

EYP1113 - PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTOS DE LOS MODELOS DE
PROBABILIDAD

RICARDO ARAVENA C.

RICARDO OLEA O.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

SEGUNDO SEMESTRE 2019

EVENTOS Y PROBABILIDAD

- La inquietud por querer entender o interpretar un cierto **fenómeno** está siempre presente.
- Los fenómenos pueden ser determinísticos o aleatorios
- Los fenómenos **aleatorios** son el objeto de la Estadística, que una vez realizado el fenómeno se obtienen las **observaciones**, pero antes de su realización conlleva un nivel de **incertidumbre**
- Para reducir el nivel de incertidumbre, se puede establecer todos los posibles resultados en el que se puede presentar el fenómeno, llamados **eventos** o sucesos aleatorios
- Una medida para cuantificar el grado de incertidumbre es la **probabilidad**, la cual asigna un valor numérico a cada evento como un indicador de las posibilidades que tiene de acontecer

Para todo fenómeno (o experimento) se define un conjunto específico de resultados llamado

“Espacio de Resultados Posibles”

Un evento de interés esta compuesto por uno o más resultados de este espacio.

La probabilidad de un evento es una medida numérica de la ocurrencia de éste, con respecto a los otros resultados posibles

El cálculo de probabilidad de un evento, esta basado en la asignación de medidas de probabilidad de todos los resultados posibles.

La asignación puede estar basado en condiciones dadas, en evidencia empírica o en juicios subjetivos.

Probabilidad Clásica

La probabilidad clásica es la proporción de veces que ocurrirá un suceso, suponiendo que todos los resultados contenidos en el espacio de resultados posibles tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Probabilidad Frecuentista

La probabilidad de un suceso A se aproxima por el límite de la frecuencia relativa de ocurrencias de un suceso A a partir de un gran número de pruebas n .

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

donde n_A es el número de veces que se obtiene el suceso A y n el número total de pruebas.

Probabilidad Subjetiva

La probabilidad subjetiva expresa el grado en que una persona cree que ocurrirá un suceso. Estas probabilidades subjetivas se utilizan en algunos procedimientos empresariales de toma de decisiones.

ELEMENTOS DE TEORÍA DE CON- JUNTOS

ELEMENTOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

Consideremos un fenómeno aleatorio

- **Espacio muestral:** Conjunto de todos los resultados posibles.
- **Punto muestral:** Un resultado particular.
- **Evento:** Subconjunto de resultados posibles.

El espacio muestral puede ser discreto o continuo. El caso discreto corresponde a un espacio muestral compuesto por un conjunto contable (numerable) de puntos muestrales, mientras que el caso continuo corresponde a un espacio muestral compuesto de un continuo de puntos muestrales.

Evento Imposible: Denotado por ϕ es un evento sin puntos muestrales.

Evento Certeza: Denotado por S u Ω , es un evento que contiene a todos los puntos muestrales.

Evento Complemento: Denotado por \overline{E} , contiene todos los puntos muestrales de S que no están contenidos en un evento E .

Unión de Eventos: Para dos eventos E_1 y E_2 , su unión forma un nuevo evento que contiene los puntos muestrales de E_1 y los contenidos en E_2 que no se encuentran en E_1 .

Intersección de Eventos: Para dos eventos E_1 y E_2 , su intersección forma un nuevo evento que contiene los puntos muestrales contenidos en E_1 y en E_2 a la vez.

Eventos Mutuamente Excluyentes (Disjuntos): Son eventos que no tienen puntos muestrales en común, es decir, su intersección es vacía.

Eventos Colectivamente Exhaustivos: Son eventos que unidos conforman el espacio muestral.

Hemos visto que dos o más conjuntos (eventos) pueden combinarse solamente de dos maneras: Unión o Intersección. Estas dos operaciones, más el proceso de complemento de un evento constituyen las operaciones básicas que involucran a eventos.

La notación que adoptaremos para designar conjuntos y sus operaciones básicas son las siguientes:

\cup : Unión.

\cap : Intersección.

\bar{E} : Complemento de E .

ELEMENTOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

Las reglas matemáticas que rigen sobre las operaciones de conjuntos son las siguientes:

- **Igualdad de Conjuntos:** Dos conjuntos son iguales si y sólo si ambos conjuntos contienen exactamente los mismos puntos muestrales. Un caso básico es el siguiente

$$A \cup \phi = A$$

donde ϕ representa un conjunto vacío.

También se tiene que

$$A \cap \phi = \phi$$

Por lo tanto

$$A \cup A = A \quad \text{y} \quad A \cap A = A$$

Con respecto al espacio muestral S

$$A \cup S = S \quad \text{y} \quad A \cap S = A$$

- **Conjunto complemento:** Con respecto a un evento E y su complemento \bar{E} , se observa que

$$E \cup \bar{E} = S \quad \text{y} \quad E \cap \bar{E} = \phi$$

Finalmente

$$\overline{\bar{E}} = E$$

- **Ley Conmutativa:** La unión e intersección de conjuntos son conmutativas, es decir, para dos conjuntos A y B se cumple que

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Ley Asociativa:** La unión e intersección de conjuntos es asociativa, es decir, para tres conjuntos A , B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Ley Distributiva:** La unión e intersección de conjuntos es distributiva, es decir, para tres conjuntos A , B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- **Ley de De Morgan:** Esta ley relaciona conjuntos y sus complementos.

Para dos conjuntos (eventos), E_1 y E_2 , la ley de De Morgan dice que

$$\overline{(E_1 \cup E_2)} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \quad \text{y} \quad \overline{(E_1 \cap E_2)} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$$

Generalizando

$$\overline{(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \dots \cap \overline{E_n}$$

y

$$\overline{(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n)} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \dots \cup \overline{E_n}$$

MATEMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

Hasta el momento hemos supuesto que una medida no negativo, llamada probabilidad, está asociado a cada evento en particular del espacio muestral.

Implícitamente, hemos asumido que dicha medida de probabilidad poseen ciertas propiedades y sigue ciertas normas de operación.

Formalmente estas propiedades y reglas son desarrolladas en la teoría matemática de probabilidad, la cual tiene como base de ciertos supuestos (axiomas) que no están sujetos a demostración.

Los axiomas son los siguientes:

- **Axioma 1:** Para cada evento E contenido en un espacio muestral S se tiene que

$$P(E) \geq 0$$

- **Axioma 2:** La probabilidad del evento certeza S es

$$P(S) = 1$$

- **Axioma 3:** Para dos eventos E_1 y E_2 mutuamente excluyentes (disjuntos),

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Sea un evento E y su complemento \overline{E} . Por ser eventos disjuntos se tiene que

$$P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

Además como $(E \cup \overline{E}) = S$, se tiene que

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Por otra parte

$$P(E \cap \overline{E}) = P(\phi) = 0$$

Finalmente para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 la ley aditiva dice que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \quad (1)$$

MATEMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

La ecuación (1) aplicada a la unión de tres eventos E_1 , E_2 y E_3 es la siguiente:

$$\begin{aligned}P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P[(E_1 \cup E_2) \cup E_3] \\&= P(E_1 \cup E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cup E_2) \cap E_3] \\&= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)] \\&= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\&\quad + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)\end{aligned}$$

Para n eventos cualquiera, por De Morgan se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) &= 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n}) \\&= 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \cap \overline{E_n})\end{aligned}$$

En el caso de E_1, \dots, E_n sean eventos mutuamente excluyentes

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Cuando los espacios muestrales son finitos, basta con asignar probabilidades a cada uno de los resultados posibles para luego obtener la probabilidad de un suceso simplemente sumando las probabilidades de ocurrencia de cada resultado básico que lo componen.

$$S = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$$

con $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, \dots, N$.

Para el caso de Probabilidad Clásica se tiene que para un suceso A :

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales n_1, \dots, n_k , entonces

$$\# S = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \dots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

■ Muestreo Con Reemplazo: n^r .

■ Muestreo Sin Reemplazo:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1).$$

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos “números” se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños n_1, \dots, n_k , con $\sum_{i=1}^k n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \dots \times n_k!}$$

Estos “números” se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \dots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\dots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \dots \times n_k!} x_1^{n_1} \times \dots \times x_k^{n_k}$$

Probabilidad Condicional

Cuando la ocurrencia de un evento (o no ocurrencia) depende de otro evento, es relevante ver la probabilidad como una probabilidad condicional.

Se define la probabilidad que un evento E_1 ocurra bajo el supuesto que otro evento E_2 ocurre con certeza a

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad (2)$$

En general, la probabilidad de un evento E ya está condicionada se condiciona a la ocurrencia del evento certeza S :

$$P(E | S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = P(E)$$

Consideremos las probabilidades de un evento E_1 y su complemento \bar{E}_1 condicionados a la ocurrencia previa de un evento E_2 .

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad \text{y} \quad P(\bar{E}_1 | E_2) = \frac{P(\bar{E}_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Si las sumamos tenemos que

$$P(\bar{E}_1 | E_2) = 1 - P(E_1 | E_2)$$

Independencia estadística

Dos eventos E_1 y E_2 se dice que son estadísticamente independientes si la ocurrencia de un evento no depende de la ocurrencia o no ocurrencia del otro.

Es decir,

$$P(E_1 | E_2) = P(E_1) \quad \text{ó} \quad P(E_2 | E_1) = P(E_2)$$

A partir de la ecuación (2) se deduce que si E_1 y E_2 con eventos posibles entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2)$$

ó

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

Si E_1 y E_2 fuesen eventos estadísticamente independientes entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Ley Multiplicativa

Para tres eventos E_1 , E_2 y E_3 la ley multiplicativa implica por ejemplo que

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \begin{cases} P(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1) \\ P(E_1 \cap E_2 | E_3) \cdot P(E_3) \end{cases}$$

Independencia

Consideremos ahora los eventos E_1, E_2, \dots, E_n . Estos eventos se dicen mutuamente independientes si y solo si, cualquier subcolección de eventos de ellos $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_m}$ cumple con la siguiente condición (**Rice, pág 22**)

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_m}) = P(E_{i_1}) \times P(E_{i_2}) \times \dots \times P(E_{i_m})$$

Ilustración

Considere el lanzamiento de una moneda honesta dos veces y defina los siguientes eventos:

A : Obtener cara en el primer lanzamiento

B : Obtener cara en el segundo lanzamiento

C : Obtener solamente una cara.

Muestre que los eventos A , B y C son independientes a pares, pero no mutuamente independientes.

Propiedades

- Si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes, entonces \overline{E}_1 y \overline{E}_2 también lo son.
- Si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes dado un evento A , entonces

$$P(E_1 \cap E_2 | A) = P(E_1 | A) \cdot P(E_2 | A)$$

- Si que para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 se tiene que

$$P(E_1 \cup E_2 | A) = P(E_1 | A) + P(E_2 | A) - P(E_1 \cap E_2 | A)$$

Teorema de Probabilidades Totales

Considere n eventos posibles E_1, E_2, \dots, E_n colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir,

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = S \quad \text{y} \quad E_i \cap E_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

Entonces

$$A = A \cap S = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^n E_i \right] = \bigcup_{i=1}^n (A \cap E_i),$$

con $(A \cap E_1), \dots, (A \cap E_n)$ eventos mutuamente excluyentes.

Por lo tanto, por axioma 3 y ley multiplicativa

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(A | E_i) \cdot P(E_i)$$

Teorema de Bayes

Si cada evento E_j de la partición de S y el evento A son posibles, entonces por la ley multiplicativa se tiene que

$$P(A | E_j) \cdot P(E_j) = P(E_j | A) \cdot P(A)$$

Es decir,

$$P(E_j | A) = \frac{P(A | E_j) \cdot P(E_j)}{P(A)}$$

Aplicando el teorema de probabilidades totales se tiene que

$$P(E_j | A) = \frac{P(A | E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | E_i) \cdot P(E_i)}$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Bayes.