teorema de probabilidades totales, la probabilidad de fracaso (o falla) está dada por:

$$\begin{aligned}
P(F) = {} & P(F\,|\,E_1 \cap A \cap R)\,P(E_1\,|\,A \cap R)\,P(A\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_2 \cap A \cap R)\,P(E_2\,|\,A \cap R)\,P(A\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_3 \cap A \cap R)\,P(E_3\,|\,A \cap R)\,P(A\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_4 \cap A \cap R)\,P(E_4\,|\,A \cap R)\,P(A\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_1 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_1\,|\,\overline{A} \cap R)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_2 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_2\,|\,\overline{A} \cap R)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_3 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_3\,|\,\overline{A} \cap R)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_4 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_4\,|\,\overline{A} \cap R)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_1 \cap A \cap \overline{R})\,P(E_1\,|\,A \cap \overline{R})\,P(A\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) + P(F\,|\,E_2 \cap A \cap \overline{R})\,P(E_2\,|\,A \cap \overline{R})\,P(A\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) +\\
& P(F\,|\,E_3 \cap A \cap \overline{R})\,P(E_3\,|\,A \cap \overline{R})\,P(A\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) + P(F\,|\,E_4 \cap A \cap \overline{R})\,P(E_4\,|\,A \cap \overline{R})\,P(A\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) +\\
& P(F\,|\,E_1 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\,P(E_1\,|\,\overline{A} \cap \overline{R})\,P(\overline{A}\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) + P(F\,|\,E_2 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\,P(E_2\,|\,\overline{A} \cap \overline{R})\,P(\overline{A}\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) +\\
& P(F\,|\,E_3 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\,P(E_3\,|\,\overline{A} \cap \overline{R})\,P(\overline{A}\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) + P(F\,|\,E_4 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\,P(E_4\,|\,\overline{A} \cap \overline{R})\,P(\overline{A}\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R})\\
= {} & P(F\,|\,E_1 \cap A \cap R)\,P(E_1)\,P(A\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_2 \cap A \cap R)\,P(E_2)\,P(A\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_3 \cap A \cap R)\,P(E_3)\,P(A\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_4 \cap A \cap R)\,P(E_4)\,P(A\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_1 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_1)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_2 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_2)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_3 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_3)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) + P(F\,|\,E_4 \cap \overline{A} \cap R)\,P(E_4)\,P(\overline{A}\,|\,R)\,P(R) +\\
& P(F\,|\,E_1 \cap A \cap \overline{R})\,P(E_1)\,P(A\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) + P(F\,|\,E_2 \cap A \cap \overline{R})\,P(E_2)\,P(A\,|\,\overline{R})\,P(\overline{R}) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&P(F \mid E_3 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_3)\, P(A \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_4 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_4)\, P(A \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + \\
&P(F \mid E_1 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_1)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_2)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + \\
&P(F \mid E_3 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_3)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_4 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_4)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}), \quad \text{por no dependencia} \\
= {} &P(F \mid E_1 \cap \overline{A} \cap R)\, P(E_1)\, P(\overline{A} \mid R)\, P(R) + P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap R)\, P(E_2)\, P(\overline{A} \mid R)\, P(R) + \\
&P(F \mid E_3 \cap \overline{A} \cap R)\, P(E_3)\, P(\overline{A} \mid R)\, P(R) + P(F \mid E_4 \cap \overline{A} \cap R)\, P(E_4)\, P(\overline{A} \mid R)\, P(R) + \\
&P(F \mid E_1 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_1)\, P(A \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_2 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_2)\, P(A \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + \\
&P(F \mid E_3 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_3)\, P(A \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_4 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_4)\, P(A \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + \\
&P(F \mid E_1 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_1)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_2)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + \\
&P(F \mid E_3 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_3)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}) + P(F \mid E_4 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_4)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R}), \quad \text{por } P(A \mid R) = 0
\end{aligned}
$$

[0.5 Ptos.]

Reemplazando

$$P(F) = 0.1925 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Observación: Si lo desarrollan vía árbol de probabilidad, asignar todo el puntaje [+ 1.5 Ptos]

(b) Se pide $P(E_2 \cap \overline{A} \mid F)$, es decir, no hay ansiedad, ni están presente los problemas AMB por tanto, las probabilidades deseadas se obtiene como sigue:

$$
\begin{aligned}
P(E_2 \cap \overline{A} \mid F) &= \frac{P(E_2 \cap \overline{A} \cap F)}{P(F)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{P(E_2 \cap \overline{A} \cap F \cap R) + P(E_2 \cap \overline{A} \cap F \cap \overline{R})}{P(F)}, \quad \text{por } S = R \cup \overline{R}, \text{ ley distributiva y axioma 3} \\
&= \frac{P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap R)\, P(E_2 \mid \overline{A} \cap R)\, P(\overline{A} \mid R)\, P(R) + P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_2 \mid \overline{A} \cap \overline{R})\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R})}{P(F)} \\
&= \frac{P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap R)\, P(E_2)\, P(\overline{A} \mid R)\, P(R) + P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_2)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(\overline{R})}{P(F)}, \quad \text{por no dependencia de } E_2
\end{aligned}
$$

[0.5 Ptos]

$$= \frac{0.04\overline{3}}{0.1925} = 0.22510823 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Observación: Si lo desarrollan vía árbol de probabilidad, asignar todo el puntaje [+ 1.5 Ptos]

(c) Se pide $P(F \mid \overline{R}) = \dfrac{P(F \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$. **[0.5 Ptos]**

El numerador hay que interceptar con S tal que incorpore ansiedad y otros factores, luego aplicando axioma 3 y que los R_i's, no tienen dependencia, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(F \cap \overline{R}) = {} &P(F \mid E_1 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_1)\, P(A \mid \overline{R})\, P(R) + P(F \mid E_1 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_1)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(R) + \\
&P(F \mid E_2 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_2)\, P(A \mid \overline{R})\, P(R) + P(F \mid E_2 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_2)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(R) + \\
&P(F \mid E_3 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_3)\, P(A \mid \overline{R})\, P(R) + P(F \mid E_3 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_3)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(R) + \\
&P(F \mid E_4 \cap A \cap \overline{R})\, P(E_4)\, P(A \mid \overline{R})\, P(R) + P(F \mid E_4 \cap \overline{A} \cap \overline{R})\, P(E_4)\, P(\overline{A} \mid \overline{R})\, P(R) + \\
= {} &0.1025 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}
$$

Luego

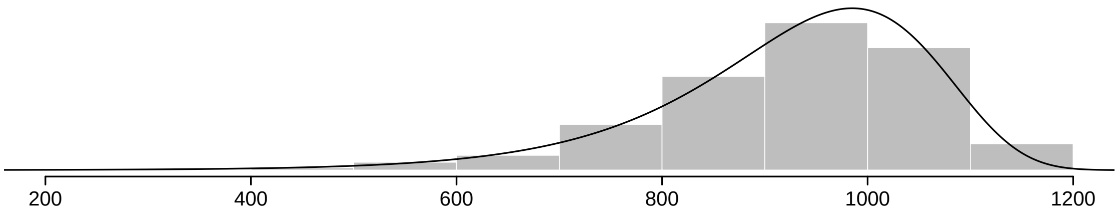
$$P(F \mid \overline{R}) = \frac{0.1025}{0.2500} = 0.41 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Observación: Si lo desarrollan vía árbol de probabilidad, asignar todo el puntaje [+ 1.5 Ptos]

+ 1 Punto Base

Problema 3

La estación San Pedro de Atacama ubicada a 2390 metros sobre el nivel del mar en -22.89^{o} de latitud y -68.16^{o} de longitud, mide la radiación solar en dicho lugar desde el 15 de mayo del año 2009. La figura muestra el comportamiento histórico de la radiación solar registrada a las 10:00 am durante época estival.



Los profesores proponen como un posible modelo para representar el comportamiento empírico de los datos la siguiente función de densidad y de probabilidad acumulada

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]; \qquad F(x) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. La línea continua del figura muestra el ajuste de este modelo.

Un resumen empírico se presenta a continuación

```
    IQR   median
165.116 946.5161
```

Igualando las medidas empíricas a su versión teórica, entregue los valores "adecuados" para μ y σ utilizados en el ajuste de la figura.

Solución

Tenemos que

$$\textbf{[0.3 Ptos]} \quad \text{IQR} = x_{0.75} - x_{0.25} \qquad \text{y} \qquad \text{Mediana} = x_{0.50} \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

donde x_p corresponde al percentil $p \times 100\,\%$. **[0.5 Ptos]**

Por definición

$$\textbf{[1.0 Ptos]} \quad F(x_p) = p \to x_p = \mu + \sigma \cdot \ln[-\ln(1-p)] \quad \textbf{[2.0 Ptos]}$$

Luego

$$\sigma \cdot \{\ln[-\ln(1-0.75)] - \ln[-\ln(1-0.25)]\} = 165.116 \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \tag{1}$$
$$\mu + \sigma \cdot \ln[-\ln(1-0.50)] = 946.5161 \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \tag{2}$$

Despejando σ desde (1) y luego reemplazando en (2) se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \sigma = 105 \qquad \text{y} \qquad \mu = 985 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Como han de saber, los alumnos nuevos que ingresan a la UC deben dar pruebas de conocimiento y manejo matemático, existiendo tres instancias que le permite ingresar directamente a cálculo. El proceso es el que sigue:

- Una vez inscrito el alumno en la UC rinde el 1er examen. Si aprueba no requiere hacer pre-cálculo y le indican que en marzo ingresa a cálculo directamente. En caso de reprobar, la 1era semana de febrero tiene una segunda oportunidad.
- Si al rendir el 2do examen lo aprueba, le indican que en marzo ingresa a cálculo directamente. En caso de reprobar, la última semana de febrero tiene la 3era y última oportunidad.
- Si aprueba en la 3era, ingresa en marzo a cálculo, en caso de reprobar ingresa a pre-cálculo en marzo.

Sea A_i el evento en que el alumno aprueba el i-ésimo examen, con $i = 1$, 2 y 3. Además, suponga que un alumno tiene probabilidad p de aprobar el examen en un primera instancia, la cual se incrementa en un 20 % cada vez que lo rinde.

(a) Determine, usando probabilidades totales, $P(A_i)$, para $i = 1$, 2 y 3. Idealmente determine una expresión matemática que depende de i.

(b) Determine la probabilidad que el alumno tenga que hacer pre-cálculo.

Solución

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= p \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
P(A_2) &= P(A_2 \,|\, A_1)\, P(A_1) + P(A_2 \,|\, \overline{A}_1)\, P(\overline{A}_1) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 0 \cdot p + 1.2\, p \cdot (1-p) = 1.2\, p \cdot (1-p) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
P(A_3) &= P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2)\, P(A_2 \,|\, A_1)\, P(A_1) + P(A_3 \,|\, A_1 \cap \overline{A}_2)\, P(\overline{A}_2 \,|\, A_1)\, P(A_1) + \\
&\quad\; P(A_3 \,|\, \overline{A}_1 \cap A_2)\, P(A_2 \,|\, \overline{A}_1)\, P(\overline{A}_1) + P(A_3 \,|\, \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)\, P(\overline{A}_2 \,|\, \overline{A}_1)\, P(\overline{A}_1) \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 0 \cdot 0 \cdot p + 0 \cdot 0 \cdot p + 0 \cdot 1.2\, p \cdot (1-p) + 1.2^2\, p \cdot (1 - 1.2\, p) \cdot (1-p) \\
&= 1.2^2 p \cdot (1 - 1.2p) \cdot (1-p) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide $P(\overline{A_3} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$.

Alternativa 1

$$\begin{aligned}
P(\overline{A_3} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) &= P(\overline{A_3} \,|\, \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} \,|\, \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1}) \quad \textbf{[1.5 Ptos]} \\
&= (1 - 1.2^2\, p) \cdot (1 - 1.2\, p) \cdot (1-p) \quad \textbf{[1.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Alternativa 2

$$\begin{aligned}
P(\overline{A_3} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) &= P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{3} P(A_i), \quad \text{ya que } A_i \cap A_j = \phi \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 1 - \big[p + 1.2\, p \cdot (1-p) + 1.2^2 p \cdot (1 - 1.2p) \cdot (1-p)\big] \quad \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base