lo
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2019

Curso	**:**	**Probabilidades y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores:	**:**	**Ricardo Aravena - Ricardo Olea**
Ayudantes:	**:**	**Nicolás Bravo, José Casanova, Diego Muñoz, Oscar Ortiz y Vanesa Reinoso**

Problema 1

Sean las variables aleatorias independientes $X \sim Exponencial(1)$ e $Y \sim Gamma(\kappa, 1)$ donde $\kappa > 2$. Además, sea $W = \dfrac{X}{Y}$. Calcule

$$Cov(aY + W, X - bW) \qquad \text{para } a > -\kappa$$

Hint: Puede usar que si $Y \sim Gamma(\kappa, 1)$, entonces:

$$\mathrm{E}\left(Y^{\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\alpha+\kappa)}{\Gamma(\kappa)}, \quad \text{para } \alpha > -\kappa$$

Solución

Tenemos que

$$\mathrm{Cov}(aY + W, X - bW) = a\,\mathrm{Cov}(Y, X) - b\,\mathrm{Cov}(Y, W) + \mathrm{Cov}(W, X) - b\,\mathrm{Cov}(W, W)$$

pero X e Y son independientes, además de que $Cov(W, W) = \mathrm{Var}(W)$, con lo cual

$$\mathrm{Cov}(aY + W, X - bW) = -b\,\mathrm{Cov}(Y, W) + \mathrm{Cov}(W, X) - b\,\mathrm{Var}(W)$$

Donde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y, W) &= \mathrm{E}(YW) - \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}(W) \\
&= \mathrm{E}\left(Y \cdot \frac{X}{Y}\right) - \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \\
&= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}(X)\mathrm{E}\left(Y^{-1}\right), \quad \text{por independencia} \\
&= 1 - \kappa \cdot 1 \cdot \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)} \quad \text{por el hint} \\
&= 1 - \frac{\kappa}{\kappa - 1}
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(W, X) &= \mathrm{E}(WX) - \mathrm{E}(W)\mathrm{E}(X) \\
&= \mathrm{E}\left(\frac{X}{Y} \cdot X\right) - \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\kappa}, \text{ por lo anterior} \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^{-1}\right) - \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}, \text{ por independencia} \\
&= \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)} - \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}, \text{ por el hint} \\
&= \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(W) &= \mathrm{E}\left(W^2\right) - \mathrm{E}^2(W) \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\frac{X}{Y}\right)^2\right] - \left[\frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}\right]^2, \quad \text{por lo anterior} \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^{-2}\right) - \left[\frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}\right]^2, \quad \text{por independencia} \\
&= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(\kappa-2)}{\Gamma(\kappa)} - \left[\frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}\right]^2, \quad \text{por el hint} \\
&= 2\frac{\Gamma(\kappa-2)}{\Gamma(\kappa)} - \left[\frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}\right]^2
\end{aligned}$$

Así, reemplazando se tiene el resultado

$$\operatorname{Cov}(aY+W, X-bW) = -b\left(1-\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) + \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)} - b\left\{2\frac{\Gamma(\kappa-2)}{\Gamma(\kappa)} - \left[\frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(\kappa)}\right]^2\right\}$$

Problema 2

La encuesta nacional de salud 2009-2010 entregó muchos resultados en temas de salud. Por ejemplo, nos informa que los mayores de 15 años tienen un peso medio igual a 72.3 kilos y una mediana igual a 71 kilos, una talla media de 1.657 metros y una mediana 1.630 metros. Supongamos que el peso y la talla se comportan como variables aleatorias independientes con distribución Log-Normal. Si el índice de masa corporal de una persona es igual al peso/talla^2, entregue un valor aproximado del primer orden para la varianza, esperanza y coeficiente de variación del índice del masa corporal de los mayores de 15 años.

Solución: Sean X e Y el eso y la talla respectivamente. Entonces,

$$X \sim \log-\text{Normal}\left(\lambda_X, \zeta_x\right) \quad Y \sim \log-\text{Normal}\left(\lambda_Y, \zeta_Y\right)$$

por lo tanto,

$$\mu_X = 72,3 \quad \lambda_X = \log(71) = 4,2 \quad \mu_Y = 1,657 \quad \lambda_Y = \log(1,63) = 0,48$$

Recordamos que:

$$\begin{aligned}
\zeta^2 &= 2 \cdot (\log(\mu) - \lambda) \\
\sigma^2 &= \mu^2 \cdot \left(e^{\zeta^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\zeta_X = 0,284 \quad \sigma_X = 20,97 \quad \zeta_Y = 0,224 \quad \sigma_Y = 0,83$$

Definimos como Z, la variable del IMC

$$Z = \frac{X}{Y^2} = g(X,Y)$$

De esta forma, su aproximación de primer orden es:

$$Z = g(X,Y) \approx \frac{\mu_X}{\mu_Y^2} + (X-\mu_X) \cdot \frac{1}{\mu_Y^2} + (Y-\mu_Y) \cdot \frac{-2\mu_X}{\mu_Y^2}$$

Luego aplicando el operador esperanza se tien que:

$$E(Z) \approx \frac{\mu_X}{\mu_Y^2} = 26,33$$

Aplicando el operador varianza y tomando en cuenta la independencia:

$$\operatorname{Var}(Z) \approx \frac{\sigma_X^2}{\mu_Y^4} + \frac{\sigma_Y^2 \cdot 4\mu_X^2}{\mu_Y^6} = 118,27$$

Finalmente, tenemos que:

$$\delta_Z = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z} \approx 0,413$$

Problema 3 Para la generación de energía los niveles mínimos y máximos anuales de agua caída, son información relevante para una eficiente planificación. Sean $X_1 \ldots, X_n$ niveles anuales de agua caída para n años, los cuales se comportan como variables aleatorias continuas con idéntica distribución ($f_X y F_X$). Si $Y_1 = mn\{X_1, \ldots, X_n\}, Y_n = mx\{X_1, \ldots, X_n\}$ y supongamos independencia entre los niveles anuales de agua caída, determine:

a) Una expresión en términos de F_X y/o f_X para $\mathbb{P}(Y_1 > u, Y_n \leq v)$.

b) Una expresión en términos de F_X y/o f_X para $F_{Y_1,Y_n}(u,v) = \mathbb{P}(Y_1 \leq u, Y_n \leq v)$ y $f_{Y_1,Y_n}(u,v)$. El resultado obtenido en (a) puede ser de utilidad.

Solución:

a) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 > u, Y_n \leq v) &= \mathbb{P}(u < X_1 \leq v, u < X_2 \leq v, \ldots, u < X_n \leq v) \\
&= \mathbb{P}(u < X_1 \leq v) \cdot \mathbb{P}(u < X_2 \leq v) \cdots \mathbb{P}(u < X_n \leq v) \\
&= \prod_{i=1}^{n} [F_{X_i}(v) - F_{X_i}(u)] \\
&= [F_X(v) - F_X(u)]^n
\end{aligned}$$

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
\{Y_n \leq v\} &= \{Y_n \leq v\} \cap [\{Y_1 \leq u\} \cup \{Y_1 > u\}] \\
&= [\{Y_n \leq v\} \cap \{Y_1 \leq u\}] \cup [\{Y_n \leq v\} \cap \{Y_1 > u\}]
\end{aligned}$$

Entonces, se sigue que:

$$\mathbb{P}(Y_n \leq v) = \mathbb{P}(Y_1 \leq u, Y_n \leq v) + \mathbb{P}(Y_1 > u, Y_n \leq v)$$

Luego,

$$F_{Y_n}(v) = F_{Y_1,Y_n}(u,v) + [F_X(v) - F_X(u)]^n$$

Por lo tanto,

$$[F_X(v)]^n = F_{Y_1,Y_n}(u,v) + [F_X(v) - F_X(u)]^n$$

Entonces,

$$F_{Y_1,Y_n}(u,v) = [F_X(v)]^n - [F_X(v) - F_X(u)]^n$$

Finalmente,

$$f_{Y_1,Y_n}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{Y_1,Y_n}(u,v) = n(n-1)\,[F_X(v) - F_X(u)]^{n-2}\, f_X(v) f_X(u)$$