Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2019

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EYP1113** |
| **Profesores** | **:** | **Ricardo Aravena C. (Sec 1), Ricardo Olea O. (Sec 2) y Alonso Molina N. (Sec 3)** |

# Pauta Interrogación 3

## Pregunta 1

En cierta escuela de ingeniería, el jefe de carrera afirma que más de un 30 % de los alumnos de 4to año realiza su primera práctica a través de las gestiones de la dirección (es decir, ellos te la consiguen). Además, afirma que aquellos que realizan la práctica vía escuela reciben un salario medio superior a 5 UF.

Usted, ansioso de realizar su 1era práctica pone en duda las afirmaciones realizadas por el jefe de carrera y por tanto procede a implementar un estudio, en el cual logra entrevistar a 78 alumnos de 5to año (es decir, ya realizaron su 1era práctica), con dos preguntas simples. ¿Cómo consiguió la 1era práctica Escuela o Personal? y ¿cuál fue su salario mensual (en UF)?. Aun cuando todos responden la primera pregunta, solo algunos informan sobre los salarios.

Los resultados se resumen en la tabla adjunta

| | | Salario (en UF) | | |
|---|---|---|---|---|
| Vía Practica | Num Alumnos | N | Promedio | Desv. Est. |
| Escuela | 30 | 12 | 5.8 | 1.8 |
| Personal | 48 | 15 | 7.2 | 2.8 |

Asumiendo que los salarios mensuales se comportan de acuerdo a una distribución normal:

(a) **[2.0 Ptos.]** ¿Son válidas las afirmaciones del jefe de carrera? Sea explícito, indique hipótesis, test a utilizar. Concluya usando valor-p para un nivel de significancia del 5 %.

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Es válido afirmar que en las prácticas conseguidas vía personal el ingreso medio es superior a las prácticas conseguidas vía Escuela? Sea explícito, indique hipótesis, test a utilizar. Concluya para un nivel de significancia del 10 %. De ser necesario, valide supuestos.

(c) **[2.0 Ptos.]** Determine el tamaño de muestra óptimo para que la estimación de la media del salario de las prácticas vía escuela no tenga un error de estimación superior a 0.5 UF con un 95 % de confianza. Puede utilizar resultados anteriores.

### Solución

(a) Test de Proporción:

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : p > p_0 \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con $p_0 = 0.30$.

Bajo $H_0$ se tiene que

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(0,\,1)$$

Reemplazado $\hat{p} = \dfrac{30}{30+48} = 0.3846154$ y $n = 78$ se tiene que

**[0.3 Ptos]** $Z_0 = 1.630748 \to \text{valor-p} \approx 1 - \Phi(1.63) = 1 - 0.94841 = 0.05159 > 0.05 = \alpha$ **[0.2 Ptos]**

No existe evidencia para rechazar $H_0$, por tanto respecto a la primera afirmación no es válida. **[0.1 Ptos]**

Test de Media:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu > \mu_0 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con $\mu_0 = 5$.

Bajo $H_0$ se tiene que

$$T_0 = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \text{t-Student}(n-1)$$

Reemplazado $\hat{\mu} = 5.8$, $S = 1.8$ y $n = 12$

**[0.3 Ptos]** $T_0 = 1.539601 \to 5\,\% < \text{valor-p} < 10\,\%$ **[0.3 Ptos]**

No existe evidencia para rechazar $H_0$, por tanto respecto a la segunda afirmación no es válida. **[0.1 Ptos]**

Por lo tanto, los datos no permiten validar las afirmaciones realizadas por el jefe de carrera. **[0.1 Ptos]**

(b) Test comparación de medias, requiere un test previo de igualdad de varianzas:

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{vs} \quad H_a : \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Bajo $H_0$ se tiene que

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,\, m-1)$$

con $S_1 = 1.8$, $S_2 = 2.8$, $n = 12$ y $m = 15$.

Reemplazando

**[0.2 Ptos]** $F_0 = 0.4132653 > F_{0.05}(11,\,14) = \dfrac{1}{F_{0.95}(14,\,11)} = 0.3649635$ **[0.2 Ptos]**

También podría el alumno calcular su inverso

$$F_0 = 2.419753 < F_{0.95}(14,\,11) = 2.74$$

En ambos casos, no hay evidencia para rechazar Ho. Por tanto, se puede asumir igualdad de varianzas. **[0.1 Ptos]**

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_1 < \mu_2 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Bajo $H_0$ se tiene que

$$T_0 = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \text{t-Student}(n+m-2)$$

con $S_p^2 = 5.816$, $n = 12$ y $m = 15$.

Reemplazando

$$\textbf{[0.3 Ptos]} \quad T_0 = -1.5 < -1.316345 = t_{0.10}(25) \rightarrow \text{Se rechaza H}_0 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

como alternativa

$$T_0 = -1.5 \rightarrow 5\,\% < \text{valor-p} < 10\,\% \rightarrow \text{Se rechaza H}_0$$

Hay evidencia para afirmar que los salarios medios de las prácticas conseguidas vía personal el ingreso medio es superior a las prácticas conseguidas vía Escuela.
**[0.1 Ptos]**

(c) Se pide tamaño muestra para estimar media:

Tenemos que $\left(\dfrac{1.96 \times 1.8}{0.5}\right)^2 = 49.8$ reportan su salario. **[1.0 Ptos]**

Luego, $\dfrac{49.8}{12/30} = 124.5$ **[0.5 Ptos]** serían los que contestarían "Escuela" y $\dfrac{124.5}{30/(30+48)} = 323.7 \approx 324$ sería el tamaño de la encuesta. **[0.5 Ptos]**

**+ 1 Punto Base**

**Pregunta 2**

A raíz del sismo ocurrido en la Región de Coquimbo este pasado sábado, llamó la atención en la medición de los temblores, esto porque mientras se cifró la escala del movimiento telúrico en 6.7 Richter, en la escala de Mercalli alcanzó hasta 8 grados. Según explicaron los especialistas, la principal diferencia es que la segunda mide el efecto que tiene dicho movimiento en la superficie. Producto del desastre en la infraestructura de la región, la ocurrencia de daños en una vivienda puede ser modelada por una distribución Bernoulli, con $p$ la probabilidad de daño. Un indicador utilizado para realizar estudios referidos al tema es la "chance de daño", la cual se define como $g(p) = \frac{p}{1-p}$.

(a) **[2.0 Ptos.]** Encuentre el Estimador de Máxima Verosimilitud para la chance del daño.

(b) **[2.0 Ptos.]** Determine la distribución asintótica del estimador en (a), y a partir de este resultado, obtenga un intervalo de confianza al $(1-\alpha) \times 100\,\%$ para la chance.

(c) **[2.0 Ptos.]** Determine un nivel de confianza tal que, en una muestra de 60 casas, cuando 28 de ellas poseen daño, no hay posibilidad de considerar que la chance de error es 1.

**Solución**

(a) Se pide el EMV de $g(p)$, que por invarianza esta dado por

$$\widehat{g(p)} = g(\hat{p}) = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} \quad \textbf{[1.5 Ptos]}$$

con $\hat{p} = \overline{X}$. **[0.5 Ptos]**

(b) Tenemos que

$$\hat{p} = \overline{X} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Por invarianza de los EMV

$$\widehat{g(p)} = g(\hat{p}) = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{p}{1-p}, \sqrt{\frac{p}{n\,(1-p)^3}}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Luego, el intervalo de confianza al $(1-\alpha) \times 100\,\%$ para la chance está dado por

$$< g(p) >_{1-\alpha} \in \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} \pm k_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\overline{X}}{n\,(1-\overline{X})^3}} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(c) Tenemos que $\overline{X} = \frac{28}{60} = 0.4666667 \rightarrow \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} = 0.8750001$, por lo cual nos interesa la cota superior del intervalo. **[0.5 Ptos]**

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}} + k_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\overline{X}}{n\,(1-\overline{X})^3}} < 1 \rightarrow k_{1-\alpha/2} < 0.5520524 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\rightarrow 1 - \alpha/2 < 0.7088$$

$$\rightarrow 1 - \alpha < 0.4176 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

**+ 1 Punto Base**

**Pregunta 3**

Con armas de fuego y a rostro cubierto, un grupo de asaltantes ingresó amedrentando a clientes y vendedores en una joyería en el centro de Santiago. Esto deja al descubierto que los métodos de seguridad en la capital, especialmente en la comuna de Santiago, poseen muchos defectos que se deben subsanar. En particular, la información histórica revela que el número de asaltos a mano armada en el comercio en la comuna de Santiago posee una distribución Poisson con tasa 3 asaltos por día, mientras que en el resto de la capital, el total de asaltos de estas caracteríticas se comporta con la misma distribución, pero con tasa 2 asaltos diarios. Además, debido a las temporadas y situaciones contingentes, la correlación entre eventos en Santiago y el resto de la capital es de 0.4.

(a) **[2.0 Ptos.]** Encuentre el coeficiente de variación del total de asaltos en un día en la capital.

(b) **[2.0 Ptos.]** Encuentre una aproximación de 1er orden para el valor esperado y varianza para la cociente entre los asaltos en la comuna de Santiago y los asaltos en el resto de la capital.

(c) **[2.0 Ptos.]** Bajo el supuesto que todos los días son independientes entre si, determine la probabilidad que el mínimo de asaltos diarios durante una semana en la comuna de Santiago sea a lo más 1.

**Solución**

(a) Sean $X$ e $Y$ los números de asaltos diarios en la comuna de Santiago y resto de la Región Metropolitana.

$$X \sim \text{Poisson}(3) \qquad \text{e} \qquad Y \sim \text{Poisson}(2)$$

Sea $Z = X + Y$.

$$\textbf{[1.0 Ptos]} \quad \text{E}(Z) = 2 + 3 = 5 \qquad \text{y} \qquad \text{Var}(Z) = 2 + 3 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} \cdot 0.4 = 6.959592 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Luego

$$\delta_Z = \frac{\sqrt{6.959592}}{5} = 0.5276208 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(b) Sea $W = \dfrac{X}{Y}$, cuya aproximación de 1er orden está dada por

$$W = g(X, Y) \approx g(\mu_X,\, \mu_Y) + (X - \mu_X)\,\frac{1}{\mu_Y} + (Y - \mu_Y)\left(-\frac{\mu_X}{\mu_Y^2}\right)$$

Luego

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \text{E}(W) \approx \frac{\mu_X}{\mu_Y} = 1.5 \quad \text{y} \quad \text{Var}(W) \approx \left(\frac{\mu_X}{\mu_Y}\right)^2 \left[\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + \frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} - 2 \cdot \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mu_X \cdot \mu_Y}\right] \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$
$$= 1.140153 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(c) Sea $V$ el mínimo.

Por independencia e identica distribución

$$\textbf{[1.0 Ptos]} \quad F_V(1) = 1 - P(V > 1) = 1 - [1 - p_X(0) - p_X(1)]^7 = 1 - [1 - e^{-3} - 3\,e^{-3}]^7 = 0.7887169 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

**+ 1 Punto Base**