Estática y Dinámica FIS1513

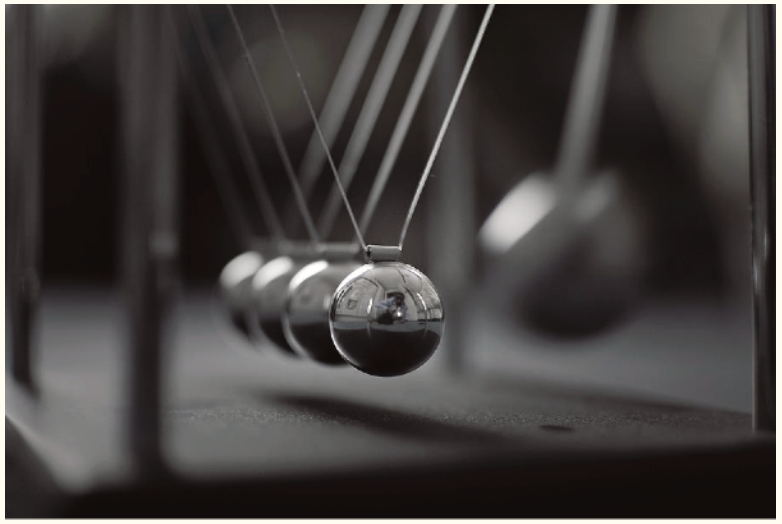
Clase #15

03-10-2018

Trabajo y Energía

Anuncios

- La i2 es *HOY*
  - ¡Les deseo mucho éxito!
  - Puedo responder algunas preguntas rápidas de último momento hoy después de clase
- Hoy seguiremos avanzando con trabajo y energía, pero servirá un poco de repaso.
  - Hoy también vamos a tener una sesión de cliqueras con preguntas de alternativas tipo prueba
- En base a su retroalimentación, los talleres ahora incluirán 5 minutos de mini-introducción



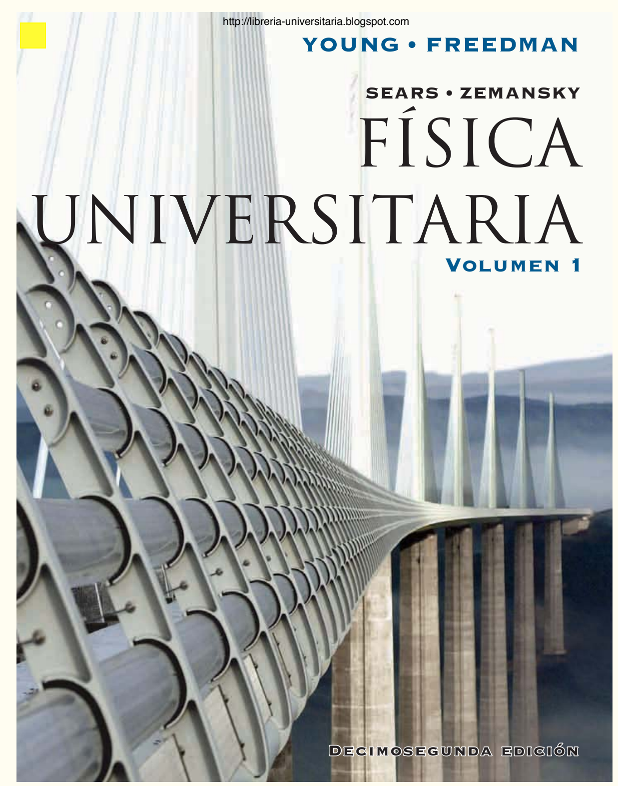
Trabajo y Energía: Movimiento Armónico Simple

*22.1 Undamped Free Vibration

A *vibration* is the periodic motion of a body or system of connected bodies displaced from a position of equilibrium. In general, there are two types of vibration, free and forced. *Free vibration* occurs when the motion is maintained by gravitational or elastic restoring forces, such as the swinging motion of a pendulum or the vibration of an elastic rod. *Forced vibration* is caused by an external periodic or intermittent force applied to the system. Both of these types of vibration can either be damped or undamped. *Undamped* vibrations can continue indefinitely because frictional effects are neglected in the analysis. Since in reality both internal and external frictional forces are present, the motion of all vibrating bodies is actually *damped*.

Spring suspensions can induce vibrations in moving vehicles, such as this railroad car. In order to predict the behavior we must use a vibrational analysis.

Secciones 22.1-2 del Hibbeler y 13.1-3 del Young-Freedman

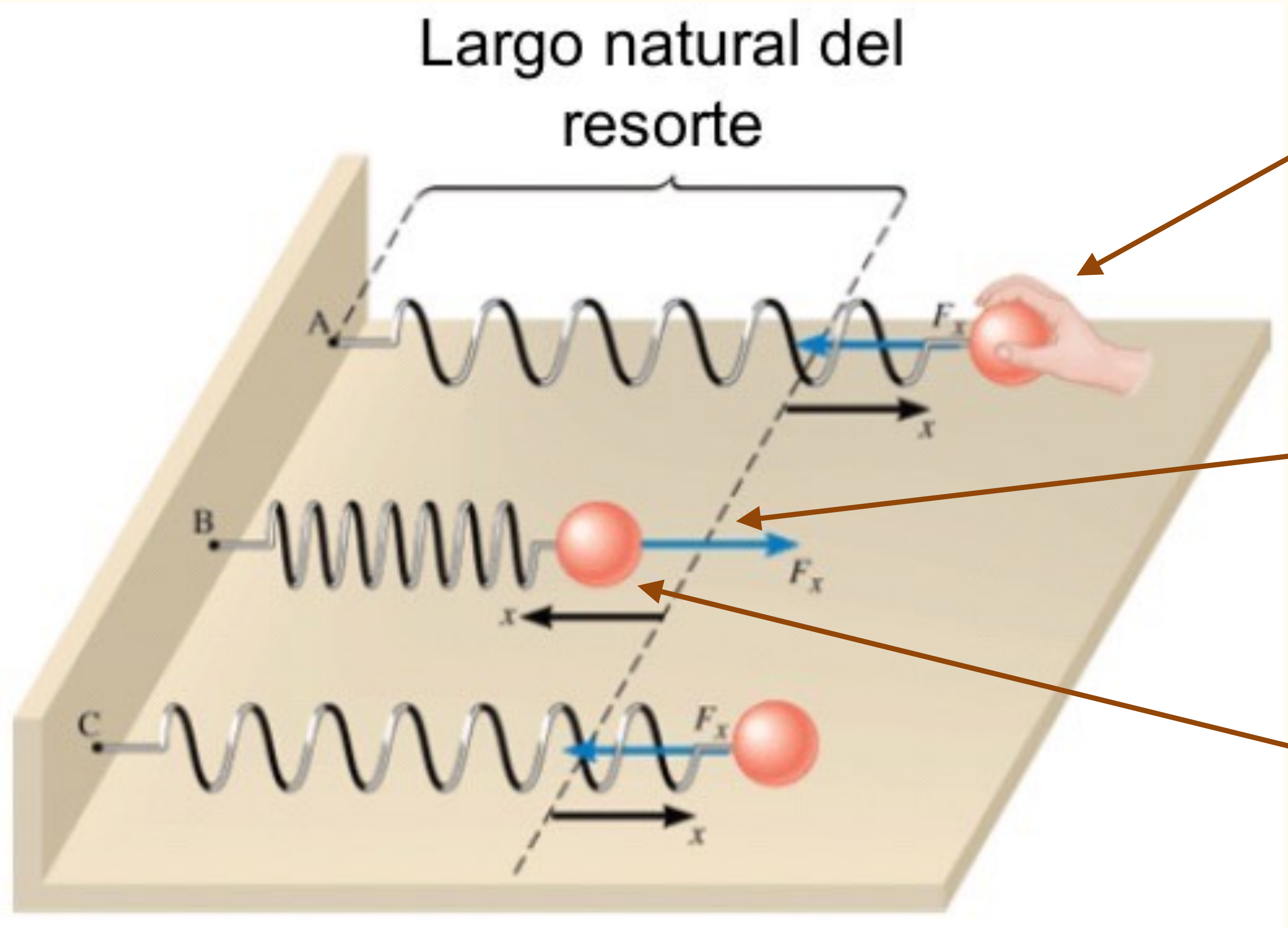


Nota: esto es un tema que podría abarcar todo un capítulo entero, pero que sólo veremos de forma muy rápida, utilizando principalmente los principios de trabajo y energía

Movimiento Armónico Simple

Una de las aplicaciones más interesantes de lo que hemos visto hasta ahora es con objetos que oscilan respecto a una posición de equilibrio

Por ejemplo, ¿qué pasa si tomamos una masa amarrada a un resorte, la desplazamos un poco respecto a su posición de equilibrio, y la dejamos ir?



en el lado derecho el resorte la tira hacia la izquierda

Al pasar por la posición de equilibrio la velocidad no es cero, por lo que continua desplazándose hacia la izquierda

en el lado izquierdo el resorte la tira hacia la derecha, y el proceso se repite en la otra dirección

Si no hay roce, esto se repite hasta el infinito…. ¡es un movimiento oscilatorio!

Movimiento Armónico Simple

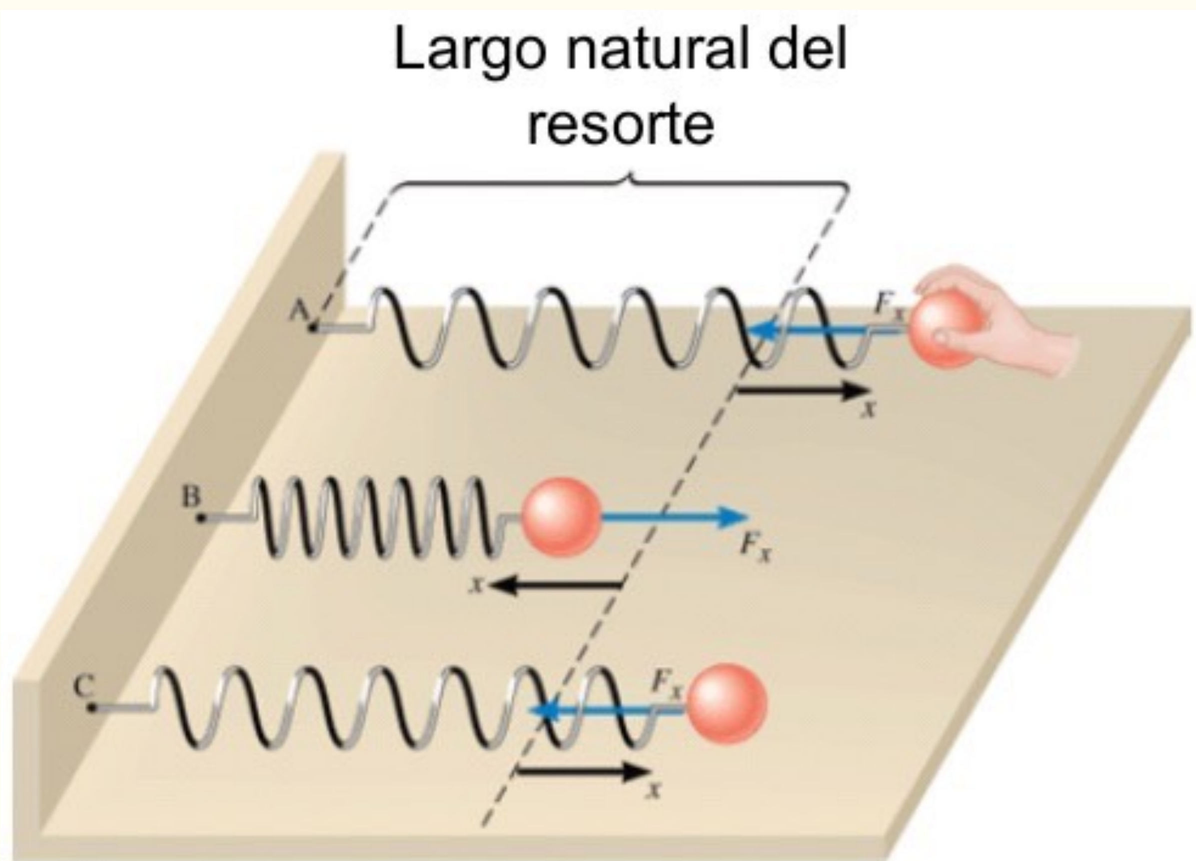
Quisiéramos ver esto matemáticamente. Para ello podemos aplicar la segunda Ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \longrightarrow -kx = ma_x$$

(Aquí ponemos el origen x=0 en la posición de equilibrio)

Nos queda una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



Nos queda que la segunda derivada de una función es igual a una constante por la misma función, por lo que la solución tiene que ser una función trigonométrica de esta forma:

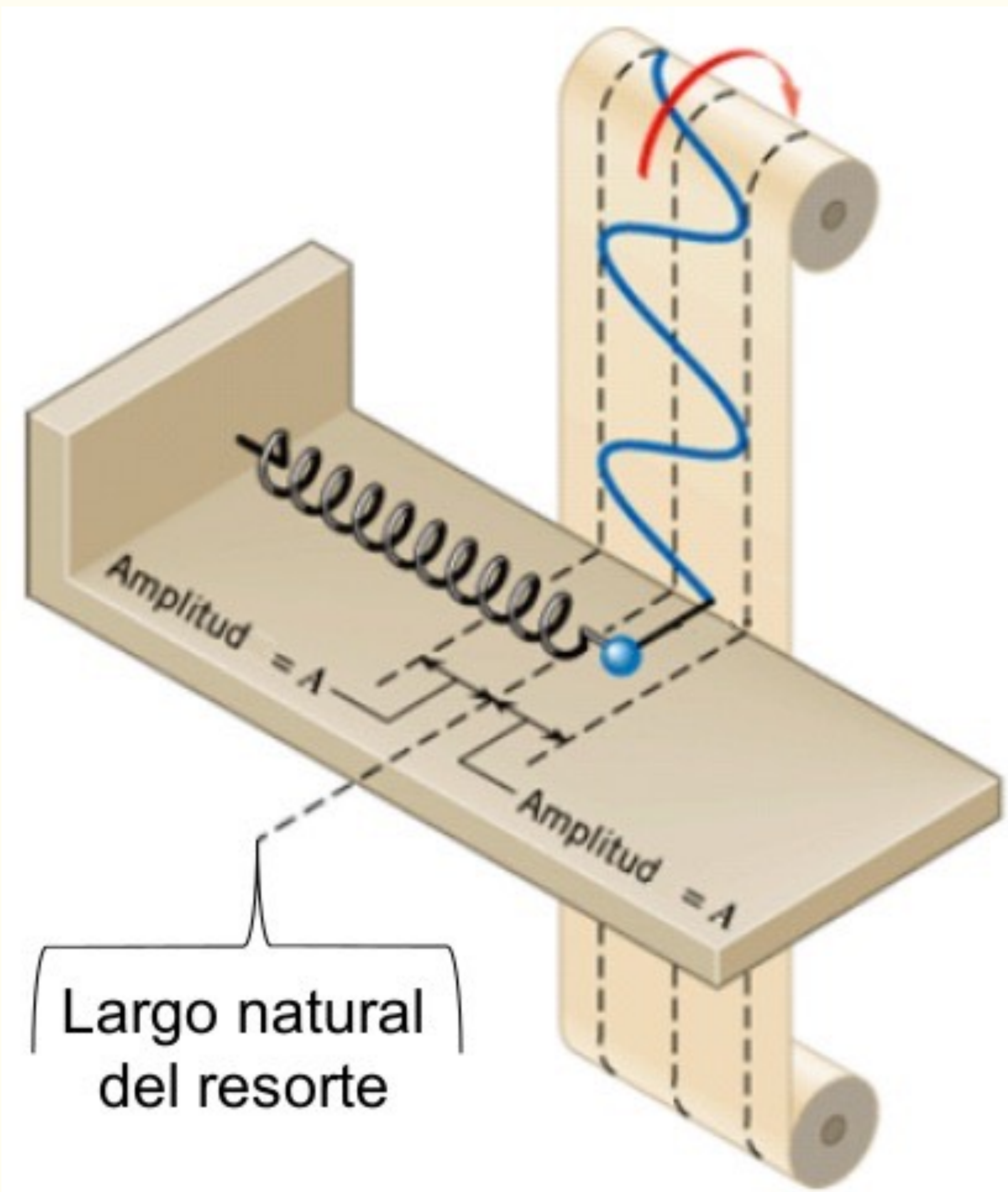
$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

(donde A, ω y ϕ son constantes)

Movimiento Armónico Simple

Veamos si la ecuación impone alguna condición sobre las constantes A, ω, ϕ. Al remplazar la solución en la ecuación, llegamos a:

$$m\left(-A\omega^2\cos(\omega t+\phi)\right)+kA\cos(\omega t+\phi)=0$$



Y vemos que la única condición es que:

$$-\omega^2 m+k=0 \longrightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para A y ϕ no hay condición….
…dependen de las condiciones iniciales del problema.

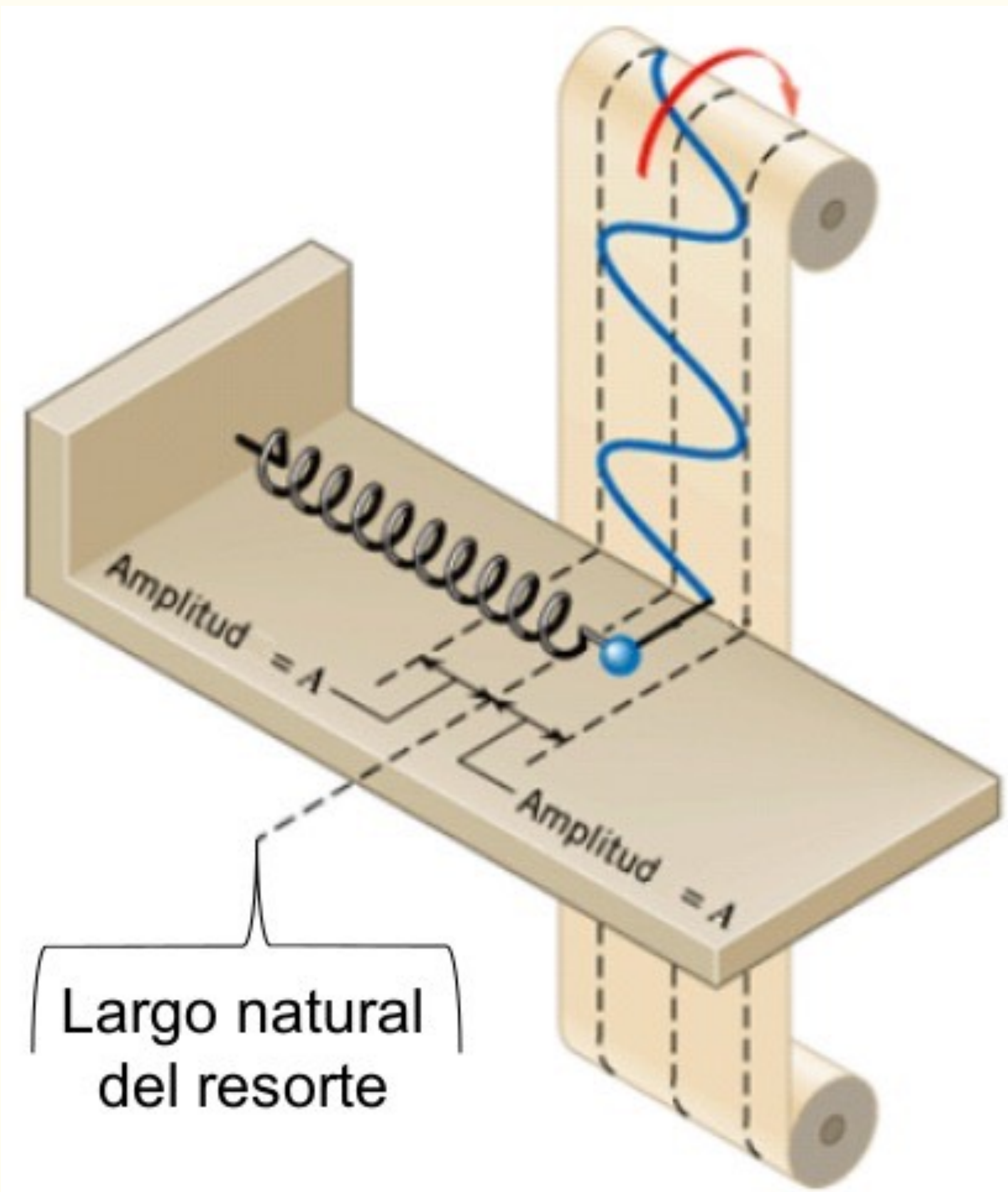
En otras palabras, la solución es:

$$x=A\cos\left(\sqrt{k/m}\,t+\phi\right)$$

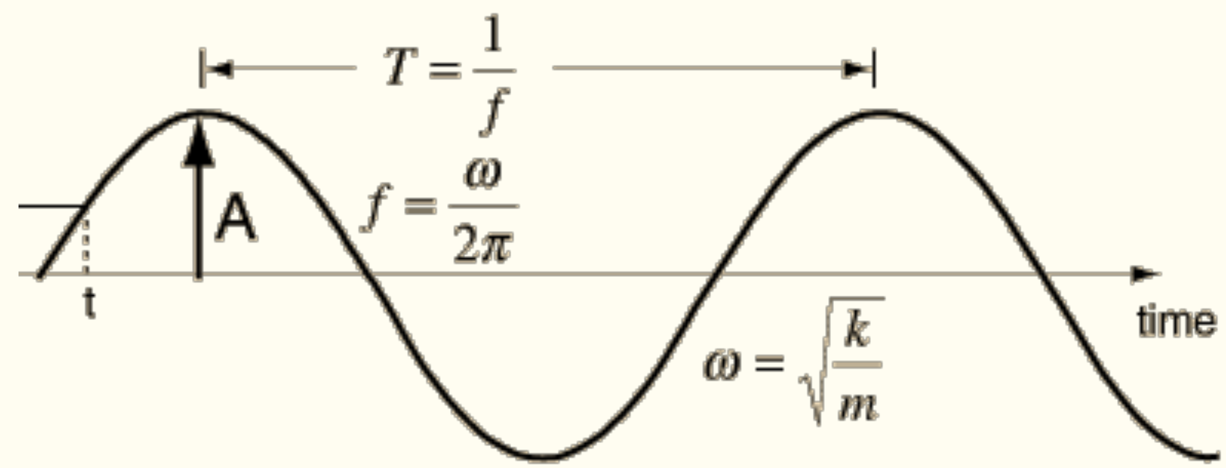
Al movimiento descrito por esta ecuación diferencial y esta solución se le llama "movimiento armónico simple"

Movimiento Armónico Simple

¿Qué significa esta solución? $x = A\cos(\omega t + \phi)$



¡La posición de la masa es una función sinusoidal!



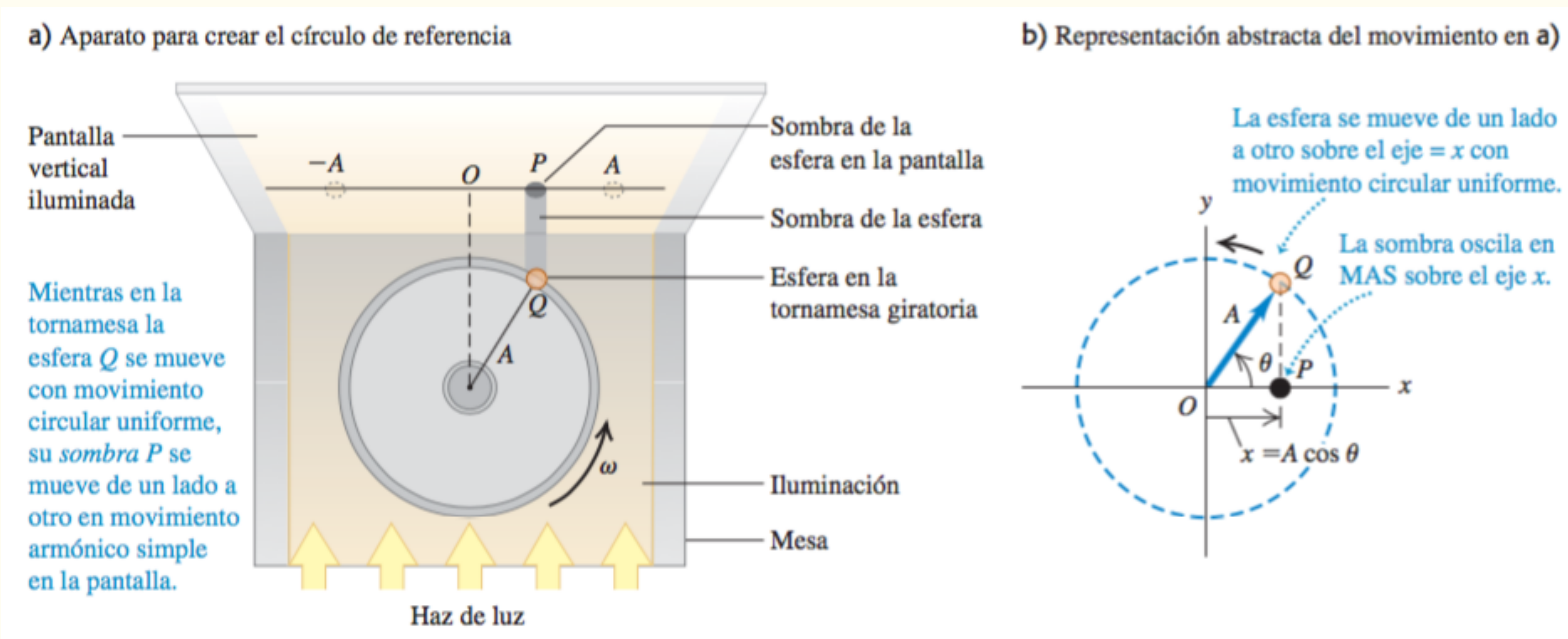
A es la amplitud del movimiento (el desplazamiento máximo, y ϕ es una fase. **Ambas se determinan de las condiciones iniciales** (por ejemplo, si x=0 a t=0, entonces ϕ=0)

¿Qué es ω?

¿Y qué es ω? ¿tiene alguna conexión con el ω de movimiento circular?

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

La respuesta es "**Sí y no**". No significa que el objeto en movimiento armónico simple (en este caso la masa amarrada al resorte) esté en movimiento circular. Pero la posición x(t) sí se puede entender como la proyección de un movimiento circular uniforme:



¿Qué es ω?

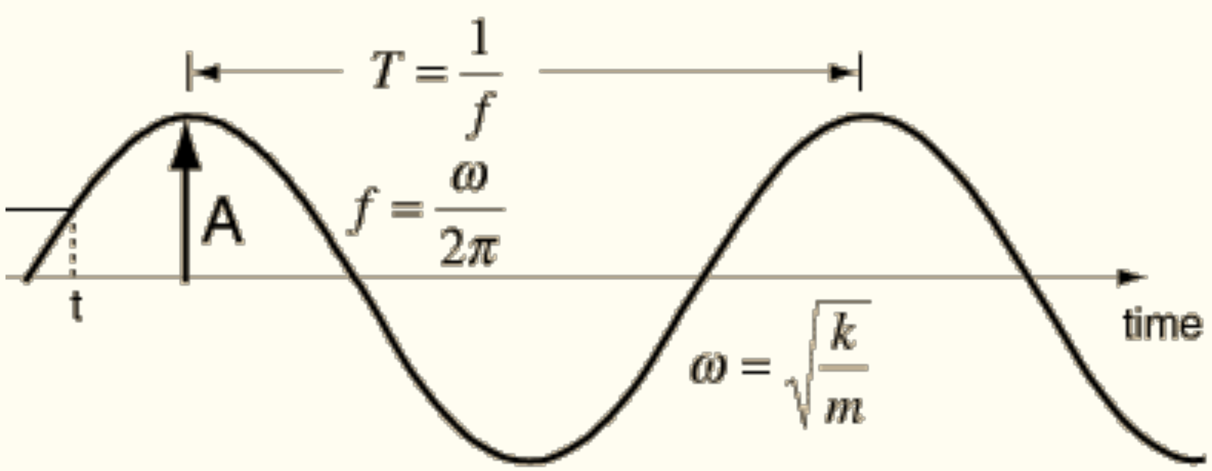
Entonces ω es la frecuencia angular del movimiento armónico simple.

A mayor ω, menos tarda el movimiento en completar una "vuelta" (es decir un ciclo)

Un ciclo corresponde a una vuelta (2π), por lo que la frecuencia (el número de ciclos completados por segundo) es simplemente:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

T es el periodo (el tiempo que tarda en recorrer un ciclo)



Vimos que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Esto significa que para el caso de una masa con un resorte, l**a frecuencia a la que la masa oscila no depende de la amplitud, sino solamente de su masa y de la constante del resorte**.

Experimento

Un ejemplo poco convencional de movimiento armónico simple

Ahora con energía

El movimiento armónico simple también se puede entender con energía. Si despreciamos el roce, la única fuerza que hace trabajo es la elástica:

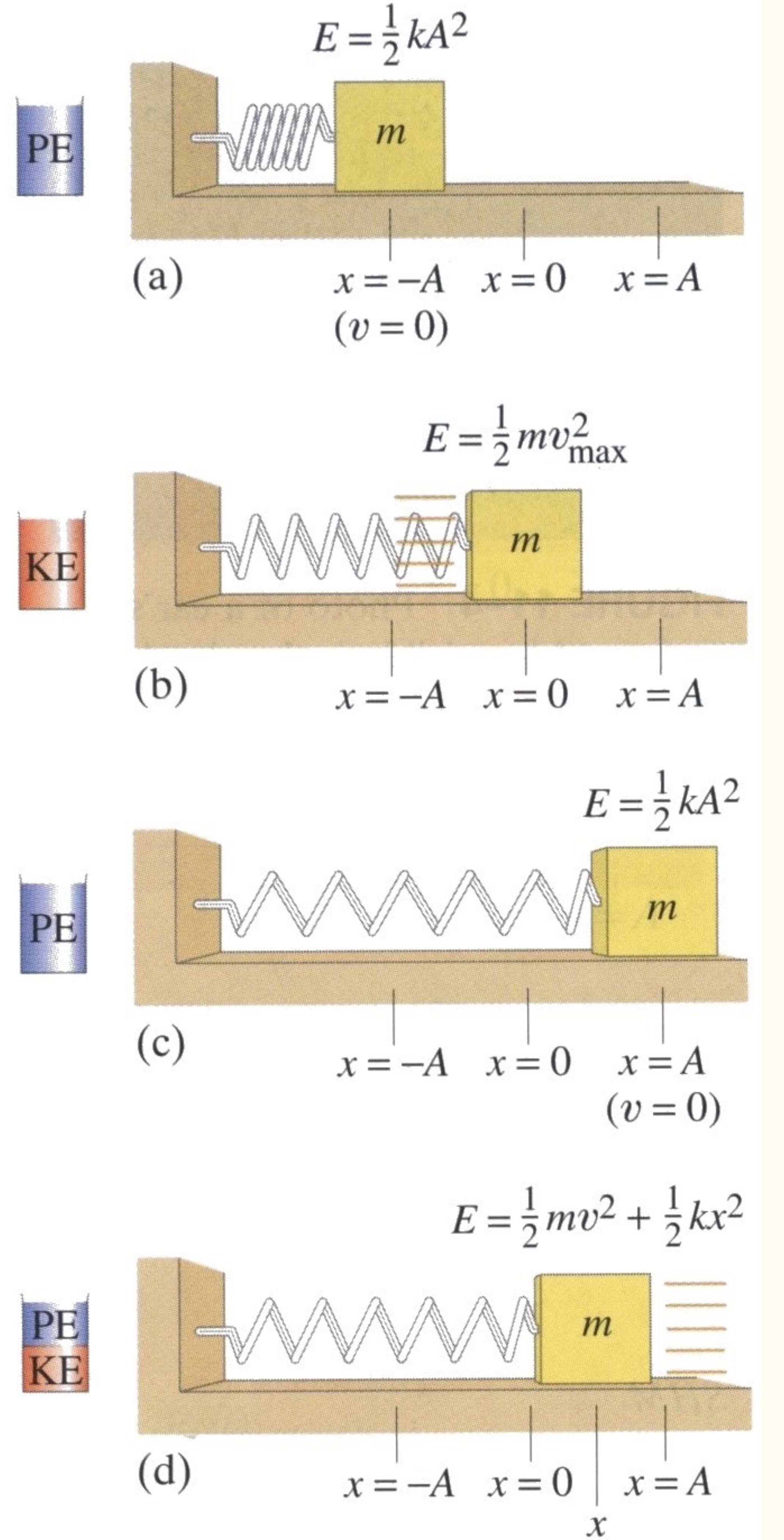
$$\overset{0}{\cancel{W_{\text{no-cons}}}} = \Delta K + \overset{\Delta U_e}{\cancel{\Delta U}}$$

Nos queda:

$$\Delta K + \Delta U_e = 0$$

o también: $$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cte.}$$

El objeto tiene siempre la misma cantidad de energía, nomás que esta se transforma constantemente entre cinética y potencial elástica

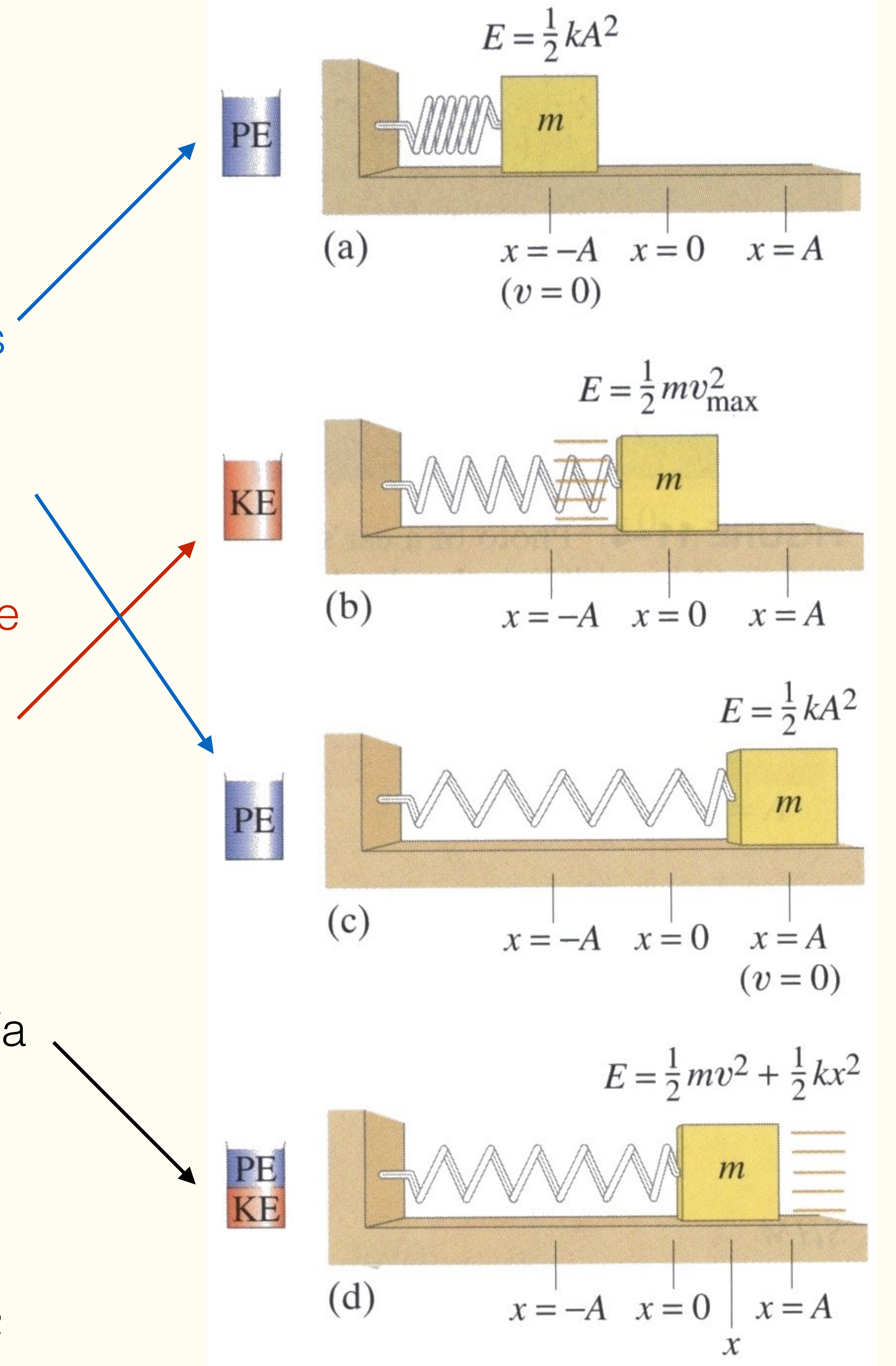


Ahora con energía

Cuando el objeto está en las posiciones extremas (x=±A), la energía cinética es cero y toda la energía está en forma de energía potencial

Cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio (x=0), toda la energía está en forma de energía cinética. La energía potencial es cero y la velocidad es máxima

En las otras posiciones, la energía mecánica total se distribuye entre energía cinética y energía potencial



Ahora con energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cte.}$$

Es fácil comprobar que la solución de antes también satisface esta ecuación.

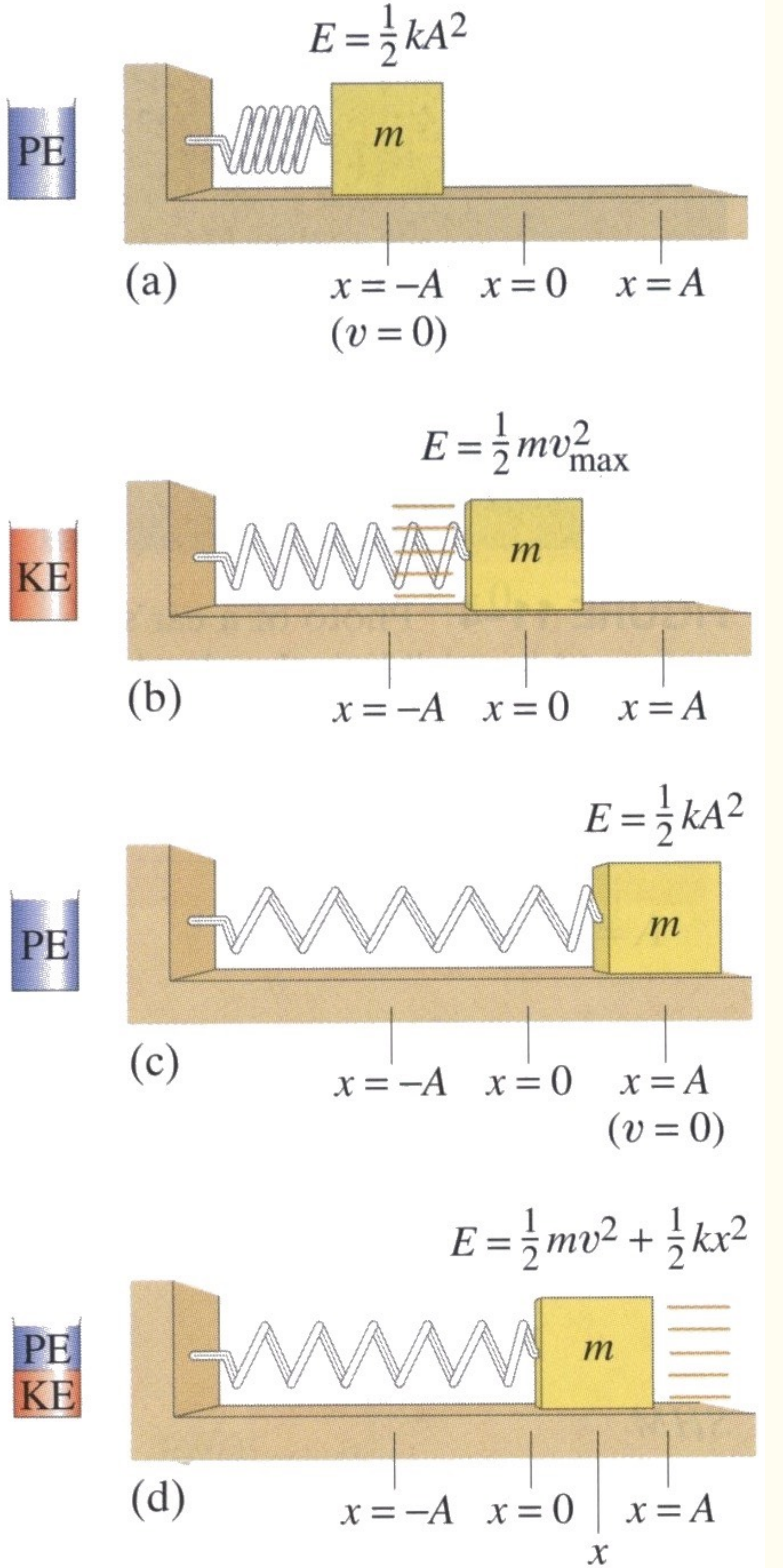
O mejor aún, <u>se puede hacer dE/dt = 0 y se puede obtener la misma ecuación diferencial de antes:</u>

$$mv\dot{v} + kx\dot{x} = 0$$

$$m\dot{v} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Entonces para obtener la ecuación diferencial que describe el movimiento oscilatorio de una partícula, **se puede usar la segunda ley de Newton o energía** (yo recomiendo energía).



Resumiendo

Cuando una partícula describe un movimiento oscilatorio que puede ser descrito por esta ecuación se dice que está en movimiento armónico simple

Significa que si tengo una masa y un resorte por ejemplo, no los puedo poner a oscilar a cualquier frecuencia que yo quiera a menos que cambie k y m

es la frecuencia angular y su valor está dado por los parámetros físicos del problema

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

dependen de las condiciones iniciales y pueden tomar cualquier valor

la cantidad que aparece aquí es la frecuencia angular al cuadrado

Para obtener la frecuencia angular hay que llegar a una ecuación diferencial de esta forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\omega^2} x = 0$$

Para llegar a esa ecuación hay dos opciones:

(1) Plantear el problema con la 2da ley de Newton

(2) Plantear el problema con conservación de energía mecánica y derivando una vez respecto al tiempo

Preguntas con cliqueras

Próxima clase: terminar trabajo y energía, comenzar impulso y momentum