Interrogación 3

FIS1513 Estática y Dinámica

Profesores: G. García, R. González, P. Ochoa, R. Soto

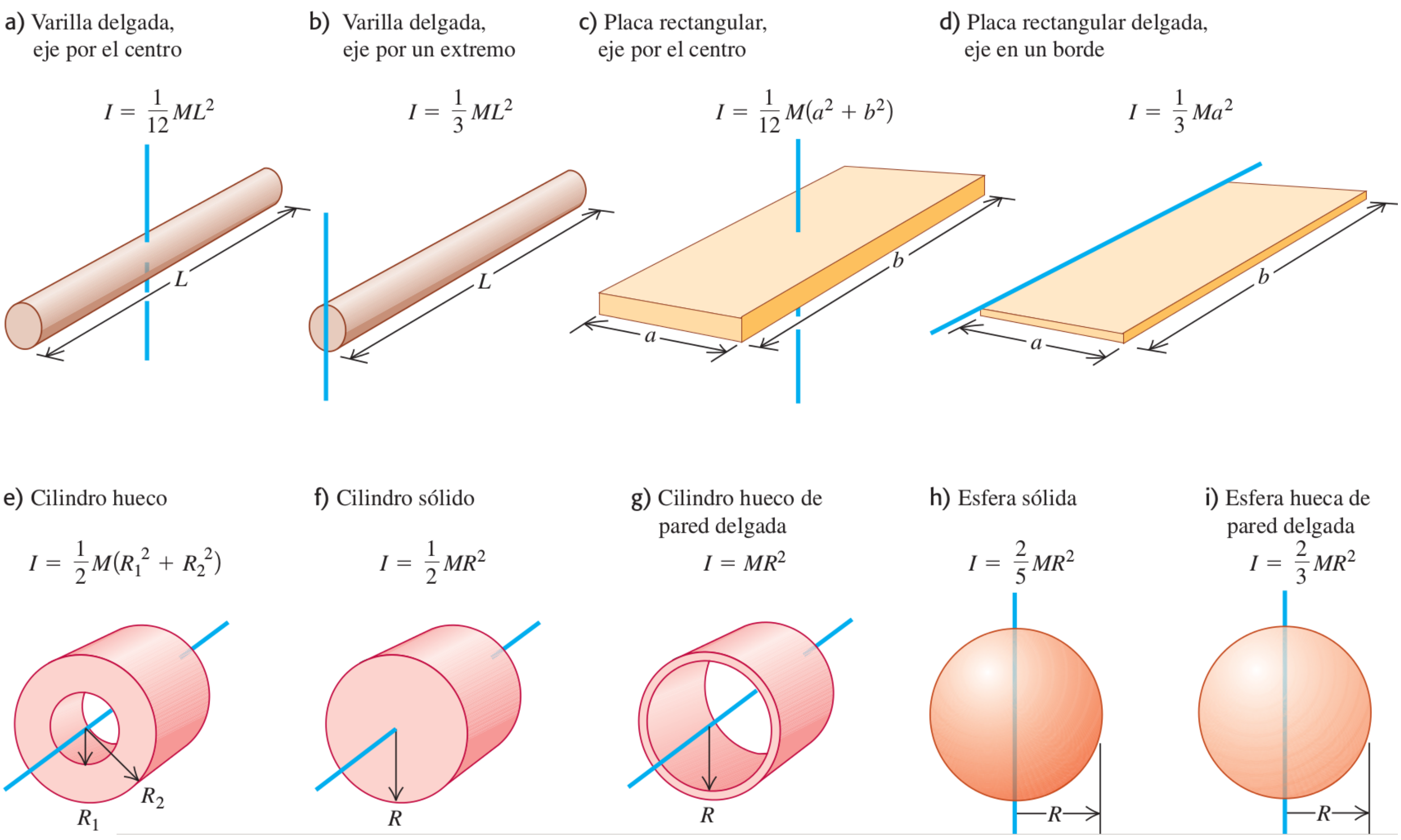
15.06.2016, Duración: **120 minutos**

Forma A

¡No usar ningún aparato electrónico ni apuntes!

Cuando sea necesario utilizar $g = 10\ m/s^2$.

Para los momentos de inercia considere la siguiente tabla:



1. Una esfera hueca se suelta desde el reposo a una altura H_0 y rueda bajo una colina hacia una superficie horizontal y luego sube nuevamente en el lado opuesto donde hay una colina suave. La parte rugosa hace que la esfera ruede sin deslizar y la parte suave no tiene fricción. ¿Cuál es la altura máxima h que alcanza la esfera hueca en la colina suave en términos de H_0?

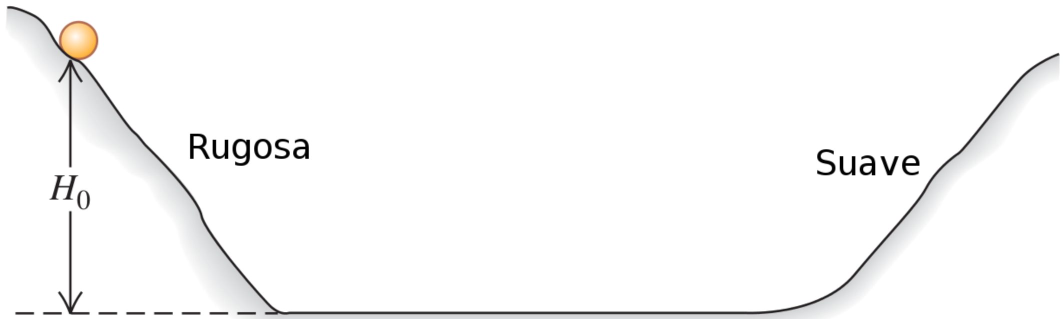
   (a) $h = \frac{3}{5}H_0$

   (b) $h = H_0$

   (c) $h = \frac{1}{2}H_0$

   (d) $h = \frac{1}{5}H_0$

   (e) $h = \frac{2}{3}H_0$



En la parte rugosa la esfera puede rodar sin deslizar, sin embargo en la parte suave esta sigue rotando con la misma velocidad angular que entra en la parte suave (ya que no hay fuerza de roce que genere torque y produzca aceleración angular, la velocidad angular es constante). Haciendo balance de energías entre el inicio del movimiento y la parte horizontal del trayecto tenemos que:

$$mgH_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}mr^2\omega^2 = \frac{5}{6}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{6}{5}gH_0}$$

donde usamos la condición de trasladarse sin deslizar $v = \omega r$. Debido que en la parte suave esta sigue rotando con la misma velocidad angular que entra en la parte suave, no hay cambio en la energía cinética de rotación. Haciendo balance de energía tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + K_{rot} = mgh + K_{rot} \implies \frac{5}{3}mgH_0 = mgh \implies h = \frac{3}{5}H_0$$

La alternativa correcta es la (a).

2. Determine para cada elemento (barra) de la estructura mostrada en la figura si estos están en compresión (C) o tensión (T).

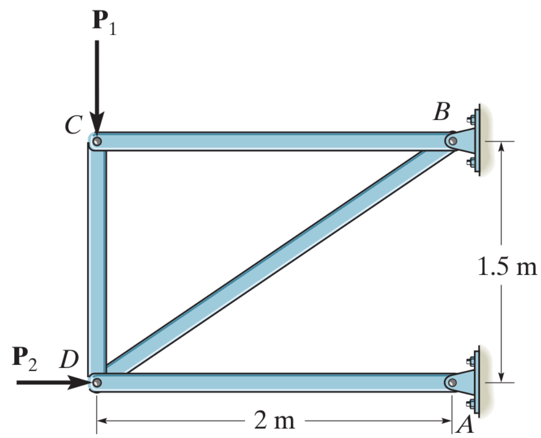
(a) $F_{BC}:(C)$, $F_{CD}:(T)$, $F_{AD}:(C)$, $F_{BD}:(C)$

(b) $F_{BC}=0$, $F_{CD}:(C)$, $F_{AD}:(C)$, $F_{BD}:(T)$

(c) $F_{BC}:(T)$, $F_{CD}:(C)$, $F_{AD}:(C)$, $F_{BD}:(T)$

(d) $F_{BC}=0$, $F_{CD}:(T)$, $F_{AD}:(T)$, $F_{BD}:(C)$

(e) $F_{BC}=0$, $F_{CD}:(C)$, $F_{AD}:(T)$, $F_{BD}:(C)$



Lo primero que podemos notar es que la barra BC tiene carga cero. Mirando la unión C la fuerza F_{CD} tiene que ser en compresión. Mirando ahora la unión D y haciendo balance en la dirección vertical, la barra BD tiene que estar en tensión. Mirando ahora las componente horizontales en la unión D, la barra AD debe estar en compresión. La alternativa correcta es la (b)

3. La armadura de la figura soporta una carga P desde el nodo B y esta en equilibrio estático. ¿Qué aseveración es correcta respecto a las fuerzas que perciben sus miembros?

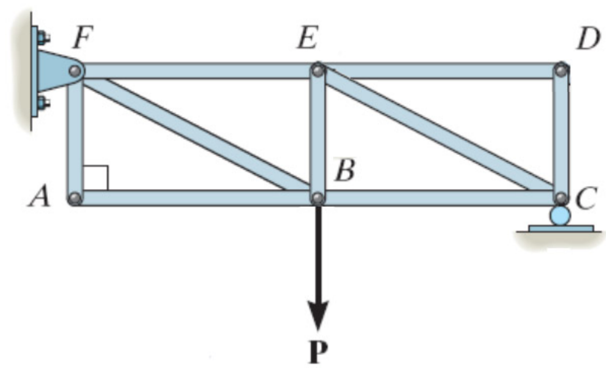
   (a) 2 son de Compresión y 3 de Tracción.

   (b) 4 son de Compresión y 5 de Tracción.

   (c) 4 son de Compresión y 3 de Tracción.

   (d) 3 son de Compresión y 2 de Tracción.

   (e) 2 son de Compresión y 2 de Tracción.



Respuesta a)

Una secuencia de analisis posible es:

- Por simple inspecciion los miembros AF AB ED y DC son de fuerza cero.
- Si comenzamos pos el punto C, sabemos que hay una reaccion del suelo que apunta hacia arriba, por lo tanto necesariamete la componente vertical de EC debe apuntar hacia C, por lo cual es un miembro de compresion.
- Si EC apunta hacia C, necesariamiente BC sale desde C para que exista un balance posible en el eje X. Entonces EC es de traccion.
- Vamos al punto B, si BC sale de B, entonce la componente en el eje x de BF tambien sale de B. BF tambien es de traccion.

- En el punto E, si EC apunta hacia E, entonces FE tambien apunta hacia E para blancear fuerza en el eje x, y tambien es de compresion
- En el punto E, si EC apunta hacia E, entonces EB sale de E para balancear fuerza en el eje x, por lo que EB es de traccion.
- Finalmente ya que existe una reaccion vertical en F, necesariamente FB debe salir de F para compensar fuerzas en el eje y. Por lo que es de traccion.

Finalmente tenemos 2 miembros de compresion y 3 de traccion.

4. Calcule la reacción vertical A_y en el apoyo A. Considere la dirección positiva hacia arriba.

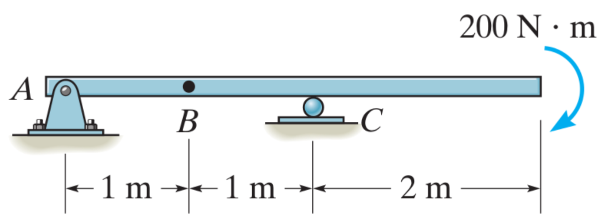
   (a) $A_y = 200$ N

   (b) $A_y = -200$ N

   (c) $A_y = 100$ N

   (d) $A_y = -100$ N

   (e) $A_y = 0$ N



Haciendo balance de momento respecto al punto C (positivo anti-horario)tenemos que:

$$\curvearrowleft \sum M_C = -A_y \cdot 1\text{m} - 200\ \text{N} \cdot \text{m} \implies A_y = -100\ \text{N}$$

La repuesta correcta es la (d)

5. Las reacciones verticales de los soportes en los puntos A y B son:

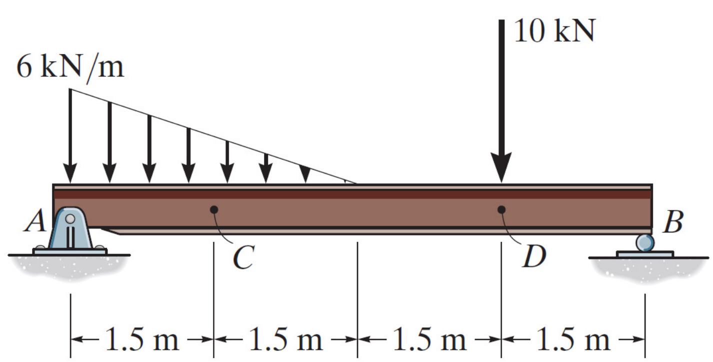
   (a) $A_y = 9$ kN ; $B_y = 10$ kN

   (b) $A_y = 10$ kN ; $B_y = 9$ kN

   (c) $A_y = 9.75$ kN ; $B_y = 9.25$ kN

   (d) $A_y = 9.25$ kN ; $B_y = 9.75$ kN

   (e) $A_y = 6$ kN ; $B_y = 10$ kN



Respuesta b)

La fuerza distribuida de la izquierda se puede reemplazar por una fuerza resultante de 9kN aplicada a una distancia de 1m desde el punto A.

Nos queda entonces la suma de fuerzas en eje y:

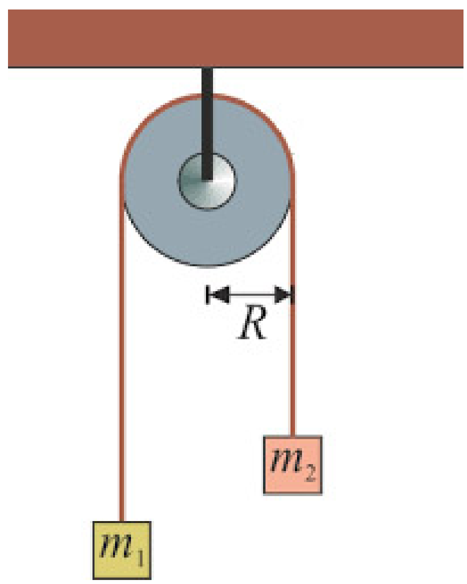
$$A_y + B_y - 10 - 9 = 0 \tag{1}$$

Ahora calculamos el torque respecto al punto A que debe ser cero,

$$\tau_A = 0 = -9 \times 1 - 10 \times 4.5 + B_y \times 6 \tag{2}$$

Entonces $B_y = 9$kN y de la suma de fuerzas en eje y, entonces $A_y = 10$kN.

6. En la maquina de Atwood de la figura, la polea es un disco solido de radio R. También la masa m_1 es el doble de m_2. Si al dejar libre el sistema, la masa m_1 cae con una aceleración de $g/5$, en donde g es la aceleración de gravedad. ¿Cuánto vale el momento de inercia del disco en términos de las masas m_1,m_2, y R?



(a) $I = 2m_1R^2$

(b) $I = 5m_2R^2$

(c) $I = 5m_1R^2$

(d) $I = m_2R^2$

(e) $I = 2m_2R^2$

Respuesta e)

De la maquina de atwood con una polea solida tenemos:

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}} \tag{3}$$

si reemplazamos $a_1 = \frac{1}{5}g$ y $m_1 = 2m_2$ nos queda,

$$\frac{g}{5} = \frac{(2m_2 - m_1)g}{(2m_2 + m_1) + \frac{I}{R^2}} = \frac{m_2 g}{3m_2 + \frac{I}{R^2}} \tag{4}$$

despejamos el momento de inercia y nos queda $I = 2m_2R^2$

7. Una esfera de radio R y masa M con centro de masa en su centro pero de densidad no uniforme por lo cual su momento de inercia es desconocido, avanza por un plano horizontal sin resbalar a velocidad constante. Si un 25% de su energía cinética es rotacional, ¿cuál es su momento de inercia?

   (a) $I = \frac{MR^2}{2}$

   (b) $I = \frac{MR^2}{3}$

   (c) $I = \frac{MR^2}{4}$

   (d) $I = \frac{MR^2}{\sqrt{2}}$

   (e) No es posible calcularlo

   Respuesta b)

   Tenemos que un cuarto de la energia cinetica es rotacional asi que podemos escribir:

$$\frac{1}{4} = \frac{K_{ROT}}{K_{TOTAL}} = \frac{\frac{1}{2}Iw^2}{\frac{1}{2}Iw^2 + \frac{1}{2}MV^2} \tag{5}$$

   Ya que rueda sin resbalar $w = \frac{V}{R}$ asi que nos queda,

$$\frac{1}{4} = \frac{I(V/R)^2}{I(V/R)^2 + MV^2} \tag{6}$$

   Despejando el momento de inercia resulta en $I = \frac{MR^2}{3}$

8. Una barra uniforme de masa M y largo L esta apoyada en una pared, la pared tiene coeficiente de roce estático μ_2 y el suelo coeficiente de roce estático μ_1. Se sabe que $\alpha = \pi/4$ ($\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$) y que $\mu_1 = 2/5$. ¿Cuánto es el valor mínimo de μ_2 para que la barra no resbale?.

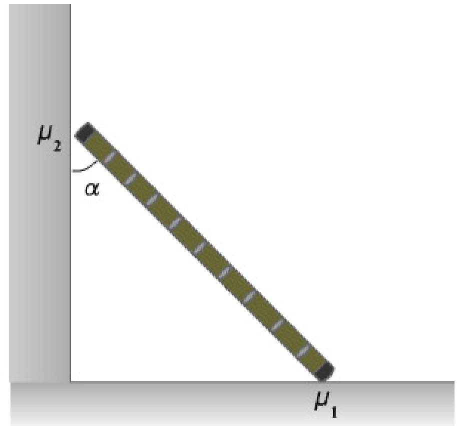
   (a) $\mu_2 = 0$

   (b) $\mu_2 = 1$

   (c) $\mu_2 = 1/3$

   (d) $\mu_2 = 1/2$

   (e) $\mu_2 = 1/5$



Respuesta d)

Definamos el punto 1 el contacto de la barra con el suelo y el punto 2 el contacto de la barra con la pared. N_1 es la normal en el punto 1 producido por la reaccion del suelo, y N_2 la normal en el punto 2 producido por la reaccion de la pared. Veamos el caso limite en que la fuerza de roce es maxima. Sea F_1 la fuerza de roce producida en el suelo, y F_2 la fuerza de roce producida en la pared. Dichas fuerzas son maximas cuando $F_1 = \mu_1 N_1$ y $F_2 \mu_2 N_2$. Hacemos balance de fuerzas:

$$\sum F_x = 0 = N_1 - F_2 = N_1 - \mu_2 N_2 \tag{7}$$

$$\sum F_y = 0 = F_1 + N_2 - mg = \mu_1 N_1 + N_2 - mg \tag{8}$$

$$\sum \tau_O = 0 = N_2 L sen\alpha - mg\frac{L}{2} sen\alpha - N_1 L cos\alpha \tag{9}$$

reemplazamos $\mu_1 = 2/5$ y $\alpha = \pi/4$ lo cual simplifica bastante el sistema de ecuaciones 3 ecuaciones con 3 incongnias N_1, N_2 y μ_2, resolvemos y nos queda $\mu_2 = \frac{1}{2}$

9. La armadura mostrada en la figura forma un puente sometido a las cargas mostradas. La notación "4@4m" significa que cada barra horizontal tiene una longitud de 4 m. El soporte en E permite el desplazamiento horizontal sin roce. Determine el valor de la fuerza en la barra CD, y si es de tensión o compresión:

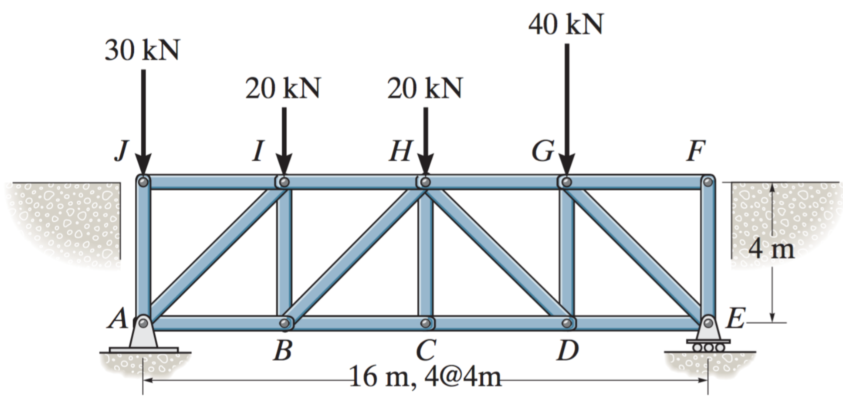
   (a) 20 kN, compresión

   (b) 30 kN, tensión

   (c) 50 kN, tensión

   (d) 70 kN, compresión

   (e) 100 kN, tensión

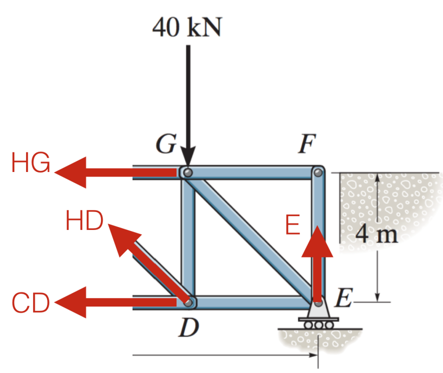


Necesitamos primero obtener la fuerza en el soporte E, que tiene que ser normal hacia arriba. Haciendo suma de momentos respecto a A nos queda:

$$\Sigma M_A = -20(4) - 20(8) - 40(12) + E(16) = 0$$

$$\longrightarrow E = 45 \text{ kN}$$

Tomamos la sección GFED y asumimos las fuerzas que no conocemos como de tensión:



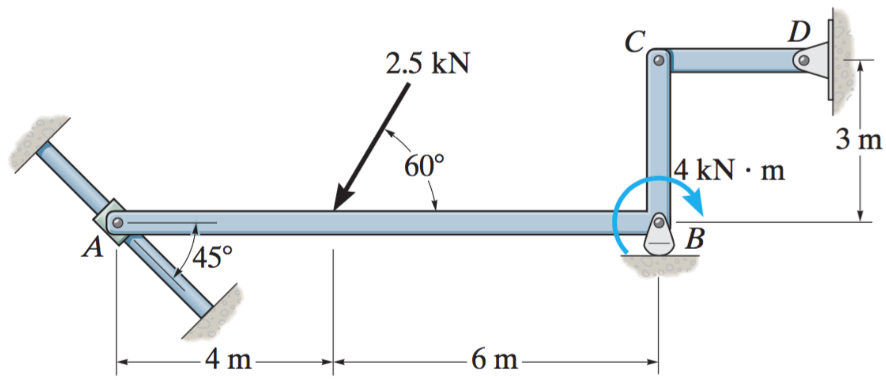
Haciendo la suma de torques (momentos) respecto a H podemos calcular CD:

$$\Sigma M_H = 45(8) - 40(4) - CD(4) = 0$$

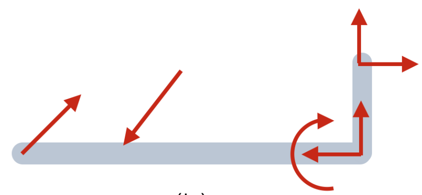
$$\longrightarrow CD = 50 \text{ kN}$$

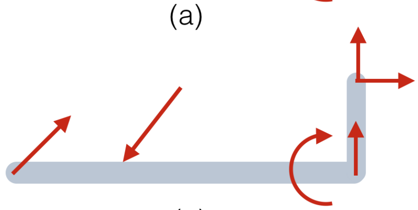
El resultado es positivo por lo que esta fuerza es de tensión como se asumió en un principio.

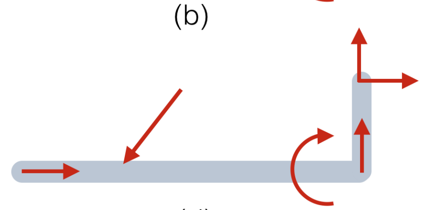
10. Considere el sistema de la figura siguiente, y determine cuál es el diagrama de cuerpo libre correcto para la barra ABC en forma de "L" en el instante mostrado. Note que el collar desliza por una superficie lisa.

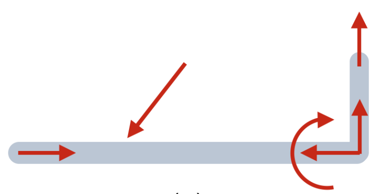



(a)


(b)


(c)


(d)


(e)

La fuerza que hace el collar tiene que ser perpendicular a la barra sobre la cual se desliza, ya que no hay roce. Aparte, la fuerza que hace el soporte en B sólo puede ser vertical hacia arriba. Por último, la fuerza que hace la barra CD es horizontal, ya que en ese instante no impide el movimiento hacia arriba o hacia abajo. La solución correcta es (a).

11. Se tiene un tambor de radio r y masa despreciable que rota sin roce. El tambor está conectado a cuatro esferas de masa m cada una. La distancia entre el centro del tambor y cada esfera es R. Una caja está unida a una cuerda delgada y ligera que se enrolla en el borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la cuerda se desenrolla sin deslizarse y la caja adquiere una rapidez V después de caer una distancia d. Si la distancia entre cada esfera y el tambor se acorta a $R/2$, la rapidez de la caja después de caer una distancia d:

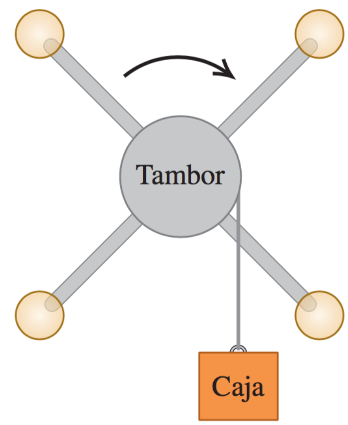
(a) es mayor que V, pero no necesariamente igual a $2V$

(b) es mayor que V e igual a $2V$

(c) es menor que V, pero no necesariamente igual que $V/2$

(d) es menor que V, e igual a $V/2$

(e) es igual a V



Como no hay roce, la suma de energía potencial y cinética se conserva. Sea M la masa de la caja. Tenemos que:

$$\begin{aligned} K_1 + U_1 &= K_2 + U_2 \\ 0 + Mgd &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 \end{aligned}$$

Puesto que la cuerda no desliza, $\omega = \frac{V}{r}$, y de la ecuación de conservación de energía obtenemos que $V = \sqrt{\frac{2Mgd}{M+I/r^2}}$. El momento de inercia inicial es $I_1 = 4mR^2$, y el final es $I_2 = 4m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = mR^2 = I_1/4$. Vemos entonces que al acercar las esferas al centro del tambor el momento de inercia disminuye, haciendo que la velocidad final de la caja suba. Sin embargo, el resultado no necesariamente es igual a $2V$.

12. Un ave de 0.5 kg vuela horizontal y distraídamente a una velocidad de 8.0 m/s, cuando se impacta con una barra vertical originalmente estacionaria, golpeándola a 25.0 cm debajo de la parte superior como se muestra en la figura. La barra es uniforme con longitud 1.0 m y masa de 1.50 kg, y tiene una bisagra en la base sin roce. El choque aturde al ave, que pierde toda su velocidad horizontal al impactar la barra y cae verticalmente al suelo (después se recupera para continuar volando felizmente). La velocidad angular de la barra ω_1 justo después del choque es:

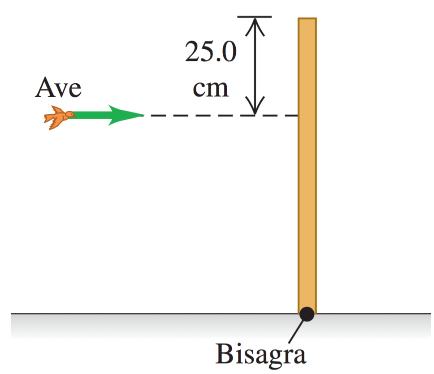
(a) $\omega_1 = 0.9$ rad/s,

(b) $\omega_1 = 3.2$ rad/s,

(c) $\omega_1 = 6.0$ rad/s,

(d) $\omega_1 = 9.4$ rad/s,

(e) $\omega_1 = 11.0$ rad/s



Si consideramos el sistema ave + barra, no hay torques externos y el momento angular se debe conservar. En el estado inicial solamente el ave tiene momento angular ya que la barra está estacionaria, y $L_1 = m_a v_a d =$

$0.5(8.0)(1-0.25) = 3\ \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}$. En el estado final el ave no tiene momento angular y sólo la barra, por lo que $L_2 = I_b\omega_1$. El momento de inercia de una barra de masa M y largo L está dado por $I = \frac{1}{3}ML^2$, por lo que $I = \frac{1}{3}(1.5)(1)^2 = 0.5$ kgm^2. Nos queda:

$$L_1 = L_2$$

$$3 = 0.5\omega$$

de donde $\omega = 6.0$ rad/s.

13. Se tiene una viga de masa despreciable, sometida a la fuerza distribuida mostrada en la figura y también a un par de fuerzas externo M. Si M se incrementa poco a poco desde cero, ¿a qué valor M_0 el contacto en el punto B cambia de la superficie inferior a la superior?

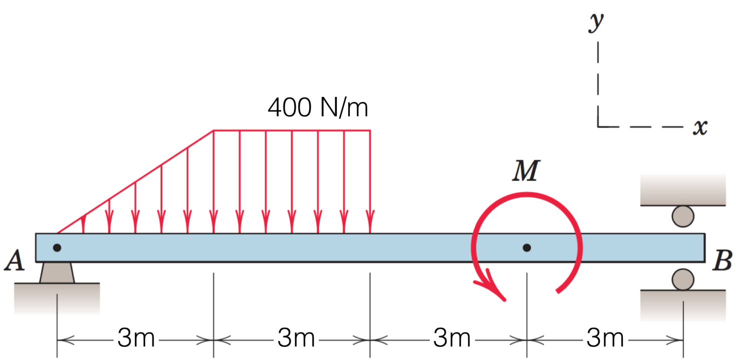
    (a) $M_0 = 0$ Nm

    (b) $M_0 = 2400$ Nm

    (c) $M_0 = 4800$ Nm

    (d) $M_0 = 6600$ Nm

    (e) $M_0 = 7200$ Nm



La respuesta correcta es (d). Pongamos el origen en A (es decir $x = 0$ en A). Si dividimos la fuerza distribuida en dos partes, la parte triangular ($0 < x < 3$ m) tiene una resultante $R_1 = 3(400)/2 = 600$ N que se aplica en el punto $\bar{x}_1 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(3) = 2$ m. La parte rectangular ($3 < x < 6$) tiene una resultante $R_2 = 3(400) = 1200$ N, aplicada en el punto $\bar{x}_2 = 3 + L/2 = 3 + \frac{3}{2} = 4.5$ m. En el instante en el que el contacto en el punto B cambia de superficie la magnitud de la fuerza de apoyo en ese punto es cero. Por ende, la suma de torques respecto al punto A queda:

$$\Sigma M_A = M_0 - 600(2) - 1200(4.5) = 0$$

de donde obtenemos $M_0 = 6600$ Nm

14. Una rueda sólida de masa M, radio R y momento de inercia M R^2/2 rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Una fuerza F es aplicada en su eje tal que el centro de masa tiene una aceleración a. La magnitudes de la fuerza aplicada, F, y de la fuerza de roce con la superficie, f, son:

    (a) F = M a; f = 0

    (b) F = M a; f = M a/2

(c) F = 2 M a; f = M a

(d) F = 2 M a; f = M a/2

(e) F = 3 M a/2; f = M a/2

La respuesta correcta es la (e). La rueda está sujeta a dos fuerzas en la dirección horizontal, F y f, y se cumple que F - f = M a. Además, la fuerza de roce f ejerce un torque respecto del centro de la rueda f R = (1/2 M R^2) α y la condición de rodadura establece que $a = R\,\alpha$. De estas ecuaciones sale que f = 1/2 M R $\alpha = 1/2 Ma$ y, reemplazando en la ecuación de Newton, obtenemos F = 3/2 M a.

15. Determinar las reacciones que actúan sobre la barra debido al apoyo en la pared. Considere que la polea tiene una masa despreciable.

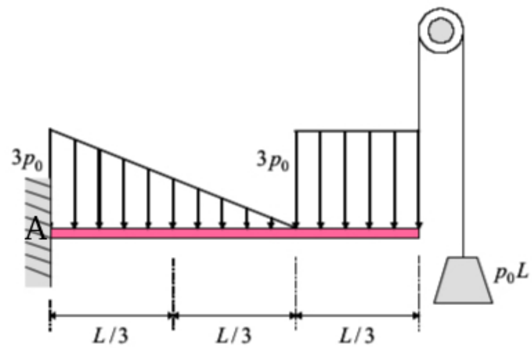
(a) $A_x = 0$, $A_y = p_o L$, $M_A = 0$

(b) $A_x = 0$, $A_y = -p_o L$, $M_A = 0$

(c) $A_x = 0$, $A_y = p_o L$, $M_A = 2p_o L^2$

(d) $A_x = 0$, $A_y = -p_o L$, $M_A = -2p_o L^2$

(e) $A_x = 0$, $A_y = p_o L$, $M_A = -2p_o L^2$



Esta pregunta se considerará buena para todos porque ninguna de las alternativas era correcta.

Se calculan la fuerza equivalente y su punto de aplicación para cada distribución de fuerzas; para la distribución lineal, la resultante vale $R_1 = p_o L$ y el punto de aplicación es $x_1 = 2/9L$; para la distribución constante, la resultante es $R_2 = p_o L$ y está aplicada en $x_2 = 5/6L$.

Después se plantean las condiciones de equilibrio, $A_y - R_1 - R_2 + p_o L = 0$ y $M_A - R_1 x_1 - R_2 x_2 + (p_o L)(L) = 0$. Se reemplazan los valores conocidos y se obtienen los valores de $A_x = p_o L$ y $M_A = p_o L/18$.

16. La pasarela ejerce una carga vertical de 50 kN sobre la armadura tipo Warren en cada uno de los puntos B, D, F y H. Las dimensiones de la armadura, indicadas en la figura, son $L = 8$ m y $h = 3$ m. Calcular el valor de la fuerza en el elemento CE.

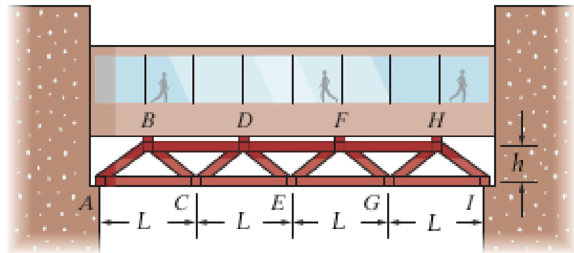
    (a) 200 kN (C)

    (b) 800/3 kN (T)

    (c) 800/3 kN (C)

    (d) 200 kN (T)

    (e) 50 kN (T)



La respuesta correcta es la (b). Se plantea la ecuación de fuerzas para la armadura completa y se determina que $A_y = I_y = 100$ kN. Usando el método de las secciones y definiendo la sección definida por el corte de los elementos BD, CD y CE, podemos encontrar la magnitud de la fuerza en el elemento CE. Para la sección a la izquierda del corte antes planteado tenemos que: $\sum F_y = A_y - 50 + CD\sin\theta = 0$, $\sum F_x = BD + CD\cos\theta + CE = 0$ y $\sum M_C = -A_y L + 50L/2 - BDh = 0$. Tambien podemos encontrar de la figura que $\sin\theta = 3/5$, $\cos\theta = 4/5$ y $\tan\theta = 3/4$. Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta que BD = -200 kN, CD = -250/3 kN y CE = 800/3 kN; CD es una fuerza de tensión.

17. Determinar las fuerzas en los elementos BC, DE y FG de la armadura de la figura e indicar si son de tensión (T) ó de compresión (C).

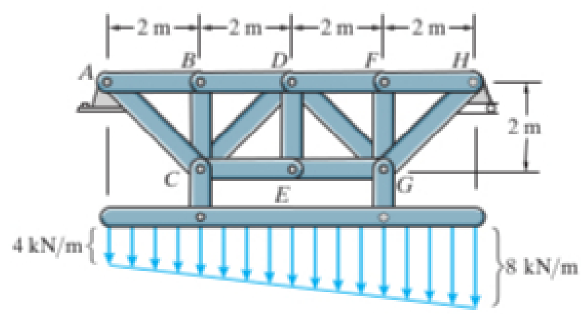
    (a) BC = 18.7 kN (T), DE = 0, FG = 29.3 kN (T)

    (b) BC = 0, DE = 24 kN (T), FG = 0

    (c) BC = 0, DE = 0, FG = 0

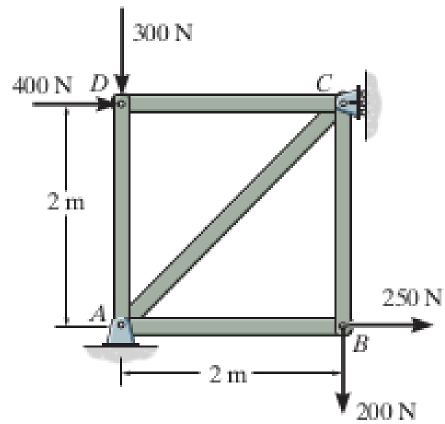
    (d) BC = 24 kN (T), DE = 24 kN (T), FG = 24 kN(T)

    (e) BC = 24 kN (C), DE = 24 kN (C), FG = 24 kN(C)



La respuesta correcta es la (c). Analizando la primera condición de equilibrio en los puntos B, D y F se concluye que para que se cumpla es necesario que las fuerzas en los elementos BC, DE y FG sean elementos de fuerza cero.

18. Determinar la fuerza en cada elemento de la estructura mostrada en la figura e indicar si son de tensión (T) ó de compresión (C)



(a) AB = 250 N (T), AD = 300 N (C), AC = 282.8 N (C), DC = 400 N (C), BC = 200 N (T)

(b) AB = 250 N (T), AD = 200 N (T), AC = 0, DC = 400 N (C), BC = 200 N (C)

(c) AB = 650 N (T), AD = 500 N (C), AC = 0, DC = 400 N (C), BC = 200 N (T)

(d) AB = 250 N (C), AD = 300 N (T), AC = 282.8 N (T), DC = 400 N (T), BC = 200 N (C)

(e) AB = 650 N (C), AD = 200 N (C), AC = 282.8 N (T), DC = 400 N (T), BC = 200 N (T)

La respuesta correcta es (a). Analizando el diagrama de cuerpo libre para la armadura completa podemos determinar las reacciones en los apoyos A y C; éstas resultan ser A_x = -50 N, A_y = 500 N y C_x = 600 N. Usando el método de las uniones y analizando en primer lugar la unión D obtenemos que DC = 400 N (compresión) y AD = 300 N (compresión); luego analizamos la unión B y obtenemos que AB = 250 N (tensión) y BC = 200 N (tensión). Por último analizamos la unión A para obtener que AC = 282.8 N (compresión).