# 3.3 Solución de Ecuaciones de Movimiento:

- en el momento movimientos unidimensional, a lo largo del eje-x. (→ permite calcular "escalas").

⇒ En este caso el segundo Axioma de Newton para $m$ = const. indica:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \qquad (3.3\text{-}1)$$

⇒ de este ecu. (3.3-1) calculamos la trayectoria de una partícula (≡ posición $x(t)$ de la partícula como función del tiempo).

⇒ este tipo de ecu. se llama "Ecuación Diferencial" (="Decu.").

Ejemplo: (recuerde clase de matemática)

1) $\dot{x} = 3x^{4/3}$ Solución: $x(t) = (t+c)^3$

2) $\dot{x} = 2t - x$ Solución: $x(t) = ce^{-t} + 2t - 2$

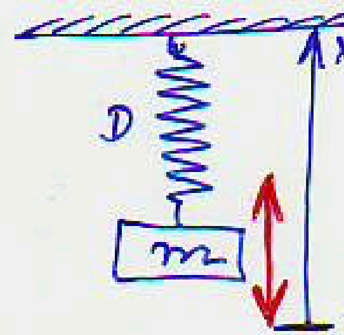
3) $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$ Solución: $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$

Los constantes $c$ en las soluciones se determina / calcula a través de las condiciones iniciales a $t=0$.

Ejemplo: Oscilador armónico, sin amortiguación (sin roce):

Una masa m esta colgada por un resorte y oscila sin roce verticalmente.

Solución:




La Fuerza Retroceso que corresponde a una elongación x desde la posición de equilibrio es – según el "Ley de Hook":

$$F = -Dx .$$

El signo "–" describe la Fuerza retroceso del resorte a la masa y es escencial para la solución de la Decu. Comprobación del "–":

Una elongación en dirección +x (ver Figura) comprime el resorte. ⇒ Resorte actúa con Fuerza negativa (en dirección –x) a la masa. En caso de elongación en dirección +x (extensión del resorte) ⇒ Fuerza positiva a masa m.

Según "Actio = Reactio" la Fuerza del Resorte a la masa es opuesto a la Fuerza +Dx de la masa al resorte.

En el 2° Axioma de Newton siempre hay que insertar la Fuerza, la cual actua desde afuera a la masa m.

⇒ La ecución de movimiento es:

(3.3-2) $\quad m\ddot{x} = $ Fuerza que actua sobre $m = -Dx$

Esta ecu. contiene la función buscada $x(t)$ y la segunda derivada. ⇒ es una Decu.

⇒ Tenemos que buscar una Función $x(t)$, la cual soluciona, junto con su segunda derivada $\ddot{x}(t)$, la Decu. (3.3-2).

La solución de la Decu. se obtiene en la Física y Matemática normalmente através de un "Ansatz" / "Planteamiento": 2 posibilidades:

1) Intuición Física: La solución tiene que describir un movimiento periódico de "ida y vuelta".
⇒ Conocemos solamente dos funciones de este tipo:

Senus y Cosenus

2) Intuición Matemática: Buscamos una función, cuya segunda derivada es proporcional a la función negativa. → También conocemos solamente dos funciones: sin y cos.

⇒ Ansatz / Planteamiento:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \qquad (3.3-3)$$

para solución de ecu. (3.3-2). La constante $\omega_0$ con la Unidad $[s^{-1}]$ tiene que ser parte del "Ansatz", porque las funciónas trigonométricas (como tan, exp, ln, ...) no pueden depender de variables con una unidad. (→ Serie de Taylor!)

Antes de aclarar el significado de las constantes incógnitas $\omega_0$, $c_1$, $c_2$, tenemos que comprobar, si el "Ansatz" (acertado) está correcto.

⇒ 2 veces derivación del "Ansatz" al tiempo:

$$\dot{x}(t) = -c_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + c_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{x}(t) = -c_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - c_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t = -\omega_0^2 x(t)$$

(3.3-4)

Una comparación de las ecus. (3.3-2) y (3.3-4) muestra: El "Ansatz"/Planteamiento satisface la ecuación (3.3-2) exactamente, si

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (3.3\text{-}5)$$

El significado de $\omega_0$ resulta de la periodicidad de las funciones trigonométricas: Si observamos el oscilador a cualquie tiempo $t$ y despues de un periodo $T$ observamos nuevamente, obtenemos el mismo estado.


$T \hat{=} A \to B \to A$

Eso significa:

$$\cos \omega_0 t = \cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos \omega_0 (t + T)$$

$\Rightarrow$ (con ecu. (3.3-5)) el periodo de la oscilación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (3.3\text{-}6)$$

Asi tenemos determinada la constante $\omega_0$ y al mismo tiempo derivada la muy importante ecuación (3.3-6) para el periodo de oscilación $T$ del oscilador armónico no amortiguado.

⇒ En concordancia con la experiencia Experimental es aún mayor el periodo $T$, mientras más pesada es la masa $m$ y mientras más flexible sea el resorte.

Los dos constantes $c_1$, $c_2$ resultan de los "condiciones iniciales", es decir de la elongación y la velocidad del oscilador en el momento $t=0$.

Según la ecuación (3.3-3) vale en el momento $t=0$:

$$x(t=0) =: x_0 = c_1$$
$$v(t=0) =: v_0 = c_2\,\omega_0$$

El movimiento del oscilador armónico es entonces:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{D}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right) \qquad (3.3\text{-}7)$$

La elongacion inicial $x_0$ se encuentra solamente junto con el cos, porque a $t=0$ el cos tiene una elongación, pero ninguna velocidad (pendiente).

La velocidad inicial $v_0$ esta solamente junto al sin, porque a $t=0$ el sin tiene solamente una velocidad/pendiente, pero ninguna elongación.

Segun ecu. (3.3-7) se tienen que conocer ambos parametros $\underline{m}$ y $\underline{D}$ y los dos condiciones iniciales $\underline{X_0}$, $\underline{V_0}$ para calcular la oscilacion del oscilador.

Ejemplo (3.3-2): Cálculo de una oscilación:

Calcule la oscilación de un oscilador con los parametros $m = 4kg$, $D = 100 N/m$, el cual esta elongado 3cm desde su posición de reposo y al momento de soltarlo a $t=0$ recibe un empuje con la velocidad de 5cm/s.

Solución:

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = 5s^{-1} \qquad X_0 = 0{,}03\,m \qquad V_0 = 0{,}05\,m/s$$

Con ecu. (3.3-7) encontramos de inmediato:

$$X(t) = 0{,}03m \cdot \cos(5s^{-1} \cdot t) + 0{,}01\,m \cdot \sin(5s^{-1} \cdot t)$$

Ejemplo 3.3-3: Cuerda en el extremo de una mesa

Una cuerda de un largo $l$ y masa $m$ está extendida en forma vertical con respecto al borde de una mesa, en el cual un pequeño trozo de la extensión $x_0$ cuelga sobre el borde de la mesa. Después de soltar el extremo izquierdo, resbala la cuerda completamente libre de roce hacia el suelo. Calcule el largo $x(t)$ del extremo colgante de la cuerda como función del tiempo.

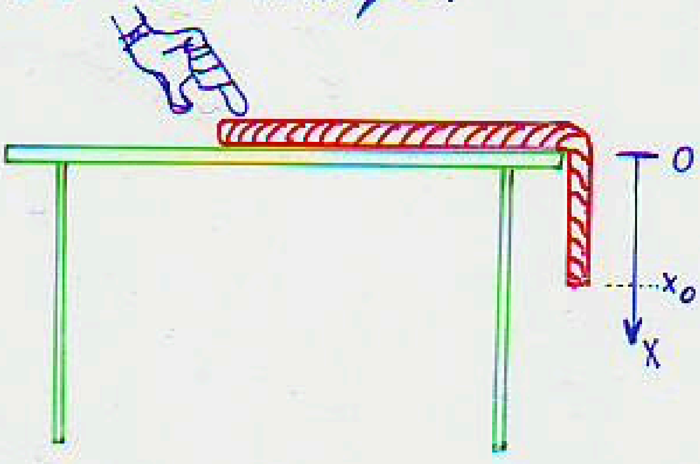



Fig.: Una cuerda resbala sin roce sobre el borde de una mesa hacia el suelo.

Solución:

El segundo axioma de Newton indica

$$m\ddot{x} = \hat{G} = \text{Fuerza gravitacional sobre el trozo de cuerda colgante.}$$

Ya que la cuerda extentida esta acelerada como un todo, permanece al lado izquierdo la masa total de la cuerda m. Es evidente que $\hat{G}$ es igual a la Fuerza gravitacional / Peso mg multiplicado con el trozo que cuelga:

$$\hat{G} = mg\,\frac{x}{l}$$

⇒ la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = mg\,\frac{x}{l} \qquad o \qquad \ddot{x} = \underline{\underline{+}}\,\frac{g}{l}\,x \qquad (3.3\text{-}8)$$

Esta ecuación de movim. tiene casi la misma forma que la ecu. de movim. $\ddot{x} = \underline{\underline{-}}\,\frac{D}{m}\,x$ del oscilador armónico. En ambos casos son las aceleraciónes $\ddot{x}$ proporcionales a la elongación x. Unicamente los signos al lado derecho son distintos:

Oscillator: negativo, porque resorte atrae la masa m de vuelta al estado de equilibrio.

Cuerda: positivo, porque la gravitación aleja la cuerda más y más de su posición inicial.

Los signos distintos son responsables por los movim. completamente distintos de los dos sistemas.

Queremos solucionar la ecu. de movimiento (3.3-8) a través de un "Ansatz"/ planteamiento.

Para este fin buscamos funciones $x(t)$, de los cuales segundas derivadas son proporcional a la función misma, con un signo positivo.

Las "Funciones Hyperbolicas" Cosinus-Hiperbolicus y Sinus-Hiperbolicus son tales funciones.

Ellas son (definidas como) combinaciones lineales de las funciones Exponenciales $\exp(\pm x)$:

$$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \qquad (3.3\text{-}9a)$$

$$\sinh x := \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \qquad (3.3\text{-}9b)$$

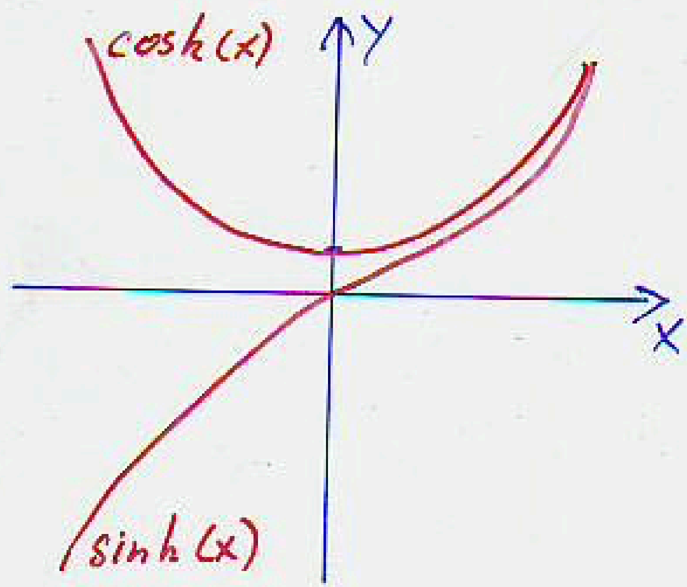



Fig.: Funciones Hiperbolicus $\cosh x$ y $\sinh x$

Nota:

1) $\cosh x$ es (como $\cos x$) una función par;

2) $\sinh x$ es (como $\sin x$) — " — impar.

3) ambas funciones hiperb. tienen en el lugar $x=0$ las mismas valores como cos y sin.

4) ambas funciones hiperb. tienen en el lugar $x=0$ las mismas derivadas como las funciones trigonométricas cos y sin.

De ecu. (3.3-9) resulta:

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) = \sinh x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\cosh x = \frac{d}{dx}\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) = \cosh x$$

(mas facil que cos y sin, porque no hay signo negativo!)

Entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2}\cosh x = \cosh x\,; \quad \frac{d^2}{dx^2}\sinh x = \sinh x$$

$\Rightarrow$ "Ansatz" para solución de la Decu. (3.3-8):

$$x(t) = C_1 \cosh(\lambda t) + C_2 \sinh(\lambda t) \quad (3.3\text{-}10)$$

De la constante $\lambda$ sabemos, que ella tiene la unidad $[s^{-1}]$. $\lambda$ necesitamos, para que los argumentos de las funciones hiperbolicas son libres de unidades ($\rightarrow$ Taylor-Serie!).

Por

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2\left[C_1 \cosh(\lambda t) + C_2 \sinh(\lambda t)\right] = \lambda^2 x(t)$$

el "Ansatz" (3.3-10) cumple la Ecu. (3.3-8) exactamente, si elegimos

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Las constantes $C_1$, $C_2$ resultan (como en el caso del oscilador armónico) de las condiciones iniciales. Del "Ansatz" (3.3-10) resulta:

$$x(t=0) =: x_0 = C_1$$
$$\dot{x}(t=0) =: v_0 = C_2\lambda$$

$\Rightarrow$ Solución completa:

$$x(t) = x_0 \cosh(\lambda t) + \frac{v_0}{\lambda} \sinh(\lambda t) \quad \text{con } \lambda = \sqrt{g/l} \tag{3.3-11}$$

Pregunta de comprensión: de ecu. (3.3-11) resulta la aceleración para $v_0 = 0$ a:

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 x_0 \cosh(\lambda t) = g\frac{x_0}{l} \cosh(\lambda t)$$

$\Rightarrow$ para tiempos "t" suficientemente largo la aceleración de la cuerda es superior a $g$! ¿Donde es el error?

→ Hay Ecuac. de Movimiento, los cuales se solucionan con un plantaneamiento / "Ansatz":

- oscilador armónico sin roce
- cuerda en el borde de una mesa
- oscilador armónico con roce.
- etc, etc,...

→ Hay muchas Ecuac. de Movimiento muy importantes pero simples, los cuales se calculan aún mejor por <u>Integración</u>:

p. ej.: si las Fuerzas dependen solamente del tiempo $\vec{F}(t)$.

o si las Fuerzas dependen solamente de la velocidad $\vec{F}(\dot{\vec{x}})$.

El cálculo Integral es en la ciencia y tecnología de gran importancia (como el cálculo Diferencial)

→ Ecuac. de Movimiento
→ Cinematica (cálculo del camino recorrido a través de la velocidad $v(t)$).
→ Trabajo e "Impulso"
→ Masa, Volumen, centro de masa
→ Momentum, Inercia, etc., etc....

para asegurar, que Uds. puedan aplicar sin problemas su conocimiento de Cálculo I y II en la ciencia y tecnología, una breve repetición de las "ideas" del "Cálculo Integral":

## 3.4 Integración:

→ Calculo Dfsencial:

conocemos $f(t)$ y buscamos $\dot{f}(t)$

→ Cálculo Integral: Al contrario:

conocemos $\dot{f}(t)$ y calculamos $f(t)$

Ejemplo simple (3.4-1):

Tenemos la derivada $\dot{x}(t) = \cos \omega t$

Calcule todas las funciones $x(t)$ con $\dot{x}(t) = \cos \omega t$

Solución:

Cualquier función $x(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t + c$ con $c = \text{const.}$ es una solución, porque

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + c\right) = \cos(\omega t)$$

La constante de Integración $c$ se puede calcular solamente, si se asigna para la función $x(t)$ un valor para algún tiempo $t$ – típicamente para el tiempo $t=0$.

$\Rightarrow$ Con la condición (asignación $x(t=0)=0$

tenemos $c=0$ y una solución inconfundible.

En otras palabras:

"El cálculo integral se puede tratar como la inversión del cálculo diferencial. El objetivo es, buscar la función $F(x)$ de cuya derivación es $f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

$d\,F(x) = f(x)\cdot dx$ se llama "diferencial" de la función $F(x)$.

ojo: También $F(x) + C$ es una solución

constante arbitraria, se calcula desde las condiciones iniciales (ver ejemplo (3.4-1))

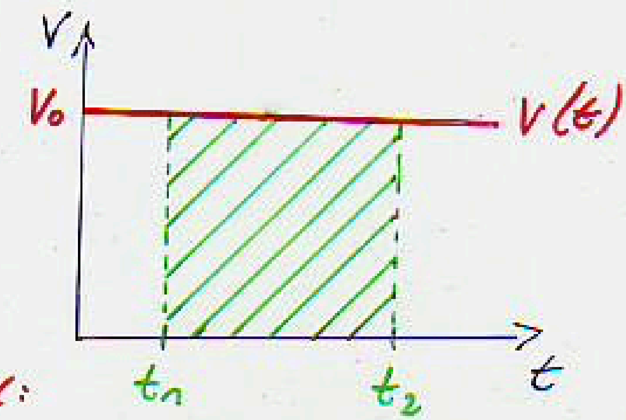
4 Ejemplo típico de un problema simple:

Se tiene la velocidad $v(t)$ – por ejemplo a través del tacógrafo de un camión – y buscamos el lugar $x(t)$.

1) Caso más fácil: movimiento uniforme con

$$v(t) = \text{const.} =: v_0$$

Diagrama velocidad – tiempo:
⇒ $v(t)$ es paralelo al eje $t$ (abscisa).




⇒ Integración es muy fácil:

Según ecu. (2.2-3) el camión recorre en el intervalo $[t_1, t]$ el camino

$$x(t) - x(t_1) = v_0 \cdot (t - t_1)$$

⇒ El camino recorrido es igual a el área sombreada en la figura.

Con $c := x(t_1) - v_0 \cdot t_1$ tenemos

$$x(t) = v_0 t + c \qquad \text{para } v(t) = v_0 = \text{const.}$$

Así calculamos la función "diferencial" $x(t)$ de una velocidad constante $v(t) = v_0$ y logramos un primer indicio para ~~el~~ la relación

Area $\Longleftrightarrow$ Integral

2) ¿Qué pasa en el caso de un movimiento <u>No</u> uniforme? :

Aquí tenemos que utilizarlo, el hecho que la velocidad esta casi constante, si el intervalo de tiempo $\Delta t$ es suficientemente pequeño:

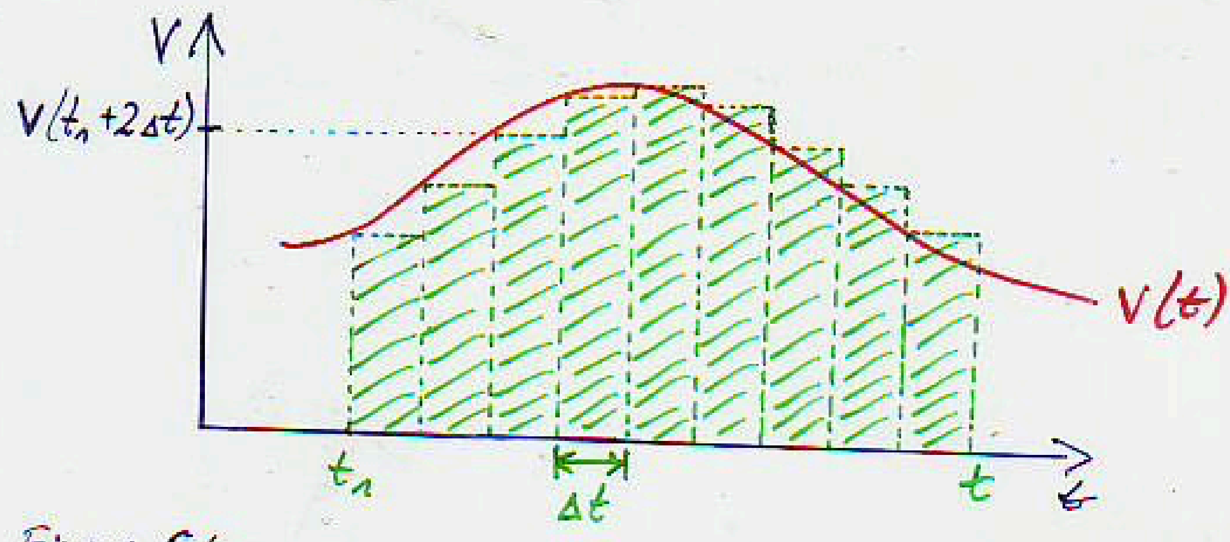



Figura: El camino recorrido total es la suma de los caminos recorridos parciales en los intervalos de tiempo $\Delta t$, donde la velocidad $v(t)$ en los intervalos parciales $\Delta t$ esta aprox. constante.

Con estos pensamientos se puede desarrollar un procedimiento válido en general:

para calcular el camino recorrido en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, se divide el intervalo $[t_1, t_2]$ en $n$ intervalos parciales iguales con el "ancho"

$$\Delta t = \frac{t - t_1}{n}$$

y calcule las velocidades, por ejemplo, para el principio de los intervalos parciales $v[t_1 + (i-1)\cdot\Delta t]$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Camino recorrido en el intervalo total = Suma de (caminos recorridos) durante todos los intervalos parciales:

$$x(t) - x(t_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[ x(t_1 + i\Delta t) - x(t_1 + (i-1)\Delta t) \right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(t_1 + (i-1)\Delta t)\cdot\Delta t}_{\equiv \text{ área sombreada en la figura anterior.}} \qquad (3.4-3)$$

con $\Delta t = (t - t_1)/n$.

Ahora: Aumentamos el número $n$ de los intervalos parciales más y más

$\Rightarrow$ El "ancho" $\Delta t = (t - t_1)/n$ de

los intervalos parciales disminuye más y más.

$\rightarrow$ Mientras más angosto $\Delta t$ menos varía la velocidad $v(t)$ en el intervalo parcial.

y más preciso la suma de las velocidades de el camino recorrido $\Delta x = x(t) - x(t_1)$.

$\rightarrow$ piensen, por ej., en la lectura del tacógrafo de un camión recorriendo el camino Santiago – Valparaiso: Leyendo la velocidad cada 5 minutos, cada minuto, cada 5 segundos, cada segundo...

para $n \to \infty$ la $\sum_{i=1}^{n}$ se aprox. al valor límite, el cual llamamos el "Integral" de $v(t)$:

$$\boxed{x(t) - x(t_1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v\left[t_1 + (i-1)\frac{t-t_1}{n}\right] \cdot \frac{t-t_1}{n} =: \int_{t_1}^{t} v(t')\,dt'}$$

(3.4-4)

$\Rightarrow$ a) El Integral es $\equiv$ área entre la Función $v(t)$ y la abscisa en el intervalo $[t_1, t]$.

b) El Integral es $\equiv$ aumento $x(t) - x(t_1)$ de la derivada

con ecu. (3.4-4) tenemos para el lugar/posición $x(t)$ de una partícula puntual en el momento $t$:

$$\boxed{x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(t')\,dt'} \qquad (3.4\text{-}5)$$

Del mismo modo se puede mostrar:

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(t')\,dt'$$

Ejemplo (para desarrollarlo Ud. mismo): (3.4-2)

Movimiento acelerado:

Velocidad crece al cuadrado con el tiempo:

$v(t) = ct^2$ con $c = \text{const}$ $[c] = \frac{m}{s^3}$

$\Rightarrow$ calcule el camino recorrido en el intervalo $[0, t]$ no por integración, sino a través de sumas y el valor límite para $\Delta t \to 0$.

Ejemplo (3.4-3): Lanzamiento inclinado sin roce:

Un cuerpo será lanzado con una velocidad inicial $v_0$ bajo el ángulo $\varphi$ con inclinación hacia arriba. Elegimos un sistema de coordinados cartesianas pendientes con su origen en el lugar del lanzamiento.

El eje z indica en dirección vertical, hacia arriba. El eje x se encuentra en el plano horizontal e indica la dirección del lanzamiento. El cuerpo se lanzará en el momento $t=0$.

Las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}(t=0) := \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(t=0) := \dot{\vec{r}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \cos\varphi \\ 0 \\ V_0 \sin\varphi \end{pmatrix}$$

¡Calcule el vector local $\vec{r}(t)$ através de integración!

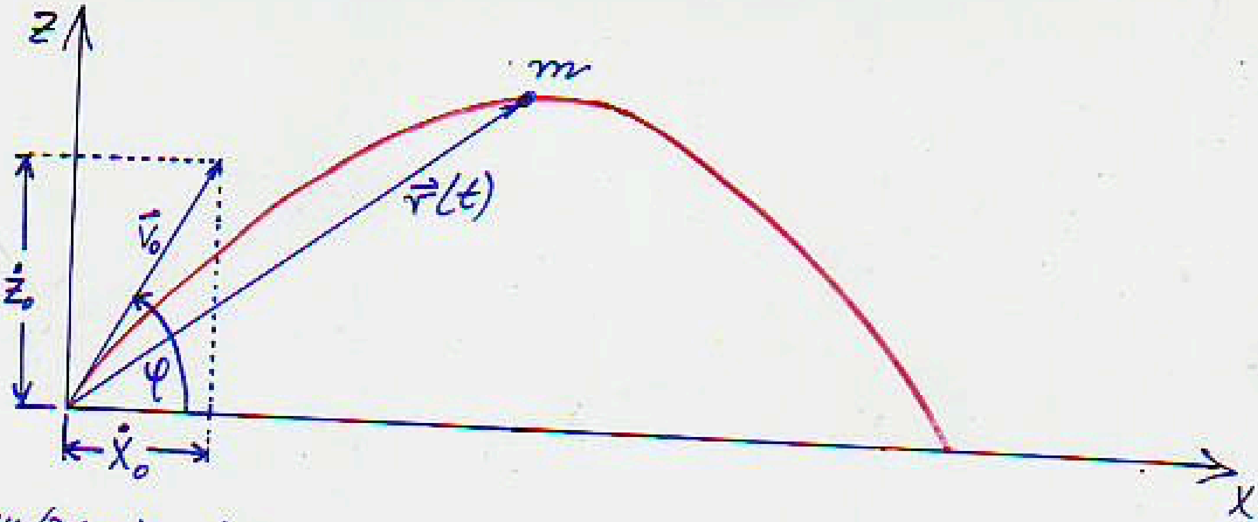



Fig.(3.4-4): Lanzamiento inclinado sin roce

Solución:

La ecuación de movimiento según el segundo axioma de Newton es:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$$

o en anotación de coordinadas:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad (3.4-7)$$

Podemos solucionar la Ecua. Diferencial por coordenadas:

La solución de la primera ecu. $\ddot{x}=0$ es fácil: Según ecu.(3.4-6) el aumento de la función $x(t)$ en el intervalo $[0,t]$ es:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_0 = \int_0^t \ddot{x}(t')\,dt' = \int_0^t 0\cdot dt' = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}_0$$

La segunda Integración da:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t \dot{x}(t')dt' = \dot{x}_0 \int_0^t dt' = \dot{x}_0 t$$

con $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = V_0 \cos\varphi$ resulta:

$$x(t) = V_0 \cdot t \cdot \cos\varphi \qquad (3.4\text{-}8a)$$

La solución de la ecu. $\ddot{y} = 0$ se realiza de igual modo y resulta:

$$y(t) = 0 \qquad (3.4\text{-}8b)$$

Después solucionamos la ecu. $\ddot{z} = -g$ para el movimiento vertical:

$$\dot{z}(t) - \dot{z}_0 = \int_0^t \ddot{z}(t')dt' = -g \int_0^t dt' = -gt$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{z}_0 - gt$$

Una integración adicional conduce a

$$z(t) - z_0 = \int_0^t \dot{z}(t')dt' = \int_0^t (\dot{z}_0 - gt')dt' = \dot{z}_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Con $z_0 = 0$ y $\dot{z}_0 = V_0 \sin\varphi$ resulta:

$$z(t) = V_0 t \sin\varphi - \frac{g}{2} t^2 \qquad (3.4\text{-}8c)$$

El vector local

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ v_0 \cdot t \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$

muestra, que el lanzamiento está compuesto de dos componentes independientes:

1. componente vertical: "Caída Libre".

2. — " — horizontal: "Movimiento uniforme".

¡Estos dos movimientos no se influyen entre sí!

→ $\boxed{\text{Ver Experimento}}$

Finalmente cambiamos ecu. (3.4-8a) a $t$ y sustituimos $t$ en ecu. (3.4-8c). Resulta la trayectoria en el plano $x, z$:

$$z = x \tan\varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 \qquad (3.4\text{-}9)$$

⇒ la trayectoria es una parábola.

¿Cuál es el ángulo $\varphi$ para $X_{max}$?