EYP1113 - Probabilidad y Estadística

Capítulo 6: Inferencia Estadística

Ricardo Aravena C.
Ricardo Olea O.

Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2019

Estimación

En los capítulos previos hemos visto de manera introductoria como, dada una distribución ($p_X(x)$, $f_X(x)$ o $F_X(x)$) de una variable aleatoria X y el valor de sus parámetros, obtener probabilidades.

El calculo de probabilidades depende del valor de los parámetros.

Por tanto, nos interesa disponer de métodos que permitan seleccionar adecuadamente valores de estos para las distribuciones de importancia práctica.

Para realizar lo anteriormente expuesto, requerimos información “del mundo real”.

Por ejemplo, datos referente a la pluviosidad en cierta área, intensidad y frecuencia de los movimientos telúricos, conteos, velocidades y flujo de vehículos en cierta intersección o vía, etc.

Estimación

Con base a estos datos, los parámetros pueden ser estimados estadísticamente, y con información sobre el fenómeno inferir la distribución de probabilidad.

Mundo Real
↓
Colección de Datos
↓
Estimación de Parámetros
(Escoger Distribución)
↓
Calculo de Probabilidades
↓
Información para Decidir−Hacer−Diseñar

La estimación clásica de parámetros consiste en dos tipos:

- **Puntal**: simplemente indica un valor único, basado en los datos, para representar el parámetro de interés.
- **Intervalar**: entrega un conjunto de valores (intervalo) donde el parámetro puede estar con cierto nivel de confianza.

Propiedades deseables para un estimador puntual

- **Insesgamiento**: valor esperado del estimador sea igual al parámetro de interés.
- **Consistencia**: implica que si $n \to \infty$, el estimador converge al parámetro (propiedad asintótica)
- **Eficiencia**: se refiere a que la varianza del estimador. Dado un conjunto de datos, θ_1 es más eficiente que θ_2 para estimar θ si tiene menor varianza.
- **Suficiencia**: un estimador se dice suficiente si utiliza toda la información contenida en la muestra para estimar el parámetro.

Consideremos una población Normal(μ, σ) y queremos estimar el parámetro μ a partir de la información proveniente de una muestra aleatoria de tamaño *n* de esta población.

Se proponen los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\max + \min}{2}, \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{Q_1 + Q_3}{2}, \qquad \hat{\mu}_3 = Q_2, \qquad \hat{\mu}_4 = \overline{X}_n$$

- Simule *n* = 100, 500 y 1000 observaciones proveniente de una población Normal($\mu = 10$, $\sigma = 1$).
- Guarde los estimadores propuestos.
- Repita los puntos anteriores *m* veces.
- Grafique los histogramas y diagramas de cajas.
- Compare sus medias y varianzas

Estimación Puntual

Método de los Momentos

En términos generales, el método propone igualar los momentos teóricos no centrales de una variable aleatoria X denotados por μ_k, con los momentos empíricos, basados en los datos, m_k, y despejar los parámetros de interés. Es decir,

$$\mu_k = E(X^k) \quad \text{y} \quad m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$$\Rightarrow \mu_k = m_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ejercicio Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria cuya distribución de probabilidad está dada por:

- Bernoulli(p)
- Poisson(λ)
- Exponencial(ν)
- Gamma(k, ν)
- Normal(μ, σ)

Obtenga los estimadores de momentos de los parámetros.

Estimación Puntual

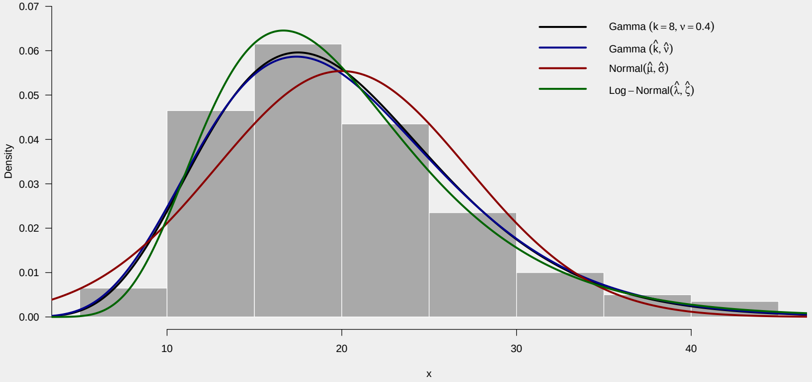
```
## Simulemos una Población ##
set.seed(123456)
Poblacion = rgamma(n = 1000000, rate = 0.4, shape =
hist(Poblacion, freq = F, col = "darkred",
border = "white", nclass = 40, main = "", las = 1)

## Obtengamos una Muestra ##
n = 400
Muestra = sample(Poblacion, size = n)
hist(Muestra, freq = F, col = "darkred",
border = "white", nclass = 10, main = "", las = 1)
```

```
x = Muestra

## Gamma(k, nu) ##
nu = mean(x)/(mean(x^2)-mean(x)^2)
k = mean(x)^2/(mean(x^2)-mean(x)^2)

## Normal(mu, sigma) ##
x = Muestra
mu = mean(x)
sigma = sqrt(mean(x^2)-mean(x)^2)

## Log-Normal(lambda, zeta) ##
zeta = sqrt(log(mean(x^2))-2*log(mean(x)))
lambda = log(mean(x))-0.5*zeta^2
```

```
hist(x, freq = F, col = "darkgray", border = "white",
main = "", las = 1, ylim = c(0,0.07), nclass = 10)
aux = seq(0,100,0.01)
lines(aux, dgamma(aux, rate = 0.4, shape = 8),
col = "black", lwd = 3)
lines(aux, dgamma(aux, rate = nu, shape = k),
col = "darkblue", lwd = 3)
lines(aux, dnorm(aux, mean = mu, sd = sigma),
col = "darkred", lwd = 3)
lines(aux, dlnorm(aux, meanlog = lambda, sdlog = zeta),
col = "darkgreen", lwd = 3)
```

```
legend(x = 30, y = 0.07,
col = c("black", "darkblue", "darkred", "darkgreen"), lwd
c(expression("Gamma "(k==8,nu==0.4)),
expression("Gamma "(hat(k), hat(nu))),
expression(Normal(hat(mu), hat(sigma))),
expression(Log-Normal(hat(lambda), hat(zeta))))
, bty ="n", cex = 1.0)
```

Estimación Puntual



Método de Máxima Verosimilitud

Otro método de estimación puntual es el denominado método de máxima verosimilitud (MV).

En contraste con el método de los momentos, el método de máxima verosimilitud deriva directamente en estimador puntual del parámetro de interés.

Sea X variable aleatoria con función de probabilidad $f_X(x, \theta)$, donde θ es el parámetro de interés.

Dada una muestra (es decir, valores observados) $x_1, \ldots, x_n$, nos preguntamos cuál es el valor más probable de θ que produzca estos valores.

Método de Máxima Verosimilitud

En otras palabras, para los diferentes valores de θ, cuál es el valor que maximiza la verosimilitud de los valores observados $x_1,\ldots,x_n$.

La función de verosimilitud de una muestra aleatoria $x_1,\ldots,x_n$, es decir, independiente e idénticamente distribuida es:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) &= f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n, \theta) \\ &= f_{X_1}(x_1, \theta) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n, \theta), \quad \text{por independencia} \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \theta), \quad \text{por idéntica distribución} \end{aligned}$$

Se define el estimador de máxima verosimilitud (EMV) como el valor de θ que maximiza la función de verosimilitud L.

Método de Máxima Verosimilitud

Es decir, es la solución de

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \theta$$

Maximizar L es equivalente a maximizar $\ln L$, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = 0$$

Método de Máxima Verosimilitud

Si la función de distribución (discreta o continua) depende de más de un parámetro, digamos θ_1,...,θ_m, los EMV respectivos son las soluciones de las m ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n,\, \theta_1, \ldots,\, \theta_m) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Los EMV son estimadores que poseen las propiedades deseables descritas anteriormente.

En particular, para n grande, son “los mejores” estimadores (en el sentido de varianza mínima)

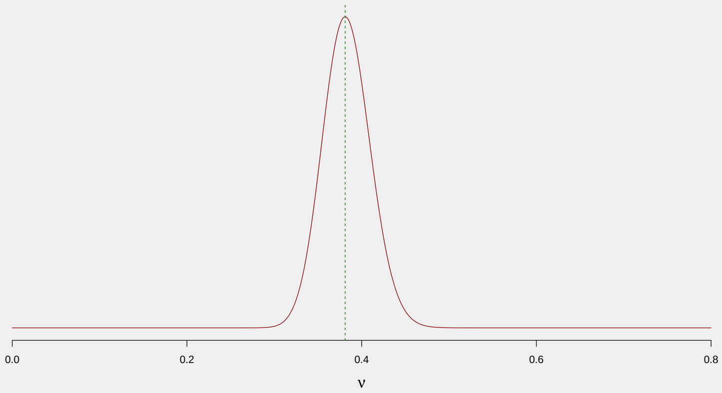
Ejercicio

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria cuya distribución de probabilidad está dada por:

- Bernoulli(p)
- Poisson(λ)
- Exponencial(ν)
- Gamma(k, ν)
- Normal(μ, σ)

Obtenga los estimadores máximo verosímiles de los parámetros.

```
n = 200
nu = 0.4
x = rexp(n, rate = nu)
nu = seq(0,0.8,0.001)
Lik = nu^(n) * exp(-nu*sum(x))
plot(Lik ~ nu, col = "darkred", bty = "n",
type = "l", yaxt = "n", xlab = expression(nu),
ylab = "", cex.lab = 1.5)
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
ν

Propiedades de los Estimadores Máximo Verosímiles

- Asintóticamente Insesgados: $E(\hat{\theta}_n) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
- Varianza alcanza la cota de Cramer-Rao:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)},$$

con $I_n(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2} \ln\, L(\theta)\right]$.

- Distribución Asintótica: Normal.
- Invarianza: Si $\hat{\theta}_n$ es el estimador máximo verosímil de θ, entonces $g(\hat{\theta}_n)$ es el estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ cuya distribución asintótica es

$$g(\hat{\theta}) \stackrel{.}{\sim} \text{Normal}\left(g(\theta),\, \sqrt{\frac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}}\right)$$

Distribuciones Muestrales

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes con función de probabilidad $p_X(x)$ o de densidad $f_X(x)$.

Si $E(X) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, entonces el valor esperado y varianza de $\overline{X}_n$ son

$$\mu_{\overline{X}_n} = E(\overline{X}_n) = \mu$$
$$\sigma^2_{\overline{X}_n} = \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si la distribución subyacente es Normal, entonces

$$\overline{X}_n \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En el caso que la distribución NO sea Normal, por el Teorema del Límite Central para n grande se cumple que

$$\overline{X}_n \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes con función de probabilidad $p_X(x)$ o de densidad $f_X(x)$ tal que $E(X) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Generalmente la varianza poblacional es desconocida.

Para tal caso, si reemplazamos σ por su estimador muestral S^2 se tiene que

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1)$$

con

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

La varianza muestral está definida como

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

La cual cumple con la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu-\overline{X}_n+\overline{X}_n)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 + n(\overline{X}_n-\mu)^2\\ &= (n-1)\,S^2 + +n(\overline{X}_n-\mu)^2\end{aligned}$$

Ejercicio: Muestre que S^2 es un estimador insesgado para σ^2.

Prueba de Hipótesis

Una prueba de hipótesis es un método estadístico inferencial para la toma de decisiones sobre una población en base a la información proporcionada por los datos de una muestra.

La inferencia puede hacerse con respecto a uno o más parámetros de la población o también para un modelo de distribución.

Prueba de Hipótesis Una hipótesis es una afirmación con respecto a uno o más parámetros de una población.

Usualmente son dos las hipótesis que se contrastan son:

- Hipótesis nula, H_0.
- Hipótesis alternativa, H_a.

Ejemplo: Cuando interesa inferir sobre el valor de un parámetro μ de la población las hipótesis a contrastar son generalmente:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu \neq \mu_0$$

Los pasos necesarios en las pruebas de hipótesis son:

1. Defina la hipótesis nula y alternativa.

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu \neq \mu_0$$

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu > \mu_0$$

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu < \mu_0$$

2. Identificar la prueba estadística adecuada y su distribución.
3. Basado en una muestra de datos observados estime el estadístico de prueba.
4. Especifique el nivel de significancia.

Dado que el estadístico de prueba es una variable aleatoria, la probabilidad de una decisión errónea puede ser controlada. Los errores que se pueden cometer son:

- **Error Tipo I**: Se rechaza H_0 dado que era correcta.
- **Error Tipo II**: No se rechaza H_0 dado que no era correcta.

La probabilidad de **Error Tipo I** se denota como α, la cual corresponde al nivel de significancia de la prueba de hipótesis.

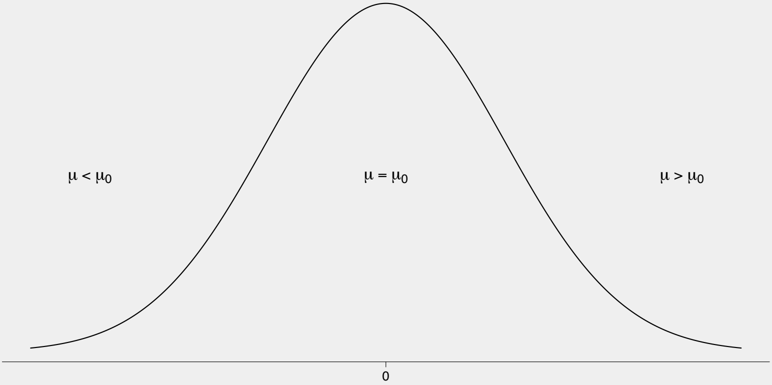
La probabilidad real de cometer **Error Tipo I** se conoce como valor-p.


Región de NO Rechazo
Región de Rechazo
Región de Rechazo
Valores Criticos

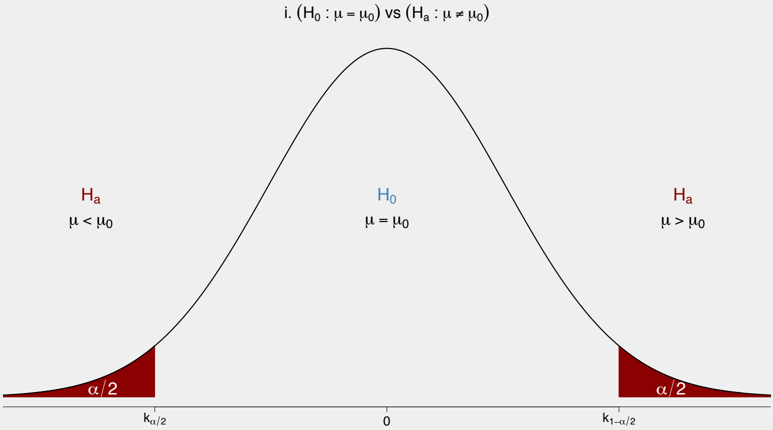
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución Normal(μ, σ), determine una prueba de hipótesis para:

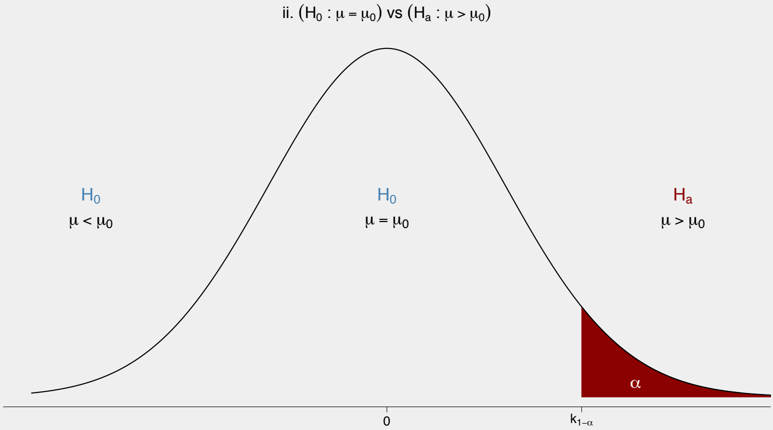
- μ, con σ^2 conocido.
- μ, con σ^2 desconocido.
- σ^2.

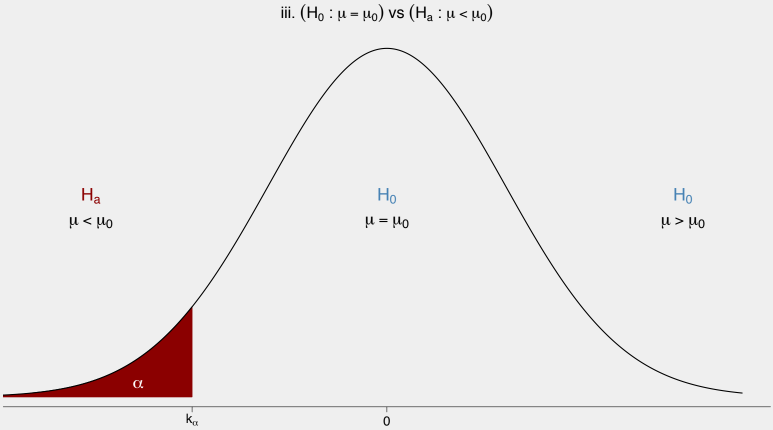
Si H_0 es correcta, entonces $Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1)$



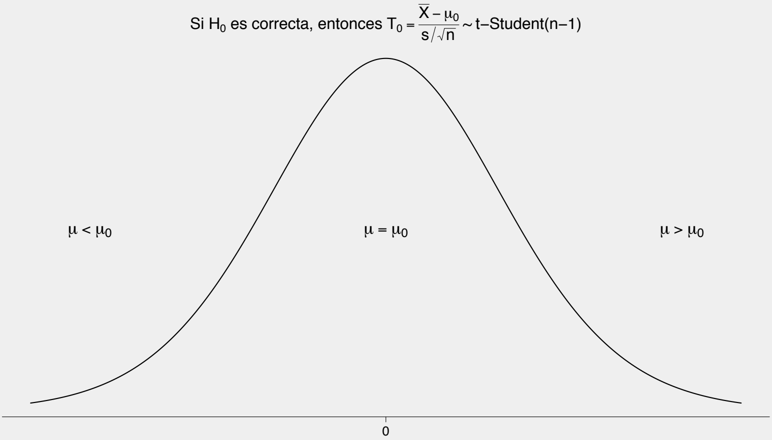
Prueba de Hipótesis

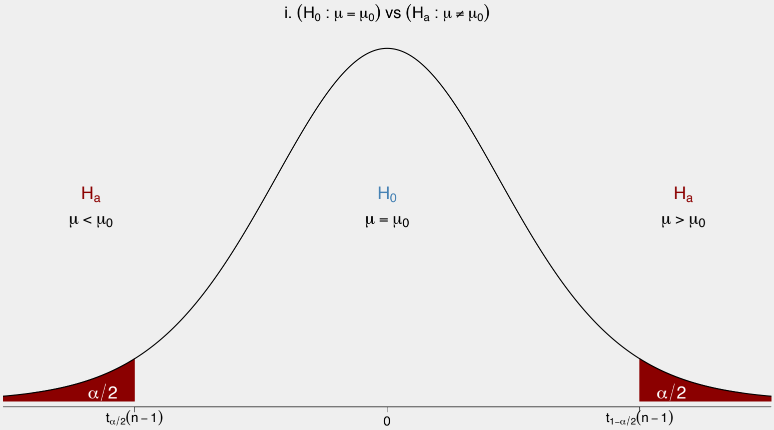


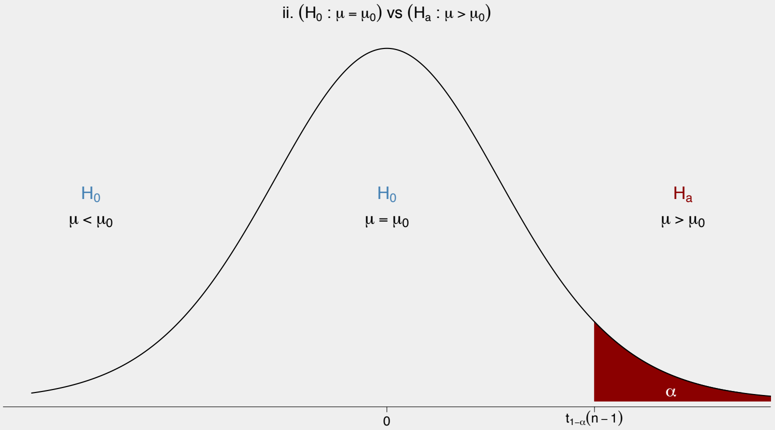

ii. $(H_0 : \mu = \mu_0)$ vs $(H_a : \mu > \mu_0)$
H_0
$\mu < \mu_0$
H_0
$\mu = \mu_0$
H_a
$\mu > \mu_0$
α
0
$k_{1-\alpha}$

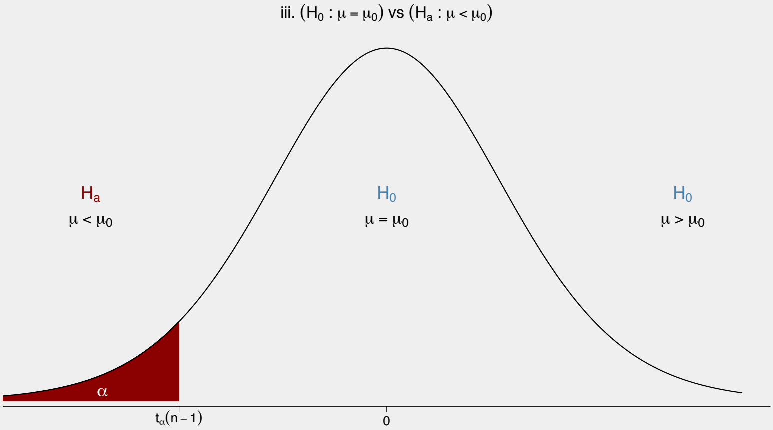

iii. $(H_0 : \mu = \mu_0)$ vs $(H_a : \mu < \mu_0)$
H_a
$\mu < \mu_0$
H_0
$\mu = \mu_0$
H_0
$\mu > \mu_0$
α
k_α
0

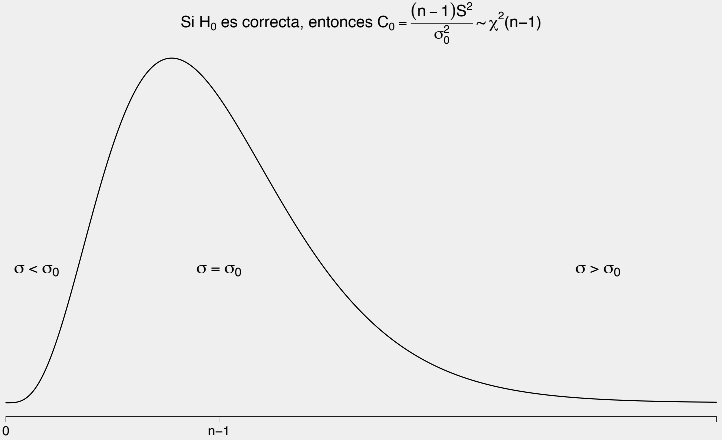
Prueba de Hipótesis

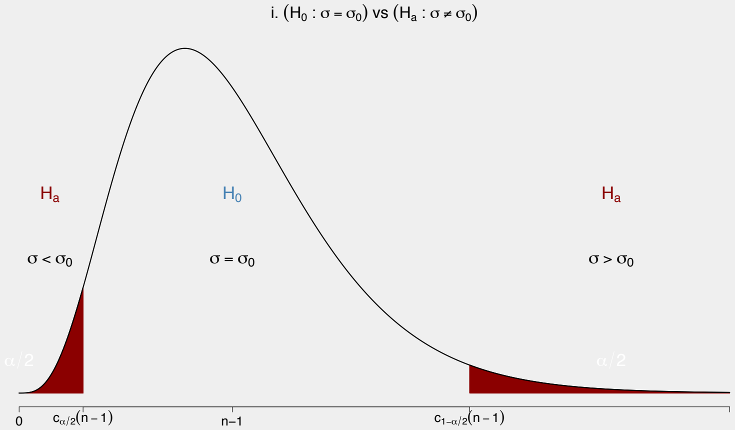


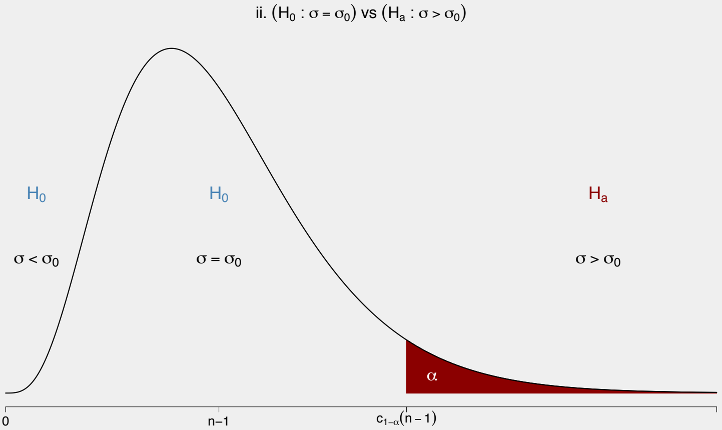

i. $(H_0 : \mu = \mu_0)$ vs $(H_a : \mu \neq \mu_0)$
H_a
$\mu < \mu_0$
H_0
$\mu = \mu_0$
H_a
$\mu > \mu_0$
$\alpha/2$
$\alpha/2$
$t_{\alpha/2}(n-1)$
0
$t_{1-\alpha/2}(n-1)$

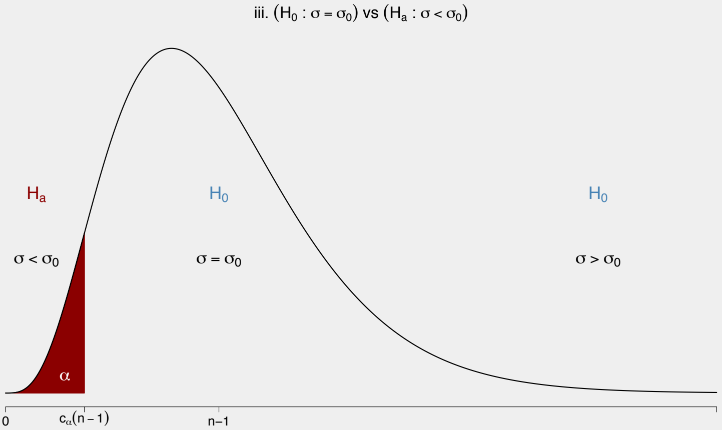

ii. $(H_0 : \mu = \mu_0)$ vs $(H_a : \mu > \mu_0)$
H_0
$\mu < \mu_0$
H_0
$\mu = \mu_0$
H_a
$\mu > \mu_0$
α
0
$t_{1-\alpha}(n-1)$


iii. ($H_0 : \mu = \mu_0$) vs ($H_a : \mu < \mu_0$)
H_a
$\mu < \mu_0$
H_0
$\mu = \mu_0$
H_0
$\mu > \mu_0$
α
$t_\alpha(n-1)$
0


Si H_0 es correcta, entonces $C_0 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$
$\sigma < \sigma_0$
$\sigma = \sigma_0$
$\sigma > \sigma_0$
0
n−1


i. $(H_0 : \sigma = \sigma_0)$ vs $(H_a : \sigma \neq \sigma_0)$
H_a
H_0
H_a
$\sigma < \sigma_0$
$\sigma = \sigma_0$
$\sigma > \sigma_0$
$\alpha/2$
$\alpha/2$
0
$c_{\alpha/2}(n-1)$
n−1
$c_{1-\alpha/2}(n-1)$


ii. $(H_0 : \sigma = \sigma_0)$ vs $(H_a : \sigma > \sigma_0)$
H_0
$\sigma < \sigma_0$
H_0
$\sigma = \sigma_0$
H_a
$\sigma > \sigma_0$
α
0
n−1
$c_{1-\alpha}(n-1)$


iii. $(H_0 : \sigma = \sigma_0)$ vs $(H_a : \sigma < \sigma_0)$
H_a
H_0
H_0
$\sigma < \sigma_0$
$\sigma = \sigma_0$
$\sigma > \sigma_0$
α
0
$c_\alpha(n-1)$
n−1

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución cuya función densidad f_θ depende de un parámetro θ y $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud, entonces para las hipótesis

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \theta \neq \theta_0$$

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \theta > \theta_0$$

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \theta < \theta_0$$

Un estadístico de prueba aproximado sería

$$Z_0 = \sqrt{I_n(\theta_0)}(\hat{\theta} - \theta_0) \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

Construya los estadísticos de pruebas para los siguientes casos:

- Bernoulli(p)
- Poisson(λ)
- Exponencial(ν)

Se denota como β a la probabilidad de cometer un error de tipo II en una prueba de hipótesis, teniendo en cuenta el nivel de significancia α. Mientras que su complemento se conoce como la potencia de un test, es decir:

$$\begin{aligned} \beta &= P(\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}) \\ \text{Potencia} &= P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}) \end{aligned}$$

Por ejemplo, considere $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución Normal(μ, σ). Tenemos que $\overline{X}_n$ es un estimador insesgado y consistente para el parámetro μ, con distribución Normal$\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

Si queremos contrastar las siguientes hipótesis:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu \neq \mu_0 \tag{1}$$
$$\mathrm{H}_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu > \mu_0 \tag{2}$$
$$\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu < \mu_0 \tag{3}$$

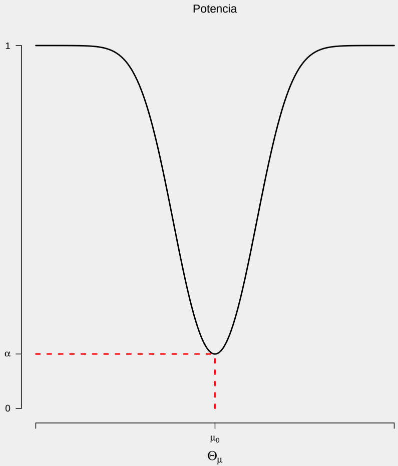
El estadístico de prueba, bajo el supuesto que H_0 es correcta (se considera siempre como referencia $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$) y σ conocido

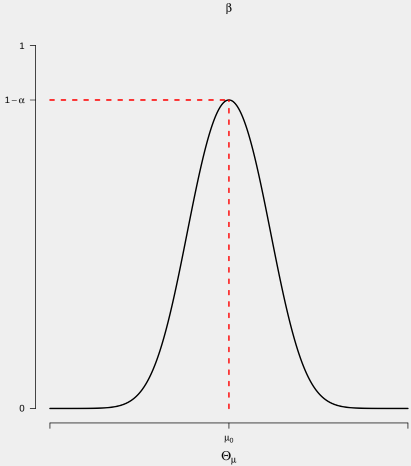
$$Z_0 = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0, 1)$$

Para (1) se rechaza H_0 si $|Z_0| > k_{1-\alpha/2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\text{Potencia} &= 1-\beta \\
&= 1 - P(\text{Error Tipo II}) \\
&= 1 - P(\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(|Z_0| > k_{1-\alpha/2} \,|\, \mu = \mu_0 + \Delta) \\
&= P\left(\left| \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > k_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) + P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -k_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0+\Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha/2} - \Delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) + P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0+\Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < -k_{1-\alpha/2} - \Delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0+\Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha/2} - \Delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) + P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0+\Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < k_{\alpha/2} - \Delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= 1 - \Phi\left(k_{1-\alpha/2} - \Delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right) + \Phi\left(k_{\alpha/2} - \Delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)
\end{aligned}
$$

Notar que para $\Delta = 0 \rightarrow \mu = \mu_0$ y la Potencia es igual a α

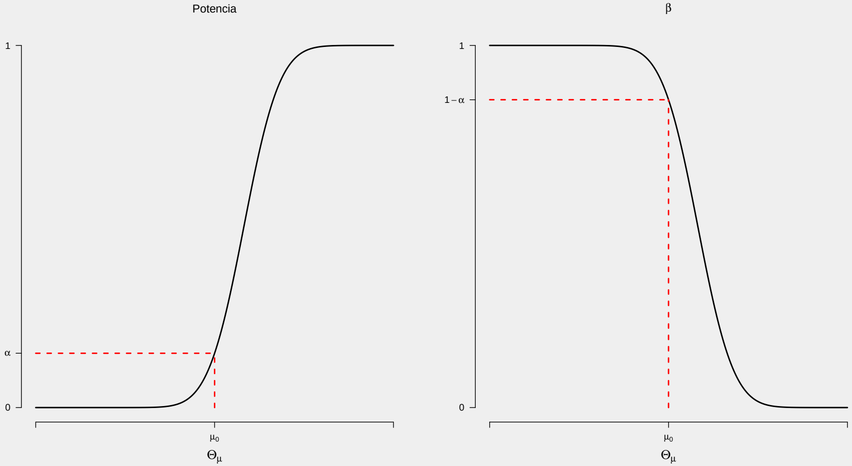




Para (2) se rechaza H_0 si $Z_0 > k_{1-\alpha}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\text{Potencia} &= 1-\beta \\
&= 1 - P(\text{Error Tipo II}) \\
&= 1 - P(\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(Z_0 > k_{1-\alpha} \,|\, \mu = \mu_0 + \Delta) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta\right) \\
&= 1 - \Phi\left(k_{1-\alpha} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

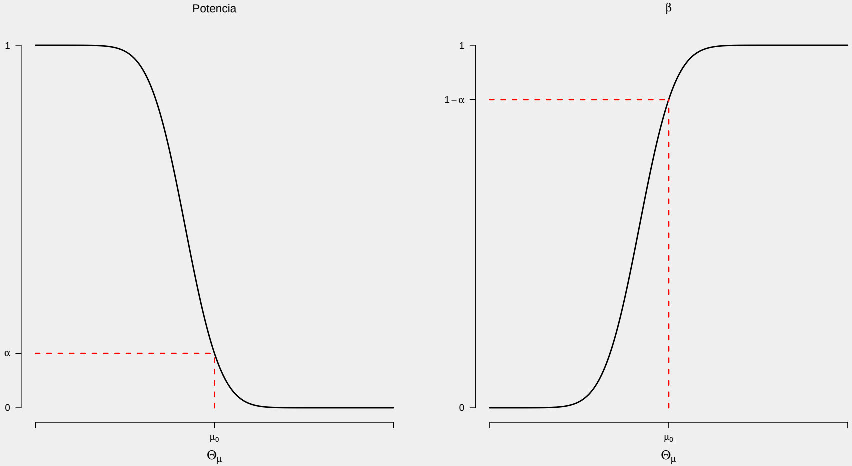
Notar que para $\Delta = 0 \to \mu = \mu_0$ y la Potencia es igual a α



Para (3) se rechaza H_0 si $Z_0 < k_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Potencia} &= 1 - \beta \\
&= 1 - P(\text{Error Tipo II}) \\
&= 1 - P(\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(Z_0 < k_\alpha \,|\, \mu = \mu_0 + \Delta) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < k_\alpha \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < k_\alpha - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= \Phi\left(k_\alpha - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)
\end{aligned}$$

Notar que para $\Delta = 0 \rightarrow \mu = \mu_0$ y la Potencia es igual a α



Intervalos de Confianza

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución es Normal(μ, σ).

Ya vimos que un estimador insesgado y consistente para μ esta dado por

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalo de Confianza para μ con σ conocido

Tenemos que

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0, 1)$$

Luego, se puede mostrar que

$$< \mu >_{1-\alpha} \in \overline{X}_n \pm k_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de Confianza para μ con σ desconocido

Tenemos que

$$T_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1)$$

Luego, se puede mostrar que

$$< \mu >_{1-\alpha} \in \overline{X}_n \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Como se aprecia en la construcción de los Intervalos de Confianza, el tamaño de muestra es fundamental.

Al observar el Intervalo de Confianza para μ, se aprecia que el semi-ancho esta dado por:

$$k_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = w$$

Lo anterior se conoce como **Error de Estimación**.

Por lo tanto, para una precisión w dada, es posible determinar el tamaño de muestra necesaria, con σ y α fijos, dado por

$$n = \left(\frac{k_{1-\alpha/2}\,\sigma}{w}\right)^2$$

Nota: Alternativamente también se puede determinar un tamaño muestral a partir controlando por los errores tipo I y II de una prueba de hipótesis.

Consideremos nuevamente una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una población cuya distribución es Normal(μ, σ).

Recordemos que un estimador insesgado y consistente para σ^2 esta dado por:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \Rightarrow \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Tenemos que

$$C_n = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Luego, se puede mostrar que

$$<\sigma^2>_{1-\alpha} \in \left[\frac{(n-1)\,S^2}{c_{1-\alpha/2}(n-1)};\ \frac{(n-1)\,S^2}{c_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

Sea $\hat{\theta}$ el estimados de máxima verosimilitud de un parámetro θ.

A partir del siguiente pivote

$$Z_n = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\widehat{\text{Var}(\hat{\theta})}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

se tiene que

$$< \theta >_{1-\alpha} \in \hat{\theta} \pm k_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\widehat{\text{Var}(\hat{\theta})}}$$

Por ejemplo, consideremos una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una población cuya distribución es Bernoulli(p).

Ya vimos que un estimador insesgado y consistente para p esta dado por:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}\left(p,\ \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right)$$

Tenemos que

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{\overline{X}_n\,(1-\overline{X}_n)}{n}}} \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}(0,\,1),$$

Luego,

$$< p >_{1-\alpha} \in \ \overline{X}_n \pm k_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{X}_n\,(1-\overline{X}_n)}{n}}$$

Comparación de dos Poblaciones

Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos muestras aleatorias independientes con distribución Normal(μ_X, σ_X) y Normal(μ_Y, σ_Y) respectivamente.

Con medias y varianzas muestrales dadas por:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{Y}_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \qquad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y}_m)^2$$

Entonces

- Si σ_X y σ_Y son conocidos:

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \text{Normal}(0,\ 1)$$

- Si σ_X y σ_Y son desconocidos pero iguales:

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t - \text{Student}(n + m - 2)$$

con $S_p^2 = \dfrac{(n-1)\,S_X^2 + (m-1)\,S_Y^2}{n+m-2}$

Entonces

- Si σ_X y σ_Y son desconocidos:

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \sim t - \text{Student}(\nu)$$

con

$$\nu = \left[\frac{\left(S_X^2/n + S_Y^2/m\right)^2}{\frac{\left(S_X^2/n\right)^2}{n-1} + \frac{\left(S_Y^2/m\right)^2}{m-1}} \right]$$

- Si μ_X y μ_Y son desconocidos:

$$\frac{\left[(n-1)\, S_X^2/\sigma_X^2\right]/(n-1)}{\left[(m-1)\, S_Y^2/\sigma_Y^2\right]/(m-1)} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sim F(n-1,\, m-1)$$

Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos muestras aleatorias independientes con distribución Bernoulli(p_X) y Bernoulli(p_Y) respectivamente, entonces

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{n} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{m}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

y

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n} + \frac{\overline{Y}_m(1-\overline{Y}_m)}{m}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos muestras aleatorias independientes con distribución Poisson(λ_X) y Poisson(λ_Y) respectivamente, entonces

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\lambda_X - \lambda_Y)}{\sqrt{\frac{\lambda_X}{n} + \frac{\lambda_Y}{m}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

y

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (\lambda_X - \lambda_Y)}{\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n} + \frac{\overline{Y}_m}{m}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

Sean $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ dos muestras aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν_X) y Exponencil(ν_Y) respectivamente, entonces

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - \left(\frac{1}{\nu_X} - \frac{1}{\nu_Y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n\nu_X^2} + \frac{1}{m\nu_Y^2}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$

y

$$\frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - \left(\frac{1}{\nu_X} - \frac{1}{\nu_Y}\right)}{\sqrt{\frac{\overline{X}_n^2}{n} + \frac{\overline{Y}_m^2}{m}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$$