Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2018

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I3**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

En la gran minería, la cantidad X de accidentes diarios puede ser modelado según distribución Poisson(λ). Además, en un día se observan accidentes mortales con probabilidad p.

(a) Determine la distribución de $W = X \cdot Y$, donde Y representa la variable aleatoria de observar o no accidentes mortales en un día. Por simplicidad asuma independencia entre X e Y.

(b) Suponga que dispone de una muestra aleatoria $W_1, W_2, \ldots, W_n$ proveniente de la distribución obtenida anteriormente. Obtenga los estimadores de momentos de los parámetros λ y p.

Solución

(a) Es inmediato que, para $k > 0$,

$$\begin{aligned}
P(W = k) &= P(X = k, \, Y = 1) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= P(X = k) \cdot P(Y = 1) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot p \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
P(W = 0) &= P(X = 0, \, Y = 1) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, \, Y = 0) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= P(X = 0) \cdot P(Y = 1) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot P(Y = 0) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= P(X = 0) \cdot P(Y = 1) + P(Y = 0) \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= e^{-\lambda} \cdot p + (1 - p) \cdot 1 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) como X e Y son independientes, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(W) &= \mathrm{E}(X\,Y) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \lambda p \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
\mathrm{E}(W^2) &= \mathrm{E}(X^2\,Y^2) = \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2) = (\lambda + \lambda^2)\,p \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

ya que $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}(Y)$. **[0.3 Ptos.]**

Si

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i^2,$$

entonces

$$\lambda\, p = m_1 \Rightarrow p = \frac{m_1}{\lambda} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \tag{1}$$

$$(\lambda + \lambda^2)\, p = m_2 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Al reemplazar (1) en (2), se tiene:

$$(\lambda + \lambda^2)\,\frac{m_1}{\lambda} = m_2 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

$$\textbf{[0.2 Ptos.]} \quad (1 + \lambda)\, m_1 = m_2 \Rightarrow m_1 + \lambda m_1 = m_2 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{m_2 - m_1}{m_1} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$\hat{p} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Considere dos muestras aleatorias independientes de tamaño n y m respectivamente, la primera proveniente de una población Normal(μ_1, σ) y la segunda de una población Normal(μ_2, $2\,\sigma$). En base a toda la información estime por máxima verosimilitud σ^2, obtenga su distribución exacta del estimador y determine si es consistente.

Solución

Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes con distribución Normal(μ_1, σ) e $Y_1,\ldots,Y_m$ variables aleatorias independientes con distribución Normal(μ_2, $2\,\sigma$).

La verosimilitud y log-verosimilitud están dadas por:

$$L(\mu_1,\,\mu_2,\,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2\right\} \times \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,4\,\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_j-\mu_2}{2\,\sigma}\right)^2\right\} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \tag{4}$$

$$\ln L(\mu_1,\,\mu_2,\,\sigma) = -\frac{(n+m)}{2}\cdot\ln(2\,\pi) - (n+m)\cdot\ln(\sigma) - m\cdot\ln(2) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2\right\} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \tag{5}$$

Derivando (5) con respecto a μ_1, μ_2 y σ, e igualando a cero se obtiene los siguientes estimadores máximo verosímiles:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X}_n, \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \qquad \hat{\mu}_2 = \overline{Y}_m, \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(n+m)}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y}_m)^2\right\} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Del formulario se tiene que

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}_n}{\sigma}\right)^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2},\,\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{Y_j-\overline{Y}_m}{2\,\sigma}\right)^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{m-1}{2},\,\frac{1}{2}\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por lo tanto, por independencia

$$\frac{(n+m)\,\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}_n}{\sigma}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{Y_j-\overline{Y}_m}{2\,\sigma}\right)^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n+m-2}{2},\,\frac{1}{2}\right) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$\to \hat{\sigma}^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{n+m-2}{2},\,\frac{n+m}{2\,\sigma^2}\right) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

con

$$\textbf{[0.4 Ptos.]} \quad \text{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2\,\frac{(n+m-2)}{(n+m)} \qquad \text{y} \qquad \text{Var}\left(\hat{\sigma}^2\right) = 2\,\sigma^4\,\frac{(n+m-2)}{(n+m)^2} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

y

$$\begin{aligned}\text{ECM}\left(\hat{\sigma}^2\right) &= 2\,\sigma^4\,\frac{(n+m-2)}{(n+m)^2} + \left[\sigma^2\,\frac{(n+m-2)}{(n+m)} - \sigma^2\right]^2 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\ &= \frac{\sigma^4}{(n+m)^2} \to 0, \qquad \text{cuando } n, m \to \infty \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{\sigma}^2$ es un estimador consistente para estimar σ^2. **[0.2 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Un artefacto eléctrico que tiene k transistores conectados en serie es sometido a pruebas aceleradas de funcionamiento para estudiar su comportamiento bajo condiciones extremas. Si los tiempos de vida de los transistores distribuyen Weibull(η, β) y se registran los tiempos de fallas de n de estos artefactos. ¿Cuál es la distribución aproximada del estimador máximo verosímil de $1/\eta$? Por simplicidad, asuma que β es conocido y que los tiempos de vida de los transistores son independientes.

Solución

Definamos como X_{ij} el tiempo de falla del j-ésimo transistor del i-ésimo artefacto.

$$X_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Weibull}(\eta,\, \beta) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

El tiempo de falla Y_i del i-ésimo artefacto es igual al $\text{mín}\{X_{i1}, \ldots, X_{ik}\}$, es decir,

$$Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Weibull}(\eta\, k^{-1/\beta},\, \beta) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

La verosimilitud y log-verosimilitud están dadas por:

$$L(\eta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\eta\, k^{-1/\beta}} \left(\frac{Y_i}{\eta\, k^{-1/\beta}}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{Y_i}{\eta\, k^{-1/\beta}}\right)^{\beta}\right] \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \tag{6}$$

$$\ln L(\eta) = n\, \ln(\beta) - n\,\beta\, \ln(\eta) + \beta\, \ln(k) + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) - \frac{k}{\eta^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} Y_i^{\beta} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \tag{7}$$

Derivando (7) con respecto a η, e igualando a cero se obtiene el estimador máximo verosímil de η:

$$\hat{\eta} = \left(\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^{\beta}\right)^{1/\beta} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

mientras que

$$\begin{aligned} I(\eta) = -\text{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \ln\, L\right) &= -\frac{n\,\beta}{\eta^2} + \frac{k\,\beta\,(\beta+1)}{\eta^{\beta+2}} \sum_{i=1}^{n} \text{E}(Y_i^{\beta}) \\ &= -\frac{n\,\beta}{\eta^2} + \frac{k\,\beta\,(\beta+1)}{\eta^{\beta+2}}\, \frac{n\,\eta^{\beta}\,\Gamma(2)}{k} \\ &= \frac{n\,\beta^2}{\eta^2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $g(\eta) = 1/\eta$, la distribución aproximada del estimador $\widehat{g(\eta)}$ máximo verosímil de $g(\eta)$ está dada por

$$\widehat{g(\eta)} = \frac{1}{\hat{\eta}} = \left(\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^{\beta}\right)^{-1/\beta} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{1}{\eta},\, \sqrt{\frac{1}{n\,\beta^2\,\eta^2}}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

ya que $[g'(\eta)]^2 = 1/\eta^4$. **[0.5 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 4

La deflexión (desviación), D, de una barra de acero de largo L sometida a una carga P, corresponde a una relación funcional entre la carga P y el módulo de la elasticidad E de la barra, dada por $D = \frac{P\,L^3}{3\,E\,I}$, donde I es el momento de la inercia. Si $P \sim$ Log-Normal(λ, ζ) y $E \sim$ Gamma(k, ν), obtenga el c.o.v. aproximado de 1er orden de D. Asuma independencia entre P y E.

Solución

Tenemos que

$$D = c \cdot \frac{P}{E},$$

con $c = \frac{L^3}{3\,I}$.

Se pide una aproximación de 1er orden para $\delta_D = \dfrac{\sigma_D}{\mu_D}$.

$$\begin{aligned}
\mu_D &\approx c \cdot \frac{\mu_P}{\mu_E} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{c \cdot \nu \cdot e^{\lambda + \zeta^2/2}}{k} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
\sigma_G^2 &\approx c^2 \cdot \frac{1}{\mu_E^2} \cdot \sigma_P^2 + c^2 \cdot \frac{\mu_P^2}{\mu_E^4} \cdot \sigma_E^2 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]} \\
&= \frac{c^2\,\nu^2\,e^{2\lambda + \zeta^2}}{k^2} \left[\left(e^{\zeta^2} - 1\right) + 1/k\right] \quad \textbf{[1.5 Ptos.]} \\
\delta_D &\approx \sqrt{\left(e^{\zeta^2} - 1\right) + 1/k} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base