Fis1513: Estática y Dinámica

Interrogación 2 - Pauta

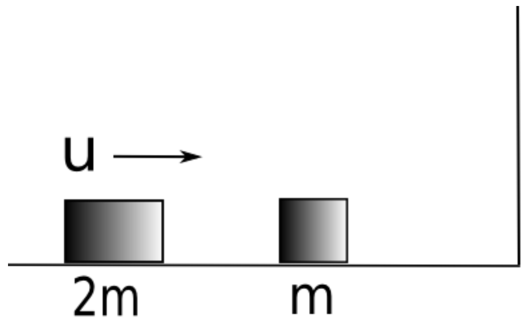
Profesores: Rafael Benguria, Roberto Rodríguez, Ignacio Reyes

Fecha: 16 de Mayo de 2013

Nombre: ____

P1	
P2	
P3	

Pregunta 1) Un bloque de masa $2m$ se mueve sobre una mesa horizontal lisa con velocidad u hacia la derecha hasta chocar con un bloque de masa m en reposo. A la derecha de ambos bloques se encuentra una pared vertical tal como se indica en la figura. Suponga que cualquier choque que ocurra en este problema es elástico (i.e., choques entre bloques o entre un bloque y la pared son elásticos).



a) Encuentre las velocidades de ambos bloques luego del (primer) choque. (2 pt)

b) Indique qué sucede después del primer choque. ¿Chocarán nuevamente los dos bloques? (1 pt)

c) Si los dos bloques vuelven a chocar, encuentre sus velocidades luego del segundo choque. (2 pt)

d) ¿Ocurren más choques? ¿Cuál es la velocidad final con que se desplazan los dos bloques hacia la izquierda de la pared? (1 pt)

Solución

a) Llamemos v_1 y v_2 a las velocidades de m y $2m$ respectivamente después del primer choque. La conservación de momentum lineal nos dice:

$$2mu = mv_1 + 2mv_2 \quad \Rightarrow \quad 2(u - v_2) = v_1 \quad [0{,}5] \tag{1}$$

y la conservación de energía es:

$$\frac{1}{2}(2m)u^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2^2 \quad \Rightarrow \quad 2(u^2 - v_2^2) = v_1^2 \quad [0{,}5] \tag{2}$$

Asumiendo que resolvemos para el caso no trivial en que no hay choque, $u \neq v_2$ de modo que podemos dividir (2) en (1) y así obtener:

$$u + v_2 = v_1 \tag{3}$$

que reemplazada de vuelta en (1) nos da:

$$2(u - v_2) = u + v_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{3}u} \quad [0,5] \tag{4}$$

y entonces

$$\boxed{v_1 = \frac{4}{3}u} \quad [0,5] \tag{5}$$

b) De a), vemos que claramente m sale hacia la pared con mayor rapidez que $2m$, de modo que luego de chocar con la pared volverán a encontrarse y sí chocarán [1.0]

c) Después de chocar con la pared, m viajará hacia la izquierda con velocidad $-v_1 = -\frac{4}{3}u$, mientras que $2m$ continúa con $v_2 = \frac{1}{3}u$ hacia la derecha. Llamando v_1' y v_2' a las velocidades después del segundo choque, tenemos por conservación de momentum:

$$(2m)\frac{u}{3} - \frac{4m}{3}u = mv_1' + (2m)v_2' \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{u}{3} - v_2'\right) = \frac{4u}{3} + v_1' \quad [0,5] \tag{6}$$

mientras que energía nos da:

$$\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{4u}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}(2m)v_2'^2 + \frac{1}{2}mv_1'^2 \tag{7}$$

$$\Rightarrow 2\left[\left(\frac{u}{3}\right)^2 - v_2'^2\right] = v_1'^2 - \left(\frac{4u}{3}\right)^2 \quad [0,5] \tag{8}$$

y nuevamente asumiendo el caso no trivial, dividimos (8) en (6) para obtener

$$\frac{u}{3} + v_2' = v_1' - \frac{4u}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{5u}{3} + v_2' = v_1' \tag{9}$$

que reemplazado de vuelta en (6) nos da

$$2\left(\frac{u}{3} - v_2'\right) = \frac{4u}{3} + \frac{5u}{3} + v_2' \tag{10}$$

$$\Rightarrow 2\frac{u}{3} = 3u + 3v_2' \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2' = -\frac{7}{9}u} \quad [0,5] \tag{11}$$

de modo que

$$v_1' = \frac{5u}{3} - \frac{7}{9}u \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1' = \frac{8u}{9}} \quad [0,5] \tag{12}$$

d) Vemos que m sale hacia la derecha con mayor rapidez que $2m$ hacia la izquierda, de modo que luego de chocar nuevamente con la pared, m se desplazará hacia la izquierda, colisionando nuevamente con $2m$. Para ese choque, si llamamos v_1'' y v_2'' a las respectivas velocidades, tenemos que:

$$-m\frac{8u}{9} - (2m)\frac{7u}{9} = mv_1'' + (2m)v_2'' \quad \Rightarrow \quad -(\frac{8u}{9} + v_1'') = 2(v_2'' + \frac{7u}{9}) \quad [0{,}25] \tag{13}$$

y también

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{8u}{9}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{7u}{9}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_1''^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2''^2 \tag{14}$$

$$\left(\frac{8u}{9}\right)^2 - v_1''^2 + = 2v_2''^2 - 2\left(\frac{7u}{9}\right)^2 \quad [0{,}25] \tag{15}$$

y dividiendo (15) en (13) se tiene

$$-\left(\frac{8u}{9} - v_1''\right) = v_2'' - \frac{7u}{9} \quad \Rightarrow \quad -\frac{u}{9} + v_1'' = v_2'' \tag{16}$$

que reintroducida en (13) nos entrega

$$-(\frac{8u}{9} + v_1'') = 2(-\frac{u}{9} + v_1'' + \frac{7u}{9}) \quad \Rightarrow \quad -\frac{8u}{9} = 3v_1'' + \frac{12u}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\frac{20u}{27} = v_1''} \quad [0{,}25] \tag{17}$$

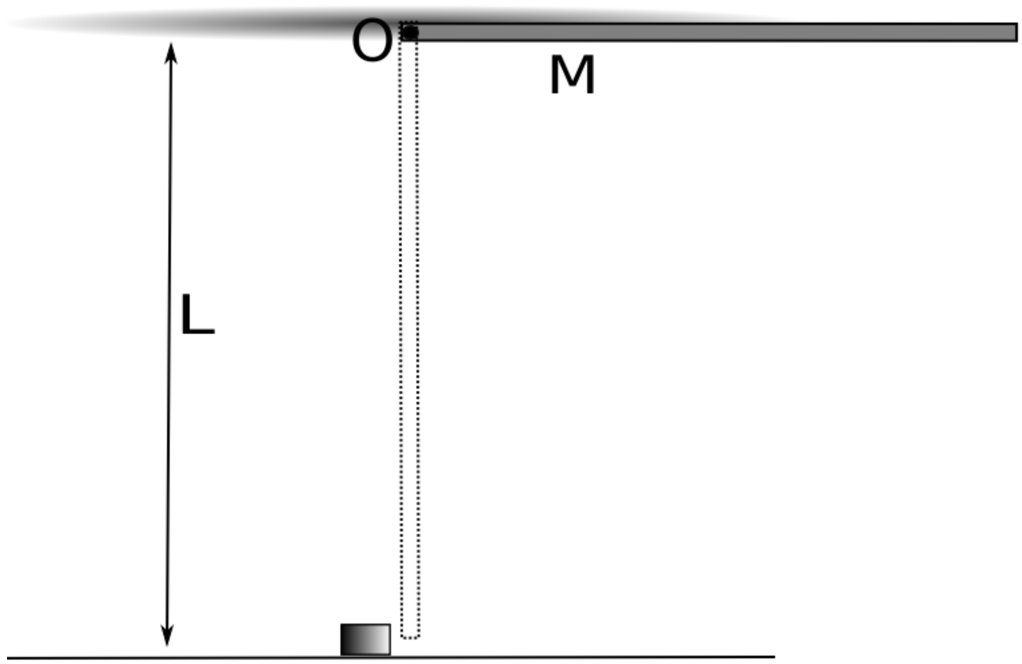
y también

$$-\frac{u}{9} - \frac{20u}{27} = v_2'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\frac{23u}{27} = v_2''} \quad [0{,}25] \tag{18}$$

Es estos resultados concluimos que este tercer choque será el último, ya que desde entonces en adelante $2m$ viajará más rápido que m hacia la izquierda. Esto concluye el problema.

Pregunta 2) Una barra homogénea de masa M y largo L que está pivoteada (fija) en un punto O del techo puede girar libremente. La barra es soltada desde el reposo en posición horizontal. En reposo sobre el suelo (sin roce) hay un pequeño bloque de masa m. Al llegar a su posición más baja, la barra colisiona de forma perfectamente elástica con el bloque.

Asuma que conoce el momento de inercia I_{cm} con respecto al centro de masa, y el momento I_O con respecto al pivote O.



a) Calcule la velocidad angular ω_1 con que gira la barra justo antes del choque con el bloque.

b) Calcule la velocidad del bloque v después del choque y la velocidad angular de la barra ω_2 inmediatamente después del choque.

c) ¿Qué condición debe cumplirse para que la barra se "devuelva" ?

Solución

Esta problema puede obviamente resolverse de dos maneras: 1) descomponiendo las cantidades dinámicas ($\vec{L}$, K, etc) en términos de la contribución del CM y la contribución con respecto al CM; 2) escribiendo todas las cantidades directamente en función del origen O. Como 2) es más sencillo algebraicamente, lo haremos así, pero ambos métodos son totalmente equivalentes.

a) Situando $U = 0$ para la energía potential gravitatoria en el suelo, tenemos que por conservación de energía:

$$MgL = \frac{1}{2}I_0\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}MgL = \frac{1}{2}I_0\omega_1^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{MgL}{I_0}} \quad [2{,}0] \tag{19}$$

b) Como el choque ocurre en un intervalo de tiempo muy corto, el cambio en el momentum angular debido a los torques externos es despreciable, de modo que $\vec{L}_O$ es conservado. Inicialmente tenemos

$$L_O = I_0\omega_1 \tag{20}$$

mientras que después del choque tenemos la contribución de la barra y de la pequeña masa:

$$L_O = I_0\omega_2 + Lmv \tag{21}$$

de modo que

$$I_0\omega_1 = I_0\omega_2 + Lmv \quad \Rightarrow \quad Lmv = I_0(\omega_1 - \omega_2) \quad [1{,}0] \tag{22}$$

Por otra parte, la energía antes del choque es simplemente $E = MgL = I_0\omega_1^2$, mientras que después del choque es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_2^2 + Mg\frac{L}{2} \tag{23}$$

Igualando

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_2^2 + Mg\frac{L}{2} = MgL \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_2^2 = Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_0\omega_1^2 \quad [1{,}0] \tag{25}$$

y reordenando tenemos

$$mv^2 = I_0\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \quad [0{,}5] \tag{26}$$

Dividiendo (26) en (22) (asumiendo que hay colisión) obtenemos

$$\frac{v}{L} = \omega_1 + \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{v}{L} - \omega_1 \tag{27}$$

que reemplazada de vuelta en (22) nos otorga

$$Lmv = I_0(2\omega_1 - \frac{v}{L}) \quad \Rightarrow \quad v\left(mL + \frac{I_0}{L}\right) = 2I_0\omega_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2I_0\omega_1}{mL + \frac{I_0}{L}} \tag{28}$$

y reemplazando ω_1 de (19)

$$\boxed{v = \frac{2I_0\sqrt{\frac{MgL}{I_0}}}{mL + \frac{I_0}{L}}} \quad [0,5] \tag{29}$$

y entonces tenemos que

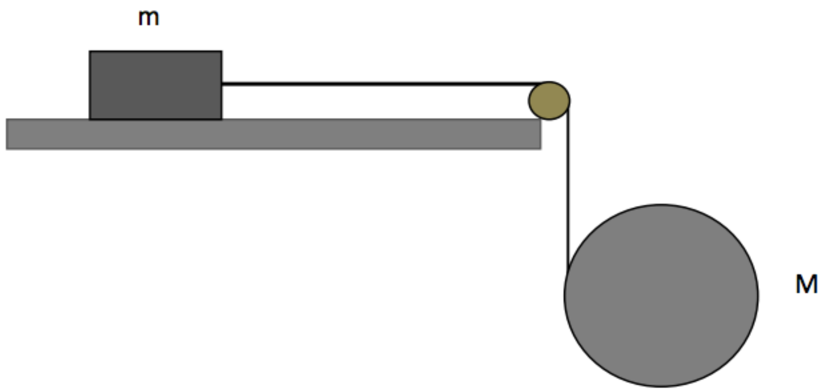
$$\omega_2 = \frac{v}{L} - \omega_1 = \frac{\frac{2I_0\omega_1}{mL+\frac{I_0}{L}}}{L} - \omega_1 = \omega_1\left(\frac{2I_0}{mL^2 + I_0} - 1\right) \tag{30}$$

entonces

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{MgL}{I_0}}\left(\frac{I_0 - mL^2}{mL^2 + I_0}\right)} \quad [0,5] \tag{31}$$

c) Para que la barra salga en dirección contraria a la masa justo después del choque, claramente se requiere que $\omega_2 < 0$, lo cual sólo puede ocurrir si $I_0 < mL^2$ [0.5]. Por ejemplo, si la barra fuera homogénea se tendría $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ y entonces la condición sería $\frac{1}{3}M < m$: es decir, M no debe ser mayor que $3m$. Claramente si M es muy grande, la barra no puede devolverse, y ambos salen en el mismo sentido luego del choque.

Pregunta 3) En el sistema de la figura, el bloque de la izquierda tiene masa m y descansa sobre una superficie horizontal con coeficientes de roce estático μ_e y dinámico μ_d. El bloque m se encuentra unido a un cilindro macizo de masa M y radio R mediante una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. La cuerda está enrrollada en el borde del cilindro como se ilustra la figura.



a) Encuentre el coeficiente de roce máximo μ_e a partir del cual m no se mueve.

b) Ahora asuma que m sí se mueve. Calcule la aceleración angular del centro de masa del cilindro, y la tensión de la cuerda.

Solución

a) Si medimos la posición x_1 de m desde el borde hacia la izquierda, y la posición x_2 del centro de masa del cilindro desde el borde hacia abajo, la ligazón resulta ser

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = R\ddot{\theta} \quad [1{,}0] \tag{32}$$

siendo θ el ángulo de giro del cilindro respecto de su propio eje, medido en sentido horario según la figura. La condición para que m no se mueva implica que su velocidad debe ser constante igual a cero, que implica que su aceleración es nula, con lo cual las ecuaciones de Newton para las masas son

$$N - mg = 0 \tag{33}$$

$$f_e - T = 0 \tag{34}$$

$$Mg - T = M\ddot{x}_2 \quad [1{,}5] \tag{35}$$

en donde cada símbolo tiene su significado usual, mientras que la ecuación de torque para el clindro, respecto de su CM es

$$TR = I_{\rm cm}\ddot{\theta} \quad [0{,}5] \tag{36}$$

en donde $I_{\rm cm} = MR^2/2$ es el momento de inercia respecto del eje de giro. Como físicamente se espera que el roce apunte en sentido opuesto a la tensión en la cuerda (de otra forma m nunca estará en reposo), se deduce que existe un coeficiente de roce mínimo (y no máximo como dice el enunciado) tal que $f_e \leq \mu_e N$, o

$$\mu_e \geq \frac{f_e}{N} = \frac{T}{mg} = \mu_e^{\rm min} \quad [0,25] \tag{37}$$

en donde en la última igualdad se usaron las ecuaciones de movimiento para m. La tensión, que en principio es desconocida, puede obtenerse en términos de los parámetros del problema, usando la ecuación de movimiento y de torque para M. Se tiene

$$T = Mg - M\ddot{x}_2 = Mg - MR\ddot{\theta} = Mg - MR\frac{TR}{MR^2/2} \quad [0{,}5] \tag{38}$$

o $T = Mg/3$. Reemplazando en lo encontrado previamente se deduce que $\mu_e \geq \mu_e^{\rm min} = M/3m$ [0,25] .

b) Como ahora suponemos que el sistema está completamente en movimiento, resolvemos las ecuaciones generales encontradas en la parte (a), pero usando roce dinámico $f_d = \mu_d N$. Las ecuaciones son

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = R\ddot{\theta} \tag{39}$$

$$N - mg = 0 \tag{40}$$

$$\mu_d N - T = m\ddot{x}_1 \tag{41}$$

$$Mg - T = M\ddot{x}_2 \tag{42}$$

$$TR = I_{\rm cm}\ddot{\theta} \quad [1,0] \tag{43}$$

Multiplicando la tercera por M, la cuarta por m, sumando ambas y luego reemplazando la primera,

$$\mu_d Mmg + mMg - TM - Tm = mM\ddot{x}_1 + mM\ddot{x}_2 = mMR\ddot{\theta}, \tag{44}$$

o

$$(1 + \mu_d)Mmg - T(m + M) = mMR\ddot{\theta} = 2mT, \tag{45}$$

en donde en la última igualdad se usó la ecuación de torque. Despejando la tensión, se obtiene

$$T = \frac{(1 + \mu_d)Mmg}{3m + M} \quad [0{,}5] \tag{46}$$

y retornando a la ecuación de torque, se obtiene finalmente

$$\ddot{\theta} = \frac{2mg(1+\mu_d)}{(3m+M)R} \quad [0{,}5] \tag{47}$$