Suma de Normales Independientes

Consideremos X e Y variables aleatorias independientes con distribución Normal$(\mu_X,\,\sigma_X)$ y Normal$(\mu_Y,\,\sigma_Y)$ respectivamente.

A continuación mostraremos que

$$Z = a + b\cdot X + c\cdot Y \sim \text{Normal}(\mu,\,\sigma)$$

con $\mu = a + b\cdot\mu_X + c\cdot\mu_Y$ y $\sigma = \sqrt{|b|^2\cdot\sigma_X^2 + |c|^2\cdot\sigma_Y^2}$, con a, b y c constantes.

Solución

Primero probaremos que la suma de dos variables Normal distribuye Normal.

Tenemos que $X \sim \text{Normal}(\mu_X,\,\sigma_X)$ e $Y \sim \text{Normal}(\mu_Y,\,\sigma_Y)$ independientes entre si, y queremos saber como distribuye $X+Y$.

Definamos $W = X + Y$, es decir $Y = W - X$:

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, w-x)\left|\frac{\partial}{\partial w}(w-x)\right| dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(w-x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w-x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{w-x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+\mu_X^2-2x\mu_X}{\sigma_X^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(w-\mu_Y)^2-2x(w-\mu_Y)+x^2}{\sigma_Y^2}\right)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)-2x(\mu_X\sigma_Y^2+(w-\mu_Y)\sigma_X^2)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(w-\mu_Y)^2+\mu_X^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)\left(\frac{\left(x-\dfrac{(\mu_X\sigma_Y^2+(w-\mu_Y)\sigma_X^2)}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu_X\sigma_Y^2+(w-\mu_Y)\sigma_X^2)}{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)\right]\times \\
&\qquad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(w-\mu_Y)^2+\mu_X^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{w-(\mu_X+\mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\right]^2\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\dfrac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\dfrac{\sigma_X^2(w-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}}{\dfrac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}}\right]^2\right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\exp\left(\frac{(w-(\mu_X+\mu_Y))^2}{-2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\dfrac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}}\exp\left[\frac{\left(x-\dfrac{\sigma_X^2(w-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\right)^2}{-2\left(\dfrac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\right)^2}\right]}_{\textit{Probabilidad de una normal con otra media y varianza, por lo que integra 1}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{w-(\mu_X+\mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\right]^2\right\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos afirmar que

$$W \sim \text{Normal}\left(\mu_X + \mu_Y,\, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)$$

Demostraremos ahora que

$$a + b\,X \sim \text{Normal}\,(a + b \cdot \mu_X,\, |b| \cdot \sigma_X) \quad \text{y} \quad c \cdot Y \sim \text{Normal}\,(c \cdot \mu_Y,\, |c| \cdot \sigma_Y)$$

Definamos $S = a + b \cdot X$, es decir $X = \dfrac{S - a}{b}$.

Luego

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma_X^2}}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\dfrac{s-a}{b}\right) - \mu_X}{\sigma_X}\right]^2\right\}\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{s-a}{b}\right)\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,|b|^2\,\sigma_X^2}}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{s - (a + b\,\mu_X)}{b\,\sigma_X}\right]^2\right\} \end{aligned}$$

Con esto demostramos que al hacer el cambio de variable creamos una nueva normal donde

$$S = a + b \cdot X \sim \text{Normal}\,(a + b \cdot \mu_X,\, |b| \cdot \sigma_X)$$

Análogamente tenemos que

$$T = c \cdot Y \sim \text{Normal}\,(c \cdot \mu_Y,\, |c|\,\sigma_Y)$$

Por lo tanto

$$Z = S + T = a + b \cdot X + c \cdot Y \sim \text{Normal}\left(a + b \cdot \mu_X + c \cdot \mu_Y,\, \sqrt{|b|^2 \cdot \sigma_X^2 + |c|^2 \cdot \sigma_Y^2}\right)$$