Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2017

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Un problema que hoy en día tienen los padres con niños en etapa pre-escolar es la organización de los cumpleaños de estos, ya que es costumbre invitar a TODO el curso y no es raro que en algunos casos haya que ponerse de acuerdo o transar día con más de una familia. Si los cumpleaños se celebran sólo los fines de semana de la semana en que cae el cumpleaño. ¿cuál es la probabilidad que al menos un par de familias deban ponerse de acuerdo o transar para realizar la celebración este año? Suponga que el curso tiene 30 niños, ninguno nació el 1ro de enero (que este año fue domingo) y que no hay gemelos y/o mellizos. Por simplicidad, no se preocupe de los feriados y fines de semanas largos.

Solución

Dejando fuera el 1ro de enero, tenemos 52 semanas de lunes a domingo. **[0.5 Ptos.]**

Definamos como A al evento "al menos un par de familias deben ponerse de acuerdo o transar para realizar la celebración este año" que es equivalente al evento "al menos un par de familias comparten semana de cumpleaños". **[1.0 Ptos.]**

Como el complemento de A es el evento "ninguna familia comparte semana de cumpleaños" **[1.0 Ptos.]** se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 1 - \frac{\#\,\overline{A}}{\#\,S} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 1 - \frac{52!}{22!} \cdot \frac{1}{52^{30}} \quad \textbf{[2.0 Ptos.]} \\ &\approx 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Como han sabido, producto del desfalco de carabineros, Contraloría ha estado realizado fiscalizaciones sorpresas en diversas instituciones estatales. Suponga que su unidad (la cual es pequeña y sin embargo igual se han realizado unos "pequeños" desvíos) ha sido seleccionada, y le solicitan la documentación de todas las transacciones del último mes superiores a un millón de pesos. Estas corresponde a sólo 25 transacciones y de ellas hay 6 en las cuales los servicios no se prestaron (digamos falsas).

De acuerdo a la normativa, el inspector debe seleccionar tres transacciones al azar y efectuar la auditoria. En caso de detectar una falsa, se eleva una amonestación y la unidad queda bajo vigilancia. En caso de detectar dos o más falsas, suspenden a los responsables y se efectúa un sumario.

(a) **[3.0 Puntos]** Determine la probabilidad que el inspector sólo eleve una amonestación.

(b) **[3.0 Puntos]** Suponga, que la unidad fue amonestada y por esa razón se deja caer un nuevo auditor pidiendo la información de las transacciones no revisadas anteriormente. Si el inspector ahora selecciona cuatro al azar, ¿cuál es la probabilidad que los suspendan y sean sumariados.

Nota: En la ronda de preguntas se aclara que el segundo auditor opera bajo el mismo criterio que el primero y que las sanciones no acumulan.

Solución

(a) Definamos como A al evento "el inspector sólo eleve una amonestación", es decir, al revisar detecta exactamente una transacción falsa.

Alternativa 1

$$\textbf{[2.5 Ptos.]} \quad P(A) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{19}{2}}{\binom{25}{3}} = 0.446087 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Alternativa 2

$$\textbf{[2.5 Ptos.]} \quad P(A) = \frac{6\cdot 19\cdot 18}{25\cdot 24\cdot 23} + \frac{19\cdot 6\cdot 18}{25\cdot 24\cdot 23} + \frac{19\cdot 18\cdot 6}{25\cdot 24\cdot 23} = 0.446087 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Definamos como B al evento "el 2do inspector suspende y aplica sumario", es decir, al revisar detecta exactamente dos o más transacciones falsas.

Alternativa 1

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{17}{2} + \binom{5}{3}\cdot\binom{17}{1} + \binom{5}{4}\cdot\binom{17}{0}}{\binom{22}{4}} \quad \textbf{[2.5 Ptos.]} \\ &= 0.185919344 + 0.023239918 + 0.000683527 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\ &= 0.2098428 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

Alternativa 2

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= 1 - P(\overline{B} \mid A) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 1 - \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{17}{4} + \binom{5}{1}\cdot\binom{17}{3}}{\binom{22}{4}} \quad \textbf{[2.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

$$= 1 - 0.7901572 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$
$$= 0.2098428 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

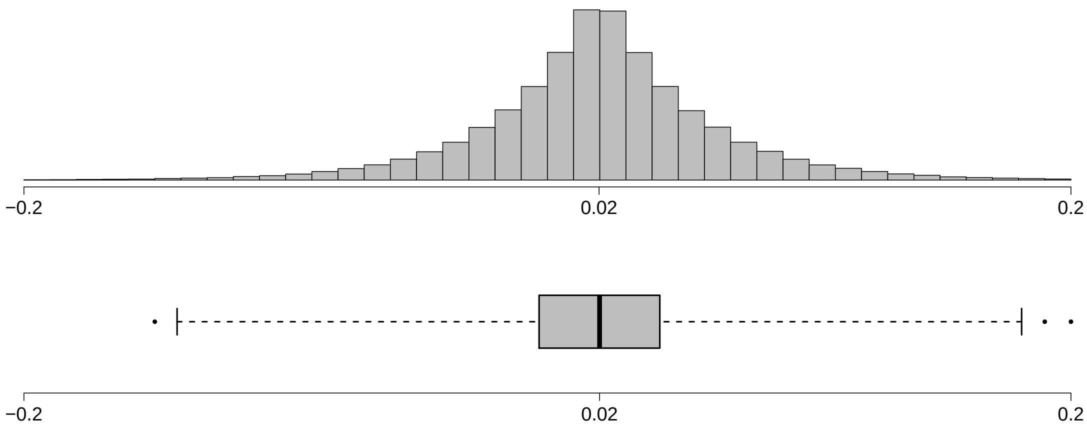
Alternativa 3

$$\begin{aligned} P(B \,|\, A) &= 1 - P(\overline{B} \,|\, A) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 1 - \left(\frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19} + \frac{5 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19} + \frac{17 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 15}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19} + \frac{17 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 15}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19} + \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 5}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19} \right) \quad \textbf{[2.0 Ptos.]} \\ &= 1 - 0.7901572 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\ &= 0.2098428 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

La siguiente figura muestra el comportamiento de las rentabilidades diaria de un portafolio de acciones.



Este comportamiento puede representarse según un investigador por una distribución cuya función de densidad y función generadora de momentos están definida como

$$f(x) = \frac{1}{2\,\sigma}\,\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) \qquad \text{y} \qquad M(t) = \frac{e^{\mu\,t}}{1-\sigma^2\,t^2}, \quad |t| < 1/\sigma$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$

(a) **[2.0 Ptos]** Obtenga la moda, mediana y valor esperado de este modelo. (Comente)

(b) **[2.0 Ptos]** Si el percentil 75 % es igual a 0.042930, ¿qué valor asignaría al parámetro σ?

(c) **[2.0 Ptos]** Determine el coeficiente de variación de este modelo.

Solución

(a) Moda:

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad f'(x) = \frac{1}{2\,\sigma}\,\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)\cdot\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma\,|x-\mu|}\right) = 0 \to \text{moda} = \mu \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Mediana:

Si $x < \mu$ se tiene que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\,\sigma}\,\exp\left(-\frac{|u-\mu|}{\sigma}\right)du = \frac{1}{2}\,\exp\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)\Bigg|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}\,\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Como $F(\mu) = 1/2$, entonces la mediana es igual a μ. **[0.2 Ptos.]**

Valor esperado:

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad M^{(1)}(t) = e^{\mu\,t}\cdot\mu\cdot\left(1-\sigma^2\,t^2\right)^{-1} - e^{\mu\,t}\cdot\left(1-\sigma^2\,t^2\right)^{-2}\cdot(-2\,\sigma^2\,t) \to M^{(1)}(0) = \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$

Es decir, el valor esperado es μ. **[0.1 Ptos.]**

Por lo tanto, el modelo propuesto es un modelo simétrico. **[0.5 Ptos.]**

(b) Para $x > \mu$ y $1/2 < p < 1$

$$
\begin{aligned}
F(x_p) &= \frac{1}{2} + \int_{\mu}^{x_p} f(u)\,du \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{2} + \int_{\mu}^{x} \frac{1}{2\,\sigma}\,\exp\left(-\frac{u-\mu}{\sigma}\right)du \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\exp\left(-\frac{u-\mu}{\sigma}\right)\Bigg|_{\mu}^{x_p} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\,\exp\left(-\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= p
\end{aligned}
$$

Igualando p a 0.75 y despejando, se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad x_{0.75} = \mu - \sigma \cdot \ln\left((2 \cdot (1 - 0.75)\right)$$

Del boxplot, la mediana es igual a 0.02 e igual a μ según resultado obtenido en (a).

Como $x_{0.75} = 0.042930$, entonces $\sigma = 0.033081$. **[0.3 Ptos.]**

(c) Tenemos que

$$M^{(1)}(t) = \mu\,M(t) + M(t) \cdot 2\,\sigma^2\,t\,(1 - \sigma^2\,t^2)^{-1}$$

Luego

$$M^{(2)}(t) = \mu\,M^{(1)}(t) + M^{(1)}(t) \cdot 2\,\sigma^2\,t\,(1-\sigma^2\,t^2)^{-1} + M(t) \cdot 2\,\sigma^2\,\left[(1-\sigma^2\,t^2)^{-1} - t \cdot (1-\sigma^2\,t^2)^{-2}\,(-2\,\sigma^2\,t)\right]$$

evaluando en cero

$$M^{(2)}(0) = \mu^2 + 2\,\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Por lo tanto, el coeficiente de variación

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad \delta = \frac{\sigma\,\sqrt{2}}{\mu} = \frac{0.033081 \cdot \sqrt{2}}{0.02} = 2.33918$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Como han de saber, los diversos partidos políticos están en una campaña de "refichaje" contra el tiempo, hasta 14/abril. Diversos antecedentes muestran que previo a la aprobación de la Ley n° 20.900[1], un 10 % de los chilenos aparecía inscrito en algún partido político. Considerando que para un tercio de ellos fue una verdadera sorpresa, dado que nunca se habían inscrito en un partido político, a lo más recordaban haber firmado por otros motivos (por ejemplo, para salvar las ballenas). Por otra parte, basado en diversos estudios se puede afirmar que, entre los que no habían firmado por algún partido, sólo 1 de cada 50 se inscribiría en un partido político, valor que sube a 3 de cada 10 cuando se consulta a personas que anteriormente si se habían inscrito en un partido político (refichaje).

(a) **[3.0 Ptos]** Determine la probabilidad que una persona elegida al azar pertenezca a un partido político.

(b) **[3.0 Ptos]** Si una actualmente firmó en un partido político, ¿cuál es la probabilidad que la vez anterior haya firmado por otro motivo (ej. por las ballenas) y por tanto aparecía como inscrito?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Persona inscrita en un partido político antes de la Ley N° 20.900.

B: Persona sorprendida al aparecer como inscrito.

C: Persona se inscribe en un partido político en el "refichaje".

Del enunciado se tiene que

$$\begin{aligned}
P(A) = 0.10 &\to P(\overline{A}) = 0.90 \\
P(B \mid A) = 1/3 &\to P(\overline{B} \mid A) = 2/3 \\
P(C \mid A \cap B) = 0.02 &\to P(\overline{C} \mid A \cap B) = 0.98 \\
P(C \mid A \cap \overline{B}) = 0.30 &\to P(\overline{C} \mid A \cap \overline{B}) = 0.70 \\
P(C \mid \overline{A}) = 0.02 &\to P(\overline{C} \mid \overline{A}) = 0.98
\end{aligned}$$

(a) Por teorema de probabilidades totales se tiene que

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) + P(C \mid A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \mid A) \cdot P(A) + P(C \mid A \cap B) \cdot P(B \mid A) \cdot P(A) \quad \textbf{[1.5 Ptos.]} \\
&= 0.02 \times 0.90 + 0.30 \times (2/3) \times 0.10 + 0.02 \times (1/3) \times 0.10 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 0.03866667 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned}
P(B \mid C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)}, \quad \text{por definición de probabilidad condicional} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{P(B \cap C \cap A) + P(B \cap C \cap \overline{A})}{P(C)}, \quad \text{por teorema de probabilidades totales} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \frac{P(B \cap C \cap A) + 0}{P(C)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{P(C \mid A \cap B) \cdot P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(C)} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

[1] De conformidad a lo ordenado en el artículo segundo transitorio de la Ley N° 20.900, sobre Fortalecimiento y Transparencia de la Democracia publicada el pasado 14 de abril de 2016, los partidos políticos deberán reinscribir a sus afiliados en cada una de las regiones en que se encuentren constituidos, con la finalidad de establecer el Registro de Afiliados de cada partido que constará en el padrón del Servicio Electoral a partir de 2017

$$= \frac{0.02 \times (1/3) \times 0.10}{0.03866667}, \quad \text{por (a)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$
$$= 0.01724138 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base