Estática y Dinámica

Problemas de selección múltiple

Sebastián Urrutia Quiroga
sgurruti@uc.cl
web.ing.puc.cl/~sgurruti/

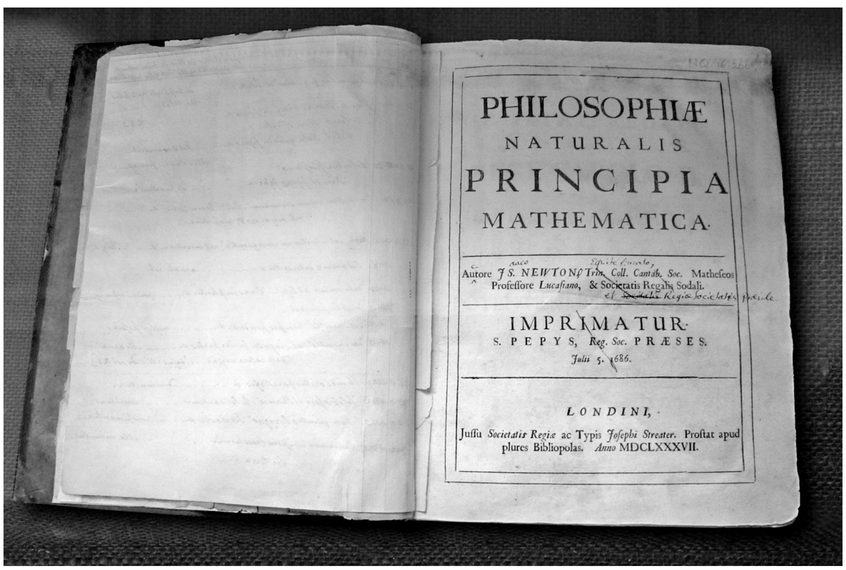
Primera Edición – Marzo de 2016

Disponible en línea: http://web.ing.puc.cl/~sgurruti/

Pontificia Universidad Católica de Chile
Contacto: sgurruti at uc.cl

Índice general

1 Cinemática



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

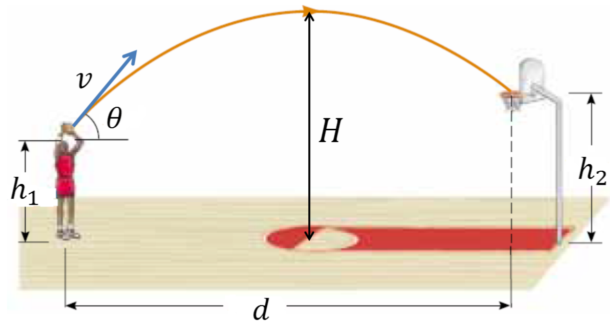
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 1.1.
Un basketbolista lanza la pelota desde una altura h_1, a una velocidad $\vec{v}$ que forma un ángulo θ con la horizontal. Con este lanzamiento, el jugador logra encestar en el aro que se encuentra a una distancia horizontal d y a una altura h_2, como muestra la figura.



El intervalo de tiempo Δt que transcurre entre el lanzamiento y la anotación es:

a) $\Delta t = \dfrac{d}{v \sin\theta}$

b) $\Delta t = \dfrac{d}{v \cos\theta}$

c) $\Delta t = \dfrac{2v \sin\theta}{g}$

d) $\Delta t = \dfrac{2v \cos\theta}{g}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En el eje X (dirección horizonal) no hay aceleración, por lo que:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t$$

Si colocamos el origen en sobre el basketbolista, tendremos que $x(0) = x_0 = 0$. Por otra parte, la velocidad inicial $v_{x,0}$ corresponde a la componente horizontal de la velocidad $\vec{v}$. Con ello,

$$x(t) = v \cos\theta\, t$$

Sea Δt el tiempo que demora en recorrer una distancia horizontal d. Por tanto,

$$x(\Delta t) = d \qquad \longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{d}{v \cos\theta}$$

Problema 1.2.
Para la situación planteada en el Problema 1.1, la altura máxima H que alcanza la pelota es:

a) $H = h_1 + \dfrac{v^2 \cos^2 \theta}{2g}$

b) $H = h_2 + \dfrac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$

c) $H = h_1 + \dfrac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$

d) $H = h_2 + \dfrac{v^2 \cos^2 \theta}{2g}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En el eje Y (dirección vertical) actúa la aceleración de gravedad, por lo que la posición satisface:

$$\ddot{y} = -g \qquad \longrightarrow \qquad y(t) = y_0 + v_{y,0}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

donde, al reemplazar las condiciones iniciales $y_0 = h_1$ y $v_{y,0} = v \sin \theta$,

$$y(t) = h_1 + v \sin \theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Para hallar la máxima altura, derivamos con respecto al tiempo e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t_H) &= v \sin \theta - g\, t_H = 0 \\ \therefore\ t_H &= \frac{v \sin \theta}{g} \end{aligned}$$

Para calcular H, simplemente reemplazamos:

$$H = y(t_H) = h_1 + \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Problema 1.3.

Para la situación planteada en el Problema 1.1, la rapidez con la que la pelota entra en el aro es:

a) $\sqrt{v^2 - g(h_2 - h_1)}$

b) $\sqrt{v^2 + 2g(h_2 - h_1)}$

c) $\sqrt{v^2 + g(h_2 - h_1)}$

d) $\sqrt{v^2 - 2g(h_2 - h_1)}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Las velocidades en los ejes X e Y se obtienen al derivar con respecto al tiempo las respectivas posiciones:

$$v_x(t) = v\cos\theta \qquad \wedge \qquad v_y(t) = v\sin\theta - g\,t$$

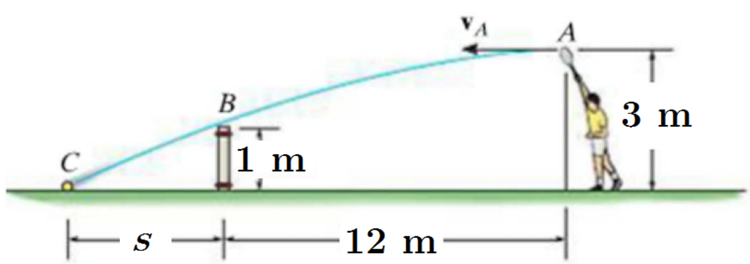
Sea t_f el tiempo en que la pelota ingresa por el aro, medido desde que se hace el lanzamiento. En dicho instante, la altura de la pelota será h_2, por lo que:

$$h_2 - h_1 = v\sin\theta\, t_f - \frac{1}{2} g\, {t_f}^2$$

Por otro lado, la rapidez en dicho instante será:

$$\begin{aligned}\sqrt{{v_x}^2(t_f) + {v_y}^2(t_f)} &= \sqrt{v^2\cos^2\theta + (v\sin\theta - g\,t_f)^2} \\ &= \sqrt{v^2 - 2g\left(v\sin\theta\, t_f - \frac{1}{2} g\, {t_f}^2\right)} \\ &= \sqrt{v^2 - 2g(h_2 - h_1)}\end{aligned}$$

Problema 1.4.
Un jugador de tenis hace un saque en el punto A, golpeando la pelota horizontalmente, como muestra la figura. Asuma $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



Determine la velocidad horizontal v_A de la pelota de tenis en el punto A, tal que cruce justo por encima de la red en el punto B.

a) $v_A = 6\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$

b) $v_A = 8\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$

c) $v_A = 4\sqrt{15}\,\mathrm{m/s}$

d) $v_A = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$

e) $v_A = \sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

Solución:

Consideremos nuestro sistema de referencia con origen en el tenista, siendo el eje Y positivo hacia arriba, y el eje X positivo hacia la izquierda. La posición de la pelota está dada por:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t \qquad \wedge \qquad y(t) = y_0 + v_{y,0}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Las condiciones iniciales son:

- $x(0) = 0, \quad y(0) = h_A = 3\,\mathrm{m}$
- $v_{x,0} = v_A, \quad v_{y,0} = 0$

Por tanto,

$$x(t) = v_A\, t \qquad \wedge \qquad y(t) = h_A - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Sea t^* el tiempo en que la pelota pasa por la red en B. Entonces,

$$x(t^*) = d = 12\,\mathrm{m} \;\;\rightarrow\;\; t^* = \frac{d}{v_A}$$
$$y(t^*) = h_B = 1\,\mathrm{m} \;\;\rightarrow\;\; t^* = \sqrt{\frac{2(h_A - h_B)}{g}}$$

Igualando ambas expresiones,

$$v_A = \sqrt{\frac{g\, d^2}{2(h_A - h_B)}} = 6\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$$

Problema 1.5.
Para la situación planteada en el Problema 1.4, la distancia s donde la pelota golpea el suelo es:

a) $s = 6\sqrt{6} + 12\,\mathrm{m}$

b) $s = 12\sqrt{6} + 12\,\mathrm{m}$

c) $s = 12\sqrt{6} - 12\,\mathrm{m}$

d) $s = 6\sqrt{6}\,\mathrm{m}$

e) $s = 6\sqrt{6} - 12\,\mathrm{m}$

Solución:

Sea t_f el instante de tiempo en que la pelota golpea el suelo. Entonces, se debe cumplir que:

$$x(t_f) = d + s \qquad \wedge \qquad y(t_f) = 0$$

De la primera ecuación podemos despejar el tiempo,

$$t_f = \frac{d+s}{v_A}$$

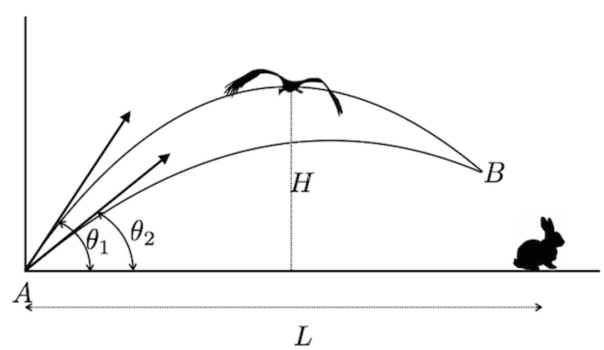
y reemplazarlo en la segunda ecuación

$$0 = h_A - \frac{1}{2}g\left(\frac{d+s}{v_A}\right)^2$$

para obtener

$$s = d\left(\frac{\sqrt{h_A(h_A - h_B)}}{h_A - h_B} - 1\right) = 6\sqrt{6} - 12\,\mathrm{m}$$

Problema 1.6.
Un proyectil es lanzado desde el punto A con una rapidez inicial v_0 en un ángulo θ_1. Un segundo proyectil es lanzado cierto tiempo después, también desde A y con la misma rapidez inicial, en un ángulo θ_2.



¿A qué altura H debe estar un pájaro para ser golpeado horizontalmente por el primer proyectil?

a) $H = \dfrac{{v_0}^2 \sin^2\theta_1}{2g}$

b) $H = \dfrac{{v_0}^2}{4g}$

c) $H = \dfrac{{v_0}^2 \sin\theta_1}{2g}$

d) $H = \dfrac{{v_0}^2 \sin\theta_1}{4g}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Si colocamos nuestro sistema de referencia en el punto A, las posiciones $x(t)$ e $y(t)$ para el primer proyectil vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta_1\, t \\ y(t) &= v_0 \sin\theta_1\, t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

Como queremos que golpee al ave horizontalmente, se debe cumplir que:

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=t^*} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y'(t^*) = v_0 \sin\theta_1 - g\, t^* = 0$$

y con ello $t^* = \dfrac{v_0 \sin\theta_1}{g}$. La altura en dicho instante de tiempo corresponde a H, por lo que:

$$H = y(t^*) = \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta_1}{2g}$$

Problema 1.7.
Para la situación descrita en el Problema 1.6, suponga que queremos golpear horizontalmente, con el primer proyectil, al pájaro del problema anterior y además a un conejo que iba pasando a una distancia L del punto A. El ángulo con el que debemos lanzarlo es:

a) $\theta_1 = \arctan\left(\dfrac{L}{H}\right)$

b) $\theta_1 = \arctan\left(\dfrac{2L}{H}\right)$

c) $\theta_1 = \arctan\left(\dfrac{4L}{H}\right)$

d) $\theta_1 = \arctan\left(\dfrac{H}{2L}\right)$

e) $\theta_1 = \arctan\left(\dfrac{4H}{L}\right)$

Solución:

Tomando el resultado del problema anterior,

$$H = \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta_1}{2g} \qquad \longrightarrow \qquad {v_0}^2 = \frac{2gH}{\sin^2\theta_1}$$

Por otra parte, en un tiempo $\tilde{t}$, el primer proyectil golpea al conejo. Por tanto, $x(\tilde{t}) = L$ e $y(\tilde{t}) = 0$:

$$\begin{aligned} x &: \quad \tilde{t} = \frac{L}{v_0 \cos\theta_1} \\ y &: \quad 0 = L\tan\theta_1 - \frac{gL^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta_1} \end{aligned}$$

Si reemplazamos ${v_0}^2$ en la última ecuación, tendremos que:

$$\begin{aligned} L\tan\theta_1 &= \frac{gL^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta_1} \\ &= \frac{L^2\tan^2\theta_1}{4H} \\ 4H &= L\tan\theta_1 \end{aligned}$$

y con ello,

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{4H}{L}\right)$$

Problema 1.8.
Para la situación descrita en el Problema 1.6, determine la diferencia de tiempo Δt entre los lanzamientos si ambos proyectiles chocan en el punto B. *Ayuda:* podría serle útil la identidad trigonométrica $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$.

a) $\Delta t = \dfrac{2v_0\sin(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)}$

b) $\Delta t = \dfrac{2v_0\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos\theta_2}{g(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2)}$

c) $\Delta t = \dfrac{2v_0\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)}$

d) $\Delta t = \dfrac{2v_0\sin(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2}$

e) Faltan datos para determinarlo

Solución:

Fijaremos el tiempo $t = 0$ cuando se lanza el segundo móvil, i.e. el primer móvil ha viajado un tiempo Δt. La posición de los móviles, (x, y) para el primer proyectil y (X, Y) para el segundo, son:

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_0 \cos\theta_1 \, (t + \Delta t) \\
y(t) &= v_0 \sin\theta_1 \, (t + \Delta t) - \frac{g}{2} \, (t + \Delta t)^2 \\[2ex]
X(t) &= v_0 \cos\theta_2 \, t \\
Y(t) &= v_0 \sin\theta_2 \, t - \frac{g}{2} \, t^2
\end{aligned}$$

Sea t_o el instante de tiempo en que ambos proyectiles chocan. Así,

$$x(t_o) = X(t_o) \qquad \longrightarrow \qquad t_o = \frac{\cos\theta_1 \, \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}$$

y también

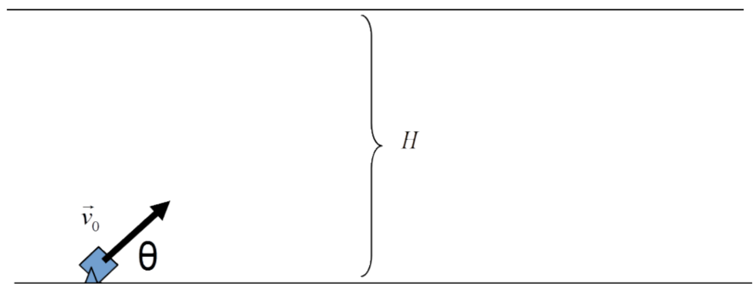
$$\begin{aligned}
y(t_o) &= v_0 \sin\theta_1 \left(\frac{\cos\theta_1 \, \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} + \Delta t \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{\cos\theta_1 \, \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} + \Delta t \right)^2 \\
&= \Delta t \left[\frac{v_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g \cos^2\theta_2 \, \Delta t}{2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2} \right] \\
Y(t_o) &= v_0 \sin\theta_2 \left(\frac{\cos\theta_1 \, \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{\cos\theta_1 \, \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} \right)^2 \\
&= \Delta t \left[\frac{v_0 \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g \cos^2\theta_1 \, \Delta t}{2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2} \right]
\end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones,

$$\begin{aligned}
\Delta t \left[\frac{v_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g \cos^2\theta_2 \, \Delta t}{2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2} \right] &= \Delta t \left[\frac{v_0 \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g \cos^2\theta_1 \, \Delta t}{2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2} \right] \\
\frac{v_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g \cos^2\theta_2 \, \Delta t}{2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2} &= \frac{v_0 \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g \cos^2\theta_1 \, \Delta t}{2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2} \\
v_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2 (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - \frac{g}{2} \cos^2\theta_2 \, \Delta t &= v_0 \sin\theta_2 \cos\theta_1 (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - \frac{g}{2} \cos^2\theta_1 \, \Delta t \\
\frac{2v_0}{g} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1) &= (\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_1) \, \Delta t \\
\frac{2v_0 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)} &= \Delta t
\end{aligned}$$

Problema 1.9.
Un cañón de juguete, que se coloca en un amplio galpón techado de altura H, dispara una pelota con

una velocidad inicial $\vec{v}_0$.



Si el cañón es disparado para que alcance su rango máximo pero sin que toque el techo, la condición para la altura H es:

a) $H < \dfrac{{v_0}^2}{4g}$

b) $H > \dfrac{{v_0}^2}{4g}$

c) $H > \dfrac{{v_0}^2\sqrt{2}}{2g}$

d) $H < \dfrac{{v_0}^2\sqrt{2}}{2g}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La posición del móvil puede determinarse a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) &= v_0 \sin\theta\, t - \frac{g\,t^2}{2} \end{aligned}$$

donde hemos situado el origen del sistema de coordenadas en el punto donde se ubica el cañón. Ahora bien, sea $t^* > 0$ el instante de tiempo en que el móvil vuelve a tener altura cero, i.e. cuando vuelve a tocar la tierra. Así,

$$0 = y(t^*) = t^* \left(v_0 \sin\theta - \frac{g\,t^*}{2} \right)$$

como el tiempo de colisión es no nulo, entonces:

$$t^* = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

El alcance A que tendrá el móvil corresponde a la coordenada X en dicho instante de tiempo,

$$A = x(t^*) = \frac{2{v_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta)}{g}$$

que se maximiza cuando $\theta = \theta_{max} = \dfrac{\pi}{4}$. Si la altura máxima se alcanza en el instante τ, se debe cumplir que:

$$0 = y'(\tau) = v_0 \sin\theta - g\,\tau \qquad \longrightarrow \qquad \tau = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{t^*}{2}$$

Si la altura máxima $y_{max} = y(\tau)$ debe ser menor a la altura H del galpón,

$$\begin{aligned} y_{max} &< H \\ y(\tau) &< \\ \left.\frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}\right|_{\theta=\pi/4} &< \\ \frac{{v_0}^2}{4g} &< \end{aligned}$$

Problema 1.10.
Considere la situación del Problema 1.9. Si ahora en el techo hay una piñata a una distancia d del cañón, y un niño quiere dispararle para que caigan los dulces, determine la expresión para el ángulo de disparo. Suponga que la pelota golpea la piñata horizontalmente.

a) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\theta = \arctan\left(\dfrac{2H}{d}\right)$

c) $\theta = \arctan\left(\dfrac{d}{2H}\right)$

d) $\theta = \arctan\left(\dfrac{H}{2d}\right)$

e) $\theta = \arctan\left(\dfrac{2d}{H}\right)$

Solución:

Si deseamos que la pelota golpee horizontalmente la piñata en el instante t_g, se debe cumplir que:

$$0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_g} = \left.\frac{y'}{x'}\right|_{t=t_g} \qquad \longrightarrow \qquad y'(t_g) = 0$$

y coincide con el punto de máxima altura. Así, por lo visto en el problema anterior,

$$t_g = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Así, la altura máxima viene dada por:

$$H = y(t_g) = \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}$$

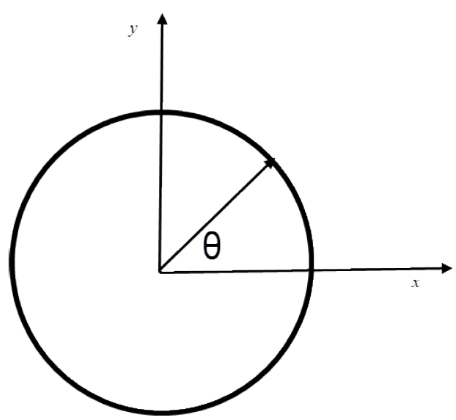
Por otra parte, si la piñata se ubica a una distancia d del cañón, entonces:

$$d = x(t_g) = \frac{{v_0}^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

Dividiendo ambas expresiones,

$$\frac{H}{d} = \frac{\tan\theta}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{2H}{d}\right)$$

Problema 1.11.
Una partícula tiene una trayectoria circular de radio $R = 2.5\,\mathrm{m}$ en el plano XY con rapidez constante $v = 5\,\mathrm{m/s}$. En $t = 0$, la partícula está en $\theta = 0$.



El ángulo en el que se encuentra la partícula cuando $t = 2\,\mathrm{s}$ es:

a) $2\,\mathrm{rad}$

b) $10\,\mathrm{rad}$

c) $5\,\mathrm{rad}$

d) $1\,\mathrm{rad}$

e) $4\,\mathrm{rad}$

Solución:

En coordenadas polares, y dado que el radio es constante,

$$\vec{r} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Sea v la rapidez de la partícula, la cual viene dada por

$$v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$$

Despejando,

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R} = 2$$

y es constante. Por tanto, integrando,

$$\theta(t) = \theta(t=0) + 2t = 2t$$

Finalmente,

$$\theta(2) = 4\,\mathrm{rad}$$

Problema 1.12.
Considere la situación descrita en el Problema 1.9. Si la partícula está en la posición $\theta = \pi/3$, la expresión del vector velocidad en el plano XY es:

a) $\vec{v} = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{5}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$ m/s

b) $\vec{v} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{5}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$ m/s

c) $\vec{v} = \left(\frac{5}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$ m/s

d) $\vec{v} = \left(\frac{5}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$ m/s

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La velocidad, tal como se vio en el problema anterior, está dada por

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 5\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

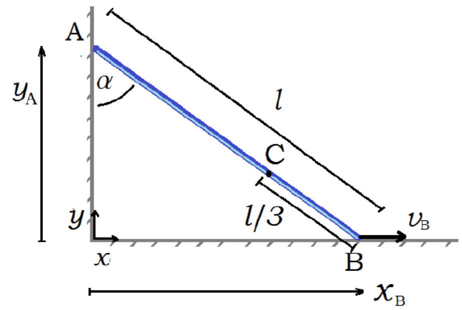
En coordenadas cartesianas, los vectores unitarios polares poseen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{v}(\theta = \pi/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{5}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Problema 1.13.
Una varilla de largo l tiene un extremo apoyado sobre la pared (punto A) y el otro sobre el piso (punto B), como muestra la figura. En $t = 0$, la posición de la varilla es tal que $x_A(0) = y_B(0)$ (o sea, $\alpha = \pi/4$) y el punto C mostrado en la figura se encuentra a una distancia $l/3$ (medida a lo largo de la varilla) respecto de B. Suponga que el extremo B se arrastra con velocidad constante $\vec{v}_B = v_B\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$,



La posición $x_B(t)$ del extremo B de la varilla en función del tiempo es:

a) $x_B(t) = \dfrac{l}{\sqrt{2}} - v_B\,t$

b) $x_B(t) = v_B\,t$

c) $x_B(t) = -v_B\,t$

d) $x_B(t) = l + v_B\,t$

e) $x_B(t) = \dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\,t$

Solución:

Como el extremo B se mueve con velocidad constante, es fácil ver que:

$$x_B(t) = x_B(0) + v_B\,t$$

Para hallar el valor de $x_B(0)$, usamos el hecho de que en $\alpha(t = 0) = \pi/4$, por lo que

$$x_B(0) = l\sin\alpha\Big|_{\alpha=\pi/4} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Finalmente,

$$x_B(t) = \frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t$$

Problema 1.14.
Considere la situación descrita en el Problema 1.13. La posición $y_A(t)$ y la velocidad $\vec{v}_A(t)$ del extremo A de la varilla en función del tiempo es:

a) $y_A(t) = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}$, $\vec{v}_A(t) = -\frac{\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right) v_B}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

b) $y_A(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)$, $\vec{v}_A(t) = -\frac{v_B}{3}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

c) $y_A(t) = \sqrt{l^2 - {v_B}^2\, t^2}$, $\vec{v}_A(t) = -\frac{{v_B}^2\, t}{\sqrt{l^2 - {v_B}^2\, t^2}}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

d) $y_A(t) = \sqrt{l^2 - (l + v_B\, t)^2}$, $\vec{v}_A(t) = -\frac{(l + v_B\, t) v_B}{\sqrt{l^2 - (l + v_B\, t)^2}}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Asumiremos que el punto A permanece siempre en contacto con la pared, por lo cual satisface:

$$\vec{r}_A(t) = y_A(t)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Por otra parte, como la vara forma un triángulo rectángulo con las paredes, se tiene que:

$$y_A(t)^2 + x_B(t)^2 = l^2 \qquad \longrightarrow \qquad y_A(t) = \sqrt{l^2 - x_B(t)^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}$$

La velocidad se obtiene al derivar el vector posición:

$$\vec{v}_A(t) = \frac{dy_A}{dt}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\frac{\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right) v_B}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}}\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Problema 1.15.
Considere la situación descrita en el Problema 1.13. El vector posición $\vec{r}_C(t) = \Big(x_C(t), y_C(t)\Big)$ del punto C en función del tiempo es:

a) $\vec{r}_C(t) = \dfrac{v_B\, t}{3}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

b) $\vec{r}_C(t) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{2}{3}\sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

c) $\vec{r}_C(t) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{1}{3}\sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

d) $\vec{r}_C(t) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{2}{3}\sqrt{l^2 - \left(\dfrac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por trigonometría, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_C(t) &= x_C(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_C(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
&= \frac{2l}{3}\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{l}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
&= \frac{2l}{3}\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{l}{3}\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}
\end{aligned}$$

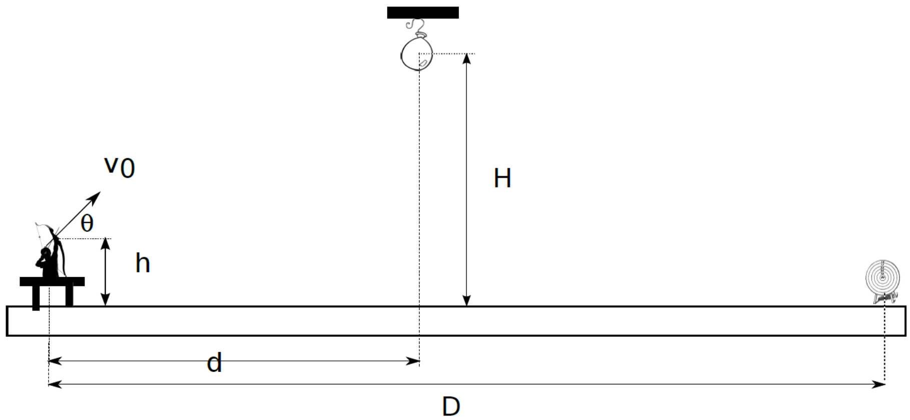
Por otra parte,

$$\sin\alpha = \frac{x_B(t)}{l} \qquad \wedge \qquad \cos\alpha = \frac{y_A(t)}{l}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
\vec{r}_C(t) = \frac{2x_B(t)}{3}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{y_A(t)}{3}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
= \frac{2}{3}\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{1}{3}\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + v_B\, t\right)^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}
\end{aligned}$$

Problema 1.16.
Un experto tirador planea realizar una exhibición para hacer gala de su destreza en el arco y flecha. El arquero se encuentra sobre una tarima de altura h y lanza la flecha con una rapidez inicial v_0 y un ángulo de lanzamiento igual a θ sobre la horizontal. A una distancia d y una altura H se coloca un globo como primera parte del espectáculo; también se coloca un blanco de puntería ubicado a una distancia horizontal D a nivel del suelo, tal como se muestra en la figura.



La rapidez inicial de la flecha si solo se desea reventar el globo, considerando que $H = d$ y $h = \dfrac{d}{4}$, es:

a) $\sqrt{\dfrac{2gd}{\cos^2\theta}}$

b) $\sqrt{\dfrac{2gd}{(4\tan\theta - 3)\cos^2\theta}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2gd}{(4\tan\theta + 3)\cos^2\theta}}$

d) $\sqrt{\dfrac{2gd}{4\sin\theta\cos\theta}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La posición de la flecha, en función del tiempo, está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) &= h + v_0 \sin\theta\, t - \frac{g\, t^2}{2} \end{aligned}$$

Sea t^* el instante de tiempo en que se golpea el globo. Con ello,

$$d = x(t^*) = v_0 \cos\theta\, t^* \qquad \longrightarrow \qquad t^* = \frac{d}{v_0 \cos\theta}$$

También se debe satisfacer que

$$\begin{aligned}
H &= y(t^*) \\
&= h + d\tan\theta - \frac{gd^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
d &= \frac{d}{4} + d\tan\theta - \frac{gd^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
\frac{3d}{4} &= d\tan\theta - \frac{gd^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
\frac{3}{4} &= \tan\theta - \frac{gd}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
4\tan\theta - 3 &= \frac{2gd}{{v_0}^2\cos^2\theta} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{2gd}{(4\tan\theta - 3)\cos^2\theta}}
\end{aligned}$$

Problema 1.17.
Considera la situación descrita en el Problema 1.16. Suponga ahora que la flecha no impacta al globo sino que cae directamente en el blanco. La velocidad inicial necesaria de la flecha, considerando que $h = \frac{D}{8}$, es:

a) $\sqrt{\frac{4gD}{\cos^2\theta}}$

b) $\sqrt{\frac{gD}{(1+4\tan\theta)\cos^2\theta}}$

c) $\sqrt{\frac{4gD}{(1+8\tan\theta)\cos^2\theta}}$

d) $\sqrt{\frac{4gD}{(1-8\tan\theta)\cos^2\theta}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Nuevamente la posición de la flecha, en función del tiempo, está dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_0\cos\theta\, t \\
y(t) &= h + v_0\sin\theta\, t - \frac{g\,t^2}{2}
\end{aligned}$$

Sea t^* el instante de tiempo en que se golpea el blanco. Con ello,

$$D = x(t^*) = v_0 \cos\theta \, t^* \qquad \longrightarrow \qquad t^* = \frac{D}{v_0 \cos\theta}$$

También se debe satisfacer que

$$\begin{aligned}
0 &= y(t^*) \\
&= h + D\tan\theta - \frac{gD^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
0 &= \frac{D}{8} + D\tan\theta - \frac{gD^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
0 &= \frac{1}{8} + \tan\theta - \frac{gD}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \\
8\tan\theta + 1 &= \frac{4gD}{{v_0}^2\cos^2\theta} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{4gD}{(1+8\tan\theta)\cos^2\theta}}
\end{aligned}$$

Problema 1.18.
Considera la situación descrita en el Problema 1.16. Suponga que ahora el objetivo es reventar el globo y acertar al blanco en el mismo lanzamiento. Si $D = 2d$ y $h = 0$, el ángulo de lanzamiento es:

a) $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{gd}{{v_0}^2}\right)$

b) $\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2gd}{{v_0}^2}}\right)$

c) $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{gd}{{v_0}^2}}\right)$

d) $\theta = \arcsin\left(\frac{2gd}{{v_0}^2}\right)$

e) $\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2gd}{{v_0}^2}\right)$

Solución:

Ahora la posición de la flecha, en función del tiempo, está dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_0 \cos\theta \, t \\
y(t) &= v_0 \sin\theta \, t - \frac{g\,t^2}{2}
\end{aligned}$$

Definimos t^{**} como el instante de tiempo en que se golpea el blanco. Así,

$$0 = y(t^{**}) \qquad \longrightarrow \qquad t^{**} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

y también

$$D = 2d = x(t^{**}) = \frac{2\sin\theta\cos\theta {v_0}^2}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Despejando,

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2gd}{{v_0}^2}\right)$$

Problema 1.19.
Considera la situación descrita en el Problema 1.16. Si $h = 0$ y $D = 2d$, determine el tiempo de viaje de la flecha desde que revienta el globo hasta que da en el blanco. Considere que el ángulo de lanzamiento es 45°.

a) $\Delta t = \dfrac{d}{\sqrt{2}v_0}$

b) $\Delta t = \dfrac{d}{2v_0}$

c) $\Delta t = \dfrac{2d}{v_0}$

d) $\Delta t = \dfrac{\sqrt{2}d}{v_0}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:
La posición de la flecha, en función del tiempo, está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\, t \\ y(t) &= \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\, t - \frac{g\, t^2}{2} \end{aligned}$$

Sea $t_2 > 0$ el instante de tiempo en que la flecha golpea el blanco. Entonces,

$$D = 2d = x(t_2) = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\, t_2 \qquad \longrightarrow \qquad t_2 = \frac{4d}{v_0\sqrt{2}}$$

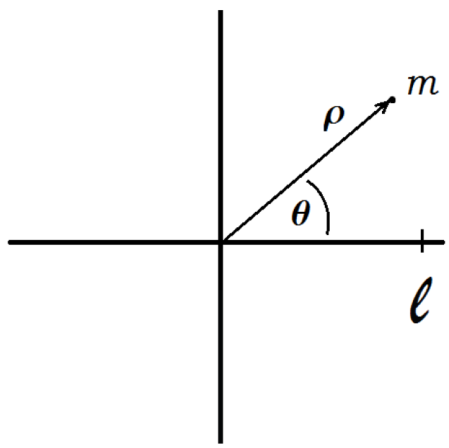
Por otra parte, sea $t_1 > 0$ el instante de tiempo en que la flecha revienta el globo. Entonces,

$$d = x(t_1) = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\,t_1 \qquad \longrightarrow \qquad t_1 = \frac{2d}{v_0\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}d}{v_0}$$

Finalmente,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2d}{v_0\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}d}{v_0}$$

Problema 1.20.
Considere una partícula de masa m que se mueve en un plano horizontal (ver figura). Suponga que se conoce que $\ddot{\theta}(t) = \alpha$ y que $\dot{\rho}(t) = \beta$ para todo tiempo $t \geq 0$, donde $\alpha, \beta > 0$ son constantes conocidas, y donde ρ, θ se miden como muestra la figura. Además, se sabe que en $t = 0$, la partícula se encontraba a una distancia $\ell > 0$ a lo largo del eje horizontal de la figura, y que su velocidad angular era nula.



El vector posición $\vec{r}(t)$ es:

a) $\vec{r}(t) = (\ell - \beta\, t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$

b) $\vec{r}(t) = (\ell + \beta\, t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \ell\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

c) $\vec{r}(t) = \ell\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$

d) $\vec{r}(t) = (\ell - \beta\, t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \ell\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

e) $\vec{r}(t) = (\ell + \beta\, t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$

Solución:

El vector posición viene dado por

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

por lo que necesitamos una expresión para $\rho(t)$. Del enunciado, sabemos que

$$\dot{\rho} = \beta \text{ (constante)} \qquad \wedge \qquad \rho(0) = \ell$$

Integrando, y reemplazando la constante de integración correspondiente al valor inicial, se tiene que:

$$\rho(t) = \ell + \beta\, t$$

Por tanto,

$$\vec{r}(t) = (\ell + \beta\, t)\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Problema 1.21.
Para la situación descrita en el Problema 1.20, el vector velocidad $\vec{v}(t)$ es:

a) $\vec{v}(t) = -\beta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \ell\alpha\, t\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

b) $\vec{v}(t) = \beta\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$

c) $\vec{v}(t) = \beta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} - (\ell + \beta\, t)\alpha\, t\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

d) $\vec{v}(t) = \beta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + (\ell + \beta\, t)\alpha\, t\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

e) $\vec{v}(t) = \beta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} - \ell\alpha\, t\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

Solución:

Si el vector posición es

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

entonces el vector velocidad corresponde a

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}(t)\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho(t)\dot{\theta}(t)\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Del enunciado se desprende que $\dot{\rho} \equiv \beta$. Por otra parte, ya determinamos que $\rho(t) = \ell + \beta\, t$. Finalmente, necesitamos determinar $\dot{\theta}$, por lo cual notamos que:

$$\ddot{\theta} = \alpha \text{ (constante)} \qquad \wedge \qquad \dot{\theta}(0) = 0$$

Integrando, y reemplazando la constante de integración correspondiente al valor inicial, se tiene que:

$$\dot{\theta}(t) = \alpha\, t$$

Así,

$$\vec{v}(t) = \beta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + (\ell + \beta\, t)\alpha\, t\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Problema 1.22.
Para la situación descrita en el Problema 1.20, el vector aceleración $\vec{a}(t)$ es:

a) $\vec{a}(t) = (\ell\alpha + 3\beta\alpha\, t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - (\alpha\, t)^2(\beta\, t + \ell)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

b) $\vec{a}(t) = -(\alpha\, t)^2(\beta\, t + \ell)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\ell\alpha + 3\beta\alpha\, t)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

c) $\vec{a}(t) = \dfrac{1}{2}(\alpha\, t)^2(\beta\, t + \ell)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\ell\alpha + 2\beta\alpha\, t)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

d) $\vec{a}(t) = \vec{0}$

e) Ninguna de las anteriores

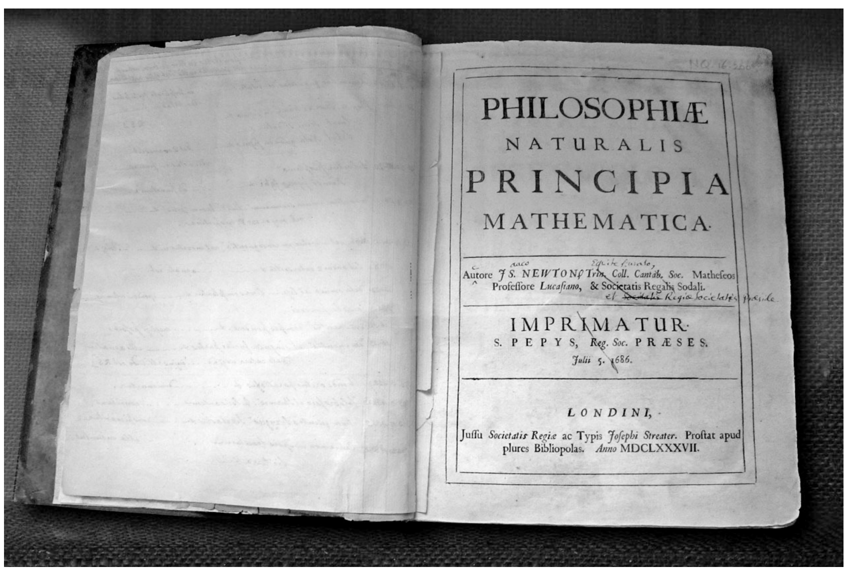
Solución:

El vector aceleración es

$$
\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -(\ell + \beta\, t)(\alpha\, t)^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \Big(2\beta\alpha\, t + (\ell + \beta\, t)\alpha\Big)\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -(\ell + \beta\, t)(\alpha\, t)^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (3\beta\alpha\, t + \ell\alpha)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}
$$

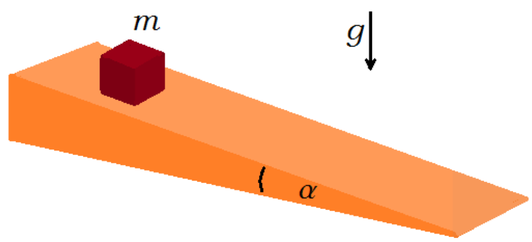
2

Leyes de Newton



Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 2.1.
Un bloque de masa m reposa sobre una superficie con la que tiene un coeficiente de roce cinético μ_c y estático μ_e. La superficie está inicialmente horizontal y se empieza a incrementar muy lentamente su ángulo de inclinación α. Se observa que la masa comienza a deslizar justo después de que el ángulo de inclinación supera el valor $\alpha = \alpha^*$. Entonces, podemos concluir que:



a) $\mu_e = \tan\alpha^*$

b) $\mu_c = \cot\alpha^*$

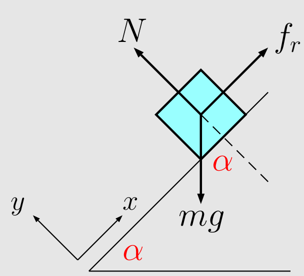
c) $\mu_e = \cot\alpha^*$

d) $\mu_c = \tan\alpha^*$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es:



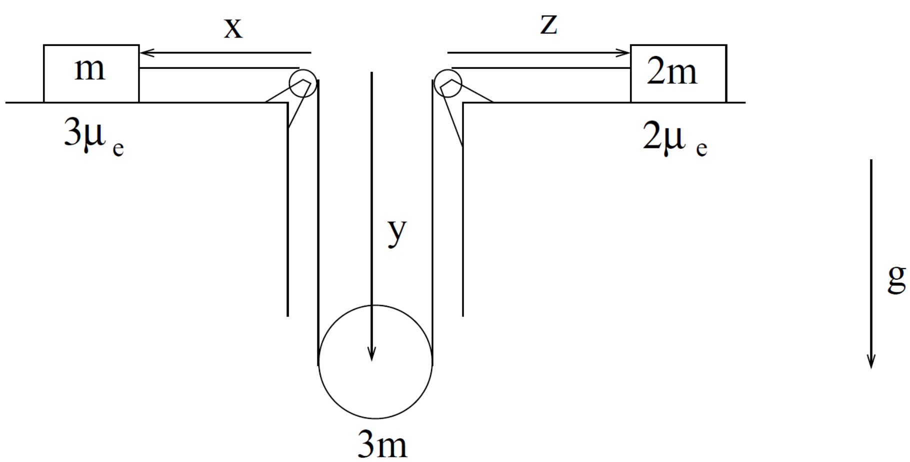
Supongamos que nos situamos en el instante de tiempo justo antes de que la masa deslice. Por tanto, no hay aceleración en los ejes X ni Y, y con ello:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad f_r = mg\sin\alpha^* \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N = mg\cos\alpha^* \end{aligned}$$

Como estamos trabajando con roce estático, pues analizamos la situación antes del movimiento, se debe cumplir que $f_r \leq N\mu_e$. Ahora, cuando el ángulo de inclinación vale $\alpha = \alpha^*$, ambos valores se igualan y podemos determinar el coeficiente de roce estático mínimo para lograr el equilibrio:

$$\begin{aligned} f_r &= N\mu_e \\ mg\sin\alpha^* &= mg\cos\alpha^*\mu_e \\ \tan\alpha^* &= \mu_e \end{aligned}$$

Problema 2.2.
El sistema de la figura consiste en dos bloques, de masas m y $2m$, que se mueven a lo largo de las superficies horizontales de la figura. Ambos bloques están atados a una cuerda ideal que pasa por un cuerpo de masa $3m$ que se nueve solo a lo largo de la vertical. Entre el bloque de masa m y la mesa de la izquierda hay un coeficiente de roce estático igual al dinámico, ambos iguales a 3μ, en tanto que entre el bloque $2m$ y la mesa de la derecha hay un coeficiente de roce estático igual al dinámico de magnitud 2μ.



El valor mínimo del coeficiente de roce estático para que el sistema total no se mueva es:

a) $\mu_e = 1$

b) $\mu_e = \dfrac{3}{8}$

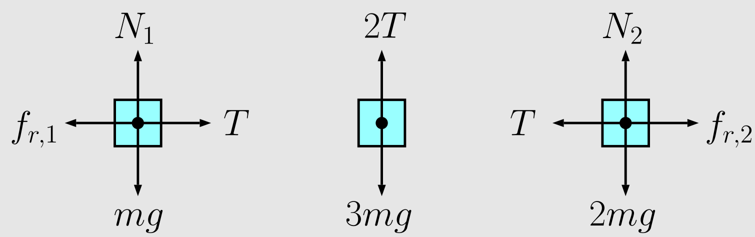
c) $\mu_e = \dfrac{1}{2}$

d) $\mu_e = 2$

e) $\mu_e = \dfrac{1}{4}$

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre son:



Para el bloque de masa m:

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \; : \; f_{r,1} = T$$
$$\hat{\boldsymbol{\jmath}} \; : \; N_1 = mg$$

como queremos calcular el coeficiente de roce mínimo,

$$T = f_{r,1} \leq N_1(3\mu_e) = 3mg\mu_e$$

Para el bloque de masa $2m$:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad f_{r,2} = T \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_2 = 2mg \end{aligned}$$

nuevamente, para hallar el coeficiente mínimo,

$$T = f_{r,2} \leq N_2(2\mu_e) = 4mg\mu_e$$

Para el bloque de masa $3m$,

$$3mg = 2T \qquad \longrightarrow \qquad T = \frac{3mg}{2}$$

Juntando las ecuaciones, se debe cumplir simultáneamente que:

$$\begin{aligned} \frac{3mg}{2} \leq 3mg\mu_e \qquad &\wedge \qquad \frac{3mg}{2} \leq 4mg\mu_e \\ \frac{1}{2} \leq \mu_e \qquad &\wedge \qquad \frac{3}{8} \leq \mu_e \end{aligned}$$

Así, el valor mínimo que cumple ambas condiciones es

$$\frac{1}{2} = {\mu_e}^{min}$$

Problema 2.3.
Para la situación descrita en el Problema 2.2, la relación de ligadura de la cuerda está dada por:

a) $\dot{x} - 2\dot{y} + \dot{z} = 0$

b) $\dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} = 0$

c) $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$

d) $\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} = 0$

e) $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$

Solución:

Sea ℓ el largo de la cuerda inextensible. Dicha cuerda está compuesta por subsecciones, como se aprecia en la figura, por lo que:

$$\ell = x + 2y + z$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$\dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} = 0$$

Problema 2.4.

Considere la situación descrita en el Problema 2.2. Suponga ahora que el coeficiente $\mu = \frac{1}{4}$, por lo que el sistema está en movimiento. La tensión de la cuerda es:

a) $T = mg$

b) $T = 2mg$

c) $T = 3mg$

d) $T = \frac{39mg}{34}$

e) $T = \frac{5mg}{34}$

Solución:

Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\boxed{\text{Bloque } m} \qquad \begin{array}{ll} \hat{\boldsymbol{\imath}}: & m\ddot{x} = f_{r,1} - T \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}: & N_1 = mg \end{array}$$

$$\boxed{\text{Bloque } 2m} \qquad \begin{array}{ll} \hat{\boldsymbol{\imath}}: & 2m\ddot{z} = f_{r,2} - T \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}: & N_2 = 2mg \end{array}$$

$$\boxed{\text{Bloque } 3m} \qquad \hat{\boldsymbol{\jmath}}: \quad 3m\ddot{y} = 3mg - 2T$$

En este caso, el roce será cinético y por tanto

$$f_{r,k} = \mu_k N_k \ , \qquad k = 1, 2$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{3g}{4} - \frac{T}{m} \\ \ddot{y} &= g - \frac{2T}{3m} \\ \ddot{z} &= \frac{g}{2} - \frac{T}{2m} \end{aligned}$$

Si utilizamos la condición de ligadura,

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} &= 0 \quad \Big/ \frac{d}{dt} \\ \ddot{x} + 2\ddot{y} + \ddot{z} &= 0 \\ \frac{13g}{4} - \frac{17T}{6} &= 0 \\ \frac{39mg}{34} &= T \end{aligned}$$

Problema 2.5.
Considere la situación descrita en el Problema 2.2. Nuevamente suponga que el coeficiente $\mu = \frac{1}{4}$. La aceleración del cuerpo de masa $3m$ es:

a) $\ddot{y} = \frac{13g}{17}$

b) $\ddot{y} = g$

c) $\ddot{y} = \frac{g}{2}$

d) $\ddot{y} = 2g$

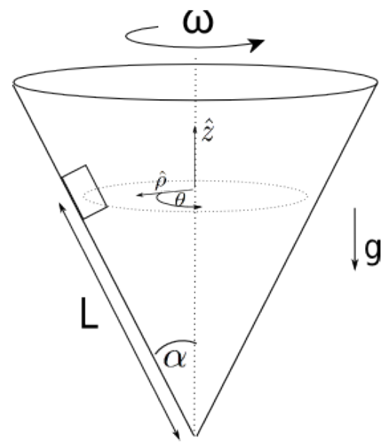
e) $\ddot{y} = \frac{4g}{17}$

Solución:

Es fácil ver que:

$$\ddot{y} = g - \frac{2T}{3m} = \frac{4g}{17}$$

Problema 2.6.
En la figura, un bloque de masa m se apoya sobre la superficie interna de un cono de ángulo α, el cual gira con rapidez angular ω constante respecto al eje Z. Entre el bloque y el cono hay un coeficiente de roce estático μ_e y dinámico μ_d. Asuma que el bloque no desliza sobre el cono, y la distancia L se mantiene constante.



Asuma que la fuerza de roce $f_r > 0$ apunta hacia arriba por la superficie del cono. Llamando N al módulo de la normal, la fuerza neta que siente el bloque es:

a) $\vec{F}_{neta} = (f_r \sin\alpha - N\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (-mg + N\sin\alpha + f_r\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{k}}$

b) $\vec{F}_{neta} = (f_r \cos\alpha - N\sin\alpha)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (-mg + N\cos\alpha + f_r\sin\alpha)\,\hat{\boldsymbol{k}}$

c) $\vec{F}_{neta} = f_r \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - m\omega^2 L\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + (-mg + N\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{k}}$

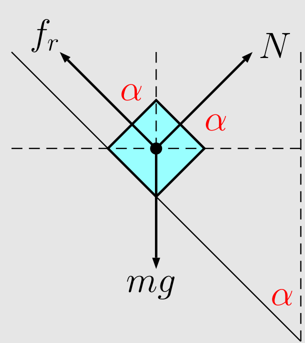
d) $\vec{F}_{neta} = f_r \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - m\omega^2 L\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + (-mg + N\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{k}}$

e) $\vec{F}_{neta} = -N\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - m\omega^2 L\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + (-mg + N\cos\alpha + f_r\sin\alpha)\,\hat{\boldsymbol{k}}$

f) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre asociado al problema es el que sigue:



Entonces,

$$\vec{F}_{neta} = (f_r \sin\alpha - N\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (-mg + N\sin\alpha + f_r\cos\alpha)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Problema 2.7.
Considere la situación descrita en el Problema 2.6. La aceleración, en coordenadas cilíndricas, es:

a) $\vec{a} = \omega^2 L \cos\alpha\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$

b) $\vec{a} = -\omega^2 L \sin\alpha\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$

c) $\vec{a} = \omega^2 L \sin\alpha\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

d) $\vec{a} = -\omega^2 L \cos\alpha\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

e) $\vec{a} = \omega^2 L \sin\alpha\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$

Solución:

En coordenadas cilíndricas,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

En ese caso, las variables L y α permanecen constantes, por lo que:

$$r = L\sin\alpha \text{ (constante)} \qquad \wedge \qquad z = L\cos\alpha \text{ (constante)}$$

Por otra parte, el enunciado nos señala que $\dot{\theta} = \omega$ constante. Así, reemplazando,

$$\vec{a} = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\omega^2 L \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Problema 2.8.
Para la situación descrita en el Problema 2.6, al resolver la ecuación de movimiento, el valor de la fuerza de roce es:

a) $f_r = \mu_e N$

b) $f_r = \mu_d N$

c) $f_r = \dfrac{mg\cot\alpha - m\omega^2 L\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha\cot\alpha}$

d) $f_r = \dfrac{mg\sec\alpha + m\omega^2 L\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha\cot\alpha}$

e) $f_r = \dfrac{-mg\cot\alpha + m\omega^2 L\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha\cot\alpha}$

f) $f_r = \dfrac{-mg\sec\alpha + m\omega^2 L\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha\cot\alpha}$

Solución:

De la segunda ley de Newton,

$$m\vec{a} = \vec{F}_{neta}$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_r \sin\alpha - N\cos\alpha &= -\omega^2 L \sin\alpha \\ f_r \cos\alpha + N \sin\alpha &= mg \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\sin\alpha$, y la segunda por $\cos\alpha$,

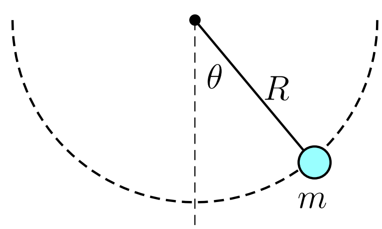
$$\begin{aligned} f_r \sin^2\alpha - N\sin\alpha\cos\alpha &= -\omega^2 L \sin^2\alpha \\ f_r \cos^2\alpha + N \sin\alpha\cos\alpha &= mg\cos\alpha \end{aligned}$$

podemos sumar para despejar nuestra incógnita:

$$\begin{aligned} f_r &= mg\cos\alpha - \omega^2 L \sin^2\alpha \\ &= \frac{mg\cot\alpha - m\omega^2 L\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha\cot\alpha} \end{aligned}$$

donde la última línea se obtiene con un poco de trigonometría.

Problema 2.9.
Un pequeño objeto de masa m, en el extremo de un cordón, es mantenido horizontalmente a una distancia R de un soporte fijo. Posteriormente, el objeto es liberado. ¿Cuál es la tensión en el cordón cuando el objeto está en el punto más bajo de su trayectoria?



a) $\dfrac{mg}{2}$

b) mg

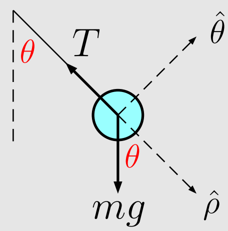
c) $2mg$

d) $3mg$

e) $\dfrac{mg}{3}$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es el siguiente:



La fuerza neta que actúa sobre el objeto viene dada por:

$$\vec{F}_{neta} = (mg\cos\theta - T)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + -mg\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Como el radio $r = R$ es constante, la aceleración en coordenadas polares es:

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$,

$$\begin{aligned} -mR\,\dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - T \\ mR\,\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta \end{aligned}$$

De la primera ecuación, y denotando $\omega = \dot{\theta}$,

$$T(\theta) = mg\cos\theta + mR\,\omega^2$$

y necesitamos obtener el valor de la rapidez angular en el instante solicitado. Para ello, podemos usar la segunda ecuación e integrar con respecto al ángulo:

$$\begin{aligned} -\frac{R}{g}\,\ddot{\theta} &= \sin\theta \qquad\qquad \Big/ \int_{\theta_i}^{\theta_f}\ d\theta \\ -\frac{R}{g}\int_{\theta_i}^{\theta_f} \ddot{\theta}\ d\theta &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sin\theta\ d\theta \\ -\frac{R}{g}\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\omega}{dt}\ d\theta &= \cos\theta_i - \cos\theta_f \\ -\frac{R}{g}\int_{\omega_i}^{\omega_f} \frac{d\theta}{dt}\ d\omega &= \\ -\frac{R}{g}\int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega\ d\omega &= \\ -\left(\frac{R}{g}\right)\frac{{\omega_f}^2 - {\omega_i}^2}{2} &= \end{aligned}$$

Si el sistema parte desde $\theta_i = \dfrac{\pi}{2}$ en reposo, entonces:

$${\omega_f}^2 = \frac{2g}{R}\cos\theta_f$$

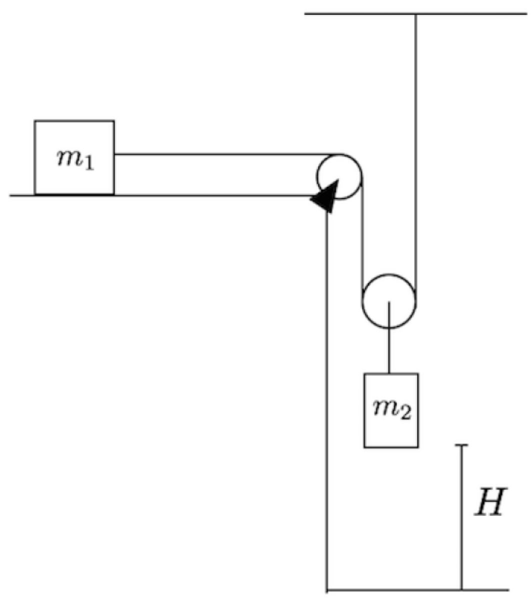
El instante que nos interesa es aquel en que la masa se encuentra en su punto más bajo, por lo que $\theta_f = 0$. Así,

$$\omega_f{}^2 = \frac{2g}{R}$$

Reemplazando en la fórmula de la tensión,

$$T(\theta_f = 0) = mg\cos\theta_f + mR\omega_f{}^2 mg + 2mg = 3mg$$

Problema 2.10.
En el sistema de la figura, el bloque de masa m_1 se mueve sobre una superficie horizontal y está conectado, a través de una cuerda ideal, a una polea que se puede mover verticalmente. El bloque de masa m_2 está unido a la polea por otra cuerda ideal. Todas las poleas son ideales y sin roce.



Considere que la superficie horizontal es lisa (no hay roce). El módulo de la aceleración del bloque horizontal es:

a) $\dfrac{m_2 g}{4m_1 + m_2}$

b) $\dfrac{m_1 g}{m_1 + m_2}$

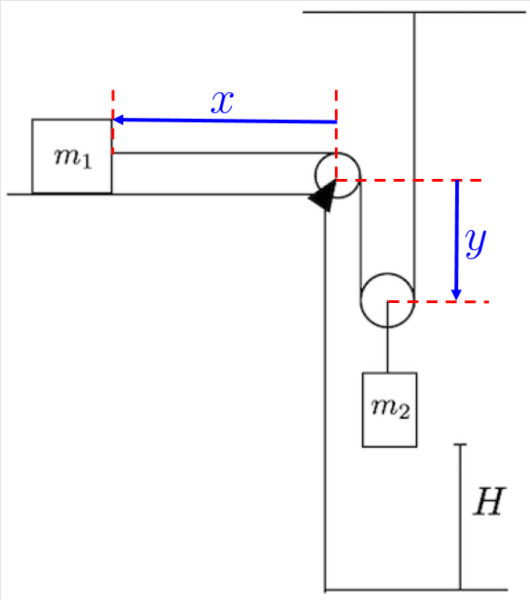
c) $\dfrac{m_1 g}{4m_1 + m_2}$

d) $\dfrac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}$

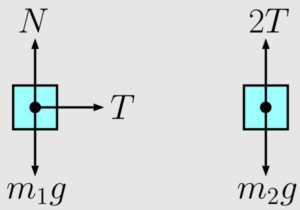
e) $\dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

Solución:

Consideremos la siguiente situación:



Los diagramas de cuerpo libre para ambos bloques están dados por:



De acuerdo a la segunda ley de Newton,

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x} &= -T \\
m_2\ddot{y} &= m_2g - 2T
\end{aligned}
$$

La condición de ligadura corresponde a

$$
x + 2y = L_0 \text{ (constante)} \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} + 2\ddot{y} = 0
$$

Reemplazando,

$$
\begin{aligned}
-\frac{T}{m_1} + 2\left(g - \frac{2T}{m_2}\right) &= 0 \\
T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right) &= 2g \\
T &= \frac{2gm_1m_2}{m_2 + 4m_1}
\end{aligned}
$$

Con ello,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{2gm_2}{m_2+4m_1}\\ \ddot{y} &= \frac{gm_2}{m_2+4m_1}\end{aligned}$$

Problema 2.11.
Considere la situación descrita en el Problema 2.10, donde a es la aceleración del problema anterior. Si se deja evolucionar el sistema desde el reposo, el tiempo que se demora el bloque m_2 en recorrer la distancia H es:

a) $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2H}{a}}$

b) $\Delta t = \sqrt{\dfrac{4H}{a}}$

c) $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

d) $\Delta t = \sqrt{\dfrac{4H}{g}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

De la condición de ligadura,

$$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{\ddot{x}}{2} = \frac{a}{2}$$

pues $\ddot{x} < 0$. Ahora, como la aceleración es constante y el sistema parte desde el reposo, se debe satisfacer que:

$$\Delta y = \frac{1}{2}\ddot{y}\,\Delta t^2 \qquad \longrightarrow \qquad \Delta t = \sqrt{2\Delta y \ddot{y}} = \sqrt{\frac{4H}{a}}$$

Problema 2.12.
Para la situación descrita en el Problema 2.10, considere ahora que la superficie horizontal tiene roce. El valor mínimo del coeficiente de roce estático μ_e para que el sistema esté en reposo es:

a) $\mu_e = \dfrac{m_1}{m_2}$

b) $\mu_e = \dfrac{m_1}{4m_2}$

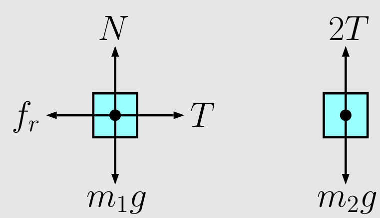
c) $\mu_e = \dfrac{m_2}{2m_1}$

d) $\mu_e = \dfrac{2m_2}{m_1}$

e) $\mu_e = \dfrac{m_2}{4m_1}$

Solución:

Ahora, el diagrama de cuerpo libre para el bloque m_1 debe considerar la existencia de la fuerza de roce:



Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} N - m_1 g &= 0 \\ m_1 \ddot{x} &= f_r - T \\ m_2 \ddot{y} &= m_2 g - 2T \end{aligned}$$

Como estudiamos en caso en que los bloques están en reposo, pero a punto de moverse, se cumple que $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ y con ello:

$$f_r = T = \frac{m_2 g}{2}$$

Como buscamos el coeficiente de roce estático mínimo, $f_r = \mu_e N$, y así:

$$\mu_e N = \mu_e m_1 g = \frac{mu_2 g}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \mu_e = \frac{m_2}{2m_1}$$

Problema 2.13.
Para la situación descrita en el Problema 2.10, considere ahora que la superficie horizontal tiene un coeficiente de roce dinámico μ_d. La aceleración del bloque vertical es:

a) $\dfrac{(m_1 - \mu_d m_2)g}{m_1 + m_2}$

b) $\dfrac{(\mu_d m_1 - m_2)g}{m_1 + 4m_2}$

c) $\dfrac{2(m_2 - 2\mu_d m_1)g}{4m_1 + m_2}$

d) $\dfrac{(2\mu_d m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$

e) $\dfrac{(m_2 - 2\mu_d m_1)g}{4m_1 + m_2}$

Solución:

Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} N - m_1 g &= 0 \\ m_1 \ddot{x} &= f_r - T \\ &= \mu_d N - T \\ &= \mu_d m_1 g - T \\ \\ m_2 \ddot{y} &= m_2 g - 2T \end{aligned}$$

De la condición de ligadura,

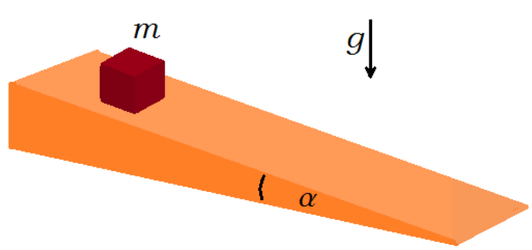
$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\ddot{y} &= 0 \\ \mu_d g - \frac{T}{m_1} + 2g - \frac{4T}{m_2} &= \\ \frac{m_1 m_2 (2 + \mu_d) g}{m_2 + 4m_1} &= T \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\ddot{y} = g - \frac{2T}{m_2} = \frac{(m_2 - 2\mu_d m_1)g}{m_2 + 4m_1}$$

Problema 2.14.

Un bloque de masa m se desliza sin fricción por una rampa muy larga inclinada en un α, como muestra la figura. El medio que envuelve al sistema es viscoso con una fuerza de fricción viscosa de módulo $F = Cv^2$, en donde C es una constante positiva y v es la velocidad del bloque.



¿Cuál es la velocidad máxima o terminal v_{max} que puede alcanzar el bloque?

a) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2mg\cos\alpha}{C}}$

b) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2mg\sin\alpha}{C}}$

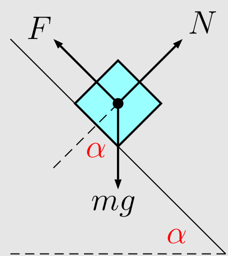
c) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{mg\cos\alpha}{C}}$

d) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{mg\sin\alpha}{C}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es:



ya que el roce viscoso se opone al movimiento. La ecuación de movimiento para la aceleración paralela a la superficie viene dada por:

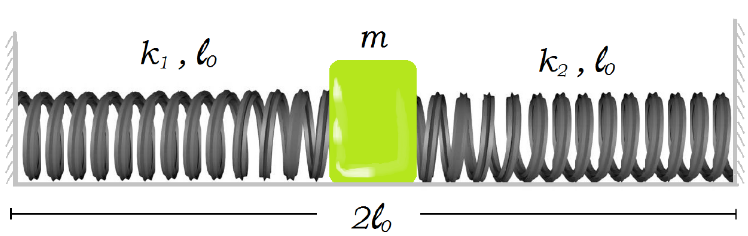
$$ma_{\parallel}(t) = mg\sin\alpha - F = mg\sin\alpha - Cv(t)^2$$

La velocidad terminal se alcanza cuando la aceleración se vuelve nula, i.e. la suma de las fuerzas es igual a cero. Por tanto,

$$C{v_{max}}^2 = mg\sin\alpha \qquad \longrightarrow \qquad v_{max} = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{C}}$$

Problema 2.15.

Considere el sistema de la figura, que consiste en un bloque de masa m sujeto a dos paredes por medio de resortes ideales del mismo largo natural ℓ_0 y de constantes elásticas k_1 y k_2, respectivamente. La separación entre las paredes es precisamente $2\ell_0$.



Si uno aparta el bloque de masa m de la posición de equilibrio este va a realizar oscilaciones cuyo período T está dado por:

a) $T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

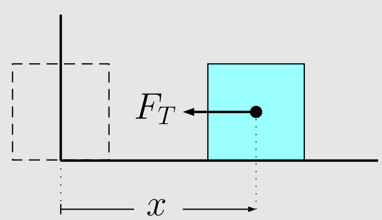
c) $T = 2\pi\left(\frac{m^2}{k_1 k_2}\right)^{1/4}$

d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Supongamos que la masa m se desplaza una distancia $x > 0$ hacia la derecha, como muestra la siguiente figura:



Como el resorte k_2 se ha comprimido, realiza una fuerza que se opone a dicha compresión. Por tanto, esta fuerza apunta hacia la **izquierda**, i.e. $\vec{F}_2 = -k_2 x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. De la misma forma, podemos observar que el resorte k_1 se ha estirado, realizando una fuerza que se opone a dicha elongación. Con ello, esta fuerza también apunta hacia la **izquierda**, i.e. $\vec{F}_1 = -k_1 x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Así, la fuerza neta o total que actúa sobre el bloque es:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1 x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - k_2 x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = -(k_1 + k_2)x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton,

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)x = 0$$

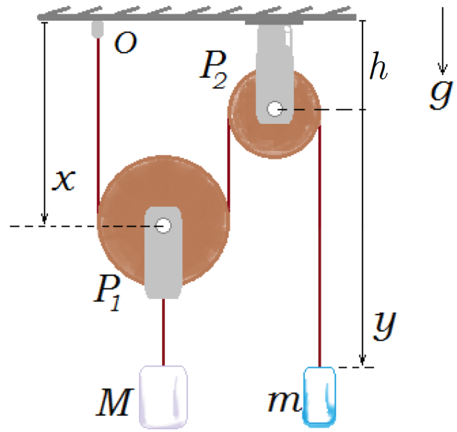
que corresponde a la ecuación del *oscilador armónico de frecuencia angular*

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

y período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

Problema 2.16.
En el sistema de la figura, las poleas P_1 y P_2 son ideales. Llamamos T a la tensión de la cuerda que parte de O y llega hasta el bloque de masa m.



La tensión T de la cuerda está dada por:

a) $T = \dfrac{3mM}{4m+M}g$

b) $T = (m+M)g$

c) $T = \dfrac{3mM}{m+M}g$

d) $T = \dfrac{2mM}{m+M}g$

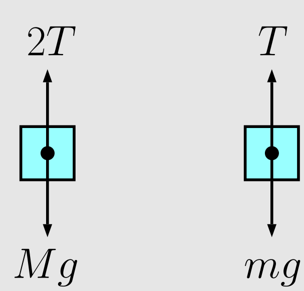
e) $T = \dfrac{mM}{2m+M}g$

Solución:

Primero que todo, notamos que la relación de ligadura está dada por el largo de la cuerda:

$$x + (x-h) + y = L_0 \qquad \longrightarrow \qquad 2\ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

Los diagramas de cuerpo libre son:



Así, las ecuaciones de movimiento corresponden a:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= Mg - 2T \\ m\ddot{y} &= mg - T \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de ligadura,

$$\begin{aligned} 2\ddot{x} + \ddot{y} &= 0 \\ 2\left(g - \frac{2T}{M}\right) + \left(g - \frac{T}{m}\right) &= \\ T &= \frac{3Mmg}{4m+M} \end{aligned}$$

Problema 2.17.
Para la situación del Problema 2.16, la aceleración $\ddot{y}$ del bloque m está dada por:

a) $\ddot{y} = 2g\left(\frac{2m-M}{M+m}\right)$

b) $\ddot{y} = 2g\left(\frac{2m-M}{M+4m}\right)$

c) $\ddot{y} = g\left(\frac{m-M}{M+m}\right)$

d) $\ddot{y} = g$

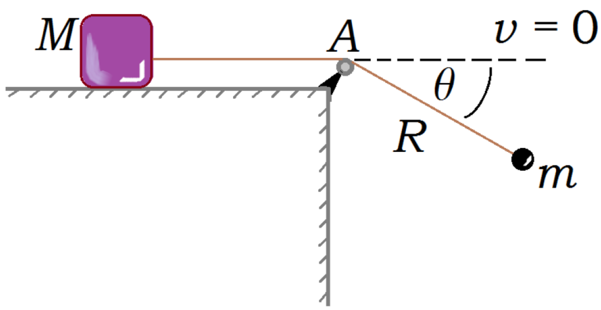
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Reemplazando la tensión T en la ecuación de movimiento del bloque m, tenemos:

$$\ddot{y} = g - \frac{T}{m} = \frac{2(2m-M)g}{4m+M}$$

Problema 2.18.
En la figura, el bloque M reposa sobre un plano horizontal con coeficiente de roce estático μ_e. Este bloque está unido a otro de masa m por una cuerda. El sistema comienza con m en posición horizontal, a una distancia R de la polea. Primero asuma que M **no desliza** sobre el plano (está quieto) y considere cierto instante dado por el ángulo θ de la figura.



Escribiendo la ecuación de movimiento para el bloque m en coordenadas polares, ¿cuál es la tensión T de la cuerda en términos de θ y $\dot{\theta}$?

a) $T = -mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2$

b) $T = -mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$

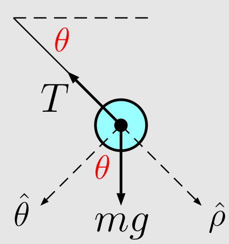
c) $T = mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2$

d) $T = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para un ángulo θ dado, el diagrama de cuerpo libre está dado por:



La fuerza neta que actúa sobre el objeto viene dada por:

$$\vec{F}_{neta} = (mg\sin\theta - T)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + mg\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Dado que el largo de la cuerda es constante y el bloque de masa M no se mueve, el radio $r = R$ es constante, la aceleración en coordenadas polares es:

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$,

$$\begin{aligned} -mR\,\dot{\theta}^2 &= mg\sin\theta - T \\ mR\,\ddot{\theta} &= mg\cos\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T = mg\sin\theta + mR\,\dot{\theta}^2$$

Problema 2.19.
Para la situación descrita en el Problema 2.18, calcule $\dot{\theta}$ como función de θ:

a) $\dot{\theta}^2 = \dfrac{g}{R}\dfrac{m}{m+M}\cos\theta$

b) $\dot{\theta}^2 = \dfrac{g}{R}\dfrac{m}{m+M}\sin\theta$

c) $\dot{\theta}^2 = \dfrac{g}{R}\dfrac{M}{m+M}\cos\theta$

d) $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}\cos\theta$

e) $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}\sin\theta$

Solución:

Usando la segunda ecuación e integrando con respecto al ángulo:

$$\begin{aligned}
\frac{R}{g}\ddot{\theta} &= \cos\theta \qquad\qquad \Big/ \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta \\
\frac{R}{g}\int_{\theta_i}^{\theta_f}\ddot{\theta}\ d\theta &= \int_{\theta_i}^{\theta_f}\cos\theta\ d\theta \\
\frac{R}{g}\int_{\theta_i}^{\theta_f}\frac{d\omega}{dt}\ d\theta &= \sin\theta_f - \sin\theta_i \\
\frac{R}{g}\int_{\omega_i}^{\omega_f}\frac{d\theta}{dt}\ d\omega &= \\
\frac{R}{g}\int_{\omega_i}^{\omega_f}\omega\ d\omega &= \\
\left(\frac{R}{g}\right)\frac{{\omega_f}^2 - {\omega_i}^2}{2} &=
\end{aligned}$$

El ángulo inicial corresponde a $\theta_i = 0$, y el móvil es liberado desde el reposo. Por tanto,

$$\left(\frac{R}{g}\right)\frac{{\omega_f}^2}{2} = \sin\theta_f$$

Como la expresión anterior es válida para cualquier ángulo que se tome como ángulo final, la escribimos en función de θ:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\sin\theta$$

Problema 2.20.
Para la situación planteada en el Problema 2.18, ¿cuánto vale T como función de θ?

a) $T = 3mg\cos\theta$

b) $T = mg\left(\dfrac{2m+M}{m+M}\right)\sin\theta$

c) $T = mg\left(\dfrac{2m+M}{m+M}\right)\cos\theta$

d) $T = 3mg\sin\theta$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

De los dos ejercicios anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} T &= mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{R}\sin\theta \end{aligned}$$

Juntando ambos resultados,

$$T = 3mg\sin\theta$$

Problema 2.21.
Para la situación planteada en el Problema 2.18, ¿cuánto vale θ justo antes de que M comience a deslizar?

a) $\cos\theta = \dfrac{(m+M)M}{(2m+M)m}\mu_e$

b) $\sin\theta = \dfrac{(m+M)M}{(2m+M)m}\mu_e$

c) $\cos\theta = \dfrac{M}{3m}\mu_e$

d) $\sin\theta = \dfrac{M}{3m}\mu_e$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

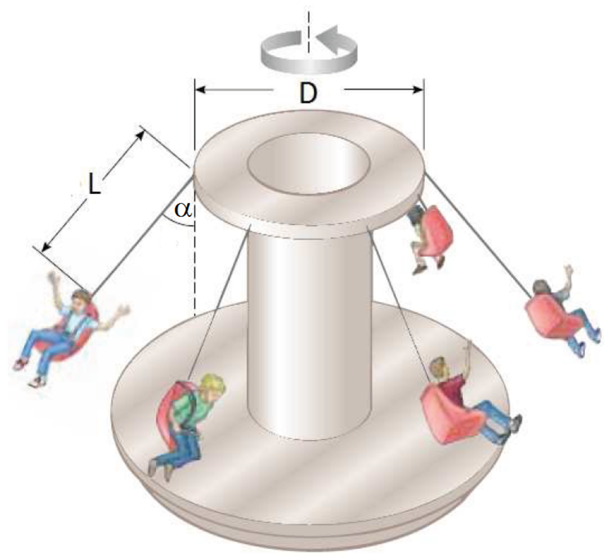
En el instante justo antes de que M comience a desplazar, la fuerza de roce estático se equipara con la tensión de la cuerda:

$$f_r = T = 3mg\sin\theta$$

Como el bloque está pronto a deslizar, el valor de la fuerza de roce viene dado por $f_r = \mu_e N$. Por otra parte, el valor de la normal es simplemente el módulo del peso del bloque, i.e. $N = mg$. Juntando todo, obtenemos que:

$$\sin\theta = \frac{M}{3m}\mu_e$$

Problema 2.22.
Un juego de un parque de diversiones consiste en una plataforma circular rotatoria de diámetro D, de la cual cuelgan asientos usando cadenas (sin masa) de largo L, como se muestra en la figura. Supongamos que el asiento con su respectivo pasajero tiene masa m. Si el ángulo que forman las cadenas con la vertical es α, determine la rapidez angular (constante) ω con que rota la plataforma.



a) $\omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\alpha}{D + L\sin\alpha}}$

b) $\omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\alpha}{D/2 + L\sin\alpha}}$

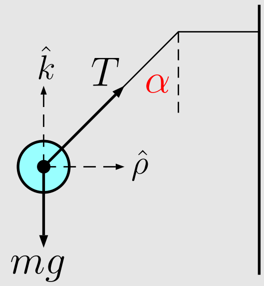
c) $\omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\alpha}{D + 2L\sin\alpha}}$

d) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g\tan\alpha}{D/2 + L\sin\alpha}}$

e) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g\tan\alpha}{D + L\sin\alpha}}$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



Usando coordenadas cilíndricas, identificamos la fuerza neta que actúa sobre la masa m:

$$\vec{F}_{neta} = -T\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (T\cos\alpha - mg)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Sea r el radio de giro de la masa m. Como el diámetro es igual a D y el largo de la cadena es L, y ambos términos son constantes, se puede afirmar que

$$r = \frac{D}{2} + L\sin\alpha$$

es constante. Por otra parte, el enunciado nos señala que la rapidez angular es constante e igual a ω. Con ello, la aceleración en coordenadas cilíndricas queda como sigue:

$$\vec{a} = -r\omega^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

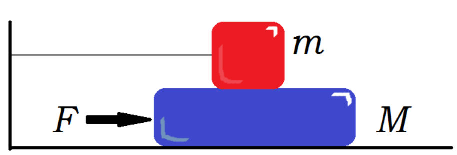
Como la masa está a una altura constante, $\ddot{z} \equiv 0$ y por tanto, usando la segunda ley de Newton,

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

De la componente radial del problema,

$$T\sin\alpha = mr\omega^2 \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{T\sin\alpha}{mr}} = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{D/2 + L\sin\alpha}}$$

Problema 2.23.
Un bloque de masa M se encuentra sobre un plano horizontal sin roce y es empujado hacia la derecha por una fuerza F. Otro bloque de masa m se ubica sobre el primero y se le amarra una cuerda, como se muestra en la figura. Entre las superficies de ambos bloques existe un coeficiente de roce estático μ_e y de roce cinético μ_c.



Si inicialmente el sistema se encuentra en reposo, determine cuál es la fuerza mínima F_{min} que debe aplicarse sobre la masa M de manera que ésta se empiece a mover.

a) $F_{min} = \mu_e(M+m)g$

b) $F_{min} = \mu_e Mg$

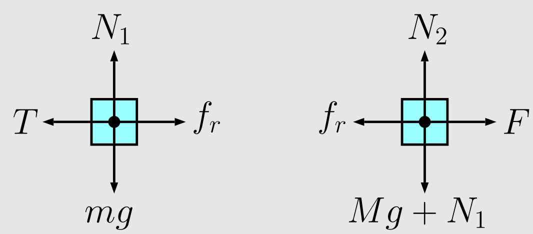
c) $F_{min} = \mu_c Mg$

d) $F_{min} = \mu_e mg$

e) $F_{min} = \mu_c mg$

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre de los bloques son:



La segunda ley de Newton nos dice que:

$$\boxed{\text{Bloque } m} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad f_r = T \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_2 = mg \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Bloque } M} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad M\ddot{x} = F - f_r \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_1 = Mg + N_2 \end{aligned}$$

Justo antes de que el bloque M se empiece a mover, la fuerza aplicada debe ser mayor que la fuerza de roce f_r. Por tanto, el valor mínimo es:

$$F_{min} = {f_r}^{min} = \mu_e N_2 = \mu_e mg$$

Problema 2.24.
Para la configuración del Problema 2.18, si el bloque M se está moviendo hacia la derecha, encuentre su aceleración a:

a) $a = \dfrac{F - \mu_c mg}{M}$

b) $a = \dfrac{\mu_c Mg - F}{m}$

c) $a = \dfrac{F - \mu_c M g}{m}$

d) $a = \dfrac{\mu_c m g - F}{M}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

De las ecuaciones de movimiento,

$$f_r = \mu_c N_2 = \mu_c m g$$

Además,

$$Ma = F - f_r \qquad \longrightarrow \qquad a = \frac{F - f_r}{M} = \frac{F - \mu_c m g}{M}$$

Problema 2.25.
Para la configuración del Problema 2.18, si el bloque M se está moviendo hacia la derecha, encuentre la tensión T de la cuerda:

a) $T = \mu_c M g$

b) $T = \mu_c m g$

c) $T = F$

d) $T = F + \mu_c m g$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

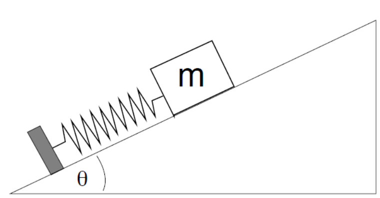
De las ecuaciones de movimiento,

$$f_r = \mu_c N_2 = \mu_c m g$$

Además,

$$T = f_r = \mu_c m g$$

Problema 2.26.
Una masa m se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. La masa está conectada a un resorte de constante k, como se muestra en la figura. Suponga primero que no existe roce entre la masa y la plataforma.



Si inicialmente la masa se encuentra en reposo, la compresión Δx_0 del resorte será:

a) $\Delta x_0 = \dfrac{mg\cos\theta}{k}$

b) $\Delta x_0 = \dfrac{mg\tan\theta}{k}$

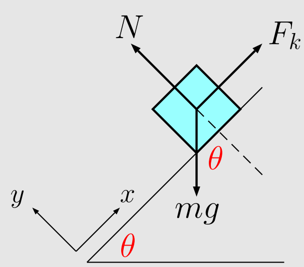
c) $\Delta x_0 = \dfrac{mg\cot\theta}{k}$

d) $\Delta x_0 = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es:



Para que la masa esté en equilibrio, se debe cumplir que:

$$k\Delta x_0 = mg\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \Delta x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k}$$

Problema 2.27.

Suponga ahora que el resorte se comprime una distancia d desde su posición en el problema anterior. Justo después de soltarlo, la aceleración a de la masa en la dirección hacia arriba del plano será:

a) $a = \dfrac{k(\Delta x_0 - d) - mg\sin\theta}{m}$

b) $a = \dfrac{k(\Delta x_0 - d) - mg\cos\theta}{m}$

c) $a = \dfrac{k(\Delta x_0 + d) - mg\sin\theta}{m}$

d) $a = \dfrac{k(\Delta x_0 + d) - mg\cos\theta}{m}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En este caso, la compresión total del resorte está dad por $\Delta x = \Delta x_0 + d$. Por otra parte, la segunda ley de Newton aplicada a la coordenada X del problema nos dice que:

$$ma = F_k - mg\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad a = \frac{F_k - mg\sin\theta}{m} = \frac{k(\Delta x_0 + d) - mg\sin\theta}{m}$$

Problema 2.28.
Para la situación planteada en el Problema 2.26, suponga ahora que el coeficiente de roce cinético entre la plataforma y la masa es μ_c y el estático es μ_e. A partir de la situación planteada en el problema anterior, la masa comienza a subir a lo largo del plano inclinado. Obtenga la aceleración a' que tiene m (en el sentido hacia arriba del plano) justo cuando el resorte alcanza su largo natural, suponiendo que en ese momento su velocidad es todavía hacia arriba del plano.

a) $a' = \dfrac{k(\Delta x_0 + d)}{m} - g\sin\theta - \mu_c g\cos\theta$

b) $a' = \dfrac{k(\Delta x_0 + d)}{m} - g\sin\theta + \mu_c g\cos\theta$

c) $a' = -g\sin\theta + \mu_c g\cos\theta$

d) $a' = -g\sin\theta - \mu_c g\cos\theta$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La nueva ecuación de movimiento del problema es la siguiente:

$$m\ddot{x} = F_k - mg\sin\theta - f_r$$

Como el bloque se está moviendo en X, pero no en Y, entonces:

$$N = mg\cos\theta \qquad \wedge \qquad f_r = \mu_c N = \mu_c mg\cos\theta$$

Sea a' la aceleración en el instante en que el resorte posee su largo natural. Así, $F_k = 0$ en dicho instante, y por tanto:

$$ma' = -mg\sin\theta - f_r \qquad \longrightarrow \qquad a' = -g\sin\theta - \mu_c g\cos\theta$$

Problema 2.29.
Para la situación planteada en el Problema 2.26, suponga ahora que el coeficiente de roce cinético entre la plataforma y la masa es μ_c y el estático es μ_e. Suponga ahora que todo el sistema se encuentra en un

ascensor que tiene aceleración vertical hacia arriba constante A. Entonces, ¿cuál es el valor máximo de la compresión que puede tener el resorte tal que el bloque no deslice?

a) $\Delta x_{max} = \dfrac{m(g-A)(\sin\theta + \mu_e \cos\theta)}{k}$

b) $\Delta x_{max} = \dfrac{m(g+A)(\sin\theta + \mu_e \cos\theta)}{k}$

c) $\Delta x_{max} = \dfrac{m(g-A)(\cos\theta + \mu_e \sin\theta)}{k}$

d) $\Delta x_{max} = \dfrac{m(g+A)(\cos\theta + \mu_e \sin\theta)}{k}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para un observador en un sistema inercial, el móvil adquiere una aceleración A en la misma dirección (pero sentido opuesto) al peso del móvil. Así, las ecuaciones de movimiento serán:

$$\begin{aligned} mA\sin\theta &= F_k - mg\sin\theta - f_r \\ mA\cos\theta &= N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

La fuerza de roce entre el bloque y la superficie será

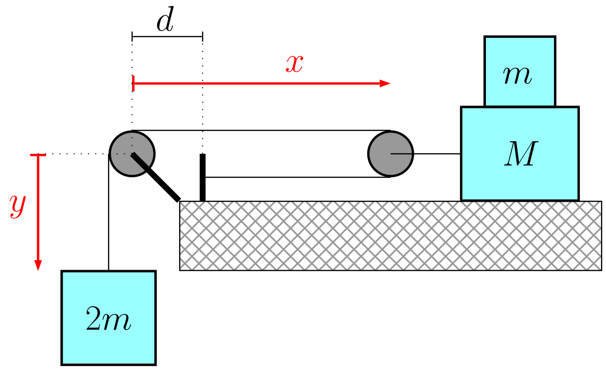
$$f_r = \mu_e N = \mu_e(mA\cos\theta + mg\cos\theta) = \mu_e m(A+g)\cos\theta$$

Como queremos que no deslice, se deben igualar las fuerzas en la dirección X:

$$\begin{aligned} F_k &= mA\sin\theta + mg\sin\theta + f_r \\ k\Delta x_{max} &= m(A+g)\sin\theta + fr \\ \Delta x_{max} &= \frac{m(A+g)(\sin\theta + \mu_e\cos\theta)}{k} \end{aligned}$$

Problema 2.30.

Considere la máquina de Atwood de la figura, en que el bloque de masa m descansa sobre el bloque M y la superficie entre ambos tiene coeficiente de roce estático μ_e. El sistema M/m se puede deslizar sobre la mesa lisa, y está unido a una polea ideal por una cuerda ideal. Este sistema, a su vez, está unido a un bloque de masa $2m$, que se desplaza en forma vertical, por medio de una cuerda ideal. Suponga que el coeficiente de roce estático entre M y m es suficiente para que no haya desplazamiento relativo ambos bloques cuando se deja evolucionar el sistema total desde el reposo.



La aceleración del bloque que cuelga está dada por:

a) $\ddot{y} = g\dfrac{8m}{7m - M}$

b) $\ddot{y} = g\dfrac{8m}{8m + M}$

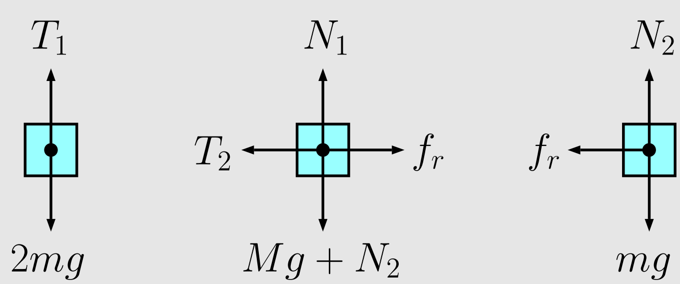
c) $\ddot{y} = g\dfrac{8m}{9m + M}$

d) $\ddot{y} = g\dfrac{4m}{9m + M}$

e) $\ddot{y} = g\dfrac{4m}{7m - M}$

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre de los bloques involucrados es el siguiente:



Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\boxed{\text{Bloque } m} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad m\ddot{x} = -f_r \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_2 = mg \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Bloque } M} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad M\ddot{x} = f_r - T_2 \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_1 = Mg + N_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Bloque } 2m} \qquad \hat{\boldsymbol{\jmath}} : \quad 2m\ddot{y} = 2mg - T_1$$

El largo constante de la cuerda nos entrega una ecuación de ligadura entre las aceleraciones del problema:

$$y + x + (x - d) = L_0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{y} + 2\ddot{x} = 0$$

Por otra parte, la relación entre las tensiones viene dada por:

$$T_2 = 2T_1$$

Reemplazando, podemos despejar las aceleraciones en función de las tensiones correspondientes:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2T_1}{M+m} \\ \ddot{y} &= g - \frac{T_1}{2m} \end{aligned}$$

De la ecuación de ligadura,

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\ddot{x} &= 0 \\ \left(g - \frac{T_1}{2m}\right) + 2\left(-\frac{2T_1}{M+m}\right) &= \\ T_1 &= \frac{2mg(M+m)}{M+9m} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\ddot{y} = \frac{8mg}{M+9m}$$

Por completitud, calculamos la segunda aceleración:

$$\ddot{x} = -\frac{4mg}{M+9m}$$

Problema 2.31.
Considere la situación descrita en el Problema 2.30. Para que no haya desplazamiento relativo entre m y M, el coeficiente de roce estático μ_e debe ser tal que:

a) $\mu_e < \dfrac{4m}{9m+M}$

b) $\mu_e > \dfrac{8m}{9m+M}$

c) $\mu_e > \dfrac{8m}{8m+M}$

d) $\mu_e < \dfrac{8m}{7m-M}$

e) $\mu_e > \dfrac{4m}{9m+M}$

Solución:

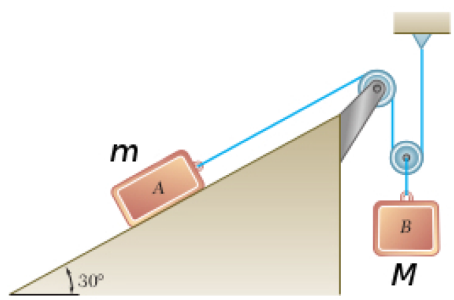
Sabemos que:

$$f_r = -m\ddot{x} \qquad \wedge \qquad f_r < \mu_e N_2 = \mu_e mg$$

Juntando ambos resultados,

$$\begin{aligned} f_r &< \mu_e mg \\ -m\ddot{x} &< \\ -\frac{\ddot{x}}{g} &< \mu_e \\ \frac{4m}{M+9m} &< \end{aligned}$$

Problema 2.32.
Dos bloques están en reposo dispuestos como muestra la figura:



Despreciando las masas de las poleas y el efecto del roce en las poleas y entre el bloque A y el plano inclinado, determine la tensión de la cuerda:

a) $\left(\dfrac{3Mm}{2(M-4m)}\right)g$

b) $\left(\dfrac{5Mm}{2(M-4m)}\right)g$

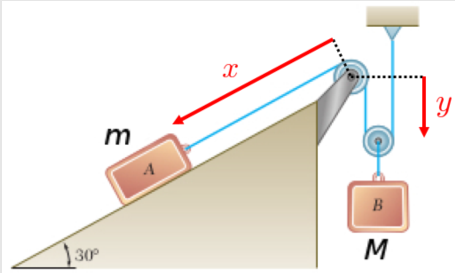
c) $\left(\dfrac{5Mm}{2(M+4m)}\right)g$

d) $\left(\dfrac{3Mm}{2(M+4m)}\right)g$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Definimos el siguiente sistema de coordenadas:



Así, las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= mg\sin 30^{\circ} - T \\
&= \frac{mg}{2} - T \\
M\ddot{y} &= Mg - 2T
\end{aligned}
$$

El largo constante de la cuerda nos entrega la siguiente ecuación de ligadura:

$$
x + 2y = L_0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} + 2\ddot{y} = 0
$$

Reemplazando,

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + \ddot{y} &= 0 \\
\left(\frac{g}{2} - \frac{T}{m}\right) + 2\left(g - \frac{2T}{M}\right) &= \\
T &= \frac{5Mmg}{2(M+4m)}
\end{aligned}
$$

Problema 2.33.
En la situación del Problema 2.32, determine la aceleración del bloque B:

a) $\left(\frac{M-m}{M+4m}\right)g$

b) $\left(\frac{M+m}{M-4m}\right)g$

c) $\left(\frac{M-m}{M-4m}\right)g$

d) $\left(\frac{M+m}{M+4m}\right)g$

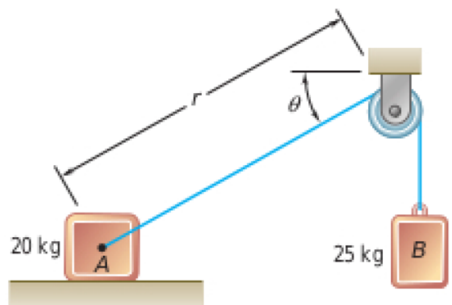
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Reemplazando en la ecuación de movimiento,

$$\ddot{y} = g - \frac{2T}{M} = \frac{g(M-m)}{M+4m}$$

Problema 2.34.
Los dos bloques del sistema de la figura son liberados desde el reposo en $t = t_0$.



Despreciando la masa de la polea y el efecto del rozamiento en la polea y con la superficie, determine la tensión de la cuerda en $t = {t_0}^+$:

a) $\dfrac{m_A m_B g \sec\theta}{m_A \sec\theta + m_B \cos\theta}$

b) $\dfrac{m_A m_B g}{m_A \sec\theta + m_B \cos\theta}$

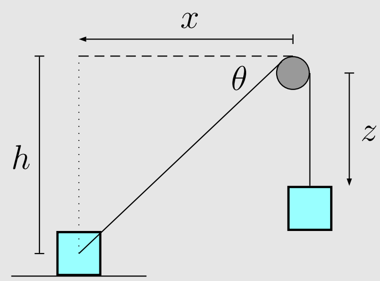
c) $\dfrac{m_A m_B g \cos\theta}{m_A \cos\theta + m_B \sin\theta}$

d) $\dfrac{m_A m_B g}{m_A \cos\theta + m_B}$

e) $\dfrac{m_A m_B g \sin\theta}{m_A \sec\theta + m_B \sin\theta}$

Solución:

Consideremos el siguiente sistema de coordenadas:



Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m_A\ddot{x} &= -T\cos\theta \\ m_B\ddot{z} &= m_B g - T \end{aligned}$$

donde

$$\cos\theta = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

La condición de ligadura impuesta por el largo constante de la cuerda nos dice que:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+h^2} + z &= L_0 && \Big/ \frac{d}{dt} \\ \frac{x\,\dot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}} + \dot{z} &= 0 \\ f(x)\,\dot{x} + \dot{z} &= && \Big/ \frac{d}{dt} \\ f'(x)\,\dot{x} + f(x)\,\ddot{x} + \ddot{z} &= \end{aligned}$$

Como el sistema parte desde el reposo, $\dot{x}({t_0}^-) = \dot{x}({t_0}^+) = 0$ y por tanto,

$$f({t_0}^+)\ddot{x}({t_0}^+) + \ddot{z}({t_0}^+) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{z}({t_0}^+) = -\ddot{x}({t_0}^+)\cos\theta$$

De las ecuaciones de movimiento, y recordando que las variables están evaluadas en ${t_0}^+$,

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\ddot{x}\cos\theta \\ g - \frac{T}{m_B} &= -\left(-\frac{T\cos\theta}{m_A}\right)\cos\theta \;=\; \frac{T\cos^2\theta}{m_A} \\ T &= \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B\cos^2\theta} \\ &= \frac{m_A m_B g\sec\theta}{m_A\sec\theta + m_B\cos\theta} \end{aligned}$$

Problema 2.35.

En la situación del Problema 2.34, determine el módulo de la aceleración del bloque A en $t = {t_0}^+$:

a) $\dfrac{m_A g}{(m_A + m_B)\sec\theta}$

b) $\dfrac{m_B g}{(m_A + m_B)\cos\theta}$

c) $\dfrac{m_A g}{(m_A + m_B)\sin\theta}$

d) $\dfrac{m_A g}{m_A \sec\theta + m_B \cos\theta}$

e) $\dfrac{m_B g}{m_A \sec\theta + m_B \cos\theta}$

Solución:

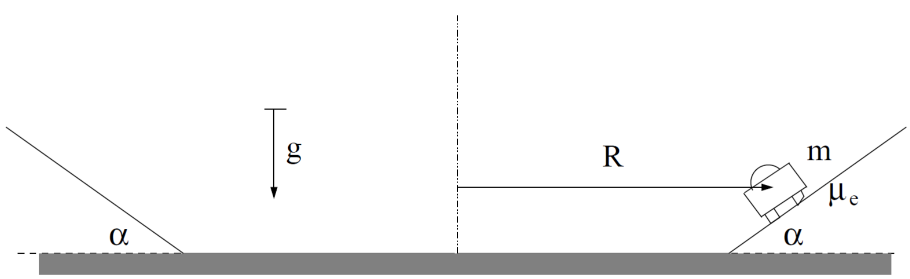
De la ecuación de movimiento,

$$\ddot{x} = -\frac{T\cos\theta}{m_A} = -\frac{m_B g}{m_A \sec\theta + m_B \cos\theta}$$

y con ello,

$$|\ddot{x}| = \frac{m_B g}{m_A \sec\theta + m_B \cos\theta}$$

Problema 2.36.
Un automóvil se mueve en un camino circular de radio R con un peralte (inclinación del camino) de ángulo α. Suponga que el coeficiente de roce estático entre las ruedas del auto y el camino es μ_e.



Entonces, la rapidez mínima v_m del auto para que no resbale hacia abajo en el peralte está dada por:

a) $v_m = \sqrt{gR\dfrac{\mu_e \sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_e\cos\alpha}}$

b) $v_m = \sqrt{gR\dfrac{\sin\alpha + \mu_e\cos\alpha}{\mu_e \sin\alpha + \cos\alpha}}$

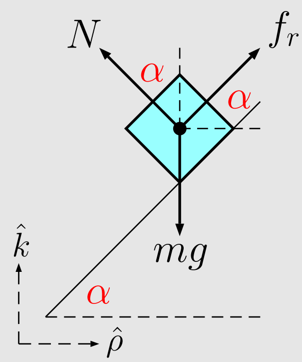
c) $v_m = \sqrt{gR\dfrac{\mu_e \sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \mu_e\cos\alpha}}$

d) $v_m = \sqrt{gR\dfrac{\sin\alpha - \mu_e\cos\alpha}{\mu_e\sin\alpha + \cos\alpha}}$

e) $v_m = \sqrt{gR\dfrac{\sin\alpha - \mu_e\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu_e\cos\alpha}}$

Solución:

Utilizando coordenadas cilíndricas, dibujamos el diagrama de cuerpo libre para el auto:



La fuerza total que actúa sobre el auto es:

$$\vec{F}_{neta} = (f_r\cos\alpha - N\sin\alpha)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (N\cos\alpha + f_r\sin\alpha - mg)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

En coordenadas cilíndricas, la aceleración está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= -R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

donde hemos reemplazado $r = R$ constante. Como no queremos que deslice, $\ddot{z} = 0$ y por tanto:

$$N\cos\alpha + f_r\sin\alpha = mg$$

Para la fuerza de roce estático se cumple que $f_r \leq \mu_e N$, por lo que el caso mínimo se alcanzará en $f_r = \mu_e N$. Reemplazando,

$$N\cos\alpha + \mu_e N\sin\alpha = N(\cos\alpha + \mu_e\sin\alpha) = mg \qquad \longrightarrow \qquad N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu_e\sin\alpha}$$

Igualando las componentes radiales de la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned}-mR\dot{\theta}^2 &= f_r\cos\alpha - N\sin\alpha \\ &= N(\mu_e\cos\alpha - \sin\alpha) \\ &= \frac{mg(\mu_e\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu_e\sin\alpha} \\ \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{g(\sin\alpha - \mu_e\cos\alpha)}{R(\cos\alpha + \mu_e\sin\alpha)}}\end{aligned}$$

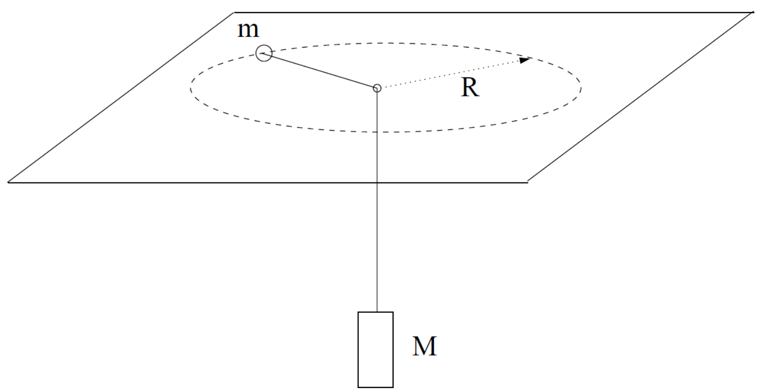
Como el radio es constante,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = v_m\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \longrightarrow \qquad v_m = R\dot{\theta}$$

Así,

$$v_m = \sqrt{gR\,\frac{\sin\alpha - \mu_e\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_e\sin\alpha}}$$

Problema 2.37.
Una partícula de masa m se mueve sobre una mesa horizontal lisa (i.e. sin roce) y está unida a un bloque de masa M por una cuerda ideal como se indica en la figura. La cuerda pasa por un agujero y el bloque se puede mover solo a lo largo de la vertical.



Si el bloque de masa M está en equilibrio y la trayectoria de m es un círculo de radio R, entonces la rapidez v de m está dada por:

a) $v = \sqrt{\dfrac{MRg}{m}}$

b) $v = \sqrt{gR}$

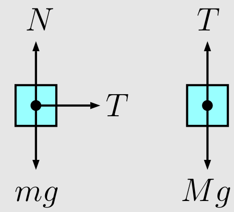
c) $v = \sqrt{\dfrac{2MRg}{m}}$

d) $v = \sqrt{\dfrac{MRg}{2m}}$

e) $v = \sqrt{\dfrac{mRg}{M}}$

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre para los bloques están dados por:



Como la masa M está en equilibrio, se cumple que $T = Mg$. Por otra parte, la segunda ley de Newton aplicada al bloque m nos entrega la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{neta} &= m\vec{a} \\ -\frac{T}{m}\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ -\frac{Mg}{m} &= -R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + r\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Como no hay fuerza en la componente $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, se concluye que:

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \dot{\theta} = \omega \text{ constante}$$

Así,

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{Rm}}$$

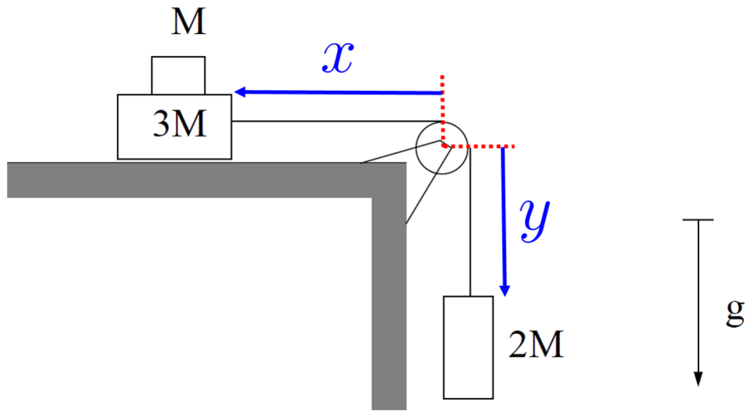
Dado que el radio es constante,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \longrightarrow \qquad v = R\dot{\theta}$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{MRg}{m}}$$

Problema 2.38.
Considere los tres bloques de la figura. Suponga que no hay roce entre el bloque de masa $3M$ y la mesa horizontal. Entre el bloque de masa $3M$ y el bloque de masa M hay roce, con un coeficiente de roce estático igual a μ_e.



Si los bloques $3M$ y M se mueven juntos, la tensión de la cuerda está dada por:

a) $T = 2Mg$

b) $T = \dfrac{4Mg}{3}$

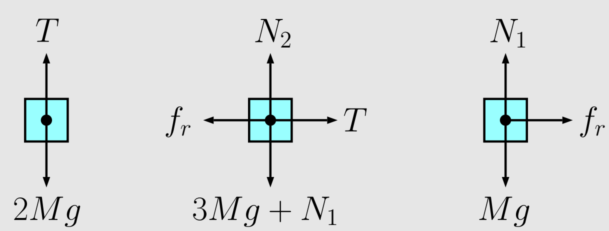
c) $T = 6Mg$

d) $T = \dfrac{Mg}{3}$

e) $T = 4Mg$

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre son los siguientes:



Las ecuaciones de movimiento son:

$$\boxed{\text{Bloque } M} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad M\ddot{x} = -f_r \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_1 = Mg \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Bloque } 2M} \qquad \hat{\boldsymbol{\jmath}} : \quad 2M\ddot{y} = 2Mg - T$$

$$\boxed{\text{Bloque } 3M} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} &: \quad 3M\ddot{x} = f_r - T \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} &: \quad N_1 = 3Mg + N_1 \end{aligned}$$

El largo de la cuerda noes entrega una ecuación de ligadura entre las aceleraciones involucradas:

$$x + y = L_0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{y} &= 0 \\ \left(-\frac{T}{4M}\right) + \left(g - \frac{T}{2M}\right) &= \\ T &= \frac{4Mg}{3} \end{aligned}$$

Problema 2.39.
En el problema anterior, el coeficiente de roce mínimo que debe haber entre los bloques $3M$ y M para que se muevan en conjunto, i.e. sin deslizarse uno con respecto del otro, es:

a) $\mu_e = 1$

b) $\mu_e = 0$

c) $\mu_e = \frac{1}{3}$

d) $\mu_e = \frac{2}{3}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Del apartado anterior podemos despejar el valor de la aceleración de los bloques que se mueven en conjunto:

$$\ddot{x} = -\frac{T}{4M} = -\frac{g}{3}$$

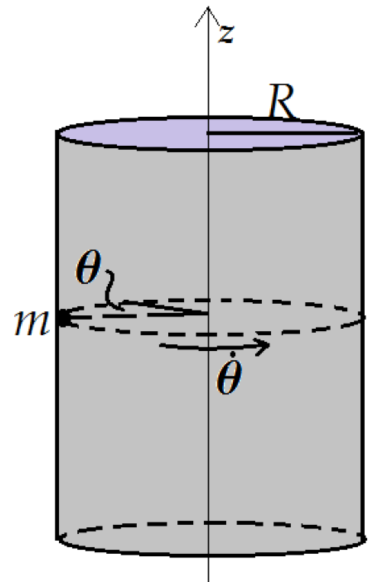
Por otra parte, la ecuación de movimiento del bloque M nos dice que:

$$f_r = -M\ddot{x} = \frac{Mg}{3}$$

El coeficiente de roce mínimo es aquel en que $f_r = \mu_e N_1$, por lo que:

$$\frac{Mg}{3} = \mu_e N_1 = \mu_e Mg \qquad \longrightarrow \qquad \mu_e = \frac{1}{3}$$

Problema 2.40.
Una partícula se mueve por el interior de un cilindro hueco de radio R. Entre la partícula y el cilindro existe un coeficiente de roce dinámico μ_d. Considere de momento que NO hay gravedad.



Si la partícula se mueve con velocidad angular $\dot{\theta}$ y aceleración $\ddot{\theta}$, calcule el módulo de la fuerza normal entre la partícula y el interior del cilindro:

a) $N = 2mR\ddot{\theta}$

b) $N = 2mR\dot{\theta}^2$

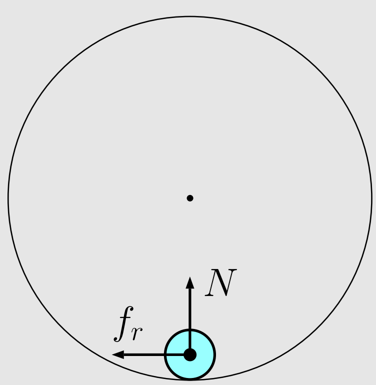
c) $N = mR\dot{\theta}^2$

d) $N = mR\ddot{\theta}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Visto desde arriba, el diagrama de cuerpo libre tiene la siguiente forma:



En coordenadas cilíndricas, la fuerza neta aplicada sobre la partícula es:

$$\vec{F}_{neta} = -N\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - f_r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Por otra parte, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{neta} &= m\vec{a} \\ &= m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -mR\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + mR\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Igualando,

$$N = mR\dot{\theta}^2$$

Problema 2.41.
Para la situación del Problema 2.40, encuentre una expresión que relacione $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$:

a) $\mu_d\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2$

b) $\mu_d\ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2$

c) $\ddot{\theta} = \mu_d\dot{\theta}^2$

d) $\ddot{\theta} = -\mu_d\dot{\theta}^2$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:
Del problema anterior, sabemos que:

$$-f_r = mR\ddot{\theta}$$

Por otra parte,

$$f_r = \mu_d N = \mu_d mR\dot{\theta}^2$$

Juntando ambos resultados,

$$\ddot{\theta} = -\mu_d\dot{\theta}^2$$

Problema 2.42.
Para la situación del Problema 2.40, considere ahora que la partícula se mueve en presencia de la gravedad, y comienza a moverse en el eje Z. Determine el valor de $\ddot{z}$ en el momento en que la trayectoria forma un ángulo α con respecto a la horizontal:

a) $\ddot{z} = \mu_d R\dot{\theta}^2\sin\alpha - g$

b) $\ddot{z} = -\mu_d R\dot{\theta}^2\sin\alpha - g$

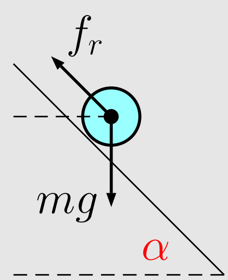
c) $\ddot{z} = \mu_d R\dot{\theta}^2\sin\alpha + g$

d) $\ddot{z} = -\mu_d R\dot{\theta}^2\sin\alpha + g$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En una vista lateral, la situación se diagrama como sigue:



De esta forma,

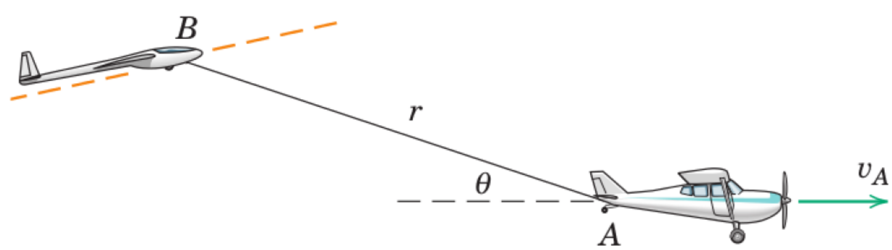
$$m\ddot{z} = f_r \sin\alpha - mg = \mu_d N \sin\alpha - mg$$

donde, reemplazando el valor de N, se obtiene que:

$$\ddot{z} = \mu_d R\dot{\theta}^2 \sin\alpha - g$$

Problema 2.43.

El avión A vuela horizontalmente con una rapidez horizontal v_A respecto a tierra, remolcando al planeador B de masa m_B. El cable remolcador tiene largo constante R. Analicemos el despegue del planeador, durante el cual la rapidez angular $\dot{\theta} = \omega$ es constante. Durante todo el despegue, el piloto del planeador maniobra de manera que la fuerza F que ejerce el aire sobre las alas apunta en la dirección vertical hacia arriba. Usaremos como marco de referencia $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (horizontal hacia la derecha) y $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (vertical hacia arriba) fijos en tierra.



Suponga primero que la rapidez v_A del avión es constante. La velocidad del planeador respecto a tierra cuando $\theta = \theta_0$ es:

a) $\vec{v}_B = (v_A + R\omega\cos\theta_0)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - R\omega\sin\theta_0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

b) $\vec{v}_B = (v_A + R\omega\sin\theta_0)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + R\omega\cos\theta_0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

c) $\vec{v}_B = (v_A + R\omega\cos\theta_0)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + R\omega\sin\theta_0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

d) $\vec{v}_B = (v_A + R\omega \sin\theta_0)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - R\omega\cos\theta_0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

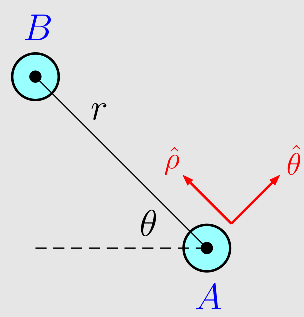
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por relatividad galileana, sabemos que:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

Es fácil ver que $\vec{v}_A = v_A\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Por otra parte, en coordenadas polares, la cinemática del planeador se ve como sigue:



donde

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \longrightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{d\theta} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Así,

$$\vec{r}_{B/A} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v}_{B/A} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = R\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

En coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \\ &= v_A\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + R\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= v_A\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + R\omega(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\ &= (v_A + R\omega\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (R\omega\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{aligned}$$

Problema 2.44.
Considere la situación planteada en el Problema 2.43. La tensión T de la cuerda cuando $\theta = \theta_0$ es:

a) $T = m_B R\omega^2$

b) $T = m_B R\omega^2 \sin\theta_0$

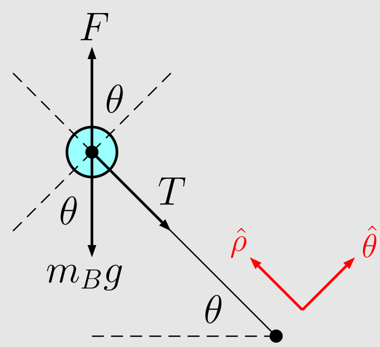
c) $T = m_B R\omega^2 \cos\theta_0$

d) $T = m_B R\omega^2 \tan\theta_0$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre del planeador es:



La fuerza neta que actúa sobre el planeador es:

$$\vec{F}_{neta} = -T\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (F - m_B g)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (-T + F\sin\theta - m_B g\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (F\cos\theta - m_B g\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Aplicando el principio de relatividad galileana,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_A \qquad \longrightarrow \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A = \vec{a}_{B/A}$$

pues el avión se mueve con velocidad constante. Por la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{neta} &= m_B\vec{a}_B \\
&= m_B\vec{a}_{B/A} \\
&= m_B\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + m_B\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -m_B R\omega^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que el radio y la rapidez angular son constantes. Para la componente $\hat{\boldsymbol{\theta}}$,

$$F\cos\theta - m_B g\cos\theta = 0 \qquad \longrightarrow \qquad F = m_B g$$

Ahora, podemos despejar la tensión de la cuerda:

$$-T + F\sin\theta - m_B g\sin\theta = -m_B R\omega^2 \qquad \longrightarrow \qquad T = m_B R\omega^2$$

Problema 2.45.
Considere la situación planteada en el Problema 2.43. La fuerza F cuando $\theta = \theta_0$ es:

a) $F = m_B g + T\sin\theta_0$

b) $F = m_B g + T\cos\theta_0$

c) $F = m_B g - T\sin\theta_0$

d) $F = m_B g - T\cos\theta_0$

e) $F = m_B g$

Solución:

Como vimos en el problema anterior,
$$F = m_B g$$

Problema 2.46.
Considere la situación planteada en el Problema 2.43, pero suponga ahora que el avión tiene una aceleración constante $a\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. La tensión T de la cuerda cuando $\theta = \theta_0$ es:

a) $T = m_B \sec\theta_0(R\omega^2\sin\theta_0 + a)$

b) $T = m_B \csc\theta_0(R\omega^2\cos\theta_0 + a)$

c) $T = m_B \sec\theta_0(R\omega^2\cos\theta_0 + a)$

d) $T = m_B \csc\theta_0(R\omega^2\sin\theta_0 + a)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Ahora, el avión posee una aceleración no nula, por lo que:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A = -R\omega^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + a\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = -R\omega^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + a(-\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

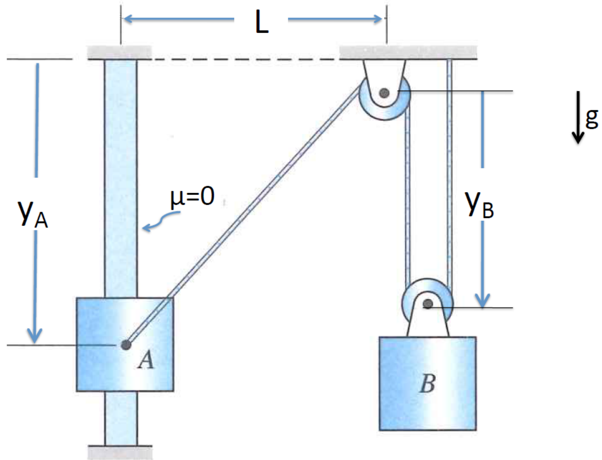
La segunda ley de Newton, $\vec{F}_{neta} = m_B\vec{a}_B$, aplicada a la componente $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, nos dice que:

$$m_B a\sin\theta = F\cos\theta - m_B g\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad F = m_B(a\tan\theta + g)$$

Para la componente $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, se cumple que:

$$-m_B(a\cos\theta + R\omega^2) = -T + F\sin\theta - m_B g\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad T = m_B\sec\theta_0(a + R\omega^2\cos\theta_0)$$

Problema 2.47.
El sistema de poleas mostrado en la figura está formado por una cuerda y poleas ideales. El bloque B tiene masa M, mientras que el aro A posee masa m. Ambos puede deslizar libre de roce por la guía vertical. Si en un instante t_0 el sistema se deja evolucionar libremente desde el reposo, con la configuración inicial mostrada en la figura. Considere que $y_A(t_0) = L$.



Determine la relación entre los módulos de las velocidades del anillo y del bloque para un instante de tiempo $t > t_0$, en el cual el anillo se desliza por la guía vertical (ninguno de los cuerpos ha tocado el techo o el suelo):

a) $\left|\dfrac{v_B}{v_A}\right| = \dfrac{2y_A}{\sqrt{{y_A}^2 + L^2}}$

b) $\left|\dfrac{v_B}{v_A}\right| = \dfrac{y_B}{2\sqrt{{y_A}^2 + L^2}}$

c) $\left|\dfrac{v_B}{v_A}\right| = \dfrac{y_B}{\sqrt{{y_A}^2 + L^2}}$

d) $\left|\dfrac{v_B}{v_A}\right| = \dfrac{y_A}{2\sqrt{{y_A}^2 + L^2}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea r la longitud de la cuerda diagonal que une al anillo A con la polea fija al techo. Por teorema de Pitágoras,

$$ {y_A}^2 + L^2 = r^2 \qquad \longrightarrow \qquad r = \sqrt{{y_A}^2 + L^2} $$

Por otra parte, la ecuación de ligadura asociada al largo constante de la cuerda es:

$$ r + 2y_B = \sqrt{{y_A}^2 + L^2} + 2y_B = L_0 $$

Derivando implícitamente con respecto al tiempo, tenemos que:

$$ \begin{aligned} \sqrt{{y_A}^2 + L^2} + 2y_B &= L_0 \quad \Big/ \frac{d}{dt} \\ \frac{y_A\, v_A}{\sqrt{{y_A}^2 + L^2}} + 2v_B &= 0 \\ -\frac{y_A}{2\sqrt{{y_A}^2 + L^2}} &= \frac{v_B}{v_A} \end{aligned} $$

Por tanto,

$$\left|\frac{v_B}{v_A}\right| = \frac{y_A}{2\sqrt{{y_A}^2 + L^2}}$$

Problema 2.48.
Para la situación descrita en el Problema 2.47, la tensión de la cuerda instante ${t_0}^+$ (justo después de soltarlo) es:

a) $T = \sqrt{2}Mmg\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{M+8m}\right)$

b) $T = \sqrt{2}Mmg\left(\dfrac{2\sqrt{2}+1}{M+8m}\right)$

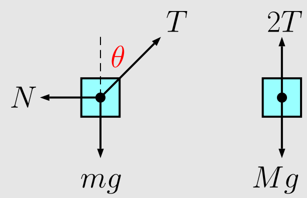
c) $T = \sqrt{2}Mmg\left(\dfrac{2\sqrt{2}+1}{M+4m}\right)$

d) $T = \sqrt{2}Mmg\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{M+4m}\right)$

e) $T = \sqrt{2}Mmg\left(\dfrac{2\sqrt{2}-1}{M+4m}\right)$

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre de ambos elementos son:



La segunda ley de Newton aplicada a ambos cuerpos nos dice que:

$$\begin{aligned} Ma_B &= Mg - 2T \\ a_B &= g - \frac{2T}{M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ma_A &= mg - T\cos\theta \\ a_A &= g - \frac{T\cos\theta}{m} \end{aligned}$$

con

$$\cos\theta = \frac{y_A}{r} = \frac{y_A}{\sqrt{{y_A}^2 + L^2}}$$

De la ecuación de ligadura, podemos hallar una relación entre ambas aceleraciones:

$$\begin{aligned}
\sqrt{{y_A}^2 + L^2} + 2y_B &= L_0 \qquad \Big/ \frac{d}{dt} \\
\frac{y_A\, v_A}{\sqrt{{y_A}^2 + L^2}} + 2v_B &= 0 \\
\cos\theta\, v_A + 2v_B &= 0 \qquad \Big/ \frac{d}{dt} \\
\cos\theta\, a_A + \frac{d\cos\theta}{dt} v_A + 2a_B &= 0
\end{aligned}$$

Reemplazando en $t = {t_0}^+$, y recordando que los cuerpos parten desde el reposo,

$$\begin{aligned}
\cos\theta\Big|_{t={t_0}^+} a_A({t_0}^+) + 2a_B({t_0}^+) &= 0 \\
\frac{a_A({t_0}^+)}{\sqrt{2}} + 2a_B({t_0}^+) &=
\end{aligned}$$

Finalmente, y recordando que todos los observables están evaluados en el tiempo indicado,

$$\begin{aligned}
\frac{a_A}{\sqrt{2}} + 2a_B &= 0 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\left(g - \frac{T\sqrt{2}}{2m}\right) + 2\left(g - \frac{2T}{M}\right) &= \\
T &= \sqrt{2}Mmg\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{M+8m}\right)
\end{aligned}$$

Problema 2.49.
Para la situación descrita en el Problema 2.47, la aceleración del anillo en el instante ${t_0}^+$ (justo después de soltarlo) es:

a) $a_A = g\left(\frac{2\sqrt{2}M - 8m}{M+8m}\right)$

b) $a_A = g\left(\frac{8m + 2\sqrt{2}M}{M+8m}\right)$

c) $a_A = g\left(\dfrac{\sqrt{2}M - 4m}{M + 4m}\right)$

d) $a_A = g\left(\dfrac{\sqrt{2}M + 4m}{M + 4m}\right)$

e) $a_A = g\left(\dfrac{8m - 2\sqrt{2}M}{M + 8m}\right)$

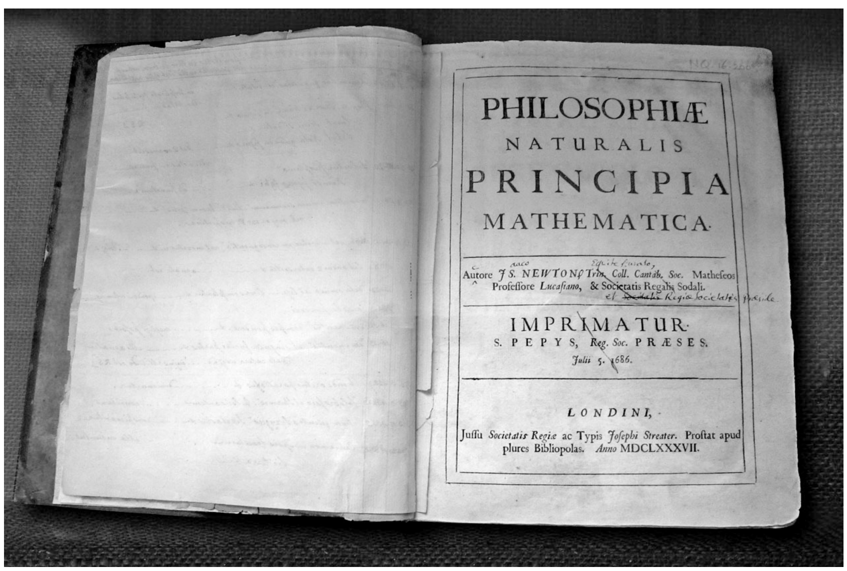
Solución:

Reemplazando en la ecuación de movimiento,

$$a_A = g - \frac{\sqrt{2}T}{2m} = g\left(\frac{8m - 2\sqrt{2}M}{M + 8m}\right)$$

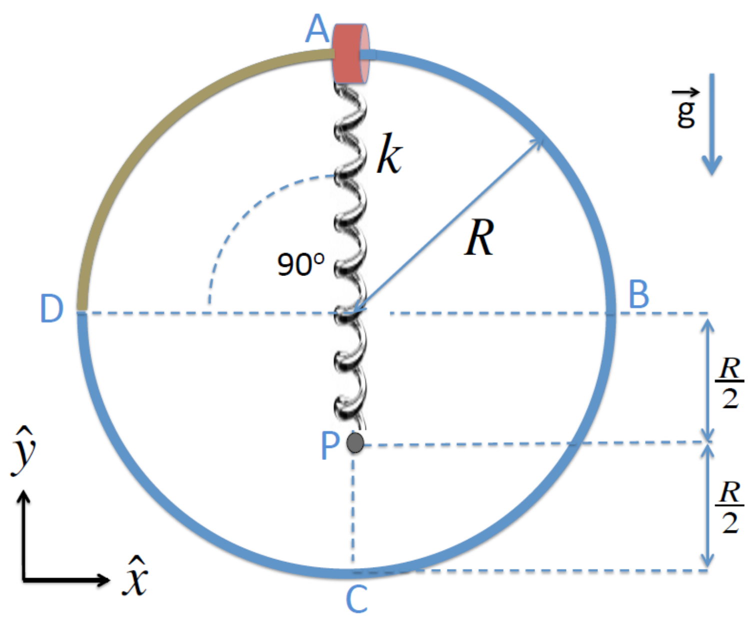
3

Trabajo y energía



Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 3.1.
Considere el sistema mostrado en la figura, en el cual una argolla de masa m parte desde el reposo en el punto A y se desliza por la guía circular (contenida en un plano vertical) bajo la influencia de su propio peso y del resorte de constante k de largo natural $R/2$. Considere que el segmento de arco $ABCD$ es libre de roce, pero el segmento DA tiene un coeficiente de roce cinético μ. La argolla comienza su movimiento desde el punto A con una velocidad $v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$, donde $v_0 > 0$. Considere que el resorte puede girar libremente respecto a un pivote ubicado en el punto fijo P.



¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la rapidez de la argolla al pasar por el punto C?

a) $\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{kR^2}{m} + 2Rg}$

b) $\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{9kR^2}{4m} + 2Rg}$

c) $\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{9kR^2}{4m} + 4Rg}$

d) $\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{9kR^2}{8m} + 4Rg}$

e) $\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{kR^2}{m} + 4Rg}$

Solución:

Como no existe roce entre los puntos A y C al avanzar a favor del las agujas del reloj, la energía mecánica se conserva: $E_A = E_C$. Así, tomando como nivel de energía potencial gravitacional cero al plano que pasa por el punto P,

$$\begin{aligned}
E_A &= K_A + {U_A}^{elastica} + {U_A}^{gravitacional} \\
&= \frac{m{v_0}^2}{2} + \frac{k(\ell_A - R/2)^2}{2} + mg(2R) \\
&= \frac{m{v_0}^2}{2} + \frac{kR^2}{2} + 2mgR
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_C &= K_C + {U_C}^{elastica} + {U_C}^{gravitacional} \\
&= \frac{m{v_C}^2}{2} + \frac{k(\ell_C - R/2)^2}{2} + mg(0) \\
&= \frac{m{v_C}^2}{2}
\end{aligned}$$

Igualando,

$$\sqrt{{v_0}^2 + \frac{kR^2}{m} + 4gR} = v_C$$

Problema 3.2.
Para la situación descrita en el Problema 3.1, el módulo de la fuerza que ejerce la guía circular sobre la argolla cuando pasa por el punto C es:

a) $5mg + kR + \frac{m{v_0}^2}{R}$

b) mg

c) $3mg$

d) $4mg + \frac{9kR}{4} + \frac{m{v_0}^2}{R}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En coordenadas polares, tomando como origen el centro de la circunferencia, la aceleración del anillo es:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Notar que:

$$\vec{r} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

y con ello $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$. Si nos ubicamos en el punto C, entonces

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \wedge \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el punto C,

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_{neta} \\ mR\dot{\theta}_C{}^2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + mR\ddot{\theta}_C\,\hat{\boldsymbol{\imath}} &= N_C\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{aligned}$$

donde no hemos considerado la fuerza del resorte pues este se encuentra en su largo natural, y N_C es la fuerza que ejerce la guía sobre la argolla en el punto C. Así,

$$N_C = mg + mR\dot{\theta}_C{}^2 = mg + \frac{m{v_C}^2}{R}$$

Del ejercicio anterior, podemos reemplazar el valor de la rapidez en C en término de variables conocidas del problema:

$$N_C = mg + \frac{m}{R}\left({v_0}^2 + \frac{kR^2}{m} + 4gR\right) = 5mg + kR + \frac{m{v_0}^2}{R}$$

Problema 3.3.
Para la situación descrita en el Problema 3.1, ¿cuál es el trabajo que realiza la fuerza de roce en el tramo DA, si la argolla pasa por el punto A por segunda vez con una velocidad $\frac{v_0}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (justo al comenzar la segunda vuelta)?

a) $-\frac{\pi}{4}R(kR + mg)$

b) $-\frac{5\pi}{4}R(kR + mg) + \frac{m{v_0}^2}{2}$

c) $-\frac{3m}{8}{v_0}^2$

d) $-\frac{\pi}{2}Rmg$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea A' un punto que coincide con el punto A, pero en el cual la rapidez del anillo es la mitad de la inicial. Por definición del trabajo realizado por la fuerza de roce,

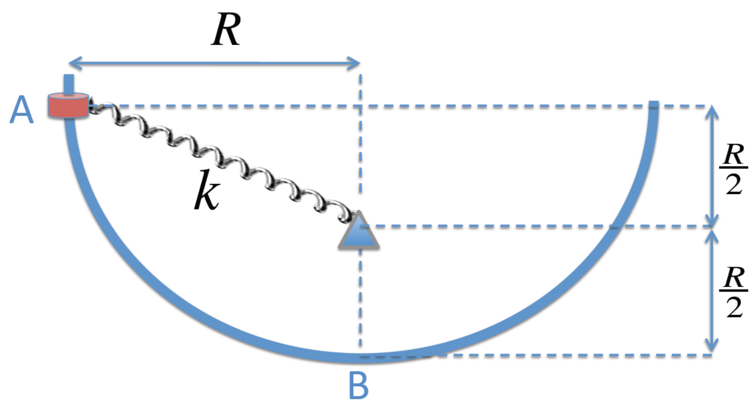
$$W_{roce} = E_{A'} - E_D = E_{A'} - E_A$$

ya que, por conservación de energía, se sabe que $E_D = E_A$. Como, en términos espaciales, los puntos A y A' son iguales, la diferencia de energía mecánica se reduce solo a la diferencia de energía potencial. Con ello,

$$W_{roce} = K_{A'} - K_A = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - {v_0}^2\right] = -\frac{3m{v_0}^2}{8}$$

Problema 3.4.

Considere el sistema mostrado en la figura, en el cual una argolla de masa m parte desde el reposo en A y se desliza siguiendo la guía semicircular lisa (contenida en un plano vertical) bajo la influencia de su propio peso y del resorte de constante elástica k y largo natural $R/2$.



¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la rapidez v_B de la argolla al pasar por el punto B?

a) $v_B = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}\frac{kR^2}{m} + Rg}$

b) $v_B = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\frac{kR^2}{m} + Rg}$

c) $v_B = \sqrt{\frac{5}{4}\frac{kR^2}{m} + Rg}$

d) $v_B = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\frac{kR^2}{m} + 2gR}$

e) $v_B = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}\frac{kR^2}{m} + 2gR}$

Solución:

Como no existe roce, la energía mecánica se conserva: $E_A = E_B$. Así, tomando como nivel de energía potencial gravitacional cero al plano que pasa por el punto B,

$$\begin{aligned} E_A &= K_A + U_A{}^{elastica} + U_A{}^{gravitacional} \\ &= \frac{k(\ell_A - R/2)^2}{2} + mgR \\ &= \frac{k(\sqrt{5}-1)^2R^2}{8} + mgR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_B &= K_B + U_B{}^{elastica} + U_B{}^{gravitacional} \\ &= \frac{m{v_B}^2}{2} \end{aligned}$$

Igualando,

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\frac{kR^2}{m}+2gR}=v_B$$

Problema 3.5.
Para la situación descrita en el Problema 3.4, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo N_B de la fuerza que ejerce la guía semicircular sobre la argolla cuando pasa por el punto B?

a) $N_B = mg$

b) $N_B = 3mg$

c) $N_B = mg - \dfrac{kR}{2}$

d) $N_B = 3mg - \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}kR$

e) $N_B = 3mg + \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}kR$

Solución:

En coordenadas polares, tomando como origen el centro de la semicircunferencia, la aceleración del anillo es:

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}=-R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Notar que:

$$\vec{r}=R\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\qquad\longrightarrow\qquad\vec{v}=R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}=v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

y con ello $\dot{\theta}=\dfrac{v}{R}$. Si nos ubicamos en el punto B, entonces

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}=-\hat{\boldsymbol{\jmath}}\qquad\wedge\qquad\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el punto B,

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_{neta}\\ mR\dot{\theta}_B{}^2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}+mR\ddot{\theta}_B\,\hat{\boldsymbol{\imath}} &= N_B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}-mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\end{aligned}$$

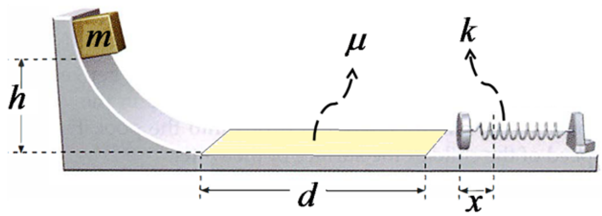
donde no hemos considerado la fuerza del resorte pues este se encuentra en su largo natural. Así,

$$N_B=mg+mR\dot{\theta}_B{}^2=mg+\frac{mv_B{}^2}{R}$$

Del ejercicio anterior, podemos reemplazar el valor de la rapidez en B en término de variables conocidas del problema:

$$N_C=mg+\frac{m}{R}\left(\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\frac{kR^2}{m}+2gR\right)=3mg+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}kR$$

Problema 3.6.
Un bloque de masa m se desliza por una rampa curva sin fricción, partiendo del reposo a una altura h. Al finalizar la rampa, el bloque se desliza una distancia d por una superficie rugosa, cuyo coeficiente de fricción dinámica es μ. Luego de salir del camino rugoso, el bloque finalmente comprime una distancia x un resorte de coeficiente k y se detiene momentáneamente. ¿Cuál es el valor de x en término de los otros parámetros del problema?



a) $x = \sqrt{\dfrac{mg}{2k}(h + \mu d)}$

b) $x = \sqrt{\dfrac{2mg}{k}(h - \mu d)}$

c) $x = \sqrt{\dfrac{mg}{2k}(h - \mu d)}$

d) $x = \sqrt{\dfrac{2mg}{k}(h + \mu d)}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como el bloque m parte del reposo, su energía inicial es, simplemente, $E_i = mgh$. Notar que hemos fijado el nivel cero de energía potencial en el suelo. Al finalizar la rampa, como no hay roce, la energía se conserva. En el tramo rugoso, la fuerza de roce realiza un trabajo dado por:

$$W_{roce} = -f_r d = -\mu mgd$$

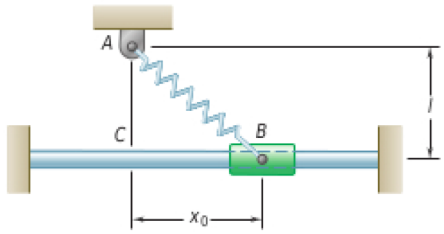
Así, la energía en el punto final del tramo rugoso es:

$$E_f = E_i + W_{roce} = mg(h - \mu d)$$

La compresión x máxima se consigue cuando el bloque alcanza el reposo, por lo que toda la energía se encuentra contenida en el resorte comprimido. Por tanto,

$$\frac{kx^2}{2} = mg(h - \mu d) \qquad \longrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2mg}{k}(h - \mu d)}$$

Problema 3.7.
El resorte AB, de constante elástica k y longitud natural ℓ, está unido al soporte A y al collar móvil B de masa m. La distancia entre los puntos A y C es igual a ℓ.



Conociendo que el collar se libera desde el reposo en $x = x_0$ y que el roce es despreciable, la magnitud de la velocidad del collar cuando pasa por el punto C es:

a) $\sqrt{\frac{k}{m}}\ell$

b) $\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{\ell^2 + {x_0}^2} - \ell\right)$

c) $\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{\ell^2 + {x_0}^2} - x_0\right)$

d) $\sqrt{\frac{k}{m}}x_0$

e) No se puede determinar

Solución:

Primero que todo, fijamos el nivel cero de energía potencial en la línea CB. Así, la energía mecánica en el punto B está dada por:

$$E_B = \frac{k}{2}\Big(\ell_B - \ell\Big)^2 = \frac{k}{2}\left(\sqrt{\ell^2 + {x_0}^2} - \ell\right)^2$$

Por otra parte, y dado que el resorte se encuentra en su largo natural, la energía mecánica en C solo posee una componente cinética:

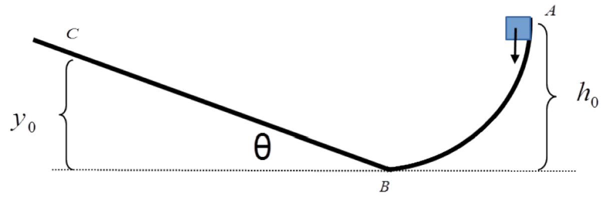
$$E_C = \frac{m}{2}{v_C}^2$$

Como no hay roce, la energía se conserva y por tanto:

$$E_B = E_C \qquad \longrightarrow \qquad v_C = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{\ell^2 + {x_0}^2} - \ell\right)$$

Problema 3.8.
Un bloque de masa m inicia su movimiento en el punto A a una altura h_0, partiendo desde el reposo, y

se desliza hacia abajo por un tramo de pista curva de fricción despreciable, la cual da paso (en el punto B) a un tramo de pista recto e inclinado con un coeficiente de roce cinético μ_c.



La rapidez v del bloque, al pasar por el punto B, es:

a) $v = 0$

b) $v = 2\sqrt{gh_0}$

c) $v = \sqrt{\dfrac{h_0}{2}}$

d) $v = \sqrt{2gh_0}$

e) $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{gh_0}$

Solución:

Fijando como nivel cero de energía potencial al suelo, la energía inicial del bloque en A es:

$$E_A = mgh_0$$

Por otra parte, en el punto B,

$$E_B = \frac{mv^2}{2}$$

Como no hay roce, la energía se conserva y, por tanto,

$$E_A = E_B \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh_0}$$

Problema 3.9.
Para la situación descrita en el Problema 3.8, la altura máxima y_0 que alcanza el bloque en el plano inclinado con roce es:

a) $y_0 = \dfrac{h_0 \tan\theta}{\mu_c}$

b) $y_0 = \dfrac{h_0}{1 + \mu_c \cot\theta}$

c) $y_0 = h_0$

d) $y_0 = \dfrac{h_0}{\sin\theta + \mu_c \cos\theta}$

e) $y_0 = \dfrac{h_0}{\cos\theta + \mu_c \sin\theta}$

Solución:

Sea d la distancia que recorre el bloque hasta detenerse. El trabajo realizado por la fuerza de roce en el trayecto es:

$$W_{roce} = -f_r d = -\mu_c N d = -\mu_c m g d \cos\theta$$

Por otra parte,

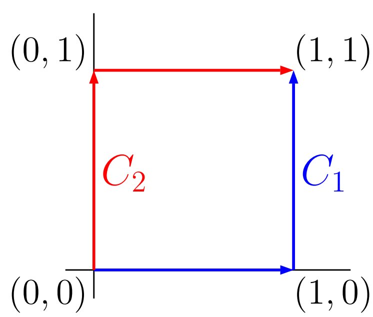
$$W_{roce} = mgy_0 - E_B = mgy_0 - E_A = mg(y_0 - h_0)$$

Igualando,

$$h_0 - y_0 = \mu_c d \cos\theta = \mu_c \left(\frac{y_0}{\sin\theta}\right)\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad y_0 = \frac{h_0}{1 + \mu_c \cot\theta}$$

Problema 3.10.

Considere la fuerza en dos dimensiones $\vec{F}(x,y) = (x^2, xy)$. Sean dos caminos C_1 y C_2 tal como se indica en la figura, los cuales conectan el origen con el punto $(1,1)$ en el plano.



El trabajo W_1 hecho por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de C_1 es:

a) $W_1 = 0$

b) $W_1 = \dfrac{1}{2}$

c) $W_1 = \dfrac{1}{3}$

d) $W_1 = \dfrac{1}{6}$

e) $W_1 = \dfrac{5}{6}$

Solución:

La curva C_1 se puede parametrizar como dos segmentos rectos de ecuaciones:

$$C_1{}^{(1)} \;:\; \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \;,\; t \in [0,1] \qquad \wedge \quad C_1{}^{(2)} \;:\; \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \end{array} \;,\; t \in [0,1]$$

Así, el trabajo W_1 viene dado por:

$$W_1 = W_1{}^{(1)} + W_1{}^{(2)}$$

donde

$$\begin{aligned}
W_1{}^{(1)} &= \int\limits_{C_1{}^{(1)}} (x^2, xy) \cdot (dx, dy) \\
&= \int_0^1 x^2 \; dx + \int_0^1 xy \; dy \\
&= \int_0^1 t^2 \; dt + 0 \\
&= \frac{1}{3} \\
W_1{}^{(2)} &= \int\limits_{C_1{}^{(2)}} (x^2, xy) \cdot (dx, dy) \\
&= \int_0^1 x^2 \; dx + \int_0^1 xy \; dy \\
&= 0 + \int_0^1 t \; dt \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$W_1 = W_1{}^{(1)} + W_1{}^{(2)} = \frac{5}{6}$$

Problema 3.11.

Para la situación descrita en el Problema 3.10, el trabajo W_2 hecho por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de C_2 es:

a) $W_1 = 0$

b) $W_1 = \dfrac{1}{2}$

c) $W_1 = \dfrac{1}{3}$

d) $W_1 = \dfrac{1}{6}$

e) $W_1 = \dfrac{5}{6}$

Solución:

La curva C_2 se puede parametrizar como dos segmentos rectos de ecuaciones:

$$C_2{}^{(1)} \;:\; \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array} \;,\; t \in [0,1] \qquad \wedge \quad C_2{}^{(2)} \;:\; \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 \end{array} \;,\; t \in [0,1]$$

Así, el trabajo W_1 viene dado por:

$$W_2 = W_2{}^{(1)} + W_2{}^{(2)}$$

donde

$$\begin{aligned} W_2{}^{(1)} &= \int_{C_2{}^{(1)}} (x^2, xy) \cdot (dx, dy) \\ &= \int_0^1 x^2 \; dx + \int_0^1 xy \; dy \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2{}^{(2)} &= \int_{C_2{}^{(2)}} (x^2, xy) \cdot (dx, dy) \\ &= \int_0^1 x^2 \; dx + \int_0^1 xy \; dy \\ &= \int_0^1 t^2 \; dt + 0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$W_2 = W_2{}^{(1)} + W_2{}^{(2)} = \frac{1}{3}$$

Problema 3.12.
Ahora: si para un campo de fuerzas cualquiera $\vec{F}(x,y)$ se sabe que los trabajos W_1 y W_2 a lo largo de los caminos particulares C_1 y C_2 fuesen iguales, entonces se puede concluir que:

a) Ese campo de fuerza es conservativo

b) No se puede determinar si es conservativo solo con esa información

c) El campo de fuerzas es no conservativo

d) El trabajo a lo largo de cualquier otro camino entre el origen y $(1,1)$ debe ser también igual

e) Existe una función escalar ϕ tal que $\vec{F} = -\nabla phi$

Solución:

Para un campo de fuerza $\vec{F}$, son equivalentes los siguientes enunciados:

(1) El campo $\vec{F}$ es conservativo

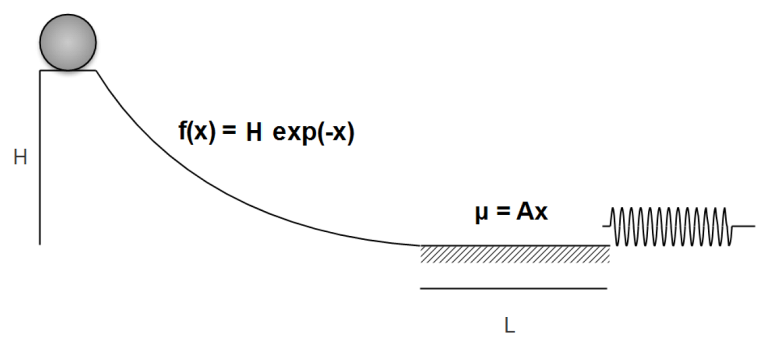
(2) Existe una función escalar ϕ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$

(3) El trabajo a lo largo de cualquier curva entre los puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el mismo

En este caso, saber que dos curvas que unen un mismo par de puntos poseen el mismo trabajo no es suficiente para afirmar que el campo es conservativo, pues dicha condición debe cumplirse para **todas** las curvas que conecten el mismo par de puntos.

Problema 3.13.

Una partícula puntual de masa m (NO es un sólido) se suelta desde el reposo sobre un superficie MUY larga sin roce, descrita por la función $y = f(x) = H\,e^{-x}$. Luego, entra en una zona plana de largo L con un coeficiente de roce variable, descrito por la función $\mu(x) = Ax$. Finalmente, al salir de la zona con roce, se encuentra un resorte de constante elástica k.



La rapidez de la partícula, en función de de la coordenada x, en la bajada sin roce es:

a) $v(x) = \sqrt{2g(H + e^{-x})}$

b) $v(x) = \sqrt{2g(H - e^{-x})}$

c) $v(x) = \sqrt{2gH(1 - e^{-x})}$

d) $v(x) = \sqrt{2gH(1 + e^{-x})}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de energía,

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
mgy(0) &= mgy(x) + \frac{mv(x)^2}{2} \\
\sqrt{2gH(1-e^{-x})} &= v(x)
\end{aligned}
$$

Problema 3.14.
Para la situación descrita en el Problema 3.13, calcule el trabajo realizado por la fuerza de roce en el tramo horizontal, luego que la partícula recorre una distancia L:

a) $W_r = \dfrac{AmgL^2}{2}$

b) $W_r = -\dfrac{AmgL^2}{2}$

c) $W_r = \dfrac{AmgL}{2}$

d) $W_r = -\dfrac{AmgL}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ corresponde a:

$$W = \int_{inicio}^{final} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $d\vec{r}$ es un diferencial de distancia que apunta en la dirección de movimiento; en este caso, $d\vec{r} = dx\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. La fuerza de roce, que se opone al movimiento, viene dada por:

$$\vec{F}_r = -\mu(x)N\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = -\mu(x)mg\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Con ello,

$$W_r = \int_0^L \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -\int_0^L Amg\,x\;dx = -\frac{AmgL^2}{2}$$

Problema 3.15.
Para la situación descrita en el Problema 3.13, calcule la compresión máxima del resorte:

a) $\Delta x = \sqrt{\dfrac{mg(2H + AL^2)}{k}}$

b) $\Delta x = \sqrt{\dfrac{mg(2H - AL^2)}{k}}$

c) $\Delta x = \sqrt{\dfrac{mg(H + AL^2)}{k}}$

d) $\Delta x = \sqrt{\dfrac{mg(H - AL^2)}{k}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La energía justo antes de golpear al resorte es:

$$E_i = mgy(0) + W_r = mgH - \frac{AmgL^2}{2} = \frac{mg}{2}\left(2H - AL^2\right)$$

La compresión es máxima cuando la rapidez de la partícula es nula, y por tanto:

$$E_f = \frac{k\Delta x^2}{2}$$

Por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad \Delta x = \sqrt{\frac{mg(2H - AL^2)}{k}}$$

Problema 3.16.
Para la situación descrita en el Problema 3.13, calcule la cantidad de energía disipada luego de pasar dos veces por la zona con roce, si $A = L^{-1}$:

a) $E_{dis} = \dfrac{mgL}{3}$

b) $E_{dis} = \dfrac{mgL}{2}$

c) $E_{dis} = 3mgL$

d) $E_{dis} = 2mgL$

e) $E_{dis} = mgL$

Solución:

Si pasa dos veces por la zona con roce, la energía disipada estará dada por:

$$E_{dis} = 2|W_r| = AmgL^2 = mgL$$

Problema 3.17.
Para la situación descrita en el Problema 3.13, suponga ahora que la partícula se devuelve debido a la fuerza de restauración del resorte. La altura máxima que alcanza la partícula, si $A = L^{-1}$ y $H = 2L$, es:

a) $h_f = L$

b) $h_f = \dfrac{2L}{3}$

c) $h_f = 0$

d) $h_f = \dfrac{L}{3}$

e) $h_f = \dfrac{L}{2}$

Solución:

La energía inicial del problema corresponde a la energía potencial que poseía la partícula:

$$E_i = mgy(0) = mgH = 2mgL$$

Como la partícula pasa dos veces por la zona de roce (de ida y de vuelta), perderá una cantidad de energía igual a lo calculado en el problema anterior:

$$E_{dis} = mgL$$

Finalmente, la altura máxima se alcanza cuando la partícula posee una rapidez nula:

$$E_f = mgh_f$$

Así,

$$E_f = E_i - E_{dis} \qquad \longrightarrow \qquad h_f = L$$

Problema 3.18.
Dos carros que tienen parachoques elásticos colisionan como muestra la figura. El carro A tiene 2 kg de masa y está inicialmente moviéndose hacia la derecha. El carro B tiene 3 kg de masa y está inicialmente en reposo.

Cuando la separación entre los carros es mínima se cumple que:

a) El carro B está aún en reposo

b) El carro A queda en reposo

c) Los carros tienen la misma energía cinética

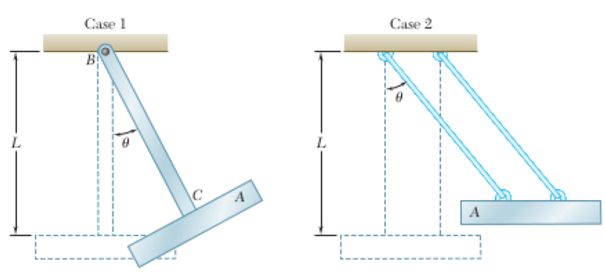
d) La energía cinética del sistema es mínima

e) La energía cinética del sistema es máxima

Solución:

La energía total del sistema en este caso tiene dos componentes, la energía cinética y la energía potencial elástica. Cuando la separación entre los carros es mínima, la deformación del resorte es máxima y, por ende, la energía potencial elástica es máxima. Entonces, para un dado valor de energía total, la energía cinética del sistema (los dos carros) es mínima.

Problema 3.19.
Una barra A rígidamente unida a una varilla BC sin masa será el caso 1 a estudiar. El caso 2 consiste en la misma barra A, pero que cuelga mediante dos cuerdas sin masa como se muestra en la figura. El grosor de la barra A es despreciable comparado con L. En ambos casos, A es liberado del reposo en un ángulo θ_0.



Cuando $\theta = 0$, ¿cuál de los dos sistemas tendrá mayor energía cinética?

a) Caso 1

b) Caso 2

c) La energía cinética es la misma en ambos casos

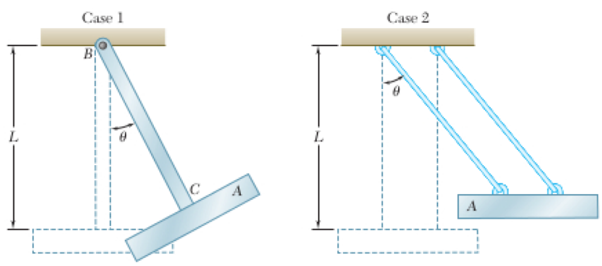
d) No se puede establecer

e) Depende de como se inicie el movimiento

Solución:

En las dos situaciones, la diferencia de altura del centro de masa de la barra A entre la posición inicial, θ_0, y cuando $\theta = 0$ es la misma. Por tanto, la variación de energía potencial gravitatoria en ambos casos es igual y, como la energía total se conserva, la variación de energía cinética también es igual en cada una de las situaciones. Si la velocidad inicial de la varilla es cero en los dos casos, la energía cinética es la misma en ambos casos.

Problema 3.20.
Una masa m se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. La masa está conectada a un resorte de constante elástica k y largo natural ℓ, como se muestra en la figura. Llamaremos x a la distancia entre el soporte y la masa. Suponga primero que no existe roce entre la masa y la plataforma.



La energía potencial del sistema se puede escribir como:

a) $U(x) = \dfrac{k}{2}\Big((x-\ell)\sin\theta\Big)^2 + mgx\cos\theta$

b) $U(x) = \dfrac{k}{2}(x-\ell)^2 + mgx\cos\theta$

c) $U(x) = \dfrac{k}{2}\Big((x-\ell)\sin\theta\Big)^2 + mgx\sin\theta$

d) $U(x) = \dfrac{k}{2}(x-\ell)^2 + mgx\sin\theta$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Si x corresponde a la longitud del resorte, entonces la energía potencial elástica es, simplemente,

$$U_e = \frac{k}{2}(x-\ell)^2$$

Por otra parte, la altura h a la que se encuentra el bloque se relaciona con x mediante la ecuación $h = x\sin\theta$. Por tanto, la energía potencial gravitacional es

$$U_g = mgh = mgx\sin\theta$$

Finalmente, la energía potencial total está dada por:

$$U(x) = U_e + U_g = \frac{k}{2}(x-\ell)^2 + mgx\sin\theta$$

Problema 3.21.
Considere la situación descrita en el Problema 3.20. Suponga ahora que el resorte se comprime una distancia d (desde su largo natural) y se suelta desde el reposo. La velocidad de la masa m en función de su posición está dada por:

a) $v^2 = \dfrac{kd^2}{m} - \dfrac{k(x-\ell)^2}{m} + 2g(x+d-\ell)\sin\theta$

b) $v^2 = \dfrac{kd^2}{m} - \dfrac{k(x-\ell)^2}{m} - 2g(x+d-\ell)\cos\theta$

c) $v^2 = \dfrac{kd^2}{m} - \dfrac{k(x-\ell)^2}{m} - 2g(x+d-\ell)\sin\theta$

d) $v^2 = \dfrac{kd^2}{m} - \dfrac{k(x-\ell)^2}{m} + 2g(x+d-\ell)\cos\theta$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La energía inicial del sistema, cuando se encuentra comprimido una distancia $x_0 = \ell - d$ y en reposo es:

$$E_i = U(x_0) = \frac{kd^2}{2} + mg(\ell - d)\sin\theta$$

Cuando el bloque se suelta, la energía que adquiere posee una componente cinética y una componente potencial:

$$E_f = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}(x-\ell)^2 + mgx\sin\theta$$

Así, por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad v^2 = \frac{kd^2}{m} - \frac{k(x-\ell)^2}{m} - 2g(x+d-\ell)\sin\theta$$

Problema 3.22.
Considere la situación descrita en el Problema 3.20. Para el siguiente problema, suponga que existe un coeficiente de roce cinético μ_c entre la plataforma y la masa. Supongamos que, a partir de la situación planteada en el problema anterior, la masa comienza a subir a lo largo del plano inclinado. Durante el intervalo de tiempo en que la velocidad se mantiene en dirección hacia arriba del plano inclinado, la velocidad de la masa (que ahora llamamos V) está dada por:

a) $V^2 = v^2 - 2\mu_c g(x + d - \ell)\cos\theta$

b) $V^2 = v^2 - 2\mu_c g(x + d - \ell)\sin\theta$

c) $V^2 = v^2 + 2\mu_c g(x + d - \ell)\cos\theta$

d) $V^2 = v^2 + 2\mu_c g(x + d - \ell)\sin\theta$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

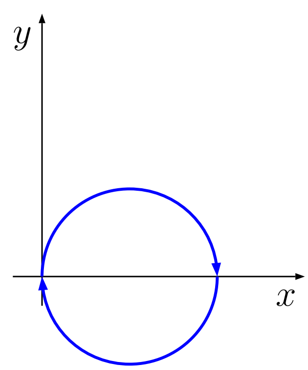
Supongamos que el bloque se encuentra a una distancia x del origen del sistema de referencia. Entonces, dicho bloque ha recorrido una distancia $L = x + d - \ell$. Así, la fuerza de roce realiza un trabajo igual a:

$$W_r = -f_r L = -\mu_c N L = -\mu_c mg(x + d - \ell)\cos\theta$$

En este caso, la energía final E_F es la misma energía E_f del problema anterior, cambiando v por V. Como $E_F = E_i + W_r$, la elación entre las velocidades es:

$$V^2 = v^2 - 2\mu_c g(x + d - \ell)\cos\theta$$

Problema 3.23.
Una partícula se mueve en presencia de una fuerza conservativa del tipo $\vec{F} = ax\,\hat{\imath} + ay\,\hat{\jmath}$, describiendo un movimiento circular de radio R (ver figura). Note que el punto A corresponde al origen.



El trabajo W_1 realizado por la fuerza $\vec{F}$ cuando la partícula se desplaza desde el punto A hasta B es:

a) $W_1 = 0$

b) $W_1 = 2aR^2$

c) $W_1 = aR^2$

d) $W_1 = \dfrac{aR^2}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como es campo de fuerzas $\vec{F}$ es conservativo, entonces existe una función $\phi(x,y)$ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$ y, por tanto,

$$W_1 = \phi(0,0) - \phi(2R,0)$$

¿Cómo hallamos dicha función escalar? Notemos que:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ ax &= \qquad \Big/ \int () \; dx \\ -\frac{ax^2}{2} + h(y) &= \phi \end{aligned}$$

donde, en vez de una constante de integración, aparece una función que depende de y y que se comporta como constante ante la derivación parcial. Por otra parte,

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ ay &= -h'(y) \qquad \Big/ \int () \; dy \\ -\frac{ay^2}{2} + C &= h(y) \end{aligned}$$

Por tanto, el potencial asociado a este campo de fuerzas es:

$$\phi(x,y) = -\frac{a}{2}(x^2+y^2) + C$$

Finalmente, evaluando en los puntos correspondientes,

$$W_1 = 2aR^2$$

Problema 3.24.

Para la situación descrita en el Problema 3.23, el trabajo W_2 realizado por la fuerza $\vec{F}$ cuando la partícula da una vuelta completa y regresa al punto A es:

a) $W_2 = 0$

b) $W_2 = 2aR^2$

c) $W_2 = aR^2$

d) $W_2 = \dfrac{aR^2}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

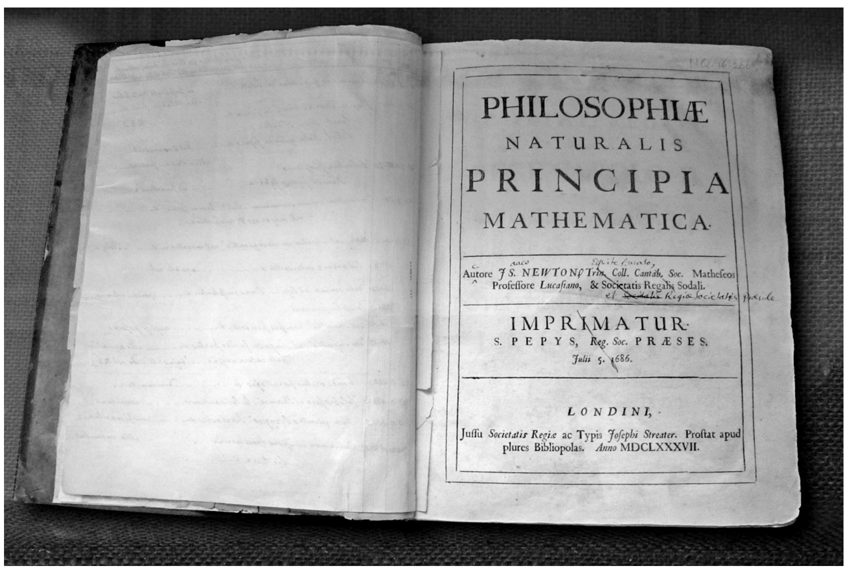
Solución:

Como el punto de inicio y el final son los mismos, digamos (x_0, y_0), entonces el trabajo es:

$$W_2 = \phi(x_0, y_0) - \phi(x_0, y_0) = 0$$

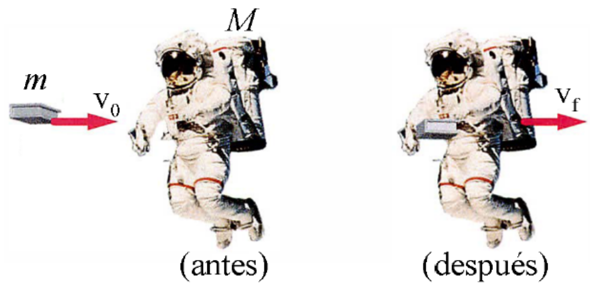
4

Conservación de momentum y colisiones



Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 4.1.
Un astronauta de masa M está en el espacio, en reposo con respecto a su nave espacial. Un objeto de masa m viaja en línea recta con una velocidad constante, v_0, respecto a la nave espacial. El astronauta en reposo, en una maniobra arriesgada, logra atrapar el objeto y no lo deja escapar.



¿Qué velocidad v_f adquiere el astronauta, con respecto a la nave espacial, después de haber atrapado el objeto?

a) $v_f = \left(\dfrac{M}{m+M}\right) v_0$

b) $v_f = \left(\dfrac{m}{m+M}\right) v_0$

c) $v_f = \left(\dfrac{M-m}{m+M}\right) v_0$

d) $v_f = \left(\dfrac{2m+M}{M}\right) v_0$

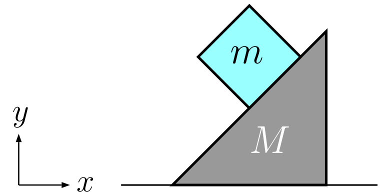
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Dado que no hay fuerzas externas en el sistema m/M, el momentum lineal se conserva:

$$\begin{aligned} p_{inicial} &= p_{final} \\ mv_0 &= Mv_f + mv_f \qquad \text{(pues los objetos quedan unidos)} \\ \frac{mv_0}{M+m} &= v_f \end{aligned}$$

Problema 4.2.
Una cuña con masa $M = 10\,\text{kg}$ de reposa sobre una superficie horizontal sin roce, como muestra la figura. Un bloque de masa $m = 5\,\text{kg}$ parte del reposo y desliza hacia abajo sobre la superficie inclinada de la cuña, la cual tiene roce.



En el instante en que la componente vertical de la velocidad del bloque es $3\,\mathrm{m/s}$ hacia abajo y la componente horizontal es $6\,\mathrm{m/s}$ hacia la izquierda, ¿cuál es la velocidad de la cuña?

a) $3\,\mathrm{m/s}$ hacia la izquierda

b) $3\,\mathrm{m/s}$ hacia la derecha

c) $6\,\mathrm{m/s}$ hacia la derecha

d) $6\,\mathrm{m/s}$ hacia la izquierda

e) $12\,\mathrm{m/s}$ hacia la derecha

Solución:

Para encontrar lo pedido de forma rápida podemos aplicar conservación de momentum, pero debemos ser cuidadosos. Para aplicar este principio, hay que reconocer las fuerzas que actúan sobre el sistema, y determinar cuáles de ellas son externas. Por una parte, tenemos la acción de la gravedad sobre el bloque y la cuña, la normal entre ambos cuerpos, y la reacción del suelo sobre la cuña. En ausencia de roce entre la cuña y el suelo, la normal entre cuña y bloque va a producir que ambos cuerpos se muevan en sentidos opuestos a lo largo de la dirección paralela al suelo. Lo importante es reconocer que la normal entre ambos cuerpos es una fuerza interna del sistema, la cual (por tercera ley de Newton) no aporta en la variación neta de momentum del sistema. En cambio la gravedad, siempre actuando vertical, producirá una variación del momentum en dicha dirección, mientras que el momentum en la dirección paralela al suelo permanece constante porque no hay fuerzas externas actuando en esa dirección. Es importante destacar que si hubiera roce en el suelo entonces habría que contar dicha fuerza. Aplicando conservación de momentum en la dirección paralela al suelo, vemos que:

$$\vec{p}_i = \vec{0} = \vec{p}_f = M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = \Big(Mv_1 + mv_2\Big)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

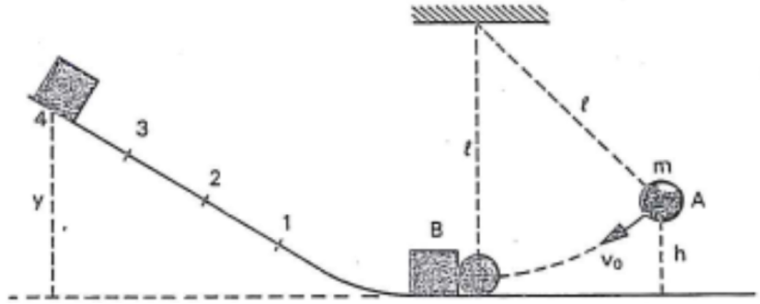
en donde el momentum inicial en la dirección mencionada es nulo pues todo parte en reposo. Con ello,

$$v_1 = -\left(\frac{m}{M}\right) v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$$

y va hacia la derecha.

Problema 4.3.

Una esfera A de masa m, amarrada en el extremo de un cordón de longitud ℓ, es lanzada de una altura h con rapidez inicial v_0, como muestra la figura. La esfera chocará elásticamente con un bloque B, también de masa m. Desprecie las fricciones y considere el plano horizontal, donde B se apoya inicialmente, como el nivel cero de energía potencial.



La energía E_A de la esfera y E_B del bloque, inmediatamente después del choque, son:

a) $E_A = 0$, $E_B = mgh$

b) $E_A = E_B = \dfrac{m{v_0}^2}{4} + \dfrac{mgh}{2}$

c) $E_A = 0$, $E_B = mg\ell$

d) $E_A = 0$, $E_B = \dfrac{m{v_0}^2}{2} + mgh$

e) $E_A = 0$, $E_B = \dfrac{m{v_0}^2}{2} + mg\ell$

Solución:

En el tramo antes del choque, la energía se conserva para la esfera. Como el choque es elástico, la energía también se conserva durante la colisión. Así, la energía total del sistema antes/después del choque es:

$$E_{total} = {E_A}^{inicial} = \frac{m{v_0}^2}{2} + mgh$$

La esfera A, justo antes de colisionar con el bloque B, solo posee energía cinética (pues se encuentra a nivel de suelo). Llamemos v a la rapidez correspondiente a dicha energía. Por conservación de momentum durante la colisión,

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ mv &= mv_A + mv_B \\ v &= v_A + v_B \\ (*)\ v - v_A &= v_B \end{aligned}$$

Usando conservación de energía durante el choque,

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{mv^2}{2} &= \frac{m{v_A}^2}{2} + \frac{m{v_B}^2}{2} \\ v^2 &= {v_A}^2 + {v_B}^2 \\ v^2 - {v_A}^2 &= {v_B}^2 \\ (v - v_A)(v + v_A) &= \end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación $(*)$ y simplificando,

$$(**)\ v + v_A = v_B$$

De $(*), (**)$, obtenemos que:

$$v_A = 0 \qquad \wedge \qquad v_B = v$$

Finalmente, dado que la esfera A tiene rapidez nula y se encuentra a nivel de suelo, $E_A = 0$. Como la energía se conserva, se debe cumplir que $E_B = E_{total}$, lo que completa lo pedido.

Problema 4.4.
Considere la situación descrita en el Problema 4.3. Después del choque, el bloque B alcanzará (sobre la rampa) una altura máxima y tal que:

a) $y = h$

b) $y = \dfrac{{v_0}^2}{2g}$

c) $y = \ell$

d) $y = \ell + \dfrac{{v_0}^2}{2g}$

e) $y = h + \dfrac{{v_0}^2}{2g}$

Solución:

Por conservación de energía,

$$mgy = E_B = E_{total} = \frac{m{v_0}^2}{2} + mgh \qquad \longrightarrow \qquad y = h + \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Problema 4.5.
Considere la situación descrita en el Problema 4.3. Suponiendo ahora que la esfera A se deja caer desde el reposo, ¿desde qué altura h' debiese caer para que adquiera la misma energía total que en la situación planteada inicialmente, justo antes de chocar con el bloque B?

a) $h' = h$

b) $h' = \ell$

c) $h' = \ell + \dfrac{{v_0}^2}{2g}$

d) $h' = h + \frac{{v_0}^2}{2g}$

e) No se puede determinar

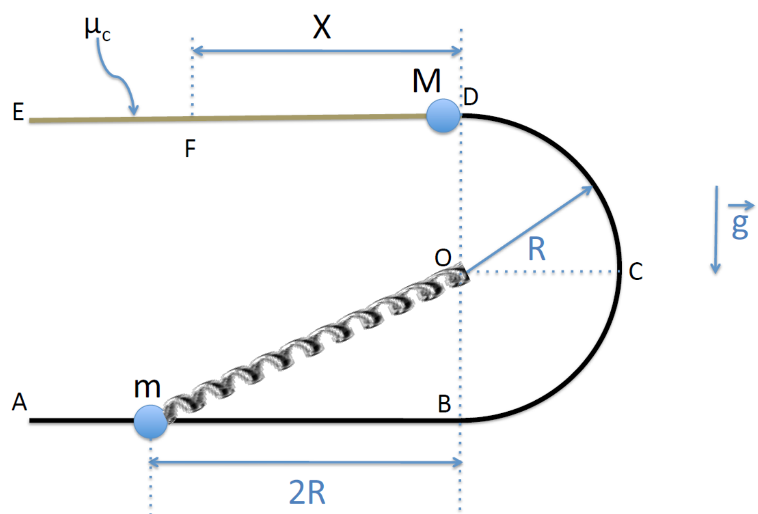
Solución:

Por conservación de energía,

$$mgh' = E_{total} = \frac{m{v_0}^2}{2} + mgh \qquad \longrightarrow \qquad h' = h + \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Problema 4.6.

Considere el sistema mostrado en la figura, el cual consiste de una guía metálica $ABCDE$ por la cual se desplazan argollas de masa m y M, las que para efectos de este problema pueden ser consideradas como cuerpos puntuales. La argolla de masa m está ligada a un resorte de masa despreciable, constante elástica k y largo natural R, el cual está pivotado en un soporte fijo ubicado en el punto O. El tramo recto AB de la guía y el semicircular BCD (de radio R) están libre de roce, sin embargo el tramo recto DE tiene un coeficiente de roce cinético μ_c. En cierto instante, el sistema se deja evolucionar libremente con las argollas ubicadas inicialmente en las posiciones mostradas en la figura.



Si U_i corresponde a la energía potencial elástica almacenada inicialmente en el resorte, el máximo valor posible de la masa m para que la correspondiente argolla llegue al punto D es:

a) $m_{max} = \frac{U_i}{4gR}$

b) $m_{max} = \frac{2U_i}{gR}$

c) $m_{max} = \frac{U_i}{gR}$

d) $m_{max} = \dfrac{U_i}{2gR}$

e) $m_{max} = \dfrac{4U_i}{gR}$

Solución:

Si tomamos asumimos que la energía potencial gravitacional es nula en el segmento AB, entonces la energía se conserva en el movimiento de la argolla: $E_{inicial} = E_{final}$. Como la argolla m parte del reposo, entonces:

$$E_{inicial} = U_i$$

Por otra parte, en el punto D, la energía viene dada por:

$$E_{final} = \frac{m{v_D}^2}{2} + 2mgR$$

Despejando la masa,

$$m = \frac{U_i}{{v_D}^2/2 + 2gR}$$

que será máxima cuando la velocidad en el punto D sea nula. Así,

$$m_{max} = \frac{U_i}{2gR}$$

Problema 4.7.

Para la situación descrita en el Problema 4.6, considere que el valor de m es tal que la argolla pasa por C con una rapidez distinta de cero. El módulo N_C de la fuerza que la guía semicircular ejerce sobre la argolla de masa m cuando pasa por el punto C es:

a) $N_C = \dfrac{U_i}{2R}$

b) $N_C = mg$

c) $N_C = 2\left(\dfrac{U_i}{R} - mg\right)$

d) $N_C = 0$

e) No se puede determinar

Solución:

En coordenadas polares, tomando como origen el punto O, la aceleración de la argolla es:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Notar que:

$$\vec{r} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

y con ello $\dot{\theta} = \dfrac{v}{R}$. Si nos ubicamos en el punto C, entonces

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \wedge \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el punto C,

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_{neta} \\ -mR\dot{\theta}_C{}^2\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + mR\ddot{\theta}_C\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} &= -N_C\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{aligned}$$

donde no hemos considerado la fuerza del resorte pues este se encuentra en su largo natural. Así,

$$N_C = mR\dot{\theta}_C{}^2 = \frac{mv_C{}^2}{R}$$

Por conservación de energía,

$$\begin{aligned} E_{inicial} &= E_{final} \\ U_i &= mgR + \frac{mv_C{}^2}{2} \\ \frac{2U_i}{m} - 2gR &= v_C{}^2 \end{aligned}$$

Con ello, podemos reemplazar el valor de la rapidez en C en término de variables conocidas del problema:

$$N_C = \frac{m}{R}\left(\frac{2U_i}{m} - 2gR\right) = \frac{2U_i}{R} - 2mg = 2\left(\frac{U_i}{R} - mg\right)$$

Problema 4.8.
Para la situación descrita en el Problema 4.6, considere ahora que $M = m$. La rapidez v_M que adquiere la argolla de masa M, inicialmente en reposo, justo después de que la argolla de masa m la choca elásticamente es:

a) $v_M = \sqrt{\dfrac{2U_i}{m} - 4gR}$

b) $v_M = \sqrt{\dfrac{U_i}{m} - gR}$

c) $v_M = \sqrt{\dfrac{2U_i}{m} - 2gR}$

d) $v_M = \sqrt{\dfrac{U_i}{4m} - \dfrac{gR}{2}}$

e) $v_M = \sqrt{\dfrac{U_i}{4m} - gR}$

Solución:

Sean v_m y v_M los módulos de las velocidades de las respectivas argollas en el instante posterior al choque, y v_D la rapidez de la argolla m justo antes del choque. Por conservación de momentum,

$$\begin{aligned} mv_D &= mv_m + Mv_M \\ v_D &= v_m + v_M \\ (*)\ v_D - v_m &= v_M \end{aligned}$$

Como el choque es elástico, la energía se conserva. Así,

$$\begin{aligned} \frac{m{v_D}^2}{2} &= \frac{m{v_m}^2}{2} + \frac{M{v_M}^2}{2} \\ {v_D}^2 &= {v_m}^2 + {v_M}^2 \\ {v_D}^2 - {v_m}^2 &= {v_M}^2 \\ (v_D + v_m)(v_D - v_m) &= \end{aligned}$$

Reemplazando $(*)$ en la última ecuación y simplificando,

$$(**)\ v_D + v_m = v_M$$

Por $(*)$ y $(**)$, se tiene que:

$$v_m = 0 \qquad \wedge \qquad v_M = v_D$$

Para hallar el valor de v_D, utilizamos conservación de energía nuevamente:

$$U_i = \frac{m{v_D}^2}{2} + 2mgR$$

Finalmente,

$$v_M = \sqrt{\frac{2U_i}{m} + 4gR}$$

Problema 4.9.
Para la situación descrita en el Problema 4.6, nuevamente considere que $M = m$. La distancia X que recorre la argolla de masa M, luego de ser impactada por la argolla de masa m, hasta que alcanza nuevamente el estado de reposo es:

a) $X = \dfrac{U_i}{\mu_c mg}$

b) $X = \dfrac{U_i}{\mu_c mg} - \dfrac{2R}{\mu_c}$

c) $X = 2R$

d) $X = \dfrac{U_i}{\mu_c mg} - \left(\dfrac{5}{2} - \sqrt{5}\right) R$

e) $X = R$

Solución:

En el tramo DE, la fuerza normal que ejerce la guía sobre la argolla de masa M es igual al peso de la misma:

$$N_{DE} = Mg$$

El trabajo realizado por la fuerza de roce es, en valor absoluto,

$$|W_{roce}| = \mu_c N_{DE} X = \mu_c mgX$$

Al mismo tiempo, se sabe que:

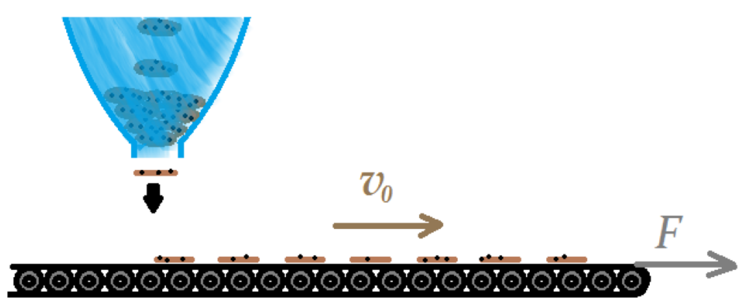
$$|W_{roce}| = |E_{final} - E_{inicial}| = \frac{m{v_M}^2}{2}$$

Finalmente, igualando,

$$X = \frac{{v_M}^2}{2\mu_c g} = \frac{U_i}{\mu_c mg} - \frac{2R}{\mu_c}$$

Problema 4.10.

Una fábrica de galletas utiliza una correa transportadora (ver figura), que se desplaza con rapidez constante v_0 al ser tirada por un motor que aplica una fuerza F. Suponga que cada galleta tiene una masa m, y la máquina descarga n galletas por unidad de tiempo sobre la correa.



La fuerza F que aplica el motor para tirar la correa con rapidez constante v_0 es:

a) $F = mv_0$

b) $F = m\dfrac{dv_0}{dt}$

c) $F = nmv_0$

d) $F = \dfrac{m}{n} v_0$

e) $F = \dfrac{dm}{dt} v_0$

Solución:

Por la segunda ley de Newton,

$$F = \frac{dp}{dt}$$

donde el momentum del sistema correa/galletas está dado por $p = Mv_0$, con M la masa del sistema. Entonces,

$$F = \frac{dM}{dt} v_0 = nmv_0$$

Problema 4.11.
En el Problema 4.10, la potencia P suministrada por el motor a la correa es:

a) $P = m{v_0}^2$

b) $P = \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} \left(m{v_0}^2 \right)$

c) $P = \dfrac{m}{n^2} {v_0}^2$

d) $P = nm{v_0}^2$

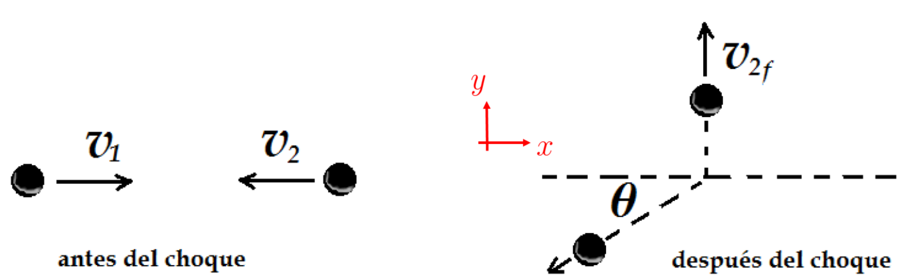
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

De la definición de potencia,

$$P = Fv_0 = nm{v_0}^2$$

Problema 4.12.
Dos partículas de masas $m_1 = m$ y $m_2 = 3m/2$ se desplazan una contra la otra con velocidades $v_1 = v$ y $v_2 = 2v$ como se muestra en la figura. Luego de chocar elásticamente entre ellas, la partícula 2 se mueve en dirección perpendicular a la línea de incidencia.



La rapidez final v_{2f} de la partícula 2 está dada por:

a) $v_{2f} = \sqrt{\frac{4}{5}}v$

b) $v_{2f} = \sqrt{\frac{3}{5}}v$

c) $v_{2f} = \sqrt{\frac{29}{5}}v$

d) $v_{2f} = 0$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de momentum,

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\imath}}:} \qquad \begin{aligned} p_i{}^x &= p_f{}^x \\ m_1v_1 - m_2v_2 &= -m_1v_{1f}\cos\theta \\ 2v &= v_{1f}\cos\theta \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\jmath}}:} \qquad \begin{aligned} p_i{}^y &= p_f{}^y \\ 0 &= m_2v_{2f} - m_1v_{1f}\sin\theta \\ \frac{3v_{2f}}{2} &= v_{1f}\sin\theta \qquad (2) \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y sumando las últimas expresiones:

$$v_{1f}{}^2 = 4v^2 + \frac{9}{4}v_{2f}{}^2$$

Como el choque es elástico, la energía se conserva:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{m_1v_1{}^2}{2} + \frac{m_2v_2{}^2}{2} &= \frac{m_1v_{1f}{}^2}{2} + \frac{m_2v_{2f}{}^2}{2} \\ \frac{7mv^2}{2} &= \frac{mv_{1f}{}^2}{2} + \frac{3mv_{2f}{}^2}{4} \\ 14v^2 &= 2v_{1f}{}^2 + 3v_{2f}{}^2 \\ &= 2\left(4v^2 + \frac{9}{4}v_{2f}{}^2\right) + 3v_{2f}{}^2 \\ \sqrt{\frac{4}{5}}v &= v_{2f} \end{aligned}$$

Problema 4.13.
Para la situación descrita en el Problema 4.12, el ángulo θ con que sale la partícula 1 después del choque es tal que:

a) $\tan\theta = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}$

b) $\theta = 90°$

c) $\tan\theta = \sqrt{\frac{4}{5}}$

d) $\tan\theta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{5}}$

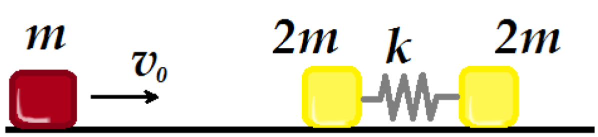
e) $\theta = 0°$

Solución:

Dividiendo la ecuación (2) por la ecuación (1), obtenemos que:

$$\tan\theta = \frac{3v_{2f}}{4v} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}$$

Problema 4.14.
Considere el sistema compuesto por dos bloques iguales de masas $2m$ unidos por un resorte de constante elástica k (ver figura). Inicialmente el sistema descansa en reposo sobre una superficie horizontal sin roce y el resorte se encuentra en su largo natural. Desde la izquierda, un tercer bloque de masa m avanza con rapidez v_0 y choca al sistema.



Después del choque, la rapidez del centro de masa V_{cm} del sistema de dos bloques es:

a) $V_{cm} = 0$

b) $V_{cm} = \frac{2v_0}{3}$

c) $V_{cm} = \frac{v_0}{3}$

d) $V_{cm} = v_0$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de momentum, en el choque entre los bloques m y $2m$, tenemos que:

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ mv_0 &= mv_m + 2mv_{2m} \\ v_0 &= v_m + 2v_{2m} \\ (*)\ v_0 - v_m &= 2v_{2m} \end{aligned}$$

De la conservación de energía (por ser un choque elástico),

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{m{v_0}^2}{2} &= \frac{m{v_m}^2}{2} + m{v_{2m}}^2 \\ {v_0}^2 &= {v_m}^2 + 2{v_{2m}}^2 \\ {v_0}^2 - {v_m}^2 &= 2{v_{2m}}^2 \\ (v_0 - v_m)(v_0 + v_m) &= \end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación $(*)$ en la última línea, y simplificando,

$$(**)\ v_0 + v_m = v_{2m}$$

De $(*)$ y $(*)$,

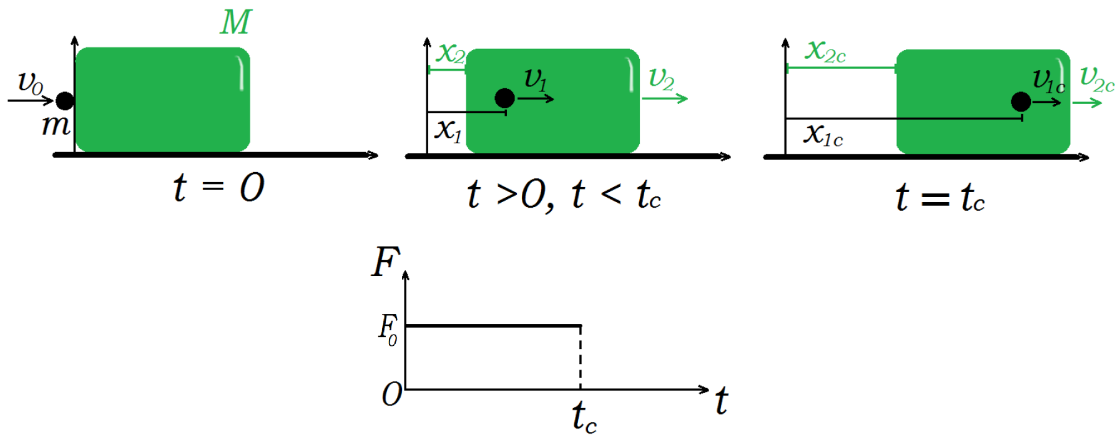
$$v_m = -\frac{v_0}{3} \qquad \wedge \qquad v_{2m} = \frac{2v_0}{3}$$

Finalmente, la rapidez del centro de masa del sistema unido por el resorte es:

$$V_{cm} = \frac{2m\left(\frac{2v_0}{3}\right) + 0}{2m + 2m} = \frac{v_0}{3}$$

Problema 4.15.

Considere un sistema aislado (desprecie el efecto de la gravedad) formado por una bala de masa m con rapidez inicial v_0 y un bloque de masa M que descansa sobre una superficie sin fricción, como se muestra en la figura. La bala se dispara horizontalmente contra una de las caras del bloque a lo largo de la línea que pasa por su centro de masa. La bala penetra el bloque una cierta distancia d antes de detenerse con respecto al bloque. El choque dura un tiempo finito t_c y la bala ejerce una fuerza de magnitud constante F_0 sobre el bloque (ver figura).



Suponga que $t_c = 0$ (el choque es perfectamente elástico). ¿Cuáles son los módulos de las velocidades de la bala (v_1) y del bloque (v_2) después del choque?

a) $v_1 = \frac{1 - M/m}{1 + M/m} v_0 \ , \quad v_2 = \frac{2}{1 + M/m} v_0$

b) $v_1 = \frac{1 + M/m}{1 - M/m} v_0 \ , \quad v_2 = \frac{2}{1 - M/m} v_0$

c) $v_1 = \frac{2}{1 - M/m} v_0 \ , \quad v_2 = \frac{1 + M/m}{1 - M/m} v_0$

d) $v_1 = \frac{2}{1 + M/m} v_0 \ , \quad v_2 = \frac{1 - M/m}{1 + M/m} v_0$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como el choque es elástico, se conserva tanto momentum como energía:

$$\begin{aligned} m v_0 &= m v_1 + M v_2 \\ \frac{m {v_0}^2}{2} &= \frac{m {v_1}^2}{2} + \frac{M {v_2}^2}{2} \end{aligned}$$

Por simplicidad, definimos $r \equiv \dfrac{M}{m}$. Así, las ecuaciones anteriores toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_1 + r v_2 \\ {v_0}^2 &= {v_1}^2 + r {v_2}^2 \end{aligned}$$

De la primera ecuación,

$$(*)\ v_0 - v_1 = r v_2$$

De la segunda ecuación, reemplazando $(*)$ y simplificando,

$$\begin{aligned} {v_0}^2 - {v_1}^2 = (v_0 - v_1)(v_0 + v_1) &= r {v_2}^2 \\ (**)\ v_0 + v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

Juntando $(*)$ y $(**)$,

$$v_1 = \frac{1-r}{1+r} v_0 \qquad \wedge \qquad v_2 = \frac{2}{1+r} v_0$$

Problema 4.16.
Para la situación descrita en el Problema 4.15, suponga ahora que el tiempo de contacto es $t_c > 0$. Determine las velocidades de la bala (v_1) y del bloque (v_2) durante el choque, i.e. para un tiempo t tal que $0 < t < t_c$:

a) $v_1 = v_0 - \dfrac{F_0\, t}{m}$, $\quad v_2 = v_0 + \dfrac{F_0\, t}{m}$

b) $v_1 = v_0 + \dfrac{F_0\, t}{m}$, $\quad v_2 = \dfrac{M}{m} v_0 - \dfrac{F_0\, t}{M}$

c) $v_1 = v_0 - \left(\dfrac{1 - M/m}{1 + M/m}\right) \dfrac{F_0\, t}{m}$, $\quad v_2 = \left(\dfrac{2}{1 + M/m}\right) \dfrac{F_0\, t}{M}$

d) $v_1 = \left(\dfrac{1 + M/m}{1 - M/m}\right) v_0$, $\quad v_2 = \left(\dfrac{2}{1 + M/m}\right) \dfrac{F_0\, t}{m}$

e) $v_1 = v_0 - \dfrac{F_0\, t}{m}$, $\quad v_2 = \dfrac{F_0\, t}{M}$

Solución:

Ahora, sobre la bala se está ejerciendo una fuerza $\vec{F}$ producto de la interacción con el bloque:

$$\vec{F} = -F_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \longleftarrow \bullet \longrightarrow \vec{p}_1 = p_1\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = m v_1\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Por segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -F_0 \qquad \Big/ \int ()\ dt \\ p_1(t) &= -F_0\, t + C \end{aligned}$$

donde C es una constante de integración que podemos hallar evaluando condiciones iniciales:

$$p_1(0) = m v_0 = C \qquad \longrightarrow \qquad p_1(t) = m v_0 - F_0\, t$$

Como $p_1(t) = m v_1(t)$, entonces:

$$v_1(t) = v_0 - \frac{F_0\, t}{m}$$

Por conservación de momentum,

$$p_1(t) + p_2(t) = m v_0$$

y con ello podemos despejar el valor del velocidad del bloque:

$$v_2(t) = \frac{F_0\, t}{M}$$

Problema 4.17.
Considere la situación descrita en el Problema 4.15. ¿Cuál es el valor de t_c (tiempo que tarda la bala en penetrar el bloque), y la velocidad final $v_{1c} = v_1(t_c)$ de la bala con respecto al suelo?

a) $t_c = \dfrac{M^2 v_0}{(M+m)F_0}$, $\quad v_{1c} = \dfrac{M v_0}{M-m}$

b) $t_c = \dfrac{mMv_0}{(M+m)F_0}$, $\quad v_{1c} = \dfrac{mv_0}{M+m}$

c) $t_c = \dfrac{M(M+m)v_0}{mF_0}$, $\quad v_{1c} = \dfrac{(M+m)v_0}{M}$

d) $t_c = \dfrac{M(M-m)v_0}{(M+m)F_0}$, $\quad v_{1c} = \dfrac{(M-m)v_0}{M+m}$

e) $t_c = \dfrac{Mv_0}{F_0}$, $\quad v_{1c} = \dfrac{Mv_0}{M+m}$

Solución:

La bala se detendrá cuando la velocidad relativa entre bala y bloque sea cero, i.e. ambas velocidades con respecto al suelo sean iguales:

$$\begin{aligned} v_1(t_c) &= v_2(t_c) \\ v_0 - \frac{F_0\, t_c}{m} &= \frac{F_0\, t_c}{M} \\ t_c &= \frac{Mmv_0}{(M+m)F_0} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$v_{1c} = v_1(t_c) = \frac{mv_0}{M+m}$$

Problema 4.18.
Para la situación planteada en el Problema 4.15, ¿cuál es el desplazamiento con respecto al suelo de la bala (x_1), y del bloque (x_2) durante el choque?

a) $x_1 = v_0\, t + \dfrac{F_0\, t^2}{2m}$, $\quad x_2 = \dfrac{Mv_0\, t}{m} - \dfrac{F_0\, t^2}{2M}$

b) $x_1 = v_0\, t - \left(\dfrac{1 - M/m}{1 + M/m}\right) \dfrac{F_0\, t^2}{2m}$, $x_2 = \left(\dfrac{1}{1 + M/m}\right) \dfrac{F_0\, t^2}{m}$

c) $x_1 = v_0\, t - \dfrac{F_0\, t^2}{2m}$, $x_2 = \dfrac{F_0\, t^2}{2M}$

d) $x_1 = \left(\dfrac{1 + M/m}{1 - M/m}\right) v_0\, t$, $x_2 = \left(\dfrac{1}{1 + M/m}\right) \dfrac{F_0\, t^2}{m}$

e) $x_1 = v_0\, t - \dfrac{F_0\, t^2}{2m}$, $x_2 = \dfrac{F_0\, t^2}{2m}$

Solución:

Si integramos las velocidades, utilizando como condición inicial que $x_1(0) = x_2(0) = 0$, tendremos que:

$$x_1(t) = v_0\, t - \frac{F_0\, t^2}{2m} \qquad \wedge \qquad x_2(t) = \frac{F_0\, t^2}{2M}$$

Problema 4.19.
Para la situación planteada en el Problema 4.15, ¿qué distancia d penetra la bala dentro del bloque?

a) $d = v_0\, t_c + \dfrac{F_0\, {t_c}^2}{2} \left(\dfrac{M + m}{Mm}\right)$

b) $d = \left(\dfrac{m - M}{m}\right) v_0\, t_c + \dfrac{F_0\, {t_c}^2}{2} \left(\dfrac{M + m}{Mm}\right)$

c) $d = v_0\, t_c - \dfrac{F_0\, {t_c}^2}{2} \left(\dfrac{M/m}{1 + M/m}\right)$

d) $d = v_0\, t_c - \dfrac{F_0\, {t_c}^2}{2} \left(\dfrac{M + m}{Mm}\right)$

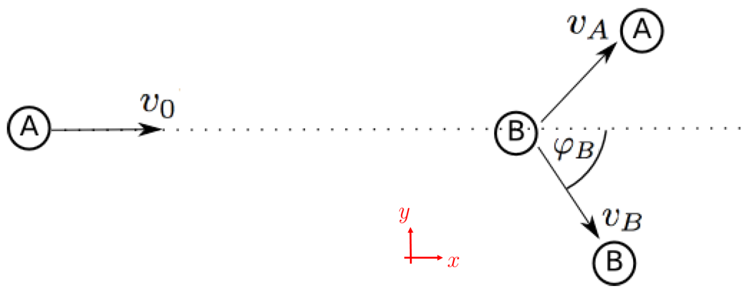
e) $d = \left(\dfrac{m - M}{m}\right) v_0\, t_c - \dfrac{F_0\, {t_c}^2}{2} \left(\dfrac{M + m}{Mm}\right)$

Solución:

La distancia de penetración corresponde a la diferencia entre las posiciones, relativas al suelo, de la bala y el bloque en t_c:

$$\begin{aligned} d &= x_1(t_c) - x_2(t_c) \\ &= v_0\, t_c - \frac{F_0\, {t_c}^2}{2m} - \frac{F_0\, {t_c}^2}{2M} \\ &= v_0\, t_c - \frac{F_0\, {t_c}^2}{2} \left(\frac{M + m}{Mm}\right) \end{aligned}$$

Problema 4.20.
En la figura se muestra una colisión en el espacio vacío. La partícula A, que tiene masa $2m$ y viaja inicialmente con rapidez v_0, colisiona con la partícula B de masa m inicialmente en reposo. Debido a la geometría bidimensional del choque, se observa que la partícula B sale en un ángulo φ_B respecto de la línea punteada en la figura: asuma este ángulo como un dato conocido. Asuma también que la colisión es perfectamente elástica.



Calcule la velocidad v_B como función únicamente de φ_B y v_0:

a) $v_B = v_0 \cos \varphi_B$

b) $v_B = v_0 \sin \varphi_B$

c) $v_B = \frac{4}{3} v_0 \sin \varphi_B$

d) $v_B = \frac{4}{3} v_0 \cos \varphi_B$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de energía, al tratarse de un choque elástico,

$$\begin{aligned} \frac{m_A {v_0}^2}{2} &= \frac{m_A {v_A}^2}{2} + \frac{m_B {v_B}^2}{2} \\ 2{v_0}^2 &= 2{v_A}^2 + {v_B}^2 \\ {v_0}^2 + \frac{{v_B}^2}{2} &= {v_A}^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Por conservación de momentum, siendo θ el ángulo entre la dirección de A y la línea punteada,

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\imath}}:} \qquad \begin{aligned} {p_i}^x &= {p_f}^x \\ 2mv_0 &= mv_B \cos \varphi_B + 2mv_A \cos \theta \\ 2v_0 - v_B \cos \varphi_B &= 2v_A \cos \theta \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\jmath}}:} \qquad \begin{aligned} {p_i}^y &= {p_f}^y \\ 0 &= 2mv_A \sin \theta - mv_B \sin \varphi_B \\ v_B \sin \varphi_B &= 2v_A \sin \theta \qquad (2) \end{aligned}$$

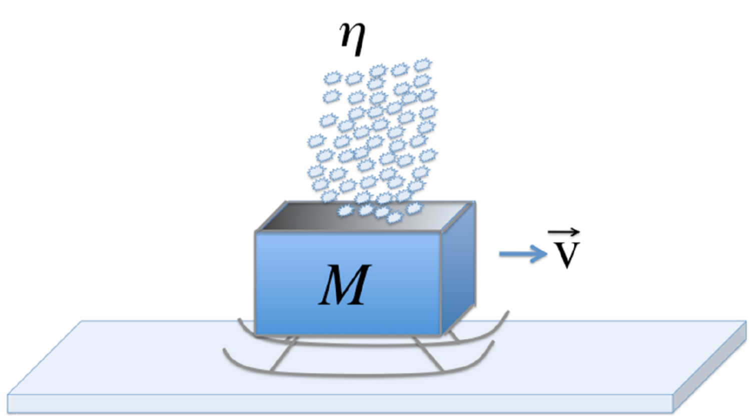
Elevando (1) y (2) al cuadrado y sumando,

$$\begin{aligned} 4{v_A}^2 \sin^2\theta &= {v_B}^2 v_B \sin^2\varphi_B \\ 4{v_A}^2 \cos^2\theta &= (2v_0 - v_B\cos\varphi_B)^2 \\ \\ 4{v_A}^2 &= 4{v_0}^2 - 4v_0 v_B \cos\varphi_B + {v_B}^2 \end{aligned}$$

Reemplazando $(*)$ en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} 4{v_0}^2 - 2{v_B}^2 &= 4{v_0}^2 - 4v_0 v_B\cos\varphi_B + {v_B}^2 \\ 4v_0 v_B \cos\varphi_B &= 3{v_B}^2 \\ \frac{4}{3} v_0 \cos\varphi_B &= v_B \end{aligned}$$

Problema 4.21.
Considere un trineo que está formado esencialmente por un cajón sin tapa de masa M, el cual se desplaza en línea recta por una pista horizontal libre de roce, con una rapidez inicial v_0. En cierto instante t_0 comienza a nevar, de manera tal que la nieve cae verticalmente y comienza a ingresar al trineo a una tasa constante η (masa de nieve por unidad de tiempo). Luego, en cierto instante t_f, la nevazón se acaba y el trineo continua en movimiento llevando consigo una masa M de nieve dentro de él.



Determine la rapidez v_f del trineo luego que deja de nevar:

a) $v_f = \dfrac{v_0}{2}$

b) $v_f = v_0 + \dfrac{\eta(t_f - t_0)v_0}{2M}$

c) $v_f = v_0 - \dfrac{\eta(t_f - t_0)v_0}{2M}$

d) $v_f = \dfrac{\eta(t_f - t_0)v_0}{M}$

e) $v_f = 2v_0$

Solución:

Notemos que, en la dirección paralela al suelo, el momentum del trineo en esa dirección se conserva pues no hay fuerzas actuando en dicha dirección. Distinto es el caso del momentum perpendicular al suelo, pero en este problema no nos interesa. Por conservación de momentum entre los instantes antes de nevar y justo después de finalizada la nevazón,

$$\begin{aligned} {p_i}^{(x)} &= {p_f}^{(x)} \\ Mv_0 &= 2Mv_f \\ \frac{v_0}{2} &= v_f \end{aligned}$$

Problema 4.22.
Para la situación descrita en el Problema 4.21, determine el módulo de la aceleración del trineo en un instante t durante la nevazón:

a) $a = \dfrac{v_0 M\eta}{\Big(M + \eta(t - t_0)\Big)^2}$

b) $a = \dfrac{v_0\eta}{M}$

c) $a = \left(\dfrac{\eta}{M} - \dfrac{1}{t - t_0}\right) v_0$

d) $a = \dfrac{v_0\eta}{2M}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para todo $t \in (t_0, t_f)$, la masa el carro estará dada por:

$$M(t) = M + m_{nieve}(t) = M + \eta(t - t_0)$$

Por conservación de momentum,

$$Mv_0 = M(t)v(t) \qquad \longrightarrow \qquad v(t) = \frac{Mv_0}{M(t)} = \frac{Mv_0}{M + \eta(t - t_0)}$$

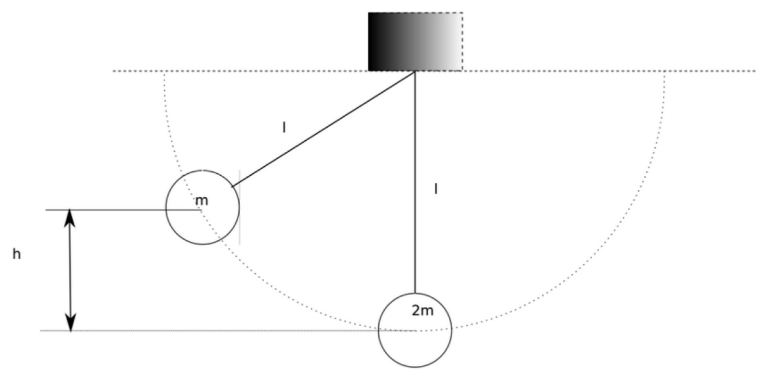
Así, la aceleración se obtiene al derivar con respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\frac{Mv_0\eta}{\Big(M + \eta(t - t_0)\Big)^2}$$

Finalmente, solo basta hacer

$$a = |a(t)| = \frac{Mv_0\eta}{\Big(M + \eta(t - t_0)\Big)^2}$$

Problema 4.23.
Considere el sistema propuesto en la figura. En ella, un péndulo de masa m y largo ℓ es soltado, partiendo del reposo, desde una altura h. Dicho objeto choca con un segundo péndulo de masa $2m$ y largo ℓ que también se encuentra en reposo. La rapidez con la que el primer péndulo colisiona con el segundo es $v = \sqrt{2g\ell}$.



Si la colisión es perfectamente elástica, las velocidades de ambos cuerpos, después de la colisión, son:

a) $v_m = \frac{2}{3}\sqrt{2g\ell}$, $\quad v_{2m} = -\frac{1}{3}\sqrt{2g\ell}$

b) $v_m = -\frac{2}{3}\sqrt{2g\ell}$, $\quad v_{2m} = \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell}$

c) $v_m = -\frac{1}{3}\sqrt{2g\ell}$, $\quad v_{2m} = \frac{2}{3}\sqrt{2g\ell}$

d) $v_m = \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell}$, $\quad v_{2m} = -\frac{2}{3}\sqrt{2g\ell}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de momentum,

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ mv &= mv_m + 2mv_{2m} \\ v &= v_m + 2v_{2m} \\ (*)\ v - v_m &= 2v_{2m} \end{aligned}$$

Como el choque es elástico,

$$\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{mv^2}{2} &= \frac{m{v_m}^2}{2} + \frac{(2m){v_{2m}}^2}{2} \\
v^2 &= {v_m}^2 + 2{v_{2m}}^2 \\
v^2 - {v_m}^2 &= 2{v_{2m}}^2 \\
(v + v_m)(v - v_m) &= 2{v_{2m}}^2
\end{aligned}$$

Así, utilizando $(*)$ y simplificando,

$$(**)\ v + v_m = v_{2m}$$

Finalmente, por $(*)$ y $(**)$,

$$v_m = -\frac{v}{3} \qquad \wedge \qquad v_{2m} = \frac{2v}{3}$$

Problema 4.24.
Para la situación descrita en el Problema 4.23, suponga ahora que, durante la colisión, ambos cuerpos quedan pegados de forma instantánea. La altura máxima que alcanzan después del choque es:

a) $h_{max} = h$

b) $h_{max} = \frac{h}{6}$

c) $h_{max} = \frac{h}{3}$

d) $h_{max} = \frac{h}{2}$

e) $h_{max} = \frac{h}{9}$

Por conservación de energía **antes** del choque, podemos hallar una relación entre ℓ y h:

$$\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
mgh &= \frac{mv^2}{2} = mg\ell \\
h &= \ell
\end{aligned}$$

Por conservación de momentum durante el choque, llamando V a la velocidad que lleva el sistema $m/2m$, tenemos que:

$$mv = (m + 2m)V \qquad \longrightarrow \qquad V = \frac{v}{3}$$

Ahora, la conservación de energía **después** del choque nos señala que:

$$\frac{3mV^2}{2} = 3mgh_{max} \qquad \longrightarrow \qquad h_{max} = \frac{V^2}{2g} = \frac{v^2}{18g} = \frac{h}{9}$$

Problema 4.25.
Dos objetos, X e Y, se mantienen en reposo sobre una superficie horizontal sin roce, comprimiendo entre ellos a un resorte. La masa de X es $2/5$ veces la masa de Y . Inmediatamente después de que se libera el resorte, X adquiere 50 J de energía cinética, mientras que Y adquiere, en energía cinética,

a) 20 J

b) 8 J

c) 310 J

d) 125 J

e) 50 J

Solución:

Como no hay fuerzas externas, se conserva el momentum del sistema:

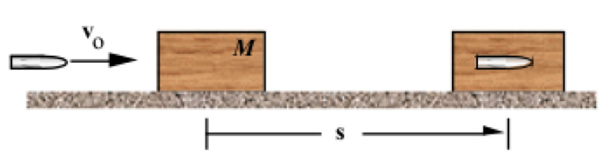
$$0 = m_X v_X + m_Y v_Y \qquad \longrightarrow \qquad v_Y = -\frac{m_X}{m_Y} v_X = -\frac{2}{5} v_X$$

La energía cinética de cada bloque viene dada por:

$$\begin{aligned} K_X &= \frac{1}{2} m_X {v_X}^2 \\ &= 50\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_Y &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} m_X\right)\left(-\frac{2}{5} v_X\right)^2 \\ &= \frac{2}{5} K_X \\ &= 20\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Problema 4.26.
Una bala de masa m es disparada con velocidad v_0 hacia un bloque de madera de masa M (ver figura). El bloque con la bala incrustada desliza sobre la superficie horizontal con un coeficiente de roce cinético μ.



¿Cuál de las siguientes expresiones determina cuan lejos llega el bloque antes de detenerse (magnitud de s)?

a) $s = \dfrac{m{v_0}^2}{Mg\mu}$

b) $s = \dfrac{m{v_0}^2}{(M+m)g\mu}$

c) $s = \dfrac{m^2{v_0}^2}{2(M+m)^2 g\mu}$

d) $s = \dfrac{m^2{v_0}^2 v_0}{(M+m)^2\sqrt{2g\mu}}$

e) $s = \dfrac{{v_0}^2}{g\mu}$

Solución:

Considerando el sistema formado por la bala, el bloque y la superficie de apoyo, no hay fuerzas externas aplicadas y se conserva el momentum. Así,

$$mv_0 = (M+m)v \qquad \longrightarrow \qquad v = \frac{mv_0}{M+m}$$

Por la ecuación del Newton en la dirección horizontal,

$$(M+m)a = -f_r = -\mu N = -\mu(M+m)g \qquad \longrightarrow \qquad a = -\mu g$$

y la aceleración es constante. Por tanto, la velocidad del bloque con la bala, en función de tiempo, es:

$$v(t) = v + a\,t = \frac{mv_0}{M+m} - \mu g\,t$$

Sea t_f el tiempo en el que el sistema bloque/bala se detiene. Con ello,

$$v(t_f) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad t_f = \frac{mv_0}{(M+m)g\mu}$$

Por otra parte, la cinemática del problema nos permite hallar la distancia s recorrida antes de detenerse:

$$s = v\,t_f + \frac{a\,{t_f}^2}{2} = \frac{m^2{v_0}^2}{2(M+m)^2 g\mu}$$

Problema 4.27.

La figura muestra el resultado de la colisión entre dos objetos de distinta masa, donde $\cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

La rapidez v_2 de la masa más grande después del choque y el ángulo θ_2 son:

a) $v_2 = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$, $\quad \theta_2 = 30°$

b) $v_2 = \sqrt{2}v_0$, $\quad \theta_2 = 30°$

c) $v_2 = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$, $\quad \theta_2 = 45°$

d) $v_2 = \sqrt{2}v_0$, $\quad \theta_2 = 45°$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como no sabemos la naturaleza del choque, no podemos afirmar que la energía se conserva. Por tanto, solo podemos utilizar la conservación de momentum en el plano:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\imath}}:} \qquad \begin{aligned} p_i{}^x &= p_f{}^x \\ 3mv_0 &= m(\sqrt{5}v_0)\cos\theta_1 + 2mv_2\cos\theta_2 \\ v_0 &= v_2\cos\theta_2 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\jmath}}:} \qquad \begin{aligned} p_i{}^y &= p_f{}^y \\ 0 &= m(\sqrt{5}v_0)\sin\theta_1 - 2mv_2\sin\theta_2 \\ v_0 &= v_2\sin\theta_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Dividiendo (2) por (1),

$$\tan\theta_2 = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \theta_1 = 45°$$

Elevando al cuadrado (1) y (2) y sumando,

$$2{v_0}^2 = {v_2}^2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = \sqrt{2}v_0$$

Problema 4.28.
En la figura se muestra un sistema de bloques que reposan en una superficie horizontal sin roce. Los bloques de masa $2m$ y $3m$ están unidos por un resorte ideal de constante k y largo natural ℓ_0; ambos comienzan del reposo con el resorte en su largo natural. El bloque de masa m y velocidad inicial v_1 colisiona de forma plástica (perfectamente inelástica) con el bloque $2m$.

La velocidad del centro de masa V_{cm} del sistema completo previo a la colisión es:

a) $V_{cm} = \dfrac{v_1}{12}$

b) $V_{cm} = \dfrac{v_1}{6}$

c) $V_{cm} = \dfrac{v_1}{3}$

d) $V_{cm} = \dfrac{v_1}{2}$

e) $V_{cm} = v_1$

Solución:

Por definición de velocidad del centro de masa,

$$V_{cm} = \frac{mv_m + 2mv_{2m} + 3mv_{3m}}{m + 2m + 3m} = \frac{v_1}{6}$$

Problema 4.29.
Para la situación descrita en el Problema 4.28, la velocidad V del bloque $2m$ inmediatamente posterior al choque con la masa m es:

a) $V = \dfrac{v_1}{2}$

b) $v_2' = \dfrac{v_1}{3}$

c) $V = \dfrac{v_1}{4}$

d) $V = \dfrac{v_1}{5}$

e) $V = \dfrac{v_1}{6}$

Solución:

Como los bloques m y $2m$ quedan juntos, ambos llevan una velocidad V que satisface:

$$mv_1 = (m + 2m)V \qquad \longrightarrow \qquad V = \frac{v_1}{3}$$

Problema 4.30.
Para la situación descrita en el Problema 4.28, llamemos V a la solución del problema anterior. El estiramiento máximo δ_{max} del resorte es:

a) $\delta_{max} = \sqrt{\dfrac{2m\left(\dfrac{{v_1}^2}{2} + V^2\right)}{k}}$

b) $\delta_{max} = \sqrt{\dfrac{3m\left(\dfrac{{v_1}^2}{2} - V^2\right)}{k}}$

c) $\delta_{max} = \sqrt{\dfrac{2m(V + v_1)^2}{k}}$

d) $\delta_{max} = \sqrt{\dfrac{3mV^2}{2k}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La compresión/estiramiento será máximo cuando la velocidad relativa entre los bloques sea cero, i.e. ambos bloques se muevan con la misma velocidad. Así, por conservación de momentum,

$$3mV = 3mv_r + 3mv_r \qquad \longrightarrow \qquad v_r = \frac{V}{2}$$

Como la energía se conserva,

$$\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{3mV^2}{2} &= \frac{3m{v_r}^2}{2} + \frac{3m{v_r}^2}{2} + \frac{k{\delta_{max}}^2}{2} \\
&= \frac{3mV^2}{4} + \frac{k{\delta_{max}}^2}{2} \\
\frac{3mV^2}{4} &= \frac{k{\delta_{max}}^2}{2} \\
\sqrt{\frac{3mV^2}{2k}} &= \delta_{max}
\end{aligned}$$

Problema 4.31.
Para la situación descrita en el Problema 4.28, mantenemos la convención respecto a V. El módulo de la energía perdida ΔE durante el proceso es:

a) $\Delta E = \dfrac{m}{2}({v_1}^2 - 3V^2)$

b) $\Delta E = 0$

c) $\Delta E = \dfrac{m}{2}({v_1}^2 - 2V^2)$

d) $\Delta E = \dfrac{m}{2}(2{v_1}^2 - V^2)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La energía E_a antes del choque está dada por:

$$E_a = \frac{m{v_1}^2}{2}$$

La energía E_d después del choque está dada por:

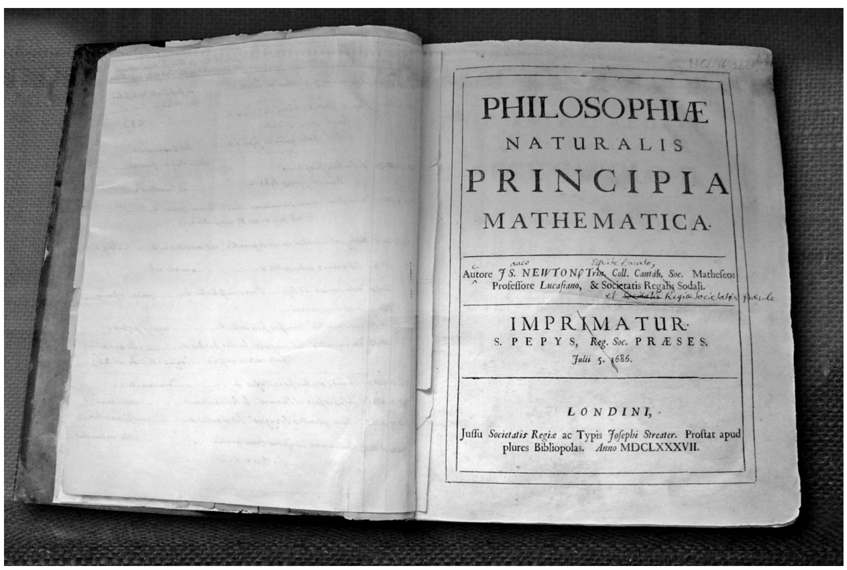
$$E_d = \frac{3mV^2}{2}$$

Por tanto, la energía perdida es:

$$\Delta E = |E_d - E_a| = \frac{m}{2}({v_1}^2 - 3V^2)$$

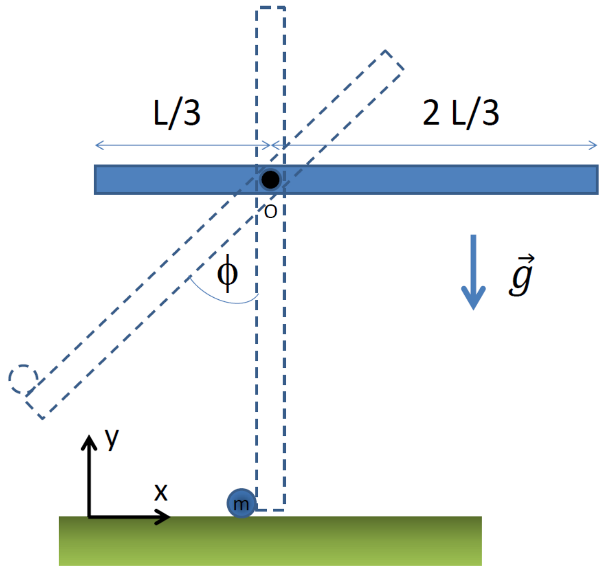
5

Momentum angular y sólido rígido



Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 5.1.
La barra de la figura, de longitud L, masa M y ancho despreciable, se encuentra fija a un pivote en el punto O. Inicialmente, la barra se sostiene en la posición horizontal, y a continuación se suelta. Suponga que el extremo inferior de la barra experimenta un choque perfectamente inelástico con la partícula de masa m, que se encuentra inicialmente en reposo sobre la superficie sin roce. Desprecie el radio de la partícula.



Si el momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masa es $ML^2/12$, entonces el momento de inercia de la barra I_O con respecto al pivote en O está dado por:

a) $\dfrac{ML^2}{9}$

b) $\dfrac{ML^2}{36}$

c) $\dfrac{ML^2}{18}$

d) $\dfrac{ML^2}{24}$

e) $\dfrac{ML^2}{3}$

Solución:

Por el teorema de ejes paralelos,

$$I_O = I_{cm} + Md^2$$

con d la distancia entre el centro de masa y el eje de rotación. En este caso,

$$d = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$$

Por tanto,

$$I_O = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{ML^2}{9}$$

Problema 5.2.
Considere la situación descrita en el Problema 5.1. La rapidez angular ω_A de la barra **justo antes** de chocar con la partícula es:

a) $\sqrt{\dfrac{2MLg}{3I_O}}$

b) $\sqrt{\dfrac{MLg}{2I_O}}$

c) $\sqrt{\dfrac{MLg}{3I_O}}$

d) $\sqrt{\dfrac{4MLg}{3I_O}}$

e) $\sqrt{\dfrac{3MLg}{2I_O}}$

Solución:

Fijando el nivel cero de energía potencial en la superficie sin roce, la energía inicial del sistema corresponde, únicamente, a energía potencial:

$$E_i = Mgh_{cm}{}^{(in)} = \frac{2MLg}{3}$$

Justo antes de colisionar con la partícula, la energía del sistema posee dos componentes: cinética rotacional y potencial. Así,

$$E_f = \frac{I_O{\omega_A}^2}{2} + Mgh_{cm}{}^{(fin)} = \frac{I_O{\omega_A}^2}{2} + \frac{MLg}{2}$$

Por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad \omega_A = \sqrt{\frac{MLg}{3I_O}}$$

Problema 5.3.
Considere la situación descrita en el Problema 5.1. La rapidez angular ω_D de la barra **justo después** de chocar con la partícula es:

a) $\omega_D = \dfrac{\omega_A}{1 + mL^2/I_O}$

b) $\omega_D = \omega_A$

c) $\omega_D = \dfrac{\omega_A}{1 + 2mL^2/3I_O}$

d) $\omega_D = \dfrac{\omega_A}{1 + mL^2/4I_O}$

e) $\omega_D = \dfrac{\omega_A}{1 + 4mL^2/9I_O}$

Solución:

Como la colisión se produce cuando la barra está en posición vertical, el peso de la barra apunta en la dirección radial y, por tanto, se conserva el momentum angular del sistema:

$$(*) \quad I_O\,\omega_A = I'_O\,\omega_D$$

En ese caso, el momento de inercia después de la colisión, I'_O, se obtiene como la suma de los momentos de inercia de la barra y de la partícula:

$$I'_O = I_O + m\ell^2 = I_O + m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 = I_O + \frac{4mL^2}{9}$$

De la condición $(*)$,

$$\omega_D = \frac{I_O\,\omega_A}{I'_O} = \frac{\omega_A}{I'_O/I_O} = \frac{\omega_A}{1 + 4mL^2/9I_O}$$

Problema 5.4.

Considere la situación descrita en el Problema 5.1. Después del choque, el ángulo máximo de inclinación ϕ que alcanza la barra con respecto a la vertical está definido por la ecuación:

a) $\cos\phi = 1 - 3\left(\dfrac{I_O + 2mL^2/3}{(M+2m)Lg}\right){\omega_D}^2$

b) $\cos\phi = 1 - 3\left(\dfrac{I_O}{MLg}\right){\omega_D}^2$

c) $\cos\phi = 1 - 3\left(\dfrac{I_O + 4mL^2/9}{MLg}\right){\omega_D}^2$

d) $\cos\phi = 1 - 3\left(\dfrac{I_O + 4mL^2/9}{(M+4m)Lg}\right){\omega_D}^2$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Justo después de colisionar con la partícula, la energía del sistema posee dos componentes: cinética rotacional y potencial. Así,

$$E_i = \frac{I'_O {\omega_D}^2}{2} + \frac{MLg}{2} = \left(\frac{I_O + 4mL^2/9}{2}\right){\omega_D}^2 + \frac{MLg}{2}$$

El ángulo de máxima inclinación se alcanza cuando la rapidez del sistema barra/partícula es nula, i.e. la energía solo posee una componente potencial:

$$\begin{aligned}
E_f &= Mg{h_{cm}}^{(M)} + mg{h_{cm}}^{(m)} \\
&= Mg\left(\frac{2L}{3} - d\cos\phi\right) + mg\left(\frac{2L}{3} - \ell\cos\phi\right) \\
&= \frac{2(M+m)Lg}{3} - \frac{(M+4m)Lg}{6}\cos\phi
\end{aligned}$$

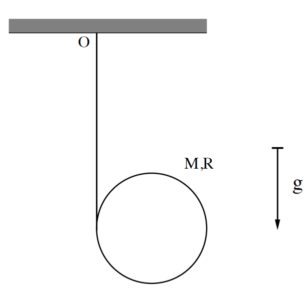
Por conservación de energía,

$$\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\left(\frac{I_O + 4mL^2/9}{2}\right){\omega_D}^2 + \frac{MLg}{2} &= \frac{2(M+m)Lg}{3} - \frac{(M+4m)Lg}{6}\cos\phi \\
\left(\frac{I_O + 4mL^2/9}{2}\right){\omega_D}^2 &= \frac{(M+4m)Lg}{6} - \frac{(M+4m)Lg}{6}\cos\phi \\
&= \frac{(M+4m)Lg}{6}\Big(1 - \cos\phi\Big) \\
3\left(\frac{I_O + 4mL^2/9}{(M+4m)Lg}\right){\omega_D}^2 &= 1 - \cos\phi
\end{aligned}$$

Así,

$$\cos\phi = 1 - 3\left(\frac{I_O + 4mL^2/9}{(M+4m)Lg}\right){\omega_D}^2$$

Problema 5.5.
Considere un yo-yo que consiste en un cilindro macizo de masa M radio R. El extremo superior de la cuerda del yo-yo se mantiene fijo, como muestra la figura.



Al dejar descender el yo-yo, su aceleración del centro de masa está dada por:

a) $a_{cm} = \dfrac{g}{2}$

b) $a_{cm} = \dfrac{2g}{3}$

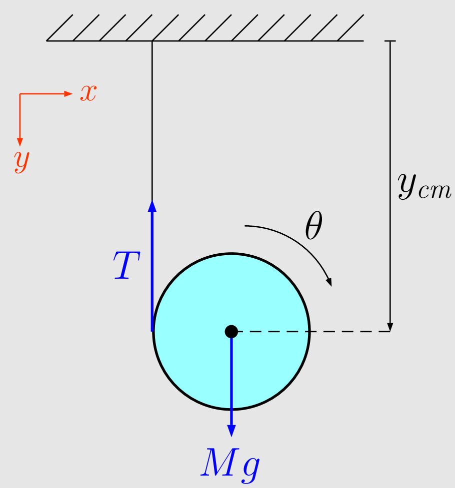
c) $a_{cm} = \dfrac{g}{4}$

d) $a_{cm} = \dfrac{3g}{4}$

e) $a_{cm} = \dfrac{g}{3}$

Solución:

Consideremos el siguiente esquema:



La condición de ligadura es:

$$y_{cm} = R\theta \qquad \longrightarrow \qquad a_{cm} = R\ddot{\theta}$$

De la segunda ley de Newton,

$$Ma_{cm} = Mg - T \qquad \longrightarrow \qquad a_{cm} = g - \frac{T}{M}$$

De la condición de torque,

$$I\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}} = (-R\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times (-T\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = TR\,\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{\theta} = \frac{TR}{I} = \frac{2T}{MR}$$

donde hemos reemplazado el momento de inercia de un disco, $I = \dfrac{MR^2}{2}$. Reemplazando en la ecuación de ligadura,

$$\begin{aligned} a_{cm} &= R\ddot{\theta} \\ g - \frac{T}{M} &= \frac{2T}{M} \\ \frac{Mg}{3} &= T \end{aligned}$$

Así, la aceleración viene dada por:

$$a_{cm} = g - \frac{T}{M} = \frac{2g}{3}$$

Problema 5.6.
Siguiendo con el yo-yo del Problema 5.5, suponga ahora que la cuerda se jala de tal forma que el centro de masa del yo-yo se mantiene en reposo. La nueva aceleración del centro de masa es:

a) $a_{cm} = \frac{g}{2}$

b) $a_{cm} = \frac{3g}{2}$

c) $a_{cm} = g$

d) $a_{cm} = \frac{3g}{4}$

e) $a_{cm} = 2g$

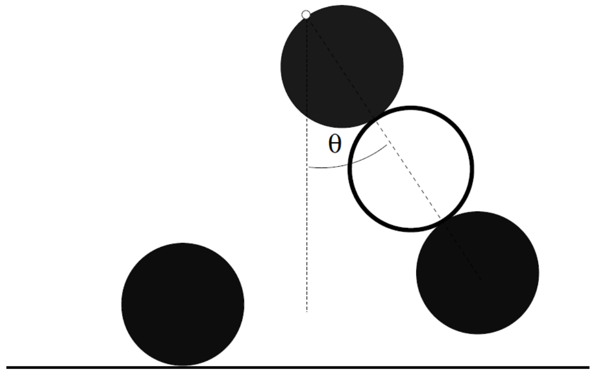
En este caso, dado que el centro de masa permanece en reposo, se cumple que:

$$T = Mg$$

Con ello,

$$\ddot{\theta} = \frac{TR}{I} = \frac{2g}{R} \qquad \longrightarrow \qquad a_{cm} = R\ddot{\theta} = 2g$$

Problema 5.7.
El péndulo rígido de la figura está formado por dos discos y un anillo. Las tres partes tienen radio R y masa m. El péndulo puede rotar libremente en torno a un pivote ubicado en uno de sus extremos.



El momento de inercia I del péndulo en torno al pivote es:

a) $I = 2mR^2$

b) $I = 5mR^2$

c) $I = \dfrac{75}{2}mR^2$

d) $I = 10mR^2$

e) $I = 37mR^2$

Solución:

Sean I_{d_1}, I_a e I_{d_2} los momentos de inercia, respecto al pivote, del disco más cercano al pivote, anillo y disco más lejano al pivote respectivamente. Así,

$$I = I_{d_1} + I_a + I_{d_2}$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos,

$$\begin{aligned} I_{d_1} &= \frac{mR^2}{2} + mR^2 \\ &= \frac{3mR^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_a &= mR^2 + m(3R)^2 \\ &= 10mR^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{d_2} &= \frac{mR^2}{2} + m(5R)^2 \\ &= \frac{51mR^2}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, sumando los tres términos,

$$I = 37mR^2$$

Problema 5.8.
Para la situación descrita en el Problema 5.7, suponga que el péndulo se deja caer desde el reposo partiendo de una posición θ_0. Su aceleración angular inicial será:

a) $\ddot{\theta}(0) = -\dfrac{3mgR\cos\theta_0}{I}$

b) $\ddot{\theta}(0) = -\dfrac{9mgR\cos\theta_0}{I}$

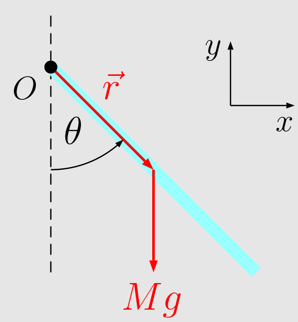
c) $\ddot{\theta}(0) = -\dfrac{3mgR\sin\theta_0}{I}$

d) $\ddot{\theta}(0) = -\dfrac{9mgR\sin\theta_0}{I}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Consideremos la siguiente situación:



donde $M = 3m$ es la masa total del péndulo. El torque realizado por el peso, respecto al pivote, viene dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\
&= (d\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - d\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (-Mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\
&= -Mgd\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= -9mgR\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

donde $d = 3R$ corresponde a la distancia entre el centro de masa del péndulo (por simetría, ubicado en la mitad) y el pivote. Por otra parte, sabemos que:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = I\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

donde la dirección del torque se debe a que el ángulo crece en contra de las agujas del reloj (regla de la mano derecha). Igualando, y reemplazando en $t = 0$,

$$I\ddot{\theta} = -9mgR\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{\theta}(0) = -\frac{9mgR\sin\theta_0}{I}$$

Problema 5.9.
Continuando con la situación descrita en el Problema 5.7, la rapidez angular ω_f del péndulo al llegar a la posición vertical (antes de colisionar) será:

a) $\omega_f = \sqrt{\dfrac{18mgR(1-\cos\theta_0)}{I}}$

b) $\omega_f = \sqrt{\dfrac{36mgR(1-\cos\theta_0)}{I}}$

c) $\omega_f = \sqrt{\dfrac{18mgR(1-\sin\theta_0)}{I}}$

d) $\omega_f = \sqrt{\dfrac{36mgR(1-\sin\theta_0)}{I}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Fijando el nivel cero de energía potencial en el punto más bajo del péndulo, la energía inicial del sistema corresponde, únicamente, a energía potencial:

$$E_i = Mgh_{cm}{}^{(in)} = 3mg(6R - 3R\cos\theta_0) = 9mgR(2-\cos\theta_0)$$

Justo antes de colisionar con la partícula, la energía del sistema posee dos componentes: cinética rotacional y potencial. Así,

$$E_f = \frac{I\omega_f{}^2}{2} + Mgh_{cm}{}^{(fin)} = \frac{I\omega_f{}^2}{2} + 9mgR$$

Por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad \omega_f = \sqrt{\frac{18mgR(1-\cos\theta_0)}{I}}$$

Problema 5.10.
Sigamos con la situación descrita en el Problema 5.7. Justo al llegar a la posición vertical, el péndulo colisiona con un disco de radio R y masa m, que se encuentra en reposo sobre un plano horizontal sin roce, ubicado a una distancia $6R$ bajo el pivote. Después de la colisión el péndulo queda en reposo. La rapidez final del disco será:

a) $v_f = \dfrac{2I\omega_f}{5mR}$

b) $v_f = \dfrac{I\omega_f}{10mR}$

c) $v_f = \dfrac{I\omega_f}{5mR}$

d) $v_f = \dfrac{2I\omega_f}{15mR}$

e) $v_f = \dfrac{2I\omega_f}{mR}$

Solución:

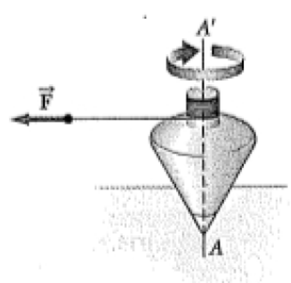
Como la colisión se realiza cuando el peso y la reacción del pivote apunta en la dirección radial (posición vertical), el momentum angular del sistema se conserva durante la colisión:

$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ I\omega_f &= m\ell v_f \end{aligned}$$

donde ℓ es la distancia entre el centro de masa del disco y el pivote. Así, $\ell = 6R - R = 5R$ y, por tanto,

$$v_f = \frac{I\omega_f}{m\ell} = \frac{I\omega_f}{5mR}$$

Problema 5.11.
El trompo ideal de la figura tiene una momento de inercia igual a I_o e inicialmente está en reposo. Es libre de dar vueltas en torno al eje estable AA'. Una cuerda, enrollada alrededor de una espiga a lo largo del eje del trompo, se jala en tal forma que mantiene una tensión constante T.



Si la cuerda no se desliza mientras se desenrolla de la espiga, ¿cuál es la rapidez angular del trompo después de jalar un largo d de cuerda de la espiga?

a) $\omega_d = \sqrt{\dfrac{2Td}{I_o}}$

b) $\omega_d = \dfrac{Td}{I_o}$

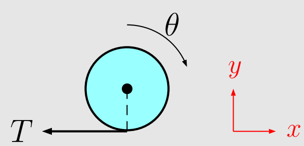
c) $\omega_d = \sqrt{\dfrac{Td}{I_o}}$

d) $\omega_d = \dfrac{2Td}{I_o}$

e) $\omega_d = \dfrac{T}{I_o}$

Solución:

Vista desde arriba, la situación descrita en el enunciado tiene la siguiente forma:



El torque realizado en torno al eje AA' viene dado por:

$$\vec{\tau}_{AA'} = -I_o \ddot{\theta}\, \hat{\boldsymbol{k}} = (-R\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (-T\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) = -TR\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

con R el radio de la espiga. Por tanto, notamos que la aceleración angular es constante:

$$\ddot{\theta} = \frac{TR}{I_o} \qquad \longrightarrow \qquad \omega(t) = \frac{TRt}{I_o} + \omega(0) = \frac{TRt}{I_o}$$

pues el trompo parte del reposo. Si volvemos a integrar, podemos obtener el ángulo en función del tiempo:

$$\theta(t) = \frac{TRt^2}{2I_o}$$

Si se ha jalado una distancia d de cuerda, entonces (dado que no desliza) el trompo ha rotado un ángulo igual a:

$$\theta_d = \frac{d}{R}$$

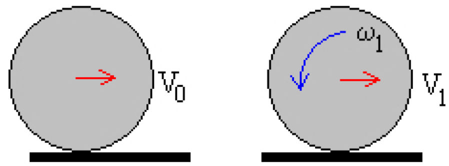
Así, el tiempo t_d asociado al ángulo anterior se puede despejar fácilmente:

$$\theta(t_d) = \theta_d \qquad \longrightarrow \qquad t_d = \sqrt{\frac{2I_o d}{TR^2}}$$

Finalmente,

$$\omega_d = \omega(t_d) = \sqrt{\frac{2Td}{I_o}}$$

Problema 5.12.
Se lanza un cilindro de masa m, radio R y momento de inercia I respecto a su eje de simetría con una velocidad inicial v_o sobre una superficie horizontal rugosa (ver figura). El coeficiente de roce del cilindro con la superficie es μ.



Determinar la velocidad v_f del cilindro justo cuando empieza a rodar sin deslizar.

a) $v_f = \dfrac{mR^2 v_o}{2mR^2 - I}$

b) $v_f = \dfrac{mR^2 v_o}{2mR^2 + I}$

c) $v_f = \dfrac{mR^2 v_o}{I}$

d) $v_f = \dfrac{mR^2 v_o}{mR^2 - I}$

e) $v_f = \dfrac{mR^2 v_o}{mR^2 + I}$

Solución:

Al lanzar el cilindro horizontalmente, la fuerza de roce ace cada vez más lento el movimiento traslacional, y cada vez más rápido el movimiento rotacional, hasta que llega un instante en que el cilindro rueda sin resbalar. La segunda ley de Newton en el eje horizontal,

$$-f_r = ma$$

y el torque respeto al centro de masa,

$$\vec{\tau}_o = -I\alpha\,\hat{\boldsymbol{k}} = (-R\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (-f_r\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) = -Rf_r\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

nos permiten obtener la siguiente relación:

$$Rf_r = I\alpha \qquad \longrightarrow \qquad -Rma = I\alpha$$

Si integramos en t a ambos lados de la igualdad entre $t = 0$ y t_f, donde t_f es el tiempo en el cual el cilindro comienza a rodar sin deslizar, tenemos que:

$$\begin{aligned} -mR\int_0^{t_f} \frac{dv}{dt}\,dt &= I\int_0^{t_f} \frac{d\omega}{dt}\,dt \\ mR(v_o - v_f) &= I(\omega_f - \omega_o) \end{aligned}$$

donde $v_o = v(t = 0)$ y $v_f = v(t_f)$. Misma convención para la rapidez angular. Como inicialmente el cilindro no rota,

$$mR(v_o - v_f) = I\omega_f$$

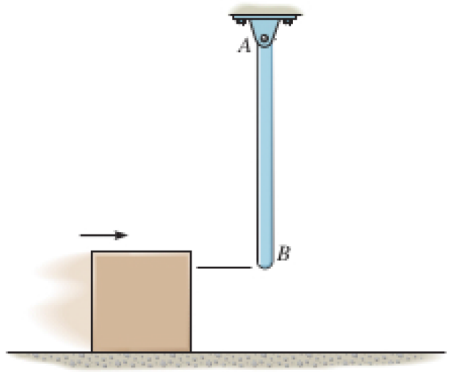
Ahora, como en t_f comienza a rodar sin deslizar, se cumple que:

$$\omega_f = \frac{v_f}{R}$$

Juntando las dos últimas ecuaciones, podemos despejar el valor de v_f:

$$v_f = \frac{mR^2 v_o}{mR^2 + I}$$

Problema 5.13.
La barra AB de masa $2m$ y largo L en la figura está colgando en una posición vertical. Un bloque de masa m desliza en una superficie horizontal sin roce con una rapidez de v_0, golpeando elásticamente a la barra en su extremo B.



Determine la velocidad del bloque inmediatamente después de la colisión:

a) $\left(\dfrac{mL^2 - I_A}{mL^2 - I_{cm}}\right) v_0$

b) $\left(\dfrac{mL^2 - I_A}{mL^2 + I_A}\right) v_0$

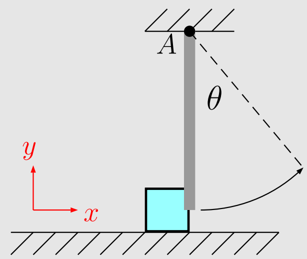
c) $\left(\dfrac{mL^2 - I_{cm}}{mL^2 + I_{cm}}\right) v_0$

d) $\left(\dfrac{mL^2 - I_{cm}}{mL^2 - I_A}\right) v_0$

e) $\left(\dfrac{mL^2 - I_{cm}}{mL^2 + I_A}\right) v_0$

Solución:

La situación a analizar es la siguiente:



De la conservación de energía,

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_A\omega^2}{2}$$

De la conservación de momentum angular durante el choque,

$$\begin{aligned}
\vec{L}_A{}^{inicial} &= (-L\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (mv_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) \;=\; mv_0L\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
\vec{L}_A{}^{final} &= (-L\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (mv\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) + I_A\omega\,\hat{\boldsymbol{k}} \;=\; (mvL + I_A\omega)\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
\\
\therefore\; mv_0L &= mvL + I_A\omega
\end{aligned}$$

Re-escribiendo ambas ecuaciones,

$$\begin{aligned}
I_A\omega &= mv_0L - mvL \qquad (1) \\
I_A\omega^2 &= m{v_0}^2 - mv^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Dividiendo (2) por (1),

$$\omega = \frac{m({v_0}^2 - v^2)}{mL(v_0 - v)} = \frac{v_0 + v}{L} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1),

$$\begin{aligned}
I_A\left(\frac{v_0 + v}{L}\right) &= mL(v_0 - v) \\
I_Av_0 + I_Av &= mL^2v_0 - mL^2v \\
(mL^2 + I_A)v &= (mL^2 - I_A)v_0 \\
v &= \left(\frac{mL^2 - I_A}{mL^2 + I_A}\right)v_0
\end{aligned}$$

Problema 5.14.
Siguiendo con la situación descrita en el Problema 5.13, determinar la máxima variación en la altura del centro de masa de la barra después de la colisión:

a) $\frac{(L\omega)^2}{8g}$

b) $\dfrac{(L\omega)^2}{2g}$

c) $\dfrac{(L\omega)^2}{4g}$

d) $\dfrac{L\omega^2}{2g}$

e) $\dfrac{L\omega^2}{8g}$

Solución:

Fijaremos el nivel cero de energía potencial a la altura del centro de masa. La energía inicial de la barra, justo después del choque, es:

$$E_i = \frac{MV^2}{2} = \frac{M\omega^2}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M\omega^2 L^2}{8}$$

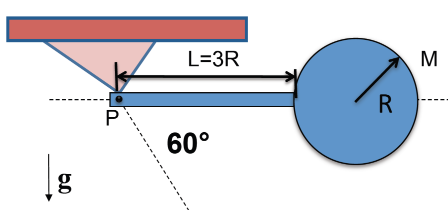
siendo V la velocidad del centro de masa justo después del choque y $M = 2m$ la masa de la barra. La energía asociada a la máxima altura es:

$$E_f = Mgh$$

Por tanto, por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad h = \frac{(L\omega)^2}{8g}$$

Problema 5.15.
Un péndulo físico consta de una barra homogénea de masa M y largo L, soldada a un disco homogéneo de radio R y masa M, donde $L = 3R$. Este péndulo posee un pivote ubicado en el extremo de la barra (punto P), y está inicialmente en reposo en la posición horizontal mostrada en la figura.



El momento de inercia I del péndulo respecto a un eje perpendicular al plano de la figura, y que pasa por el punto P, es:

a) $I = \dfrac{69}{4}MR^2$

b) $I = \dfrac{25}{2}MR^2$

c) $I = \dfrac{39}{2}MR^2$

d) $I = 20MR^2$

e) $I = \dfrac{15}{4}MR^2$

Solución:

Tenemos que:

$$I = I_{barra} + I_{disco}$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos,

$$\begin{aligned} I_{barra} &= \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{ML^2}{3} \\ &= 3MR^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{disco} &= \frac{MR^2}{2} + M(L+R)^2 \\ &= \frac{33MR^2}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando los valores calculados,

$$I = \frac{39}{2}MR^2$$

Problema 5.16.

Considere la situación expuesta el Problema 5.15. Determine la distancia d entre el pivote y el centro de masa del péndulo:

a) $d = \dfrac{11R}{2}$

b) $d = \dfrac{11R}{4}$

c) $d = 3R$

d) $d = \dfrac{5R}{2}$

e) $d = 5R$

Solución:

Midiendo las distancias desde el pivote P,

$$d = \frac{M\left(\dfrac{L}{2}\right) + M(L+R)}{M+M} = \frac{11R}{4}$$

Problema 5.17.
Nuevamente considere la situación expuesta en el Problema 5.15. Si en cierto instante se deja evolucionar libremente el sistema, determine el módulo de la aceleración angular $|\alpha|$ del péndulo cuando la barra forma un ángulo de 60° con la horizontal. I y d son los valores pedidos en los problemas anteriores:

a) $|\alpha| = \dfrac{Mgd}{I}$

b) $|\alpha| = \dfrac{Mgd}{2I}$

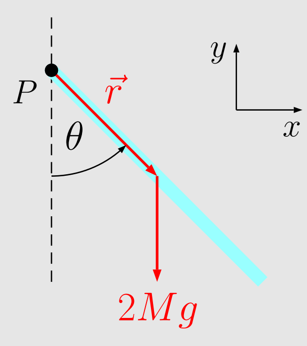
c) $|\alpha| = \dfrac{\sqrt{3}Mgd}{I}$

d) $|\alpha| = \dfrac{2\sqrt{3}Mgd}{I}$

e) $|\alpha| = \dfrac{\sqrt{2}Mgd}{I}$

Solución:

Consideremos la siguiente situación:



El torque realizado por el peso, respecto a P, viene dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_P &= \vec{r} \times \vec{F} \\
&= (d\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - d\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (-2Mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\
&= -2Mgd\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\vec{\tau}_P = I\vec{\alpha} = I\alpha\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

donde la dirección del torque se debe a que el ángulo crece en contra de las agujas del reloj (regla de la mano derecha). Igualando,

$$I\alpha = -2Mgd\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{2Mgd\sin\theta}{I}$$

Cuando la barra forma un ángulo de 60° con la horizontal, $\theta = 30°$, y por tanto:

$$|\alpha| = \frac{2Mgd\sin 30°}{I} = \frac{Mgd}{I}$$

Problema 5.18.
Nuevamente considere la situación expuesta en el Problema 5.15. Determine el módulo de la velocidad angular del péndulo cuando la barra forma un ángulo de 60° con la horizontal. I y d son los valores pedidos en los problemas anteriores:

a) $\omega = \sqrt{\dfrac{Mgd}{I}}$

b) $\omega = \sqrt{\dfrac{3Mgd}{I}}$

c) $\omega = \sqrt{\dfrac{2Mgd}{I}}$

d) $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}Mgd}{I}}$

e) $\omega = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}Mgd}{I}}$

Solución:

Fijaremos el nivel de energía potencial nula en la línea horizontal que pasa por el pivote P. Así, la energía mecánica inicial es

$$E_i = 0$$

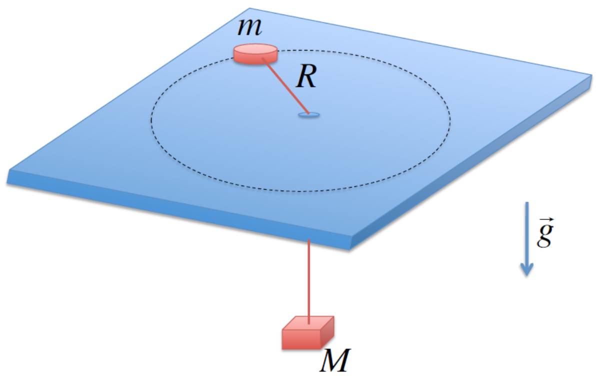
dado que el péndulo parte del reposo. Por otra parte, cuando la barra forma un ángulo de 60° con la horizontal, la energía será

$$E_f = \frac{I\omega^2}{2} - 2Mgd\sin 60° = \frac{I\omega^2}{2} - \sqrt{3}Mgd$$

Por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}Mgd}{I}}$$

Problema 5.19.
Considere una partícula de masa m que se mueve describiendo una trayectoria circular de radio R y rapidez angular ω sobre una superficie horizontal sin roce debido a la acción de una cuerda que está conectada a ella. La cuerda, que atraviesa la superficie horizontal por un orificio sin rozamiento, en su otro extremo está conectada a un bloque colgante de masa M, tal como se muestra en la figura.



Si en cierto instante un agente externo aumenta MUY lentamente el valor de la masa del bloque de masa M de manera tal que el radio de la trayectoria circular que describe la partícula disminuye a la mitad, o sea $R' = R/2$. El nuevo valor de la rapidez angular de m está dado por:

a) $\omega' = 2\omega$

b) $\omega' = \dfrac{\omega}{2}$

c) $\omega' = 4\omega$

d) $\omega' = \dfrac{\omega}{4}$

e) $\omega' = \omega$

Solución:

Por conservación de momentum angular,

$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ I\omega &= I'\omega' \\ mR^2\omega &= m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega' \\ 4\omega &= \omega' \end{aligned}$$

Problema 5.20.
Para la situación descrita en el Problema 5.19, el nuevo valor de la masa del bloque colgante está dado por:

a) $M' = \dfrac{M}{4}$

b) $M' = 4M$

c) $M' = \dfrac{M}{8}$

d) $M' = 8M$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

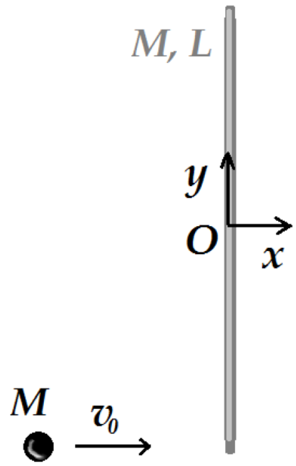
Para resolver este problema, necesitamos saber la relación existente entre M y ω. Para ello, recurrimos a la segunda ley de Newton aplicada a ambos cuerpos. Como M se encuentra en reposo, la tensión T de la cuerda satisface $T = Mg$. Por otra parte, para la masa m:

$$T = m\omega^2 R \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{T}{mR}} = \sqrt{\frac{Mg}{mR}}$$

Del ejercicio anterior,

$$\begin{aligned}
\omega' &= 4\omega \\
\sqrt{\frac{M'g}{mR'}} &= 4\sqrt{\frac{Mg}{mR}} \\
\frac{M'g}{mR'} &= \frac{16Mg}{mR} \\
M' &= 16\frac{16MR'}{R} \\
M' &= 8M
\end{aligned}$$

Problema 5.21.
Una barra homogénea de masa M y largo L se encuentra estática sobre un plano horizontal sin roce (la figura muestra la vista superior del sistema). Una pelota de masa M que se desliza con rapidez v_0 sobre el plano, colisiona con un extremo de la barra como se muestra. Después de la colisión, ambos cuerpos permanecen pegados.



La velocidad $\vec{v}_f$ del centro de masa del sistema después de la colisión es:

a) $\vec{v}_f = \dfrac{v_0}{24}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

b) $\vec{v}_f = \dfrac{v_0}{2}\dfrac{\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\sqrt{2}}$

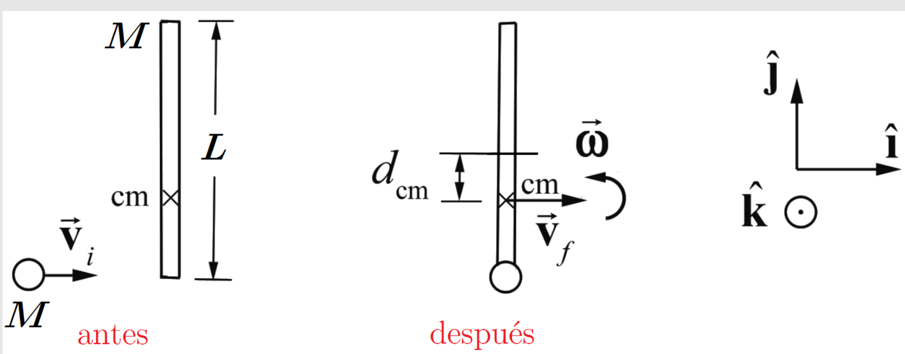
c) $\vec{v}_f = \dfrac{v_0}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

d) $\vec{v}_f = \dfrac{v_0}{24}\dfrac{\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\sqrt{2}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Notemos que no hay fuerzas externas o torques actuando sobre este sistema por lo que el momentum del centro de masa se conserva durante la colisión, al igual que el momentum angular respecto al centro de masa. La situación se esquematiza como sigue:



Inicialmente, solo la masa tiene momentum lineal $\vec{p}_i = M\vec{v}_i = Mv_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Después de la colisión, el centro de masa del sistema se mueve con velocidad $\vec{v}_f$. Igualando los momenta,

$$Mv_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = (2M)\vec{v}_f \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v}_f = \frac{v_0}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 5.22.
Para la situación descrita en el Problema 5.21, inmediatamente después del choque, ¿cuál es la posición del centro de masa del sistema respecto de la posición del centro de masa de la barra?

a) $d_{cm} = \dfrac{L}{8}$ hacia arriba

b) $d_{cm} = \dfrac{L}{8}$ hacia abajo

c) $d_{cm} = \dfrac{L}{4}$ hacia arriba

d) $d_{cm} = \dfrac{L}{4}$ hacia abajo

e) El centro de masa se mantiene

Solución:

Colocando el origen de coordenadas a la mitad de la barra. i.e. en su centro de masa, el nuevo centro de masa del sistema compuesto está dado por:

$$\vec{d}_{cm} = \frac{m_{masa}\vec{d}_{masa} + m_{vara}\vec{d}_{vara}}{m_{masa} + m_{vara}} = \frac{-M\left(\dfrac{L}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \vec{0}}{2M} = -\frac{L}{4}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Por tanto,

$$d_{cm} = \frac{L}{4} \text{ hacia abajo}$$

Problema 5.23.
Para la situación descrita en el Problema 5.21, encuentre la rapidez angular ω con que rota la vara con la masa adosada, después de la colisión:

a) $\omega = \dfrac{3v_0}{L}$

b) $\omega = \dfrac{3v_0}{5L}$

c) $\omega = \dfrac{3v_0}{2L}$

d) $\omega = \dfrac{6v_0}{5L}$

e) $\omega = \dfrac{v_0}{4L}$

Solución:

Ahora, calculamos el momentum angular del sistema antes y después de la colisión con respecto al nuevo centro de masa:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_i &= \vec{r}_{masa} \times \vec{p}_i \\
&= \left(-\frac{L}{4}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) \times (Mv_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) \\
&= \frac{MLv_0}{4}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
\vec{L}_f &= I\vec{\omega} \\
&= I\omega\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

donde I es el momento de inercia del sistema respecto al **nuevo centro de masa**:

$$I = I_{vara} + I_{masa}$$

Calculamos los momentos de inercia por separado:

$$\begin{aligned}
I_{vara} &= I_{vara,cm} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 \\
&= \frac{7ML^2}{48} \\
I_{masa} &= M\left(\frac{L}{4}\right)^2 \\
&= \frac{ML^2}{16}
\end{aligned}$$

Así,

$$I = \frac{5ML^2}{24}$$

Como argumentamos anteriormente, el momentum angular se conserva y, por tanto,

$$\omega = \frac{MLv_0}{4I} = \frac{6v_0}{5L}$$

Problema 5.24.
Siguiendo con la situación descrita en el Problema 5.21, ¿qué distancia recorre el centro de masa del sistema durante una rotación del mismo?

a) $\Delta x_{cm} = \dfrac{2\pi L}{3}$

b) $\Delta x_{cm} = \frac{1\pi L}{5}$

c) $\Delta x_{cm} = \frac{3\pi L}{4}$

d) $\Delta x_{cm} = \frac{7\pi L}{2}$

e) $\Delta x_{cm} = \frac{5\pi L}{6}$

Solución:

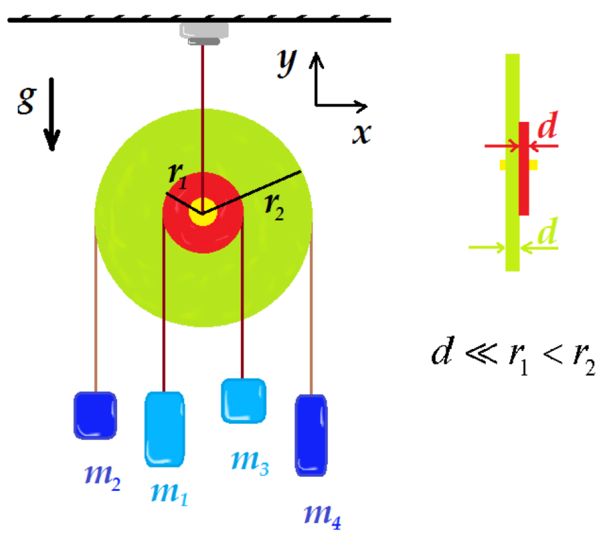
Notemos que el periodo de rotación del sistema tras el impacto es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{5\pi L}{3v_0}$$

Por tanto, la distancia que recorre el centro de masa en un tiempo igual a su periodo, i.e. una vuelta, es:

$$\begin{aligned}\Delta x_{cm} &= v_f T \\ &= \frac{5\pi L}{6}\end{aligned}$$

Problema 5.25.
El cuerpo de una polea doble de masa total M está constituido por dos discos de radios r_1 y r_2 acoplados y muy delgados ($d \ll r_1, r_2$), con un eje de masa despreciable (ver figura). Cuatro masas m_i ($i = 1, \ldots, 4$) cuelgan de cuerdas inextensibles de masa despreciable. Las cuerdas pasan por los discos sin deslizar, conectando la masa m_1 con la masa m_3, y la masa m_2 con la m_4. La polea doble puede girar libremente sin fricción alrededor del eje central de radio despreciable.



Si el sistema está en equilibrio, ¿qué relaciones pueden satisfacer las masas del sistema?

$$\begin{array}{cl} (i) & (m_1 - m_2)r_1 + (m_4 - m_3)r_2 = 0 \\ (ii) & m_1 = m_2 \text{ y } m_3 = m_4 \\ (iii) & m_1 = m_3 \text{ y } m_2 = m_4 \\ (iv) & (m_4 - m_2)r_2 + (m_3 - m_1)r_1 = 0 \end{array}$$

a) (iii) y (iv) son correctas

b) (i) y (ii) son correctas

c) (i) y (iii) son correctas

d) (ii) y (iv) son correctas

e) Ninguna de las relaciones es correcta

Solución:

Para que el sistema esté en equilibrio, las masas $\{m_i\}$ deben estar quietas. Por tanto,

$$m_1 = m_3 \qquad \wedge \qquad m_2 = m_4$$

Además, ele torque total en torno al eje de giro debe anularse. Así,

$$m_2r_2 + m_1r_1 = m_3r_1 + m_4r_2 \qquad \longrightarrow \qquad (m_4 - m_2)r_2 + (m_3 - m_1)r_1 = 0$$

Problema 5.26.
Continuando con la situación descrita en el Problema 5.25, considerando que el grosor de los discos de la polea es despreciable y, además, que éstos están hechos del mismo material y su distribución de masa es uniforme, determine el momento de inercia I del sistema:

a) $I = \left(\dfrac{M}{2}\right)\left(\dfrac{{r_1}^4 + {r_2}^4}{{r_1}^2 + {r_2}^2}\right)$

b) $I = \left(\dfrac{M}{2}\right)({r_1}^2 + {r_2}^2)$

c) $I = \left(\dfrac{M}{2}\right)(r_1 + r_2)^2$

d) $I = \left(\dfrac{M}{2}\right)({r_1}^2 - {r_2}^2)$

e) $I = \left(\dfrac{M}{2}\right)(r_1 - r_2)^2$

Solución:

Respecto al eje de giro, el momento de inercia I se calcula como la suma de los momentos de inercia de cada disco. Sea M_i la masa correspondiente al disco de radio r_i $(i = 1, 2)$. Por tanto, se cumple que:

$$M_i = \pi\rho {r_i}^2 \qquad \wedge \qquad M_1 + M_2 = M$$

donde ρ es la densidad del material. Juntando ambas ecuaciones, es posible despejar el valor de dicha densidad:

$$M = \pi\rho {r_1}^2 + \pi\rho {r_2}^2 \qquad \longrightarrow \qquad \rho = \frac{M}{\pi({r_1}^2 + {r_2}^2)}$$

Así, las masas de cada disco son, en términos de M,

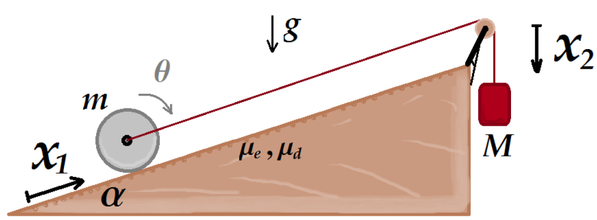
$$M_i = \frac{M{r_i}^2}{{r_1}^2 + {r_2}^2}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \frac{M_1{r_1}^2}{2} + \frac{M_2{r_2}^2}{2} \\ &= \left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{{r_1}^4 + {r_2}^4}{{r_1}^2 + {r_2}^2}\right) \end{aligned}$$

Problema 5.27.

Un disco de masa m y radio R está unido a un bloque de masa M por una cuerda ideal enrollada a su centro de masa y que pasa por una polea ideal sin masa (ver figura). Asuma que el disco rueda sin deslizar, y asuma también que el sistema se mueve hacia la derecha de la figura. Utilice el sistema coordenado de la figura.



El valor de la fuerza de roce f_r, en término de los parámetros del problema, es:

a) $f_r = \left(\dfrac{M + m\sin\alpha}{1 + \dfrac{M+m}{m}}\right) g$

b) $f_r = \left(\dfrac{M - m\sin\alpha}{1 + \dfrac{2(M+m)}{m}} \right) g$

c) $f_r = \left(\dfrac{M - m\cos\alpha}{1 + \dfrac{2(M+m)}{M}} \right) g$

d) $f_r = \left(\dfrac{M + m\cos\alpha}{1 + \dfrac{3(M+m)}{m}} \right) g$

e) $f_r = \left(\dfrac{M}{1 + \dfrac{2(M+m)}{Mm}} \right) g$

Solución:

Las ecuaciones de Newton para ambos cuerpos son:

$$m\ddot{x}_1 = -f_r + T - mg\sin\alpha \qquad \wedge \qquad M\ddot{x}_2 = Mg - T$$

Sumando ambas ecuaciones,

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = Mg - f_r - mg\sin\alpha \qquad \longrightarrow \qquad f_r = Mg - mg\sin\alpha - (m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2)$$

Las condiciones de ligadura del problema son:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \qquad \wedge \qquad \ddot{x}_1 = R\ddot{\theta}$$

Reemplazando,

$$f_r = Mg - mg\sin\alpha - R(m+M)\ddot{\theta} \qquad (*)$$

Para realizar la ecuación de torque, notemos que no podemos utilizar como referencia el centro de masa del disco, pues este está acelerando. En este caso, utilizaremos un punto de denominaremos O y que coincide con el origen desde donde se mide x_1. El torque total que hacen las fuerzas con respecto al punto O fijo es:

$$\vec{\tau}_O = (x_1\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + R\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times \Big((T - mg\sin\alpha)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \Big) = -(T - mg\sin\alpha)R\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

El roce no ejerce torque con respecto al punto O pues está dirigido a lo largo de la línea que pasa por O. La normal y la componente perpendicular del peso sí hacen torque con respecto a O, pero estos se anulan entre sí. Ahora, por teorema de descomposición del momentum angular:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{cr/cm}$$

El momentum angular del centro de masa, con respecto al punto O, es:

$$\vec{L}_{cm} = \vec{R}_{cm} \times (\vec{P}_{cm}) = m(x_1\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + R\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (\dot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) = -mR\dot{x}_1\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

en tanto que,

$$\vec{L}_{cr/cm} = -I\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Como el disco rueda sin deslizar,

$$\vec{L}_O = -(mR^2 + I)\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{3mR^2}{2}\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

La ecuación de torque para el disco ($\vec{\tau}_O = d\vec{L}_O/dt$) es, entonces,

$$(T - mg\sin\alpha)R = \frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta}$$

De la ecuación de Newton para la masa m, podemos reemplazar el término $(T - mg\sin\alpha)$:

$$(m\ddot{x}_1 + f_r)R = \frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta}$$

Por la condición de ligadura,

$$Rf_r = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} = I_{disco}\ddot{\theta}$$

y la expresión anterior es equivalente a haber realizado el torque en torno al centro de masa. A partir de ahora, realizaremos los ejercicios de esta última manera, pues resulta evidente la ganancia de tiempo que significa. Despejando $\ddot{\theta}$,

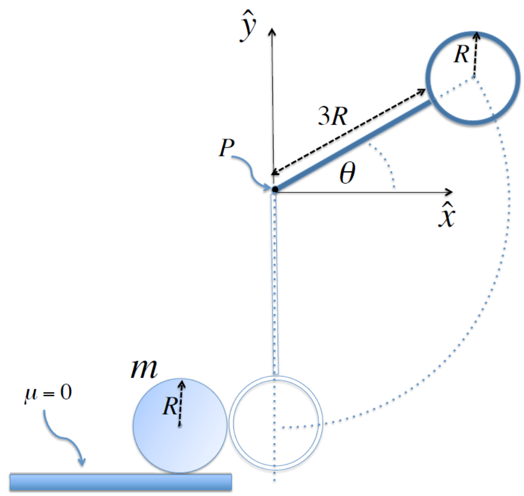
$$\ddot{\theta} = \frac{2f_r}{mR} \qquad (**)$$

De las ecuaciones $(*)$ y $(**)$, despejamos el valor de f_r:

$$f_r = \left(\frac{M - m\sin\alpha}{1 + \dfrac{2(M+m)}{m}} \right) g$$

Problema 5.28.
La figura muestra un péndulo físico que puede girar libremente respecto al pivote P. Dicho péndulo está formado por un anillo de masa M y radio R unido a una barra de masa M y largo $3R$. El péndulo, inicialmente en reposo, se deja caer libremente desde $\theta_0 = 30°$. Posteriormente, el péndulo impacta a un disco de masa m y radio R, justo cuando el péndulo pasa por la vertical. Esta colisión es tal que el péndulo queda en reposo, y el disco adquiere una rapidez v_m. Considere que el disco está inicialmente

en reposo sobre una superficie horizontal libre de roce.



¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la posición del centro de masas $\vec{r}_{cm}$ del péndulo cuando éste se encuentra en el estado inicial?

a) $\vec{r}_{cm} = \dfrac{3\sqrt{3}R}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{3R}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

b) $\vec{r}_{cm} = \dfrac{11R}{8}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{11\sqrt{3}R}{8}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

c) $\vec{r}_{cm} = \dfrac{3R}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{3\sqrt{3}R}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

d) $\vec{r}_{cm} = \dfrac{11\sqrt{3}R}{8}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{11R}{8}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea d la distancia, medida desde el pivote P, a la que se encuentra el centro de masa del péndulo. Así,

$$d = \frac{M\left(\dfrac{3R}{2}\right) + M(3R+R)}{M+M} = \frac{11R}{4}$$

Por tanto, la posición del centro de masa en el estado inicial corresponde a:

$$\vec{r}_{cm} = d\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = d\cos\theta_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + d\sin\theta_0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{11\sqrt{3}R}{8}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{11R}{8}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Problema 5.29.

Para la situación descrita en el Problema 5.28, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al momento de inercia I_P del péndulo respecto a un eje, perpendicular al plano del papel, que pasa por el punto P?

a) $I_P = \dfrac{39}{2}MR^2$

b) $I_P = \dfrac{71}{4}MR^2$

c) $I_P = 18MR^2$

d) $I_P = 22MR^2$

e) $I_P = 20MR^2$

Solución:

Tenemos que:

$$I_P = I_{barra} + I_{anillo}$$

donde

$$\begin{aligned} I_{barra} &= \frac{M(3R)^2}{12} + M\left(\frac{3R}{2}\right)^2 \\ &= 3MR^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{anillo} &= MR^2 + M(3R+R)^2 \\ &= 17MR^2 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$I_P = 20MR^2$$

Problema 5.30.

Para la situación descrita en el Problema 5.28, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde a la rapidez angular ω del péndulo justo antes de chocar con el disco? Considere que d es la distancia entre el punto P y el centro de masa del péndulo.

a) $\omega = \sqrt{\dfrac{6Mgd}{I_P}}$

b) $\omega = \sqrt{\dfrac{2Mgd}{I_P}}$

c) $\omega = \sqrt{\dfrac{3Mgd}{I_P}}$

d) $\omega = \sqrt{\dfrac{2(2+\sqrt{3})Mgd}{I_P}}$

e) $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}Mgd}{I_P}}$

Solución:

Fijando el nivel cero de energía potencial en el punto más bajo del péndulo, la energía inicial del sistema corresponde, únicamente, a energía potencial:

$$E_i = 2Mg{h_{cm}}^{(in)} = 2Mg(4R + d\sin\theta_0) = Mg(8R + d)$$

Justo antes de colisionar con la partícula, la energía del sistema posee dos componentes: cinética rotacional y potencial. Así,

$$E_f = \frac{I_P\omega^2}{2} + 2Mg{h_{cm}}^{(fin)} = \frac{I_P\omega^2}{2} + 2Mg(4R - d)$$

Por conservación de energía,

$$E_i = E_f \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{6Mgd}{I_P}}$$

Problema 5.31.

Para la situación descrita en el Problema 5.28, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo de la fuerza que ejerce el pivote en P justo antes de la colisión?

a) $F_P = 2Mg$

b) $F_P = 2Mg\left(\dfrac{6Md^2}{I_p} + 1\right)$

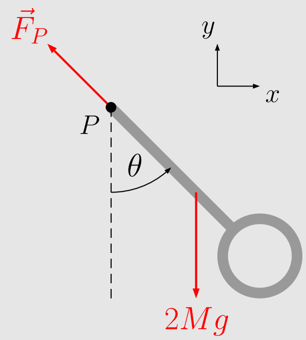
c) $F_P = 2Mg\left(\dfrac{2Md^2}{I_p} + 1\right)$

d) $F_P = 2Mg\left(\dfrac{Md^2}{I_p} + \dfrac{1}{2}\right)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La situación es la siguiente:



La segunda ley de Newton para sólidos rígidos nos dice que

$$\vec{F}_{neta} = 2M\vec{a}_{cm}$$

Utilizando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} -F_P\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - 2Mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} &= 2M\left(\ddot{r}_{cm} - r_{cm}\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + 2M\left(2\dot{r}_{cm}\dot{\theta} + r_{cm}\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -2Md\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + 2Md\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

pues el radio al centro de masa es constante. Nos interesa el instante t^* en que $\theta = 0$, donde:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t^*) &= \omega \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}(t^*) &= -\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t^*) &= \hat{\boldsymbol{\imath}} \end{aligned}$$

Así,

$$F_P\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 2Mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = 2Md\omega^2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2Md\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

y por tanto:

$$F_P = 2Mg + 2Md\omega^2 = 2Mg + 2Md\left(\frac{6Mgd}{I_P}\right) = 2Mg\left(\frac{6Md^2}{I_P} + 1\right)$$

Problema 5.32.
Para la situación descrita en el Problema 5.28, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo de la velocidad v_m que adquiere el disco después de la colisión de la colisión?

1. $v_m = \dfrac{2M\omega d}{m}$
2. $v_m = \sqrt{\dfrac{2MgdI_P}{3R^2m^2}}$

3. $v_m = \sqrt{\dfrac{MgdI_P}{6R^2m^2}}$

4. $v_m = \dfrac{\omega I_P}{4Rm}$

5. Ninguna de las anteriores

Solución:

Como la colisión se realiza cuando el peso y la reacción del pivote apunta en la dirección radial (posición vertical), el momentum angular del sistema se conserva durante la colisión:

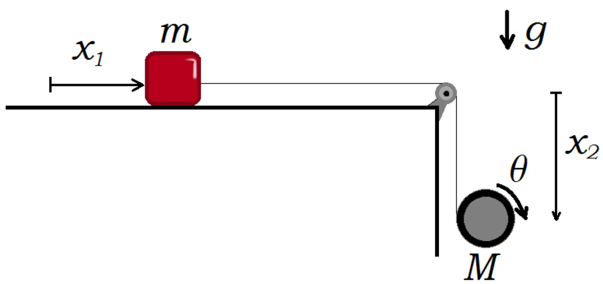
$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ I_P\omega &= m\ell v_m \end{aligned}$$

donde ℓ es la distancia entre el centro de masa del disco y el pivote. Así, $\ell = 5R - R = 4R$ y, por tanto,

$$vm = \frac{I_P\omega}{m\ell} = \frac{I_P\omega}{4mR}$$

Problema 5.33.

En el sistema de la figura, el bloque de la izquierda tiene masa m y descansa sobre una superficie horizontal sin roce. El mismo se encuentra unido mediante una cuerda ideal, que pasa por una polea, también ideal, a un cilindro de masa M y radio R. La cuerda está enrollada en el borde del cilindro como se ilustra en la figura, la cual también muestre el sistema coordenado que debe utilizar.



Cuando el sistema se deja evolucionar, la ecuación de ligadura entre $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ y $\ddot{\theta}$ es:

a) $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - \ddot{\theta}R$

b) $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + 2\ddot{\theta}R$

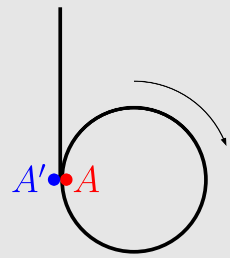
c) $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{\theta}R$

d) $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - 2\ddot{\theta}R$

e) $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \dfrac{\ddot{\theta}R}{2}$

Solución:

Para determinar la ligadura entre las aceleraciones (traslacionales y rotacionales), consideremos el siguiente esquema:



Tomaremos dos puntos: el punto A está ubicado en el disco y el punto A' ubicado en la cuerda. La velocidad del punto A' corresponde a la velocidad que tenga la cuerda, que coincide con la velocidad a la que se mueve el bloque (suponemos que la cuerda se mantiene tensa durante el movimiento):

$$v_{A'} = \dot{x}_1$$

Por otro lado, el punto A está girando a favor de las agujas de reloj y bajando producto de que la cuerda se desenreda. Así, la velocidad del punto A es:

$$v_A = \dot{x}_2 - R\dot{\theta}$$

La condición de rodar sin deslizar nos dice que ambas velocidades son iguales:

$$v_{A'} = v_A \qquad \longrightarrow \qquad a_{A'} = a_A \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + R\ddot{\theta}$$

Problema 5.34.
Considere la situación descrita en el Problema 5.33. La tensión T de la cuerda es:

a) $T = \dfrac{Mmg}{M+m}$

b) $T = \dfrac{Mmg}{m+3M}$

c) $T = \dfrac{Mmg}{m/3+M}$

d) $T = \dfrac{Mmg}{m+M/3}$

e) $T = \dfrac{Mmg}{M+3m}$

Solución:

Las ecuaciones de Newton para ambos cuerpos son:

$$m\ddot{x}_1 = T \qquad \wedge \qquad M\ddot{x}_2 = Mg - T$$

Por otra parte, el torque respecto al centro de masa es:

$$-I\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}} = (-R\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times (-T\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = -RT\,\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \longrightarrow \qquad I\ddot{\theta} = RT$$

De la última ecuación,

$$\ddot{\theta} = \frac{RT}{I} = \frac{2T}{MR}$$

Reemplazando en la ecuación de ligadura,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 + R\ddot{\theta} \\ \left(g - \frac{T}{M}\right) &= \left(\frac{T}{m}\right) + \left(\frac{2T}{M}\right) \\ \frac{Mmg}{M+3m} &= T \end{aligned}$$

Problema 5.35.
Considere la situación descrita en el Problema 5.33. La aceleración de cuerpo m, $\ddot{x}_1$, es:

a) $\ddot{x}_1 = \dfrac{Mg}{M+m}$

b) $\ddot{x}_1 = \dfrac{Mg}{m+3M}$

c) $\ddot{x}_1 = \dfrac{Mg}{m/3+M}$

d) $\ddot{x}_1 = \dfrac{Mg}{m+M/3}$

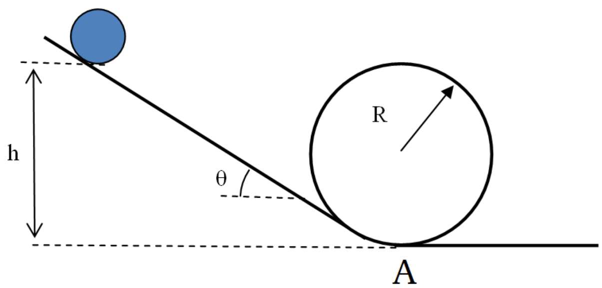
e) $\ddot{x}_1 = \dfrac{Mg}{M+3m}$

Solución:

Es fácil ver que:

$$\ddot{x}_1 = \frac{T}{m} = \frac{Mg}{M+3m}$$

Problema 5.36.
Una esfera sólida homogénea de radio r rueda sin deslizarse a lo largo de una vía que posee una vuelta circular de radio R. La esfera inicia su movimiento partiendo desde el reposo desde una altura h.



¿Cuál es la rapidez v del centro de masa de la esfera al llegar a la base del plano (punto A)?

a) $v = \sqrt{\dfrac{10gh}{7}}$

b) $v = \sqrt{2gh}$

c) $v = \sqrt{\dfrac{10g(h-r)}{7}}$

d) $v = \sqrt{2g(h-r)}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de energía,

$$\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
mg(h+r) &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + mgr \\
mgh &= \frac{7mv^2}{10} \\
\sqrt{\frac{10gh}{7}} &= v
\end{aligned}$$

Problema 5.37.
Para la situación descrita en el Problema 5.36, ¿cuál es la mínima altura h requerida para que la esfera abandone la vía al pasar por el rizo?

a) $h = \dfrac{27(R-r)}{5}$

b) $h = \dfrac{27(R-r)}{10}$

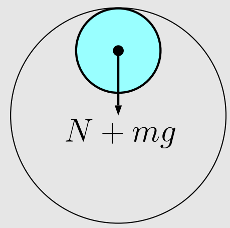
c) $h = \dfrac{10(R-r)}{27}$

d) $h = \dfrac{5(R-r)}{27}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En el punto más alto del rizo,



Por la segunda ley de Newton,

$$\frac{mV^2}{R-r} = N + mg \qquad \longrightarrow \qquad N = m\left(\frac{V^2}{R-r} - g\right)$$

donde V es la rapidez del centro de masa y $(R-r)$ es la distancia entre el centro del rizo y el centro de masa de la esfera. Por conservación de energía,

$$mg(h+r) = \frac{7}{10}mV^2 + mg(2R-r) \qquad \longrightarrow \qquad V^2 = \frac{10g(h-2R+2r)}{7}$$

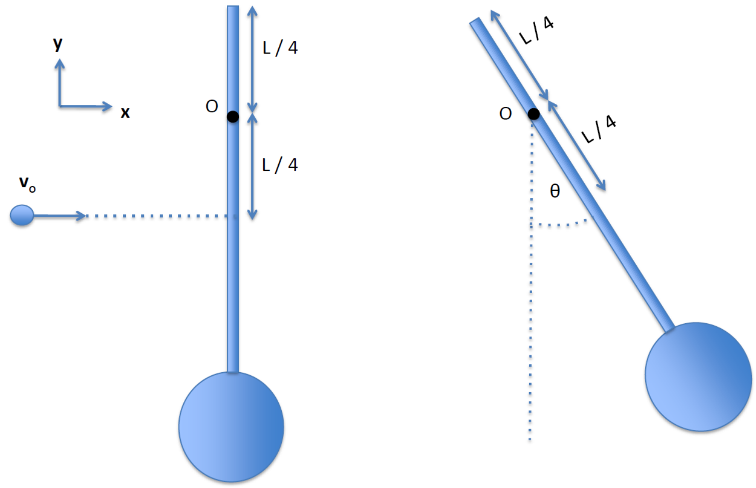
Reemplazando en la normal,

$$N = mg\left(\frac{10(h-2R+2r)}{7(R-r)} - 1\right)$$

Para que la esfera se despegue, $N = 0$ y así:

$$h = \frac{27(R-r)}{10}$$

Problema 5.38.
El sistema representado en la figura está compuesto por una barra delgada homogénea de masa M y largo L, en cuyo extremo inferior está pegado un disco homogéneo de radio R y masa M. La barra está pivoteada en el punto O, a una distancia $L/4$ del extremo superior. Considere que este péndulo físico posee un momento de inercia I_O respecto al pivote. Inicialmente el sistema cuelga en la posición vertical mostrada en la figura, mientras se aproxima una bala de masa m con una velocidad $\vec{v} = v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$, a una altura $L/2$ del extremo superior.



Suponga que, luego de chocar, la bala rebota en dirección opuesta, a la mitad de la rapidez inicial. Por tanto, su velocidad después del choque es $-(v_0/2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. En esta condición, la velocidad angular $\vec{\omega}_D$ que adquiere el sistema barra-disco en el instante justo después del choque es:

1. $\vec{\omega}_D = \dfrac{mv_0L}{2I_O}\,\hat{\boldsymbol{k}}$
2. $\vec{\omega}_D = -\dfrac{mv_0L}{2I_O}\,\hat{\boldsymbol{k}}$
3. $\vec{\omega}_D = -\dfrac{3mv_0L}{8I_O}\,\hat{\boldsymbol{k}}$
4. $\vec{\omega}_D = \dfrac{3mv_0L}{8I_O}\,\hat{\boldsymbol{k}}$
5. Ninguna de las anteriores

Solución:

Por conservación de momentum, respecto al punto O, justo antes y después del choque:

$$
\begin{aligned}
L_A &= L_D \\
\left(-\frac{L}{4}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) \times (mv_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) &= \left(-\frac{L}{4}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) \times \left(-\frac{mv_0}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\right) + I_O\vec{\omega}_D \\
\frac{mLv_0}{4}\,\hat{\boldsymbol{k}} &= -\frac{mLv_0}{8}\,\hat{\boldsymbol{k}} + I_O\vec{\omega}_D \\
\frac{3mLv_0}{8I_O} &= \vec{\omega}_D
\end{aligned}
$$

Problema 5.39.
Para la situación descrita en el Problema 5.36, la magnitud de la rapidez angular mínima después del choque, $\omega_{D,min}$, para que el sistema complete una vuelta alrededor del pivote O es:

a) $\omega_{D,min} = \sqrt{\dfrac{4MgL}{I_O}}$

b) $\omega_{D,min} = \sqrt{\dfrac{4Mg(L+R)}{I_O}}$

c) $\omega_{D,min} = \sqrt{\dfrac{4Mg(L/2+R)}{I_O}}$

d) $\omega_{D,min} = \sqrt{\dfrac{4Mg(L+2R)}{I_O}}$

e) $\omega_{D,min} = \sqrt{\dfrac{4Mg(2L+R)}{I_O}}$

Solución:

Tomaremos como nivel de energía potencial cero en aquella línea horizontal que pasa por el punto O. La rapidez angular mínima es tal que la rapidez angular en el punto más alto de la trayectoria del péndulo es nula.

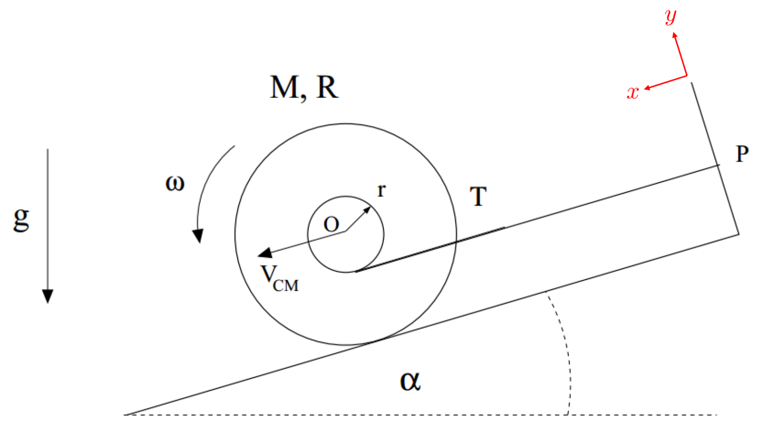
La distancia d entre el centro de masa y el pivote O corresponde a:

$$d = \frac{M\left(\dfrac{L}{4}\right) + M\left(R + \dfrac{3L}{4}\right)}{M+M} = \frac{R+L}{2}$$

Por conservación de energía,

$$\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{I_O {\omega_{D,min}}^2}{2} - 2Mgd &= 2Mgd \\
\frac{I_O {\omega_{D,min}}^2}{2} &= 2Mg(R+L) \\
\omega_{D,min} &= \sqrt{\frac{4Mg(R+L)}{I_O}}
\end{aligned}$$

Problema 5.40.
Considere el cilindro de masa M y radio R, que puede desplazarse por un plano inclinado de ángulo α, como se muestra en la figura. El cilindro tiene una garganta MUY pequeña de radio r en la cual está amarrada una cuerda que, en su otro extremo, está fija en el punto P. Suponga que no hay deslizamiento de la cuerda con respecto a la garganta y que no hay roce.



Entonces, cuando el cilindro rueda plano, el valor de la tensión T de la cuerda es:

a) $T = \dfrac{Mgr\sin\alpha}{R+2r}$

b) $T = \dfrac{MgR\sin\alpha}{R+2r}$

c) $T = \dfrac{MgR^2\sin\alpha}{R^2+2r^2}$

d) $T = \dfrac{Mgr^2\sin\alpha}{R^2+2r^2}$

Solución:

La segunda ley de Newton, aplicada al cilindro, nos dice que:

$$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - T \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} = g\sin\alpha - \frac{T}{M}$$

La condición de no deslizamiento nos permite ligar un par de variables en el problema:

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

El torque, con respecto al centro del cilindro, satisface:

$$-I\omega\,\hat{\boldsymbol{k}} = (-r\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (-T\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) = Tr \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \frac{Tr}{I}$$

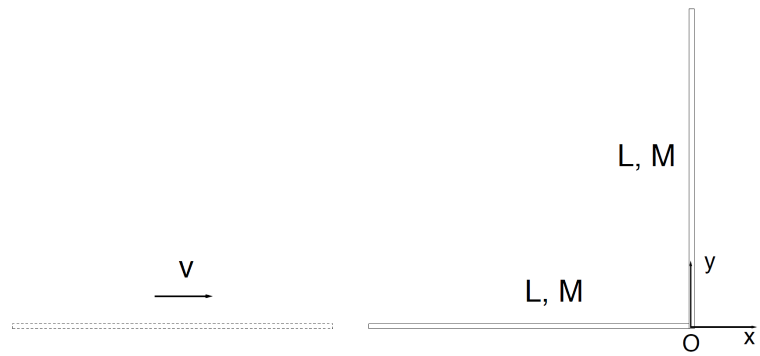
Reemplazando en la condición de ligadura,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= r\ddot{\theta} \\ g\sin\alpha - \frac{T}{M} &= \frac{Tr^2}{I} \\ \frac{MgI\sin\alpha}{I+Mr^2} &= T \end{aligned}$$

Como la garganta es MUY pequeña, el momento de inercia es el mismo que de un cilindro usual. Así,

$$T = \frac{MgR^2\sin\alpha}{R^2+2r^2}$$

Problema 5.41.
Una barra muy delgada de masa M y largo L descansa sobre una superficie horizontal sin roce. Otra barra idéntica se aproxima perpendicular a la primera, desplazándose con una velocidad $v\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (sin rotar) como se muestra en la figura. Gracias a un super pegamento, al chocar las barras quedan instantáneamente unidas en sus extremos en forma rígida, formando un ángulo recto.



Determine la velocidad del centro de masa del sistema después de la colisión:

a) $\vec{v}_{cm} = \dfrac{v}{3}\hat{\boldsymbol{\imath}}$

b) $\vec{v}_{cm} = \dfrac{v}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dfrac{v}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

c) $\vec{v}_{cm} = \dfrac{v}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}$

d) $\vec{v}_{cm} = \dfrac{v}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}} - \dfrac{v}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como no hay fuerzas externas, el momentum se conserva. Así,

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \vec{p}_f \\ Mv\,\hat{\boldsymbol{\imath}} &= (M+M)\vec{v}_{cm} \\ \frac{v}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}} &= \vec{v}_{cm} \end{aligned}$$

Problema 5.42.
Considere la situación descrita en el Problema 5.41. Encuentre la posición del centro de masa del sistema en el instante de la colisión, respecto al sistema de coordenadas que se muestra en la figura:

a) $\vec{R}_{cm} = \vec{0}$

b) $\vec{R}_{cm} = \dfrac{L}{4}(-\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}})$

c) $\vec{R}_{cm} = \dfrac{L}{2}(-\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}})$

d) $\vec{R}_{cm} = \dfrac{L}{\sqrt{2}}(-\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}})$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por definición del centro de masa,

$$\vec{R}_{cm} = \frac{-M\left(\dfrac{L}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + M\left(\dfrac{L}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{M+M} = \frac{L}{4}(-\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}})$$

Problema 5.43.
Considere la situación descrita en el Problema 5.41. Obtenga la rapidez angular de rotación ω del sistema después de la colisión, siendo d es la distancia entre O y el centro de masa del sistema al momento de la colisión, e I_O el momento de inercia del sistema respecto al punto O.

a) $\omega = \dfrac{Mvd}{\sqrt{2}(I_O - 2Md^2)}$

b) $\omega = \dfrac{Mvd}{I_O - 2Md^2}$

c) $\omega = \dfrac{Mvd}{I_O - Md^2}$

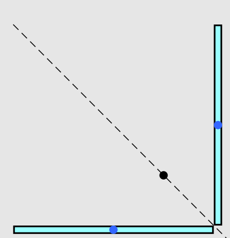
d) $\omega = \dfrac{Mvd}{\sqrt{2}(I_O - Md^2)}$

e) $I_O = 2ML^2$

f) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por simetría, el centro de masa se ubicará en una línea que forma un ángulo de 45° respecto a ambas barras:



El vector $\vec{r}$ que une el centro de masa de la barra que se mueve con el centro de masa del sistema es:

$$\vec{r} = -d \sin 45° \,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \left(\frac{L}{2} - d\right) \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Calculando el momentum angular del sistema antes/después de la colisión, con respecto al centro de masa del sistema,

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= \vec{r}(\vec{Mv\,\hat{\boldsymbol{\imath}}}) \\ &= \frac{Mvd}{\sqrt{2}}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\ \vec{L}_f &= I_{cm}\omega\,\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned}$$

Igualando, por conservación me momentum angular,

$$\omega = \frac{Mvd}{\sqrt{2}I_c m}$$

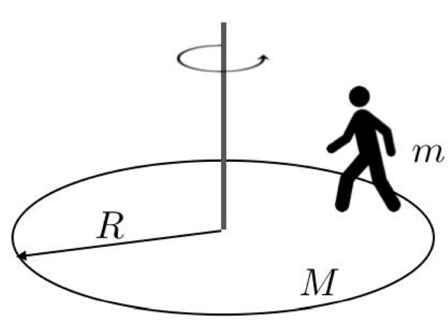
Por el teorema de ejes paralelos,

$$I_O = I_{cm} + 2Md^2 \qquad \longrightarrow \qquad I_{cm} = I_O - 2Md^2$$

Finalmente,

$$\omega = \frac{Mvd}{\sqrt{2}(I_O - 2Md^2)}$$

Problema 5.44.
Una plataforma horizontal en forma de disco, de radio R y masa M, rota en un plano horizontal sin roce alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un estudiante de masa m camina desde el borde de la plataforma hasta una distancia r del centro.



Si la rapidez angular de la plataforma cuando el estudiante estaba en el borde era ω_0, la rapidez angular final del sistema es:

a) $\omega_f = \omega_0$

b) $\omega_f = \dfrac{\omega_0}{2}$

c) $\omega_f = \left(\dfrac{(M+m)R^2}{MR^2+mr^2}\right)\omega_0$

d) $\omega_f = \left(\dfrac{(M+m)R^2}{(M/2+m)r^2}\right)\omega_0$

e) $\omega_f = \left(\dfrac{(M/2+m)R^2}{MR^2/2+mr^2}\right)\omega_0$

Solución:

Si llamamos I_e al momento de inercia del estudiante y I_p al de la plataforma, el momento de inercia inicial del sistema es:

$$I_0 = I_e + I_p = \frac{MR^2}{2} + mR^2 = (M/2+m)R^2$$

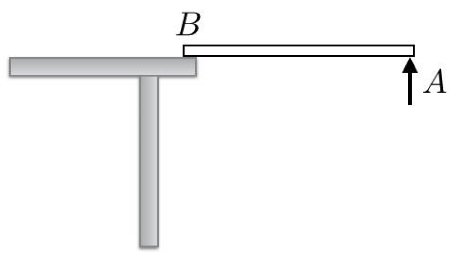
donde hemos considerado al estudiante como una masa puntual. Cuando el estudiante camina hacia el centro, el momento de inercia final será:

$$I_f = \frac{MR^2}{2} + mr^2$$

Por conservación del momentum angular,

$$\begin{aligned} I_0\omega_0 &= I_f\omega_f \\ \left(\frac{I_0}{I_f}\right)\omega_0 &= \omega_f \\ \left(\frac{(M/2+m)R^2}{MR^2/2+mr^2}\right)\omega_0 &= \omega_f \end{aligned}$$

Problema 5.45.
Una barra homogénea de masa m y largo L está suspendida horizontalmente con el extremo B apoyado en una mesa y el extremo A sujetado por un estudiante (como muestra la figura). En $t = t_0$, el estudiante suelta el extremo A.



En ese instante, el módulo de la fuerza normal que ejerce la mesa sobre la barra es:

a) $N = \dfrac{mg}{4}$

b) $N = \dfrac{mg}{3}$

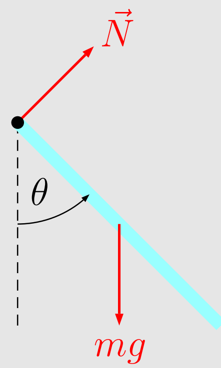
c) $N = \dfrac{mg}{2}$

d) $N = mg$

e) $N = \dfrac{2mg}{3}$

Solución:

La situación es la siguiente:



La segunda ley de Newton para sólidos rígidos nos dice que

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a}_{cm}$$

Utilizando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} N\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} &= m\Big(\ddot{r}_{cm} - r_{cm}\dot{\theta}^2\Big)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + m\Big(2\dot{r}_{cm}\dot{\theta} + r_{cm}\ddot{\theta}\Big)\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

pues el radio al centro de masa es constante. Nos interesa el instante t_0 en donde:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t_0) &= \alpha \\ \dot{\theta}(t_0) &= 0 \qquad \text{(pues parte del reposo)} \\ \theta(t_0) &= \frac{\pi}{2} \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}(t_0) &= \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) &= \hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{aligned}$$

Así,

$$N\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{mL\alpha}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

El torque en torno al punto B viene dado por:

$$\vec{\tau}_B = \left(\frac{L}{2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) \times (-mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = -\frac{mLg\sin\theta}{2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

pero también

$$\vec{\tau}_B = I\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{mL^2\alpha}{3}$$

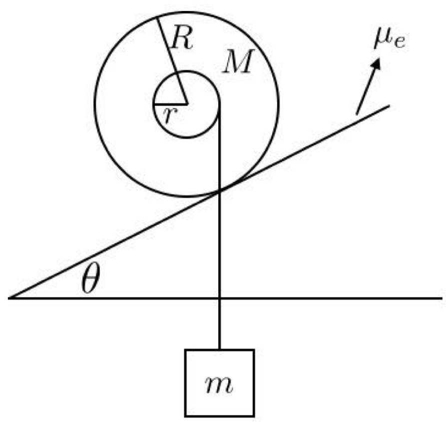
Igualando, y reemplazando el valor del ángulo en $t = t_0$,

$$\alpha = -\frac{3g}{2L}$$

Finalmente,

$$N = mg + \left(\frac{mL}{2}\right)\left(-\frac{3g}{2L}\right) = \frac{m}{4}$$

Problema 5.46.
Una bobina de masa M consiste en un cilindro central de radio r y dos discos en cada extremo de radio R. La bobina está puesta en una superficie inclinada por la cual puede rodar sin resbalar, y una masa m cuelga de una cuerda enrollada alrededor de la bobina (ver figura).



Si consideramos que el sistema está en equilibrio, el ángulo de inclinación de la superficie es:

a) $\sin\theta = \dfrac{mr}{MR}$

b) $\sin\theta = \dfrac{mr}{(M+m)R}$

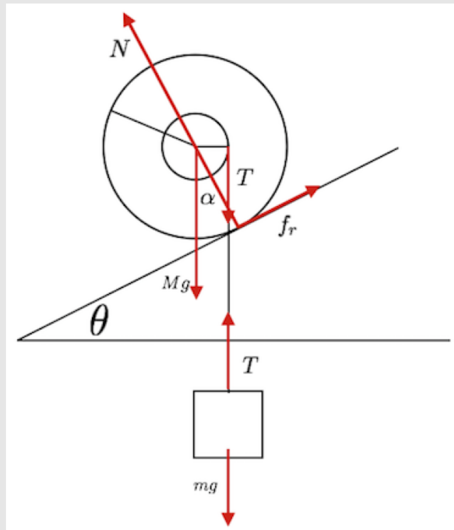
c) $\cos\theta = \dfrac{mr}{(M+m)R}$

d) $\cos\theta = \dfrac{mr}{MR}$

e) $\cos\theta = \dfrac{(M+m)r}{MR}$

Solución:

La situación es la siguiente:



Como el sistema está en equilibrio, las ecuaciones de fuerza y torque son:

$$\begin{aligned} T &= mg \\ Mg\sin\theta + T\sin\theta - f_r &= 0 \\ Mg\cos\theta + T\cos\theta &= N \\ -Tr + Rf_r &= 0 \end{aligned}$$

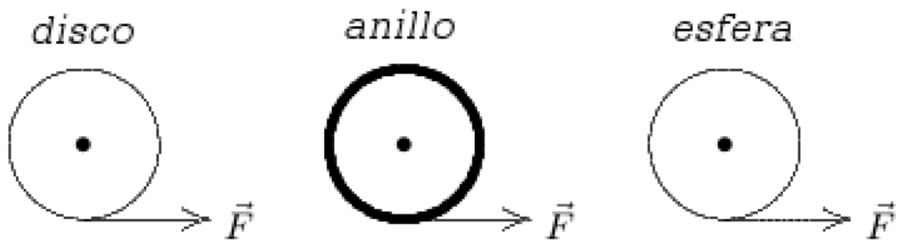
De las dos primeras ecuaciones,

$$f_r = (M+m)g\sin\theta$$

Así,

$$\begin{aligned} -Tr + Rf_r &= 0 \\ -mgr + R(M+m)g\sin\theta &= \\ \sin\theta &= \frac{mr}{R(M+m)} \end{aligned}$$

Problema 5.47.
Un disco uniforme, un anillo delgado y una esfera uniforme, todos con la misma masa y el mismo radio exterior, son libres de rotar alrededor de un eje que pasa por su centro. Considerar que el anillo se conecta al eje de rotación por delgados radios. Los objetos parten del reposo e idénticas fuerzas son aplicadas simultáneamente en los bordes de los objetos, como se muestra.



Ordenar los objetos de acuerdo con su momento angular después de un dado tiempo Δt, de menor a mayor:

a) Disco, anillo, esfera

b) Anillo, disco, esfera

c) Anillo, esfera, disco

d) Esfera, disco, anillo

e) Todos iguales

Solución:

Usando la relación entre el torque aplicado y la variación del momento angular,

$$\vec{\tau}_{cm} = \vec{r}_{F/cm} \times \vec{F} = RF\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

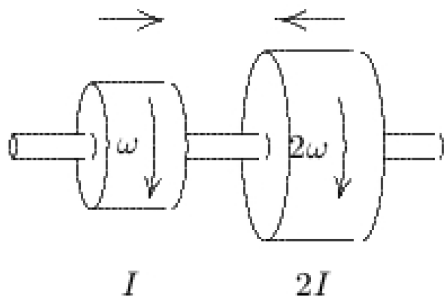
Como la variación del momentum angular es constante,

$$\Delta\vec{L} = \vec{L} = RF\Delta t\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

pues los tres objetos parten del reposo y sin rotar. El radio de los objetos, la fuerza aplicada y el intervalo de tiempo son los mismos para los tres objetos. Por tanto,

$$\vec{L}_{disco} = \vec{L}_{anillo} = \vec{L}_{esfera}$$

Problema 5.48.
Dos discos montados sobre rodamientos de bajo rozamiento giran sobre un mismo eje. El primer disco tiene momento de inercia I y su velocidad angular es ω. El segundo disco tiene momento de inercia $2I$ y velocidad angular 2ω. Los dos discos son lentamente forzados a juntarse hasta que se acoplan y alcanzan una velocidad angular común.



¿Cuánto vale la velocidad angular final del sistema?

a) $\sqrt{3}\omega$

b) $\sqrt{\frac{7}{3}}\omega$

c) ω

d) $\frac{5\omega}{3}$

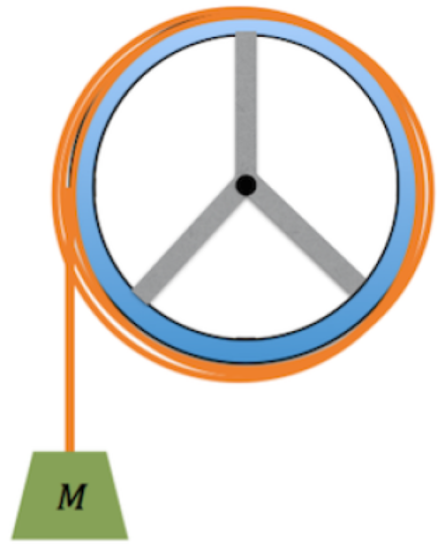
e) 3ω

Solución:

Como no hay fuerzas externas al sistema formado por los dos discos y el agente que los acerca, se conserva el momento angular. Así,

$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ I\omega + (2I)(2\omega) &= (I + 2I)\omega_f \\ \frac{5\omega}{3} &= \omega_f \end{aligned}$$

Problema 5.49.
Una rueda está compuesta por un aro de masa M y radio L, y 3 barras de masa M y largo L que forman ángulos de 120° entre ellas. La rueda puede girar libre de roce respecto al eje perpendicular que pasa por su centro. Una cuerda de masa despreciable está enrollada en la rueda y un bloque M está atado en el otro extremo.



El momento de inercia I de la rueda respecto al eje de rotación está dado por:

a) $I = 2ML^2$

b) $I = \dfrac{4ML^2}{3}$

c) $I = \dfrac{5ML^2}{4}$

d) $I = 3ML^2$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sean I_a e I_b los momentos de inercia del anillo y el de cada barra. Así,

$$I = I_a + 3I_b = MR^2 + 3\left(\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = 2MR^2$$

Problema 5.50.
Considere la situación descrita en el Problema 5.49. Si en cierto instante el sistema se deja evolucionar libremente desde el reposo, el módulo de la aceleración del bloque en ese instante es:

a) $a = \dfrac{MgL^2}{ML^2 + 4I}$

b) $a = \dfrac{MgL^2}{I}$

c) $a = \dfrac{MgL^2}{ML^2 + 2I}$

d) $a = \dfrac{MgL^2}{ML^2 + I}$

e) $a = \dfrac{MgL^2}{2I}$

Solución:

La ecuación me movimiento para el bloque es:

$$M\ddot{y} = Mg - T \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{y} = g - \frac{T}{M}$$

Por la condición de rodar sin deslizar,

$$\ddot{y} = L\ddot{\theta}$$

Aplicando la ecuación de torque con respecto al eje de rotación,

$$I\ddot{\theta} = TL \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{\theta} = \frac{TL}{I}$$

Reemplazando en la ecuación de ligadura,

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= L\ddot{\theta} \\ g - \frac{T}{M} &= \frac{TL^2}{I} \\ \frac{MgI}{ML^2 + I} &= T \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\ddot{y} = a = g - \frac{T}{M} = \frac{MgL^2}{ML^2 + I}$$

Problema 5.51.
Para la situación descrita en el Problema 5.49, determine la rapidez v que posee el bloque cuando ha recorrido una distancia h.

1. $v = \sqrt{\dfrac{4ghML^2}{ML^2 + I}}$
2. $v = \sqrt{\dfrac{2ghML^2}{I}}$
3. $v = \sqrt{\dfrac{2ghML^2}{ML^2 + I}}$
4. $v = \sqrt{\dfrac{ghML^2}{2(ML^2 + I)}}$

5. Ninguna de las anteriores

Solución:

Por tratarse de un movimiento a aceleración constante,

$$v(t) = a\,t \qquad \wedge \qquad x(t) = \frac{a\,t^2}{2}$$

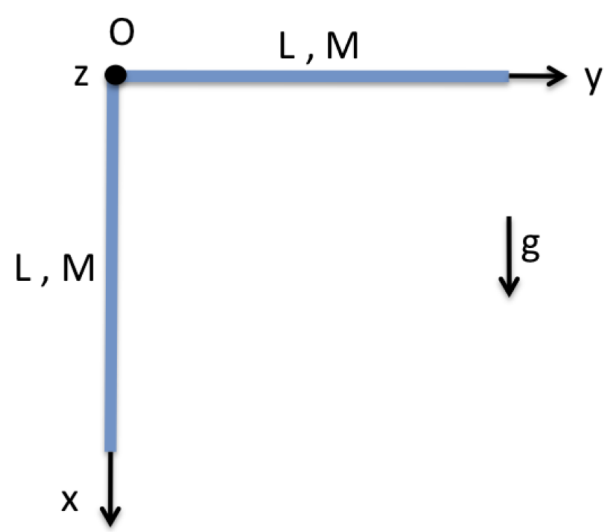
Sea t^* el instante de tiempo en que se ha recorrido una distancia h. Así,

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Reemplazando,

$$v = v(t^*) = \sqrt{2ha} = \sqrt{\frac{2ghML^2}{ML^2 + I}}$$

Problema 5.52.
Considere 2 barras idénticas de masa M y largo L (con ancho despreciable), y densidad lineal ρ. Las barras están soldadas entre ellas formando un ángulo recto y pivotadas en el punto O, el cual corresponde al origen del sistema de coordenadas (ver figura). Considere que ambas barras tienen una densidad variable, $\rho(x) = Ax$ para la barra vertical y $\rho(y) = Ay$ para la barra horizontal, donde A es una constante, y x e y son las coordenadas respectivas con origen en el punto O.



Calcule el momento de inercia I_O con respecto a un eje perpendicular a ambas barras y que pasa por el punto O (eje Z).

a) $I_O = ML^2$

b) $I_O = \dfrac{2ML^2}{3}$

c) $I_O = \dfrac{ML^2}{4}$

d) $I_O = \dfrac{ML^2}{3}$

e) $I_O = 2ML^2$

Solución:

Consideremos una de las barras, pues la posee un comportamiento idéntico por la simetría del problema. La masa de cada una de ellas está dada por:

$$M = \int_0^L \rho(x)\ dx = \int_0^L Ax\ dx = \frac{AL^2}{2} \qquad \longrightarrow \qquad A = \frac{2M}{L^2}$$

El momento de inercia respecto al punto O es:

$$I_{barra} = \int_0^L x^2\rho(x)\ dx = \int_0^L Ax^3\ dx = \frac{AL^4}{4} = \frac{ML^2}{2}$$

Por tanto, $I_O = 2I_{barra} = ML^2$

Problema 5.53.
Para la situación descrita en el Problema 5.52, en cierto instante el sistema se deja evolucionar libremente bajo la acción de la gravedad y desde el reposo. La posición inicial coincide con la mostrada en la figura. El módulo de la aceleración angular del sistema justo en el inicio:

a) $\alpha = \dfrac{LMg}{3I_O}$

b) $\alpha = \dfrac{2LMg}{3I_O}$

c) $\alpha = \dfrac{LMg}{I_O}$

d) $\alpha = \dfrac{LMg}{2I_O}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Lo primero que necesitamos es ubicar el centro de masa del sistema. El centro de masa de una de las barras se encuentra a una distancia d del origen, donde

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{M}\int_0^L x\rho(x)\ dx \\ &= \frac{1}{M}\int_0^L Ax^2\ dx \\ &= \frac{1}{M}\left(\frac{AL^3}{3}\right) \\ &= \frac{2L}{3} \end{aligned}$$

Así, el centro de masa en el instante inicial está ubicado en la posición:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M(d\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) + M(d\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})}{M+M} = \frac{d}{2}(\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = \frac{L}{3}(\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \,\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$

El torque respecto a O en el instante inicial viene dado por:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{cm} \times (2Mg\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) = -\frac{2MgL}{3}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Por otra parte,

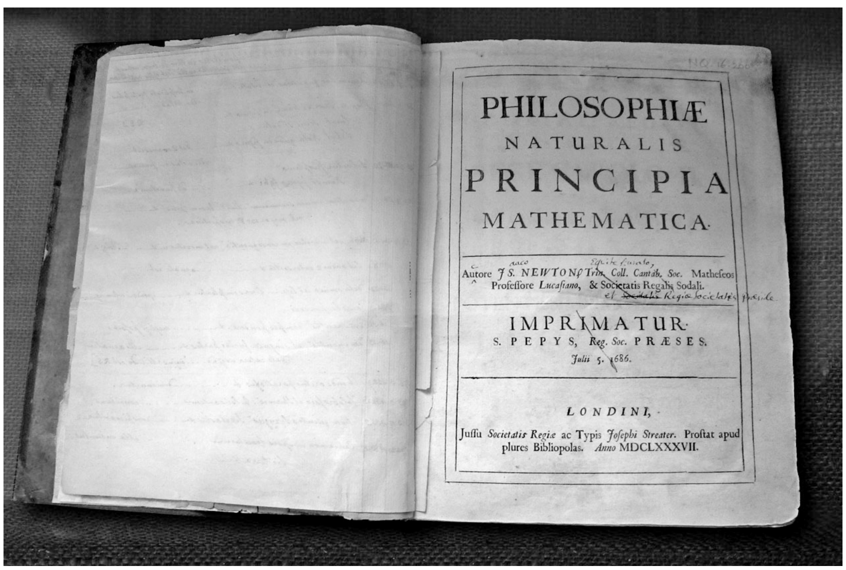
$$\vec{\tau}_O = -I_O\alpha\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Igualando,

$$\alpha = \frac{2MgL}{3I_O}$$

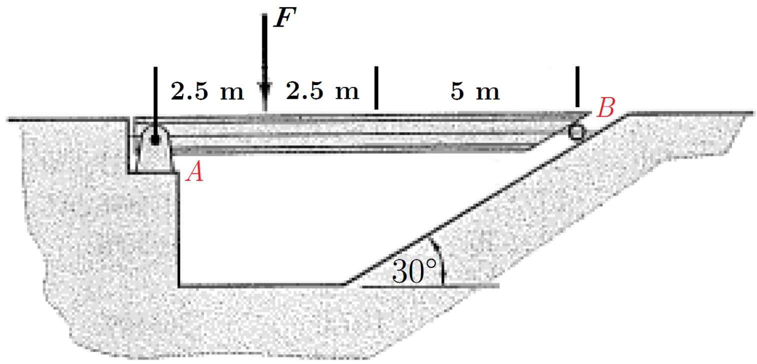
6

Estructuras estáticas



Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 6.1.
La estructura del puente mostrado en la figura tiene un peso P y su centro de gravedad se localiza en la mitad del tramo AB. Calcular la componente vertical de la reacción en el soporte A del puente, si se aplica una carga F en el punto indicado en la figura.



a) $\dfrac{3F+2P}{4}$

b) $\dfrac{3F+2P}{2\sqrt{3}}$

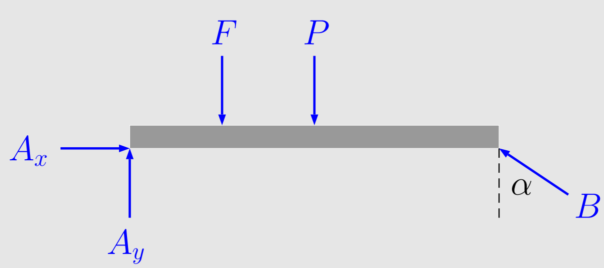
c) $\dfrac{\sqrt{3}(F+2P)}{4}$

d) $\dfrac{F+2P}{4}$

e) $\dfrac{F+2P}{2\sqrt{3}}$

Solución:

Consideremos el siguiente diagrama de cuerpo libre:



De las condiciones de equilibrio,

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x - B\sin\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y - F - P + B\cos\alpha = 0$$
$$\sum \tau_A = 0 \quad \rightarrow \quad -(d)F - (2d)P + (4d)B\cos\alpha = 0$$

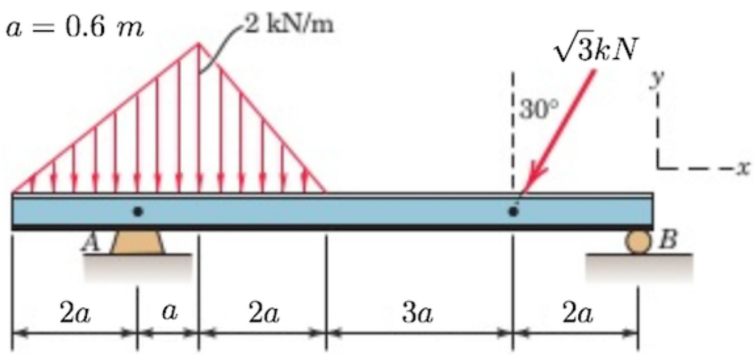
La última ecuación nos indica que

$$B = \frac{F + 2P}{4\cos\alpha}$$

Reemplazando en la segunda ecuación,

$$A_y = F + P - B\cos\alpha = F + P - \frac{F + 2P}{4} = \frac{3F + 2P}{4}$$

Problema 6.2.
La figura abajo muestra una viga sujeta a la combinación de cargas, una distribuida y otra puntual. Determinar las carga puntual equivalente a la carga distribuida aplicada, considerando el valor numérico de a.



a) 2.4 kN

b) 1.5 kN

c) 1.8 kN

d) 6 kN

e) 3 kN

Solución:

Sea $\overline{F}$ la carga puntual equivalente. Con ello,

$$\overline{F} = \int_{x_i}^{x_f} w(x)\ dx = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{5a \cdot 2}{2} = 5a = 3\,\text{kN}$$

Por completitud, y dado que será utilizado posteriormente, determinamos la posición $\overline{x}$ (medida desde el extremo izquierdo de la barra) en que actúa la carga equivalente:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_{x_i}^{x_f} x\, w(x)\ dx}{\displaystyle\int_{x_i}^{x_f} w(x)\ dx} = \frac{\frac{40a^2}{3}}{5a} = \frac{8a}{3} = 1.6\,\text{m}$$

Problema 6.3.
Considerando la configuración del Problema 6.2, determinar las componentes A_x y B_y de las reacciones en A y B.

a) $A_x = \frac{25}{8}\,\text{kN} \quad \wedge \quad B_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{kN}$

b) $A_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{kN} \quad \wedge \quad B_y = \frac{11}{8}\,\text{kN}$

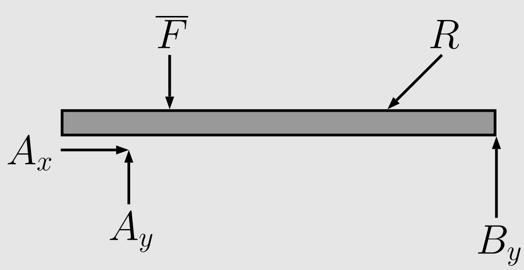
c) $A_x = \frac{25}{8}\,\text{kN} \quad \wedge \quad B_y = \frac{11}{8}\,\text{kN}$

d) $A_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{kN} \quad \wedge \quad B_y = \frac{25}{8}\,\text{kN}$

e) $A_x = \frac{11}{8}\,\text{kN} \quad \wedge \quad B_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{kN}$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



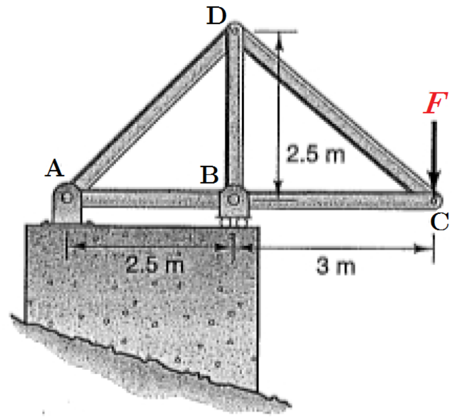
De las condiciones de equilibrio,

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 \quad &\rightarrow \quad A_x - R\sin 30^\circ = 0 \\
\sum F_y = 0 \quad &\rightarrow \quad A_y + B_y - \overline{F} - R\cos 30^\circ = 0 \\
\sum \tau_B = 0 \quad &\rightarrow \quad (8a)A_y - (10a - \overline{x})\,\overline{F} - (2a)R\cos 30^\circ = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo,

$$A_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{kN} \qquad \wedge \qquad B_y = \frac{11}{8}\,\text{kN}$$

Problema 6.4.
La siguiente estructura soporta un techo voladizo y se diseña como una armadura simple para sostener una carga $F = 5\,\text{kN}$. Calcule la magnitud las reacciones verticales en los soportes A y B.



a) $A_y = 1.2F,\ B_y = 2.2F$

b) $A_y = 0.5F,\ B_y = 0.5F$

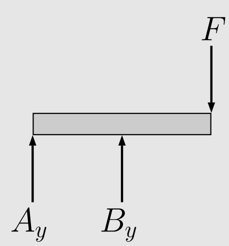
c) $A_y = F,\ B_y = 0$

d) $A_y = 1.2F,\ B_y = 0.5F$

e) $A_y = 0,\ B_y = F$

Solución:

Consideremos el siguiente diagrama de cuerpo libre:



donde hemos incluido que $A_x = 0$, pues es la única fuerza que en la dirección del eje X. Aplicando las condiciones de equilibrio restantes, tenemos que:

$$A_y + B_y - F = 0 \qquad \wedge \qquad -5.5F + 2.5B_y = 0$$

Resolviendo,

$$B_y = 2.2F \qquad \wedge \qquad A_y = -1.2F$$

Problema 6.5.

Considerando la configuración del Problema 6.4, determine cuánto vale el módulo de la fuerza en AD y DC si α es el ángulo entre AB y AD mientras que β es el ángulo entre DC y la vertical.

a) $AD = A_y \sin\alpha,\ DC = F\cos\beta$

b) $AD = A_y \cos\beta,\ DC = \dfrac{F}{\sin\beta}$

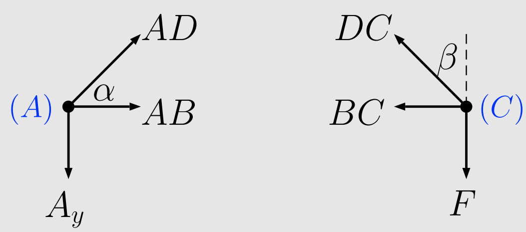
c) Ambas son iguales $\dfrac{F}{\cos\beta}$

d) $AD = \dfrac{A_y}{\sin\beta},\ DC = \dfrac{F}{\sin\alpha}$

e) $AD = \dfrac{A_y}{\sin\alpha},\ DC = \dfrac{F}{\cos\beta}$

Solución:

Aplicando el método de los nodos en A y C, tenemos que:



donde hemos tomado A_y hacia abajo pero positiva. Del equilibrio de fuerzas en el eje Y para el nodo A, se cumple que:

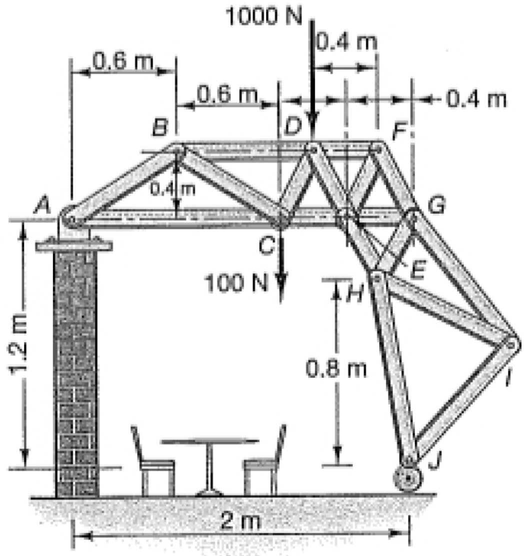
$$-A_y + AD\sin\alpha = 0 \qquad \longrightarrow \qquad AD = \frac{A_y}{\sin\alpha}$$

Del equilibrio de fuerzas en el eje Y para el nodo C,

$$-F + DC\cos\beta = 0 \qquad \longrightarrow \qquad DC = \frac{F}{\cos\beta}$$

Problema 6.6.

Se diseña un atrio para una cafetería al aire libre con una armadura de sección transversal y cargas ilustradas en la figura. Calcular el módulo de la fuerza en el miembro AC, asumiendo que A_y está dirigido hacia arriba.



a) $\dfrac{5A_y}{2}$

b) $\dfrac{2A_y}{5}$

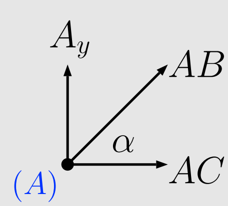
c) $\dfrac{2A_y}{3}$

d) $\dfrac{3A_y}{2}$

e) $\dfrac{3A_y}{5}$

Solución:

Sea α el ángulo entre las barras AB y AC. En este caso, no necesitamos determinar el valor de las fuerzas externas a las estructura, sino solo aplicar el método de nodos al nodo A:



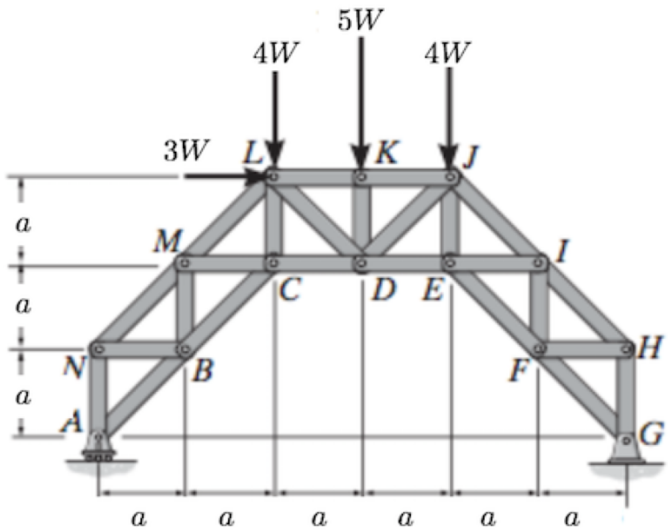
Aplicando las condiciones de equilibrio en dicho nodo,

$$\sum F_x{}^{(A)} = 0 \quad \rightarrow \quad AB\cos\alpha + AC = 0$$
$$\sum F_y{}^{(A)} = 0 \quad \rightarrow \quad AB\sin\alpha + A_y = 0$$

Resolviendo,

$$AC = A_y \cot\alpha = \frac{3A_y}{2}$$

Problema 6.7.
Para la armadura que se muestra a continuación, el módulo de las reacciones en A y G son:



a) $A_y = 2W,\ A_x = 3W,\ G_y = 8W$

b) $A_y = 5W,\ G_x = 3W,\ G_y = 8W$

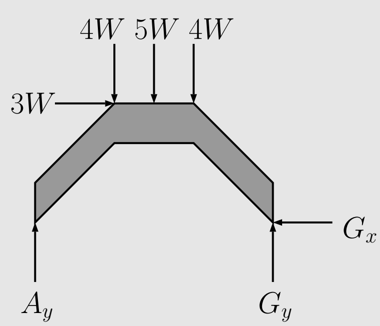
c) $A_y = 2W,\ G_x = 3W,\ G_y = 2W$

d) $A_y = 5W,\ G_x = 8W,\ G_y = 8W$

e) $A_y = 2W,\ A_x = 8W,\ G_y = 3W$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



De las condiciones de equilibrio,

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad 3W - G_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y + G_y - 13W = 0$$
$$\sum \tau_A = 0 \quad \rightarrow \quad (3a)3W + (2a)4W + (3a)5W + (4a)4W - (6a)G_y = 0$$

Resolviendo,

$$G_y = 8W \quad \wedge \quad G_x = 3W \quad \wedge \quad A_y = 5W$$

Problema 6.8.
Considerando la configuración del Problema 6.7, determine la fuerza en los miembros EF y JI e indique si están en tensión o compresión.

a) $EF = 2\sqrt{2}W$ (C), $JI = 10\sqrt{2}W$ (C)

b) $EF = 2\sqrt{2}W$ (T), $JI = 10\sqrt{2}W$ (T)

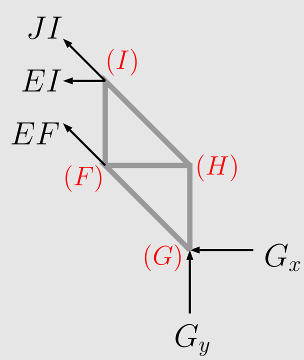
c) $EF = 2\sqrt{2}W$ (T), $JI = 10\sqrt{2}W$ (C)

d) $EF = 5\sqrt{2}W$ (T), $JI = 5\sqrt{2}W$ (C)

e) $EF = 5\sqrt{2}W$ (C), $JI = 3\sqrt{2}W$ (T)

Solución:

Utilizando el método de las secciones, realizamos el siguiente corte en la estructura:



Por suma de torques con respecto al punto I, se tiene que:

$$\sum \tau_I = 0 \qquad \longrightarrow \qquad (2a)G_x - (a)G_y + (a)EF \sin 45^\circ = 0$$

y con ello

$$EF = \sqrt{2}(G_y - 2G_x) = 2\sqrt{2}W$$

Como el resultado es mayor que cero y colocamos la fuerza apuntando hacia afuera de la estructura, la fuerza es de **tensión**. Ahora, por suma de fuerzas en el eje Y,

$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad G_y + JI \cos 45^\circ + EF \cos 45^\circ = 0$$

de donde se obtiene que

$$JI = -\sqrt{2}(G_y + \sqrt{2}EF) = -10\sqrt{2}W$$

y la fuerza es de **compresión**.

Problema 6.9.
Considerando la configuración del Problema 6.7, determine la fuerza en los miembros KL y LD e indique si están en tensión o compresión.

a) $KL = 14W$ (C), $LD = \sqrt{2}W$ (T)

b) $KL = 4W$ (C), $LD = 9\sqrt{2}W$ (T)

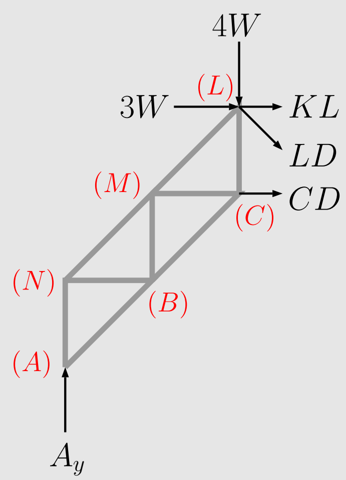
c) $KL = 4W$ (T), $LD = \sqrt{2}W$ (T)

d) $KL = 14\sqrt{2}W$ (C), $LD = 9\sqrt{2}W$ (T)

e) $KL = 4\sqrt{2}W$ (C), $LD = \sqrt{2}W$ (C)

Solución:

Utilizando el método de las secciones, realizamos el siguiente corte en la estructura:



Por suma de fuerzas en el eje Y, se tiene que:

$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad A_y - 4W - LD\cos 45° = 0$$

y con ello

$$LD = \sqrt{2}W$$

en **tensión**. Ahora, por suma de torques con respecto al punto D,

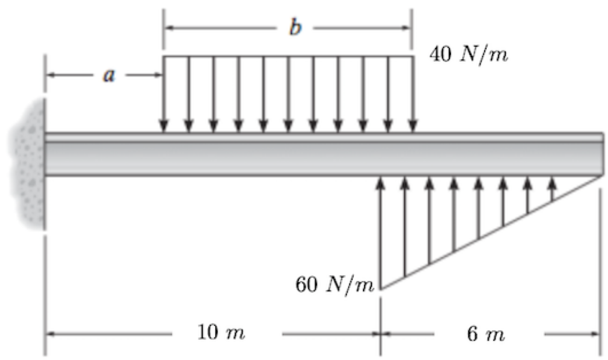
$$\sum \tau_D = 0 \qquad \longrightarrow \qquad a(3W + KL + LD\sin 45°) + (2a)Ay = 0$$

Resolviendo,

$$KL = -14W$$

en **compresión**.

Problema 6.10.
Una viga está sometida a dos cargas distribuidas, como se muestra en la figura. Determine la longitud b de la carga uniforme y su posición a sobre la viga, de manera que la fuerza resultante y el momento resultante de ambas cargas sean iguales a cero.



a) $b = 9.00\,\text{m},\ a = 12.00\,\text{m}$

b) $b = 4.50\,\text{m},\ a = 11.75\,\text{m}$

c) $b = 9.00\,\text{m},\ a = 3.75\,\text{m}$

d) $b = 4.50\,\text{m},\ a = 9.75\,\text{m}$

e) $b = 9.75\,\text{m},\ a = 4.50\,\text{m}$

Solución:

Lo primero que hacemos es calcular las fuerzas equivalentes. Para la distribución de carga superior, su fuerza equivalente F_{sup} es el área del rectángulo correspondiente; para la distribución de carga inferior, F_{inf} es el área del triángulo. Así,

$$\begin{aligned} F_{sup} &= F_{inf} \\ 40 \cdot b &= \frac{6 \cdot 60}{2} \end{aligned}$$

y por tanto

$$b = 4.5\,\text{m}$$

Para calcular los torques resultantes, debemos conocer el lugar de aplicación de ambas fuerzas equivalentes (x_{sup} y x_{inf}) medidos desde el empotramiento:

$$x_{sup} = a + \frac{b}{2} \qquad \wedge \qquad x_{inf} = 10 + \frac{6}{3} = 12$$

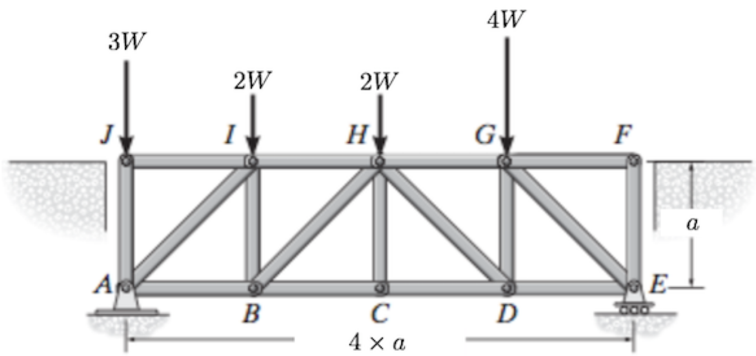
Igualando,

$$\begin{aligned} x_{sup}F_{sup} &= x_{inf}F_{inf} \\ 40b\left(a + \frac{b}{2}\right) &= 2160 \end{aligned}$$

obtenemos que

$$a = 9.75\,\text{m}$$

Problema 6.11.
La armadura *Howe* está sometida a las cargas que muestra la figura. El módulo de las reacciones en A y E son:



a) $A_x = 0,\ A_y = 13.5W,\ E_y = 8W$

b) $A_x = 0,\ A_y = 6.5W,\ E_y = 4.5W$

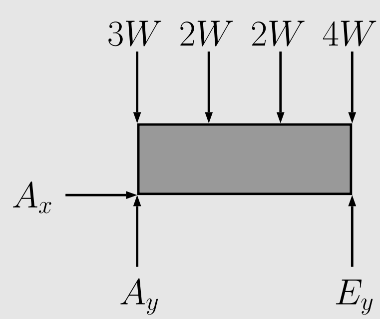
c) $A_x = 0,\ A_y = 6.5W,\ E_y = 8W$

d) $A_x = 0,\ A_y = 13.5W,\ E_y = 0$

e) $A_y = 0,\ A_x = 6.5W,\ E_y = 4.5W$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



De las condiciones de equilibrio,

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y + E_y - 11W = 0$$
$$\sum \tau_A = 0 \quad \rightarrow \quad (4a)E_y + (a)2W + (2a)2W + (3a)4W = 0$$

Así,

$$A_x = 0 \qquad \wedge \qquad E_y = 4.5W \qquad \wedge \qquad A_y = 6.5W$$

Problema 6.12.
Considerando la configuración del Problema 6.11, determine la fuerza en los miembros HD y GD e indique si están en tensión o compresión.

a) $HD = 0.5\sqrt{2}W$ (C), $GD = 0.5W$ (T)

b) $HD = 0.5\sqrt{2}W$ (T), $GD = 0.5W$ (T)

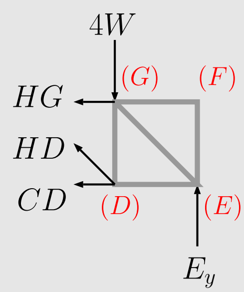
c) $HD = 5W$ (C), $GD = 0.5W$ (T)

d) $HD = 0.5W$ (C), $GD = 0.5\sqrt{2}W$ (C)

e) $HD = 0.5W$ (C), $GD = 0$

Solución:

Utilizando el método de las secciones, realizamos el siguiente corte en la estructura:



Por suma de fuerzas en el eje Y, se tiene que:

$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad E_y + HD\cos 45° - 4W = 0$$

Resolviendo,

$$HD = -0.5\sqrt{2}W$$

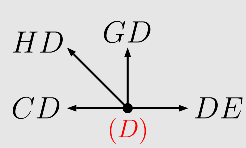
y la barra esté en **compresión**. Por suma de torques con respecto al punto G,

$$\sum \tau_G = 0 \qquad \longrightarrow \qquad a(CD + HD\cos 45°) - a(E_y) = 0$$

y así

$$CD = 5W$$

donde hemos utilizado el valor negativo de HD, pues mantenemos el sentido de la fuerza. Ahora, en el nodo D tenemos que:



$$\sum F_y{}^{(D)} = 0 \quad \rightarrow \quad GD + HD \sin\alpha = 0$$

Finalmente,

$$GD = 0.5W$$

en **tensión**.

Problema 6.13.
Considerando la configuración del Problema 6.11, determine la fuerza en los miembros BC y HB e indique si están en tensión o compresión.

a) $BC = 0,\ HB = 1.5\sqrt{2}W$ (T)

b) $BC = 1.5\sqrt{2}W$ (C), $HB = 0$

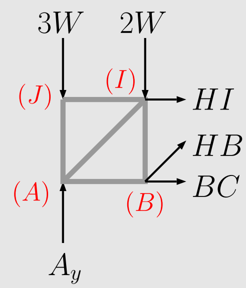
c) $BC = 9W$ (T), $HB = 1.5\sqrt{2}W$ (C)

d) $BC = 1.5W\sqrt{2}$ (T), $HB = 0$

e) $BC = 5W$ (T), $HB = 1.5\sqrt{2}W$ (C)

Solución:

Utilizando el método de las secciones, realizamos el siguiente corte en la estructura:



De la suma de fuerzas en el eje Y,

$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad A_y - 5W + HB \sin 45° = 0$$

y con ello

$$HB = -1.5\sqrt{2}W$$

en **compresión**. Por otra parte, de la suma de torques en el punto I,

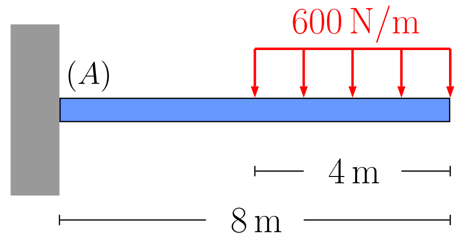
$$\sum \tau_I = 0 \qquad \longrightarrow \qquad a(A_y) - a(BC + HB \cos 45°) = 0$$

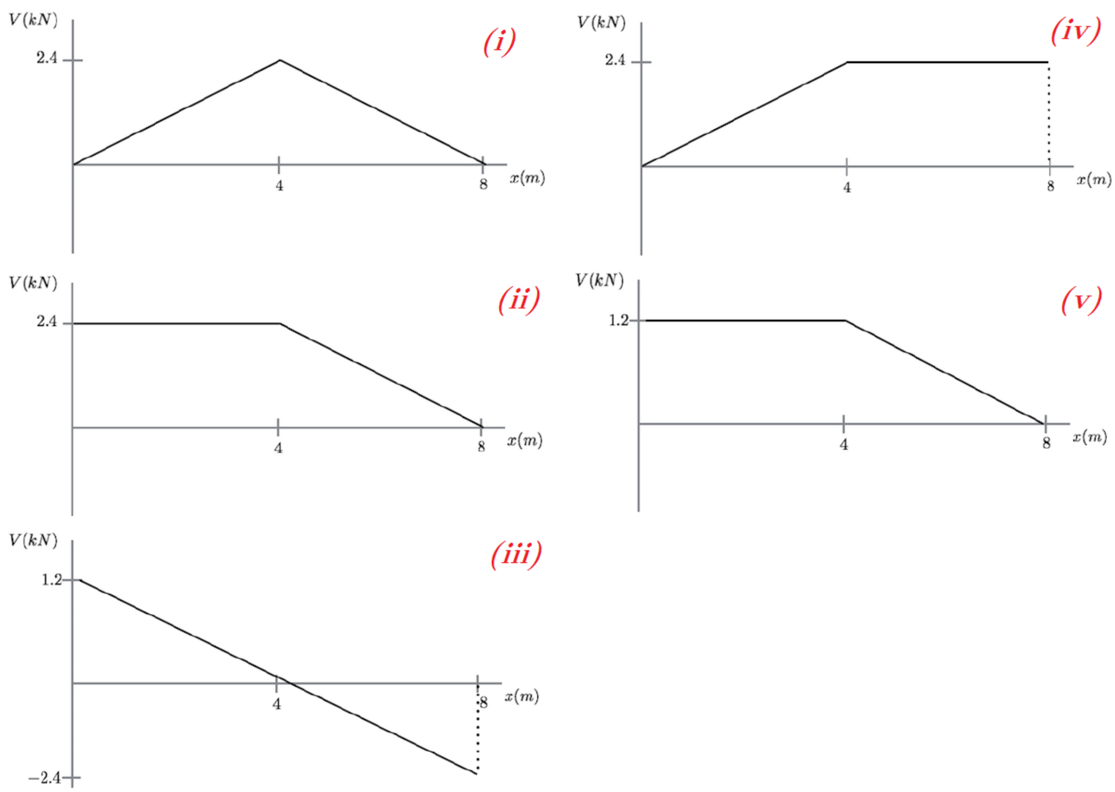
Resolviendo,

$$BC = 5W$$

en **tensión**.

Problema 6.14.
La siguiente viga se encuentra empotrada en el punto (A) y posee una masa despreciable. Sobre ella actúa una fuerza distribuida, como muestra la figura. El gráfico para el esfuerzo de corte $V(x)$ es:





a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

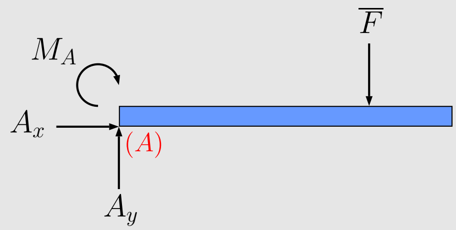
c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Diagrama (v)

Solución:

Primero que todo, calculamos las reacciones en el punto (A). El diagrama de cuerpo libre para la situación descrita es el siguiente:



donde $\overline{F} = 2.4\,\text{kN}$ es la fuerza equivalente que actúa a una distancia $\overline{x} = 4 + 4/2 = 6\,\text{m}$ desde el empotramiento. De las condiciones de equilibrio,

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 \quad &\rightarrow \quad A_x = 0\\ \sum F_y = 0 \quad &\rightarrow \quad A_y - \overline{F} = 0\\ \sum \tau_B = 0 \quad &\rightarrow \quad M_A + \overline{x}\overline{F} = 0\end{aligned}$$

Así, las reacciones son:

$$A_x = 0\,\text{kN} \qquad \wedge \qquad A_y = 2.4\,\text{kN} \qquad \wedge \qquad M_A = -14.4\,\text{kN}{\cdot}\text{m}$$

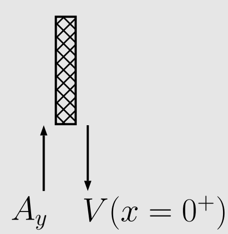
Recordemos la relación diferencial entre la carga distribuida y el esfuerzo de corte:

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \qquad \longrightarrow \qquad V(x=b) - V(x=a) = -\int_a^b w(x)\;dx$$

- Para $0 < x < 4$, se cumple que:

$$V(x) = V(x=0^+) - \int_0^x w(t)\;dt = V(x=0^+)$$

pues $w(x) \equiv 0\,\text{kN/m}$ en dicho intervalo. Para calcular el valor en $x = 0^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno al origen:



$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad V(x=0^+) = A_y = 2.4\,\text{kN}$$

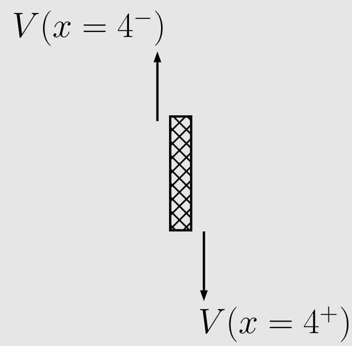
Por tanto:

$$V(x) = 2.4, \quad 0 < x < 4$$

- Para $4 < x < 8$, se cumple que:

$$V(x) = V(x = 4^+) - \int_4^x w(t)\ dt = V(x = 4^+) - 0.6(x-4)$$

pues $w(x) = 0.6\,\mathrm{kN/m}$ en dicho intervalo. Para calcular el valor en $x = 4^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno a $x = 4$:

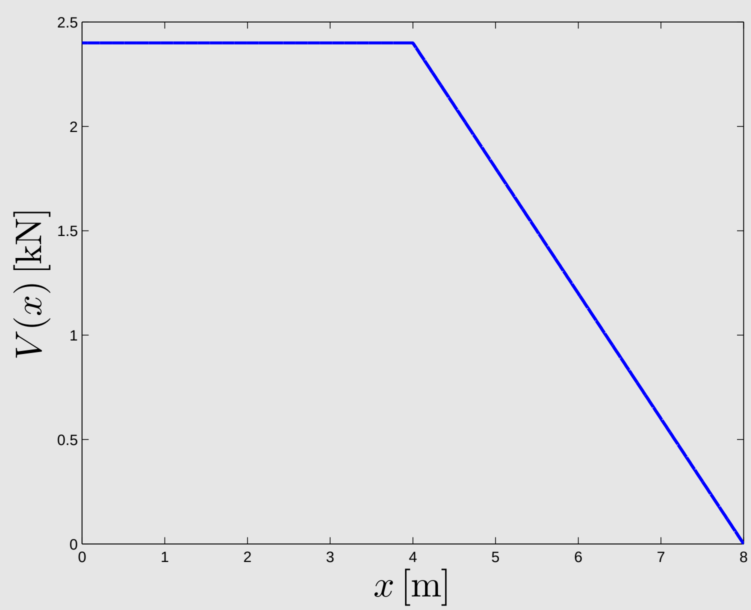


$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad V(x = 4^+) = V(x = 4^-) = 2.4\,\mathrm{kN}$$

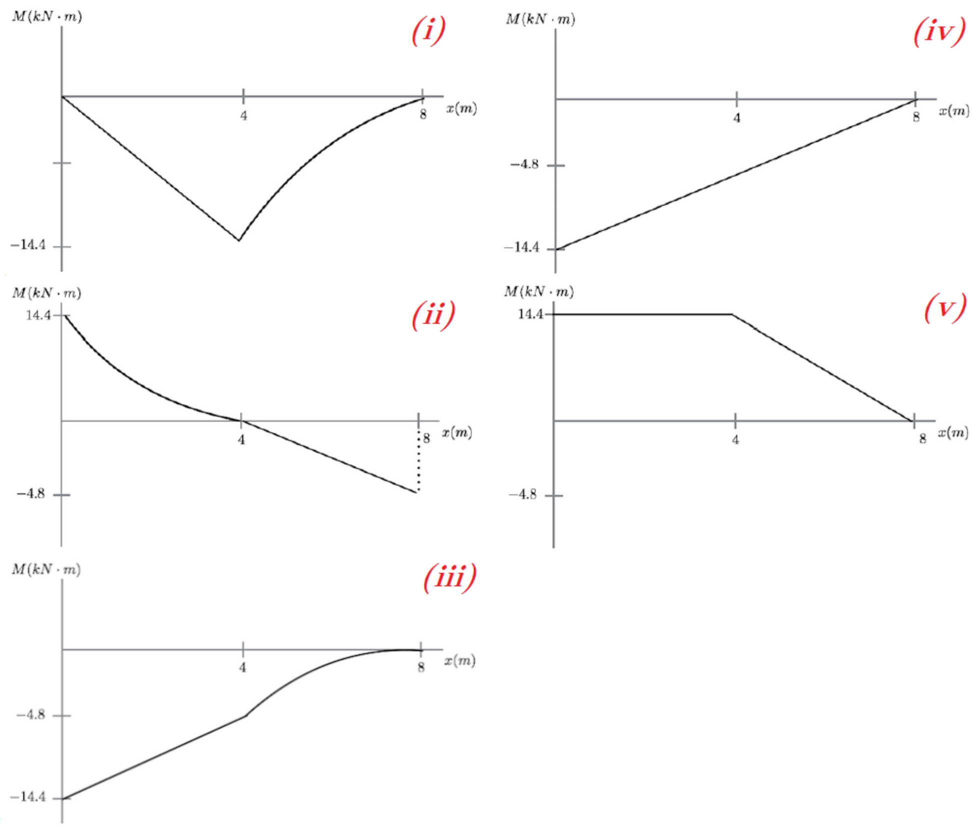
Por tanto:

$$V(x) = 4.8 - 0.6x, \quad 4 < x < 8$$

Graficando,



Problema 6.15.
Para la viga del Problema 6.14, el gráfico del momento flector $M(x)$ es:



a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Diagrama (v)

Solución:

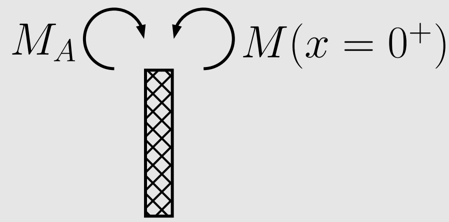
Para calcular una expresión analítica del momento flector, recordamos la relación diferencial entre $M(x)$ y $V(x)$:

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \longrightarrow \qquad M(x=b) - M(x=a) = \int_a^b V(x)\ dx$$

- Para $0 < x < 4$, se cumple que:

$$M(x) = M(x=0^+) + \int_0^x V(t)\ dt = M(x=0^+) + 2.4x$$

Para calcular el valor en $x = 0^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno a $x = 0$:



$$\sum \tau = 0 \qquad \longrightarrow \qquad M(x = 0^+) = M_A = -14.4\,\text{kN·m}$$

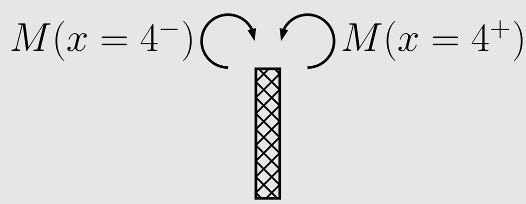
Por tanto:

$$M(x) = -14.4 + 2.4x, \quad 0 < x < 4$$

- Para $4 < x < 8$, se cumple que:

$$M(x) = M(x = 4^+) + \int_4^x V(t)\ dt = M(x = 4^+) + 4.8x - 14.4 - 0.3x^2$$

Para calcular el valor en $x = 4^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno a $x = 4$:

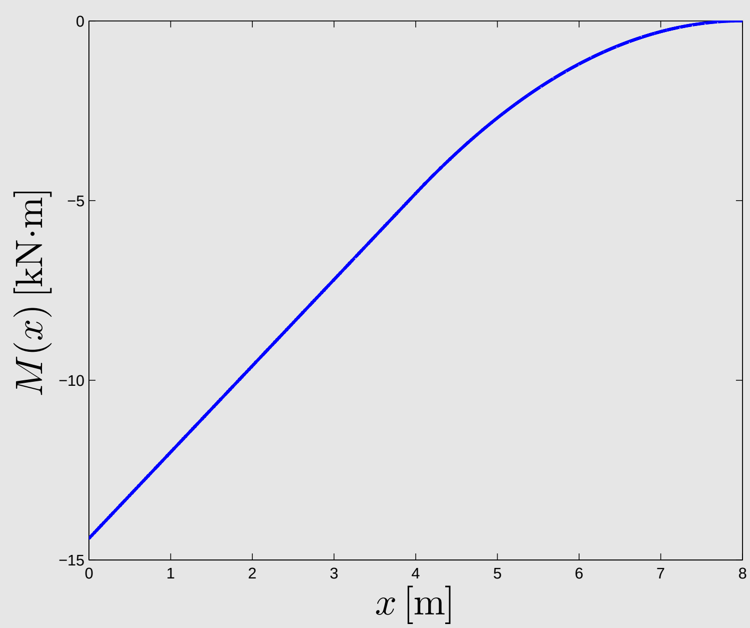


$$\sum \tau = 0 \qquad \longrightarrow \qquad M(x = 4^+) = M(x = 4^-) = -4.8\,\text{kN·m}$$

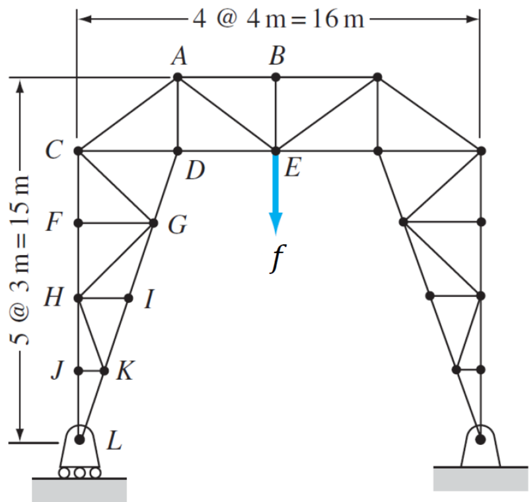
Por tanto:

$$M(x) = -19.2 + 4.8x - 0.3x^2, \quad 4 < x < 8$$

Graficando,



Problema 6.16.
Una armadura plana está sometida a una carga de magnitud f, como se indica en la figura. La fuerza sobre el miembro JL es:



a) $JL = f$ (T)

b) $JL = \dfrac{f}{2}$ (T)

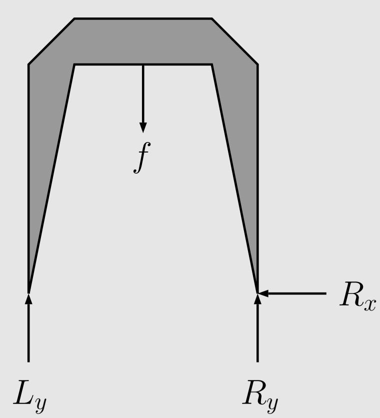
c) $JL = f$ (C)

d) $JL = \dfrac{f}{2}$ (C)

e) $JL = 0$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre se muestra a continuación:



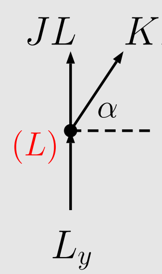
De las condiciones de equilibrio,

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 \quad &\rightarrow \quad R_x = 0 \\
\sum F_y = 0 \quad &\rightarrow \quad L_y + R_y - f = 0 \\
\sum \tau_R = 0 \quad &\rightarrow \quad 16L_y - 8f = 0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$R_x = 0 \qquad \wedge \qquad L_y = \frac{f}{2} \qquad \wedge \qquad R_y = \frac{f}{2}$$

Usando el método de uniones en el nodo L,



$$\begin{aligned}
\sum {F_x}^{(L)} = 0 \quad &\rightarrow \quad KL\cos\alpha = 0 \\
\sum {F_y}^{(L)} = 0 \quad &\rightarrow \quad L_y + JL + KL\sin\alpha = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo,

$$KL = 0 \qquad \wedge \qquad JL = -L_y = -\frac{f}{2}$$

y está en **compresión**.

Problema 6.17.
Para la estructura del Problema 6.16, la fuerza sobre el miembro GI es:

a) $GI = \dfrac{4f}{5}$ (T)

b) $GI = f$ (C)

c) $GI = f$ (T)

d) $GI = \dfrac{4f}{5}$ (C)

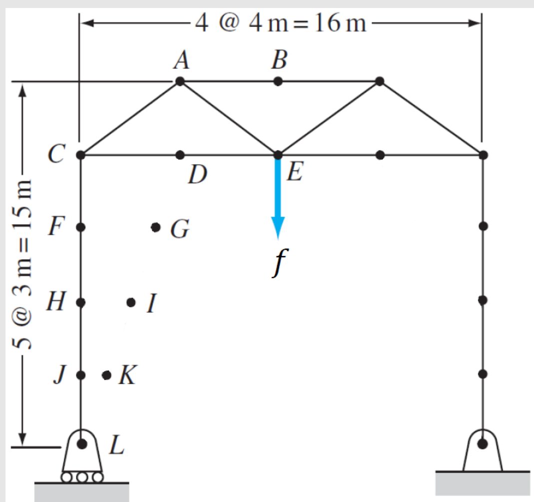
e) $GI = 0$

Solución:

Para facilitar los cálculos, eliminaremos las barras de fuerza cero. Estas barras se determinan mediante inspección de cada nodo, considerando las sumatorias de fuerzas respectivas. Por lo general, los elementos de fuerza cero se pueden determinar de las siguientes formas:

1. Si solo dos elementos forman una armadura y no se aplica ninguna carga extra o reacción de soporte al nodo, los dos elementos deben ser elementos de fuerza cero
2. Si tres elementos forman un nodo de armadura en el cual dos de los elementos son colineales, el tercer elemento es un elemento de fuerza cero siempre que no se aplique ninguna fuerza exterior o reacción de soporte al nodo

La estructura toma la siguiente forma:



Por tanto,

$$GI = 0$$

Problema 6.18.
Para la estructura del Problema 6.16, la fuerza sobre el miembro AD es:

a) $AD = \dfrac{4f}{5}$ (C)

b) $AD = f$ (T)

c) $AD = f$ (C)

d) $AD = \dfrac{3f}{5}$ (C)

e) $AD = \dfrac{2f}{5}$ (T)

f) $AD = 0$

Solución:

Claramente,

$$AD = 0$$

Problema 6.19.
Para la estructura del Problema 6.16, la fuerza sobre el miembro AC es:

a) $AC = f$ (T)

b) $AC = \frac{5f}{6}$ (C)

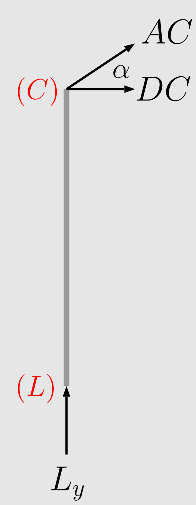
c) $AC = \frac{2f}{3}$ (T)

d) $AC = \frac{10f}{9}$ (C)

e) $AC = 0$

Solución:

Utilizando el método de secciones, realizamos el siguiente corte:



Por suma de fuerzas en el eje Y, se cumple que:

$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad L_y + AC\sin\alpha = 0$$

y con ello

$$AC = -\frac{f}{2\sin\alpha}$$

Para hallar el valor de $\sin\alpha$, notamos que el triángulo $\triangle ACD$ es rectángulo con catetos de 3 m y 4 m. Por tanto, la hipotenusa es igual a 5 m. Así,

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \longrightarrow \qquad AC = -\frac{5f}{6}$$

y está en **compresión**. Por completitud, obtenemos el valor de DC:

$$\sum F_x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad DC + AC\cos\alpha = 0$$

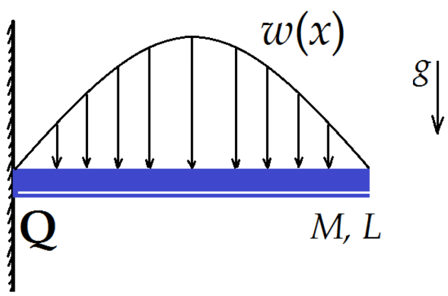
Por tanto

$$DC = -AC\cos\alpha = \frac{f}{2}\cot\alpha = \frac{2f}{3}$$

y está en **tensión**.

Problema 6.20.
La barra de la figura está empotrada en la pared en el punto Q. La barra tiene masa M y largo L, y sobre ella hay una carga distribuida descrita por la ecuación

$$w(x) = w_0\frac{x(L-x)}{L^2}$$



El torque o momento de fuerza M_Q que hace la pared en el punto Q es:

a) $M_Q = \dfrac{MgL}{2}$

b) $M_Q = \left(Mg + \dfrac{w_0 L}{6}\right)\dfrac{L}{2}$

c) $M_Q = \left(Mg + \dfrac{w_0 L}{3}\right)\dfrac{L}{2}$

d) $M_Q = (Mg + w_0 L)\dfrac{L}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

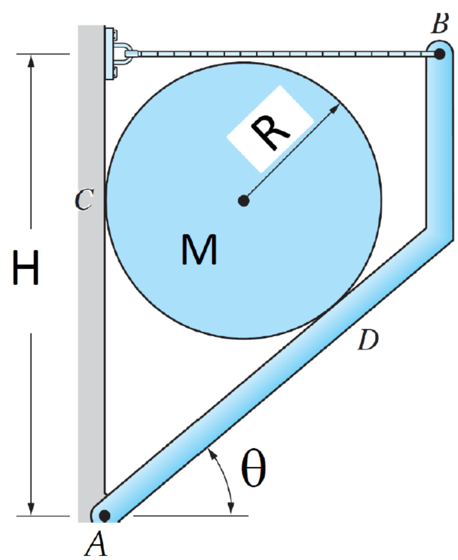
Solución:

El momento de fuerza M_Q debe ser igual, en módulo, al torque realizado por el peso de la barra y por la fuerza distribuida. Así,

$$\begin{aligned} M_Q &= \frac{MgL}{2} + \int_0^L x\, w(x)\; dx \\ &= \frac{MgL}{2} + \frac{w_0}{L^2}\int_0^L x^2(L-x)\; dx \\ &= \frac{MgL}{2} + \frac{w_0}{L^2}\left(\frac{L^4}{12}\right) \\ &= \left(Mg + \frac{w_0 L}{6}\right)\frac{L}{2} \end{aligned}$$

Problema 6.21.

El cilindro mostrado en la figura tiene radio R y masa M. Suponga que la masa de la barra es despreciable, y que el sistema se encuentra en equilibrio en el ángulo θ. El roce en los puntos de apoyo C y D es despreciable. El módulo de la reacción R_C en el punto de apoyo C es:



a) $R_C = \dfrac{Mg}{\cos\theta}$

b) $R_C = Mg$

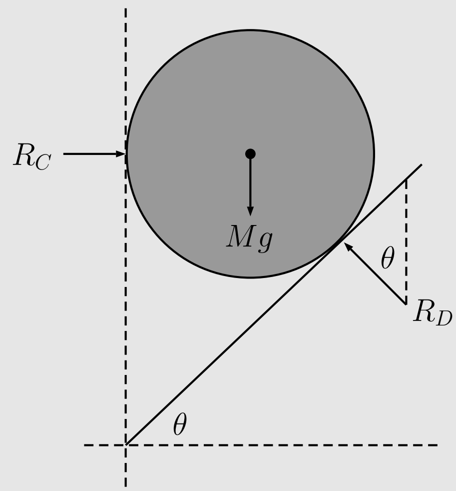
c) $R_C = Mg\tan\theta$

d) $R_C = Mg\sin\theta$

e) $R_C = \dfrac{Mg}{\sin\theta}$

Solución:

Si analizamos el cilindro, notaremos que el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



De las condiciones de equilibrio,

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_C - R_D \sin\theta = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_D \cos\theta - Mg = 0$$

Despejando,

$$R_D = \frac{Mg}{\cos\theta} \qquad \wedge \qquad R_C = R_D \tan\theta$$

Problema 6.22.
Para la estructura del Problema 6.21, el módulo de la reacción R_D en el punto de apoyo D es:

a) $R_D = Mg$

b) $R_D = \dfrac{Mg}{\cos\theta}$

c) $R_D = R_C$

d) $R_D = Mg\cot\theta$

e) $R_D = \dfrac{Mg}{\sin\theta}$

Solución:

Como vimos en la pregunta anterior,

$$R_D = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

Problema 6.23.
Para la estructura del Problema 6.21, la distancia ℓ_{AD} entre los puntos A y D en la figura es:

a) $\ell_{AD} = R\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

b) $\ell_{AD} = R\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

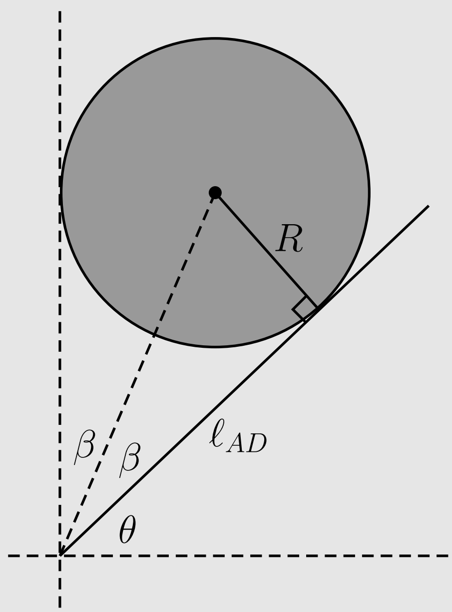
c) $\ell_{AD} = R\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

d) $\ell_{AD} = R\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Con un poco de trigonometría, notamos que:



$$\tan\beta = \frac{R}{\ell_{AD}} \qquad \longrightarrow \qquad \ell_{AD} = R\cot\beta$$

mientras que

$$\frac{\pi}{2} = \theta + 2\beta \qquad \longrightarrow \qquad \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

Por tanto,

$$\ell_{AD} = R\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Problema 6.24.
Para la estructura del Problema 6.21, la tensión en la cuerda T es:

a) $T = \dfrac{\ell_{AD}\, R_D}{H}$

b) $T = \dfrac{\ell_{AD}\, R_C}{H}$

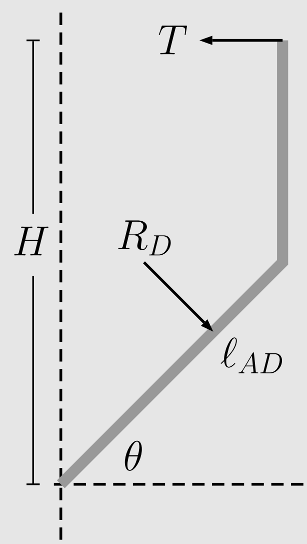
c) $T = R_D$

d) $T = \dfrac{H\, R_D}{\ell_{AD}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Analizando la barra, su diagrama de cuerpo libre es:



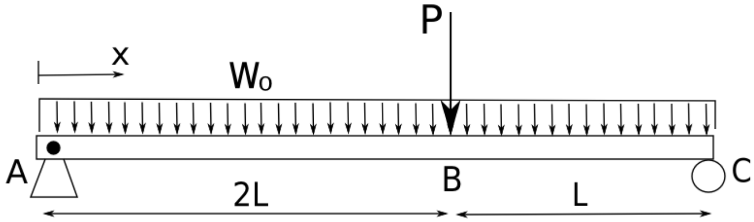
Por suma de torques respecto al punto A,

$$\sum \tau_A = 0 \qquad \longrightarrow \qquad HT - \ell_{AD} R_D = 0$$

Finalmente,

$$T = \frac{\ell_{AD}}{H} R_D$$

Problema 6.25.
Sobre una barra sin masa de largo total $3L$ se aplica una fuerza puntual P, y también una densidad de fuerza distribuida constante w_0 (ver figura). El soporte en A es fijo, mientras que en C es móvil.



Considerando primero solo la fuerza distribuida, determine la fuerza equivalente $\overline{F}$ y su punto de aplicación $\overline{x}$, medido desde A.

a) $\overline{F} = Lw_0,\ \overline{x} = \dfrac{L}{2}$

b) $\overline{F} = 2Lw_0,\ \overline{x} = \dfrac{L}{2}$

c) $\overline{F} = 3Lw_0,\ \overline{x} = \dfrac{L}{2}$

d) $\overline{F} = 3Lw_0,\ \overline{x} = \dfrac{3L}{2}$

e) $\overline{F} = 2Lw_0,\ \overline{x} = \dfrac{3L}{2}$

Solución:

Dado que la densidad de fuerza es constante, la fuerza equivalente será el área encerrada por el rectángulo de largo $3L$ y altura w_0:

$$\overline{F} = 3Lw_0$$

Por el mismo argumento, el punto de aplicación de la fuerza será el punto medio del rectángulo:

$$\overline{x} = \frac{3L}{2}$$

Problema 6.26.
Para la estructura del Problema 6.25, considerando también la fuerza puntual P, determine las reacciones normales externas en A y C en términos de $\overline{x}$ y $\overline{F}$.

a) $A_y = \dfrac{P}{3} + \left(1 - \dfrac{\overline{x}}{3L}\right)\overline{F},\ C_y = \dfrac{2P}{3} + \dfrac{\overline{x}}{3L}\overline{F}$

b) $A_y = \dfrac{P}{3} + \left(1 + \dfrac{\overline{x}}{3L}\right)\overline{F},\ C_y = \dfrac{2P}{3} - \dfrac{\overline{x}}{3L}\overline{F}$

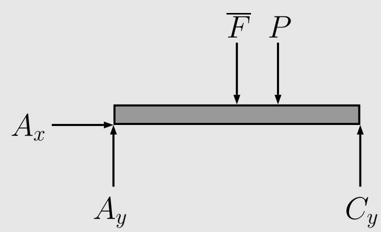
c) $A_y = \dfrac{2P}{3} + \left(1 - \dfrac{\overline{x}}{3L}\right)\overline{F},\ C_y = \dfrac{P}{3} + \dfrac{\overline{x}}{3L}\overline{F}$

d) $A_y = \dfrac{2P}{3} + \left(1 + \dfrac{\overline{x}}{3L}\right)\overline{F},\ C_y = \dfrac{P}{3} - \dfrac{\overline{x}}{3L}\overline{F}$

e) $A_y = \dfrac{P}{2} + \dfrac{\overline{F}}{2},\ C_y = \dfrac{P}{2} + \dfrac{\overline{F}}{2}$

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es:



De las condiciones de equilibrio,

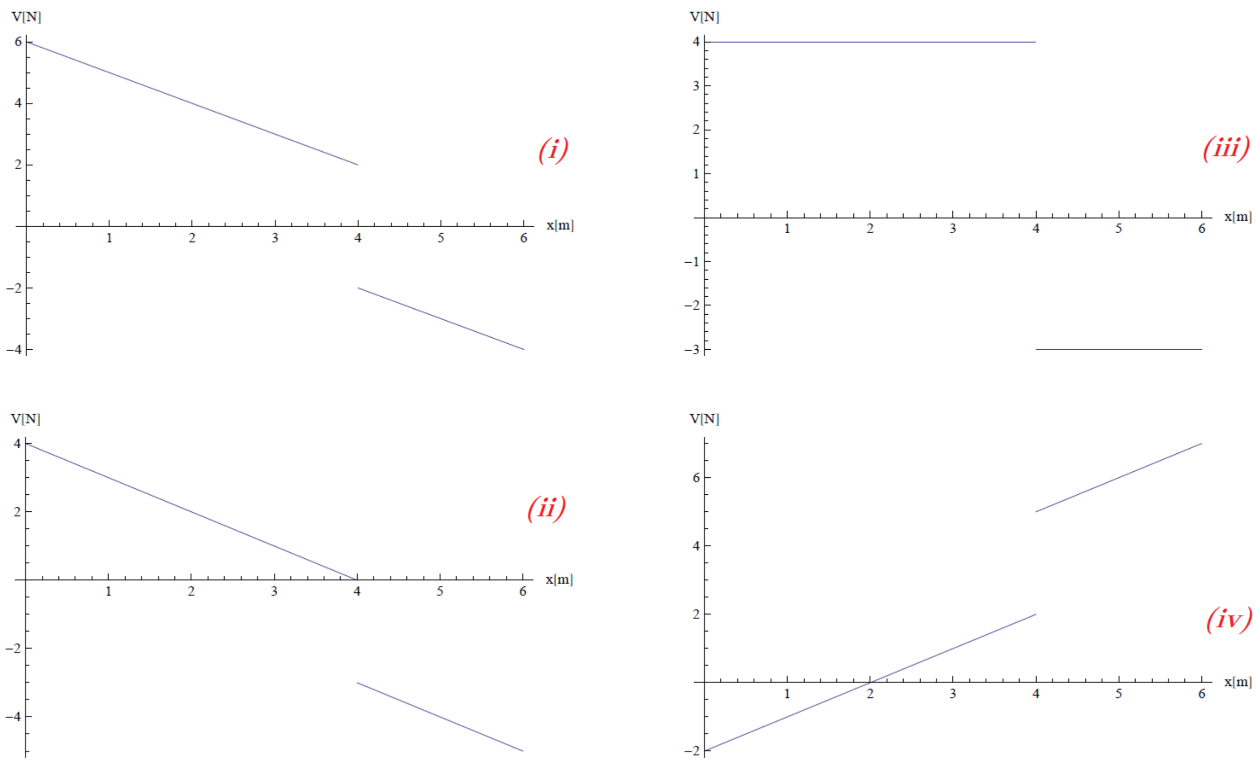
$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 &\quad \rightarrow \quad A_x = 0 \\
\sum F_y = 0 &\quad \rightarrow \quad A_y + C_y - P - \overline{F} = 0 \\
\sum \tau_A = 0 &\quad \rightarrow \quad 3LC_y - \overline{x}\overline{F} - 2LP = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo,

$$A_y = \frac{P}{3} + \left(1 - \frac{\overline{x}}{3L}\right)\overline{F} \qquad \wedge \qquad C_y = \frac{2P}{3} + \frac{\overline{x}}{3L}\overline{F}$$

Problema 6.27.

Para la estructura del Problema 6.25, asuma que $L = 2\,\mathrm{m}$, $w_0 = 1\,\mathrm{N/m}$, $P = 3\,\mathrm{N}$, $A_y = 4\,\mathrm{N}$ y $C_y = 5\,\mathrm{N}$. El gráfico del esfuerzo de corte $V(x)$ es:



a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Recordemos que:

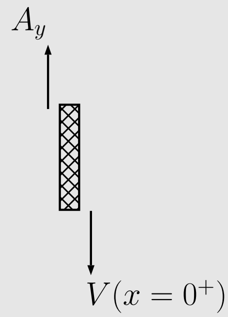
$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \qquad \longrightarrow \qquad V(x=b) - V(x=a) = -\int_a^b w(x)\ dx$$

En este caso, $w(x) = 1\,\mathrm{N/m}$ para toda la viga. Así,

- Para $0 < x < 4$,

$$V(x) = V(x=0^+) - \int_0^x w(t)\ dt = V(x=0^+) - x$$

Para calcular el valor en $x = 0^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno al origen:



$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad V(x=0^+) = A_y = 4\,\mathrm{N}$$

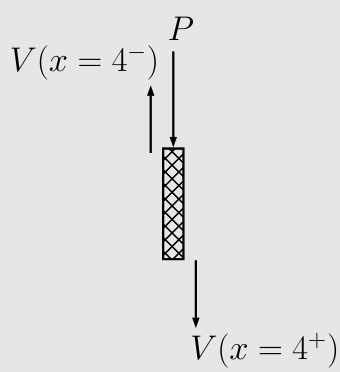
Por tanto:

$$V(x) = 4 - x, \quad 0 < x < 4$$

- Para $4 < x < 6$,

$$V(x) = V(x=4^+) - \int_4^x w(t)\ dt = V(x=4^+) - (x-4)$$

Para calcular el valor en $x = 4^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno a $x = 4$:

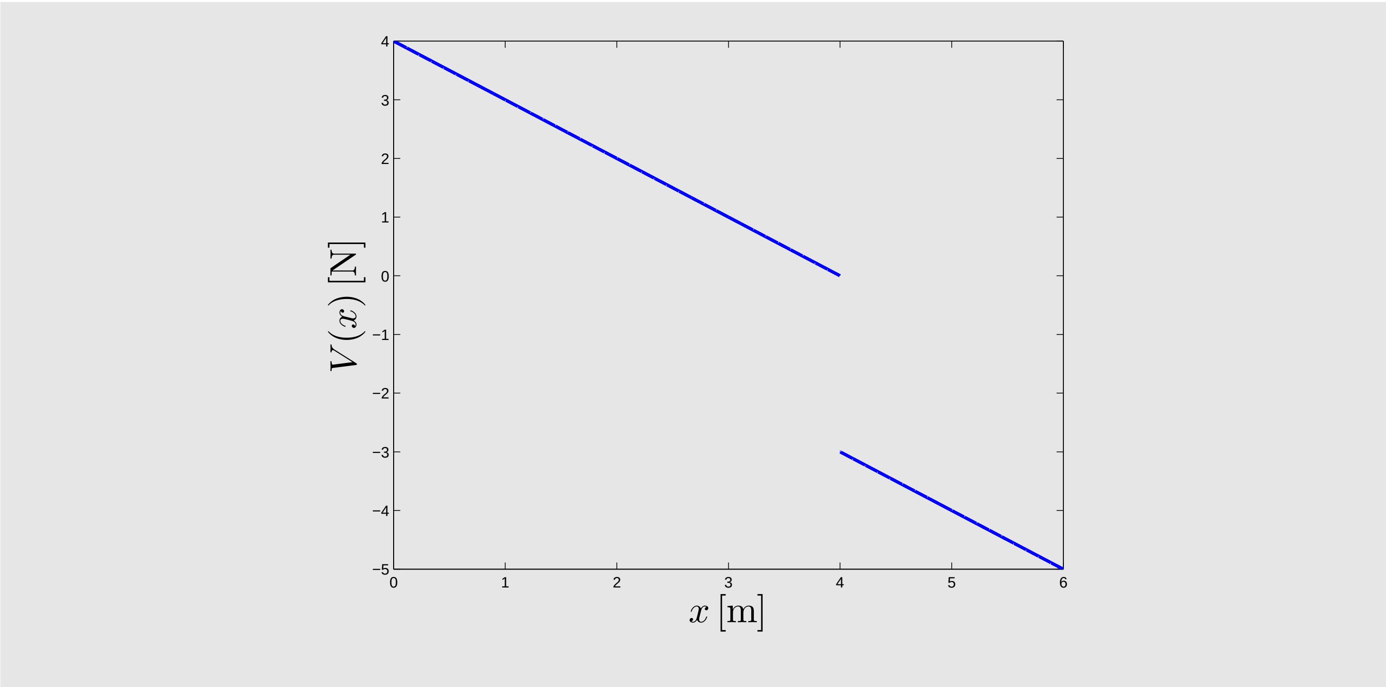


$$\sum F_y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad V(x=4^+) = V(x=4^-) - P = -3\,\mathrm{N}$$

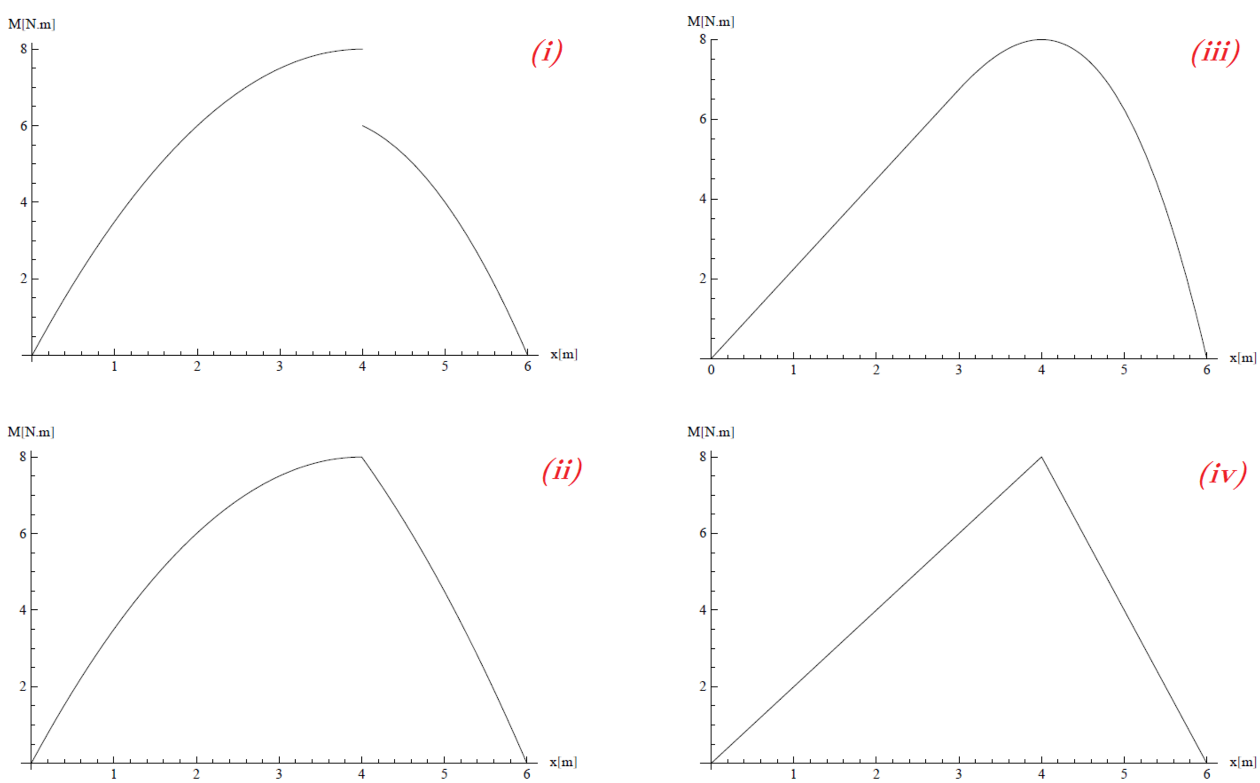
Por tanto:

$$V(x) = 1 - x, \quad 4 < x < 6$$

Graficando,



Problema 6.28.
Para la estructura del Problema 6.25, asuma que $L = 2\,\mathrm{m}$, $w_0 = 1\,\mathrm{N/m}$, $P = 3\,\mathrm{N}$, $A_y = 4\,\mathrm{N}$ y $C_y = 5\,\mathrm{N}$. El gráfico del momento flector $M(x)$ es:



a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

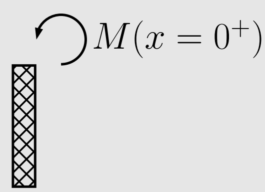
Recordemos que:

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \longrightarrow \qquad M(x=b) - M(x=a) = \int_a^b V(x)\ dx$$

- Para $0 < x < 4$,

$$M(x) = M(x=0^+) + \int_0^x V(t)\ dt = M(x=0^+) + 4x - \frac{x^2}{2}$$

  Para calcular el valor en $x = 0^+$, basta notar que no hay algún momento externo en el origen de la barra, por lo que:



$$\sum \tau = 0 \qquad \longrightarrow \qquad M(x=0^+) = 0\,\text{N·m}$$

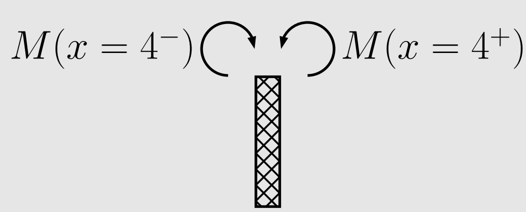
  Por tanto:

$$M(x) = 4x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 4$$

- Para $4 < x < 6$,

$$M(x) = M(x=4^+) + \int_4^x V(t)\ dt = M(x=4^+) + x + 4 - \frac{x^2}{2}$$

  Para calcular el valor en $x = 4^+$, hacemos un corte infinitesimal en torno a $x = 4$:

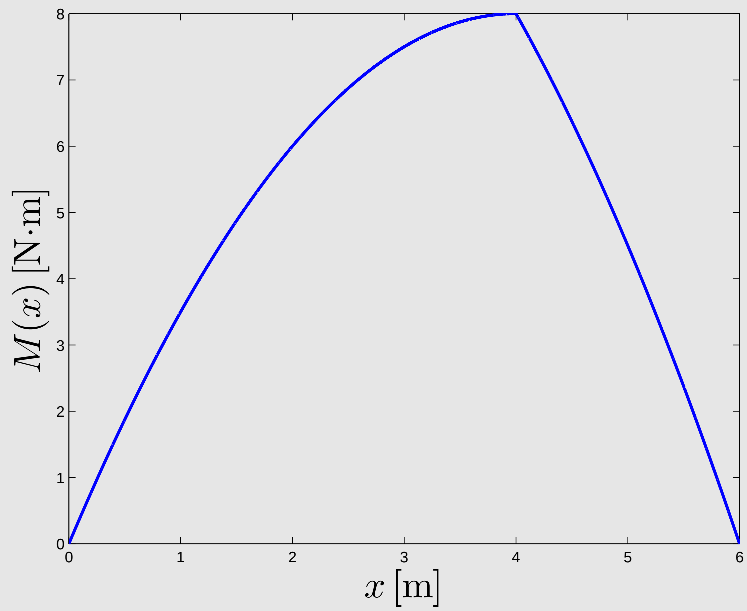


$$\sum \tau = 0 \qquad \longrightarrow \qquad M(x=4^+) = M(x=4^-) = 8\,\text{N·m}$$

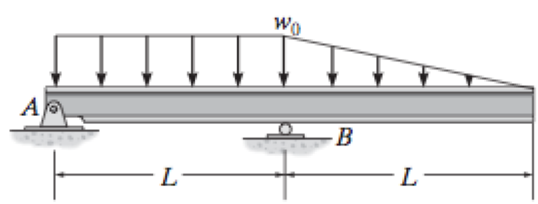
  Por tanto:

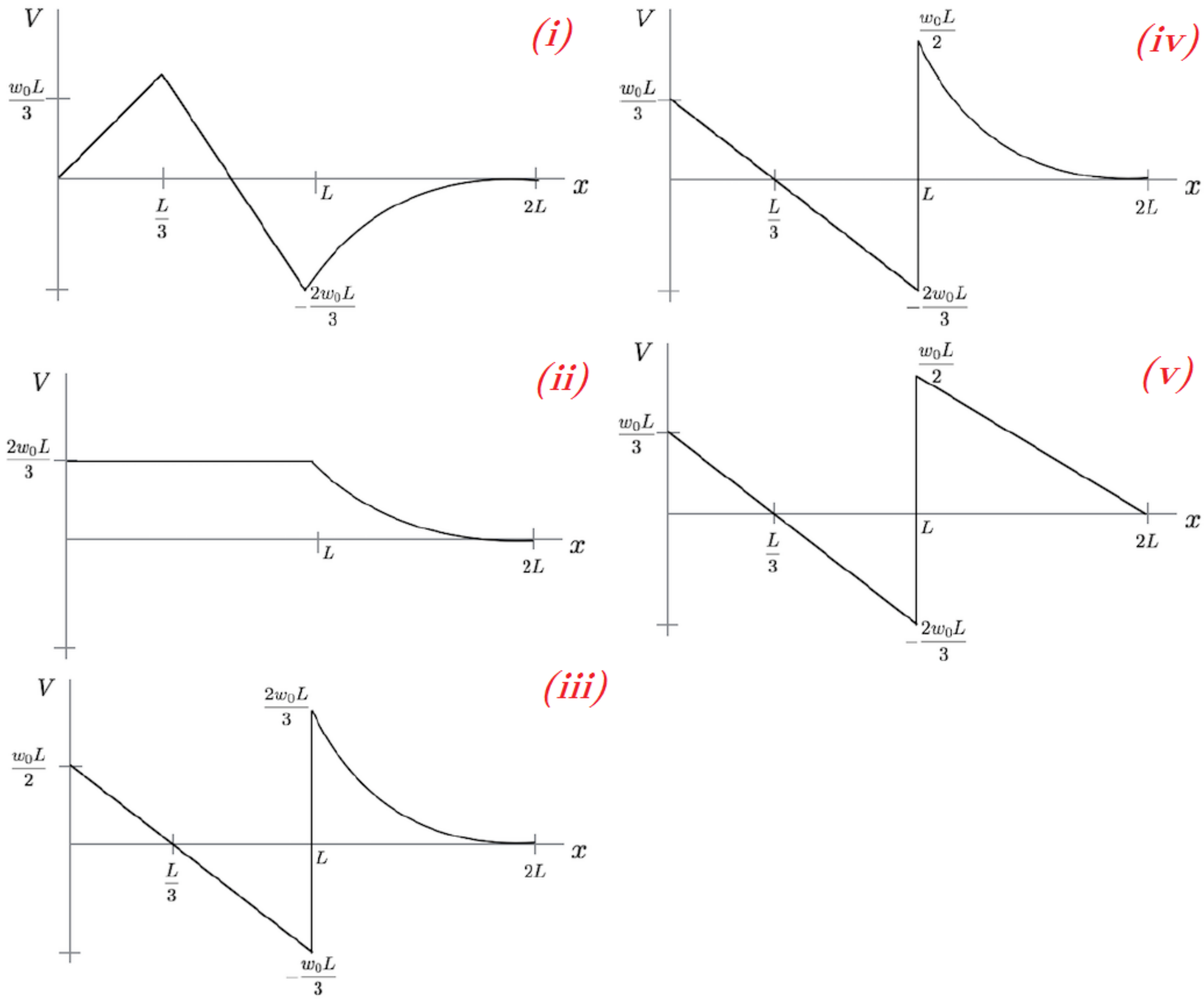
$$M(x) = 12 + x - \frac{x^2}{2}, \quad 4 < x < 6$$

Graficando,



Problema 6.29.
¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al diagrama de esfuerzo de corte de la viga?





a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Diagrama (v)

Solución:

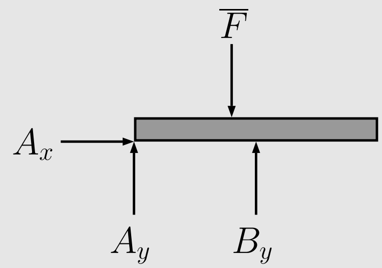
Iniciaremos la resolución de este problema mediante el cálculo de las reacciones externas. Primero que todo, calculamos la fuerza equivalente de la carga distribuida

$$\overline{F} = A_{\square} + A_{\triangle} = w_0L + \frac{w_0L}{2} = \frac{3w_0L}{2}$$

y el punto de aplicación de la misma

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_{\square}A_{\square} + \overline{x}_{\triangle}A_{\triangle}}{A_{\square} + A_{\triangle}} = \frac{(L/2)w_0L + (L + L/3)w_0L/2}{3w_0L/2} = \frac{7L}{9}$$

El diagrama de cuerpo libre queda como sigue:



De las condiciones de equilibrio,

$$\sum F_x = 0 \quad \to \quad A_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \to \quad A_y + B_y - \overline{F} = 0$$
$$\sum \tau_A = 0 \quad \to \quad LB_y - \overline{x}\overline{F} = 0$$

Resolviendo,

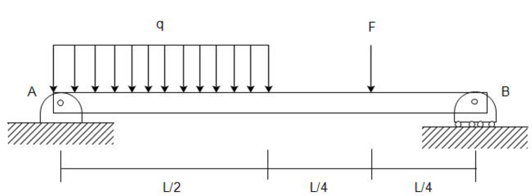
$$A_y = \frac{w_0 L}{3} \qquad \wedge \qquad B_y = \frac{7w_0 L}{6}$$

En vez de resolver analíticamente el problema, lo enfrentaremos de una manera cualitativa:

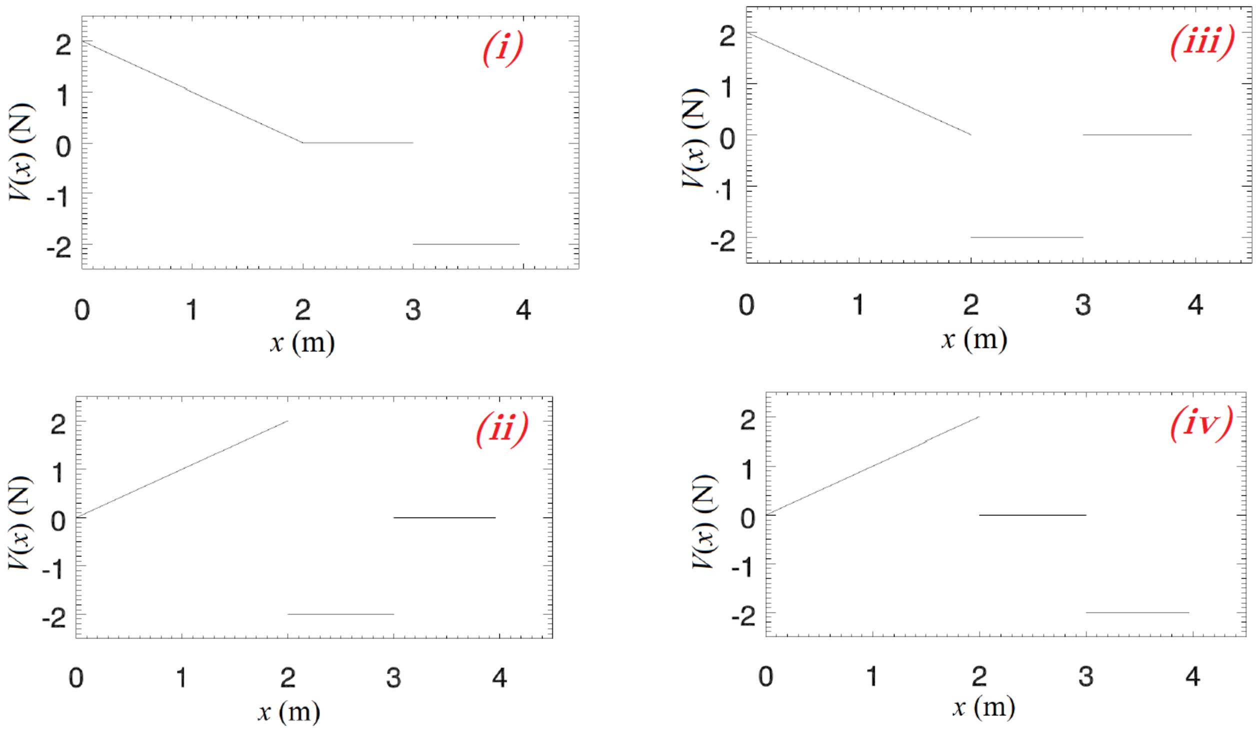
- Para $0 < x < L$, la distribución de fuerza es constante y positiva, por lo que el esfuerzo de corte $V(x)$ será lineal con pendiente negativa $-w_0$
- Para $L < x < 2L$, la distribución de fuerza es lineal con pendiente negativa, por lo que $V(x)$ será cuadrático en la posición y cóncavo hacia arriba
- Por condiciones de borde, $V(x = 0) = A_y$ y $V(x = 2L) = 0$
- En $x = L$ debe existir una discontinuidad igual en magnitud a B_y. En todo el resto del dominio, $V(x)$ es continua

Así, el diagrama correcto es el **gráfico (iv)**.

Problema 6.30.
Una barra ideal (sin masa) de largo L es sometida a una carga distribuida q y una fuerza puntual F, como se muestra en la figura. Considere el eje X con origen en A y positivo hacia la derecha.



Suponga que $F = 2\,\mathrm{N}$, $L = 4\,\mathrm{m}$ y $q = 1\,\mathrm{N/m}$. Identifique el gráfico de $V(x)$:



a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Ninguna de las anteriores

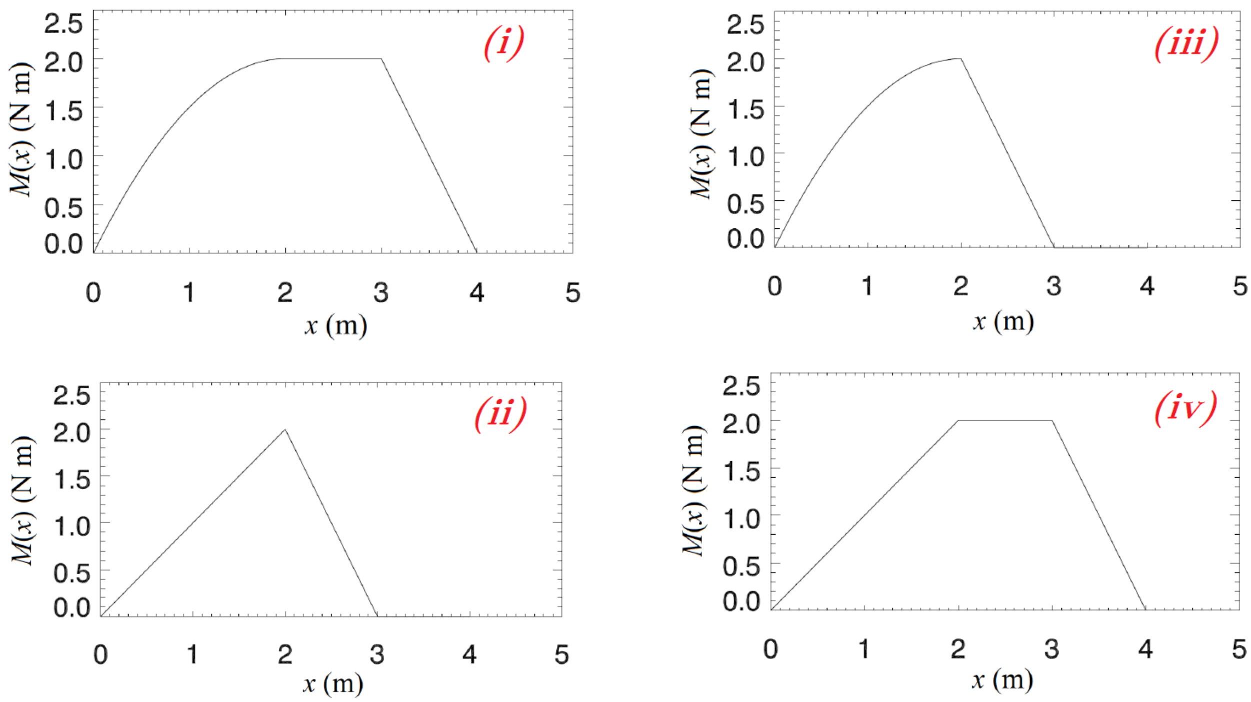
Solución:

Enfrentaremos el problema de una manera cualitativa:

- Para $0 < x < L/2$, la distribución de fuerza es constante y positiva, por lo que el esfuerzo de corte $V(x)$ será lineal con pendiente negativa $-q$
- Para $L/ < x < 3L/4$, la distribución de fuerza es nula, por lo que $V(x)$ será constante
- En $x = 3L/4$ debe existir una discontinuidad igual en magnitud a F. En todo el resto del dominio, $V(x)$ es continua
- Para $3L/4 < x < L$, la distribución de fuerza es nula, por lo que $V(x)$ será constante

Así, el diagrama correcto es el **gráfico (i)**.

Problema 6.31.
Para la estructura del Problema 6.30, nuevamente suponga que $F = 2\,\mathrm{N}$, $L = 4\,\mathrm{m}$ y $q = 1\,\mathrm{N/m}$. Identifique el gráfico de $M(x)$:



a) Diagrama (i)

b) Diagrama (ii)

c) Diagrama (iii)

d) Diagrama (iv)

e) Ninguna de las anteriores

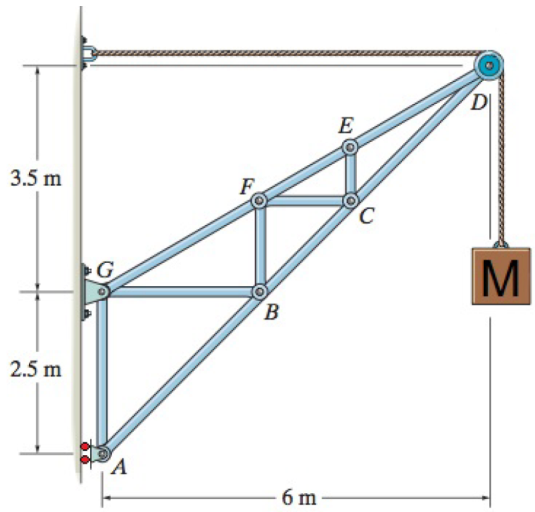
Solución:

Nuevamente abordaremos el problema desde unas perspectiva cualitativa:

- Para $0 < x < L/2$, $V(x)$ es una línea recta con pendiente negativa, por lo que $M(x)$ será una función cuadrática cóncava hacia abajo
- Para $L/ < x < 3L/4$, $V(x)$ es constante e igual a cero (como se vio en la pregunta anterior), por lo que $M(x)$ será constante
- Para $3L/4 < x < L$, $V(x)$ es una constante negativa (como se vio en la pregunta anterior), por lo que $M(x)$ es una línea recta con pendiente negativa
- La función $M(x)$ es continua en todo el dominio pues no existen torques puntuales en la barra

Así, el diagrama correcto es el **gráfico (i)**.

Problema 6.32.
La estructura de la figura siguiente, que está en equilibrio estático, soporta una caja de masa M mediante una cuerda que pasa por una polea ideal sin roce en el extremo de la armadura.



Si la fuerza de compresión máxima que resisten los elementos (barras) que conforman la estructura es de W y la de tensión es $2W$, el valor máximo de M que puede soportar la estructura es:

a) $M_{max} = \dfrac{W}{2g}$

b) $M_{max} = \dfrac{W}{\sqrt{2}g}$

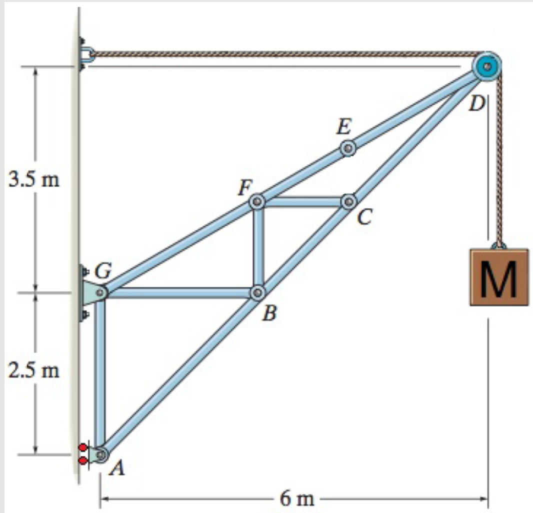
c) $M_{max} = \dfrac{2W}{g}$

d) $M_{max} = \dfrac{\sqrt{2}W}{g}$

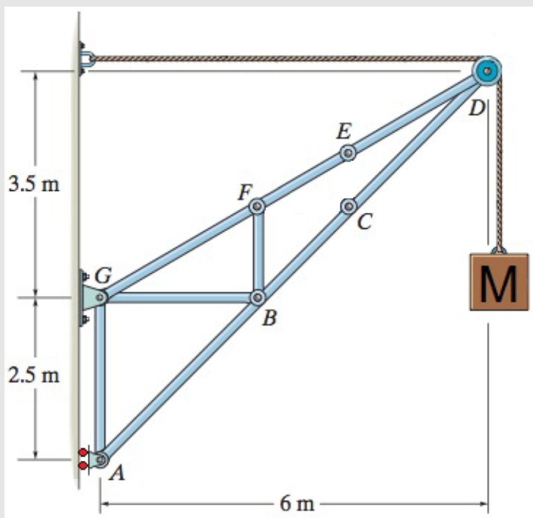
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

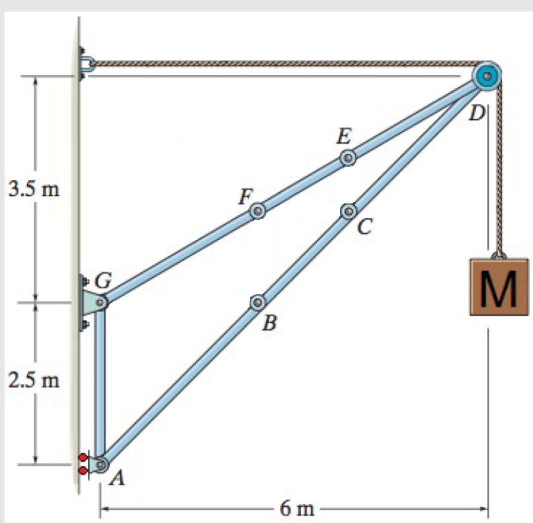
Primero que todo, notemos que las barras FE y ED son colineales, por lo que la barra EC es una **barra de fuerza cero**:



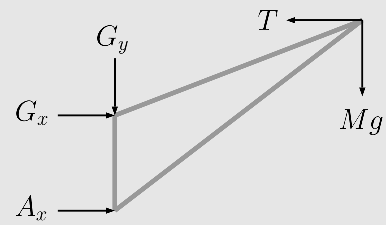
El mismo argumento nos lleva a concluir que la barra FC también es una **barra de fuerza cero**:



Del mismo modo, es posible concluir que las barras FB y GB son **barras de fuerza cero**:



Ahora, calculamos las reacciones externas en la estructura:



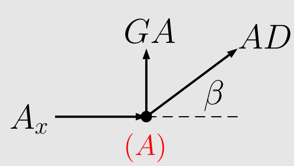
De las condiciones de equilibrio,

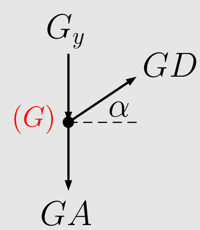
$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x + G_x - T = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad G_y + Mg = 0$$
$$\sum \tau_G = 0 \quad \rightarrow \quad 2.5A_x + 3.5T - 6Mg = 0$$

Al resolver, usando que $T = Mg$, obtenemos

$$A_x = Mg \qquad \wedge \qquad G_x = 0 \qquad \wedge \qquad G_y = -Mg$$

Para determinar el valor de M, calcularemos las fuerzas de las barras GA, AD y GD:





- **Nodo A:**

$$A_x + AD\cos\beta = 0,\ GA + AD\sin\beta = 0$$

Resolviendo,

$$AD = -A_x\sec\beta = -\sqrt{2}Mg \qquad \wedge \qquad GA = -AD\sin\beta = Mg$$

donde AD está en **compresión** y GA está en **tensión**

- **Nodo G:**

$$G_y + GA - GD\sin\alpha = 0,\ GD\cos\alpha = 0$$

Resolviendo,

$$GD = 0$$

Así,

$$\begin{aligned} (\text{Compresión}) &: \sqrt{2}Mg \leq W \\ (\text{Tensión}) &: Mg \leq 2W \end{aligned}$$

Intersectando ambos resultados,

$$M_{max} = \frac{W}{\sqrt{2}g}$$

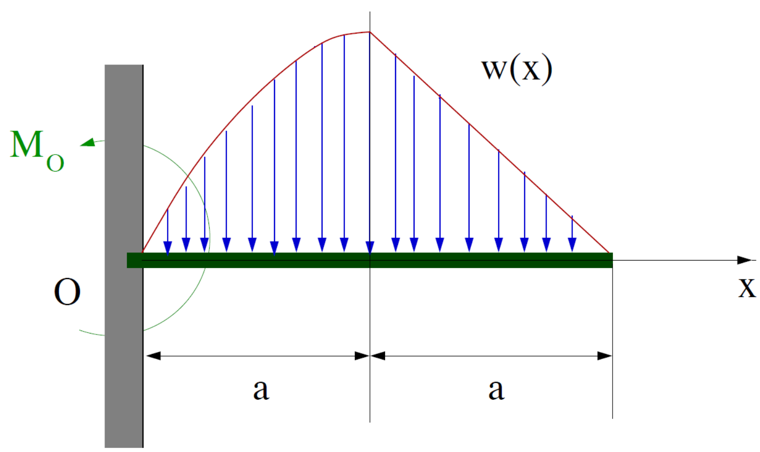
Problema 6.33.
Considere una barra ideal (sin masa) de largo $2a$ empotrada en la pared vertical en O. Sobre la barra hay una carga distribuida $w(x)$ dada por

$$w(x) = \frac{w_0}{4a^2}x(2a - x)$$

para $0 \leq x \leq a$, y por

$$w(x) = \frac{w_0}{2}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)$$

para $a \leq x \leq 2a$, en donde x mide la distancia a lo largo de la barra desde el punto O.



La fuerza resultante de esta carga distribuida está dada por:

a) $F = w_0 a$

b) $F = \frac{7}{24}w_0 a$

c) $F = \frac{5}{24}w_0 a$

d) $F = \frac{1}{3}w_0 a$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea $F = F_1 + F_2$, donde:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^a \frac{w_0}{4a^2} x(2a-x)\ dx \\ &= \frac{w_0 a}{6} \\ F_2 &= \int_a^{2a} \frac{w_0}{2}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)\ dx \\ &= \frac{w_0 a}{8} \end{aligned}$$

Con ello,

$$F = \frac{7}{24} w_0 a$$

Problema 6.34.

Para la barra del Problema 6.33, el momento resultante que debe hacer la pared sobre el punto O está dado por:

a) $M_O = \frac{11}{48} w_0 a^2$

b) $M_O = \frac{1}{4} w_0 a^2$

c) $M_O = \frac{13}{48} w_0 a^2$

d) $M_O = \frac{1}{2} w_0 a^2$

e) $M_O = \frac{15}{48} w_0 a^2$

Solución:

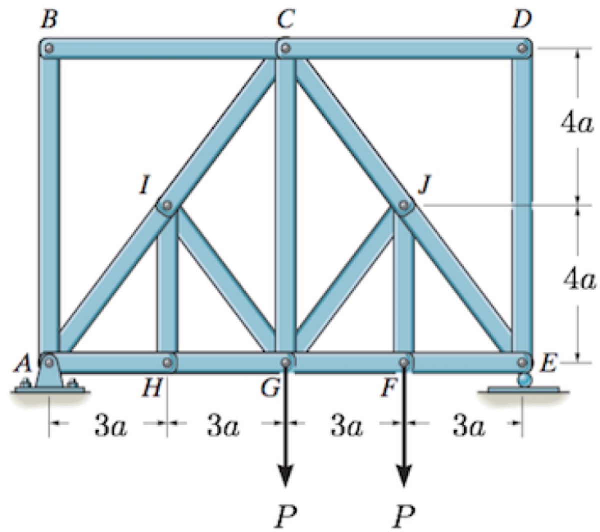
Sea $M_O = M_1 + M_2$, donde:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^a x \frac{w_0}{4a^2} x(2a-x)\ dx \\ &= \frac{5 w_0 a^2}{48} \\ M_2 &= \int_a^{2a} x \frac{w_0}{2}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)\ dx \\ &= \frac{w_0 a^2}{6} \end{aligned}$$

Con ello,

$$M_O = \frac{13}{48} w_0 a^2$$

Problema 6.35.
Considere la armadura simple de la figura:



Los elementos de fuerza cero son:

a) AB, BC, CD, DE

b) AB, BC, CD, DE, HI

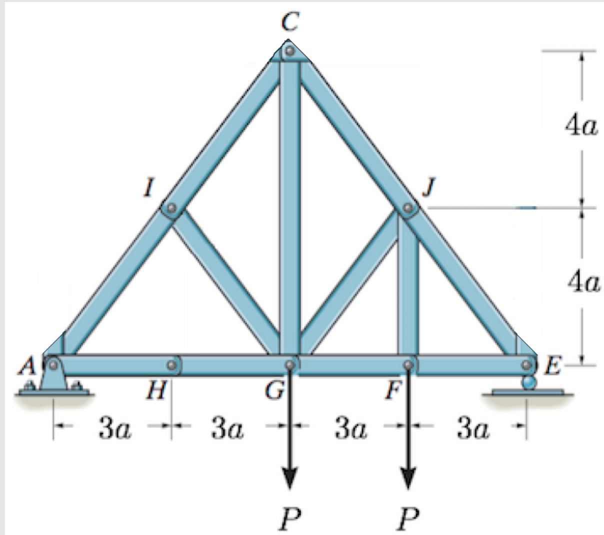
c) AB, BC, CD, DE, HI, IG

d) AB, BC, CD, DE, CJ, HI, GJ

e) Ninguna de las anteriores

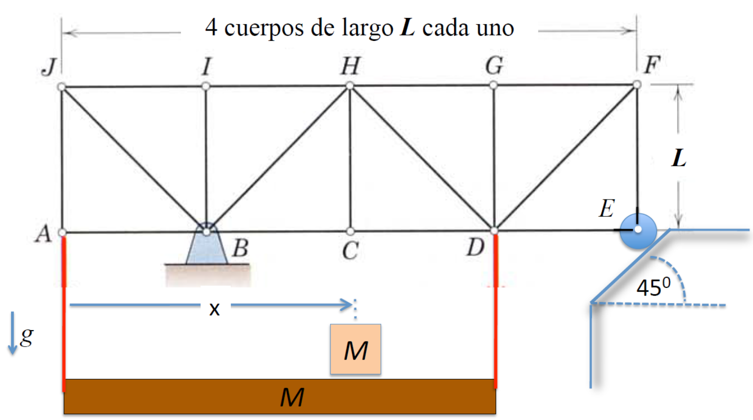
Solución:

Notemos que el punto B solo posee dos barras, AB y BC, que son perpendiculares. Por tanto, son **barras de fuerza cero**. El mismo argumento es válido para las barras CD, ED y HI:



No es posible eliminar la barra JF porque sobre el punto F también se está aplicando una carga de magnitud P. Por otro lado, las barras AI e IC son colineales, por lo que la barra IG es una **barra de fuerza cero**.

Problema 6.36.
Considere la armadura mostrada en la figura abajo, la cual está formada por barras de masa despreciable articuladas en los nodos $ABCDEFGHIJ$. La estructura soporta una viga uniforme y homogénea de masa M que está suspendida mediante cuerdas verticales ideales atadas a los nodos A y D. La viga, a su vez, soporta un bloque de masa M en reposo, el cual se encuentra ubicado a una distancia x desde la cuerda atada al nodo A. Note que el apoyo en B es fijo (solo permite la rotación) y el apoyo en E es una rueda que puede deslizar sin roce sobre el plano inclinado un ángulo de 45°.



El valor de la distancia x para que el sistema permanezca estático y el esfuerzo en la barra DE sea nulo es:

a) $x = L$

b) $x = 2L$

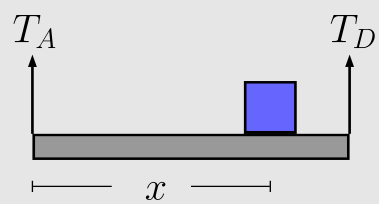
c) $x = \dfrac{2L}{3}$

d) $x = \dfrac{L}{4}$

e) $x = \dfrac{L}{2}$

Solución:

Lo primero que hacemos es determinar las fuerzas el valor de las tensiones de las cuerdas en los puntos A y D:



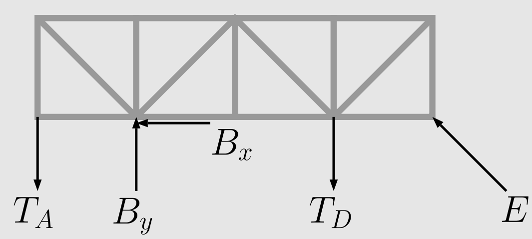
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad T_A + T_D = 2M$$

$$\sum \tau_A = 0 \quad \rightarrow \quad xM + \frac{ML}{2} - 3LT_D = 0$$

Resolviendo,

$$T_A = \frac{M(9L - 2x)}{6L} \qquad \wedge \qquad T_D = \frac{M(2x + 3L)}{6L}$$

Ahora, estudiamos la estructura:



$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad B_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E = 0$$

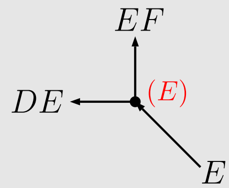
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad B_y + \frac{\sqrt{2}}{2}E = T_A + T_D$$

$$\sum \tau_B = 0 \quad \rightarrow \quad LT_A + 3L\frac{\sqrt{2}}{2}E - 2LT_D = 0$$

Notar que la única incógnita que nos interesa es E, por lo que usamos directamente la última ecuación:

$$E = \frac{\sqrt{2}(2T_D - T_A)}{3}$$

En el nodo E,



Es claro que:

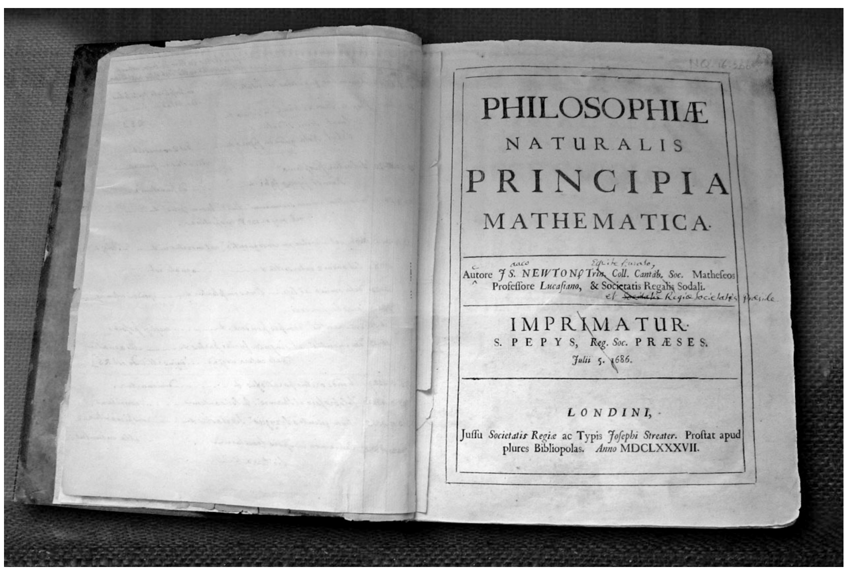
$$DE = -\frac{\sqrt{2}}{2}E$$

Por tanto, $DE = 0$ si y solo si $E = 0$. Esto se cumple cuando

$$2T_D - T_A = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{L}{2}$$

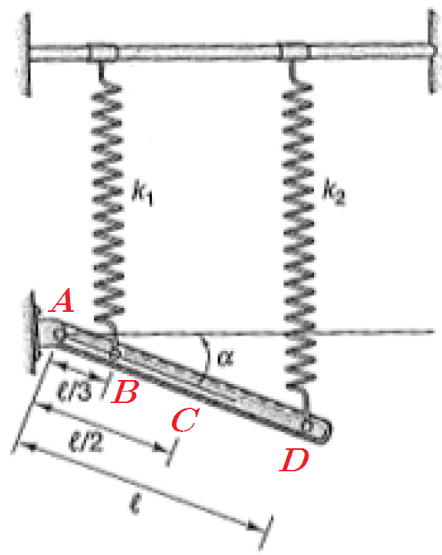
7

Trabajo virtual, estabilidad y cables



Ejemplar del "Principia" perteneciente a Isaac Newton, con correcciones escritas a mano para la segunda edición

Problema 7.1.
Una barra uniforme de masa m y largo ℓ está soportada por dos resortes, como muestra la figura. Los resortes están sin estirar cuando la barra está horizontal. Determine el ángulo de equilibrio $0 < \alpha < \pi/2$ en función de los parámetros dados.



a) $\sin\alpha = \dfrac{9mg}{\ell(k_1+k_2)}$

b) $\sin\alpha = \dfrac{9mg}{2\ell(k_1+9k_2)}$

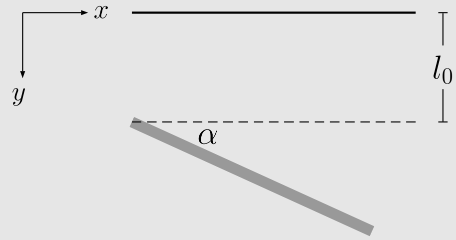
c) $\sin\alpha = \dfrac{9mg}{\ell(k_1+9k_2)}$

d) $\sin\alpha = \dfrac{mg}{\ell(k_1+7k_2)}$

e) $\sin\alpha = \dfrac{mg}{2\ell(k_1+9k_2)}$

Solución:

Las únicas fuerzas que pueden realizar trabajo virtual son el peso $P = mg$ de la barra y las fuerzas elásticas de los resortes, pues el pivote A permanece sin movimiento. Consideremos la siguiente situación:



El trabajo virtual vendrá dado por:

$$\delta W = \vec{F}_{k_1} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{F}_{k_2} \cdot \delta \vec{r}_D$$

El peso de la barra actúa en el eje Y, i.e. $\vec{P} = mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, por lo que el producto punto quedará como

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_C = mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \Big(\delta x_C\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \delta y_C\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\Big) = mg\,\delta y_C$$

Por otra parte, las fuerzas elásticas vienen dadas por

$$\vec{F}_{k_i} \cdot \delta \vec{r}_i = -k_i(y_i - l_0)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \Big(\delta x_i\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \delta y_i\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\Big) = -k_i(y_i - l_0)\,\delta y_i$$

con $i = 1, 2$. Así, solo nos interesan las componentes verticales de las posiciones, las cuales vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
y_B &= l_0 + \frac{\ell}{3}\sin\alpha & &\longrightarrow & \delta y_B &= \frac{\ell}{3}\cos\alpha\,\delta\alpha \\
y_C &= l_0 + \frac{\ell}{2}\sin\alpha & &\longrightarrow & \delta y_C &= \frac{\ell}{2}\cos\alpha\,\delta\alpha \\
y_D &= l_0 + \ell\sin\alpha & &\longrightarrow & \delta y_D &= \ell\cos\alpha\,\delta\alpha
\end{aligned}$$

Con ello,

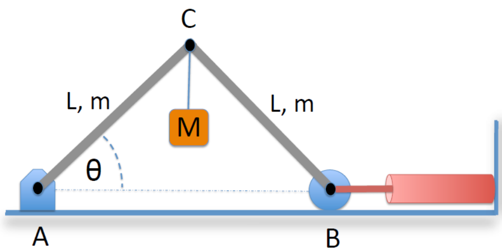
$$\begin{aligned}
\delta W &= -\frac{k_1\ell^2\sin\alpha\cos\alpha}{9}\delta\alpha + \frac{mg\ell\cos\alpha}{2}\delta\alpha - k_2\ell^2\sin\alpha\cos\alpha\,\delta\alpha \\
&= \frac{\ell\cos\alpha}{18}\Big(9mg - 2\ell\sin\alpha(k_1 + 9k_2)\Big)\delta\alpha
\end{aligned}$$

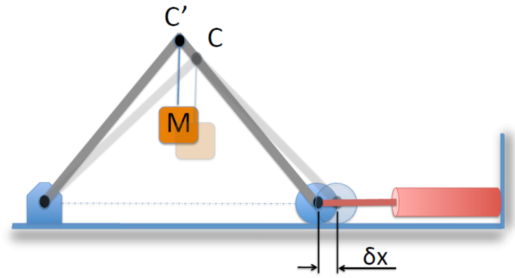
Para que el trabajo virtual se anule para todo desplazamiento virtual, y dado que $\ell \neq 0$ y $0 < \alpha < \pi/2$, se debe cumplir que:

$$9mg - 2\ell\sin\alpha(k_1 + 9k_2) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{9mg}{2\ell(k_1 + 9k_2)}$$

Problema 7.2.

Considere el mecanismo mostrado en la figura, el cual consiste de dos barras homogéneas de largo L y masa m, unidas mediante un pivote libre de roce C. A su vez, ellas están unidas al soporte fijo A y al soporte móvil B. El mecanismo se encuentra en equilibrio debido a la acción del bloque de masa M, el cual cuelga de una cuerda ideal desde el pivote C, y del pistón hidráulico vinculado al apoyo B.





Si P es el módulo de la fuerza que el pistón ejerce sobre el apoyo B, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo de la reacción horizontal en el apoyo A?

a) $2P$

b) $Mg + P$

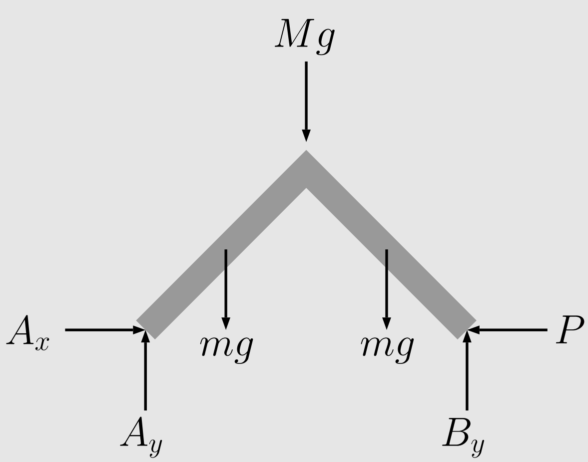
c) P

d) $(M + 2m)g$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es el siguiente:



De la suma de fuerzas en el eje X,

$$\sum F_x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad A_x = P$$

Problema 7.3.
Para la situación descrita en el Problema 7.2, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo de la reacción vertical en el apoyo A?

a) $\left(\frac{M}{2}+m\right)g$

b) $\frac{P}{2}$

c) P

d) $(M+2m)g$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Considerando la suma de torques respecto al punto B,

$$\sum \tau_B = 0 \qquad \longrightarrow \qquad (2L\cos\theta)A_y - (L\cos\theta)Mg - \left(\frac{3L\cos\theta}{2}+\frac{L\cos\theta}{2}\right)mg = 0$$

Despejando,

$$A_y = \left(\frac{M}{2}+m\right)g$$

Problema 7.4.
Para la situación descrita en el Problema 7.2, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo del desplazamiento vertical virtual (δy) del bloque? Considere que el módulo del desplazamiento virtual del apoyo B es δx, tal como se muestra en la figura.

a) $\delta y = \left(\frac{\sin\theta}{2}\right)\delta x$

b) $\delta y = \left(\frac{\cos\theta}{2}\right)\delta x$

c) $\delta y = \left(\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}\right)\delta x$

d) $\delta y = \left(\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\delta x$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La posición vertical del bloque M, medida desde el punto A, viene dada por:

$$y_C = L\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \delta y_C = L\cos\theta\,\delta\theta$$

Por otra parte, la posición horizontal del punto B (tomando como origen al punto A) es:

$$x_B = 2L\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad \delta x_B = -2L\sin\theta\,\delta\theta$$

Utilizando ambas ecuaciones,

$$\delta y_C = -\left(\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\delta x_B$$

Problema 7.5.
Para la situación descrita en el Problema 7.2, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo del desplazamiento vertical virtual ($\delta y_{\rm cm}$) del centro de masa de una de las barras? Considere que el módulo del desplazamiento virtual del apoyo B es δx, tal como se muestra en la figura.

a) $\delta y_{\rm cm} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\delta x$

b) $\delta y_{\rm cm} = \left(\frac{\cos\theta}{4\sin\theta}\right)\delta x$

c) $\delta y_{\rm cm} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\delta x$

d) $\delta y_{\rm cm} = \left(\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\delta x$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:
La altura $y_{\rm cm}$ del centro de masa de ambas barras, medida desde el punto fijo A, es:

$$y_{\rm cm} = \frac{L}{2}\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \delta y_{\rm cm} = \frac{L}{2}\cos\theta\,\delta\theta$$

Al igual que en el problema anterior,

$$x_B = 2L\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad \delta x_B = -2L\sin\theta\,\delta\theta$$

Utilizando ambas ecuaciones, podemos despejar:

$$\delta y_{\rm cm} = -\left(\frac{\cos\theta}{4\sin\theta}\right)\delta x_B$$

Problema 7.6.
Para la situación descrita en el Problema 7.2, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al módulo de la fuerza que el pistón ejerce sobre el apoyo B?

a) $P = \dfrac{(M+2m)g\tan\theta}{2}$

b) $P = (M+m)g\tan\theta$

c) $P = \dfrac{(M+m)g\cot\theta}{2}$

d) $P = \dfrac{(M+2m)g\cos\theta}{2}$

e) $P = (M+2m)g\cot\theta$

Solución:

El trabajo virtual realizado por la estructura viene dado por:

$$\delta W = -Mg\,\delta y_C - 2mg\,\delta y_{\text{cm}} - P\,\delta x_B$$

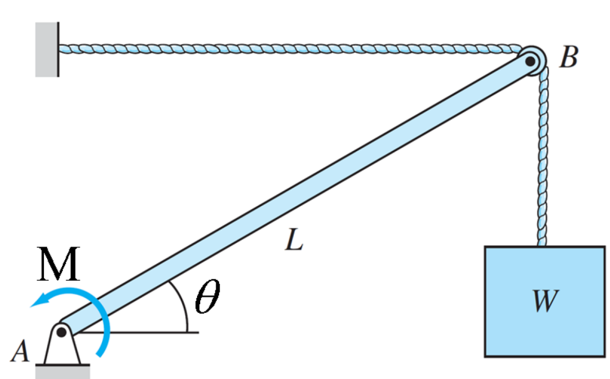
donde hemos considerado las direcciones de las fuerzas y las restricciones para el movimiento de la estructura. Reemplazando,

$$\begin{aligned}\delta W &= Mg\left(\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\delta x_B + 2mg\left(\frac{\cos\theta}{4\sin\theta}\right)\delta x_B - P\,\delta x_B \\ &= \left(\frac{Mg\cot\theta}{2} + \frac{mg\cot\theta}{2} - P\right)\delta x_B\end{aligned}$$

Para que el trabajo virtual sea nulo para todo desplazamiento virtual, se debe cumplir que:

$$P = \frac{(M+m)g\cot\theta}{2}$$

Problema 7.7.
Determine el momento de fuerza (torque), M , tal que la barra AB permanezca en la posición de equilibrio mostrada en la figura abajo. Desprecie el peso de la barra y considere que el diámetro de la polea en B es muy pequeño. El ángulo θ, la longitud L y el peso de W se dan por conocidos.



a) $M = LW(\cos\theta + \sin\theta)$

b) $M = -LW(\cos\theta + \sin\theta)$

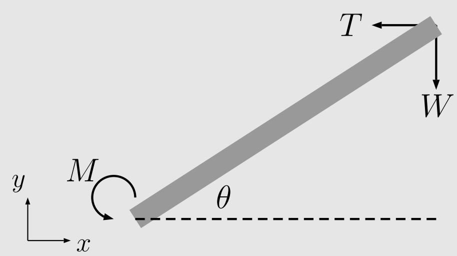
c) $M = -LW(\cos\theta - \sin\theta)$

d) $M = LW(\cos\theta - \sin\theta)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la situación es el siguiente:



Tomando como origen de nuestro sistema de coordenadas al punto A, el trabajo virtual viene dado por:

$$\begin{aligned} \delta W &= -T\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta\vec{r}_B - W\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\vec{r}_B + M\,\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \delta\vec{\theta} \\ &= -T\,\delta x_B - W\,\delta y_B + M\,\delta\theta \end{aligned}$$

Calculamos los desplazamientos virtuales,

$$(x_B, y_B) = (L\cos\theta, L\sin\theta) \qquad \longrightarrow \qquad (\delta x_B, \delta y_B) = (-L\sin\theta, L\cos\theta)\delta\theta$$

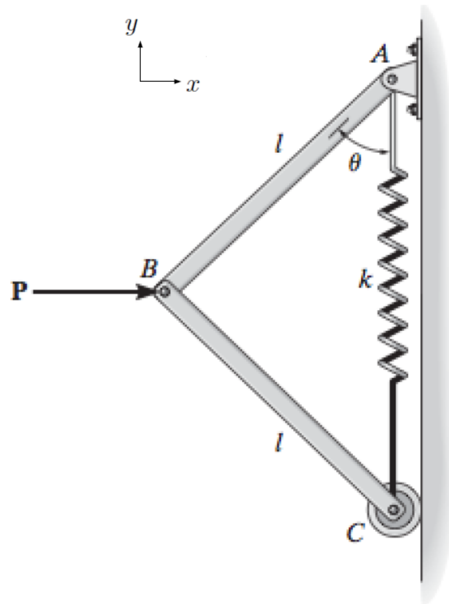
Como la estructura se encuentra en equilibrio, $T = W$. Reemplazando en el trabajo virtual,

$$\delta W = \Big(LW(\sin\theta - \cos\theta) + M\Big)\delta\theta$$

y con ello:

$$M = LW(\cos\theta - \sin\theta)$$

Problema 7.8.
Si el resorte en la figura abajo tiene una rigidez k y una longitud no deformada l_0, determine la fuerza P necesaria para mantener al mecanismo en la posición indicada en la figura. Ignore el peso de los elementos.



a) $P = 2k\cos\theta(2l\cos\theta - l_0)$

b) $P = k(2l\cos\theta - l_0)$

c) $P = 4kl\cos^2\theta$

d) $P = 2k\tan\theta(2l\cos\theta - l_0)$

e) $P = 2k\cot\theta(2l\cos\theta - l_0)$

Solución:

El trabajo virtual del sistema está dado por:

$$\delta W = P\,\delta x_B + k(|y_C| - l_0)\,\delta y_C$$

donde hemos usado el hecho de que la fuerza del resorte apunta hacia arriba. Las posiciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x_B &= -l\sin\theta \\ \therefore\ \delta x_B &= -l\cos\theta\,\delta\theta \\ \\ y_C &= -2l\cos\theta \\ \therefore\ \delta y_C &= 2l\sin\theta\,\delta\theta \end{aligned}$$

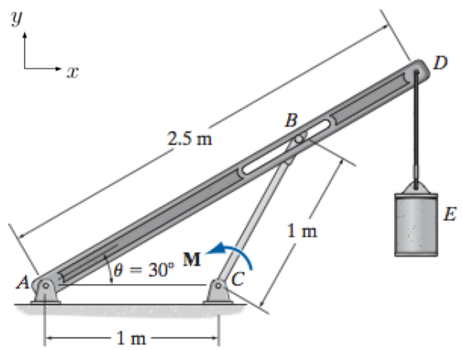
con el punto A como origen del sistema de coordenadas. Así,

$$\begin{aligned} \delta W &= -Pl\cos\theta\,\delta\theta + 2kl\sin\theta(2l\cos\theta - l_0)\,\delta\theta \\ &= l\Big(-P\cos\theta + 2k\sin\theta(2l\cos\theta - l_0)\Big)\,\delta\theta \end{aligned}$$

Para que el trabajo virtual sea nulo para todo desplazamiento virtual, se debe cumplir que:

$$P = 2k\tan\theta(2l\cos\theta - l_0)$$

Problema 7.9.
Determine la magnitud del momento de par M requerido para sostener el cilindro de 20 kg en la configuración que se muestra en la figura. La clavija lisa en B puede deslizarse libremente dentro de la ranura. Ignore la masa de los elementos.



a) $M = 25\sqrt{3}g$

b) $M = 25g$

c) $M = \dfrac{25}{2}\sqrt{3}g$

d) $M = \dfrac{25}{2}g$

e) $M = 50\sqrt{3}g$

Solución:

Elegimos el origen del sistema de coordenadas en el punto A. Dado que el $\triangle ABC$ es isósceles, se cumple que $\angle BAC = \angle ABC$. Así, el ángulo α que forma la horizontal con el segmento BC es $\alpha = 2\theta$. A hora bien, el trabajo virtual viene dado por:

$$\delta W = M\delta\alpha - 20g\,\delta y_D$$

donde

$$y_D = 2.5\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \delta y_D = 2.5\cos\theta\,\delta\theta$$

Por tanto,

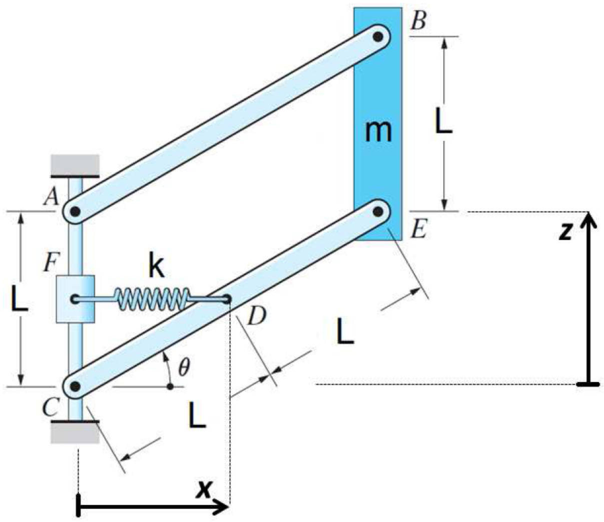
$$0 = \delta W = \Big(2M - 50g\cos\theta\Big)\,\delta\theta$$

Se desea que el equilibrio se alcance en $\theta = 30^\circ$, con lo que:

$$M = 25g\cos\theta = \frac{25}{2}\sqrt{3}g$$

Problema 7.10.
En el mecanismo de la figura, el resorte tiene un largo natural $\ell < L$ y las barras AB y CE no tienen

masa. En la figura se muestran los ejes Z (diferencia entre los puntos C y E) y X (distancia horizontal entre C y D).



La condición para una posición de equilibrio del sistema, en términos de θ, es:

a) $\dfrac{mg}{k} = \dfrac{1}{2}\tan\theta(L\cos\theta - \ell)$

b) $\dfrac{mg}{k} = \dfrac{1}{2}\cot\theta(L\cos\theta - \ell)$

c) $\dfrac{mg}{k} = \tan\theta(L\cos\theta - \ell)$

d) $\dfrac{mg}{k} = \cot\theta(L\cos\theta - \ell)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En nuestro sistema de referencia, la posición $\vec{r}_D$ está dada por:

$$\vec{r}_D = x_D\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + z_D\,\hat{\boldsymbol{k}} = L\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + L\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Por otra parte, la posición $\vec{r}_{\text{cm}}$ del centro de masa del bloque m es:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + z_{\text{cm}}\,\hat{\boldsymbol{k}} = 2L\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{L}{2} + 2L\sin\theta\right)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

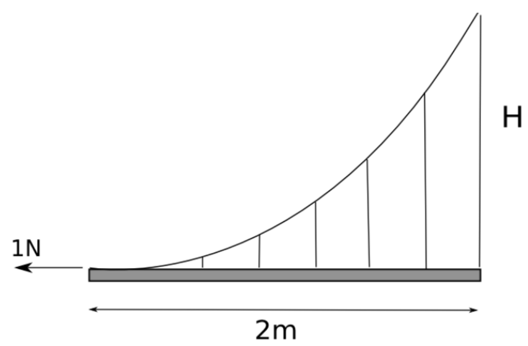
Considerando la dirección de las fuerzas, el trabajo virtual es:

$$\begin{aligned}
\delta W &= -mg\,\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\delta\vec{r}_{\text{cm}} - k(x_D - \ell)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\delta\vec{r}_D \\
&= -mg\,\delta z_{\text{cm}} - k(x_D - \ell)\,\delta x_D \\
&= -2mgL\cos\theta\,\delta\theta + kL(x_D - \ell)\sin\theta\,\delta\theta \\
&= \Big(-2mgL\cos\theta + kL(x_D - \ell)\sin\theta\Big)\,\delta\theta
\end{aligned}$$

Para el equilibrio, requerimos que $\delta W \equiv 0$ para cualquier desplazamiento virtual. Con ello,

$$\frac{mg}{k} = \frac{1}{2}\tan\theta(L\cos\theta - \ell)$$

Problema 7.11.
Un cable sin masa está soportando a una plataforma de largo 2 m con una distribución de peso uniforme $w_0 = 10\,\mathrm{N/m}$ hacia abajo. El extremo inferior esta sometido a una tensión horizontal de 1 N. Entonces, la altura H del extremo derecho del cable es:



a) $H = 10\,\mathrm{m}$

b) $H = 20\,\mathrm{m}$

c) $H = 20\,\mathrm{m}$

d) $H = 25\,\mathrm{m}$

e) $H = 30\,\mathrm{m}$

f) $H = 40\,\mathrm{m}$

Solución:

La ecuación que satisface todo cable es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w(x)}{T_0}$$

En este caso $w(x) = w_0$ constante, por lo que la solución a la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = \frac{w_0}{2T_0}x^2 + c_1x + c_2$$

Si colocamos el origen en el extremo izquierdo, entonces $y(0) = 0$ y con ello $c_2 = 0$. Por otra parte, sabemos que la cuerda está horizontal en el extremo izquierdo, con lo que $y'(0) = 0$ y por ende $c_1 = 0$. De esta manera,

$$y(x) = \frac{5}{T_0}x^2$$

La tensión de la cuerda satisface que

$$T \cos \alpha = T_0$$

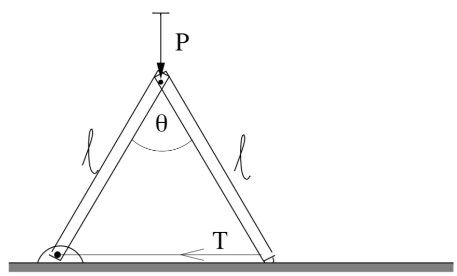
con T la tensión y α el ángulo entre el cable y la horizontal. En el extremo izquierdo, $\alpha = 0$ y $T = 1\,\mathrm{N}$, por lo que $T_0 = 1\,\mathrm{N}$. Reemplazando,

$$y(x) = 5x^2$$

Finalmente, sabemos que $y(2) = H$ y así:

$$H = 20\,\mathrm{m}$$

Problema 7.12.
El sistema de la figura consiste de dos barras de igual largo ℓ sin masa, articuladas en el vértice superior del triángulo isósceles de la figura. Los extremos inferiores de las barras están unidas por una cuerda ideal. El soporte de la derecha es libre, y no hay roce entre el soporte y el suelo. El largo de la cuerda es tal que el ángulo superior es θ. Si en el extremo superior se aplica una fuerza P, ¿cuál es el valor de la tensión T de la cuerda para que el sistema esté en equilibrio?



a) $T = \dfrac{P}{2} \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

b) $T = P$

c) $T = \dfrac{P}{2} \tan\theta$

d) $T = P \tan\theta$

e) $T = P \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Solución:

Colocaremos el origen en el extremo fijo. Las posiciones de los vértices donde se aplican las fuerzas P y T son:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_P &= \ell \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\boldsymbol{\imath}} + \ell \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
\vec{r}_T &= 2\ell \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\boldsymbol{\imath}}
\end{aligned}$$

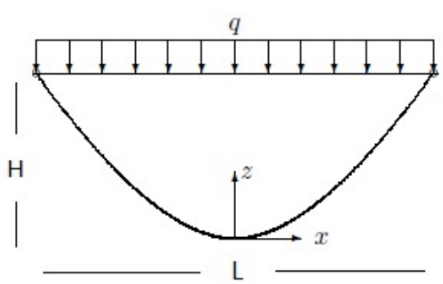
El trabajo virtual viene dado por:

$$\begin{aligned}
\delta W &= -P\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \delta\vec{r}_P - T\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta\vec{r}_T \\
&= -P\,\delta y_P - T\,\delta x_T \\
&= \frac{P\ell}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \delta\theta - T\ell \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \delta\theta \\
&= \ell \left[\frac{P}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - T \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \delta\theta
\end{aligned}$$

Para que el trabajo virtual sea siempre nulo, se debe cumplir que:

$$T = \frac{P}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Problema 7.13.
Considere un cable SIN MASA que está sometido a una carga distribuida uniformemente de valor q, como se muestra en la figura. El módulo de la tensión en $x = 0$, T_0, es:



a) $T_0 = \dfrac{qL^2}{8H}$

b) $T_0 = \dfrac{qL^2}{6H}$

c) $T_0 = \dfrac{qL^2}{4H}$

d) $T_0 = \dfrac{qL^2}{2H}$

e) $T_0 = \dfrac{qL^2}{H}$

Solución:

La cuerda satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w(x)}{T_0} = \frac{q}{T_0}$$

que es constante. Por tanto,

$$y(x) = \frac{q}{2T_0}x^2 + c_1\,x + c_2$$

De acuerdo a nuestro sistema de referencia, $y(0) = 0$ y con ello $c_2 = 0$. Por otra parte, la cuerda alcanza un mínimo en el origen ($y'(0) = 0$) con lo que $c_1 = 0$. Reemplazando,

$$y(x) = \frac{q}{2T_0}x^2$$

Finalmente, sabemos que

$$H = y\left(\frac{L}{2}\right) \qquad \longrightarrow \qquad T_0 = \frac{qL^2}{8H}$$

Problema 7.14.

Para la situación descrita en el Problema 7.13, ¿cuál es el módulo del valor máximo de la tensión, T_{max}?

a) $T_{max} = \dfrac{qL}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{H^2} + 1}$

b) $T_{max} = \dfrac{qL}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{2H^2} + 1}$

c) $T_{max} = \dfrac{qL}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{4H^2} + 1}$

d) $T_{max} = \dfrac{qL}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{8H^2} + 1}$

e) $T_{max} = \dfrac{qL}{2}\sqrt{\dfrac{L^2}{16H^2} + 1}$

Solución:

La tensión de la cuerda satisface que:

$$\begin{aligned} T\cos\alpha = T_0 \quad &\rightarrow \quad T = T_0 \sec\alpha \\ &\rightarrow \quad T = T_0\sqrt{1 + \tan^2\alpha} \\ &\rightarrow \quad T = T_0\sqrt{1 + y'(x)^2} \end{aligned}$$

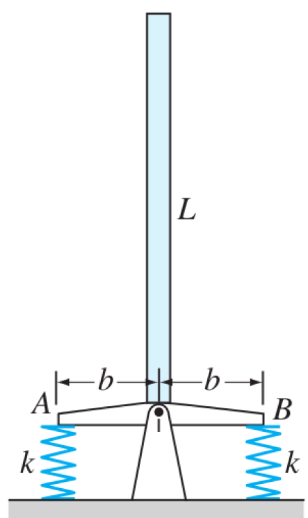
Reemplazando,

$$T(x) = T_0\sqrt{1 + \frac{q^2\,x^2}{{T_0}^2}}$$

Notamos que $T(x)$ es una función creciente, por lo cual el máximo estará localizado en $x = L/2$. Así,

$$\begin{aligned}
T_{max} &= T_0\sqrt{1 + \frac{q^2L^2}{4{T_0}^2}} \\
&= \frac{qL^2}{8H}\sqrt{1 + \frac{q^2L^2}{4}\cdot\frac{64H^2}{q^2L^4}} \\
&= \frac{qL}{2}\cdot\frac{L}{4H}\sqrt{1 + \frac{16H^2}{L^2}} \\
&= \frac{qL}{2}\sqrt{\frac{L^2}{16H^2} + 1}
\end{aligned}$$

Problema 7.15.
Considere una barra uniforme de largo L y peso W. La barra es soportada por una base de largo total $2b$, la cual está unida a dos resortes idénticos de constante elástica k. Además, los resortes están en su largo natural ℓ_0 cuando la barra está en posición vertical, tal como se muestra en la figura. Considere que la barra puede rotar respecto al punto de apoyo.



Encuentre una expresión para el potencial total del sistema, en función del ángulo θ que forma la barra con respecto a la vertical. Note que en la figura $\theta = 0$. Además, considere el origen del potencial gravitatorio en el punto de apoyo de la barra.

a) $U(\theta) = \dfrac{W\,L\cos\theta}{2} + kb^2\sin^2\theta$

b) $U(\theta) = \dfrac{WL\cos\theta}{2} + kb^2\cos^2\theta$

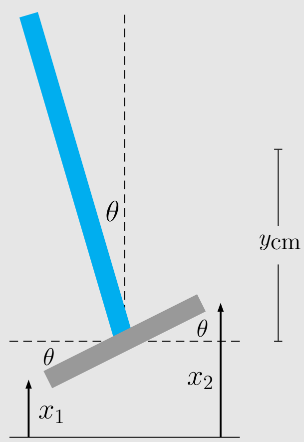
c) $U(\theta) = \dfrac{WL\sin\theta}{2} + kb^2\sin^2\theta$

d) $U(\theta) = \dfrac{WL\sin\theta}{2} + kb^2\cos^2\theta$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Consideremos la siguiente situación:



De la figura, notamos que el centro de masa de la barra está localizado a una altura $y_{\rm cm} = L\cos\theta/2$ respecto del pivote. Por tanto, la energía potencial gravitatoria viene dada por:

$$U_{grav}(\theta) = W\,y_{\rm cm} = \frac{WL}{2}\cos\theta$$

Por otra parte, x_1 y x_2 son los nuevos largos de cada resorte:

$$x_1 = \ell_0 - b\sin\theta \qquad \wedge \qquad x_2 = \ell_0 + b\sin\theta$$

Así, la energía potencial elástica está dada por:

$$\begin{aligned} U_{elas}(\theta) &= \frac{k}{2}(x_1-\ell_0)^2 + \frac{k}{2}(x_2-\ell_0)^2 \\ &= kb^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

Finalmente, la energía potencial total será:

$$U(\theta) = U_{grav}(\theta) + U_{elas}(\theta) = \frac{WL}{2}\cos\theta + kb^2\sin^2\theta$$

Problema 7.16.
Para la situación descrita en el Problema 7.15, encuentre la relación entre el ángulo de equilibrio (solución no trivial, es decir $\theta_0 \neq 0$) y los parámetros del problema.

a) $\cos\theta_0 = \dfrac{WL}{8kb^2}$

b) $\cos\theta_0 = \dfrac{WL}{4kb^2}$

c) $\cos\theta_0 = \dfrac{WL}{2kb^2}$

d) $\cos\theta_0 = \dfrac{WL}{kb^2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Tomamos la energía potencial del problema anterior y estudiamos los puntos de equilibrio del sistema mediante

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\theta} &= -\frac{WL}{2}\sin\theta + kb^2(2\sin\theta\cos\theta)\\ &= \sin\theta\left(2kb^2\cos\theta - \frac{WL}{2}\right)\end{aligned}$$

que al igualarse a cero, nos entrega la solución trivial $\theta_0 = 0$ y la solución que buscamos

$$\cos\theta_0 = \frac{WL}{4kb^2}$$

Notar que para que esta última posibilidad sea efectivamente un punto de equilibrio, se debe cumplir que

$$\cos\theta_0 < 1 \qquad \longrightarrow \qquad \sqrt{\frac{WL}{4k}} < b$$

Problema 7.17.
Para la situación descrita en el Problema 7.15, encuentre la condición sobre b, tal que se tenga un equilibrio estable para el ángulo calculado en la pregunta anterior.

a) $b > \sqrt{\dfrac{WL}{k}}$

b) $b > \sqrt{\dfrac{WL}{8k}}$

c) $b > \sqrt{\dfrac{WL}{4k}}$

d) $b > \sqrt{\dfrac{WL}{2k}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para analizar la estabilidad de un sistema, debemos estudiar el signo de la segunda derivada del potencial:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \cos\theta\left(2kb^2\cos\theta - \frac{WL}{2}\right) + \sin\theta\Big(-2kb^2\sin\theta\Big)$$

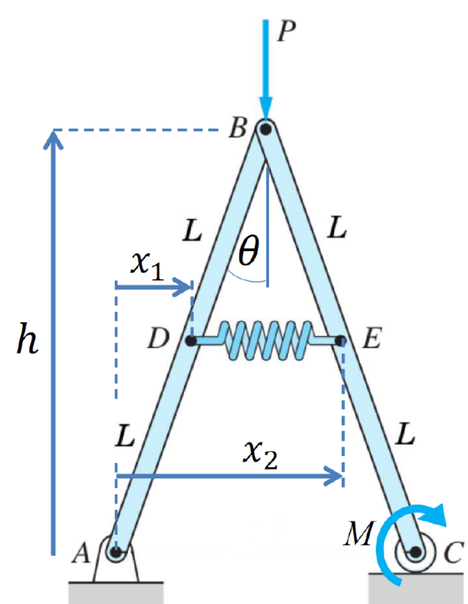
Si evaluamos en θ_0 encontrado anteriormente, notaremos que:

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} = -2kb^2\sin^2\theta < 0$$

y, por tanto, dicho punto de equilibrio **siempre será inestable**.

Problema 7.18.

En el sistema de la figura, las masas de las barras y del resorte son despreciables. Las barras tienen largo $2L$. El resorte tiene largo natural ℓ y constante elástica k. Analicemos el equilibrio del sistema usando el método de trabajos virtuales. Supongamos que el desplazamiento virtual elegido es tal que el pasador de abajo a la izquierda permanece fijo mientras que la rueda se desplaza horizontalmente.



La relación entre las variaciones δx_2 y δh para el desplazamiento virtual elegido es:

a) $\delta x_2 = -\dfrac{2h}{3x_2}\,\delta h$

b) $\delta x_2 = -\dfrac{9x_2}{4h}\,\delta h$

c) $\delta x_2 = -\dfrac{2x_2}{3h}\,\delta h$

d) $\delta x_2 = -\dfrac{9h}{4x_2}\,\delta h$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Si colocamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el punto A, entonces:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= L\sin\theta \\
x_2 &= 2L\sin\theta + L\sin\theta = 3L\sin\theta \\
h &= 2L\cos\theta
\end{aligned}
$$

Diferenciando las dos últimas ecuaciones,

$$
\begin{aligned}
\delta x_2 &= 3L\cos\theta\,\delta\theta \\
&= \frac{3h}{2}\,\delta\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta h &= -2L\sin\theta\,\delta\theta \\
&= -\frac{2x_2}{3}\,\delta\theta
\end{aligned}
$$

Dividiendo ambas expresiones,

$$\frac{\delta x_2}{\delta h} = -\frac{9h}{4x_2}$$

Problema 7.19.

Para la situación descrita en el Problema 7.18, supongamos primero que $P = 0$. Encuentre M tal que el sistema se encuentra en equilibrio en la posición $\theta = \theta_e$:

a) $M = -2kL\sin\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$

b) $M = -2kL\sin\theta_e(2L\cos\theta_e - \ell)$

c) $M = -2kL\cos\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$

d) $M = -2kL\cos\theta_e(2L\cos\theta_e - \ell)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea β el ángulo formado entre la horizontal y la barra de largo $2L$ (ambas barras, pues el triángulo que se forma es isósceles). Entonces,

$$2\beta + 2\theta = \pi \qquad \longrightarrow \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Por tanto, $\delta\beta = -\delta\theta$. Sea x la distancia entre los puntos D y E, que viene dada por:

$$x = x_2 - x_1 = 2L\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \delta x = 2L\cos\theta\,\delta\theta$$

El trabajo virtual realizado por el sistema corresponde a:

$$\begin{aligned} \delta W &= -k(x-\ell)\,\delta x + M\,\delta\beta \\ &= \Big[-2kL\cos\theta(2L\sin\theta - \ell) - M\Big]\,\delta\theta \end{aligned}$$

Como $\delta W \equiv 0$ para todo $\delta\theta$, en el equilibrio se debe cumplir que:

$$M = -2kL\cos\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$$

Problema 7.20.
Para la situación descrita en el Problema 7.18, supongamos ahora que $P = 0$ no es necesariamente nulo pero $M = 0$. La relación que permite encontrar el ángulo de equilibrio ahora es:

a) $P = k\cot\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$

b) $P = -k\cot\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$

c) $P = k\tan\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$

d) $P = -k\tan\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En este caso, el trabajo virtual viene dado por:

$$\begin{aligned} \delta W &= -k(x-\ell)\,\delta x - P\,\delta h \\ &= 2L\Big[-k\cos\theta(2L\sin\theta - \ell) + P\sin\theta\Big]\,\delta\theta \end{aligned}$$

Como $\delta W \equiv 0$ para todo $\delta\theta$, en el equilibrio se debe cumplir que:

$$P = k\cot\theta_e(2L\sin\theta_e - \ell)$$