Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2019

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. (Sec 01 - Sec 03) y Ricardo Olea O (Sec 02 - Sec 04).**

Pauta Interrogación 1

Problema 1

La distribución Lindley es utilizada usualmente para describir el comportamiento frecuentista de la vida útil, de un dispositivo. Se puede utilizar en una amplia variedad de campos, incluyendo biología, ingeniería y medicina. El parámetro de forma, θ, es un número real positivo y puede dar lugar a una distribución unimodal. La función de densidad y de probabilidad acumulada de la distribución Lindley son:

$$f(x) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\,(1+x)\,e^{-\theta\,x} \qquad \text{y} \qquad F_X(x) = 1 - \left[\frac{1+\theta+\theta\,x}{1+\theta}\right]e^{-\theta\,x}$$

con $\theta > 0$ y $x \geq 0$.

(a) **[3.0 Ptos]** Obtenga la moda y valor esperado de este modelo. (Comente)

(b) **[3.0 Ptos]** Obtenga el coeficiente de variación y de asimetría. (Comente)

Solución

(a) **LOGRO 1**: Igualando la primera derivada de la densidad con respecto a x a cero

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad f'(x) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[e^{-\theta\,x} + (1+x)\,e^{-\theta\,x}\,(-\theta)\right] = 0 \to x = \frac{1-\theta}{\theta} = \text{moda} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

LOGRO 2: El valor esperado está dado por

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \quad \mu_X = \int_0^\infty x \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\,(1+x)\,e^{-\theta\,x}\,dx = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\right] = \frac{2+\theta}{\theta\,(1+\theta)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Alternativamente el alumno podría obtener el valor esperado por función generadora de momento:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{t\,x} \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\,(1+x)\,e^{-\theta\,x}\,dx = \frac{\theta^2\,(\theta - t + 1)}{(1+\theta)\,(\theta - t)^2}, \quad t < \theta \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Luego

$$\mu_X = M_X^{(1)}(0) = \frac{2+\theta}{\theta\,(1+\theta)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

LOGRO 3: Al menos uno de los siguientes comentarios:

- Notar que si $\theta > 1$, la moda sería cero, ya que al evaluar ubica la moda fuera del soporte.
- Moda a la izquierda del valor esperado, comportamiento asimétrico.

[1.0 Ptos]

(b) **LOGRO 4**: Tenemos que

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\,(1+x)\,e^{-\theta\,x}\,dx = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{2}{\theta^3} + \frac{6}{\theta^4}\right] = \frac{2\,\theta + 6}{\theta^2\,(1+\theta)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Alternativamente, a partir de la función generadora de momento:

$$\mathrm{E}(X^2) = M_X^{(2)}(0) = \frac{2\,\theta + 6}{\theta^2\,(1+\theta)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Luego

$$\sigma_X^2 = \frac{\theta^2 + 4\,\theta + 2}{\theta^2\,(1+\theta)^2} \to \delta_X = \sqrt{\frac{\theta^2 + 4\,\theta + 2}{\theta^2 + 4\,\theta + 4}} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

LOGRO 5: Finalmente

$$\mathrm{E}(X^3) = \int_0^\infty x^3 \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\,(1+x)\,e^{-\theta\,x}\,dx = \frac{\theta^2}{(1+\theta)}\left[\frac{6}{\theta^4} + \frac{24}{\theta^5}\right] = \frac{6\,\theta + 24}{\theta^3\,(1+\theta)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Alternativamente, a partir de la función generadora de momento:

$$\mathrm{E}(X^3) = M_X^{(3)}(0) = \frac{6\,\theta + 24}{\theta^3\,(1+\theta)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\theta_X &= \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\,\mu_X\,\mathrm{E}(X^2) + 2\,\mu_X^3}{\sigma_X^3} \\
&= \frac{(6\,\theta + 24)(1+\theta)^2 - 3\,(2+\theta)\,(1+\theta) + 2\,(2+\theta)^3}{(\theta^2 + 4\,\theta + 2)^{3/2}} \\
&= \frac{2\,(\theta^3 + 6\,\theta^2 + 6\,\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\,\theta + 2)^{3/2}} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

LOGRO 6: Al menos uno de los siguientes comentarios:

- $\sqrt{1/2} < \delta_X < 1$.
- $\theta_X > 0 \to$ distribución asimétrica cargada a la izquierda.

[1.0 Ptos]

+ 1 Punto Base

Problema 2

Games of Thrones (GoT) se caracteriza por las muertes de personajes importantes (por ejemplo, Khal Drogo, Ned Stark, o el actor chileno Pedro Pascal que caracterizó a Oberyn). Producto de lo anterior diversos estudios se han realizado respecto a los tiempos de vida de los personajes en cada episodio. Por ejemplo, Rudy, K. (2017), *Poisson Data: Examining the number deaths in an episode of Game of Thrones*, determinó que la tasa de muertes de personajes relevantes por hora es de 3,14 (estudio basado en los primeros 57 capítulos).

Ayer, domingo 14, se exhibió el primer capítulo de la última temporada y dado que usted, por estar estudiando no lo pudo ver, desea determinar:

(a) **[2.0 Ptos]** El tiempo esperado para la 1era muerte.

Si el primer capítulo solo duró 54 minutos,

(b) **[2.0 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que la tercera muerte ocurra durante el primer capítulo?

(c) **[2.0 Ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que ocurran tres o más muertes en el primer capítulo?

Solución

(a) **LOGRO 1**: Definamos como T_1 al tiempo transcurrido en esta temporada hasta 1ra muerte.

$$T \sim \text{Exponencial}(\nu = 3{,}14), \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 2: luego

$$\mu_T = \frac{1}{3{,}14} = 0{,}3184713 \text{ horas (19.10828 minutos).} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(b) **LOGRO 3**: Definamos como T_3 al tiempo transcurrido en esta temporada hasta 3ra muerte.

$$T_3 \sim \text{Gamma}(k = 3,\, \nu = 3{,}14), \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 4: Se pide

$$P(T_3 \leq 54/60) = 1 - \sum_{x=0}^{3-1} \frac{(3{,}14 \cdot 54/60)^x \, e^{-3{,}14 \cdot 54/60}}{x!} = 0{,}5367209 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(c) **LOGRO 5**: Definamos como Y_t al número de muertes en t horas.

$$Y_t \sim \text{Poisson}(3{,}14 \cdot t), \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

LOGRO 6: Se pide

$$P(Y_{54/60} \geq 3) = 1 - \sum_{y=0}^{3-1} \frac{(3{,}14 \cdot 54/60)^y \, e^{-3{,}14 \cdot 54/60}}{y!} = 0{,}5367209 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

El Índice de Evasión de Transantiago correspondiente al 4to trimestre del año 2018, entregó un nivel global de evasión promedio entorno a un 27,1 %. Por otra parte, un Bus articulado tiene capacidad para 160 pasajeros, con 35 asientos y una longitud de 18.5 metros. Suponga que en uno de estos buses la cantidad de evasores coincide con el promedio del estudio y 10 de estos están sentados. Si el bus se encuentra a su máxima capacidad, ¿cuál es la probabilidad que los fiscalizadores al seleccionar al azar a 20 pasajeros de pie detecten al menos dos evasores? Para el número de evasores considere la parte entera de su estimación.

Solución

Alternativa 1:

Tenemos que **[1.0 Ptos]** $X \sim$ Hipergeométrica($n = 20$, $N = 125$, $m = 33$) **[1.0 Ptos]**, se pide

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - F_X(1) \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 1 - \frac{\binom{33}{0}\binom{125-33}{20-0}}{\binom{125}{20}} - \frac{\binom{33}{1}\binom{125-33}{20-1}}{\binom{125}{20}} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 1 - 0{,}001166751 - 0{,}010548711 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 0{,}9882845 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

Nota: Cada punto es un **LOGRO**

Alternativa 2:

Definamos como A al evento en que al seleccionar al azar y sin reemplaza 20 pasajeros entre los 125 de pie **[0.5 Ptos]**, en que 33 son evasores **[0.5 Ptos]**, se pide

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 1 - \frac{\# A}{\# S} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 1 - \frac{\binom{33}{0}\binom{125-33}{20-0}}{\binom{125}{20}} - \frac{\binom{33}{1}\binom{125-33}{20-1}}{\binom{125}{20}} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 1 - 0{,}001166751 - 0{,}010548711 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 0{,}9882845 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

Nota: Cada punto es un **LOGRO**

+ 1 Punto Base

Problema 4

Dado que el gobierno no cuenta con mayoría en ambas cámaras, negocia con la oposición diferentes reformas. Suponga que la siguiente es la estructura (simplificada) de cada cámara.

i. Del total de 155 diputados, el gobierno cuenta con 74 diputados afines (los cuales considera votos seguros), en cambio la oposición agrupada como la ex-nueva mayoría tiene 38 diputados y el Frente Amplio alcanza a 43 diputados.

ii. En el Senado, el gobierno cuenta con 20 votos seguros, en cambio la ex-nueva mayoría tiene 22 senadores y el Frente Amplio solo uno.

Como han de saber, las reformas en discusión (tributaria, pensiones, educación, etc.) requiere mayoría simple en ambas cámaras. Además, una vez aprobada una reforma en una de las cámaras pasa a la otra, siendo decisión del gobierno la cámara de inicio de la reforma. En caso de ser rechazada en la 1era cámara, esta no puede ser presentada hasta el próximo año. En cambio, si es rechazada en la 2da cámara, pasa a tercer trámite (para este ejercicio solo consideramos las dos primeras etapas y asuma que el gobierno trata de convencer uno a uno a cada diputado o senador en forma independiente).

Los estudios muestran, que si el gobierno ingresa una reforma por la cámara de diputados, hay una probabilidad de 0,05 de convencer a un diputado contrario que vote por la reforma. Una vez que es aprobada por la Cámara de Diputados, hay una probabilidad de 0,15 de convencer a un senador. En cambio, si ingresa por el Senado, hay una probabilidad de 0,10 de convencer a un senador. Una vez aprobada por el senado, hay una probabilidad de 0,10 de convencer a un diputado para el segundo trámite. Por otra parte, al revisar las iniciativas del primer gobierno de Piñera y del actual, determina que el 65 % de ellas ingresó por la Cámara de Diputados. Con estos valores hipotéticos, si el gobierno decide ingresar una reforma determine:

(a) **[3.0 Ptos]** Probabilidad que logré su aprobación.

(b) **[3.0 Ptos]** Dado que la reforma logra su aprobación, ¿cuál es la probabilidad que haya ingresado inicialmente a la cámara de Diputados?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Iniciativa ingresa al Senado.

B: Se aprueba en 1ra etapa.

C: Se aprueba en 2da etapa.

D: Iniciativa aprobada.

Del enunciado tenemos que

$$P(A) = 0{,}35,\ P(\overline{A}) = 0{,}65$$

Por otra parte,

$$P(B \mid A) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{23}{x} 0{,}10^x\, 0{,}90^{23-x} = 0{,}6848733 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \quad \textbf{LOGRO 1}$$

$$P(C \mid A \cap B) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{81}{x} 0{,}10^x\, 0{,}90^{81-x} = 0{,}967156 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \quad \textbf{LOGRO 2}$$

$$P(B \mid \overline{A}) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{81}{x} 0{,}05^x\, 0{,}95^{81-x} = 0{,}5814428 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \quad \textbf{LOGRO 3}$$

$$P(C \mid \overline{A} \cap B) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{23}{x} 0{,}15^x\, 0{,}85^{23-x} = 0{,}8795838 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \quad \textbf{LOGRO 4}$$

(a) **LOGRO 5**: Se pide

$$\begin{aligned}
P(D) &= P[(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)] \\
&= P(A \cap B \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C), \quad \text{por axioma 3} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 0{,}35 \times 0{,}6848733 \times 0{,}967156 + 0{,}65 \times 0{,}5814428 \times 0{,}8795838 \\
&= 0{,}5642607 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) **LOGRO 6**: Se pide

$$\begin{aligned}
P(\overline{A} \mid D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C)}{0{,}5642607} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{0{,}65 \times 0{,}5814428 \times 0{,}8795838}{0{,}5642607} \\
&= 0{,}589139 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base