Estática y Dinámica

Profundización y Problemas Resueltos 1 de TRABAJO, ENERGIA y POTENCIA

Trabajo, Energía y Potencia:

1- Introducción

Las leyes de Newton relacionan la aceleración con la fuerza resultante permitiéndonos predecir los valores de la velocidad y la posición en cualquier instante de tiempo. Esto es, conociendo

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m}$$

encontramos,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(\tau)d\tau$$

y

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau.$$

En esta parte del curso veremos como relacionar fuerza con el movimiento de una partícula a través de otro enfoque. Nos depararemos con dos conceptos importantes, trabajo y energía, que aparecerán como meros elementos dentro de un nuevo método de solución de problemas. Sin embargo como veremos son conceptos con un significado físico profundo.

2- Trabajo y energía

2.1- Integrando la ecuación del movimiento en una dimensión

Veamos como la noción de conservación de energía emerge analizando el problema del movimiento en una dimensión. Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo esta cambia su velocidad. En una dimensión, esto simplemente significa que la velocidad aumenta o disminuye. Lo que haremos ahora es encontrar una relación entre el cambio de velocidad cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo por algún tiempo y la distancia recorrida.

Consideremos entonces el problema en una dimensión en el que una fuerza F actúa sobre un cuerpo. La ecuación de movimiento es,

$$m\frac{dv}{dt} = F. \tag{2.1}$$

Multipliquemos por dx, e integremos,

$$\int_{x_a}^{x_b} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_a}^{x_b} F(x)\, dx. \tag{2.2}$$

Para tratar con la integral de la izquierda hacemos,

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = vdt$$

entonces[1]

$$\int_{t_a}^{t_b} m\frac{dv}{dt}v\,dt = \int_{t_a}^{t_b} m\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)dt = \int_{x_a}^{x_b} F(x)\,dx$$

$$\int_{t_a}^{t_b} m\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)dt = \int_{x_a}^{x_b} F(x)\,dx$$

y

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_{x_a}^{x_b} F(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Alternativamente podemos escribir el límite superior en la integral indefinido y escribir,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(\xi)\,d\xi. \tag{2.4}$$

2.2- Integrando la ecuación del movimiento en varias dimensiones

Retornando al problema inicial, tratemos de integrar la ecuación del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ que depende de la posición,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{2.5}$$

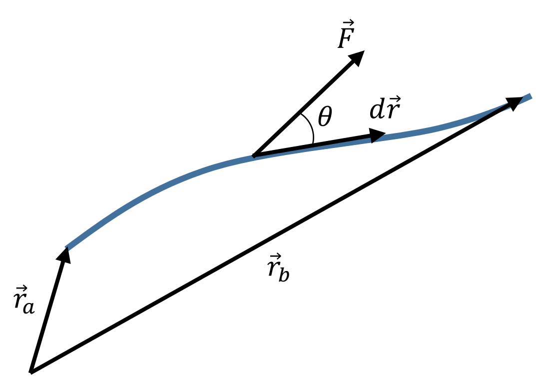


Figura 1

En analogía con el caso unidimensional multipliquemos escalarmente por $d\vec{r}$, e integramos,

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{2.6}$$

[1] Notemos que en la línea siguiente cambiamos variables en la integral de la izquierda.

Con $d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = \vec{v}dt$

$$\int_{t_a}^{t_b} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Pero,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$

y (1.6) se escribe como,

$$\int_{t_a}^{t_b}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} \tag{2.7}$$

o

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} \tag{2.8}$$

Esta ecuación representa una generalización del caso simple en una dimensión (1.3). En este caso, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ mientras que en el caso 1D, $v^2 = v_x^2$. La integral de la derecha es llamada de integral de línea[2].

2.3- Teorema del trabajo y la energía

Interpretemos ahora físicamente la ecuación (2.8). La cantidad,

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \tag{2.9}$$

es llamada de **energía cinética[3]**. En el sistema internacional de medidas la unidad para la energía es el Joule, $1J = 1\ kg \times m^2/s^2$.

La integral

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r}, \tag{2.10}$$

es llamada de trabajo W_{AB} ejercido por la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ sobre la partícula en su movimiento del punto A al punto B (ver Fig. 1).

Con estas definiciones, la ecuación anterior la escribimos como,

$$\Delta K = W_{a,b}. \tag{2.11}$$

---

[2] Más adelante veremos cómo se evalúan.

[3] La energía cinética es la energía que tiene un cuerpo de masa m en movimiento.

Como el trabajo es igual a la variación de la energía cinética su unidad en el sistema internacional es el Joule.

El resultado en (2.11) es el enunciado general del teorema del trabajo y la energía:

La variación de la energía cinética entre los instantes t_a y t_b es igual al trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al mover la partícula desde $\vec{r}_a(t_a)$ a $\vec{r}_b(t_b)$.

Notemos que la definición de trabajo es mucho más limitada que el significado de la palabra en nuestro lenguaje cotidiano. Uno puede estar “haciendo trabajo” leyendo estas notas o atendiendo a clases (incluso atendiendo el celular en clases), pero no hay trabajo desde el punto de vista físico en esto.

Ejemplo 1: Trabajo de una fuerza constante.

Si $\vec{F}$ no depende de la posición

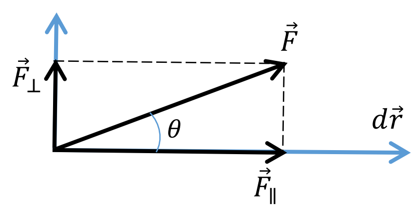


Figura 2

Resolvamos el producto escalar en (2.10),

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\parallel dr = F\cos\theta\, dr \tag{2.12}$$

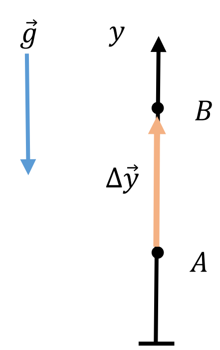
$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\parallel \int dr = F_\parallel \Delta r = F\Delta r\cos\theta \tag{2.13}$$

De aquí es claro que no toda fuerza hace trabajo.

Ejemplo 2

Calculemos el trabajo de la fuerza de gravedad cuando una partícula se mueve de un punto A a un punto B como mostrado en la figura

$$\vec{F}_g = -mg\hat{k}$$

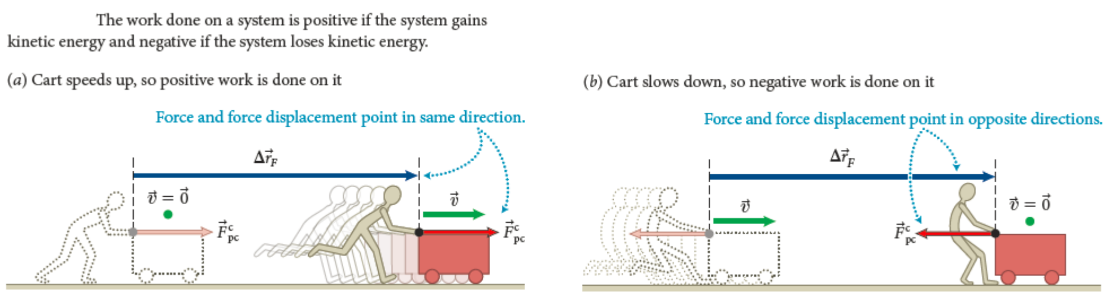


Entonces, con $d\vec{r} = dy\hat{k}$

$$W_{Fg} = -mg\int dz = -mg\Delta z$$

2.4- Trabajo positivo y negativo

Cuando la energía cinética de la partícula aumenta como resultado de una fuerza externa que se ejerce sobre el mismo, el cambio en la energía es positivo y por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza externa sobre la partícula es positivo. Una fuerza externa puede disminuir también la energía de un sistema. En este caso el cambio en energía cinética es negativo y el trabajo realizado por la fuerza externa es negativo.



Figura[4] 3

Ejemplos de trabajos positivo y negativo se muestran en la Figura 3. En ambos casos la persona ejerce una fuerza sobre el carro pero la diferencia está en la dirección en que la misma es aplicada. Para aumentar la velocidad la persona debe ejercer la fuerza en el sentido del desplazamiento y $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} > 0$. Contrariamente, para disminuir la velocidad la fuerza debe ser aplicada en la dirección opuesta al desplazamiento y $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} < 0$.

El trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula es positivo cuando la fuerza y el desplazamiento apuntan en la misma dirección y negativo cuando apuntan en direcciones opuestas.

3- Aplicabilidad del teorema del trabajo y la energía.

En el punto 2.3 derivamos el teorema del trabajo y la energía cinética

$$W_{a,b} = K_b - K_a$$

y lo aplicamos a dos casos simples. En este punto aplicaremos el teorema a problemas más complicados pero antes comentemos algunas propiedades del mismo.

Para comenzar, debemos señalar que el teorema del trabajo y la energía es una consecuencia matemática de la segunda ley de Newton y en este sentido no hemos introducido nuevas ideas físicas. El teorema es meramente el enunciado de que el cambio en la energía cinética es igual al trabajo neto realizado.

Para aplicar el teorema del trabajo y la energía cinética debemos evaluar la integral de línea para el trabajo[5]

[4] Tomada del libro de Eric Mazur, "Principle & Practice of Physics"

$$W_{a,b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \tag{3.1}$$

y para evaluar esta integral debemos conocer el camino (trayectoria) que la partícula sigue.

En el caso más general la integral de línea depende de la trayectoria que sigue la partícula y como no conocemos la trayectoria sin antes haber resuelto el problema el teorema carece de utilidad. Afortunadamente, hay casos especiales de considerable importancia práctica. Para muchas fuerzas de interés, la integral de línea no depende de la trayectoria en particular sino de los puntos inicial y final. Tales fuerzas, entre las que se incluyen las fuerzas más importantes en física, son llamadas de *fuerzas conservativas*. Como discutiremos más adelante, el teorema del trabajo y la energía puede escribirse en una forma muy simple cuando las fuerzas son conservativas.

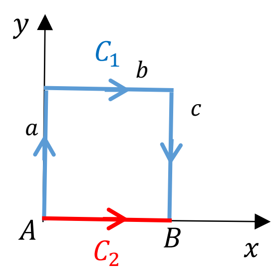
El teorema del trabajo y la energía es también útil en los casos donde la trayectoria de la partícula es conocida debido a que el movimiento es limitado a esta. Un ejemplo clásico es la montaña rusa.

3.1-Integrales que dependen del camino

Consideremos el ejemplo de calcular el trabajo realizado por la fuera de roce cuando un cuerpo se mueve de A a B para las dos trayectorias mostradas en la figura,

Integremos por la trayectoria C_1:

$$\int_A^B \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{(a)} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{(b)} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{(c)} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$



$$\int_A^B \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{(x=0,y=0)}^{(x=0,y=1)} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{(x=0,y=1)}^{(x=1,y=1)} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{(x=1,y=1)}^{(x=1,y=0)} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

con $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$

$$\int_A^B \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\mu N \int_{(x=0,y=0)}^{(x=0,y=1)} \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}\, dy - \mu N \int_{(x=0,y=1)}^{(x=1,y=1)} \hat{\imath} \cdot \hat{\imath}\, dx + \mu N \int_{(x=1,y=1)}^{(x=1,y=0)} \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}\, dy$$

[5] El que sea una integral de línea significa que debe ser evaluada por una trayectoria dada.

$$\int_A^B \vec{f}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = -3\mu N$$

Integremos por la trayectoria C_2:

$$\int_A^B \vec{f}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = -\mu N \int_{(x=0,y=0)}^{(x=1,y=0)} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath}\, dx$$

$$\int_A^B \vec{f}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = -\mu N$$

Obviamente como podemos observar para la fuerza de roce,

$$W_{C_1} \neq W_{C_2} \tag{3.2}$$

i.e, el trabajo depende no sólo de los puntos inicial y final sino que también depende de la trayectoria.

Esto nos lleva a establecer una diferencia entre las fuerzas para las cuales el trabajo depende de sólo los puntos inicial y final y para las que no (como la fuerza de roce del ejemplo anterior).

4- Energía potencial y fuerzas conservativas

4.1- Fuerzas conservativas

Llamaremos fuerzas conservativas a aquellas fuerzas para las cuales el trabajo realizado por estas al mover una partícula de un punto a otro depende solamente de los puntos inicial y final, no del camino entre estos. Entonces, para una fuerza conservativa, como el trabajo no depende[6] del camino podemos escribir,

$$W_{a,b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = \text{función }(\vec{r}_b) - \text{función }(\vec{r}_a)$$

o

$$W_{a,b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = -U(\vec{r}_b) + U(\vec{r}_a) = -[U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a)] \qquad (4.1)^7$$

donde $U(\vec{r})$ es una función definida por (4.1) conocida como función *Energía potencial*[8].

Para las fuerzas conservativas del teorema del trabajo y la energía cinética tenemos,

---

[6] Una definición equivalente es que la integral de línea en una trayectoria cerrada es cero, $\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = 0$.

[7] El signo menos como veremos es introducido por conveniencia.

[8] Notemos que esto significa que podemos escribir el producto $\vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r}$ como una diferencial exacta, $\vec{F}(\vec{r})\cdot\, d\vec{r} = -dU$.

$$W_{a,b} = K_b - K_a = -U(\vec{r}_b) + U(\vec{r}_a)$$

y reagrupando,

$$K_b + U_b = K_a + U_a \tag{4.2}$$

El lado derecho de esta ecuación, $K_a + U_a$, depende de la velocidad de la partícula y de la energía potencial en el punto $\vec{r}_a$ y no hace referencia alguna al punto $\vec{r}_b$. De manera similar, el lado izquierdo depende de la velocidad y la energía potencial en $\vec{r}_b$ sin hacer referencia al lado $\vec{r}_a$. Esto sólo puede ser cierto si cada lado de la ecuación es igual a una constante debido a que $\vec{r}_a$ y $\vec{r}_b$ son puntos arbitrarios.

Denotando esta constante por E escribimos,

$$K_b + U_b = K_a + U_a = E. \tag{4.3}$$

E es llamada de **energía mecánica** de la partícula o a veces de forma menos precisa por **energía total.** Hemos mostrado entonces que si la fuerza es conservativa, la energía mecánica permanece constante o en el lenguaje de la física, la energía es conservada. Notemos que esto es una forma diferente de abordar los procesos físicos comparada con la aplicación de la Ley de Newton.

Una propiedad peculiar de la energía es que el valor de E es hasta cierto punto arbitrario; sólo cambios en E tienen significado físico. Esto se debe a que la ecuación

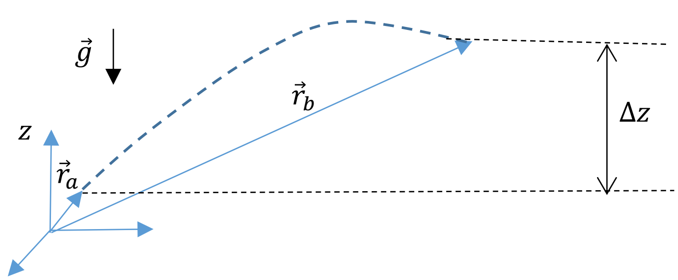
$$U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot\, d\vec{r} \tag{4.4}$$

define sólo la diferencia en energía potencial entre A y B y no la energía potencial en si. Podemos adicionar una constante a $U(\vec{r}_b)$ y a la misma constante a $U(\vec{r}_a)$ y aún se cumple la ecuación. Sin embargo, como $E = K + U$, adicionar una constante a U aumenta E por la misma cantidad.

4.2- Ejemplos de energía potencial

En este punto veremos dos ejemplos que envuelven fuerzas conservativas.

Energía potencial debida al campo gravitatorio.



La fuerza sobre una partícula de masa m debido al campo gravitatorio uniforme es,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg\hat{k}$$

Entonces, cuando la partícula se mueve de $\vec{r}_a$ a $\vec{r}_b$ el cambio en energía potencial es,

$$U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot\, d\vec{r} = mg\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \hat{k} \cdot\, d\vec{r} = mg\int_{z_a}^{z_b} dz,$$

$$U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a) = mgz_b - mgz_a$$

Notemos que si tomamos arbitrariamente $U = 0$ en $z_a = 0$, podemos escribir a la energía potencial como $U = mgh$, la forma en que usualmente la conocemos.

En general como,

$$dU = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot\, d\vec{r} \tag{4.5}$$

$$dU_g = -m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -d(m\vec{g} \cdot \vec{r})$$

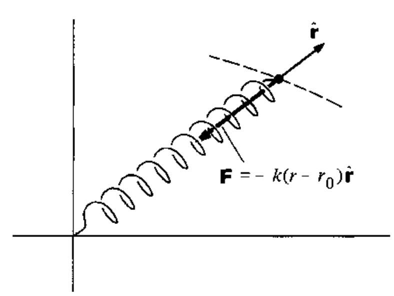
de manera que,

$$U_g = -m\vec{g} \cdot \vec{r} \tag{4.6}$$

Energía potencial debida a fuerza elástica

Una de las fuerzas más importantes en la física es la fuerza elástica (fuerza del resorte),

$$\vec{F} = -k(r - r_0)\hat{\mathbf{r}}$$



donde k es la constante elástica del resorte y r_0 su largo natural.

Notemos primero que el trabajo entre dos puntos no depende de la trayectoria pues el resultado de la integral,

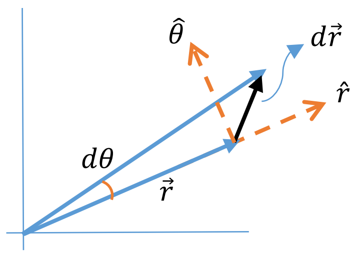
$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot\, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} f(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot\, d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} f(r)\, dr$$

depende de las distancias radiales inicial y final y no del camino particular entre estos.

La energía potencial elástica es,

$$U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot\, d\vec{r} = k\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (r - r_0)\, \hat{r} \cdot\, d\vec{r},$$

donde de la figura abajo $d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$, de manera que $\hat{r} \cdot d\vec{r} = dr$



$$U(r_b) - U(r_a) = \frac{k}{2}(r - r_0)^2\Big|_{r_a}^{r_b},$$

Que escribimos con $r_b = r$ arbitrario como

$$U(r) - U(r_a) = \frac{k}{2}(r - r_0)^2\Big|_{r_a}^{r} = \frac{k}{2}(r - r_0)^2 + \frac{k}{2}(r_a - r_0)^2,$$

Si tomamos $r_a = r_o$,

$$U(r) = \frac{k}{2}(r - r_0)^2 + U(r_0)$$

Y tomando por convención la energía potencial igual a cero en equilibrio $U(r_0) = 0$,

$$U(r) = \frac{k}{2}(r - r_0)^2 \tag{4.7}$$

En una dimensión podemos escribir (4.7) como,

$$U(r) = \frac{k}{2}(x - l)^2 \tag{4.8}$$

donde recordemos que x es la longitud que tiene el resorte en el instante dado y l es el largo natural.

Ejemplo 3

Una masa m es lanzada verticalmente con velocidad inicial v_0. ¿Cuál es la altura máxima asumiendo que la fuerza de gravedad es constante y despreciando el roce?

Como la única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza de gravedad que es conservativa, la energía mecánica se conserva, i.e.,

$$E_i = E_f$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Tomando el eje z en la dirección positiva hacia arriba,

$$U_g = mgz$$

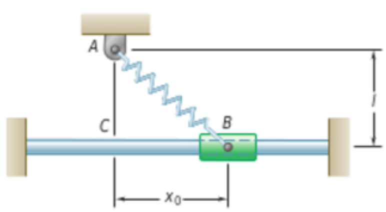
Tomando el cero de energía potencial en el punto de lanzamiento, de la ecuación de conservación de la energía mecánica,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$$

Ejemplo 4

El resorte AB de constante k de la figura abajo está unido al soporte A y al collar B de masa m. La longitud natural del resorte es l.

Conociendo que el collar se libera desde el reposo en $x = x_0$ y que el roce es despreciable, determine la velocidad del collar cuando pasa por el punto C.



Como la fuerza que realiza trabajo es conservativa (fuerza elástica) podemos escribir,

$$E_i = E_f$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$U_i = \frac{k}{2}(L - l)^2, \quad U_f = 0$$

donde, $L = \sqrt{x_0^2 + l^2}$ es el largo que tiene el resorte en la posición inicial. Entonces,

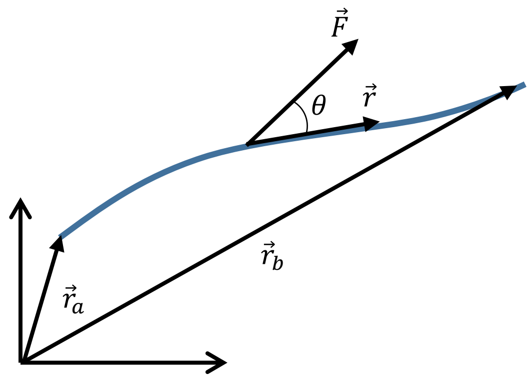
$$\frac{k}{2}\left(\sqrt{x_0^2 + l^2} - l\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{x_0^2 + l^2} - l\right)$$

1. Fuerza y energía potencial

En la clase anterior vimos que si tenemos una fuerza conservativa, encontrar la energía potencial es un problema sencillo a través de la ecuación,

$$U_b - U_a = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{1.1}$$

donde la integral es sobre la trayectoria de $\vec{r}_a$ a $\vec{r}_b$.



Sin embargo, en muchos casos es fácil caracterizar la fuerza si es conocida la energía potencial. Nuestro problema sería entonces:

Conocida $U(r) \Rightarrow$ ¿cómo podemos encontrar $\vec{F}(\vec{r})$?

Nuestro punto de partida es la ecuación (1.1) de donde, podemos escribir,

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{1.2}$$

Pero el diferencial de $U(x, y, z)$ es,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) dz \tag{1.3}$$

y comparando con el miembro derecho de (1.2)

$$-\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \tag{1.4}$$

concluimos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z \tag{1.5}$$

La ecuación (1.5) es una ecuación vectorial que podemos escribir explícitamente como,

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right] \tag{1.6}$$

En forma compacta escribimos este resultado como,

$$\vec{F} = -\nabla U \tag{1.7}$$

donde,

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \tag{1.8}$$

Notemos que la ecuación (1.8) es una definición. ∇U es un vector llamado gradiente de U. El símbolo ∇ es llamado de “delta” y puede ser escrito de forma vectorial como sigue:

$$\nabla = \hat{\imath}\ \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\ \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\ \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.9}$$

Obviamente, ∇ no es realmente un vector, es un operador. Esto significa que cuando ∇ opera sobre una función escalar genera un vector.

La relación $\vec{F} = -\nabla U$ es una generalización del caso unidimensional. Por ejemplo, si U es una función sólo de x,

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath}$$

y

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

Ejemplo 1:

De la clase anterior sabemos que la energía potencial gravitatoria se escribe como,

$$U = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$$

y en una dimensión,

$$U = mgz$$

donde z es la coordenada medida desde el origen. La fuerza correspondiente es,

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{F} = -mg\hat{k}$$

Ejemplo 2:

Conociendo la energía potencial elástica del resorte,

$$U = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$
$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} = -k(x - l_0)\hat{\imath}$$

Significado físico del gradiente

Notemos que de la ecuación (1.3) el diferencial de U se puede escribir como[9],

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)dz = \nabla U \cdot d\vec{r} \qquad (1.10)$$

La ecuación (1.10) expresa la propiedad fundamental del gradiente. El gradiente nos permite encontrar el cambio en una función debido a un cambio en sus variables[10].

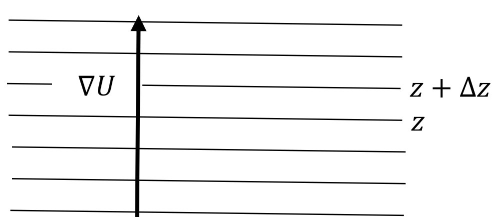
Supongamos que $U = U(z)$,

$$dU = \nabla_z U \cdot d\vec{z} = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)dz$$

Si en $\frac{dU}{dz} > 0$, $\nabla_z U = \frac{dU}{dz}\,\hat{k}$ nos indica que la función U aumenta en la dirección positiva de z, esto es, $U(z + \Delta z) > U(z)$. En otras palabras, el gradiente nos dice en que dirección aumenta la energía potencial.

Ejemplo:

Energía potencial gravitatoria, $U = mgz$.



El gradiente de U es, $\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\hat{k} = mg\hat{k}$, lo que nos dice que la energía potencial aumenta con z.

[9] Notemos que el desplazamiento $d\vec{r}$ lo descomponemos como,

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$$

[10] El diferencial dU es, $\Delta U = U(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - U(\vec{r})$ cuando $\Delta\vec{r} \to 0$

2. Fuerzas no conservativas

Hasta ahora hemos puesto la atención en las fuerzas conservativas y la energía potencial porque estas juegan un papel importante en física. Sin embargo, en muchos procesos físicos fuerzas no conservativas como la fricción están presentes. Veamos como extender el teorema del trabajo y la energía para incluir las fuerzas no conservativas.

A menudo, fuerzas conservativas y no conservativas actúan sobre el mismo sistema. Podemos escribir la fuerza total como,

$$\vec{F} = \vec{F}^c + \vec{F}^{nc} \tag{2.1}$$

donde $\vec{F}^c$ y $\vec{F}^{nc}$ son las fuerzas conservativas y no conservativas respectivamente. Como el teorema del trabajo y la energía es válido siendo o no las fuerzas conservativas, el trabajo total realizado por $\vec{F}$ cuando la partícula se mueve de $\vec{r}_b$ a $\vec{r}_a$ es

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}^c \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{nc} \cdot d\vec{r} = \Delta K$$

pero $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}^c \cdot d\vec{r} = -\sum_i \ \Delta U_i$

$$\Delta K + \sum_i \Delta U_i = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{nc} \cdot d\vec{r}$$

Esto es,

$$\Delta K + \sum_i \Delta U_i = W_{nc} \tag{2.2}$$

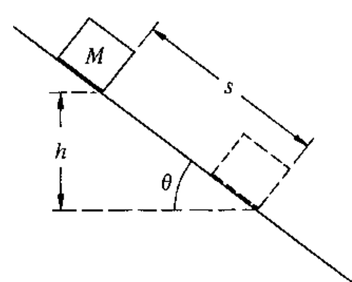
Esto es, el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica,

$$\Delta E = W_{nc} \tag{2.3}$$

Notemos que si $W_{nc} = 0$, $\Delta E = 0$ y la energía se conserva.

Ejemplo: Bloque deslizándose en plano inclinado.

El problema es encontrar la velocidad del bloque después bajar una altura h asumiendo que parte del reposo y que el coeficiente de roce μ es constante.



Como la única fuerza no conservativa es la fuerza de roce,

$$W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$W_f = -\mu N s = \Delta E$$

$$-\mu\, mg \cos\theta \;\; s = E_{final} - E_{inicial}$$

Tomando $U = 0$ en la base del plano,

$$-\mu\, mg \cos\theta \;\; s = \frac{1}{2} m v^2 - mgh$$

$$v = \sqrt{2g[h - \mu\, s \cos\theta]}$$

3. Potencia

Potencia es la rapidez con que una fuerza hace trabajo. Si una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo desplazándolo en $d\vec{r}$, el trabajo realizado por esta es

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

y la potencia sería,

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{3.1}$$

La unidad de potencia en el sistema SI es el watt (W).

$$1\ W = 1 \frac{J}{s}.$$

En el sistema cgs[11], la unidad de potencia es el $erg/s = 10^{-7}\ W$. La unidad de potencia en el sistema ingles es el caballo fuerza (hp). El caballo fuerza es comúnmente definido como 550 ft lb/s pero otras definiciones pueden ser encontradas. La relación entre el caballo fuerza y el watt es[12],

$$1\ hp \approx 746\ W.$$

La potencia nominal de una máquina es un indicador útil de su desempeño. Por ejemplo, un motor con un sistema de reducción de poleas puede levantar una masa considerable M una altura dada pero el proceso puede tomar mucho tiempo (como sucede en las grúas) y la potencia entregada en baja. La potencia requerida para esto es, $P = mgv$, donde v es la velocidad a la cual se eleva el peso en equilibrio ($a = 0$).

[11] Centimeter-gram-second system

[12] Este es un número importante para los constructores de autos eléctricos.

Un ser humano en buenas condiciones puede desarrollar entre $1/2\ hp$ a $1\ hp$. En un periodo de 8 horas (h) un hombre fornido puede hacer trabajo sólo a una razón de aproximadamente $0.2\ hp = 150\ W$. El trabajo total realizado en $8\ h$ es entonces, $W = P\ t = 150\ \times (8 \times 3600) = 4.3 \times 10^6\ J \approx 1.000\ kcal$[13]. Una persona activa requiere entre 2000 a $3000\ kcal/d$.

La producción de potencia en las centrales eléctricas en naciones industrializadas moderna corresponde a varios miles de watts por persona (Estados Unidos: 6.000 W por persona, India: 300 W por persona).

4. Energía potencial (revisión)

En este punto ahondaremos un poco más sobre el concepto de energía potencial.

En cualquier colisión[14] o interacción, la parte de la energía cinética que es temporalmente almacenada en cambios reversibles en el sistema físico y es convertida de vuelta en energía cinética después de interacción es llamada de **energía potencial** (queda claro de $\Delta K = -\Delta U$). El término *potencial* se refiere al hecho de que la energía tiene el potencial de ser convertida de vuelta en energía cinética. Como lo que sucede con la pelota de goma en la figura.

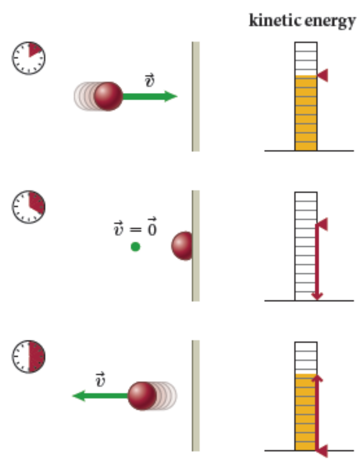


Figura 1

Pero, ¿cómo y dónde es almacenada la energía potencial? Esta es almacenada en cambios reversibles en el *estado de configuración* del sistema por el que entendemos el arreglo espacial de los componentes del sistema que interactúan.

Existen muchas formas de energía potencial, todas relacionadas con la forma en que interactúan los objetos en su arreglo espacial. Si por ejemplo izamos una roca una altura dada hemos cambiado el estado de configuración del sistema roca-Tierra. En la medida en que la roca es izada,

[13] $1\ kcal \approx 4.200\ J$

[14] El tema de colisiones será visto más adelante.

la forma de energía potencial llamada energía potencial gravitatoria es almacenada en el sistema Tierra-roca. Si cortamos el vínculo con la roca esta caerá y la energía potencial almacenada se convertirá en energía cinética.

Si nos movemos al nivel atómico, siempre que presionamos una bola o un resorte cambiamos el estado de configuración de los átomos que componen a la bola o al resorte. Deformaciones reversibles corresponden a cambios en la energía potencial elástica.

La energía potencial es la forma de energía interna[15] asociada con cambios reversibles en el estado de configuración de un objeto o sistema. La energía potencial puede ser convertida enteramente en energía cinética.

5. Disipación de energía

La parte de la energía cinética que no es reconvertida luego de una colisión inelástica[16] se dice que se ha disipado, en otras palabras, se ha convertido irreversiblemente. Para entender qué pasa con la energía que es disipada hagamos el experimento de deformar una hoja de papel.

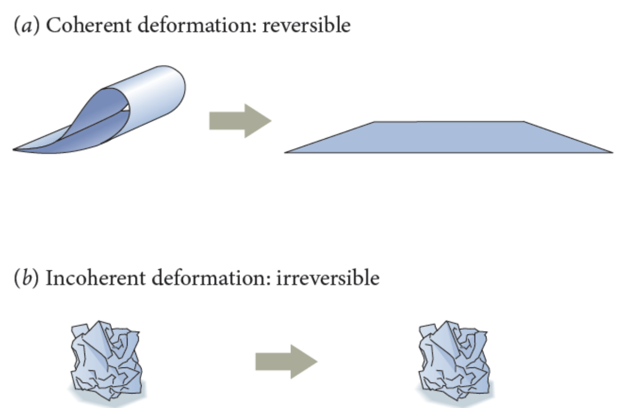


Figura 2

Si la deformamos suavemente como en el caso a) de la Fig. 2 la hoja por si sola recuperará su forma original. Sin embargo, si la estrujamos como en el caso b) la hoja se puede expandir un poco pero no recupera su forma inicial. Existe una diferencia importante entre los dos cambios de forma. En el caso a) la deformación tiene lugar de manera *coherente*, lo que en términos reales significa que a nivel atómico existe un patrón en el desplazamiento de los átomos: Estos se

[15] La energía interna de un Sistema es la energía contenida dentro del sistema, excluyendo la energía cinética del movimiento del sistema como un todo y la energía potencial del sistema como un todo debido a las fuerzas de los campos externos. Esta tiene en cuenta las ganancias o pérdidas de energía del sistema que se deben a cambios en su estado interno.

[16] En las colisiones inelásticas no se conserva la energía cinética.

mueven de manera ordenada en filas, con cada fila sucesiva experimentando un pequeño desplazamiento en la misma dirección que las filas adyacentes. Cuando doblamos la hoja de esta forma almacenamos la energía potencial en esta y cuando la liberamos la energía potencial aparece como energía cinética. En el caso b) el cambio en la forma es incoherente porque los átomos se desplazan en direcciones aleatorias. La hoja no se puede tensar de vuelta por si misma porque los átomos han sido desplazados de manera aleatoria. Algunas de las pequeñas deformaciones pueden volver a su estado inicial pero en general la energía utilizada para estrujar la hoja ha sido convertida de manera irreversible, produciendo una deformación permanente.

Además de la energía ser disipada en deformaciones incoherentes, puede ser disipada en movimiento incoherente. Por ejemplo, cuando una bola de tenis rebota en una superficie dura, parte de la energía cinética de esta es convertida en energía incoherente de los átomos que conforman la bola. Consecuentemente, la energía cinética de la bola después del rebote es menor que antes de este y por lo tanto la altura a la que llega es menor.

Ahora podemos dar una clasificación completa de energía.

Toda energía puede ser dividida en dos clases fundamentales:

(i) energía asociada con movimiento y
(ii) energía asociada con la configuración de los objetos que interactúan.

Cada clase de energía se manifiesta en dos formas: coherente e incoherente.

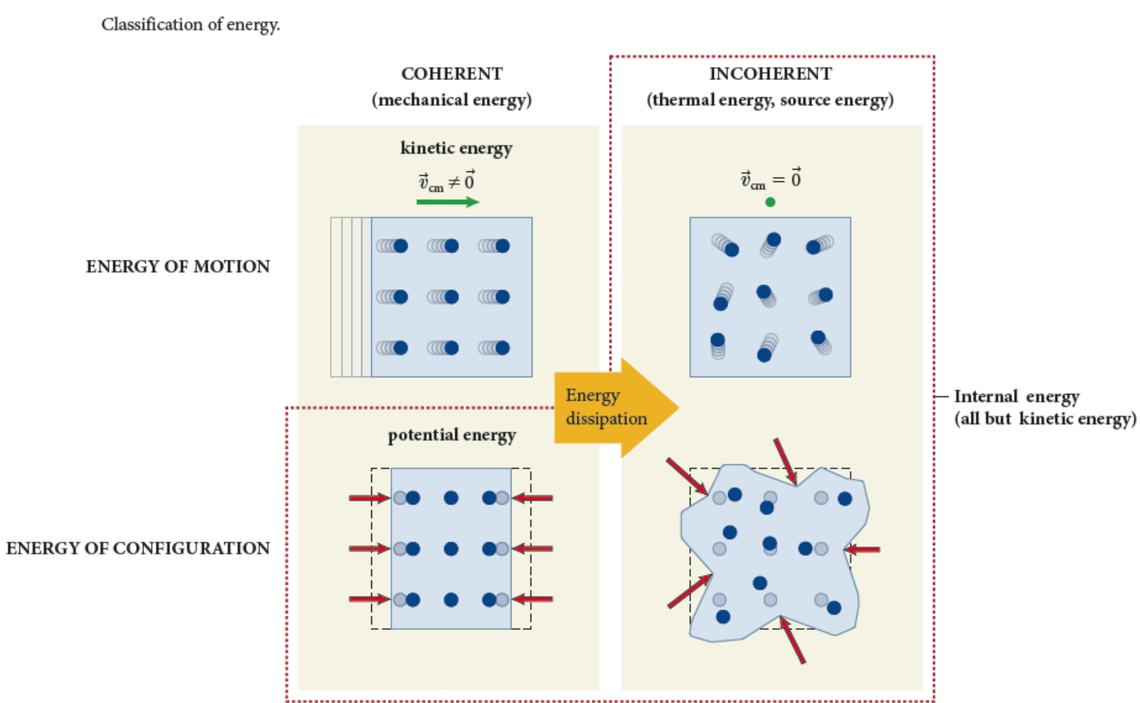


Figura 3

Cuando todos los átomos en un objeto se mueven en forma coherente en la misma dirección (lo que significa que el objeto como un todo se mueve en la misma dirección) la energía del movimiento es llamada de *energía cinética*.

La energía almacenada en cambios coherentes en configuraciones es llamada de *energía potencial*.

La suma de la energía cinética de un sistema y la energía potencial es llamada de **energía mecánica** o **energía coherente**.

Además de la energía mecánica o coherente, un sistema puede tener **energía incoherente** asociada con el movimiento incoherente y la configuración de sus partes. Una parte importante de la energía incoherente de un sistema es su **energía térmica**. Mientras mayor es la energía térmica de un objeto mayor es su temperatura.

La suma de la energía incoherente y su energía potencial es la energía interna de un sistema.

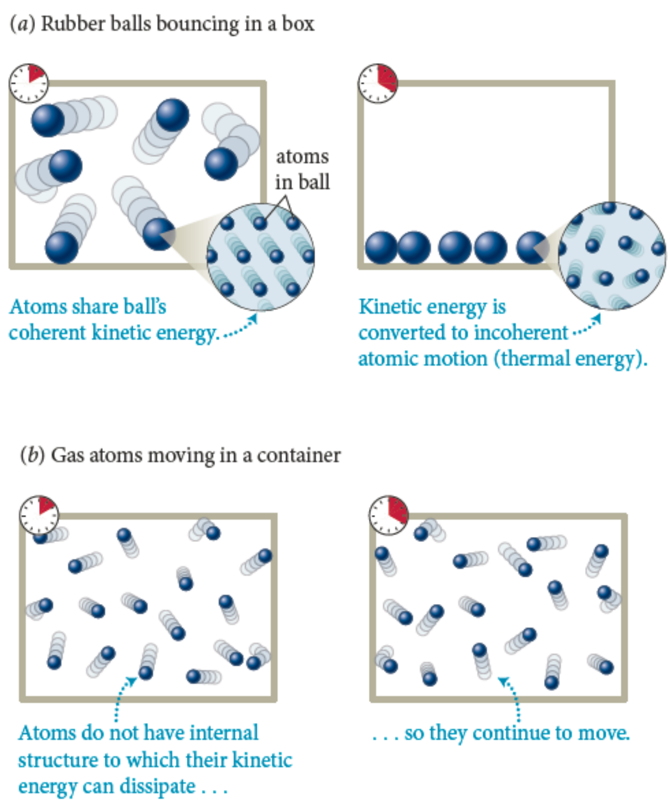


Figura 4

Por ejemplo, consideremos que lanzamos un manojo de bolas de goma en una caja como mostramos en la figura 4a. Las bolas inicialmente rebotan en todas direcciones pero un tiempo después todas se encuentran en el fondo en reposo. La energía cinética de cada bola ha sido disipada, transformada en movimiento incoherente de los átomos que las componen. Toda la energía está aún ahí pero ahora se encuentra al interior de las bolas en la forma de energía térmica. Esto es, las bolas paran debido a que la disipación de energía causa que la energía coherente de las bolas en movimiento (sus energías cinéticas) se ha convertido en energía incoherente.

La disipación de energía corresponde entonces a la conversión de energía coherente en energía incoherente. Este proceso es irreversible porque energía incoherente no puede revertirse por sí sola en energía coherente.

Esta “descomposición” de energía coherente de un objeto macroscópico en pequeñas unidades de energía térmica incoherente levanta una cuestión interesante: ¿qué pasa con la energía una vez que es convertida en energía térmica? En nuestro mundo habitualmente algo que se mueve libremente termina parando y para porque la disipación causa que la energía coherente del objeto en movimiento se convierta en energía incoherente. Pero, ¿puede la energía de movimiento de los átomos ser disipada también? La respuesta como podemos sospechar es NO. A nivel atómico no hay forma de hacer aleatoria la energía. Así, si tenemos un conjunto de átomos en un gas moviéndose aleatoriamente en un recipiente (Figura 4b), si los átomos no interactúan con el medio exterior se mantendrán en movimiento en el recipiente por siempre debido a que no hay partes más pequeñas dentro de estos en los que la energía cinética pueda ser disipada[17]. Y como no hay disipación de energía a nivel atómico nada es requerido para mantener a los mismos en movimiento.

La fricción, que ocurre siempre que dos objetos sólidos se frotan uno contra otro o cuando un objeto se mueve en un fluido es una de las causas de la disipación de energía mecánica en energía térmica.

[17] ¿y qué hay con los electrones, protones y neutrones?. En realidad estos pueden almacenar energía sólo en ciertas cantidades mínimas que exceden las energías cinéticas típicas de los átomos y por lo tanto la energía cinética de un átomo no puede continuar siendo disipada dentro de esta.

Resumen

1. Teorema del trabajo y la energía cinética

El trabajo de la fuerza neta $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo es igual a la variación de la energía cinética.

$$W = \Delta K$$

2. El trabajo realizado por las fuerzas conservativas es igual a menos la variación de la energía potencial,

$$W_{cons} = -\Delta U$$

3. Cuando no actúan fuerzas disipativas sobre el cuerpo la energía mecánica se conserva,

$$\Delta E = 0$$

3. El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica,

$$W_{no-cons} = \Delta E$$

Problema 1

Se tiene una pelota de masa 0.5 kg amarrada al punto A por medio de una cuerda elástica que se comporta igual que un resorte de constante $k = 52$ N/m cuando se estira, con una longitud natural de 1 m. La pelota se tira hacia abajo desde el punto A con una rapidez v. Determine el valor mínimo v_{min} para que la pelota toque el piso. Puede asumir que $g = 10$ m/s^2.

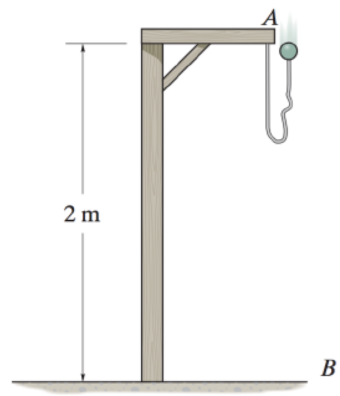
Datos

$k = 52\ N/m$

$m = 0.5\ kg$

$l_0 = 1\ m$

$h = 2\ m$



La condición de v_{min} es que $v \equiv 0$ al llegar al piso.

Como la no hay disipación de energía mecánica esta se conserva, i.e.,

$$E_{inicial} = E_{final} \tag{1}$$

$$E_{inicial} = U_i^{(g)} + U_i^{(e)} + K_i$$

$$E_{final} = U_f^{(g)} + U_f^{(e)} + K_f$$

donde, $U_{i,f}^{(g)}$, $U_{i,f}^{(e)}$ son las energías potenciales gravitatoria y elástica respectivamente.

Para definir la energía potencial gravitatoria, $U^{(g)} = mgz$ debemos fijar el sistema de referencia desde donde la medimos. Estableciendo $U^{(g)} = 0$ en la base de la estructura,

$$U_i^{(g)} = mgh, \qquad U_f^{(g)} = 0$$

Para la energía potencial elástica,

$$U_i^{(e)} = 0, \qquad U_f^{(e)} = \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$$

Entonces, en (1)

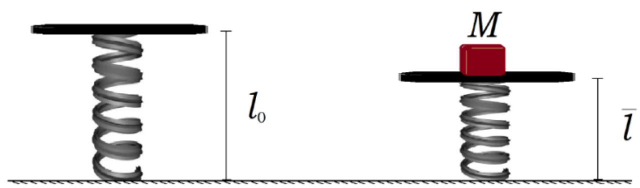
$$mgh + \frac{1}{2}mv_{min}^2 = \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{k}{m}(h - l_0)^2 - 2gh}$$

$$v_{min} = \sqrt{104 - 40} = 8\ m/s$$

Problema 2

Un bloque de masa M se apoya sobre un platillo de masa despreciable que está sujeto firmemente al extremo superior de un resorte en posición vertical como lo indica la figura abajo. El extremo inferior del resorte está fijo al suelo. El resorte tiene un largo natural l_0 y constante elástica k.



a) ¿Cuál es la longitud $\bar{l}$ de equilibrio del sistema cuando la masa M reposa sobre el platillo?

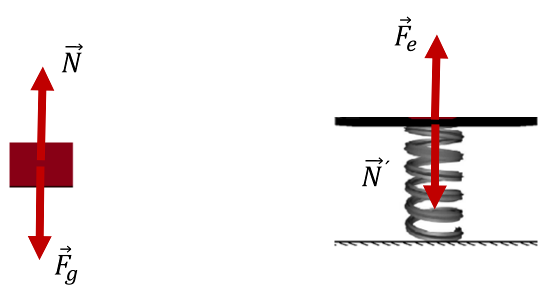
b) Imagine que comprimimos el resorte de manera que su largo sea l (con $l < \bar{l}$). ¿Cuál es el mínimo valor de l para que una vez liberado el sistema, el bloque de masa M alcance a separarse del platillo?

c) Imagine que comprimimos nuevamente el resorte de manera que su largo sea ahora d. Suponga que con este largo, la liberar el sistema, el cuerpo de masa M logra separarse del platillo. ¿Qué velocidad tiene el cuerpo cuando e resorte alcanza su largo natural?

Datos

k, l_0

a) La condición de equilibrio es, $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Del diagrama de fuerzas, para el cuerpo y para el resorte también!!!



Notemos que el bloque únicamente interactúa con la Tierra y con el platillo.

De la tercera ley de Newton, $\vec{N}' = \vec{N}$ y de las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo y el sistema platillo-resorte,

$$N = Mg \quad (1)$$

$$F_e = N' = Mg \quad (2)$$

$$k\left|\bar{l}-l_0\right| = Mg \quad \Rightarrow \quad k\left(l_0-\bar{l}\right) = Mg$$

$$\bar{l} = l_0 - \left(\frac{Mg}{k}\right)$$

b) La condición de mínimo para que el bloque logre separarse del platillo es que la interacción entre estos sea nula y que al mismo tiempo la velocidad del cuerpo tb sea nula. Como la fuerza que media la interacción entre el platillo y el resorte es la fuerza de contacto o normal, la condición es que $N = 0$. Como el platillo no tiene masa, del diagrama de fuerzas del sistema resorte-platillo esto implica que $F_e = 0$ cuando se libera, esto es, el resorte estará en su largo natural y la energía potencial gravitatoria será nula.

Entonces, como no hay fuerzas disipativas, de la conservación de la energía,

$$E_{inicial} = E_{final}$$

donde

$$E_{inicial} = U_i^{(g)} + U_i^{(e)}$$

$$E_{final} = U_f^{(g)}$$

Donde hemos hecho, $K_i = 0$, $K_f = 0$, y $U_f^{(e)} = 0$.

Para definir la energía potencial gravitatoria, $U^{(g)} = mgz$ debemos fijar el sistema de referencia desde donde la medimos. Estableciendo $U^{(g)} = 0$ en el suelo,

$$Mgl + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = Mgl_0$$

$$l = l_0 - 2\left(\frac{Mg}{k}\right)$$

c) Nuevamente, de la conservación de la energía mecánica,

$$E_{inicial} = E_{final}$$

Pero ahora el bloque, en el momento en que se despega del resorte posee energía cinética así que la igualdad anterior queda como,

$$Mgd + \frac{1}{2}k(d-l_0)^2 = Mgl_0 + \frac{1}{2}Mv^2$$

así que,

$$v^2 = (d-l_0)\left[2g + \frac{k}{m}(d-l_0)\right]$$

Como, $d < l_0$ es conveniente adecuado dejar la expresión anterior como

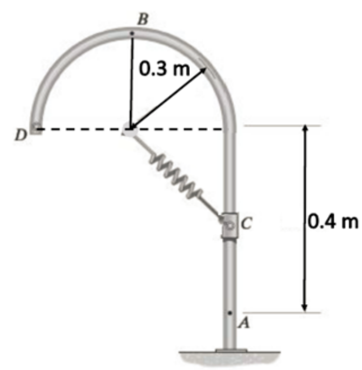
$$v = \sqrt{(l_0 - d)\left[\frac{k}{m}(l_0 - d) - 2g\right]}$$

Problema 3

El collarín de 2 kg la figura se suelta desde el reposo en el punto A y se desliza a lo largo de la guía vertical lisa. Considere que la longitud natural del resorte es $l_0 = 0{,}2$ m y además que su constante elástica $k = 600$ N/m. (utilice $g = 10$ m/s^2)

a) ¿Cuál es la velocidad del collarín cuando pasa por el punto B?

b) Suponga ahora que cambias las condiciones iniciales del problema y la rapidez con la que el collarín llega a B es igual a 3 m/s. Calcule la reacción de la reacción normal en esa posición.



Datos

$m = 2\ kg$

$l_0 = 0.2\ m$

$k = 600\ N/m$

a) Cómo no hay fuerzas disipativas,

$$E_{inicial} = E_{final}$$

Para calcular la energía potencial gravitatoria es conveniente colocar referencia cero en un punto conveniente. Tomemos $U = 0$ a la altura del punto D. Entonces,

$$E_{inicial} = U_g^{(i)} + U_e^{(i)} = -mgz_i + \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2$$

$$E_{final} = U_g^{(f)} + U_e^{(f)} + K_f = mgz_f + \frac{1}{2}k\left(l_f - l_0\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Con $l_i = \sqrt{0.4^2 + 0.3^2} = \sqrt{16 \times 10^{-2}} = 0.4$

$l_f = 0.3$

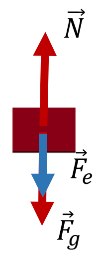
Entonces,

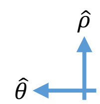
$$-mgz_i + \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2 = mgz_f + \frac{1}{2}k\left(l_f - l_0\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = -2g\left(z_i + z_f\right) + \frac{k}{m}\left[(l_i - l_0)^2 - \left(l_f - l_0\right)^2\right]$$

$$v = \sqrt{-2 \times 10 \times 0.7 + 300 \times 0.01} = \sqrt{-14 + 300 \times 0.08} = \sqrt{10}\, m/s$$

b) Realicemos el diagrama de cuerpo libre del collarín en el punto B,





Notemos que estamos en presencia de un movimiento circular así que para escribir la segunda Ley de Newton debemos encontrar la aceleración.

Ya sabemos que en coordenadas polares, con el origen en el centro del círculo en la figura,

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}$$

donde $\rho = 0.3\ m$.

Entonces,

$$\vec{v} = \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

y

$$\vec{a} = \rho\ddot{\theta}\hat{\theta} - \rho\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

Así, escribiendo la segunda ley de Newton en el + en la dirección de $-\hat{\rho}$, tenemos,

$$-N + mg + k(\rho - l_0) = m\,\rho\dot{\theta}^2$$

Pero, de la ecuación para la velocidad en $\hat{\theta}$, $\dot{\theta} = v/\rho$ y

$$N = mg + k(\rho - l_0) - m\,\frac{v^2}{\rho}$$

$$N = 2 \times 10 + 600 \times 0.1 - 2\,\frac{3^2}{0.3}$$

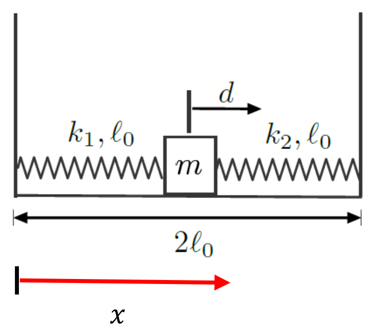
$$N = 20\ N$$

Problema 4

Considere el bloque m el cual está unido a dos paredes por medio de dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 respectivamente como se indica en la figura.
Ambos resortes tienen el mismo largo natural ℓ_0. La separación entre las paredes es $2\ell_0$. Suponga que el bloque es puntual y que la superficie donde está apoyado es lisa.
Suponga que el sistema se pone en movimiento separando al bloque de masa m una distancia d desde la posición de equilibrio y soltándolo desde el reposo.

a) Calcular la velocidad máxima luego de soltar el resorte

b) Encontrar el periodo de oscilaciones del bloque de masa m en torno a la posición de equilibrio.



Apliquemos la conservación de la energía mecánica.

$$E_{inicial} = E_{final}$$

donde,

$$E_{inicial} = U_1^{(i)} + U_2^{(i)}$$

$$E_{final} = U_1^{(f)} + U_2^{(f)} + K$$

Para medir el desplazamiento de cada resorte, escogemos los sistemas mostrados en la figura,

$$\frac{1}{2}k_1[(l_0 + d) - l_0]^2 + \frac{1}{2}k_2[(l_0 - d) - l_0]^2 = \frac{1}{2}k_1(x - l_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(2l_0 - x - l_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Con $x_2 + x_2$

$$\frac{1}{2}k_1[(l_0 + d) - l_0]^2 + \frac{1}{2}k_2[(l_0 - d) - l_0]^2 - \frac{1}{2}k_1[x - l_0]^2 - \frac{1}{2}k_2[x - l_0]^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{k_1}{m}d^2 + \frac{k_2}{m}d^2 - \frac{k_1}{m}(x - l_0)^2 - \frac{k_2}{m}(x - l_0)^2$$

Donde x es una posición arbitraria en el eje x.

De la ecuación anterior, v es máxima cuando v^2 es máxima, i.e., cuando $x = l_0$.

Así que,

$$v_{max} = \left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\right) d$$

b) Para encontrar el periodo de oscilaciones debemos encontrar la ecuación del movimiento equivalente del oscilador armónico simple.

Hagamos esto por dos métodos:

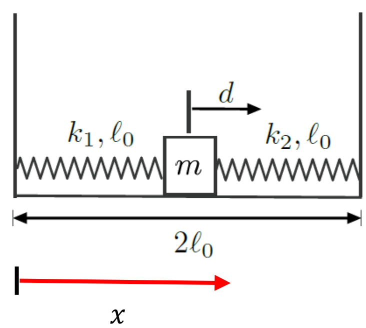
Método 1: Método de la energía.

Como no hay roce, en el sistema masa resorte la energía mecánica se conserva. Esto quiere decir que, $E = cte$ o de manera equivalente, $dE/dt = 0$.

Con el origen de coordenadas en la posición de equilibrio del sistema, la expresión de la energía para la situación descrita en la figura es,

$$E = \frac{1}{2}k_1[x - l_0]^2 + \frac{1}{2}k_2[(2l_0 - x) - l_0]^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = \frac{1}{2}k_1[x - l_0]^2 + \frac{1}{2}k_2[x - l_0]^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



Introduzcamos la variable, $s = x - l_0$. Notemos que $s = 0$ en la posición de equilibrio.

$$E = \frac{1}{2}k_1 s^2 + \frac{1}{2}k_2 s^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

Derivando en relación al tiempo e igualando a cero, obtenemos,

$$0 = k_1 s\dot{s} + k_2 s\dot{s} + m\dot{s}\ddot{s}$$

$$0 = [(k_1 + k_2)s + m\ddot{s}]\dot{s}$$

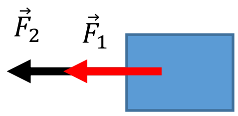
De donde obtenemos directamente la ecuación de movimiento

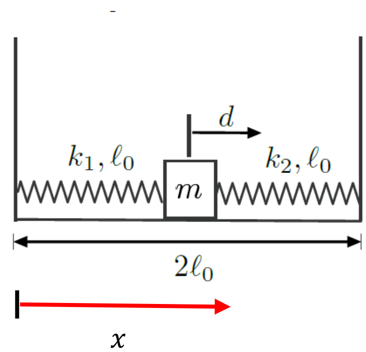
$$\ddot{s} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}s = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{s} + \omega^2 s = 0$$

Entonces, $\omega = \sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}}$ y

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(k_1 + k_2)}}$$

Método 2: Segunda ley de Newton





$$m\ddot{x} = -k_1|x - l_0| - k_2|(2l_0 - x) - l_0|$$

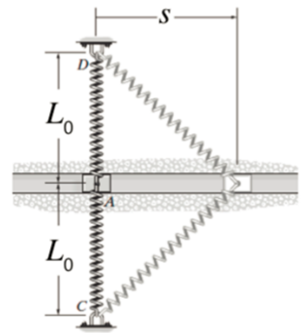
$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)(x - l_0) = 0$$

Introduciendo la variable, $s = x - l_0$, llegamos a la misma ecuación del inciso anterior

$$m\ddot{s} + (k_1 + k_2)s = 0$$

Problema 5

El Bloque A tiene masa M y se desliza en la ranura horizontal lisa. La constante del elástica de los dos resortes es k y su longitud no elongada es L_0.



a) Si se lleva el bloque a la distancia $s = \sqrt{8}L_0$ y se suelta del reposo, ¿Cuál es su rapidez cuando $s = 0$?

b) Cuándo el bloque se encuentra en $s = 0$, se le imprime una velocidad inicial $v_0 = L_0\sqrt{2k/M}$ hacia la derecha. ¿Cuál es el desplazamiento horizontal en este caso?

c) Ahora considere que la ranura tiene un coeficiente de roce cinético μ. El bloque se lleva a la distancia $s = \sqrt{3}L_0$ y se suelta del reposo. ¿Con que rapidez el bloque pasa por $s = 0$?

Resp/

a) Como no hay disipación de energía escribimos,

$$E_{inicial} = E_{final}$$

donde,

$$E_{inicial} = U_{i,1}^{(e)} + U_{i,2}^{(e)} = 2 \times \frac{1}{2}k\left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2}\right) - L_0\right]^2$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{M}}\left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2}\right) - L_0\right],$$

y con $s = \sqrt{8}L_0$,

$$v = \sqrt{\frac{8k}{M}}L_0.$$

b) Ahora,

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

$$E_{final} = U_{f,1}^{(e)} + U_{f,2}^{(e)} = 2 \times \frac{1}{2} k \left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2} \right) - L_0 \right]^2$$

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = k \left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2} \right) - L_0 \right]^2$$

Con $v_0 = L_0 \sqrt{2k/M}$

$$L_0^2 = \left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2} \right) - L_0 \right]^2$$

$$s = \sqrt{3} L_0$$

c) Ahora tenemos disipación de energía de manera que la energía mecánica no se conserva y debemos escribir,

$$E_{final} - E_{inicial} = W_{roce}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 - 2 \times \frac{1}{2} k \left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2} \right) - L_0 \right]^2 = -\mu M g s$$

$$v^2 = -2\mu g s + 2 \frac{k}{M} \left[\left(\sqrt{s^2 + L_0^2} \right) - L_0 \right]^2$$

con $s = \sqrt{3} L_0$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{M} L_0^2 - 2\mu g \sqrt{3} L_0}$$

Problema 6

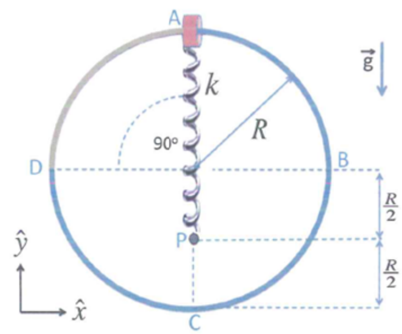
Considere el sistema mostrado en la figura, en el cual una argolla de masa m parte desde el reposo en el punto A y se desliza por la guía circular (contenida en un plano vertical) bajo la influencia de su propio peso y del resorte de constante k de largo natural $R/2$. Considere que el segmento de arco $ABCD$ es libre de roce, pero el segmento DA tiene un coeficiente de roce cinético μ. Si la argolla comienza su movimiento desde el punto A con una velocidad $v_0\hat{x}$ (donde $v_0 > 0$) , determine las respuestas a las siguientes preguntas (1 a 4). Considere que el resorte puede girar libremente respecto a un pivote ubicado en el punto fijo P.

a) Encuentre la expresión para la energía potencial elástica cuando la argolla se encuentra en el punto A.

b) ¿Cuál es la rapidez de la argolla al pasar por el punto C?

c) ¿Cuál es la fuerza que la guía ejerce sobre la argolla al pasar por el punto C?

d) ¿Cuál es el trabajo que la fuerza de roce realiza en el tramo DA si la argolla pasa por el punto A por segunda vez con una velocidad $v_0/2$?



Datos

$l_0 = R/2$

a) $U_A = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{3}{2}R\right) - l_0\right]^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{3}{2}R\right) - l_0\right]^2 = \frac{1}{2}k\left[\frac{3}{2}R - \frac{1}{2}R\right]^2 = \frac{1}{2}kR^2$

b) Como no hay roce en esa parte del riel, la energía mecánica se conserva,

$$E_A = E_C$$

Colocando el cero de energía potencial gravitatoria en el punto C,

$$U_A^{(e)} + U_A^{(g)} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$v_C = \sqrt{\frac{kR^2}{m} + 4gR + v_0^2}$$

c) La componente normal de la aceleración en el punto c es, $a = \frac{v^2}{R}$ dirigida hacia el centro.

Como el resorte se encuentra en C en su largo natural, las únicas fuerza que actúan sobre la argolla son la fuerza normal y el peso. La fuerza que el riel ejerce sobre la argolla es la normal,

$$N - mg = m\frac{v_C^2}{R}$$

$$N = kR + 5mg + \frac{mv_0^2}{R}$$

d) El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica. Cómo la única fuerza no conservativa en el tramo DA es la fuerza de roce,

$$W_{nc} = \Delta E = E_A - E_D$$

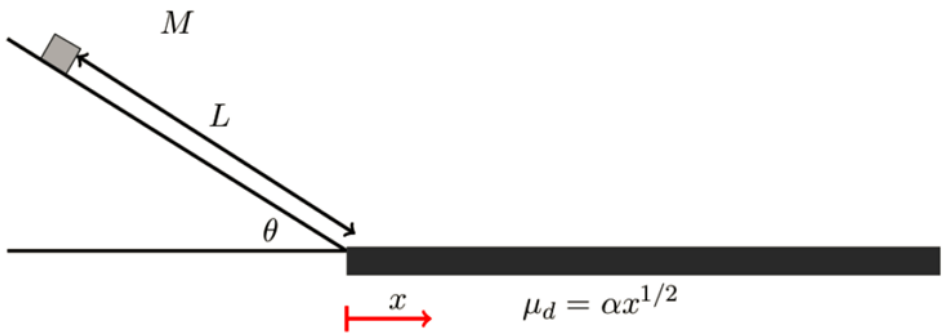
Pero como en el tramo AD no hay roce, $E_D = E_A(primera\ vez)$

$$W_{nc} = U_A^{(e)} + U_A^{(g)} + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - U_{A,1ra\ vez}^{(e)} - U_{A,1ra\ vez}^{(g)} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_{nc} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{3}{8}mv_0^2$$

Problema 7

Un bloque de masa M se suelta desde el reposo a una distancia L sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Luego el bloque se desliza por una superficie horizontal rugosa cuyo coeficiente de roce cinético (dinámico) es variable $\mu_d = \alpha x^{1/2}$. En el plano inclinado no hay roce.



a) Calcule la velocidad del bloque al entrar en la superficie horizontal

b) Si la rapidez con la que en bloque entra en la superficie horizontal es v, Calcule la distancia D que recorre el bloque sobre la superficie horizontal antes de detenerse.

Resp/

a)

Como en el plano inclinado no hay roce,

$$E_i = E_f$$

Colocando el cero de energía potencial en la base del plano,

$$E_i = U_i = mgh$$

donde $h = L\sin\theta$

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Entonces,

$$v = \sqrt{2gL\sin\theta}$$

b)

Como la fuerza de roce es disipativa, el trabajo que realiza es igual al cambio en la energía mecánica del sistema, entonces,

$$W_f = \Delta E = K_f - K_i = -K_i$$

Para calcular el trabajo notemos que la fuerza de roce, $f = \mu N$ en este caso particular no es constante pues el coeficiente de roce depende de $\mu = \alpha x^{1/2}$.

El trabajo es,

$$W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{x} = -\alpha \int x^{\frac{1}{2}} \ dx = -\alpha \frac{2}{3} D^{3/2}$$

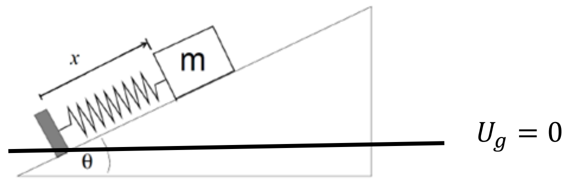
Así que

$$\alpha \frac{2}{3} D^{3/2} mg = \frac{1}{2} mv^2$$

$$D = \left(\frac{3v^2}{4\alpha g}\right)^{2/3}$$

Problema 8

Una masa m se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. La masa está conectada a un resorte de constante k y largo natural l como se muestra en la figura. Llamaremos x a la distancia entre el soporte y la masa. Suponga primero que no existe roce entre la masa y la plataforma.



a) Escriba la energía potencial respecto al origen mostrado en la figura para la energía potencial

b) Suponga que el resorte se comprime una distancia d desde su largo natural y se suelta desde el reposo. Encuentre una expresión para la velocidad de la masa m en función de la posición.

Resp/

a)

$$U = \frac{1}{2}k(x-l)^2 + mgz = \frac{1}{2}k(x-l)^2 + mgx\sin\theta$$

b)

Sin roce, $E = cte$

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}kd^2 + mg(l-d)\sin\theta$$

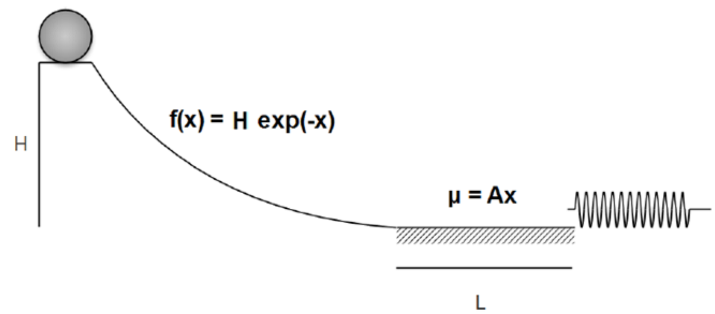
$$E_f = \frac{1}{2}k(x-l)^2 + mgz + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(x-l)^2 + mgx\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}kd^2 + mg(l-d)\sin\theta = \frac{1}{2}k(x-l)^2 + mgx\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m}d^2 - \frac{k}{m}(x-l)^2 + 2g[(l-d)-x]\sin\theta$$

Problema 9

Una partícula puntual de masa m (NO es un sólido), se suelta desde el reposo sobre un superficie sin roce, descrita por la función $f(x) = H\ \exp(-x)$. Luego entra en una zona plana de largo L, con coeficiente de roce variable, descrito por la función $\mu = Ax$. Finalmente, al salir de la zona con roce, se encuentra un resorte de constante elástica k. Determinar:



a) La rapidez de la partícula en función de la coordenada x, en la bajada sin roce

b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza de roce luego de que la partícula recorre la distancia L.

c) Calcule la compresión máxima del resorte

d) Calcule la cantidad de energía disipada luego de pasar dos veces por la zona con roce si $A = L^{-1}$.

e) Suponga que la partícula se devuelve, debido a la fuerza de restauración del resorte. Calcule la altura que alcanza si $A = L^{-1}\ y\ H = 2L$

Resp/

a)

Tomando el cero de energía potencial en la base del plano, de la conservación de la energía en la región curva sin roce, con

$$E_i = mgH$$

$$E_f = mgf(x) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2g(H - f(x))$$

$$v^2 = 2gH(1 - e^{-x})$$

$$v = \sqrt{2gH(1 - e^{-x})}$$

Notemos que cuando llega a la base del plano, cuando $x \gg 1$ obtenemos el resultado esperado,

$$v = \sqrt{2gH}$$

b) El trabajo realizado por la fuerza de roce es igual a la variación de la energía mecánica en el tramo de largo L,

$$W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{x}$$

$$W_f = -\frac{AL^2mg}{2}$$

c) Como en el tramo en que se encuentra el resorte no hay roce,

$$E_i = E_f$$

$$\widetilde{K}_i = \frac{1}{2}kx^2$$

Donde $\widetilde{K}_i$ es la energía al final del tramo anterior, que podemos calcular de

$$W_f = -\frac{AL^2mg}{2} = \Delta E$$

Donde ΔE es el cambio de la energía mecánica en el tramo anterior. Notemos que en la parte liza no cambia. Entonces,

$$-\frac{AL^2mg}{2} = \widetilde{K}_i - mgH$$

Y

$$x = \sqrt{\frac{mg(2H - AL^2)}{k}}$$

d) La cantidad de energía disipada es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce. Es el trabajo de esta la que hace cambiar a la energía mecánica.

En la primera pasada,

$$W_f = -\frac{AL^2mg}{2}$$

En la segunda pasada la energía disipada es la misma así que,

$$E_{dis} = mgL$$

e) Notemos que el trabajo de la fuerza de roce en las dos pasadas lo que hace es disipar una cantidad de energía $E_{dis} = mgL$.

Haciendo una comparación entre números esto quiere decir que,

$$E_{final} = E_{inicial} - E_{disipada}$$

De aquí es muy fácil ver que,

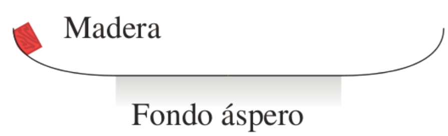
$$mgh = mgH - mgL$$

Y con $H = 2L$,

$$h = L$$

Problema 10

Un trozo de madera de 2.0 kg resbala por la superficie que se muestra en la siguiente figura. Los lados curvos son perfectamente lisos; pero el **fondo horizontal** tiene una longitud de 30 m y es áspero, con coeficiente de fricción cinética de 0.20 con la madera. El trozo de madera parte del reposo 4.0 m arriba del fondo áspero. ¿A qué distancia de la orilla izquierda de la sección horizontal se detendrá finalmente este objeto?



Datos

$m = 2.0\ kg$

$L = 30\ m$

$\mu = 0.20$

$h = 4.0\ m$

Notemos que la energía que tiene el bloque al llegar a la parte áspera comenzará a ser disipada en esta.

Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el fondo del "pozo", la energía con la que llega a la parte áspera es

$$E = mgh = 2 \times 10 \times 4 = 80\ J$$

La energía disipada por la fuerza de roce si la partícula atravesara toda la parte áspera de largo L es igual al trabajo realizado por esta en este tramo,

$$W_f = -fL = -\mu mgL = -0.2 \times 2 \times 10 \times 30 = -120\ J$$

Esto nos dice que la partícula no llega al final así que el problema es mucho más simple.

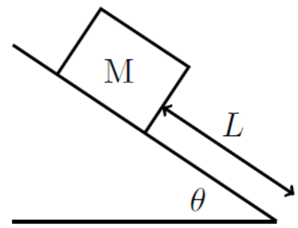
Lo que debemos calcular entonces es en que longitud el trabajo de la fuerza de roce es igual a la energía con la que entra, i.e,

$$-\mu mgl = -mgh$$

$$l = \frac{h}{\mu} = \frac{40}{2} = 20\ m$$

Problema 11

Un bloque de masa M se suelta desde el reposo sobre un plano inclinado de largo L que tiene un ángulo de inclinación de θ sobre la horizontal. El bloque se desliza hacia abajo sobre el plano inclinado y llega a su fin luego de un tiempo T. Considerando que existe roce entre el bloque y el plano inclinación. Determine el coeficiente de roce dinámico entre el bloque y el plano en términos de M, L, T, g y θ.



Como existe roce entre el bloque y el plano y la única fuerza que disipa energía es la fuerza de roce,

$W_f = \Delta E = E_f - E_i$

Tomando el cero de energía potencial en la base del plano,

$$-fL = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$-\mu NL = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \mu NL$$

Pero $v = at$

Del diagrama de fuerzas del bloque (este es un problema que ya hemos resuelto antes)

$$N = mg\cos\theta$$

y de la figura

$$h = L\sin\theta$$

así que

$$2g\,L\sin\theta = v^2 + 2\,\mu g\cos\theta\ \ L$$

Nuevamente de la segunda ley de Newton

$$-\mu N + mg\sin\theta = ma$$

$$-\mu g\cos\theta + g\sin\theta = a$$

y

$$2g\,L\sin\theta = a^2t^2 + 2\,\mu g\cos\theta\ \ L$$

$$2\,L\sin\theta = gt^2(-\mu\cos\theta + \sin\theta)^2 + 2\,\mu\cos\theta\ \ L$$

$$\frac{2\,L\sin\theta}{gt^2} = (\mu^2\cos^2\theta - 2\mu\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) + \frac{2\,\mu\cos\theta\ \ L}{gt^2}$$

$$\mu^2\cos^2\theta - 2\mu\cos\theta\sin\theta + \frac{2\,\mu\cos\theta\ \ L}{gt^2} + \sin^2\theta - \frac{2\,L\sin\theta}{gt^2} = 0$$

Haciendo

$$z = \mu\cos\theta$$

$$z^2 - 2z(\sin\theta - \frac{L}{gt^2}) + \sin\theta\,(\sin\theta - \frac{2\,L}{gt^2}) = 0$$

$$z = (\sin\theta - \frac{L}{gt^2}) + \sqrt{\left(\sin\theta - \frac{L}{gt^2}\right)^2 - \sin\theta\,(\sin\theta - \frac{2\,L}{gt^2})}$$

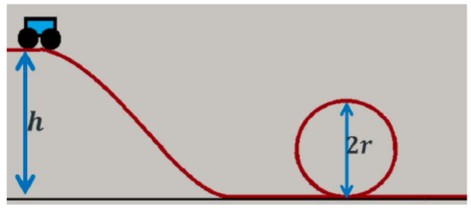
$$z = \left(\sin\theta - \frac{L}{gt^2}\right) + \sqrt{-\frac{2L}{gt^2}\sin\theta + \left(\frac{2L}{gt^2}\right)^2 + \frac{2\,L}{gt^2}\sin\theta}$$

$$z = \left(\sin\theta - \frac{L}{gt^2}\right) + \left(\frac{2L}{gt^2}\right)$$

$$\mu = \tan\theta + \frac{L}{g\cos\theta\ \ t^2}$$

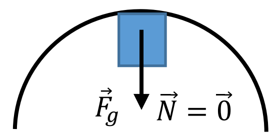
Problema 12

Un carro es liberado desde una altura h con velocidad inicial nula. ¿Cuál es la altura mínima para que el carro logre dar la vuelta por el loop circular de radio r sin que sus ruedas se despeguen de la pista?



La condición límite del problema es que en el punto más alto del lazo la normal sea cero. Si es cero en un punto anterior el carro no conseguirá dar la vuelta y caerá.

Del diagrama de fuerzas del cuerpo en el punto más alto con la condición dada,



$$mg = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{gr}$$

Esta es la velocidad final que debe tener el cuerpo en el punto más alto del lazo para que consiga dar la vuelta sin caer.

Apliquemos ahora la ley de la conservación de la energía. Tomando el cero de la energía potencial en la base,

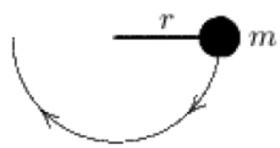
$$E_i = mgh$$

$$E_f = mg2r + \frac{1}{2}mv^2 = mg2r + \frac{1}{2}mgr = \frac{5}{2}mgr$$

$$h = \frac{5}{2}r$$

Problema 13

Un pequeño objeto de masa m, en el extremo de un cordón, es mantenido horizontalmente a una distancia r de un soporte fijo (figura abajo). El objeto es liberado, por lo que describe un movimiento de péndulo.



a) ¿Cuál es la tensión en el cordón cuando se encuentra en el punto más bajo?

Resp/

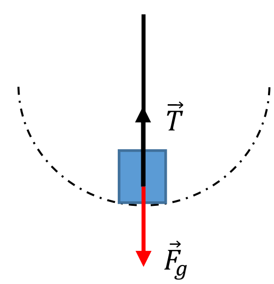
Con $r = cte$,

$$\vec{r} = r\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad (1)$$

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{\rho} \qquad (2)$$

De esta última ecuación, escribiendo la segunda ley de Newton para el punto más bajo,



$$T - mg = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$$

Donde utilizamos de la segunda ecuación $v = r\omega$

Aplicando ahora la conservación de la energía calculamos la velocidad en el punto más bajo de la trayectoria (tomando el cero de energía potencial en el punto más bajo de la trayectoria)

$$E_i = E_f$$

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2gr}$$

Entonces,

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg = 3mgr$$

Problema 14

Pregunta 3) En la figura, el resorte de constante k y largo natural ℓ_0 está unido a una argolla de masa m que puede moverse a lo largo de un riel horizontal. No hay gravedad. El sistema se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura, con la masa ubicada a una distancia $A > 0$ del eje vertical.

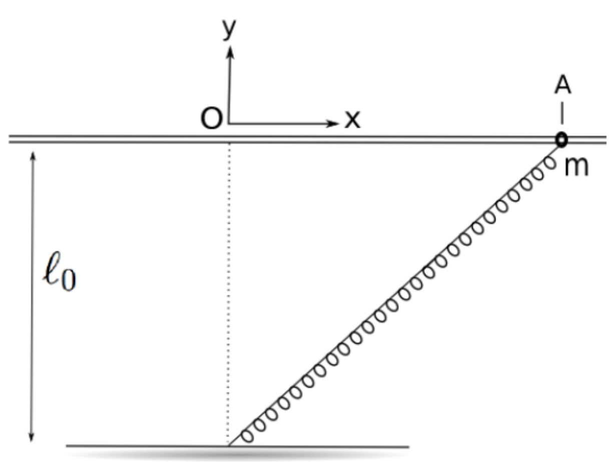
a) Asuma primero que el riel no tiene roce. Calcule la velocidad máxima v_{max} que alcanzará la masa m.

b) Ahora suponga que existe un coeficiente de roce dinámico μ_d entre la masa m y el riel. **Asuma** que m se mueve de ahora en adelante.

b.1) Dibuje un diagrama con **todas** las fuerzas que actúan sobre m. Utilizando la ley de Newton, calcule la normal $N(x)$ que actúa sobre m como función de la distancia x al origen O.

b.2) Utilizando lo anterior, escriba la ecuación que determina la velocidad v_f con la que pasaría m por el origen O (no necesita resolverla). Hint: la siguiente integral *podría* serles útil:

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{ds}{\sqrt{b^2+s^2}} = \ln\left[\frac{b}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right] \qquad \alpha > 0, b > 0$$



a) Como no hay roce, la energía mecánica se conserva.

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Donde por los datos del problema

$$K_i = 0, \quad U_i = \frac{1}{2}k(L_i - l_0)^2, \quad K_f = \frac{1}{2}mv^2, \quad U_f = \frac{1}{2}k\left(L_f - l_0\right)^2$$

siendo,

$$L_i = \sqrt{A^2 + l_0^2}, \qquad L_i = \sqrt{x^2 + l_0^2}$$

Entonces, la expresión para la velocidad es,

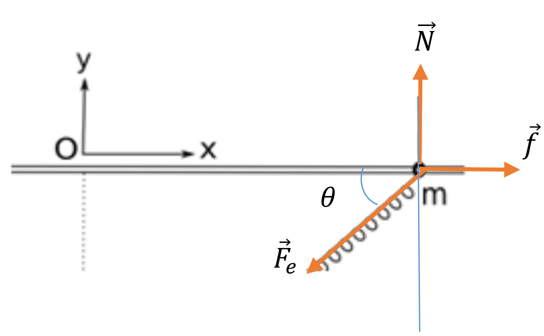
$$\frac{1}{2}k(L_i - l_0)^2 - \frac{1}{2}k\left(L_f - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

De donde vemos que la velocidad es máxima cuando la energía elástica final es cero, esto es, cuando $L_f = l_0$. Así,

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{A^2 + l_0^2} - l_0\right) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{l_0}{A}\right)^2} - l_0\right)$$

b.1)

Despreciando la gravedad (como dato en el problema) el diagrama de fuerzas queda como



y

$$N(x) = F_e \sin\theta$$

$$N(x) = k(L - l_0)\sin\theta$$

$$N(x) = k\left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right)\frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}$$

b.2)

Como hay fuerza de roce, que es una fuerza no conservativa, debemos tener en cuenta que,

$$W_{fno-cons} = \Delta E$$

$$W_{fno-cons} = E_f - E_i$$

$$W_{fno-cons} = K_f + U_f - K_i - U_i \qquad \text{(b1)}$$

Donde

$$K_i = 0, \quad U_i = \frac{1}{2}k(L_i - l_0)^2, \quad K_f = \frac{1}{2}mv^2, \quad U_f = 0$$

Y

$$W_{fno-cons} = -\int_A^0 f\ dx = -\int_A^0 \mu N\ dx$$

$$W_{fno-cons} = \mu\int_0^A k\left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right)\frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}\ dx$$

$$W_{fno-cons} = \mu k\int_0^A l_0\ dx - \mu k l_0^2\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x^2 + l_0^2}}$$

Para encontrar la velocidad con la que pasa por el origen sólo tenemos que hacer $x = 0$ y de la ecuación b1,

$$\mu k l_0 A + \mu k l_0^2 \ln\left[\frac{l_0}{A + \sqrt{A^2 + l_0^2}}\right] + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{A^2 + l_0^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$