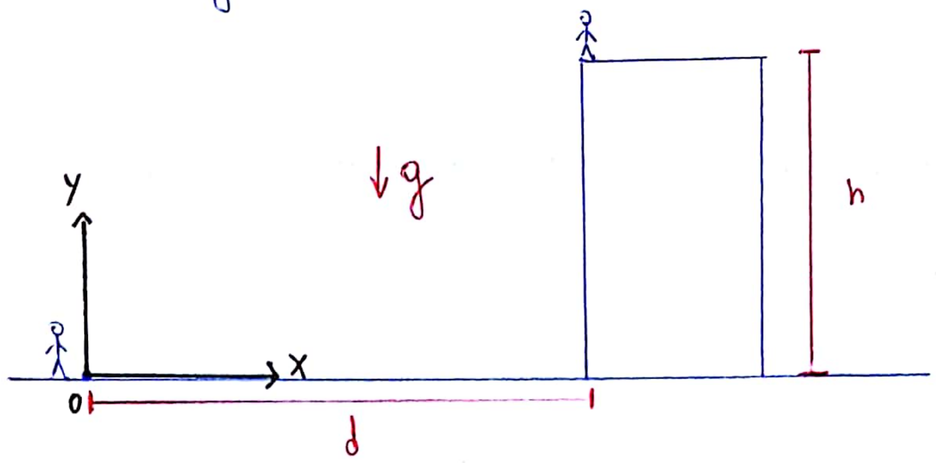
1. Primero hagamos un dibujo de la situación inicial



Los móviles a considerar en este problema son la pelota ("1") y la persona que cae del edificio ("2"). Para que "2" reciba la pelota al llegar al suelo, será preciso igualar las posiciones de ambos móviles en ese instante.

Escribiremos las ecuaciones cinemáticas para trabajar, definiendo antes que nada dónde estará el origen del sistema de coordenadas. Se escogerá como origen la posición de la pelota en $t = 0$ (Mirar dibujo).

Tomamos como base la ecuación de itinerario para un movimiento bajo aceleración constante:

$$x = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Primero las ecuaciones para la pelota

① $x_1 = v_{0,x} t$

② $y_1 = v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$

Ahora para la persona en caída (Que tiene velocidad inicial nula pues se deja caer)

③ $x_2 = d$

④ $y_2 = h - \frac{1}{2} g t^2$

Cuando la persona toca el suelo, su posición en Y es cero según nuestro sistema de referencia. Luego, imponemos $y_2 = 0$ en ④ para encontrar el tiempo de caída.

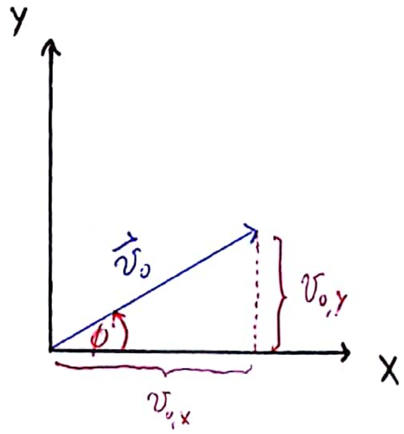
$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ahora, utilizamos este mismo tiempo en ① y ②, reemplazando también x_1 e y_1 por la posición final de la pelota, $(d, 0)$

⑤ $d = v_{0,x} \sqrt{\frac{2h}{g}}$

⑥ $0 = v_{0,y} \sqrt{\frac{2h}{g}} - h$

Ahora descomponemos el vector velocidad inicial de la pelota, en términos del ángulo que buscamos.



$$v_{0,x} = v_0 \cos\phi$$
$$v_{0,y} = v_0 \operatorname{sen}\phi$$

Reemplazando en ⑤ y ⑥

$$⑦ \quad d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos\phi$$

$$⑧ \quad h = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \operatorname{sen}\phi$$

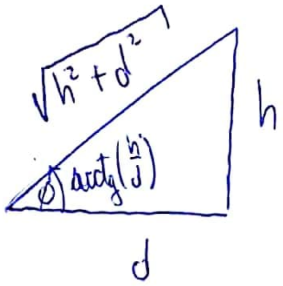
Podemos tomar $\frac{⑧}{⑦}$ para obtener una expresión concisa

$$\frac{h}{d} = \operatorname{tg}\phi \Rightarrow \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{d}\right)$$

Notemos que ϕ no depende de v_0. ¿Podrá ser v_0 cualquier cosa? La intuición nos dice que si a la pelota le pegamos suavecito no va a llegar a su destino. Por tanto, v_0 debe ser encontrado. Podemos usar o ⑦ o ⑧. Usaremos ⑧

$$h = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(\phi))$$

Pero, ¿Quién es $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{d}\right)\right)$? Veámoslo en un triángulo



$$\therefore \operatorname{sen}(\phi) = \frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}}$$

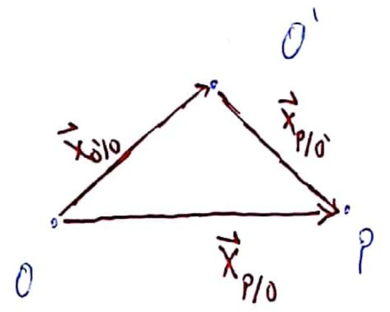
Luego,

$$1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{h^2+d^2}}$$

$$v_0 = \sqrt{h^2+d^2} \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

2. A veces, describir el movimiento de un cuerpo puede resultar complicado. En estos casos podría ser de ayuda observar el movimiento desde otro sistema de referencia.

Supongamos que O y O' son dos sistemas de referencia y P un objeto a estudiar. Por suma de vectores, establecemos lo siguiente

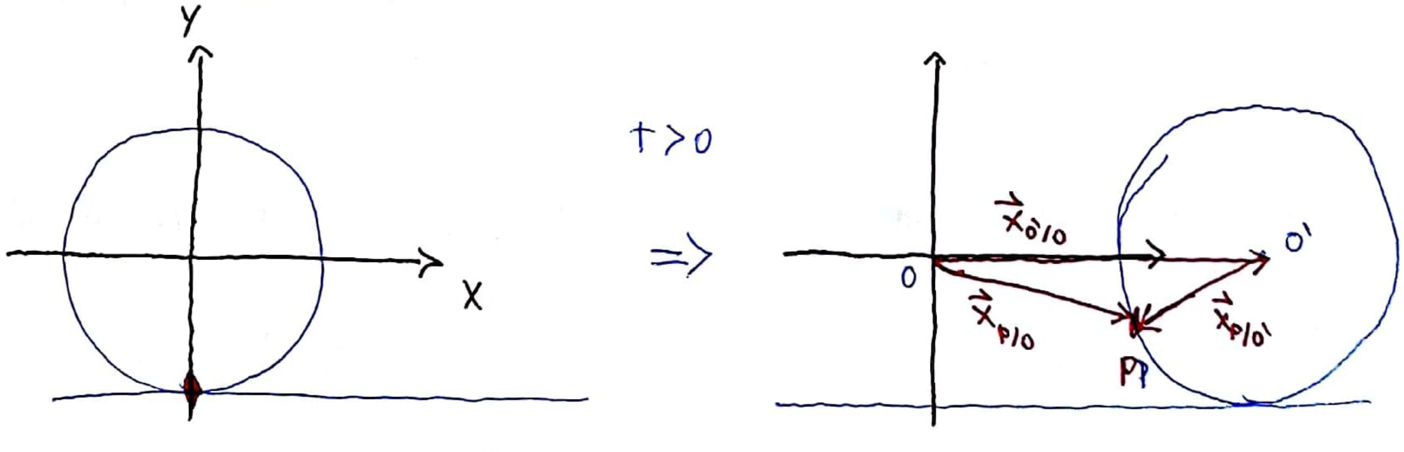


$$\vec{x}_{P/O} = \vec{x}_{O'/O} + \vec{x}_{P/O'} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v}_{P/O} = \vec{v}_{O'/O} + \vec{v}_{P/O'} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

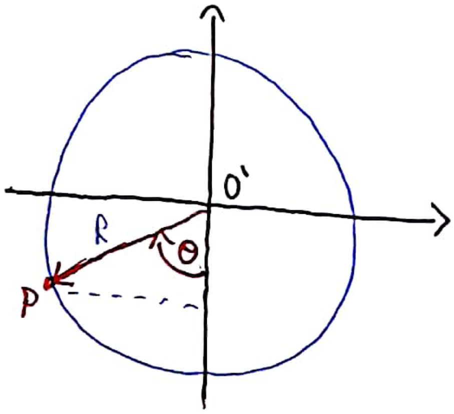
$$\vec{a}_{P/O} = \vec{a}_{O'/O} + \vec{a}_{P/O'}$$

Ataquemos el problema de la piedra incrustada en la rueda de esta forma. Dibujemos primero la situación inicial:



Primero veamos $\vec{x}_{O'/O}$. La rueda se traslada con velocidad constante $V\hat{x}$ respecto al suelo. Luego, $\vec{v}_{O'/O} = V\hat{x}$. Integrando, y considerando que en $t=0$ los orígenes coinciden, $\vec{x}_{O'/O} = Vt\,\hat{x}$.

Ahora veamos $\vec{x}_{P/O'}$. Desde el centro de la rueda, la piedra sólo gira, por lo que será conveniente parametrizar su posición con un ángulo.



$$\vec{x}_{P/O'} = -R\sin\theta\,\hat{x} - R\cos\theta\,\hat{y}$$

Entonces $\vec{x}_{P/O} = (Vt - R\sin\theta)\,\hat{x} - R\cos\theta\,\hat{y}$. Ojo que tenemos dos variables por ahora, t y θ. Pero no son independientes, pues $\theta = \theta(t)$. Tenemos que encontrar la dependencia explícita de θ en el tiempo.

El punto de contacto entre la rueda y el suelo tiene velocidad nula respecto al suelo, y en $t=0$ la piedra es el punto de contacto.

$$\vec{v}_{P/O} = (V - R\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{x} + R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{y} \overset{\substack{t=0 \\ \theta(0)=0}}{\Longrightarrow} \vec{v}_{P/O} = V - R\dot{\theta} = 0$$

Luego $\quad \dot{\theta} = \frac{V}{R} \quad / \int_0^t dt'$

$$\theta = \frac{V}{R} t \qquad (\text{Pues } \theta(0) = 0)$$

Así, $\quad \vec{x}_{P/O} = \left(Vt - R\,sen\left(\frac{V}{R}t\right)\right)\hat{x} - R\cos\left(\frac{V}{R}t\right)\hat{y}$

$$\vec{v}_{P/O} = \left(V - V\cos\left(\frac{V}{R}t\right)\right)\hat{x} + V\,sen\left(\frac{V}{R}t\right)\hat{y}$$

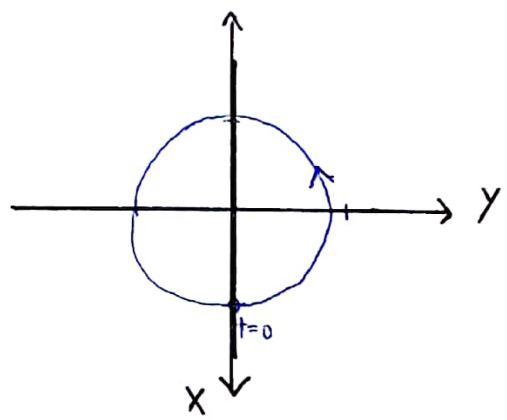
$$\vec{a}_{P/O} = \frac{V^2}{R} sen\left(\frac{V}{R}t\right)\hat{x} + \frac{V^2}{R}\cos\left(\frac{V}{R}t\right)\hat{y}$$

La trayectoria descrita por la piedra lleva el nombre de cicloide.

3. a) Tenemos las ecuaciones

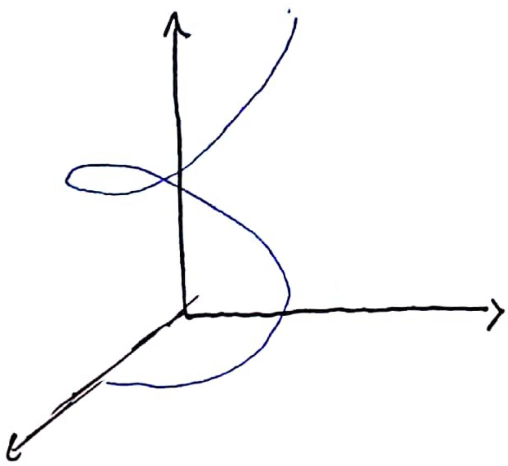
$$x = R\cos(\omega t)$$
$$y = R\,\mathrm{sen}(\omega t) \qquad R, \omega, b > 0$$
$$z = bt^2$$

Las primeras dos satisfacen $x^2 + y^2 = R^2$. O sea, una trayectoria circular (Mirando sólo las coordenadas x e y.)



Por otra parte, la coordenada z crece cada vez más rápido con el tiempo ($z = bt^2$, $\dot{z} = 2bt$, $\ddot{z} = 2b$)

El resultado final es una espiral cilíndrica.



Utilizaremos coordenadas cilíndricas.

b) El sistema de coordenadas cilíndricas posee 3 variables:

- Distancia al eje z (Coordenada r)
- Ángulo respecto al eje x (Coordenada θ)
- Altura respecto al eje xy (Coordenada z)

En nuestro caso,

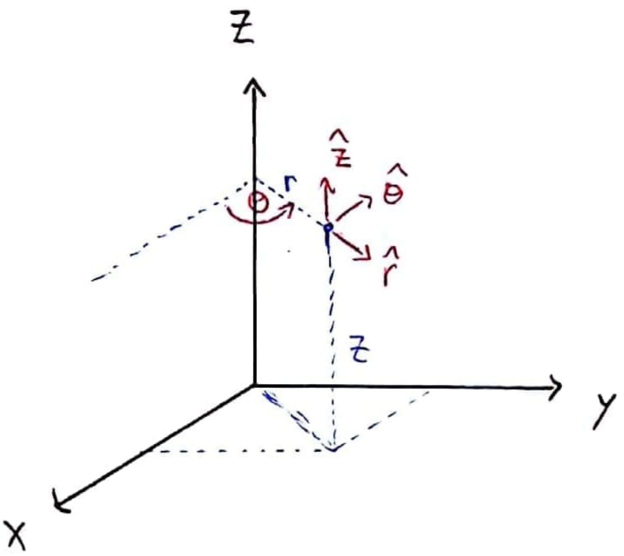
La distancia al eje z viene dada por $r^2 = x^2 + y^2$.

En nuestro caso, $r = R$ ¡Es constante!

El ángulo respecto al eje x ya lo tenemos y es simplemente $\theta(t) = \omega t$.

z ya lo tenemos y es $z(t) = bt^2$.

La base de vectores del sistema cilíndrico se ilustra a continuación:



$\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{z}$ son ortogonales entre sí

$\hat{r}\cdot\hat{\theta}=0$, $\hat{r}\cdot\hat{z}=0$, $\hat{\theta}\cdot\hat{z}=0$

$\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}$, $\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}$, $\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$

El vector posición $\vec{x}$ podrá escribirse como

$$\vec{x}=r\hat{r}+z\hat{z}$$

En este caso, $\vec{x}=R\hat{r}+bt^2\hat{z}$

El vector velocidad

$$\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{z}\hat{z}$$

En este caso, $\vec{v}=R\omega\hat{\theta}+2bt\hat{z}$

El vector aceleración,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

En este caso,

$$\vec{a} = -R\omega^2\,\hat{r} + 2b\,\hat{z}$$

c) La distancia al origen es la magnitud del vector posición

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{R^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + b^2t^4}$$

y la distancia axial no es más que la coordenada r

$$r = R$$

d) En el plano XY, ocurre un movimiento circular uniforme

$$X = R\cos(\omega t)$$
$$Y = R\,\text{sen}(\omega t)$$

Notemos que si $\omega t = 2\pi$, hemos dado una vuelta.

Diremos que ω es la frecuencia angular de oscilación.

Además, $\frac{\omega}{2\pi}t = 1 \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = f = \nu$ es la frecuencia de oscilación

Sea T el intervalo de tiempo tal que $\frac{\omega T}{2\pi} = 1$. T es el período de oscilación. Claramente,

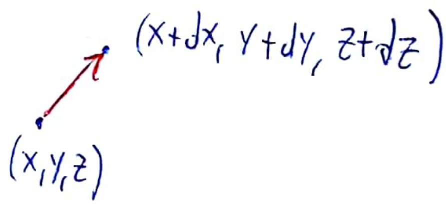
$$T = \frac{1}{f}$$

- f representa cuántas oscilaciones por unidad de tiempo
- T representa cuántos segundos dura una oscilación

e) .

Pensemos primero. Si el móvil realiza un desplazamiento infinitesimal, entonces recorrerá un camino recto (Por ser tan pequeño). La longitud de esta recta infinitesimal será:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$



Para conocer la distancia recorrida, bastará integrar ds sobre toda la trayectoria C

$$S = \int_C ds = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Scanned by CamScanner

Como bien sabemos, $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$. Luego,

$$dx = \frac{dx}{dt}dt, \quad dy = \frac{dy}{dt}dt, \quad dz = \frac{dz}{dt}dt.$$

Así, $$ds = \sqrt{dt^2\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}$$

Considerando incrementos positivos en dt,

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

$$ds = \|\vec{v}\| dt$$

Luego, $$S = \int_{t_i}^{t_f} \|\vec{v}\|\, dt.$$

En nuestro caso, $t_i = 0$. Queremos que la sonda haya dado 2 vueltas, y sabemos que en un tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dará una vuelta.

Luego, $t_f = \frac{4\pi}{\omega}$.

$$S = \int_0^{4\pi/\omega} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}\, dt = \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sqrt{(R\omega)^2 + (2bt)^2}\, dt = \omega R \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sqrt{1 + \left(\frac{2bt}{\omega R}\right)^2}\, dt$$

Primero, hágase $u = \frac{2bt}{\omega R}$, $u \in \left[0, \frac{8\pi b}{\omega^2 R}\right]$

$$du = \frac{2b}{\omega R} dt$$

$$S = \frac{(\omega R)^2}{2b} \int_0^{\frac{8b\pi}{\omega^2 R}} \sqrt{1+u^2}\, du$$

Esta integral sugiere una sustitución hiperbólica, pues

$$\cosh^2(\phi) - \operatorname{senh}^2(\phi) = 1$$

$$\cosh^2(\phi) = 1 + \operatorname{senh}^2(\phi)$$

Hágase $u = \operatorname{senh}(\phi)$, $du = \cosh(\phi)\, d\phi$

$\operatorname{senh}(\phi)$ es una función biyectiva en todo $\mathbb{R}$, por lo que su inversa está bien definida

$$\phi \in \left[\underbrace{\operatorname{senh}^{-1}(0)}_{\phi_i}, \underbrace{\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{8\pi b}{\omega^2 R}\right)}_{\phi_f}\right]$$

$$S = \frac{(\omega R)^2}{2b} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \sqrt{\cosh^2(\phi)}\, \cosh(\phi)\, d\phi = \frac{(\omega R)^2}{2b} \int_{\phi_i}^{\phi_f} |\cosh(\phi)| \cosh(\phi)\, d\phi$$

Pero $\cosh(\phi) = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2} > 0 \ \forall \phi$. Luego, $|\cosh(\phi)| = \cosh(\phi)$

$$S = \frac{(\omega R)^2}{2b}\int_{\phi_i}^{\phi_f} \cosh^2(\phi)\, d\phi \quad . \quad \text{Al igual que } \cos^2(\phi) = \frac{1+\cos(2\phi)}{2},$$

$$\cosh^2(\phi) = \frac{1+\cosh(2\phi)}{2}$$

$$= \frac{(\omega R)^2}{4b}\int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi + \frac{(\omega R)^2}{4b}\int_{\phi_i}^{\phi_f} \cosh(2\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{(\omega R)^2}{4b}\left[\phi_f - \phi_i + \frac{\operatorname{senh}(2\phi_f)}{2} - \frac{\operatorname{senh}(2\phi_i)}{2}\right]$$

Tenemos que encontrar la función inversa de $\operatorname{senh}(\phi)$.

$$\operatorname{senh}(\phi) = \psi = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2} \quad / 2e^{\phi} .$$

$$2e^{\phi}\psi = (e^{\phi})^2 - 1$$

$$= (e^{\phi})^2 - 2\psi e^{\phi} - 1$$

Esto es una cuadrática:

$$e^{\phi} = \frac{2\psi \pm \sqrt{4\psi^2 + 4}}{2} = \psi \pm \sqrt{\psi^2 + 1}$$

Dado que $e^{\phi} > 0 \quad \forall \phi$, $\quad e^{\phi} = \psi + \sqrt{\psi^2+1} \quad / \ln(\,)$

$$\phi = \ln\left(\psi + \sqrt{\psi^2+1}\right)$$

Luego, $\operatorname{senh}^{-1}(\phi) = \ln\left(\phi + \sqrt{\phi^2+1}\right)$

Así, $\phi_i = \operatorname{senh}^{-1}(0) = 0$

$$\phi_F = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{8\pi b}{\omega^2 R}\right) = \ln\left(\underbrace{\frac{8\pi b}{\omega^2 R} + \sqrt{\left(\frac{8\pi b}{\omega^2 R}\right)^2 + 1}}_{\Delta}\right)$$

Entonces,

$$S = \frac{(\omega R)^2}{4b}\left[\ln\left(\frac{8\pi b}{\omega^2 R} + \sqrt{\left(\frac{8\pi b}{\omega^2 R}\right)^2+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2\ln(\Delta))\right]$$

Pero $\operatorname{senh}(2\ln(\Delta)) = \dfrac{e^{\ln(\Delta^2)} - e^{-\ln(\Delta^2)}}{2}$

$$= \frac{\Delta^2 - \frac{1}{\Delta^2}}{2} = \frac{\Delta^4 - 1}{2\Delta^2}$$

Finalmente, $S = \dfrac{(\omega R)^2}{4b}\left[\ln(\Delta) + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\Delta^4-1}{\Delta^2}\right]$

4. Tenemos la ecuación

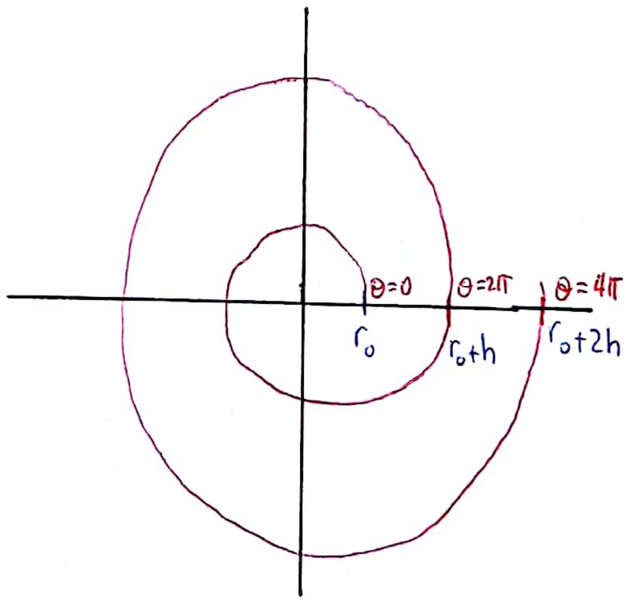
$$r = r_0 + \frac{h}{2\pi}\theta \qquad r_0, h > 0$$

Sabemos que $\theta(t=0) = 0$ y $\dot{\theta} \geq 0$ (Pues la chinita se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj)

Esbozaremos la trayectoria considerando que

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Para ello, iremos avanzando desde $\theta = 0$ en adelante, notando cómo cambia r.



b) Una vez que se dio una vuelta, $\theta = 2\pi \rightarrow r = r_0 + h$

Para K vueltas, $\theta = K2\pi \rightarrow r = r_0 + Kh$

c) Sabemos que el vector velocidad en coordenadas polares es

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

El problema es que no conocemos ni $\dot{r}$ ni $\dot{\theta}$. Pero nos dan como dato que la rapidez ($\|\vec{v}\|$) es constante. Usemos esto:

$$v_0 = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

Expresemos todo en términos de θ, así $r = r_0 + \frac{h}{2\pi}\theta \quad / \frac{d}{dt}$

$$\dot{r} = \frac{h}{2\pi}\dot{\theta}$$

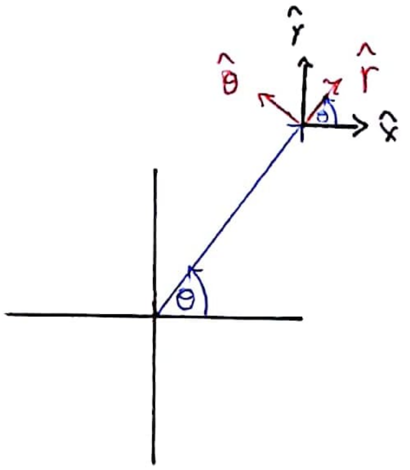
$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\dot{\theta}^2 + \left(r_0 + \frac{h\theta}{2\pi}\right)^2\dot{\theta}^2}$$

Como $\dot{\theta} \geq 0$, $\quad v_0 = \frac{h}{2\pi}\sqrt{1 + \left(2\pi\frac{r_0}{h} + \theta\right)^2}\,\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{h}v_0\frac{1}{\sqrt{1 + \left(2\pi\frac{r_0}{h} + \theta\right)^2}}$$

Entonces,
$$\vec{v} = \frac{h}{2\pi}\dot{\theta}\,\hat{r} + \left(r_0 + \frac{h}{2\pi}\theta\right)\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$
$$= \frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)^2}}\,\hat{r} + \left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)\frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)^2}}\,\hat{\theta}$$

Para hacer la conversión a los vectores unitarios de coordenadas cartesianas, miramos el mono:



$$\Rightarrow \quad \hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

Luego,
$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)^2}}\left[\cos\theta - \left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)\operatorname{sen}\theta\right]\hat{x}$$
$$+ \frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)^2}}\left[\operatorname{sen}\theta + \left(2\pi\frac{r_0}{h}+\theta\right)\cos\theta\right]\hat{y}$$

También podemos cambiar a (x,y) recordando que

Ojo aquí no solo cambiamos los unitarios, también las variables

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta \quad ,$$

$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{2\pi}{h}(x^2+y^2)}}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2\pi}{h}y\right]\hat{x}$$

$$+ \frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{2\pi}{h}(x^2+y^2)}}\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2\pi}{h}x\right]\hat{y}$$

Después de dar dos vueltas, $\theta = 4\pi$. O sea,

$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2}}\,\hat{r} + \left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)\frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2}}\,\hat{\theta}$$

En cartesianas,

$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2}}\,\hat{x} + \frac{v_0}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2}}\left(2\pi r_0/h + 4\pi\right)\hat{y}$$

d) En el problema 3 vimos que

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \|\vec{v}\| \, dt$$

En este caso, $\|\vec{v}\| = v_0$. $t_i = 0$, $t_f = t_1$. Luego,

$$S = v_0 t_1$$

Para encontrar t_1, notemos que

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{h} v_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2} \, \dot{\theta} = \frac{2\pi}{h} v_0$$

$$\frac{d}{dt} f(\theta) = f'(\theta)\dot{\theta} = \frac{2\pi}{h} v_0 \qquad \Big/ \int_0^{t_1} dt$$

$$\int_0^{t_1} \frac{d}{dt} f(\theta) \, dt = \int_0^{t_1} df(\theta) = \int_0^{\theta(t_1)} f'(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{h} v_0 t_1$$

Como en t_1 dimos 1 vuelta, $\theta(t_1) = 2\pi$

Luego, tenemos que

$$t_1 = \frac{h}{2\pi v_0} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2}\, d\theta$$

Hágase $u = \frac{2\pi r_0}{h} + \theta$ $\quad du = d\theta$, $\quad u \in \left[\frac{2\pi r_0}{h}, \frac{2\pi r_0}{h} + 2\pi\right]$

$$t_1 = \frac{h}{2\pi v_0} \int_{2\pi \frac{r_0}{h}}^{2\pi\left[\frac{r_0}{h}+1\right]} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

Esta integral se calcula igual que en 3, por lo que no se repetirá el cálculo.

e) La aceleración en coordenadas polares viene dada por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta}$$

Necesitamos $\ddot{\theta}$. Sabemos que

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{h} v_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2}} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2\pi}{h} v_0 \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2\right)^{3/2}} \cdot 2\left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{h} v_0\right)^2 \frac{2\pi \frac{r_0}{h} + \theta}{\left(1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2\right)^2}$$

Entonces, como además $\ddot{r} = \frac{h}{2\pi} \ddot{\theta}$

$$\vec{a} = \left[-\frac{2\pi}{h} v_0^2 \frac{2\pi \frac{r_0}{h} + \theta}{\left(1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2\right)^2} - \left(r_0 + \frac{h}{2\pi}\theta\right)\left(\frac{2\pi}{h} v_0\right)^2 \frac{1}{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2} \right] \hat{r}$$

$$+ \left[2 \frac{2\pi}{h} v_0^2 \frac{1}{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2} - \left(r_0 + \frac{h}{2\pi}\theta\right)^2 \left(\frac{2\pi}{h} v_0\right)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + \theta\right)^2\right)^2} \right] \hat{\theta}$$

Al haber dado dos vueltas, $\theta = 4\pi$

$$\vec{a} = \left[-\frac{2\pi}{h} v_0^2 \frac{2\pi \frac{r_0}{h} + 4\pi}{\left(1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + 4\pi\right)^2\right)^2} - \left(r_0 + 2h\right)\left(\frac{2\pi}{h} v_0\right)^2 \frac{1}{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + 4\pi\right)^2} \right] \hat{r}$$

$$+ \left[\frac{4\pi}{h} v_0^2 \frac{1}{1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + 4\pi\right)^2} - \left(r_0 + 2h\right)^2 \left(\frac{2\pi}{h} v_0\right)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(2\pi \frac{r_0}{h} + 4\pi\right)^2\right)^2} \right] \hat{\theta}$$

El vector velocidad es siempre tangente a la curva. Por tanto, un vector tangente unitario es:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Para obtener la proyección de un vector sobre otro, usamos producto punto. Así, la componente tangencial de la aceleración será

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{v}$$ (Ojo: tenemos que evaluar velocidad y aceleración en el mismo tiempo/lugar)

Con $$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2}}\,\hat{r} + \frac{2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi}{\sqrt{1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2}}\,\hat{\theta}$$

Sea $1+\left(2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi\right)^2 = \Delta$. Así

$$a_t = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{2\pi}{h}v_0^2\,\frac{2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi}{\Delta^2} - (r_0+2h)\left(\frac{2\pi}{h}v_0\right)^2\frac{1}{\Delta}\right]$$

$$+\frac{2\pi\frac{r_0}{h}+4\pi}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{4\pi}{h}v_0^2\,\frac{1}{\Delta} - (r_0+2h)^2\left(\frac{2\pi}{h}v_0\right)^2\frac{1}{\Delta^2}\right]$$

Luego, $\vec{a}_t = a_t\,\hat{v}$ es el vector aceleración tangencial.

Para obtener la componente normal a la curva, basta tomar $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$, pues este vector no tendrá componente tangencial.