Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2019

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ricardo Aravena C. (Sec 1), Ricardo Olea O. (Sec 2) y Alonso Molina N. (Sec 3)**

Pauta Interrogación 2

Pregunta 1

Durante el año 2018 hubo 232.450 nacimientos. Estadísticas muestran que el 75 % de los nacimientos ocurren fuera del matrimonio y que solo el 12 % de los nacimientos son hijos de extranjeros. Suponiendo que los nacimientos ocurrieron durante el 2018 de acuerdo a un proceso Poisson, determine:

(a) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuántos minutos se esperó el 2018 entre nacimientos de hijos de extranjeros?

(b) **[2.0 Ptos.]** Al seleccionar al azar y sin reemplazo 50 de los primeros cinco mil nacimientos, ¿cuál es la probabilidad que el 24 % de ellos sean hijos dentro de un matrimonio?

(c) **[2.0 Ptos.]** Para la muestra anterior, ¿cuál es la probabilidad aproximada que a lo más 38 sean hijos fuera del matrimonio?

Solución

(a) Sea X_t el número de nacimientos durante el 2018 en t minutos.

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu\, t)$$

Del enunciado tenemos que

$$\text{E}(X_1) = \nu = \frac{232450}{365 \times 24 \times 60} = 0{,}4422565 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Sea Y_t el número de nacimientos de hijos de extranjeros durante el 2018 en t minutos.

$$Y_t \sim \text{Poisson}(0{,}12 \cdot \nu \cdot t) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Sea T el tiempo en minutos entre nacimientos de hijos de extranjeros

$$T \sim \text{Exponencial}(0{,}12 \cdot \nu) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Se pide

$$E(T) = \frac{1}{0{,}12 \cdot \nu} = 18{,}84276\,\text{min} \; \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(b) Sea X el número de hijos dentro del matrimonio en la muestra sin reemplazo

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(n = 50,\, N = 5000,\, m = 1250) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Se pide

$$p_X(50 \cdot 0{,}24) = p_X(12) = \frac{\binom{1250}{12} \cdot \binom{3750}{38}}{\binom{5000}{50}} \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Nota: Alternativamente el alumno podría aproximar por una Binomial($n = 50$, $p = 0{,}25$) donde $p_X(12) = 0{,}1293676$, ya que la diferencia entre tamaño poblacional y muestra es muy grande

(c) Sea Y el número de hijos fuera del matrimonio en la muestra sin reemplazo

[0.5 Ptos] $X \sim \text{Hipergeométrica}(n = 50,\, N = 5000,\, m = 3750) \approx \text{Binomial}(n = 50,\, p = 0{,}75)$ **[0.5 Ptos]**
$\approx \text{Normal}(\mu = 37{,}5;\, \sigma = 3{,}061862)$ **[0.5 Ptos]**

Aplicando corrección por continuidad, se tiene que

$$P(X \leq 38) = \Phi\left(\frac{38{,}5 - 37{,}5}{3{,}061862}\right) = \Phi(0{,}3265987) \approx \Phi(0{,}33) = 0{,}6293 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Nota: El valor exacto de la probabilidad solicitada bajo el modelo Hipergeométrico es 0.6191626

+ 1 Punto Base

Pregunta 2

Estudios indican que los ingresos del principal proveedor de un hogar y la suma del resto de los integrantes distribuyen Gamma. Además se tiene que el c.o.v de la suma de los ingresos del resto de los integrantes duplica al del principal proveedor y se espera que aporten con 1/5 del ingreso del hogar. Bajo independencia, ¿cómo distribuye proporcionalmente el ingreso del principal proveedor dentro del hogar?

Solución

Sea X el ingreso del proveedor principal de un hogar e Y el ingreso correspondiente a la suma de los otros integrantes.

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha,\, \nu) \qquad \text{e} \qquad Y \sim \text{Gamma}(\beta,\, \eta)$$

Del enunciado se tiene que

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \to \beta = \frac{\alpha}{4} \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

y que

$$\frac{\dfrac{\alpha}{4\,\eta}}{\dfrac{\alpha}{\nu} + \dfrac{\alpha}{4\,\eta}} = \frac{1}{5} \to \eta = \nu \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Luego

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha,\, \nu) \qquad \text{e} \qquad Y \sim \text{Gamma}(\alpha/4,\, \nu)$$

Se pide la distribución de $Z = \dfrac{X}{X+Y} \to X = \dfrac{Z\,Y}{1-Z}$. **[0.5 Ptos]**

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty f_X\left(\frac{zy}{1-z}\right) \cdot f_Y(y) \cdot \left|\frac{y}{(1-z)^2}\right| dy, \quad \text{por independencia} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \frac{\nu^{\alpha+\alpha/4}\, z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha/4)\,(1-z)^{\alpha-1+2}} \int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-\frac{z\,\nu}{1-z}\,y} \cdot y^{\alpha/4-1}\, e^{-\nu\, y}\, y\, dy \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha/4)\,(1-z)^{\alpha-1+2}} \cdot (1-z)^{5\alpha/4} \cdot \Gamma(5\alpha/4) \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\nu}{1-z}\right)^{5\alpha/4}}{\Gamma(5\alpha/4)}\, y^{5\alpha/4-1}\, e^{-\frac{\nu}{1-z}\,y}\, dy \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \frac{z^{\alpha-1}\,(1-z)^{\alpha/4-1}}{B(\alpha,\,\alpha/4)} \cdot 1, \quad \text{por área bajor el soporte de una Gamma}(5\alpha/4,\, \nu/(1-z)) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \frac{z^{\alpha-1}\,(1-z)^{\alpha/4-1}}{B(\alpha,\,\alpha/4)}, \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \quad 0 \leq z \leq 1 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Z \sim \text{Beta}(\alpha,\, \alpha/4), \quad \text{con}\, \Theta_Z = [0,\, 1] \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Nota: Análogamente el alumno podría responder que $Z \sim Beta(4\,\beta,\, \beta)$ y también para obtener f_Z podría utilizar $Y = \dfrac{X\,(1-Z)}{Z}$.

+ 1 Punto Base

Pregunta 3

La semana recién pasada nos enteramos por redes sociales del lamentable fallecimiento de Chimuelo. Debido a este trágico suceso, las ventas de mascotas, en especial las aves similares a Chimuelo, se dispararon y muchas tiendas invitaban al dueño a ir a buscar un nuevo integrante para la familia, porque más que mascota era un hermano. Una breve encuesta a este tipo de tiendas, muestra que el 60 % de las consultas son por aves similares a Chimuleo y que el número de ventas exitosas de las consultas recibidas en el día hasta el quinto Chimueleo es Binomial, con probabilidad de éxito 1/4. Asumiendo independencia entre las consultas, determine el coeficiente de correlación lineal entre el número de consultas recibidas y ventas exitosas.

Solución

Definamos como Y al número de consultas hasta el 5to Chimuelo y X al número de ventas exitosas:

[1.0 Ptos] $\quad X \,|\, Y = y \sim \text{Binomial}(n = y,\, p = 1/4) \quad$ e $\quad Y \sim \text{Bin-Neg}(k = 5,\, q = 0{,}6)$ **[1.0 Ptos]**

Se pide

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{E}(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= \frac{k}{q} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
\mu_X &= \text{E}[\text{E}(X \,|\, Y)] = p\,\text{E}(Y) = \frac{p \cdot k}{q} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
\text{E}(X \cdot Y) &= \text{E}[\text{E}(X \cdot Y \,|\, Y)] = p \cdot \text{E}(Y^2) = \frac{p\,k\,(1-q)}{q^2} + \frac{p\,k^2}{q^2} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
\sigma_Y^2 &= \frac{k\,(1-q)}{q^2} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
\sigma_X^2 &= \text{E}[\text{Var}(X \,|\, Y)] + \text{Var}[\text{E}(X \,|\, Y)] \\
&= p\,(1-p)\,\text{E}(Y) + p^2\,\text{Var}(Y) \\
&= \frac{p\,(1-p)\,k}{q} + \frac{p^2\,k\,(1-q)}{q^2} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \qquad \text{Corr}(X, Y) = \frac{p}{\sqrt{p\,(p+q)}} = \sqrt{\frac{p}{p+q}} = 0{,}5423261 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Nota: El alumno podría obtener las medidas descriptivas por definición vía sumatorias, distribuir puntaje.

+ 1 Punto Base