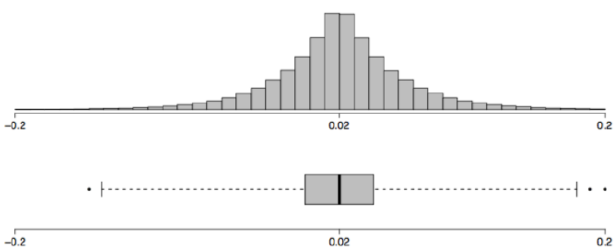
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2019

Curso	:	**Probabilidades y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Ayudantía 4	:	**Función generadora de momentos y medidas descriptivas**
Profesores	:	**Ricardo Aravena y Ricardo Olea**
Ayudantes	:	**Nicolás Bravo, José Casanova, Diego Muñoz, Oscar Ortiz y Vanesa Reinoso**

Problema 1

La siguiente figura muestra el comportamiento de las rentabilidades diarias de un portafolio de acciones.



Este comportamiento puede representarse, según un investigador, por una distribución de La-place, cuya función de densidad y generadora de momentos están dadas por

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) \qquad\qquad M(t) = \frac{\exp^{(\mu t)}}{1-\sigma^2 t^2} \qquad |t| < 1/\sigma,$$

con $x \in R, \mu \in R, \sigma > 0$

1. Obtenga la moda, mediana y valor esperado para el modelo propuesto. Comente acerca de estos resultados.
2. Encuentre una expresión para el rango interquartil (IQR).
3. Determine, en función de los parámetros μ y σ, el coeficiente de variación de este modelo.

Solución:

1. Dada la forma de la distribución, y considerando la propuesta como modelo, no es difícil notar que la función densidad es simétrica respecto al eje vertical $x = \mu$ debido al valor absoluto involucrado.

   Para analizar la moda, en general, deberíamos encontrar aquel valor que resuelve la siguiente ecuación

   $$\left.\frac{df}{dx}\right|_{xModa} = 0$$

   al no ser una función derivable en $x = \mu$, debemos estudiar el comportamiento por tramos.Por el lado izquierdo de μ es una función estrictamente creciente y por el lado derecho estrictamente decreciente, argumento suficiente para concluir que $X_{Moda} = \mu$.

La mediana, en términos estrictos, la obtenemos resolviendo la siguiente ecuación para $x_{Mediana}$

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{x_{Mediana}} \frac{1}{2\sigma} exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) dx$$

pero dado que la función es simétrica respecto a $x = \mu$, acumula 0.5 de probabilidad desde $-\infty$ a μ y 0.5 desde μ a ∞, argumento suficiente, desde luego, para concluir que $x_{Mediana} = \mu$.

El valor esperado lo obtenemos concluyendo el siguiente resultado

$$x_{Esperado} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2\sigma} exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) dx$$

que es equivalente a la posición horizontal del centro de masa de un cuerpo en 2D cuya área ha de ser 1. También se puede obtener derivando la expresión de la generadora de momentos y reemplazando en dicho resultado t = 0. Al ser una figura simétrica respecto a μ, el centro de masa se ha de ubicar en su centro y, desde luego, $x_{Esperado} = \mu$.

2. El rango interquartil, por el formulario, está dado por

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25}$$

donde los valores involucrados se pueden obtener mediante

$$0,25 = \int_{-\infty}^{x_{0.25}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_{0.25}} \frac{1}{2\sigma} exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \frac{1}{2} exp\left(\frac{x_{0.25}-\mu}{\sigma}\right) \tag{1}$$

$$0,75 = \int_{-\infty}^{x_{0.75}} f(x)dx = \frac{1}{2} + \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{2\sigma} exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = 1 - \frac{1}{2} exp\left(-\left(\frac{x_{0.75}-\mu}{\sigma}\right)\right) \tag{2}$$

De la ecuación (1) y (2) nos queda

$$x_{0,25} = \mu + \sigma \ln(0,5)$$
$$x_{0,75} = \mu - \sigma \ln(0,5)$$

por lo tanto

$$IQR = x_{0,75} - x_{0,25} = -2\sigma \ln(0,5) = 2\sigma \ln(2)$$

3. Utilizando la función generadora de momentos, y aprovechando la existencia de la función exponencial en ella, tenemos

$$M^{(1)}(1) = \mu M(t) + M(t) \cdot 2\sigma^2 t(1-\sigma^2 t^2)^{-1}$$
$$M^{(2)} = \mu M(t) + M(t) \cdot 2\sigma^2 t(1-\sigma^2 t^2)^{-1} + M(t) \cdot 2\sigma^2 \left[(1-\sigma^2 t^2)^{-1} - t \cdot (1-\sigma^2 t^2)^{-2}(-2\sigma^2 t)\right]$$

Evaluando las dos últimas expresiones en t = 0, y reemplazando en la definición del coeficiente de variación, tenemos de forma general que

$$cov = \frac{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}}{|E(X)|} = \frac{\mu^2 + 2\sigma^2 - \mu^2}{|\mu|} = \frac{\sigma\sqrt{2}}{|\mu|}$$

Problema 2

Sea Z el tiempo transcurrido entre sismos que afectan a una zona. Una distribución que se ajusta muy bien en la práctica a este tipo de datos es la llamada distribución Gaussiana - Inversa(μ, λ), la que está determinada por la siguiente función de densidad:

$$f_Z(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} z^{-3/2} \exp\left[-\frac{\lambda}{2\mu^2 z}(z-\mu)^2\right]$$

con $z \in \mathbb{R}^+, \mu \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. A continuación usted analizará el comportamiento de sus momentos teóricos, para ello se recomienda trabajar con la siguiente re - parametrización de la densidad propuesta anteriormente:

$$f_Z(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} z^{-3/2} \exp\left[-\lambda\alpha z + \lambda(2\alpha)^{1/2} - \frac{\lambda}{2z}\right]$$

donde $\alpha = \dfrac{1}{2\mu^2}$.

1. Muestre que la función generadora de momentos de Z es

$$M_Z(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right)\right] \quad , \quad t < \frac{\lambda}{2\mu^2}$$

2. Muestre que la varianza de Z es $\dfrac{\mu^3}{\lambda}$.

3. Muestre que el coeficiente de asimetría de Z es $3\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{1/2}$.

<u>Solución:</u>

1. Tenemos que

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ}) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{tz} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} z^{-3/2} \exp\left[-\lambda\alpha z + \lambda(2\alpha)^{1/2} - \frac{\lambda}{2z}\right] dz \\
&= \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} z^{-3/2} \exp\left[tz - \lambda\alpha z + \lambda(2\alpha)^{1/2} - \frac{\lambda}{2z}\right] dz \\
&= \exp\left\{\lambda(2\alpha)^{1/2} - \lambda\left[2\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2}\right\} \\
&\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} z^{-3/2} \exp\left[-\lambda z\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right) + \lambda\left[2\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2} - \frac{\lambda}{2z}\right] dz \\
&= \exp\left\{\lambda(2\alpha)^{1/2} - \lambda\left[2\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2}\right\} \cdot 1, \text{ si } t < \alpha\lambda \text{ (convergencia para la integral).}
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de α concluimos que

$$M_Z(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right)\right]. \text{ si, } t < \frac{\lambda}{2\mu^2}$$

2. La varianza depende de los primeros dos momentos:

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}(Z^2) - [\mathbb{E}(Z)]^2$$

Para obtener los momentos usamos la función generadora de momentos pues como se vio en clases cumple:

$$\mathbb{E}(Z^r) = M_Z^{(r)}(0)$$

Teniendo mucho cuidado con que no se suelte la cadena y aprovechando la función exponencial en medio, tenemos

$$\begin{aligned} M_Z^{(1)}(t) &= M_Z(t) \cdot \left[\mu \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-1/2} \right] \\ M_Z^{(1)}(0) &= \mu \end{aligned}$$

La segunda derivada respecto a t queda

$$\begin{aligned} M_Z^{(2)}(t) &= M_Z^{(1)}(t) \cdot \left[\mu \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-1/2} \right] + M_Z(t) \cdot \left[\frac{\mu^3}{\lambda} \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-3/2} \right] \\ M_Z^{(2)}(0) &= \mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda} \end{aligned}$$

Así,

$$\sigma_Z^2 = \mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda} - \mu^2 = \frac{\mu^3}{\lambda}.$$

3. El coeficiente de asimetría (Skewness) está dado por la siguiente expresión del formulario

$$\mathbb{E}\left(\left[\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right]^3 \right) = \frac{1}{\sigma_Z^3} \left[\mathbb{E}(Z^3) - 3\mathbb{E}(Z^2)\mu_Z + 3\mathbb{E}(Z)\mu_Z^2 - \mu_Z^3 \right],$$

donde necesitamos el tercer momento de Z, entonces derivamos sin que se suelte la cadena

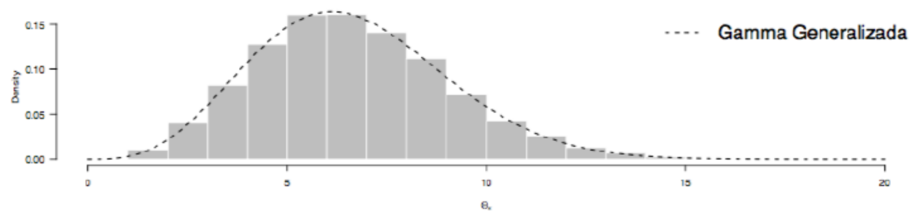
$$\begin{aligned} M_Z^3(t) &= M_Z^{(2)}(t) \cdot \left[\mu \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-1/2} \right] + M_Z^{(1)}(t) \cdot \left[\frac{\mu^3}{\lambda} \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-3/2} \right] \\ &\quad + M_Z^{(1)}(t) \cdot \left[\frac{\mu^3}{\lambda} \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-3/2} \right] + M_Z(t) \cdot \left[\frac{3\mu^5}{\lambda^2} \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{-5/2} \right] \\ M_Z^{(3)}(0) &= \mu^3 + \frac{3\mu^4}{\lambda} + \frac{3\mu^5}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Reemplazando con cuidado nos queda finalmente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left[\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right]^3 \right) &= \frac{\lambda^{3/2}}{\mu^{9/2}} \left[\mu^3 + \frac{3\mu^4}{\lambda} + \frac{3\mu^5}{\lambda^2} - 3\left(\mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda} \right) \mu + 3\mu\mu^3 - \mu^3 \right] \\ &= 3\left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Problema 3

Una distribución de probabilidad que permite mayor grado de libertad en su forma para modelar datos con soporte en R_0^+ es la Gamma - Generalizada(K, ν, β), tal como se muestra en la figura en la que se ajusta dicho modelo a un conjunto de observaciones.




```
    moda     mean   median
6.123724 6.646702 6.471244
```

Este modelo tiene una función de densidad dada por

$$f(x) = \frac{\beta \nu^{\beta k} x^{(\beta k)-1} e^{-(\nu x)^{\beta}}}{\Gamma(k)}, \quad x \geq 0,$$

con $k > 0, \nu > 0$ y $\beta > 0$.

1. Muestre que el m - ésimo momento está dado por la siguiente expresión $\frac{\Gamma\left(\frac{m}{\beta}+k\right)}{\nu^m \Gamma(k)}$.
2. Entregue un valor adecuado para ν si $\beta = 2$ y $k = 2$.

<u>**Solución:**</u>

1. Dado que se nos pide una expresión para el m-ésimo momento, nos conviene proceder por definición

$$\begin{aligned} E(X^m) &= \int_0^{\infty} x^m \cdot \frac{\beta \nu^{(\beta k)}}{\Gamma(k)} x^{(\beta k)-1} e^{-(\nu x)^{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\nu^m \Gamma(k)} \int_0^{\infty} y^{(k+\frac{m}{\beta})-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{\Gamma\left(k + \frac{m}{\beta}\right)}{\nu^m \Gamma(k)} \end{aligned} \tag{1}$$

2. Usamos el primer momento teórico e imponemos que sea igual al primer momento empiríco para usar la información del output de R

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)}{\bar{X}\Gamma(2)} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma}{6,646702 \cdot 1} \\ &= \frac{\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\right)}{6,646702} \\ &= 0,2 \end{aligned} \tag{2}$$