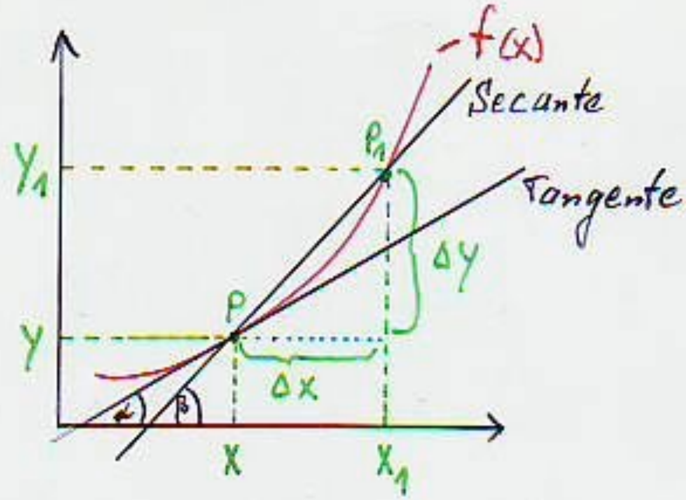
Matemáticas en Física

Diferenciación (cálculo diferencial):



tenemos una función continua $y = f(x)$.

Puntos $P(x, y)$
$P_1(x_1, y_1)$

cuociente de diferencia: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \tan\beta$$

→ El cuociente de diferencia es geometricamente la pendiente de la secante con respecto al eje X.

Si P_1 se acerca a P la secante se transforma en una Tangente en el punto P.

→ El cuociente de diferencia se transforma entonces en un cuociente diferencial:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= f'(x) = y'$$

El cuociente diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y'$

tambien se llama "1ª derivación de f(x) a x".

En forma geometrica la 1ª derivación de $f(x) = f'(x)$ representa la Tangente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x,y)$ con respecto al eje x:

$$\tan \alpha = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

$f'(x)$ se llama función derivada.

Esta función derivada $f'(x)$ se puede derivar de nuevo:

$$\frac{df'(x)}{dx} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ se llama 2ª derivación de f(x) a x.

Para la 3ª y mas derivaciones se operan en forma analoga.

Derivaciones comunes:

(no explicamos la deducción matemática de estas funciones)

$y = x^n \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$

$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = e^x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = e^x$

$y = \ln x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$y = \sin x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$

$y = \cos x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$

Reglas de la Diferenciación:

a) La derivación de una constante es igual cero:

$$\frac{da}{dx} = a' = 0.$$

b) La derivación de una suma es igual a la suma de las derivaciones:

$$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x) + \ldots) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots$$

ejemplo: $y = 3x^4 + 5x^2 - x - 6$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 10x - 1$$

...cont. Reglas de Derivación:

c) Un Factor constante se conserva a través de una derivación:

$$\frac{d}{dx}(a \cdot f(x)) = a \cdot f'(x)$$

ojo: sen ≡ sin en la bibliogr.

ejemplo: $y = 3 \cdot \operatorname{sen} x$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \cos x$$

d) Derivacion del producto de dos funciones:

Sea $y = u(x) \cdot v(x)$

es $\frac{dy}{dx} = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

ejemplo: $y = 2x \cdot \operatorname{sen} x$; substitución: $u \stackrel{!}{=} 2x$ y $v \stackrel{!}{=} \operatorname{sen} x$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x$$

e) Derivacion de cuociente de dos funciones:

Sea $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ (u y v son funciones de x)

entonces es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

ejemplo: $y = \tan x \rightarrow y = \sin x / \cos x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

f) Regla de la Cadena:

Sea y una funcion de u y u una funcion de x

$\rightarrow y = f(u) \quad y \quad u = u(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ejemplo 1: $y = \sin(ax)$

substitución: $y = \sin u$ con $u = ax$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \cos u = \cos ax \qquad y \ \frac{du}{dx} = a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a \cdot \cos ax$$

ejemplo 2: $y = A \cdot e^{ax}$

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot a \cdot e^{ax}$$

Cálculo Integral:

"El cálculo integral se pueden tratar como la inversion del cálculo diferencial. El objetivo es, buscar la funcion $F(x)$ de cual derivación es $f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

$d\,F(x) = f(x)\cdot dx$ se llama "diferencial" de la Funcion $F(x)$.

<u>Cuidado:</u> ¡No solamente $F(x)$ sino tambien $F(x) + C$ (C es cualquier constante) da diferenciado por resultado $f(x)$!

$\Rightarrow$ El Integral del Diferencial $f(x)dx$ esta definido en forma inequivoca / sin duda solamente hasta una <u>constante arbitraria</u>:

$$\boxed{y = \int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Este integral se llama <u>Integral indeterminado</u> de $f(x)\,dx$.

<u>Integrales comunes:</u>

$\int dx = x + C$

$\int a\,dx = ax + C$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}\cdot x^2 + C$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C$ (para $n \neq -1$)

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$ (para $x \neq 0$)

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$

El Integral determinado:

El integral determinado $\int_{x_1=a}^{x_2=b} f(x)\,dx$ entre los limites $x_1 = a$ y $x_2 = b$ se calcula de la siguiente manera:

1. averiguar el Integral indeterminado
2. calculo de la diferencia de los Valores que tiene el Integral para $x = a$ y $x = b$
   (la constante C se elemina durante el cálculo de la diferencia).

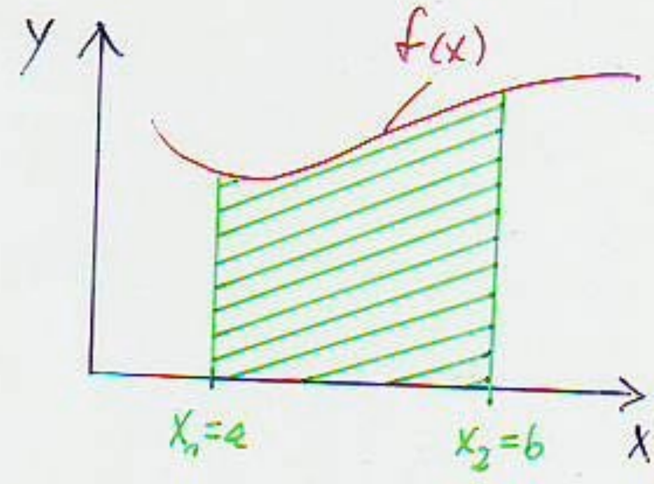
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

1. $\int_1^3 (x+x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 12\frac{2}{3}$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}} - (\underbrace{-\cos 0})$$
$$= 0 - (-1) = 1$$

En forma geométrica el Integral determinado $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área limitada por la curva $f(x)$, la eje de la abscisa y las ordenadas $x_1 = a$ y $x_2 = b$:



Usando el ejemplo 2, obtenemos que el área bajo la curva del seno entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ ($\hat{=} 90°$) es $1\,cm^2$ si elegimos en los ejes "x" y "y" la unidad 1cm: