Herramientas útiles de cálculo

EYP1113

I. Límites: Métodos de resolución.

1. Factorizar
2. Racionalizar
3. Cuando $x \to \infty$: Mayor exponente $\to$ Se desprecian potencias de x, excepto la más alta

* El límite indica una asíntota horizontal

Ej: $\lim_{x\to\infty} \frac{\boxed{x^3} + x + 5}{\boxed{5x^3} + x^2 + 3x} = \frac{1}{5}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cancel{1}}{\sqrt{x^2+\cancel{1}}+2x} \sim \frac{x}{x+2x} = \frac{1}{3}$

4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$
5. L'hopital: Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

* transformar límites indeterminados tipo $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ transformar la función a algún formato que permita usar L'hopital.

II. Derivadas

$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

$\frac{d}{dx} f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\to$ utilizar para derivar exponenciales:

$y = x^{\cos(x)}$

$\frac{d}{dx} \ln x^{\cos(x)} = \frac{\frac{d}{dx} x^{\cos(x)}}{x^{\cos(x)}}$

$\to$ Despejar $\frac{d}{dx} x^{\cos(x)}$

$\frac{d}{dx} c^{ax} = c^{ax} \cdot \ln c \cdot a$

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$\to$ para derivadas más complejas, derivar implícitamente y despejar:

$\frac{d}{dx} \log_a x \to a^y = x \;/\; d/dy$

$a^y \ln(a)\, y' = 1$

$y' = \frac{1}{a^y \ln(a)} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

III. Integrales

$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$

$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$

$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsec}(x)$

$\int \tan(x)\, dx = \ln|\sec x|$

sustitución.

$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$ y $\mu = g(x)$, $d\mu = g'(x)\,dx$

$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(\mu)\, d\mu$

Integración por partes.

- A arco
- L log, ln
- P polinomios
- E exponenciales, a^x, e^x
- S seno, coseno, tan

sustituciones inmediatas.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)|$

$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$

$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)}$

IV. Integrales múltiples

1. Teorema de Fubini:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$ donde $R: a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$

2. $$\iint_R g(x)\cdot h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

3. Si $R: a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$ integrar $f(x,y)$ primero sobre y, y después sobre x. Si x es función de y, empezar con x.

   * integrar primero sobre funciones y después sobre números.

4. Puede separarse el área de integración y sumar los 2 resultados.

5. CAMBIO DE COORDENADAS

- Se le llama 'cambio' cuando el problema se expresa / define inicial y naturalmente en términos cartesianos x, y, z y se quiere integrar respecto a otros ejes, por ejemplo polares.

- Al hacerse el cambio, se debe agregar el jacobiano:
  - Transformación: $T(\mu, v) = (x, y)$; $x = g(\mu, v)$, $y = h(\mu, v)$
  - Jacobiano de la transformación: $$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = x_\mu \cdot y_v - x_v y_\mu$$

• Los límites de integración también cambian con la transformación, de manera que expresen un área equivalente en términos de las nuevas variables.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f[x(\mu,v),\, y(\mu,v)] \cdot J \cdot d\mu\, dv$$

CAMBIOS DE COORDENADAS USUALES

- Coordenadas polares: $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $J = r\,dr\,d\theta$

- coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, $J = r\,dr\,d\theta\,dz$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{\mu_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{\mu_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

- coordenadas esféricas: $x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$, $z = \rho\cos\phi$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $J = \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

* Si una integral se plantea desde cero en (por ejemplo) coordenadas polares, no es necesario usar jacobiano.

V. Propiedades de las sumatorias

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=p}^{q} k = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1)c$$

$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k \quad : c \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k-1) = \sum_{k=m-1}^{n-1} f(k)$$

VI. Propiedades de las combinaciones

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$