1. Velocidades media e instantánea:

Un leopardo acecha 20 metros al este de un escondite de un observador
En $t=0$, el leopardo ataca en 50m al este del observador. El leopardo corre en línea recta. Un análisis posterior de la gravación revela que, durante los primeros 2.0s del ataque, la coordenada x del leopardo varía con el tiempo según la ecuación:

$$x = 20m + (5.0\, m/s^2).t^2$$

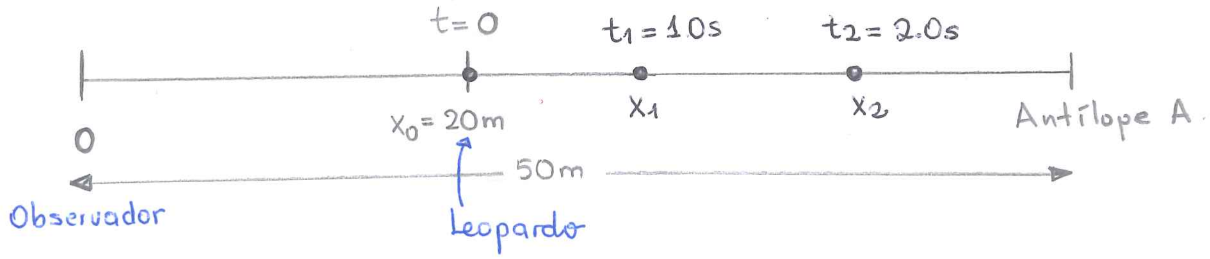
(a). Obtenga el desplazamiento del leopardo entre $t_1 = 1.0s$ y $t_2 = 2.0s$.

En $t_1 = 1.0s$ $\quad x_1 = 20m + \left(5.0\, m/\cancel{s^2}\right).\left(1.0\cancel{s}\right)^2$

$$\boxed{x_1 = 25 \text{ metros}}$$

En $t_2 = 2.0s$ $\quad x_2 = 20m + \left(5.0\, m/\cancel{s^2}\right).\left(2.0\cancel{s}\right)^2$

$$\boxed{x_2 = 40 \text{ metros}}$$



El desplazamiento en este intervalo

$$\Delta X = X_2 - X_1 = 40 \text{ metros} - 25 \text{ metros} = 15 \text{ metros}.$$

$$\boxed{\Delta X = 15 \text{ metros}}$$ //.

(b). Calcule la velocidad media en dicho intervalo.

$$V_{med_x} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \frac{40m - 25m}{2.0s - 1.0s} = \frac{15m}{1.0s} = 15\, m/s$$

(c). Con $\Delta t = 0.1s$, el intervalo es de $t_1 = 1.0s$ a $t_2 = 1.1s$, en t_2, la posición es:

$$X_2 = 20m + \left(5.0\, m/s^2\right)\left(1.1s\right)^2$$

$$X_2 = 26.05m.$$

Por lo tanto, la velocidad media en este intervalo es:

$$v_{med\,x} = \frac{26.05\,m - 25.0\,m}{1.1\,s - 1.0\,s} = \underline{10.5\,m/s}.$$

Para $\Delta t = 0.1s$ y $\Delta t = 0.001s$, seguir el mismo ejemplo anterior:
Las respuestas son: 10.05 m/s y 10.005 m/s respectivamente.

(d). Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo, y con ella calcule V_x en $t = 1.0s$ y $t = 2.0s$.

Obtenemos la velocidad instantánea en función del tiempo derivando la expresión de x respecto a t.

Derivada de: t^n es $n t^{n-1}$

$$x = 20m + (5\,m/s^2) \cdot t^2$$, al derivar tenemos,

$$V_x = \frac{dx}{dt} = (5\,m/s^2) \cdot 2t$$

Por lo tanto,

en $t = 1.0s \longrightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = (5\,m/\cancel{s^2}) \cdot 2(1.0\cancel{s})$

$$\boxed{V_x = 10\,m/s}$$

en $t = 2.0s \longrightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = (5\,m/\cancel{s^2}) \cdot 2(2.0\cancel{s})$

$$\boxed{V_x = 20\,m/s.}$$

2. Suponga que la velocidad v_x de un auto en el tiempo t, esta dada por:

$$v_x = 60\ m/s + (0.50\ m/s^3)\ t^2$$

(a). Calcule el cambio de velocidad entre $t_1 = 1.0s$ y $t_2 = 3.0s$.

Primero obtenemos la Velocidad en cada instante sustituyendo t, en la ecuación

$$\text{En } t_1 \Rightarrow v_{1x} = 60m/s + (0.50\ m/\cancel{s^3}).(1.0\cancel{s})^2$$

$$v_{1x} = 60.5m/s$$

$$\text{En } t_2 \Rightarrow v_{2x} = 60m/s + (0.50m/s^3).(3.0s)^2$$

$$v_{2x} = 64.5\ m/s.$$

Por lo tanto el cambio de velocidad ΔV_x, es:

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5\ m/s - 60.5\ m/s$$

$$\boxed{\Delta v_x = 4\ m/s.}$$

(b). Calcule la aceleración media en el intervalo.

$$a_{medx} = \frac{\overbrace{v_{2x} - v_{1x}}^{\Delta Vx}}{t_2 - t_1} = \frac{4\ m/s}{3.0s - 1.0s} = 2\ m/s^2$$

acelera dado que v y a_{medx} son +

(c.) Obtenga la aceleración instantanea en $t_1 = 1.0s$ tomando como $\Delta t = 0.1s$.

Cuando $\Delta t = 0.1s$,

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$0.1s = t_2 - 1.0s$$

$$0.1s + 1.0s = t_2$$

$$\boxed{1.1s = t_2}$$

$$v_{2x} = 60m/s + (0.50\ m/s^3).(1.1s)^2$$

$$v_{2x} = 60.605\ m/s$$

$$\Delta V_x = V_{2x} - V_{1x} = 60.605m/s - \left[60m/s + (0.5m/s^2).(1.0s)\right]$$

$$\boxed{\Delta V_x = 0.105\ m/s}$$

Ahora $a_{med\,x} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{0.105\ m/s}{0.1s} = 1.05\ m/s^2$

Se repite el mismo procedimiento para

$\Delta t = 0.01s \implies a_{med\,x} = 1.005\ m/s^2$

$\Delta t = 0.001s \implies a_{med\,x} = 1.0005\ m/s^2$

(d). Deduzca una expresión para la aceleración instantanea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en $t = 1.0s$ y $t = 3.0s$.

La aceleración instantanea es $a_x = \frac{dV_x}{dt}$ por lo tanto:

$$V_x = 60\,m/s + (0.50\,m/s^3).t^2$$

$t = 1.0s \implies a_x = \frac{dV_x}{dt} = (0.50\,m/s^3).2t = (0.50\,m/s^3).2(1.0s)$

$$\boxed{a_x = 1\ m/s^2}$$

$t = 3.0s \implies a_x = \frac{dV_x}{dt} = (0.50\,m/s^3).2t = (0.50\,m/s^3).2(3.0s)$

$$\boxed{a_x = 3\,m/s^2}$$

3.) Movimiento ascendente y descendente en caída libre:

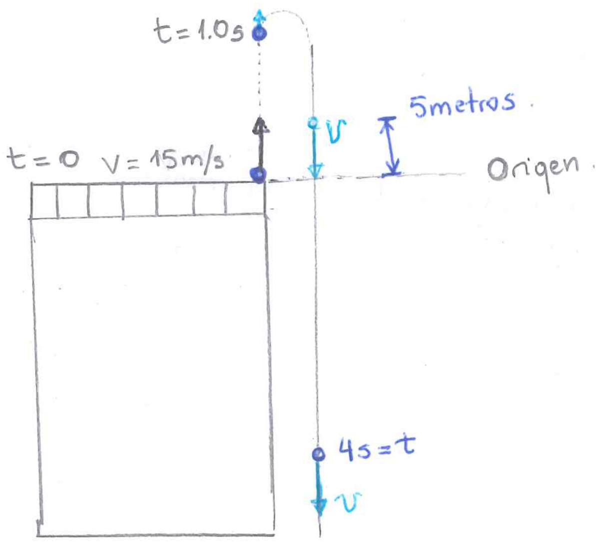
Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota abandona la mano en un punto a la altura del barandal de la azotea con velocidad ascendente de 15.0 m/s, quedando en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar $g = 9.8\ m/s^2$

Obtenga: (a). La posición y la velocidad de la pelota 1.0 s y 4.0 s después de soltarla.

(b) la Velocidad cuando la pelota está a 5.0 m sobre el barandal

(c). La altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza

(d). La aceleración de la pelota en su altura máxima.



(a). Posición:

$$y = y_0 + V_{0y}.t + \frac{1}{2}a_y.t^2$$

$$y = \cancel{y_0}^{0} + V_{0y}.t + \frac{1}{2}(-g).t^2$$

$$y = 15m/s.t + \frac{1}{2}(-9.8\ m/s^2).t^2$$

Cuando $t = 1.0s \Rightarrow y = 15m/s\,(1.0s) + \frac{1}{2}(-9.8\ m/s^2)(1.0s)^2$

$$\boxed{y = +10.1\ m}$$

Velocidad:

$$V_y = V_{0y} + a_y.t = V_{0y} + (-g)t$$

$$\boxed{V_y = +5.2\ m/s}$$

Cuando $t = 4.0s$, se realiza el mismo procedimiento por lo que obtenemos.

$y = -18.4 m$ (por debajo del origen)

$V_y = -24.2 m/s$ (mayor que la rapidez inicial, lo que es lógico para los puntos por debajo del punto de lanzamiento)

(b). Velocidad cuando la pelota está a 5.0m sobre el barandal.

En algunos problemas es util tener una relación entre posición, velocidad y aceleración que no incluya el tiempo.

$$\boxed{a_y = \frac{V_y - V_{oy}}{t - \cancel{t_0}^{0}}} \; ; \quad V_y = V_{oy} + a_y . t$$

despejando t, tenemos:

$$t = \frac{V_y - V_{oy}}{a_y}$$

$\boxed{\text{En Ec. } y = y_0 + V_{oy} + \frac{1}{2} a_y . t^2}$ reemplazando t, tenemos.

$$y = y_0 + V_{oy}\left(\frac{V_y - V_{oy}}{a_y}\right) + \frac{1}{2} a_y \left(\frac{V_y - V_{oy}}{a_y}\right)^2.$$

Despejando V_y^2, tenemos:

$$2a_y(y - y_0) = 2\cancel{a_y} V_{oy}\left(\frac{V_y - V_{oy}}{\cancel{a_y}}\right) + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cancel{a_y^2} \frac{(V_y - V_{oy})^2}{\cancel{a_y^2}}$$

$$2 a_y (y - y_0) = 2 V_{oy} V_y - 2 V_{oy}^2 + (V_y - V_{oy})^2$$

$$2 a_y (y - y_0) = \cancel{2 V_{oy} V_y} - 2 V_{oy}^2 + V_y^2 - \cancel{2 V_{oy} V_y} + V_{oy}^2$$

Simplificando tenemos:

$$\boxed{V_y^2 = V_{oy}^2 + 2 a_y (y - y_0).}$$

solo con aceleración constante!

$$V_y^2 = V_{oy}^2 + 2(-g)(y - 0)$$

$$V_y^2 = (15 m/s)^2 + 2(-9.8 m/s^2) . y.$$

cuando la bola está sobre el origen $y = 5$ metros

$$\boxed{V_y = \pm 11.3 m/s}$$

c.) La altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza.

En el instante en que llega al punto más alto, $V_y = 0$, por lo tanto.

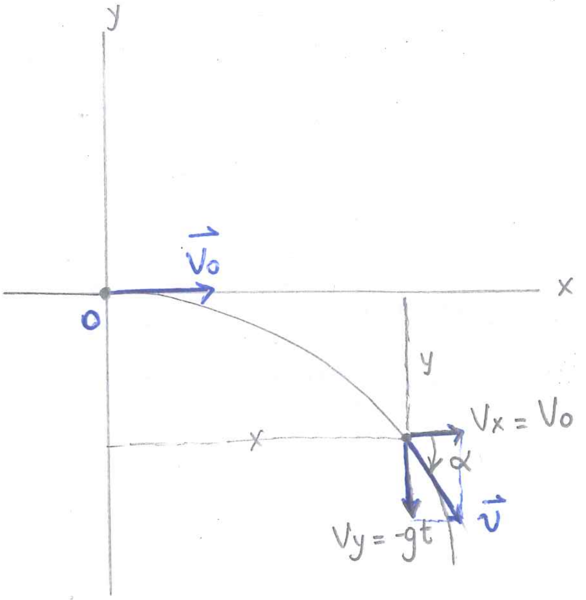
$$\cancel{V_y^2}^{\,0} = V_{oy}^2 + 2a_y\,(y - \cancel{y_o}^{\,0})$$

$$0 = V_{oy}^2 + 2(-g)\,y$$

$$\frac{V_{oy}^2}{2g} = y \Rightarrow y = \frac{(15.0\,m/s)^2}{2\,(9.8\,m/s)} = +11.5\,m$$

(d). La aceleración sigue siendo $a_y = -g = -9.8\,m/s^2$. La misma que cuando esta subiendo o bajando. La pelota se detiene un instante en el punto mas alto pero su velocidad está cambiando continuamente, de valores positivos a negativos pasando por cero.

4. Un acrobata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde su velocidad es horizontal con magnitud 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia del borde y velocidad de la moto después de 0.5s.



Escogemos el origen en el borde del risco, donde la moto se convierte en proyectil, por lo tanto:

$x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

La velocidad inicial es puramente horizontal, es decir $\alpha_0 = 0$,

Entonces las componentes son:

$$V_{0x} = V_0 \cos \cancel{\alpha_0}^{\,0} = 9.0\,m/s$$

$$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen} \cancel{\alpha_0}^{\,0} = 0\,m/s.$$

La posición de la moto se encuentra de la sgte manera:

$$x = \cancel{x_0}^{\,0} + V_{0x} \cdot t = (9.0\,m/s)(0.50\,s) = 4.5\,m.$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2}(9.8\,m/s^2)(0.50\,s)^2 = -1.2\,m$$

↳ (-) significa que esta debajo del punto inicial.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 4.7\,m \,/\!/.$$ Distancia a la que esta la moto del origen

Qué velocidad tiene en $t = 0.50s$. Las componentes de la velocidad en ese momento son:

$$v_x = V_{0x} = 9.0\,m/s$$

$$v_y = -gt = (-9.8\,m/s^2)(0.50\,s) = -4.9\,m/s$$

Si usamos los vectores unitarios, la velocidad en $t = 0.50s$ es:

$$\vec{v} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} = (9.0\,m/s)\hat{\imath} + (-4.9\,m/s)\hat{\jmath}$$

La magnitud de la velocidad en este instante es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{(9.0 m/s)^2 + (-4.9 m/s^2)} = 10.2 m/s$$

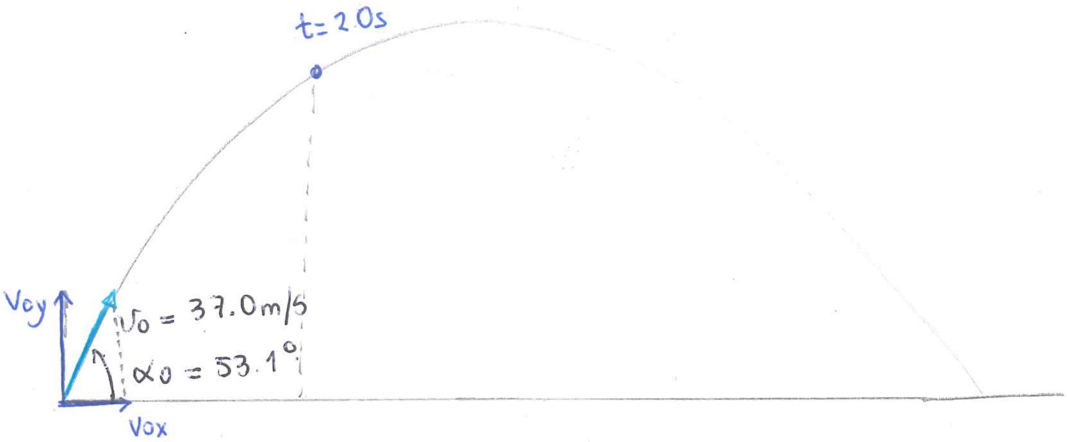
$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \; ; \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-4.9 m/s}{9.0 m/s}\right)$$

$$\alpha = -29^\circ$$

La velocidad está dirigida 29° debajo de la horizontal.

5. Un bateador golpea una pelota de modo que ésta adquiere una rapidez inicial $V_0 = 37\,m/s$. con un angulo inicial $\alpha_0 = 53.1$ grados, en un lugar donde $g = 9.8\,m/s^2$.

(a). Calcule la posición de la bola y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2.0s$.



La velocidad inicial tiene componentes en x y y:

$\cos\alpha_0 = \dfrac{c.\ ady}{hip.}$; $\cos\alpha_0 = \dfrac{V_{ox}}{V_o}$; $V_{ox} = V_o \cos\alpha_0 = 37\,m/s \cdot \cos(53.1°) = 22.2\,m/s$

$sen\,\alpha_0 = \dfrac{c.\ opuesto}{hip}$; $sen\,\alpha_0 = \dfrac{V_{oy}}{V_o}$; $V_{oy} = V_o\, sen\,\alpha_0 = 37\,m/s \cdot sen(53.1°) = 29.6\,m/s$

Nos piden x, y, V_x y V_y en el instante $t = 2.0s$.

Entonces:

$$x = \cancel{x_0}^{0} + V_{ox} \cdot t = (22.2\,m/s)(2.0s) = \underline{44.4\,m}$$

$$y = V_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = (29.6\,m/s)(2.0s) - \frac{1}{2}(9.8\,m/s^2)(2.0)^2 = \underline{39.6\,m}.$$

$$V_x = V_{ox} = \underline{22.2\,m/s}$$

$$V_y = V_{oy} - gt = 29.6\,m/s - 9.8\,m/s^2 \cdot (2.0s) = \underline{10.0\,m/s}$$

La componente de la velocidad es positiva, o sea que la pelota va en ascenso por lo tanto la magnitud y direccion de la velocidad son:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(22.2\,m/s)^2 + (10.0\,m/s)^2} = 24.3\,m/s$$

$$\tan\alpha_0 = \frac{V_y}{V_x} \; ; \; \alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10\,m/s}{22.2\,m/s}\right) = 24.2°$$

(b). Determine cuando la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto:

En el punto más alto, La velocidad Vertical V_y es cero,

$$V_y = 0 = V_{0y} - g t_1$$

$$V_{0y} = g t_1 \quad ; \quad \frac{V_{0y}}{g} = t_1.$$

$$; \; t_1 = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}} = 3.02 \text{ s}$$

La altura h, es el valor de y cuando $t = t_1 = 3.02\text{s}$.

$$h = V_{0y} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$, reemplazando los valores.

$$h = 44.7 \text{m}$$

(c). Obtenga el alcance horizontal R.

Dos pasos: Cuando cae la pelota al suelo?
Ocurre cuando $y = 0$, digamos en t_2:

Entonces:

$$y = y_0 \Rightarrow 0$$

$$\cancel{y - y_0}^{\,0} = V_{0y} \operatorname{sen} \alpha_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$ sacando factor común

$$0 = \left(V_{0y} \cdot \operatorname{sen}\alpha_0 - \frac{1}{2} g t_2\right) \cdot t_2$$

$$V_{0y} \cdot \operatorname{sen}\alpha_0 - \frac{1}{2} g t_2 = 0$$

$$t_2 = \frac{- V_{0y} \cdot \operatorname{sen}\theta_0 \cdot -2}{g}$$

V_{0y}

$$\boxed{t_2 = \frac{2\,\boxed{V_{0y} \cdot \operatorname{sen}\alpha_0}}{g}} \qquad t_2 = \frac{2 \cdot 29.6 \text{ m/s}}{9.8 \text{m/s}} = 6.04\text{s}$$

Rango R, es el valor de x cuando la pelota vuelve al suelo, o sea en $t_2 = 6.04\text{s}$.

$$R = \cancel{x_0}^{\,0} + \underbrace{V_{0y} \cdot \cos\alpha_0}_{V_{0x}} \cdot t_2$$

$$R = V_{0x} \cdot t_2 = 22.2 \text{m}/\cancel{s} \cdot 6.04\cancel{s} = 134 \text{ m}$$