Fis1513: Estática y Dinámica

Interrogación 1 - Pauta

Profesores: Rafael Benguria, Roberto Rodríguez, Ignacio Reyes

Fecha: 11 de Abril de 2013

Nombre: ____

P1	
P2	
P3	

Pregunta 1) "Convertidor de movimiento lineal a movimiento circular"

El dispositivo de la figura sirve para convertir movimiento lineal en movimiento circular. Consiste en dos barras largas, cada una con una ranura. Existe una barra fija ubicada en la recta $x = d$, y una barra de largo L pivoteada en el origen O de la figura. Las dos barras están ligadas por un pequeño cilindro, digamos el punto A de la figura que se puede desplazar libremente por las ranuras. Al moverse el punto A por la recta $x = d$, la barra pivoteada gira en torno al punto O. El giro de la barra está caracterizado por el ángulo θ de la figura.

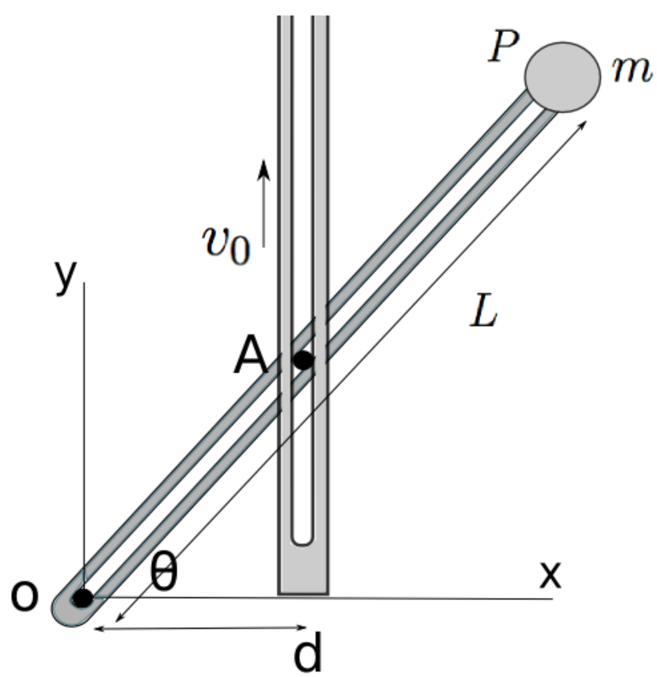
i) Encuentre la relación entre el ángulo θ de giro, y el desplazamiento y del punto A.

ii) Si el punto A se desplaza con rapidez v_0 (i.e., si $\dot{y} = v_0$), determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ de la barra OP como función de θ, y luego la aceleración angular $\ddot{\theta}$ como función de θ.

iii) Usando ii), determine el vector velocidad del punto P, cuando el punto A se mueve con rapidez uniforme v_0 a lo largo de la barra fija.

iv) Finalmente encuentre la aceleración de P bajo las mismas suposiciones.

v) ¿Cómo debiera variar la posición $y(t)$ del punto A para que la barra OP girara con velocidad angular constante ω?



1. Solución

i) De la figura, se tiene simplemente que

$$\tan\theta = \frac{y}{d} \Rightarrow y(\theta) = d\tan\theta \quad [1.0] \text{ p} \tag{1}$$

ii) Queremos imponer que $\dot{y} = v_0$, de modo que primero calculamos la derivada, recordando la regla de la cadena:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(d\tan\theta) = d\sec^2(\theta)\ \dot{\theta} = v_0 \tag{2}$$

de modo que

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{d}\cos^2(\theta) \quad [1.0] \text{ p} \tag{3}$$

Para calcular la aceleración, derivamos nuevamente:

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{d}\cos^2(\theta)\right) = -\frac{v_0}{d}2\cos(\theta)\sin(\theta)\ \dot{\theta} \tag{4}$$

pero $\dot{\theta}$ ya lo conocemos, de modo que tenemos:

$$\ddot{\theta} = -\frac{v_0}{d}2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{v_0}{d}\cos^2(\theta) \tag{5}$$

$$= -2\frac{v_0^2}{d^2}\sin\theta\cos^3\theta \quad [1.0] \text{ p} \tag{6}$$

iii) Sabemos que en coordenadas polares, la velocidad se escribe como

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{7}$$

En este caso, como el punto P se encuentra al extremo de la barra de largo L, claramente $\rho = L =$ constante, de modo que $\dot{\rho} = 0$ y $\dot{\theta}$ ya lo calculamos:

$$\vec{v} = \frac{Lv_0}{d}\cos^2(\theta)\ \hat{\theta} \quad [1.0] \text{ p} \tag{8}$$

iv) La aceleración es, en polares,

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right) \tag{9}$$

que en este caso es:

$$\vec{a} = -L\left(\frac{v_0}{d}\cos^2(\theta)\right)^2\hat{\rho} - 2L\frac{v_0^2}{d^2}\sin\theta\cos^3\theta\ \hat{\theta} \quad [1.0] \text{ p} \tag{10}$$

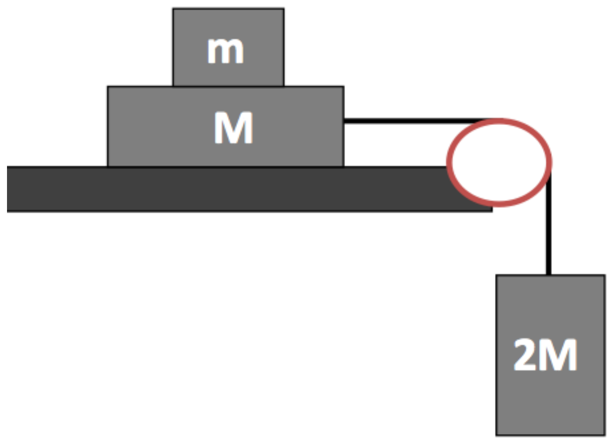
v) Si queremos que la barra gire con ω constante, entonces debemos imponer $\dot{\theta} = \omega$, lo cual implica que $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ siendo θ_0 algún ángulo inicial. De esta manera,

$$y(t) = d\tan(\theta) = d\tan(\omega t + \theta_0) \ [1.0] \text{ p} \tag{11}$$

Pregunta 2) El sistema de cuerpos mostrado en la figura está conectado mediante una cuerda y polea ideales. No hay roce con la mesa, mientras que el coeficiente de roce estático entre los bloques de masa m y M es μ_e.

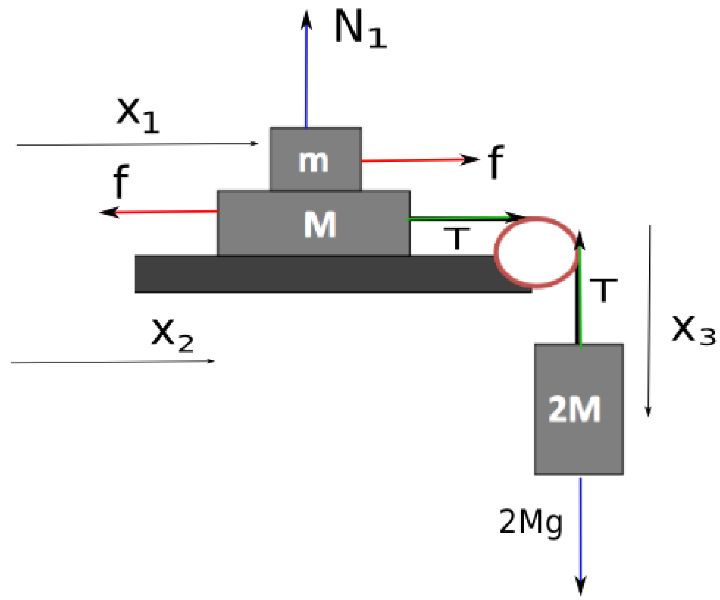
a) En el caso en que el bloque de masa m no se deslice, calcule la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda.

b) Determine el valor mínimo del coeficiente de roce estático μ_e entre los bloques de masas m y M necesario para que no exista deslizamiento entre ellos.



2. Solución

a) En la figura, hemos dibujado el sistema coordenado y las fuerzas relevantes del problema (si bien hay más fuerzas, pero no nos sirven).



Las ecuaciones relevantes del sistema son:

$$\underline{m} : f = m\,\ddot{x}_1 \tag{12}$$

$$\underline{M} : T - f = M\ddot{x}_2 \tag{13}$$

$$\underline{2M} : 2Mg - T = 2M\ddot{x}_3 \quad [1.5]\ \mathrm{p} \tag{14}$$

Además, claramente en este caso la ligadura es $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3$ (cuerda) y $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$ (condición de no deslizar) [0.5] p . Entonces llamamos $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = \ddot{x}$, y reemplazando (12) en (13) y eso en (14) tenemos:

$$T = (m + M)\ddot{x} \ \Rightarrow \ 2Mg - (m + M)\ddot{x} = 2M\ddot{x} \tag{15}$$

$$\ddot{x} = g\frac{2M}{3M + m} \Rightarrow T = g\frac{2M(m + M)}{3M + m} \quad [1.0]\ \mathrm{p} \tag{16}$$

b) De a) ya tenemos el valor de la fuerza de roce estático:

$$f = m\,\ddot{x} = g\frac{2Mm}{3M + m} \quad [1.0]\ \mathrm{p} \tag{17}$$

Al variar las masas, este roce puede ir aumentando, pero no puede aumentar más allá de su valor máximo $\mu_e N_1 = \mu_e mg$ [1.0] p, de modo que el μ_e mínimo necesario satisface:

$$g\frac{2Mm}{3M + m} = \mu_e mg \ \Rightarrow \ \mu_e = \frac{2M}{3M + m} \quad [1.0]\ \mathrm{p} \tag{18}$$

Pregunta 3) En la figura, el resorte de constante k y largo natural ℓ_0 está unido a una argolla de masa m que puede moverse a lo largo de un riel horizontal. No hay gravedad. El sistema se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura, con la masa ubicada a una distancia $A > 0$ del eje vertical.

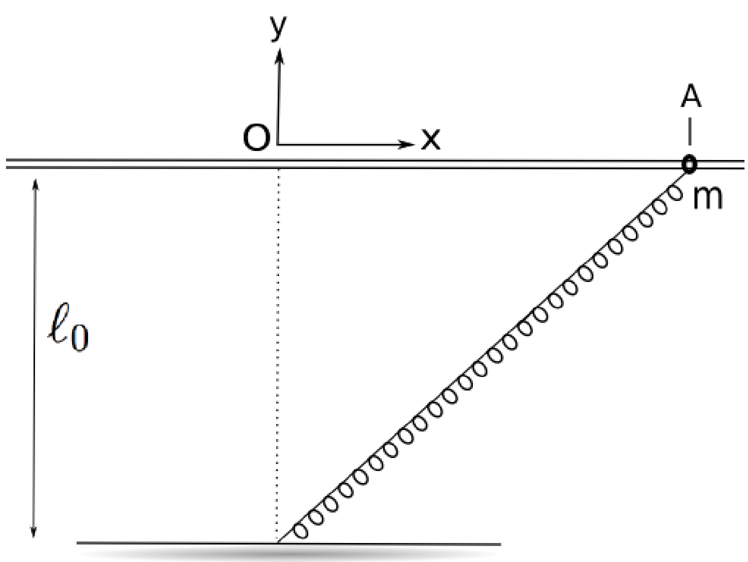
a) Asuma primero que el riel no tiene roce. Calcule la velocidad máxima v_{max} que alcanzará la masa m.

b) Ahora suponga que existe un coeficiente de roce dinámico μ_d entre la masa m y el riel. **Asuma** que m se mueve de ahora en adelante.

b.1) Dibuje un diagrama con **todas** las fuerzas que actúan sobre m. Utilizando la ley de Newton, calcule la normal $N(x)$ que actúa sobre m como función de la distancia x al origen O.

b.2) Utilizando lo anterior, escriba la ecuación que determina la velocidad v_f con la que pasaría m por el origen O (no necesita resolverla). Hint: la siguiente integral *podría* serles útil:

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{ds}{\sqrt{b^2 + s^2}} = \ln\left[\frac{b}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b^2}}\right] \qquad \alpha > 0, b > 0$$



3. Solución

a) Como en este caso no hay roce, la energía total $E = K + U$ se conserva. Entonces v_{max} se alcanza cuando U es mínima, es decir, en $x = 0$ [0.5] p. Además, en el instante inicial, el estiramiento del resorte respecto de su largo natural es $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = \sqrt{A^2 + \ell_0^2} - \ell_0$[1.0] p. Aplicando simplemente conservación de energía:

$$E_i = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \qquad E_f = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad [0.5]\ \text{p} \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta\ell = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{A^2 + \ell_0^2} - \ell_0\right) \quad [1.0]\ \text{p} \tag{20}$$

b.1) El largo del resorte en un instante "cualquiera" es $\ell(x) = \sqrt{\ell_0^2 + x^2}$. Para calcular la normal, basta con analizar la ecuación de Newton en el eje y:

$$\sum F_y = N - F_k \sin\theta = 0 \quad [0.5]\ \text{p} \tag{21}$$

donde F_k es la magnitud de la fuerza del resorte y θ el ángulo de la figura, siendo:

$$F_k = k\Delta\ell(x) \qquad\qquad \sin\theta = \frac{\ell_0}{\ell(x)} \quad [0.5]\ \text{p} \tag{22}$$

Entonces la normal es:

$$N = F_k \sin\theta = k\Delta\ell(x)\frac{\ell_0}{\ell(x)} = k\left(\ell(x) - \ell_0\right) = k\ell_0\left(1 - \frac{\ell_0}{\ell(x)}\right) \tag{23}$$

es decir:

$$N(x) = k\ell_0\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}}\right) \quad [1.0]\ \text{p} \tag{24}$$

b.2) Claramente conviene usar la ecuación de trabajo y energía (aunque también puede hacerse por fuerza). La diferencia de energías entre el instante inicial $x = A$ y final $x = 0$ sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\ell_0^2 + A^2} - \ell_0\right)^2 \quad [0.25]\ \text{p} \tag{25}$$

El trabajo que hacen las fuerzas no conservativas, en este caso sólo el roce, para la trayectoria que parte en $x = A$ y termina en $x = 0$ es

$$W_{roce} = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} \tag{26}$$

donde la fuerza de roce es $|\vec{f}| = \mu_d N(x)$, y como el roce siempre apunta en contra del desplazamiento, $\vec{f} \cdot \vec{dr} = -|f_r| dr$. En este caso, como la argolla se mueve hacia la izquierda, se tiene que $dr = -dx$. Por lo tanto el trabajo es:

$$W_{roce} = \int_A^0 \mu_d N(x) dx = \mu_d k \ell_0 \int_A^0 \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} \right) dx \tag{27}$$

$$= \mu_d k \ell_0 \left[\int_A^0 dx - \ell_0 \int_A^0 \frac{1}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} dx \right] \qquad \text{usamos hint...} \tag{28}$$

$$= \mu_d k \ell_0 \left[-A - \ell_0 \ln \left(\frac{\ell_0}{A + \sqrt{\ell_0^2 + A^2}} \right) \right] \text{[0.5] p} \tag{29}$$

Finalmente, la ecuación que determina la velocidad es simplemente la ecuación de balance energía-trabajo:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\ell_0^2 + A^2} - \ell_0 \right)^2 = \mu_d k \ell_0 \left[-A - \ell_0 \ln \left(\frac{\ell_0}{A + \sqrt{\ell_0^2 + A^2}} \right) \right] \text{ [0.25] p} \tag{30}$$