Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2019

Ayudantía 10

Curso	:	**Probabilidades y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ricardo Aravena y Ricardo Olea**
Ayudantes	:	**Nicolás Bravo, José Casanova, Diego Muñoz, Oscar Ortiz y Vanesa Reinoso**

Problema 1

Suponga que X e Y tienen distribución conjunta Normal Bivariada dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[x^2 - 2xy\rho + y^2\right]\right\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Determine la distribución de $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ y la distribución de X, ¿Para que valores de $\rho \in (-1,1)$, Z y X son independientes?

Solución

Como la distribución conjunta es una Normal Bivariada con parámetros $\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X = \sigma_Y = 1$ y $-1 < \rho < 1$, se tiene que X e Y distribuyen Normal(0,1).

Como

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot Y - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot X$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Z &\sim \text{ Normal}\left(0, \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} - 2\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}\right) \\ &\sim \text{ Normal}(0,1) \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que

$$Y|X = x \sim \text{ Normal } (\rho x, \sqrt{1-\rho^2}) \to Z|X = x \sim \text{Normal}(0,1)$$

Ya que

$$\mu_{Y|X=x} = \mu_Y + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x - \mu_X\right) \quad \text{y} \quad \sigma_{Y|X=x} = \sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$$

Para cualquier valor de $\rho \in (-1,1)$ se tiene que

$$f_{Z|X=x}(z) = f_Z(z) \to X \text{ y } Z \text{ independientes}$$

Problema 2

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución Gamma(α, ν) y Gamma(β, ν). En inferencia estadística, una función muy utilizada para la toma de decisiones en términos de X e Y es $Z = \frac{X/\alpha}{Y/\beta}$. Muestre que la función de densidad de Z es:

$$f_Z(u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \cdot \frac{u^{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u + 1\right)^{\alpha+\beta}}, \quad u > 0$$

Solución

Tenemos que $X \sim Gamma(\alpha, \nu)$ y que $X \sim Gamma(\beta, \nu)$ y que

$$Z = g(X, Y) = \frac{X/\alpha}{Y/\beta} \to X = g^{-1}(Z, Y) = \frac{\alpha Y Z}{\beta}$$

Luego

$$\begin{aligned}
f_Z(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(g^{-1}, y\right) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial u} g^{-1}\right| dy \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\nu^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha y u}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\nu(\alpha y u)/\beta} \cdot \frac{\nu^{\beta}}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\nu y} \cdot \left|\frac{\alpha y}{\beta}\right| dy, \quad \text{por independencia} \\
&= \frac{\nu^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} u^{\alpha-1} \int_0^{\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-\nu\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u+1\right) y} dy \\
&= \frac{\nu^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} u^{\alpha-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\left[\nu\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u + 1\right)\right]^{\alpha+\beta}} \int_0^{\infty} \frac{\left[\nu\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u + 1\right)\right]^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} y^{\alpha+\beta-1} e^{-\nu\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u+1\right) y} dy \\
&= \frac{\nu^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} u^{\alpha-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\left[\nu\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u + 1\right)\right]^{\alpha+\beta}} \cdot 1, \quad \text{por Gamma } \left(\alpha+\beta, \nu\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u + 1\right)\right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \cdot \frac{u^{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot u + 1\right)^{\alpha+\beta}}, \quad u > 0
\end{aligned}$$

Problema 3

En Física y Astronomía la precisión de las mediciones (micro y macro) es crucial. Con el objetivo de calibrar un instrumento se toman varias mediciones con dos instrumentos de referencia, registrando su precisión y variabilidad de tal forma que la estimación de la incerteza es igual a

$$I = \frac{\ln \sqrt{X/Y}}{\ln \sqrt{UV}}$$

Donde X e Y representan la precisión obtenida con cada instrumento, mientras que U y V representan la variabilidad registrada con cada uno. Teniendo en cuenta que X, Y, U y V son variables aleatoria independientes de tipo Log-Normal, con mismo c.o.v, misma media para X e Y y mediana igual a uno para U y V igual a uno, determine la función de densidad de la incerteza.

Solución

Tenemos que las cuatro variables aleatorias son independientes con distribuyen Log-Normal.
Los parámetros de las Log-Normales son:

$$\lambda_X = \lambda_Y; \quad \lambda_U = \lambda_V = 0; \quad \zeta_X = \zeta_Y = \zeta_U = \zeta_V = \zeta$$

Sean

$$T = \ln \sqrt{X/Y} \sim \text{ Normal } \left(\frac{1}{2}\lambda_X - \frac{1}{2}\lambda_Y, \sqrt{\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^2}\right) = \text{ Normal } \left(\frac{\lambda_X - \lambda_Y}{2}, \frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Z = \ln \sqrt{UV} \sim \text{Normal} \left(\frac{1}{2}\lambda_U + \frac{1}{2}\lambda_V, \sqrt{\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^2}\right) = \text{Normal}(0, \zeta/\sqrt{2})$$

Por independencia y tomando $T = g^{-1}(I, Z) = I \cdot Z$:

$$\begin{aligned}
f_I(i) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T\left(g^{-1}\right) \cdot f_Z(z) \left|\frac{\partial}{\partial i} g^{-1}\right| dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right] |z| dz, \quad \text{con}\, \sigma^2 = \zeta^2/2 \\
&= \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} z \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right] dz \\
&= \frac{1}{\pi\left(i^2+1\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2 \exp\left[-\frac{u}{2}\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right] du, \quad \text{con}\, u = z^2 \\
&= \frac{1}{\pi\left(i^2+1\right)} \cdot 1, \quad \text{por área bajo todo su soporte de una Exp} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{\sigma}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\pi\left(i^2+1\right)}, \quad i \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Problema 4

En las celebraciones patrias recién pasadas fue común ver a algunos parroquianos pasados de copas. Uno de esos días a usted le llamó la atención un parroquiano que daba un paso hacia delante (50 cm) o hacia atrás (30 cm) de manera aleatoria cada 30 segundos. Después de un tiempo deobservación se dió cuenta que la frecuencia de pasos hacia adelante y atrás era la misma. Calcule aproximadamente la probabilidad que después de una hora este parroquiano se encuentre a más de 3 metros y medio desde donde usted comenzó a observarlo.

Solución

Definamos como $X_1, ..., X_n$ la distancia hacia adelante o hacia atrás en n pasos. Del encunciado se deduce que:

$$\mathbb{P}(X_i = 50) = \mathbb{P}(X_i = -30) = 1/2, \quad i = 1, \ldots, n$$

Luego, tenemos que:

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = -30 \cdot \tfrac{1}{2} + 50 \cdot \tfrac{1}{2} = 10$$
$$\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X_i) = (-30-10)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + (50-10)^2 \cdot \tfrac{1}{2} = 40^2$$

Se pide una probabilidad aproximada del siguiente evento:

$$\{S_n < -350\} \cup \{S_n > 350\}$$

con $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $n = 120$. Por el teorema de límite central tenemos que:

$$S_n \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}\,(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{S_n < -350\} \cup \{S_n > 350\}) &= \mathbb{P}(S_n < -350) + \mathbb{P}(S_n > 350) \\
&\approx \Phi\left(\frac{-350 - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(\frac{350 - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right] \\
&\approx \Phi(-3,537375) + [1 - \Phi(-1,939851)] \\
&\approx [1 - \Phi(3,537375)] + 1 - [1 - \Phi(1,939851)] \\
&\approx 1 - \Phi(3,54) + \Phi(1,94) \\
&\approx 1 - 0,9998 + 0,9738 \\
&\approx 0,974
\end{aligned}$$