Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2019

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. (Sec 02 - Sec 04 - Sec 05) y Ricardo Olea O. (Sec 01 - Sec 03).**

Pauta Interrogación 1

Problema 1

En los últimos meses los fondos de pensiones han mostrado un magro crecimiento. De hecho, los fondos riesgosos (A y B) han rentado menos del 2 % en los últimos 12 meses, mientras que el fondo C (fondo donde son asignados, por definición, todos los afiliados nuevos) ha rentado casi un 10 %, mientras que los fondos conservadores (D y E) han rentado un 14 %. (**Fuente: El Mercurio, 03-09-2019**).

Un análisis de la composición de los fondos muestra que del total de afiliados, un 53 % tiene sus ahorros en fondos riesgosos y 20 % en fondos conservadores (**Fuente: Superintendencia de Pensiones**).

La expectativa para el próximo mes, producto de la guerra comercial entre China y EE.UU., muestra que hay una probabilidad de 0,70 que los fondos riesgosos caigan (es decir, presenten rentabilidad negativa en lo que resta del año), y los fondos conservadores (dada su composición de papeles de largo plazo - renta fija) tiene solo una probabilidad del 0,10 de presentar rentabilidad negativa. Por último, el fondo C muestra una probabilidad de 0,30 de presentar rentabilidad negativa.

Frente a los llamados alarmistas de refugiarse en fondos más estables, los afiliados responden cambiando a un fondo menos riesgoso (es decir, los del A y B se cambian al C, los del C se cambian al D y E). Análisis de las expectativas muestra que un 5 % de los afiliados de fondos riesgosos se cambian a uno menos riesgoso si la rentabilidad es negativa y que un 2 % se cambia aún cuando la rentabilidad no sea negativa. En cambio 1 de cada 30 afiliados del fondo C se cambian frente a una rentabilidad negativa y solo el 1 % se cambia aún cuando la rentabilidad no sea negativa. Se asumen que los afiliados de los fondos D y E no se cambian.

Estamos en 2020, y usted conversa con un afiliado:

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que se haya cambiado de fondo?

(b) **[3.0 Ptos.]** Dado que la rentabilidad de todos los fondos fue negativa, ¿cuál es la probabilidad que se haya cambiado de fondo?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A_1 : Fondo riesgoso (A y B)

A_2 : Fondo C

A_3 : Fondo conservador (D y E)

B : Rentabilidad negantiva

C : Cambia a un fondo menos riesgoso

(a) **Logro 1: Teorema de probabilidades totales** **[1.0 Ptos]**

Se pide $P(C)$

$$
\begin{aligned}
P(C) = {} & P(C \mid B \cap A_1)\, P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(C \mid B \cap A_2)\, P(B \mid A_2)\, P(A_2) + \\
& P(C \mid B \cap A_3)\, P(B \mid A_3)\, P(A_3) + P(C \mid \overline{B} \cap A_1)\, P(\overline{B} \mid A_1)\, P(A_1) + \\
& P(C \mid \overline{B} \cap A_2)\, P(\overline{B} \mid A_2)\, P(A_2) + P(C \mid \overline{B} \cap A_3)\, P(\overline{B} \mid A_3)\, P(A_3)
\end{aligned}
$$

Observación: Si define la secuencia mediante un árbol de probabilidad y destaca las ramas que se suman, asignar todo el puntaje

Logro 2: Probabilidades necesarias para el cálculo **[1.0 Ptos]**

$$
\begin{aligned}
P(C) = {} & 0{,}05 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}53 + (1/30) \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}27 + 0 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}20 + \\
& 0{,}02 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}53 + 0{,}01 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}27 + 0 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}20
\end{aligned}
$$

Logro 3: Resultado final **[1.0 Ptos]**

$$P(C) = 0{,}02632$$

(b) **Logro 4: Teorema de bayes** **[1.0 Ptos]**

Se pide $P(C \mid B)$ y por teorema de Bayes se tiene que

$$P(C \mid B) = \frac{P(C \mid B \cap A_1)\, P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(C \mid B \cap A_2)\, P(B \mid A_2)\, P(A_2) + P(C \mid B \cap A_3)\, P(B \mid A_3)\, P(A_3)}{P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(B \mid A_2)\, P(A_2) + P(B \mid A_3)\, P(A_3)}$$

Observación: Si define la secuencia mediante un árbol de probabilidad, destaca las ramas que se suman y dividen, asignar todo el puntaje

Logro 5: Probabilidades necesarias para el cálculo **[1.0 Ptos]**

$$P(C \mid B) = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}53 + (1/30) \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}27 + 0 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}20}{0{,}70 \cdot 0{,}53 + 0{,}3 \cdot 0{,}27 + 0{,}10 \cdot 0{,}20}$$

Logro 6: Resultado parcial y final **[1.0 Ptos]**

$$P(C \mid B) = \frac{0{,}02125}{0{,}472} = 0{,}04502119$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

El número de accidentes durante el fin de semana en la subida a Valle Nevado puede modelarse con función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \frac{1}{x!}\left[k\,\alpha^x\,e^{-\alpha} + (1-k)\,\beta^x\,e^{-\beta}\right],$$

con $x \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0$ (tasa de subida), $\beta > 0$ (tasa de bajada) y $0 < k < 1$.

(a) **[3.0 Ptos.]** Determine el número esperado de accidentes durante un fin de semana.

(b) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es el coeficiente de variación del número de accidentes durante el fin de semana? Considere $k = 1/2$, $\alpha = 6$ y $\beta = 4$.

Solución

(a) **Logro 1: Función generadora de momentos de X** **[1.0 Ptos]**

Tenemos que la función generadora de momentos de X por definición está dada por:

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathrm{E}(e^{t\,X}) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{t\,x} \cdot p_X(x) \\ &= k\,e^{-\alpha}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\,\alpha)^x}{x!} + (1-k)\,e^{-\beta}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\,\beta)^x}{x!} \\ &= k\,e^{\alpha\left(e^t-1\right)} + (1-k)\,e^{\beta\left(e^t-1\right)}, \quad \text{por formulario } \forall\, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logro 2: Primera derivada generadora de momentos de X **[1.0 Ptos]**

Derivando $M_X(t)$ con respecto a t y luego evaluando en cero tenemos que

$$M_X^{(1)}(t) = k\,e^{\alpha\left(e^t-1\right)}\,\alpha\,e^t + (1-k)\,e^{\beta\left(e^t-1\right)}\,\beta\,e^t$$

Logro 3: Evaluar en cero y obtener $\mathbf{E}(X)$ **[1.0 Ptos]**

$$M_X^{(1)}(0) = \alpha\,k + \beta\,(1-k) = \mathrm{E}(X)$$

Observación: Si obtiene el valor esperado por definición asignar los logros.

(b) **Logro 4: segunda derivada generadora de momentos de X** **[1.0 Ptos]**

Derivando $M_X(t)$ dos veces con respecto a t y luego evaluando en cero tenemos que

$$M_X^{(2)}(t) = k\,e^{\alpha\left(e^t-1\right)}\left(\alpha\,e^t\right)^2 + k\,e^{\alpha\left(e^t-1\right)}\,\alpha\,e^t + (1-k)\,e^{\beta\left(e^t-1\right)}\left(\beta\,e^t\right)^2 + (1-k)\,e^{\beta\left(e^t-1\right)}\,\beta\,e^t$$

Logro 5: Evaluar en cero y obtener $\mathbf{E}(X^2)$ **[1.0 Ptos]**

$$\to M_X^{(2)}(0) = \alpha\,(\alpha+1)\,k + \beta\,(\beta+1)\,(1-k) = \mathrm{E}(X^2)$$

Logro 6: Obtener varianza y coeficiente de variación **[1.0 Ptos]**

Reemplazando $k = 1/2$, $\alpha = 6$ y $\beta = 4$:

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2 = (21 + 15) - [5]^2 = 6$$

y

$$\delta_X = \frac{\sqrt{6}}{5} = 0{,}4898979$$

Observación: Si obtiene el varianza por definición asignar los logros.

+ 1 Punto Base

Problema 3

Hoy jueves la oposición presentará la acusación constitucional contra la ministra de Educación. El procedimiento inicia con la acusación, que debe ser entablada por no menos de diez ni más de veinte diputados. Una vez interpuesta la acusación, la Cámara deberá escoger al azar, sin considerar los firmantes, una comisión de cinco diputados para que informe si procede o no la acusación. La comisión deberá estudiar y pronunciarse sobre la acusación. (**Fuente: Constitución de 1980, con reformas**).

Actualmente la Cámara esta compuesta por 155 diputados, que se pueden dividir en oficialista (72 diputados) y de oposición (83 diputados, de los cuales 12 son DC).

Hoy la oposición presentó la acusación contra la ministra con la firma de 11 diputados opositores, de los cuales uno es DC. Determine la probabilidad que la comisión que debe estudiar y pronunciarse sobre la acusación quede conformada por dos oficialistas y al menos un DC, los que podrían dar en el futuro una mayoría al oficialismo por su comportamiento en el último tiempo.

Solución

Logro 1: Casos totales **[1.0 Ptos]**

$$\#S = \binom{155-11}{5}$$

Logro 2: Caso favorable 1 DC **[1.0 Ptos]**

$$\binom{72}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{83-11-11}{2}$$

Logro 3: Caso favorable 2 DC **[1.0 Ptos]**

$$\binom{72}{2} \cdot \binom{11}{2} \cdot \binom{83-11-11}{1}$$

Logro 4: Caso favorable 3 DC **[1.0 Ptos]**

$$\binom{72}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{83-11-11}{0}$$

Logro 5: Calcular combinatorias **[1.0 Ptos]**

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{51452280 + 8575380 + 421740}{481008528}$$

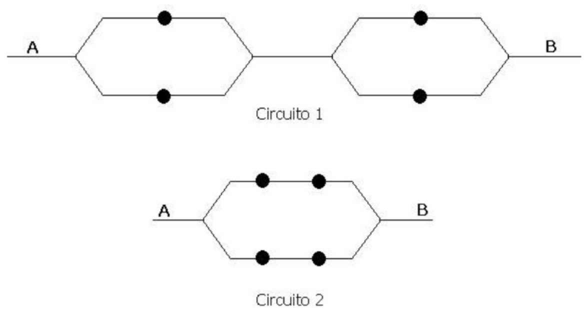
Logro 6: Entregar probabilidad solicitada **[1.0 Ptos]**

$$P(A) = 0{,}1256722$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Un ingeniero debe escoger entre dos diseños de circuitos. Debe maximizar la probabilidad que la corriente circule entre A y B. Si las componentes (resistencias) funcionan de forma independiente y cada una tiene una probabilidad q de fallar, con $0 < q < 1$. ¿Cuál de los dos diseños debiera escoger?



Solución

Definamos los siguientes eventos:

A_1 : La componente Superior Derecha funciona.

A_2 : La componente Superior Izquierda funciona.

A_3 : La componente Inferior Derecha funciona.

A_4 : La componente Inferior Izquierda funciona.

B : Circuito 1 transmite corriente.

C : Circuito 2 transmite corriente.

La probabilidad que cada componente (resistencia) funcione es $p = 1 - q$.

Logro 1: Primera parte probabilidad de circulación corriente circuito 1 **[1.0 Ptos]**

$$\begin{aligned} P(B) &= P([A_2 \cup A_4] \cap [A_1 \cup A_3]) \\ &= P(A_2 \cup A_4) \cdot P(A_1 \cup A_3), \quad \text{por independencia de los sistemas en paralelo} \\ &= [P(A_2) + P(A_4) - P(A_2 \cap A_2)] \cdot [P(A_1) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3)] \end{aligned}$$

Logro 2: Segunda parte probabilidad de circulación corriente circuito 1 **[1.0 Ptos]**

$$\begin{aligned} P(B) &= [p + p - p^2]^2, \quad \text{por independencia entre componentes} \\ &= p^2\,(2 - p)^2 \\ &= p^2\,(4 - 4p + p^2) \end{aligned}$$

Logro 3: Primera parte probabilidad de circulación corriente circuito 2 **[1.0 Ptos]**

$$\begin{aligned} P(C) &= P([A_1 \cap A_2] \cup [A_3 \cap A_4]) \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_4) \end{aligned}$$

Logro 4: Segunda parte probabilidad de circulación corriente circuito 2 **[1.0 Ptos]**

$$\begin{aligned} P(C) &= p^2 + p^2 - p^4, \quad \text{por independencia entre componentes} \\ &= p^2\,(2 - p^2) \end{aligned}$$

Logro 5: Comparación de probabilidades **[1.0 Ptos]**

Como

$$
\begin{aligned}
4 - 4p + p^2 &> 2 - p^2 \\
\rightarrow 2 - 4p + 2p^2 &> 0 \\
\rightarrow 1 - 2p + p^2 &> 0 \\
\rightarrow (1 - p)^2 &> 0 \qquad \forall\, 0 < p < 1
\end{aligned}
$$

Logro 6: Decisión final **[1.0 Ptos]**

El primer diseño debe ser el elegido pues tiene una mayor probabilidad de funcionar cualquiera sea el valor de p.

+ 1 Punto Base