Estática y Dinámica

Clase 06

Leyes de Newton

1- Introducción
2- Leyes de Newton
    a. Primera Ley
    b. Segunda Ley
    c. Tercera Ley
3- Ejemplos

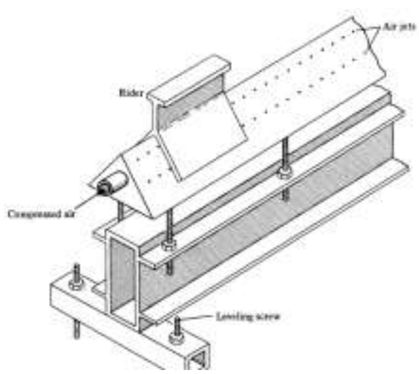
1-Introducción

Las leyes del movimiento de Newton, contrario a lo que pensamos, no son de manera alguna evidentes. En el sistema de leyes de Aristóteles (384-322 a.C.), para mantener un cuerpo en movimiento uniforme es necesario que sobre el mismo actúe una fuerza. La mecánica aristotélica fue aceptada por miles de años debido a que parece intuitivamente correcta. Un razonamiento cuidadoso a partir de la observación y la experimentación se hizo necesario para romper el molde aristotélico. Mucho de nosotros, no estamos aún acostumbrados a pensar en términos newtonianos y como veremos se necesita de algún esfuerzo y práctica para aprender a analizar diversas situaciones desde este punto de vista.

2-Leyes de Newton

Es importante entender que partes de las leyes de Newton son basadas en experimentos y que partes son frutos de definiciones. Al discutir las leyes debemos también aprender cómo aplicarlas, no sólo porque son relevantes a la hora de resolver cuantitativamente un problema sino porque también son esenciales para entender realmente los conceptos involucrados.

Comencemos apelando directamente al experimento.



Riel o carril de Aire

El riel mostrado en la figura es una viga con agujeros por los que puede salir el aire. Cuando esto sucede, el carro sobre la viga flota disminuyendo considerablemente el roce. Si eliminamos entonces las corrientes de aire en el medio exterior el carro se comporta como si estuviese aislado en su movimiento sobre la viga.

Analicemos entonces cómo se comporta el carro.

Supongamos que liberamos el carro desde el reposo. Como esperamos, el carro se mantiene en reposo. Luego le damos un pequeño impulso y lo dejamos mover libremente. El movimiento es tal que el carro sin roce con el riel se movería indefinidamente y a velocidad constante. Podemos generalizar el experimento a dos y tres dimensiones.

Primera Ley de Newton

En nuestra discusión del experimento del riel de aire pasamos por alto un punto importante. El movimiento tiene sentido sólo respecto a un sistema de coordenadas particular y al describirlo es esencial especificar el sistema de coordenadas que estamos utilizando. Por ejemplo, al describir el movimiento a lo largo del riel implícitamente utilizamos un sistema de coordenadas fijo a la viga. Sin embargo, somos libres de escoger cualquier sistema de coordenadas incluyendo sistemas que se mueven en relación a la viga. En un sistema de coordenadas que se mueve uniformemente en relación a esta, el carro se mueve a velocidad constante. Tal sistema de coordenadas es llamado de *sistema inercial*. Claramente, no todos los sistemas de coordenadas son inerciales; en un sistema de coordenadas que acelera respecto al riel el carro no se mueve a velocidad constante. Sin embargo, siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas respecto al cual cuerpos aislados se mueven uniformemente.

Esta es la esencia de la primera ley de Newton:

La primera ley de Newton del movimiento es la afirmación de que los sistemas de coordenadas inerciales existen.

La primera ley de Newton es parte definición y parte hecho experimental. Cuerpos aislados se mueven uniformemente en sistemas inerciales en virtud de la definición de un sistema inercial. En contraste, el hecho de que los sistemas inerciales existan es un hecho sobre el mundo físico.

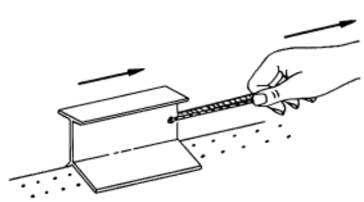
Otra forma de enunciar la primera ley de Newton es:

Todo cuerpo mantiene su estado de reposo o movimiento uniforme (i.e $v = cte$.) a menos que actúe una fuerza sobre él.

La primera ley de Newton levanta una serie de preguntas tales como, ¿qué entendemos por "cuerpo aislado"? que definiremos más adelante.

Segunda Ley de Newton

Volviendo al experimento del riel de aire, supongamos que tenemos un cuerpo de masa m (más adelante definiremos la masa). Aplicando una fuerza sobre el cuerpo podemos determinar que la aceleración provocada por esta es, $a = F/m$, o también, $F = ma$.



Como la aceleración es un vector y la masa es un escalar esperamos también que la fuerza sea un vector. Asumir esto parece trivial pero no lo es, su justificación yace en el experimento de donde encontramos que las fuerzas obedecen el *principio de superposición*: La aceleración producida por varias fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la suma vectorial de las aceleraciones producidas por cada una de las fuerzas que actúan separadamente.

Esto hecho no sólo confirma la naturaleza vectorial de la fuerza sino que también nos permite analizar problemas considerando una fuerza a la vez.

Si $\vec{a}$ es la aceleración neta y $\vec{a}_i$ es la aceleración debida a la fuerza $\vec{F}_i$ entonces tenemos que:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m\vec{a}_i = m\sum_i \vec{a}_i$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

Esta es la segunda ley de Newton.

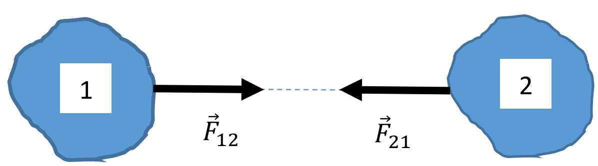
La aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre esta y está dirigida en la dirección de dicha fuerza.

Es importante entender claramente que la fuerza no es meramente una cuestión de definición. Las fuerzas siempre aparecen de interacciones entre sistemas y si alguna vez encontramos una aceleración sin una interacción estaremos en un tremendo lio. Es la interacción la que es físicamente significativa y es esta la responsable por la fuerza. Por esta razón, cuando aislamos un cuerpo de su entorno, esperamos que el cuerpo se mueva uniformemente en un sistema inercial. Aislar, significa eliminar interacciones. Podríamos preguntarnos si es posible aislar un cuerpo. La respuesta hasta donde sabemos es si. Todas las interacciones conocidas disminuyen con la distancia.

Tercera Ley de Newton

El hecho de que la fuerza es necesariamente el resultado de una interacción entre dos sistemas queda establecido de manera explícita a través de la tercera Ley de Newton.

La tercera Ley establece que las fuerzas aparecen siempre en pares, si un cuerpo "1" ejerce una fuerza $\vec{F}_{21}$ sobre un cuerpo "2" entonces existe una fuerza $\vec{F}_{12}$ del cuerpo "1" debido al cuerpo "2" tal que: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



¿Cómo determinar la masa de un cuerpo?

Supongamos que tenemos un cuerpo y comenzamos diciendo de manera arbitraria que tiene masa m_1. De la tercera Ley de Newton, al interactuar con un cuerpo "2" escribimos,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

de la segunda Ley,

$$m_2\vec{a}_2 = -m_1\vec{a}_1$$

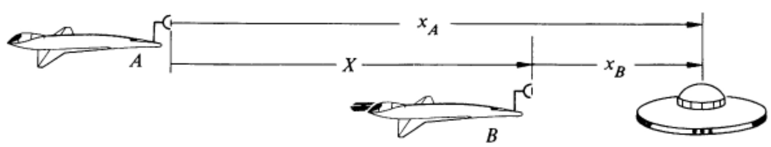
de donde,

$$m_2 = m_1 \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$$

Notemos que la segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ sólo es válida en sistemas inerciales. La existencia de sistemas inerciales parece en primera instancia trivial pues la Tierra nos provee de manera razonable un buen sistema inercial para las observaciones cotidianas. Sin embargo, no hay nada trivial acerca del concepto de sistemas inerciales como el siguiente ejemplo nos muestra.

Ejemplo, Astronauta en el espacio

Dos naves se mueven en el espacio vacío persiguiendo un platillo volador. Los capitanes de las dos naves A y B deben definir si el platillo se mueve libremente o está acelerando. A, B y el platillo se mueven en línea recta.



El capitán de la nave A fija el origen de su sistema de coordenadas fijo a la nave y mide la distancia a al platillo en función del tiempo a través de la coordenada $x_A(t)$. De $x_A(t)$ él calcula la velocidad $v_A = \dot{x}_A(t)$ y la aceleración $a_A = \ddot{x}_A(t)$. El resultado es mostrado en los siguientes gráficos:

El capitán A concluye entonces que la aceleración del platillo es $a_A = 1000\, m/s^2$ y por lo tanto asume que la fuerza sobre este es $F_A = Ma_A$ donde M es la masa del platillo.

El capitan B realiza el mismo procedimiento y encuentra que la aceleración es $a_B = 950\, m/s^2$ concluyendo entonces que la fuerza sobre el platillo es $F_B = Ma_B$.

Esto presenta un serio problema. No hay nada arbitrario acerca de la fuerza, si observadores diferentes obtienen valores diferentes de la fuerza, al menos uno de ellos debe estar equivocado.

Pero los capitanes A y B conocen muy bien las leyes de Newton y saben que son válidas solamente en sistemas inerciales. ¿Cómo pueden decidir si sus sistemas son o no inerciales?

El capitán A comprueba que todos sus motores están apagados. Al ver que realmente lo están, él sospecha que no está acelerando y que su nave espacial define un sistema inercial. Para chequear que realmente este es el caso él realiza un simple experimento. Observa que un lapiz, dejado cuidadosamente en reposo flota sin moverse y conluye que la aceleración del mismo es despresiable y que él está en un sistema inercial[1].

La determinación de la fuerza sobre el platillo por el capitán A debe ser correcta porque A es un sistema inercial. Pero, ¿Qué podemos decir acerca de las observaciones realizadas por el capitán B? Para responder a esta pregunta escribamos la relación entre x_A y x_B.

De la figura

$$x_A(t) = x_B(t) + X_{AB}(t)$$

donde X_{AB} es la posición de B relativa a A[2]. Diferenciando dos veces en relación al tiempo tenemos;

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_B + \ddot{X}_{AB}$$

Como el sistema A es inercial, la segunda ley de Newton para el platillo es,

$$F_{real} = M\ddot{x}_a$$

donde F_{real} es la fuerza que realmente actúa sobre el platillo.

¿Qué hay de las observaciones realizadas por B? La fuerza aparente observada por B es,

$$F_{B,\ aparente} = M\ddot{x}_B$$

y utilizando el resultado anterior escribimos,

$$F_{B,\ aparente} = F_{real} - M\ddot{X}_{AB}$$

Esto es, B no mide la fuerza real al menos que $\ddot{X}_{AB} = 0$. Sin embargo, $\ddot{X}_{AB} = 0$ sólo cuando B se mueve uniformemente en relación a A. Como sospechamos este no es el caso en este ejemplo. El capitán B ha dejado los motores encendidos y está acelerando en relación a A a $50\ m/s^2$. Después de apagar los motores él obtendrá el mismo valor de la fuerza obtenido por A.

Aunque hemos considerado sólo el movimiento en línea recta en el ejemplo anteiror, es fácil generalizar el resultado a tres dimensiones. Si $\vec{R}_{AB}$ es el vector del origen de un sistema inercial (A) al origen de otro sistema de coordenadas tenemos,

$$\vec{R}_A(t) = \vec{R}_B(t) + \vec{R}_{AB}(t)$$

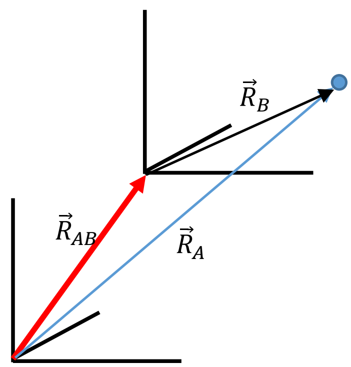
$$\vec{a}_A(t) = \vec{a}_B(t) + \vec{a}_{AB}(t)$$

Entonces,

[1] Si la nave estuviera acelerando0.5 el lapiz estaría acelerando relativo a la cabina.

[2] Es como observamos a B desde A.

$$\vec{F}_{aparente} = \vec{F}_{real} - M\vec{a}_{AB}.$$



Si $\vec{a}_{AB} = \vec{0}$, etonces $\vec{F}_{aparente} = \vec{F}_{real}$, lo que significa que el segundo sistema de coordenadas es también inercial. De hecho, hemos probado lo que inicialmente dijimos, que cualquier sistema que se mueve uniformemente con respecto a un sistema inercial es también inercial.

A veces nos gustaría realizar mediciones en sistemas no inerciales. ¿Qué debemos hacer para obtener las ecaciones del movimiento correctas? La respuesta está en la relación anterior. Podemos pensar en el último término como en una fuerza adicional que llamaremos *fuerza ficticia*[3]. Escribimos entonces,

$$\vec{F}_{aparente} = \vec{F}_{real} + \vec{F}_{ficticia}.$$

donde $\vec{F}_{ficticia} = -M\vec{a}_{AB}$. Donde M es la masa de la partícula y $\vec{a}_{AB}$ es la aceleración del sistema no inercial en relación a cualquier sistema inercial.

Ejemplos de apicación

Si no sabemos aplicar las leyes de Newton, las ecuaciones que se derivan de estas carecen de sentido. Nuestro propósito en este punto será interiorizar una serie de pasos lógicos analizando algunos ejemplos simples.

Pasos y algoritmo de solución de problemas

1- Mentalmente identifique los cuerpos que interactuan (cada uno de los cuales será tratado como una masa puntual).

2- Identiifque todas las fuerzas que actuan sobre cada uno de ellos y realice el diagrama de fuerzas como sigue:

- Represente el cuerpo por un punto o un simbolo simple.

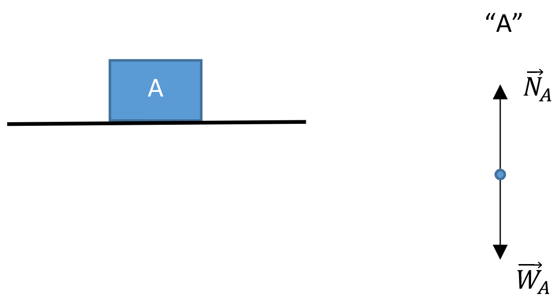
[3] El término ficticio indica que no hay una interacción real.

- Dibuje los vectores fuerzas sobre la masa (para todas las fuerzas que actuan sobre el cuerpo)[4]

3- Escoger un sistema adecuado de coordenadas (sistema de referencia)

4- Representamos las fuerzas y aceleraciones en dicho sistema y aplicamos la segunda Ley de Newton (ec. de movimiento) para cada uno de los cuerpos.

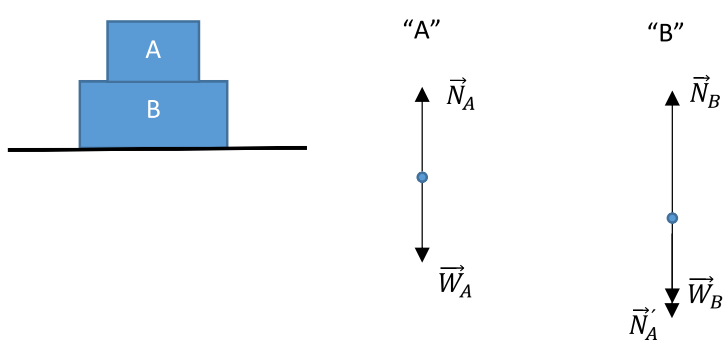
Ejemplo 1: Diseñe el diagrama de fuerzas para el bloque A en la figura y escriba la segunda ley de Newton para el mismo.



Donde $\vec{N}_A$ es la fuerza normal y $\vec{W}_A$ es el peso.

De la segunda Ley, $\vec{N}_A + \vec{W}_A = \vec{0}$.

Ejemplo 2: Diseñar el diagrama de fuerzas para los bloques en la figura y determinar las fuerzas normales sobre cada cuerpo.



Donde $\vec{N}_A$: fuerza que B ejerce sobre A (normal a la superficie) y $\vec{N}_A'$ la fuerza que A ejerce sobre B.

De la tercera Ley de Newton, $\vec{N}_A = -\vec{N}_A'$ $\left(|\vec{N}_A| = |\vec{N}_A'|\right)$. Tomando un sistema de coordenadas fijo a cada cuerpo, con el eje y vertical (en la dirección de las fuerzas) obtenemos:

[4] Este punto puede ser confuso. Sólo se deben dibujar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, no las fuerzas ejercidas por estos.

Cuerpo A:

$$N_A - W_A = 0$$

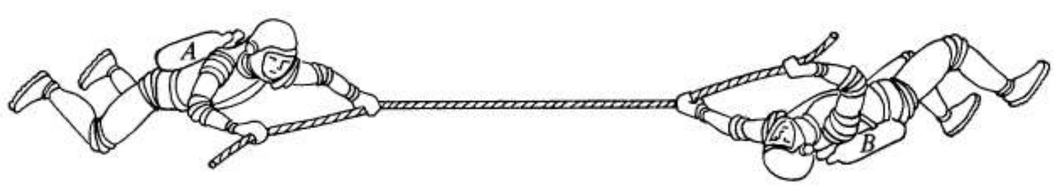
$$N_A = m_A g$$

Cuerpo B:

$$N_B - N_A^{\prime} - W_B = 0$$

$$N_B = N_A + W_B = (m_A + m_B)g$$

Ejemplo 3: Dos astronautas que se encontraban inicialmente en reposo en el espacio comienzan a halarse mutuamente a través de una cuerda. Sus masas son M_A y M_B y la masa de la cuerda m_c es despreciable. El astronuata A, más fuerte que B puede halar a este con una fuerza maxima F_A mayor que F_B (la fuerza máxima que B podría ejercer sobre A).



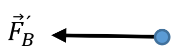
Encuentre el movimiento de cada astronauta.

Diagrama de fuerzas de cada cuerpo

A:

Cuerda:

B:



Notemos que las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ ejercidas por los astronautas actúan sobre la cuerda, no sobre los astronautas. Las fuerzas ejercidas por la cuerda sobre los astronautas son $\vec{F}_A^{\prime}$ y $\vec{F}_B^{\prime}$.

Tomemos el sistema de coordenadas con el eje x en la horizontal (positivo hacia la derecha).

De la tercera ley de Newton,

$$F_A^{\prime} = F_A \quad \text{y} \quad F_B^{\prime} = F_B \tag{1}$$

La ecuación de movimiento para la cuerda es:

$$F_B - F_A = m_r a_r$$

como la masa de la cuerda es despreciable, tomamos $m_r = 0$ y entonces, $F_B = F_A$. Substituyendo en (1) obtenemos,

$$F_A^{'} = F_B^{'} \tag{2}$$

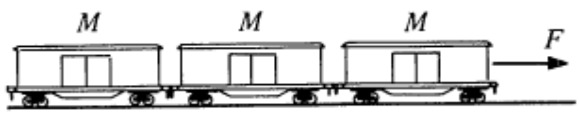
Esto quiere decir que la fuerza máxima es limitada por el astronauta que ejerce la menor fuerza.

La aceleración de los astronautas es,

$$a_A = \frac{F_A^{'}}{m} \ y \ a_B = -\frac{F_A^{'}}{m}$$

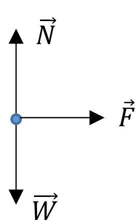
El signo negativo significa que la aceleración de B es hacia la izquierda.

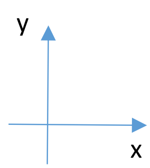
Ejemplo 4: Tren de carga



Tres vagones de carga de masa M son empujados con una fuerza F por una locomotora. La fricción es despreciable. a) Encontrar la aceleración del sistema. b) Encontrar la fuerza sobre cada carro.

a) Para encontrar la aceleración del sistema, podemos visualizar el mismo como un único cuerpo de masa $3M$.





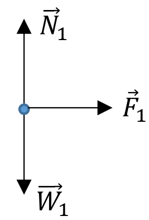
Escribiendo la segunda Ley de Newton en las direcciones dadas por los ejes del sistema de coordenadas tomado obtenemos,

$$N = W = 3Mg$$

$$F = 3Ma \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{F}{3M}$$

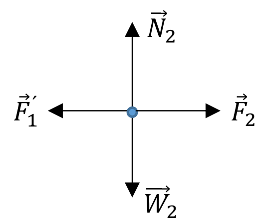
b) Para determinar la fuerza sobre cada carro, diseñemos el diagrama de fuerzas para cada uno de ellos.

Carro de la izquierda:



$$F_1 = Ma = \frac{F}{3}$$

Carro del centro:

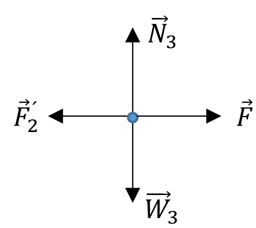


De la tercera Ley, $F_1' = F_1$ y de la segunda Ley

$$F_2 - F_1 = Ma$$

$$F_2 = \frac{2F}{3}$$

Carro de la derecha



De la tercera Ley, $F_2' = F_2$

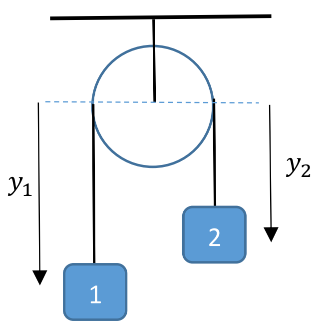
Notemos que cada carro experimenta una fuerza $F/3$ hacia la derecha.

En los sistemas de varios cuerpos las aceleraciones están por lo general relacionadas por ligaduras. Las ecuaciones de ligaduras pueden en ocasiones ser encontradas por inspección simple pero el abordaje general es comenzar con las coordenadas geométricas como veremos en los ejemplos a seguir.

Ejemplo 5: Considere el sistema de dos cuerpos atados a una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio R tb de masa despreciable.

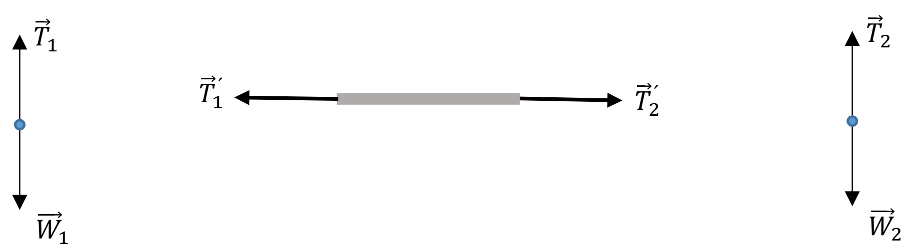
a) calcular la aceleración de los bloques

b) calcular la tensión en la cuerda.



Diagramas de cuerpo libre

(Cuerpo 1) Cuerda: (Cuerpo 2)



Ecuación de ligadura.

Del sistema de tomado para cada cuerpo, observamos que:

$$y_1 + y_2 + \pi R = l$$

donde l es el largo de la cuerda. Derivando dos veces en relación al tiempo obtenemos:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$$

i.e., si un cuerpo sube como es lógico el otro baja.

De los diagramas de fuerza para los cuerpos obtenemos las ecuaciones:

Cuerpo 1 $$W_1 - T_1 = m_1 \ddot{y}_1 \quad (1)$$

Cuerpo 2 $$W_2 - T_2 = m_2\ddot{y}_2 \quad (2)$$

Cuerda $$T_1^{'} - T_2^{'} = 0 \quad (3)$$

De la tercera ley de Newton, $T_1 = T_1^{'}$ y $T_2 = T_2^{'}$ así que de la ecuación anterior escribimos $T_1 = T_2 = T$ y las ecuaciones (1) y (2) las reescribimos como:

Cuerpo 1 $$W_1 - T = m_1\ddot{y}_1 \quad (1b)$$

Cuerpo 2 $$W_2 - T = m_2\ddot{y}_2 \quad (2b)$$

Sumando las ecuaciones (1b) y (2b) y teniendo en cuenta la ecuación de ligadura obtenemos rápidamente:

$$g - \frac{T}{m_1} + g - \frac{T}{m_2} = 0$$

$$T = 2g\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Y substituyendo en (1b),

$$\ddot{y}_1 = g - 2g\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

Y de la ecuación de ligadura

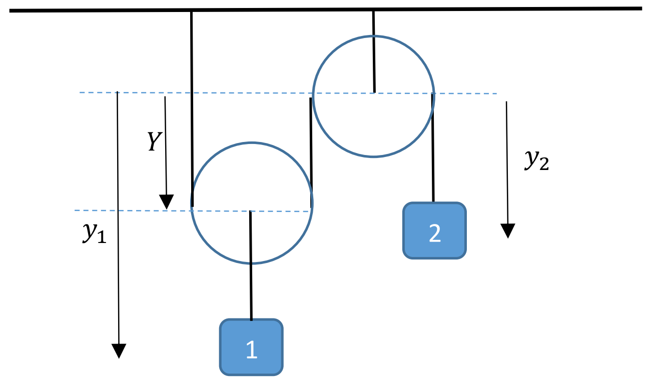
$$\ddot{y}_2 = -\frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)} \quad (5)$$

Notemos que si $m_1 > m_2$, $\ddot{y}_1 > 0$ y si $m_1 = m_2$, $\ddot{y}_1 = 0$ como esperamos.

Ejemplo 6: En el sistema mostrado en la figura considere que la cuerda es de masa despreciable que pasa por dos poleas tb de masa desperciables.

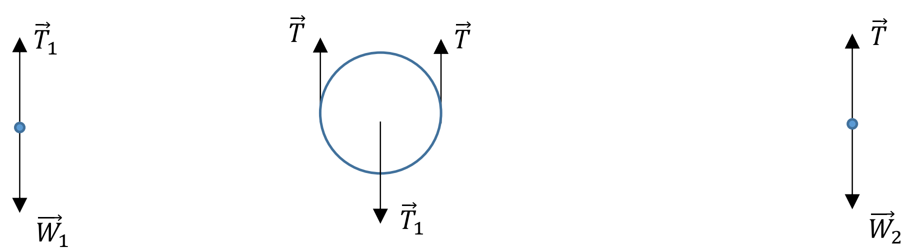
a) calcular la aceleración de los bloques

b) calcula la tensión en la cuerda.



Diagramas de cuerpo libre

(Cuerpo 1) Polea: (Cuerpo 2)



Donde hemos utilizado el hecho de que como la cuerda y polea no tiene masa la tensión de la cuerda en los extremos es la misma.

Ecuaciones de ligadura,

Del sistema de referencia tomado para cada cuerpo, observamos que:

$$2Y + \pi R_1 + \pi R_2 + y_2 = l \qquad (1)$$

donde l es el largo de la cuerda.

Al mismo tiempo,

$$y_1 - Y = cte \qquad (2)$$

Derivando dos veces en relación al tiempo obtenemos:

$$2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0 \qquad (3)$$

donde utilizamos $\ddot{Y} = \ddot{y}_1$ el resultado que se obtiene de (2).

De los diagramas de fuerza para los cuerpos obtenemos las ecuaciones:

Cuerpo 1 $$W_1 - T_1 = m_1\ddot{y}_1 \tag{4}$$

Polea $$-T_1 + 2T = 0 \tag{5}$$

Cuerpo 2 $$W_2 - T = m_2\ddot{y}_2 \tag{6}$$

Substituyendo (5) en (4) obtenemos

$$W_1 - 2T = m_1\ddot{y}_1 \tag{7}$$

Observando la ecuación de ligadura $2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$ vemos que multiplicando la ecuación (7) x 2 y sumando con (6) nos lleva directamente al valor de la tensión:

$$2g - \frac{4T}{m_1} + g - \frac{T}{m_2} = 0 \tag{2b}$$

$$T = \frac{3m_1m_2g}{(4m_2 + m_1)} \tag{2b}$$

Y substituyendo en (7),

$$\ddot{y}_1 = g - \frac{6gm_2}{(4m_2 + m_1)}$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{(m_1 - 2m_2)}{(4m_2 + m_1)}g \tag{8}$$

Y de la ecuación de ligadura

$$\ddot{y}_2 = -2\frac{(m_1 - 2m_2)}{(4m_2 + m_1)}g \tag{5}$$