Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2018

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I2**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

La Universidad se encuentra desarrollando su primer prototipo satelital, el cual servirá como base y motivación para futuros estudios y aportar al desarrollo de la Astronáutica chilena. Como base se utiliza un diseño estandarizado internacional conocido como CUBESAT, el cual busca fomentar y reducir costos en misiones espaciales de nano-satélites, con la finalidad de lograr un prototipo con potencial uso en misiones reales. Estos nano-satélites son satélites de masa entre 1 y 10 kg, comúnmente usados con fines docentes y, en este último tiempo, con fines comerciales y de defensa gracias a la miniaturización de la tecnología y a su menor costo, lo que permite un importante desarrollo de esta industria. El tiempo de vida esperado son 1.5 años con un c.o.v del 20 %, rotan entre los 500 y 510 km, y su velocidad mediana es de 7 km/seg con una desviación estándar de 1 km. Diversos estudios indican que el tiempo de vida se comporta como una variable aleatoria Log-Normal(λ, ζ), la altura Uniforme(a, b) y la velocidad Weibull(η, β).

Si a partir de este año se tiene pensado empezar a lanzar nano-satélites de manera independiente:

(a) ¿Cuál es la probabilidad que el tercero sea el primero de los lanzados que dura menos de un año?

(b) Si este año se alcanzan a lanzar cinco, ¿cuál es la probabilidad que todos superen los 7 km/seg de velocidad?

(c) ¿Cuántos satélites esperaría lanzar hasta lograr tres que roten sobre los 506 km.?

Solución

(a) Definamos como T el tiempo de vida de una nano-satélite.

Del enunciado tenemos que

$$T \sim \text{Log-Normal}(\lambda,\, \zeta) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

con

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \zeta = \sqrt{\ln(1 + 0.2^2)} = 0.198 \quad \text{y} \quad \lambda = \ln(1.5) - 0.5 \cdot \zeta^2 = 0.3858631 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Observación: el alumno podría utilizar $\zeta \approx 0.20$ *y* $\lambda = 0.3854651$, *asignar todo el puntaje.*

Sea

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad p = P(T \leq 1.0) = \Phi\left(\frac{\ln(1.0) - \lambda}{\zeta}\right) \approx \Phi(-1.95) = 1 - \Phi(1.95) = 0.025 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Definamos como X el número de lanzamientos hasta observar el primero con una duración inferior a un año

$$X \sim \text{Geométrica}(p) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Se pide

$$P(X = 3) = (1 - p)^2\, p = 0.02376562 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

(b) Sea Y el número de nano-satélites entre cinco lanzados que superan los 7 km/seg.

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 5,\, p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con $p = 1/2$, ya que 7 km/seg es la mediana. **[1.0 Ptos.]**

Se pide

$$P(Y = 5) = \binom{5}{5}\, 0.5^5\, (1 - 0.5)^{5-5} = 0.03125 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(c) Definamos como Z al número de lanzamientos hasta observar el tercero que queda sobre loa 506 km de altitud

$$Z \sim \text{Binomial-Negativa}(k = 3,\, p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con $p = 0.4$, ya que la altitud es Uniforme. **[1.0 Ptos.]**

Se pide

$$\text{Z} = \frac{k}{p} = 7.5 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto, de deben lanzar más de 7 lanzamientos.

+ 1 Punto Base

Problema 2

La distribución Log-Gamma(α, β) es una distribución muy popular para ajustarse a datos con asimetría negativa. Su función de densidad está definida como

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^{\beta}\,\Gamma(\beta)}\,\exp\left[\beta\,x - \frac{1}{\alpha}\exp(x)\right]$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

(a) Determine su función generadora de momentos de este modelo.

(b) Obtenga la distribución de $Y = \exp(X)$, reconozca el modelo e identifique sus parámetros.

Solución

(a) Se pide

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathrm{E}(e^{t\,X}) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x}\,\frac{1}{\alpha^{\beta}\,\Gamma(\beta)}\,\exp\left[\beta\,x - \frac{1}{\alpha}\exp(x)\right]dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^{\beta}\,\Gamma(\beta)}\,\exp\left[(\beta+t)\,x - \frac{1}{\alpha}\exp(x)\right]dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{\alpha^{t}\,\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^{\beta+t}\,\Gamma(\beta+t)}\,\exp\left[(\beta+t)\,x - \frac{1}{\alpha}\exp(x)\right]dx, \quad \text{con } t > -\beta \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{\alpha^{t}\,\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\beta)}\cdot 1, \quad \text{por área sobe todo el soporte de la densidad} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{\alpha^{t}\,\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\beta)}, \quad t > -\beta \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Sea $Y = \exp(X)$, esto implica que $\Theta_Y = \mathbb{R}_0^{+}$. **[0.4 Ptos.]**

$$Y = g(X) \to X = \ln(Y) = g^{-1}(Y) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

con $g(\cdot)$ función invertible sobre el sobre el soporte de X. **[0.4 Ptos.]**

Se pide

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X[\ln(y)]\cdot\left|\frac{1}{y}\right| \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{\alpha^{\beta}\,\Gamma(\beta)}\,\exp\left\{\beta\,\ln(y) - \frac{1}{\alpha}\exp[\ln(y)]\right\}\cdot\left|\frac{1}{y}\right| \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
&= \frac{(1/\alpha)^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\,y^{\beta-1}\,e^{-y/\alpha} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$Y \sim \text{Gamma}(\beta,\,1/\alpha) \quad \textbf{[0.6 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Recientemente el volcán Nevados de Chillán, producto de una fisura lateral, ha generado emisión de gases que alcanzan grandes temperaturas. Usted, después de analizar la información disponible propone modelar la temperatura (en °C) de las emisiones, Y, en función de la fisura X (en metros), para esto propone que el tamaño de la fisura se comporta como una variable aleatoria Beta($q = 2$, $r = 1$) entre 0 y b metros, y como a una mayor fisura existe menor temperatura, propone que el comportamiento de $Y \mid X = x \sim \text{Gamma}(k = 6, \nu = x)$. Determine el grado de asociación entre el tamaño de la fisura y la temperatura de las emisiones.

Solución

Tenemos que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad X \sim \text{Beta}(2,\,1) \quad \text{e} \quad Y \mid X = x \sim \text{Gamma}(6,\,x) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con $\Theta_X = [0,\,b]$.

Se pide

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

donde

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= 0 + \frac{2}{2+1}\,(b - 0) = \frac{2\,b}{3} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
\text{E}(Y) &= \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] = \text{E}(6/X) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \int_0^b \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{B(2,1)}\,\frac{x^{2-1}\,(b-x)^{1-1}}{b^{2+1-1}}\,dx \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \frac{6}{b} \cdot \frac{B(1,1)}{B(2,1)} \int_0^b \frac{1}{B(1,1)}\,\frac{x^{1-1}\,(b-x)^{1-1}}{b^{1+1-1}}\,dx \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \frac{6}{b} \cdot \frac{B(1,1)}{B(2,1)} \cdot 1, \quad \text{por área bajo todo su soporte de una densidad Beta} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \frac{12}{b} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
\text{E}(XY) &= \text{E}[\text{E}(XY \mid X)] = \text{E}[X \cdot \text{E}(Y \mid X)] \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \text{E}(6) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= 6 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\text{Cov}(X, Y) = 6 - \frac{2\,b}{3} \cdot \frac{12}{b} = -2 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Producto de la venida a Chile de Su Santidad, Francisco el Papa se espera una avalancha de extranjeros (principalmente argentinos). Basados en análisis previos de usuarios del metro se ha determinado que el 3 % son extranjeros (ya avecindados). Usted analiza el flujo actual de usuarios del metro y determina que la proporción de extranjeros que usaran el metro la próxima semana se comportará como una variable aleatoria Beta(1, 20). Si el número total de usuarios del metro por minuto se comporta de acuerdo a una variable aleatoria Poisson con coeficiente de variación igual a 25.8 %:

(a) Determine el número esperado de extranjeros usuarios del metro durante esa semana por minuto.

(b) En base al resultado anterior, determine el tiempo (en min) que espera que transcurra entre el ingreso de cuatro extranjeros al metro.

Solución

(a) Sea X la proporción de extranjeros que usaran el metro la próxima semana debido a la avalancha de extranjeros que llegaran

$$X \sim \text{Beta}(1,\, 20), \quad \Theta_X = [0.03 \; - \; 1.00] \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Definamos como Y al número de usuarios de metro por minuto.

$$Y \sim \text{Poisson}(\nu = 15.02314), \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

ya que $\delta_Y = 0.258 = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$. **[0.5 Ptos.]**

Definamos como Z el número de extranjeros usuarios del metro por minuto.

$$Z \,|\, X = x \sim \text{Poisson}(\nu\, x) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
\text{E}(Z) &= \text{E}[\text{E}(Z \,|\, X)] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \text{E}(\nu\, X) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \int_{0.03}^{1.00} \nu\, x \cdot f_X(x)\, dx \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \nu\, \text{E}(X) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= 15.02314 \left[0.03 + \frac{1}{21}\,(1 - 0.03)\right] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= 1.14462 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Tenemos que

$$Z \,|\, X = 0.07619048 \sim \text{Poisson}(1.14462) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Si T es el tiempo entre cuatro extranjeros, entonces

$$T \sim \text{Gamma}(k = 3,\, \nu = 1.14462), \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

ya que el origen se encuentra cuando llega el 1er extranjero.

Se pide

$$\text{E}(T) = \frac{k}{\nu} = 2.620957\,\text{min} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base