El oscilador armónico sin fricción (sin amortiguación)

En el caso más simple, la ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ , \tag{1}$$

es decir, un oscilador armónico sin fricción y sin estimulación accionamiento externo. Como planteamiento (Ansatz) de la solución consideramos

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

y reemplazamos en la ecuación de movimiento

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0 \, .$$

Esta ecuación se debe cumplir para todos t, lo cual solo es posible si vale

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

La solución de esta ecuación característica es netamente imaginaria

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

y así uno obtiene dos soluciones linealmente independientes

$$\left\{ e^{i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t} \right\} \, .$$

Estas dos soluciones se llaman el sistema fundamental de la ecuación diferencial (1). Debido a la linealidad de la ecuación de movimiento, cualquier superposición de la solución fundamental es también una solución de la ecuación diferencial, es decir,

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \ .$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial (1). Representa un conjunto de soluciones en función de los parámetros c_1 y c_2. c_1 y c_2 son constantes de integración, que hemos obtenido en principio por la doble integración formal de la ecuación diferencial (1). Para obtener una solución física del conjunto de soluciones, debemos tener en cuenta las condiciones iniciales del movimiento

$$x(0) = x_0 \ \wedge \ \dot{x}(0) = v_0 \ .$$

Reemplazar en la solución general da

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) &= v_0 = i\omega_0 (c_1 - c_2) \ . \end{aligned}$$

De eso se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega_0}\right) \\ c_2 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega_0}\right) = c_1^* \ . \end{aligned}$$

Con eso tenemos como solución física del oscilador armónico

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega_0}\right) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega_0}\right) e^{-i\omega_0 t} \ . \qquad (2)$$

Esta expresión podemos transformar o reescribir, porque con

$$z(t) = \left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega_0}\right) \cdot e^{i\omega_0 t}$$

vale para (2)

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) + z^*(t) = 2 \ \mathrm{Re}\, z(t) \\ &= \mathrm{Re}\left\{ \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega_0}\right) (\cos\omega_0 t + i \sin\omega_o t) \right\} \\ &= x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t \ . \end{aligned}$$

Entonces vemos que la solución (2) es real y por lo tanto describe un movimiento físicamente observable. La solución aún se puede especificar en una tercera forma. Empezando desde la forma real obtienes con la ayuda del teorema del coseno

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= A\left\{\cos\omega_0 t\cos\phi - \sin\omega_0 t\sin\phi\right\} \\ &= (A\cos\phi)\cos\omega_0 t + (-A\sin\phi)\sin\omega_0 t \ . \end{aligned}$$

por comparación de coeficientes

$$\begin{gathered} x_0 = A\cos\phi,\ -\frac{v_0}{\omega_0} = A\sin\phi \\ \Rightarrow x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = A^2 \\ A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \phi = \arccos\frac{x_0}{A} \ . \end{gathered}$$

Observaciones:

(i) Las diferentes formas de la solución (2) son descripciones idénticas del movimiento de un oscilador armónico libre (no amortiguado y sin estimulación externa): el punto de masa oscila con amplitud y frecuencia constantes. La característica del movimiento armónico es que la frecuencia es independiente de la amplitud.

(ii) La última forma muestra cómo las soluciones pueden diferir dependiendo de las condiciones iniciales: amplitud A y fase ϕ dependen directamente de las condiciones iniciales,

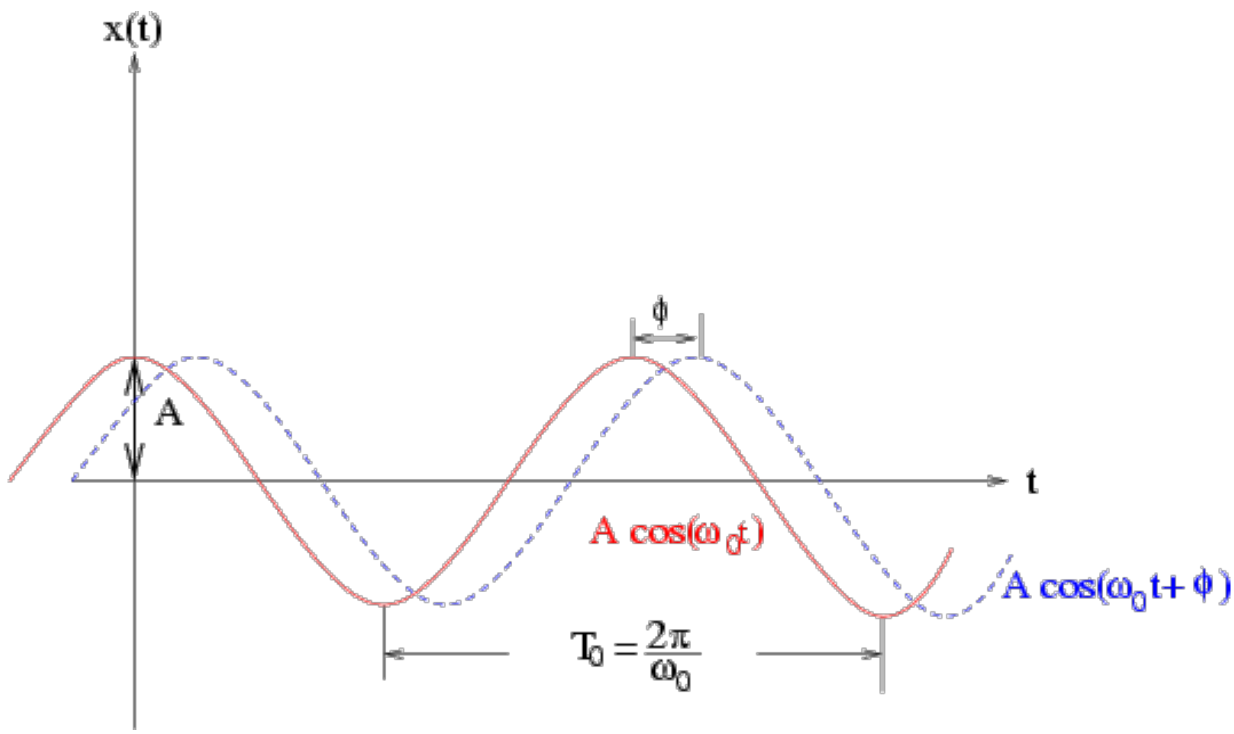

Figura 1: Solución del oscilador armónico libre.
A : Amplitude, ω_0 : Frequenz, T_0 : Periode, ϕ : Phase

Ejemplo:
1. Calcule el movimiento del péndulo de resorte horizontal.

La masa $m = 2kg$ es, aplicando una fuerza de $5N$, estirada en $10cm$ desde su posición normal (largo natural, largo relajado) y luego se suelta.

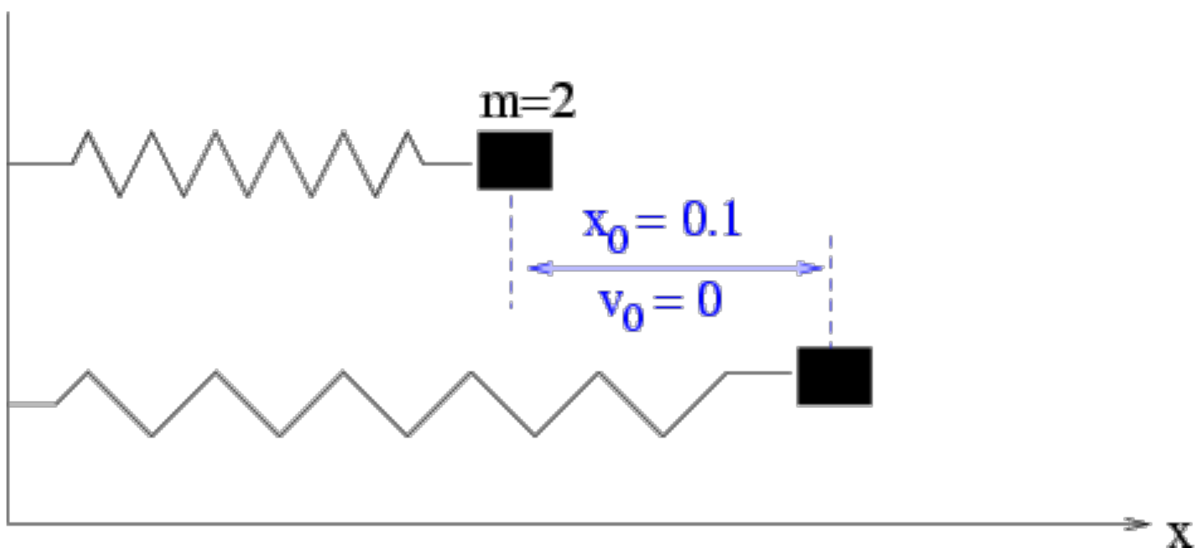

Figura 2: Péndulo de resorte

Solución:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi),\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

a)

Calcule la constante del resorte k:

$$F = -kx_0 \Rightarrow k = \left|\frac{F}{x_0}\right| = \frac{5}{0.1} = 50\frac{N}{m}$$

b)

Calcule la frecuencia ω_0:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 25 \hookrightarrow \omega_0 = 5\frac{1}{s}$$

c)

Calcule A y ϕ que corresponden a las condiciones iniciales:

$$x_0 = 0.1\ \wedge\ v_0 = 0$$
$$A = x_0,\ \phi = \arccos\frac{x_0}{x_0} = 0\ .$$

La ley del tiempo-camino es con estas condiciones iniciales

$$x(t) = 0.1\cos(5t)\ .$$

2. Energía del oscilador armónico libre (sin roce, sin estimulación externa)

Dado que la fuerza de restauración es conservadora, la energía mecánica total se mantiene y vale (E: Energía total, T: Energía cinética, U: Energía potencial)

$$U = -\int F dx = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$
$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left\{ A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \right\} \\
&= \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \ .
\end{aligned}
$$

A reemplazar con la solución hemos mostrado en forma retrospectiva, que la Energía E se conserva. Esto se logra en el oscilador oscilando la energía cinética y la energía potencial en la fase opuesta.

$$
T \propto \sin^2(\omega_0 t + \phi) \ \ U \propto \cos^2(\omega_0 t + \phi) \ .
$$