Estática y Dinámica FIS1513-3

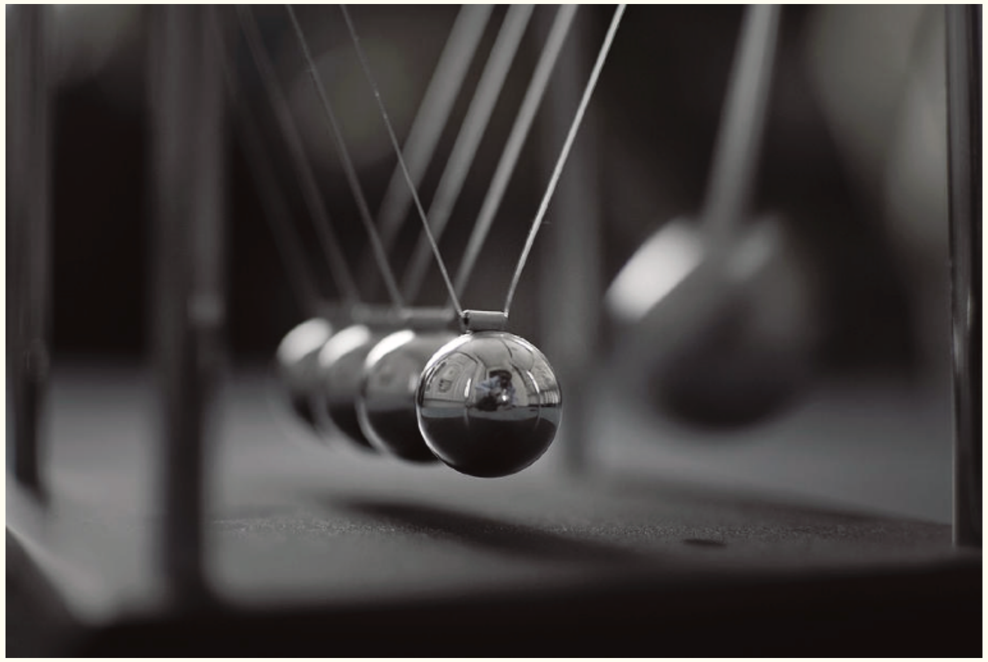
Clase #12

24-09-2018

Trabajo y Energía

Anuncios

- Espero hayan pasado una excelente semana de fiestas patrias
- La i2 es en una semana y media (miércoles 3 de Octubre, 18.30 hrs)
- Tienen de martes 25 de Septiembre a martes 2 de Octubre para ver y recorregir la i2
  - Esto se hace en la subdirección de docencia de la Facultad de Física, al lado de la entrada principal a los laboratorios docentes.
- Este miércoles 26 de Septiembre dedicaremos 25 minutos a hacer la ETC (evaluación temprana de cursos)



Trabajo y Energía

Kinetics of a Particle: Work and Energy

14

CHAPTER OBJECTIVES

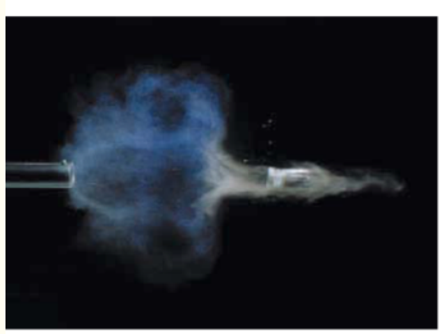
- To develop the principle of work and energy and apply it to solve problems that involve force, velocity, and displacement.
- To study problems that involve power and efficiency.
- To introduce the concept of a conservative force and apply the theorem of conservation of energy to solve kinetic problems.

In order to properly design the loop of this roller coaster it is necessary to ensure that the cars have enough energy to be able to make the loop without leaving the tracks.

Capítulo 14 del Hibbeler y 6-7 del Young-Freedman

TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

6



?Cuando una arma de fuego se dispara, los gases que se expanden en el cañón empujan el proyectil hacia afuera, de acuerdo con la tercera ley de Newton, el proyectil ejerce tanta fuerza sobre los gases, como éstos ejercen sobre aquél. ¿Sería correcto decir que el *proyectil* efectúa trabajo sobre los *gases*?

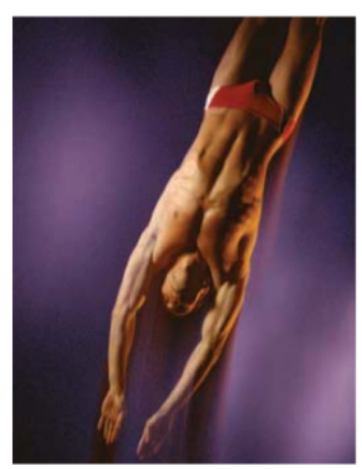
METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza efectúe trabajo sobre un cuerpo, y cómo calcular la cantidad de trabajo realizada.
- La definición de energía cinética (energía de movimiento) de un cuerpo, y lo que significa físicamente.
- Cómo el trabajo total efectuado sobre un cuerpo cambia la energía cinética del cuerpo, y cómo utilizar

ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

7

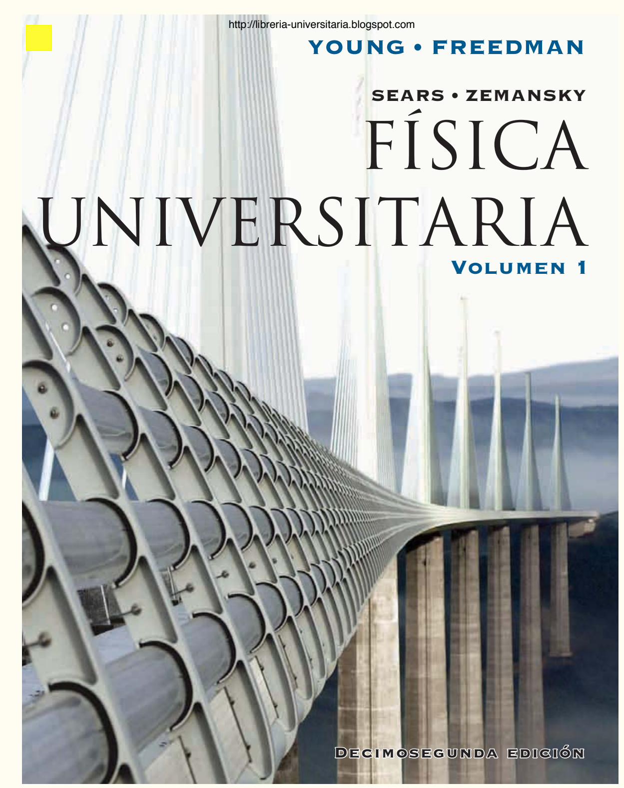


?Mientras este clavadista entra en el agua, ¿la fuerza de gravedad realiza trabajo positivo o negativo sobre él? ¿El agua realiza trabajo positivo o negativo sobre él?

METAS DE APRENDIZAJE

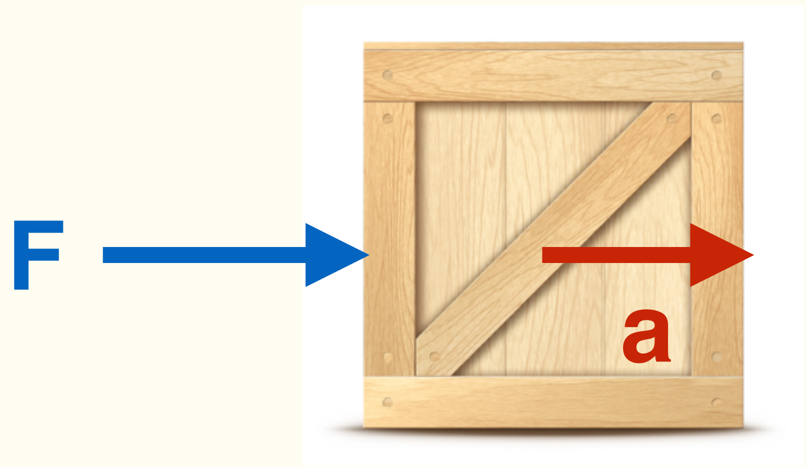
Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo utilizar el concepto de energía potencial gravitacional en problemas que implican movimiento vertical.
- Cómo utilizar el concepto de energía potencial elástica en problemas que implican un cuerpo en movimiento unido a un resorte estirado o comprimido.
- La distinción entre fuerzas conservativas y no conservativas, y cómo resolver problemas donde ambos tipos de fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento.
- Cómo calcular las propiedades de una fuerza conservativa conociendo la función de energía potencial correspondiente.



Introducción

Las leyes de Newton nos permiten describir el movimiento de un objeto sujeto a una o más fuerzas.



Con las leyes de Newton uno puede relacionar fuerzas y aceleraciones. A partir de las aceleraciones uno puede describir el movimiento.

En principio cualquier problema se puede resolver utilizando las leyes de Newton, **pero esto no siempre es fácil**, sobre todo cuando hay fuerzas variables (como con resortes). Aparte, hay que usar cálculo (derivadas e integrales) para ir entre aceleración, velocidad y posición.

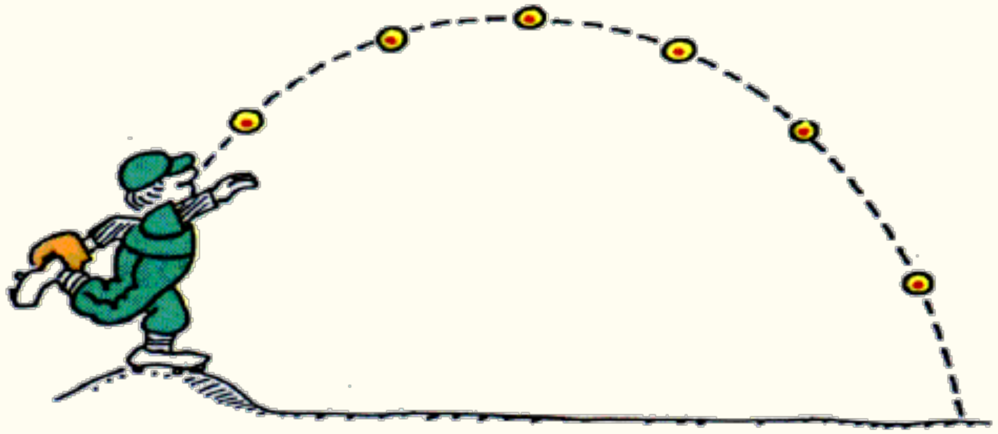
En este capítulo vamos a introducir otro método de análisis que que permite relacionar directamente fuerzas, masas, velocidades y desplazamientos sin tener que pasar por aceleraciones.

Este método involucra los conceptos de **energía** y **trabajo**, y nos permitirá resolver algunos problemas de **forma mucho más fácil**.

Trabajo

Para comenzar necesitamos introducir el concepto de "trabajo" en mecánica.

Trabajo es una cantidad escalar que se obtiene cuando una fuerza actúa sobre un objeto en movimiento.



Por ejemplo, la fuerza de gravedad hace un trabajo sobre el proyectil cuando éste se mueve.

Matemáticamente, se define como

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

En palabras: **Trabajo = fuerza por dezplazamiento**

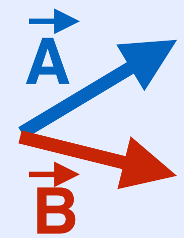
¿Por qué se define así? Primero veamos sus propiedades y cómo se calcula, y luego veremos de dónde salió y para qué sirve

Comentarios sobre el trabajo

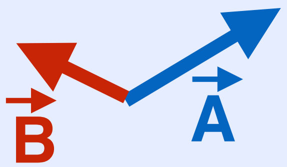
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

- El trabajo es una cantidad **escalar**
- Las unidades en el SI son Newton x metro, es decir **Joules**
- Es **positivo** si la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido, y **negativo** en caso contrario

Esto se debe a las propiedades del producto punto:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} > 0$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} < 0$$

- **Puede haber varias fuerzas** actuando sobre un cuerpo cuando éste se desplaza, y en ese caso cada una hace trabajo

$$W_{\text{neto}} = \sum_i W_i$$

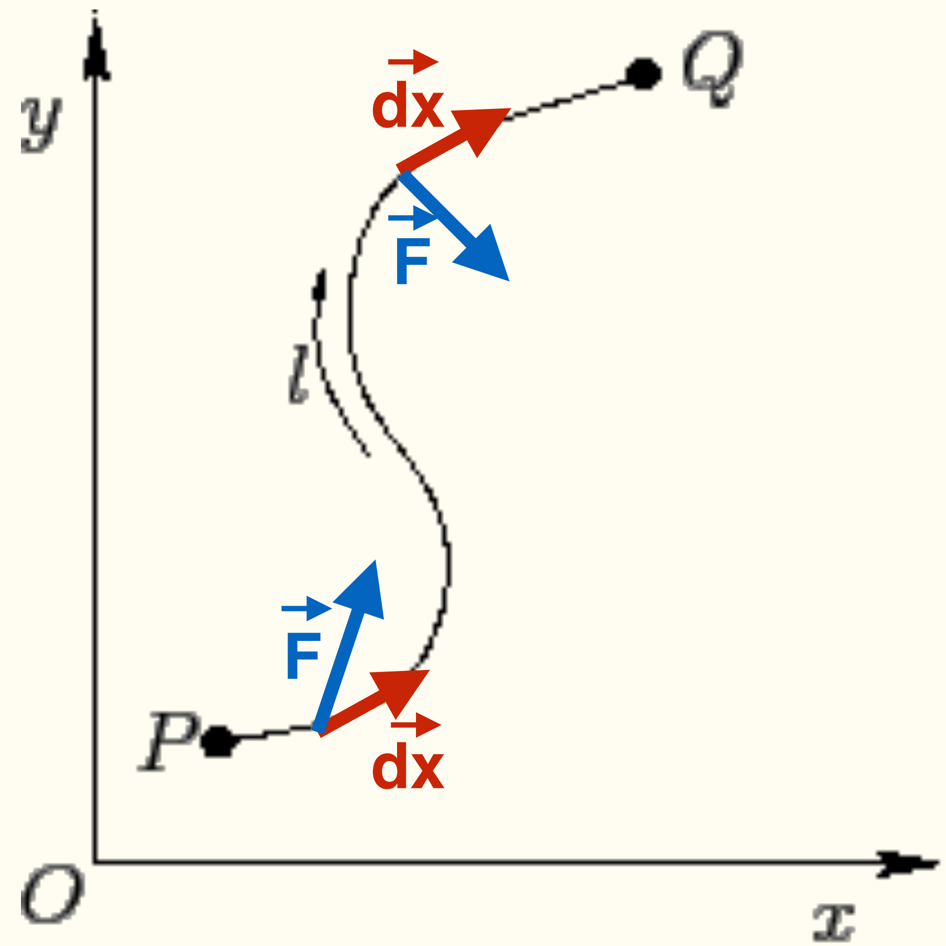
el trabajo neto es la suma de los trabajos hechos por cada fuerza

Cálculo del Trabajo

¿Cómo se calcula?

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad \text{(o también } W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}\text{)}$$

Esto es lo que se llama una "integral de línea".



Si una partícula se desplaza de un punto P a otro punto Q, lo que esta integral hace es:

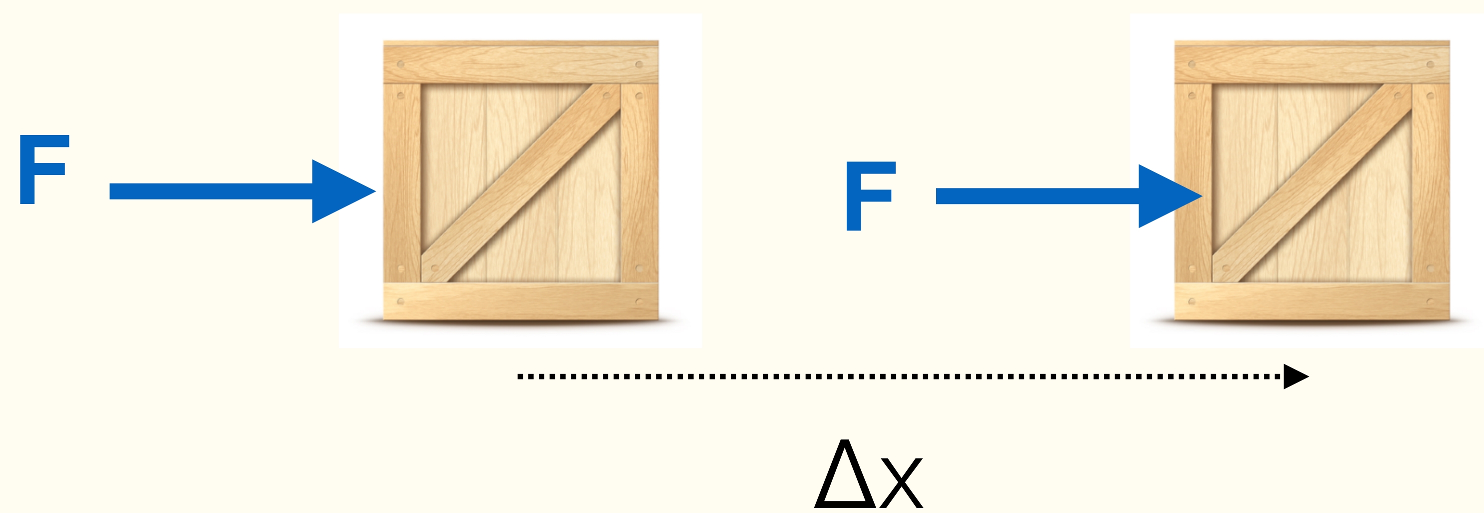
- Dividir la trayectoria en un montón de pedacitos infinitesimales de tamaño dx
- Para cada pedacito, hacer el producto punto dW=$\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{dx}}$.
- Sumar las contribuciones de cada pedacito (es decir sumar los dW)

Nota: el $\vec{\mathbf{dx}}$ siempre es tangencial a la trayectoria en cada punto, pero la fuerza en principio podría ir en cualquier dirección y cambiar de punto a punto

Cálculo del Trabajo: Fuerza Constante

Veamos algunos ejemplos:

Si tenemos una caja que se empuja con una fuerza F constante hacia la derecha, y la caja se desplaza una distancia d hacia la derecha, ¿cúal es el trabajo hecho por la fuerza?



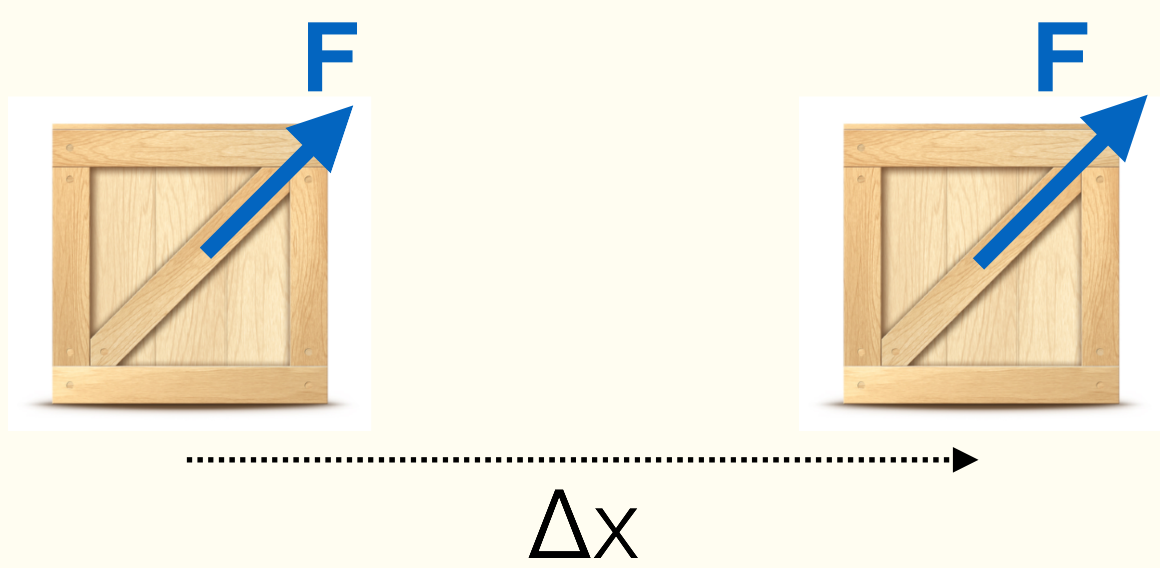
En este caso $\vec{F} = F\hat{i}$ (una constante) y $d\vec{x} = dx\hat{i}$

(recordatorio: en general $d\vec{x} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$)

Por lo que: $$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int F\,dx = F\int_{x_i}^{x_f} dx = \boxed{F\Delta x}$$

Cálculo del Trabajo: Fuerza Constante con un Ángulo

¿Qué tal si la fuerza se aplica con un ángulo respecto al desplazamiento?



Como por ejemplo en una situación así:

Sabemos que, en general: $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

Por lo que: $$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int F\,dx\cos\theta = F\cos\theta\int_{x_i}^{x_f} dx = \boxed{F\Delta x\cos\theta}$$

(ya que F y θ son constantes)

Otra forma de verlo:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int\left(F\cos\theta\hat{i} + F\sin\theta\hat{j}\right)\cdot\left(dx\vec{i}\right) = F\cos\theta\int_{x_i}^{x_f} dx = \boxed{F\Delta x\cos\theta}$$

Trabajo: Fuerza Constante con un Ángulo

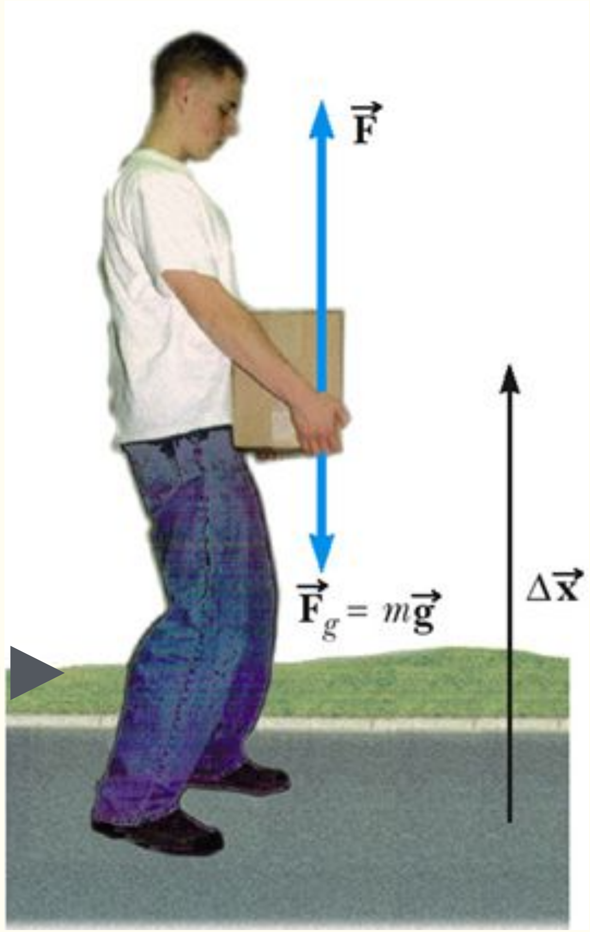
La expresión:

$$W = F\Delta x\cos\theta \qquad (\text{o} \quad W = Fd\cos\theta)$$

es válida en el caso de una fuerza constante aplicada a un objeto que se desplaza en línea recta, donde θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento

Confirmamos lo que ya habíamos mencionado antes: si la fuerza y el desplazamiento van en sentidos opuestos ($90^o < \theta < 270^o$), el trabajo es negativo, mientras que de otra forma es positivo. **Y si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es nulo**

Por ejemplo, si subo una caja yo hago trabajo positivo y la gravedad hace trabajo negativo. Cuando bajo la caja, yo hago trabajo negativo y la gravedad hace trabajo positivo.



Confusión Típica

Cuidado de no confundir trabajo con "cuanto esfuerzo me cuesta"

Aquí la fuerza que yo ejerzo **sí** hace trabajo, siempre y cuando el auto se esté moviendo

Aquí la fuerza que yo ejerzo **no** hace trabajo (¡no hay desplazamiento!)

Puedo quemar muchas calorías y hasta sudar al empujar la pared, pero **si no hay desplazamiento no hay trabajo**

Otro Ejemplo

Otro ejemplo: si este señor se queda en esta posición, le va a costar mucho esfuerzo y va a sudar mucho. Pero si la pesa no se mueve, entonces no está haciendo trabajo sobre ella, por lo menos no en el sentido “Newtoniano”

Experimento #1

(esta es la representación de un artista de dos planetas en colisión; hay un aspecto físico de la colisión que el artista capturó muy bien, ¿cuál es?)

¿Y para qué sirve el "trabajo"?

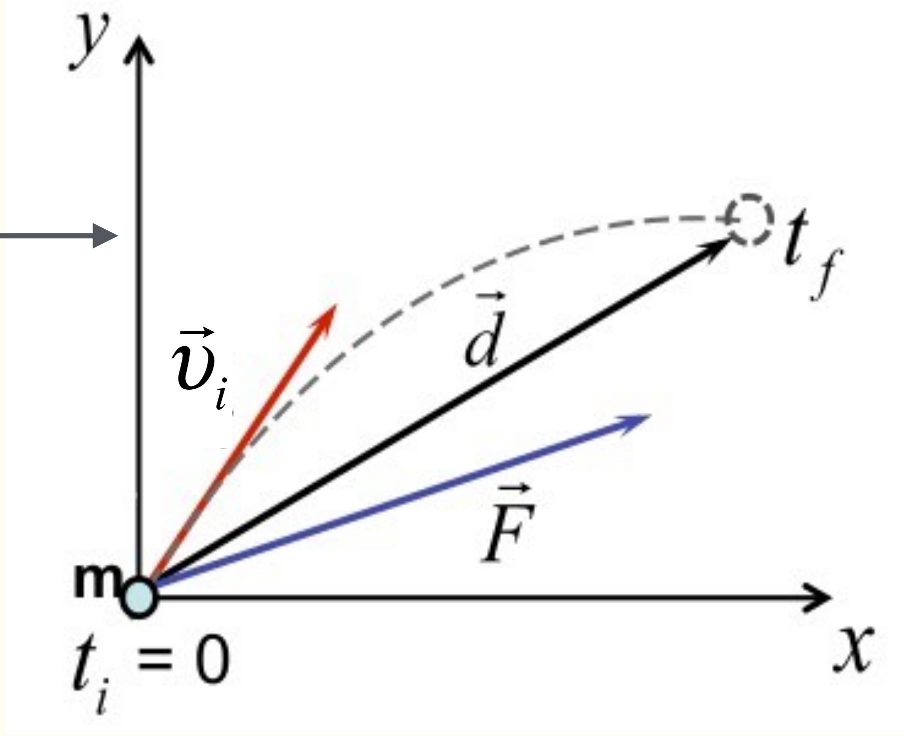
Regresando al trabajo, ¿para qué sirve esta cantidad y de donde salió?

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Principio: resulta que el **trabajo** realizado por fuerzas externas sobre un objeto depende solamente de cambios en la **rapidez** de éste

Demostración:

Consideremos un objeto de masa m que se mueve a lo largo de la trayectoria punteada bajo la acción de una fuerza constante **F**



$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

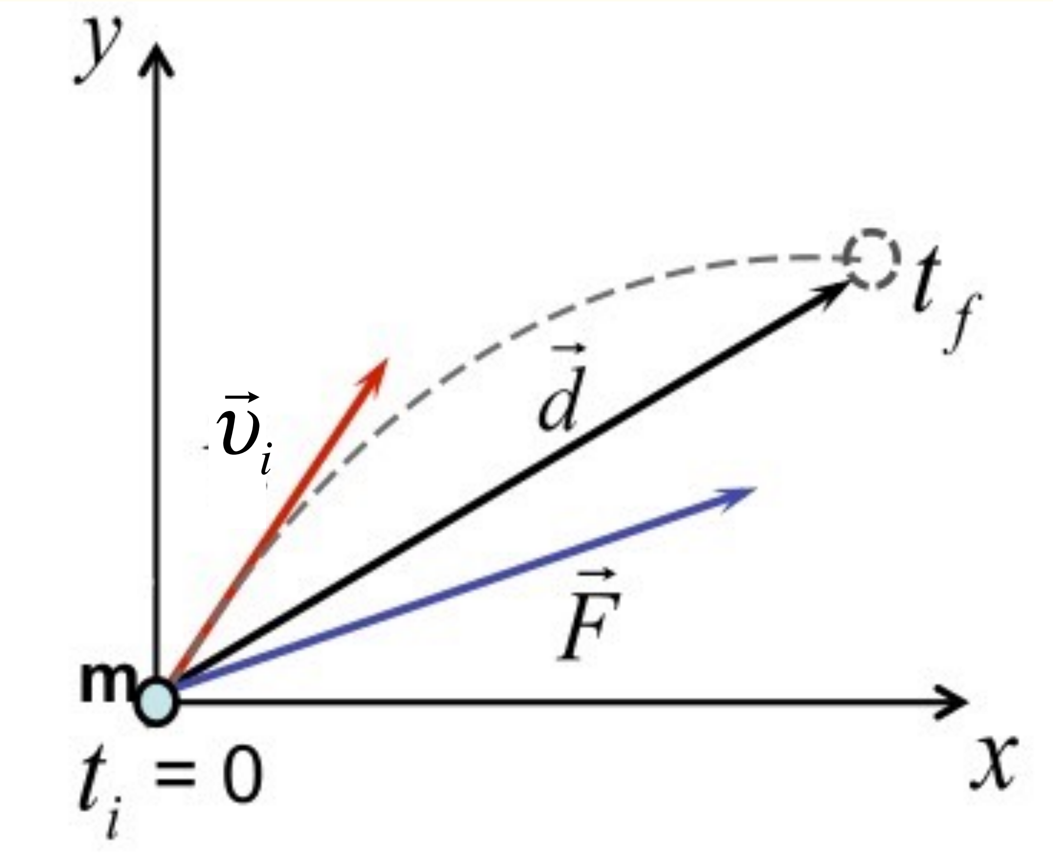
¿Y para qué sirve?

¿Cuál es la velocidad final en x?

$$\upsilon_{xf} = a_x t_f + \upsilon_{xi} = \frac{F_x}{m} t_f + \upsilon_{xi}$$

¿Cuál es la posición final en x?

$$x_f = \frac{1}{2} a_x t_f^2 + \upsilon_{xi} t_f + x_i = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t_f^2 + \upsilon_{xi} t_f + x_i$$



De la primera ecuación despejamos t_f:

$$t_f = \frac{m\left(\upsilon_{xf} - \upsilon_{xi}\right)}{F_x}$$

Y lo remplazamos en la segunda ecuación:

$$x_f = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} \left(\frac{m\left(\upsilon_{xf} - \upsilon_{xi}\right)}{F_x} \right)^2 + \upsilon_{xi} \left(\frac{m\left(\upsilon_{xf} - \upsilon_{xi}\right)}{F_x} \right) + x_i$$

Reordenando un poco queda: $F_x\left(x_f - x_i\right) = \frac{1}{2} m\upsilon_{xf}^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_{xi}^2$

¿Y para qué sirve?

$$F_x\left(x_f - x_i\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_{xf}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{xi}^2$$

Utilizando el mismo procedimiento en y llegamos a:

$$F_y\left(y_f - y_i\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_{yf}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{yi}^2$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$F_x\left(x_f - x_i\right) + F_y\left(y_f - y_i\right) = \frac{1}{2}m(\upsilon_{xf}^2 + \upsilon_{yf}^2) - \frac{1}{2}m(\upsilon_{xi}^2 + \upsilon_{yi}^2)$$

Que se puede generalizar como:

$$\boxed{\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}} = \boxed{\frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_i^2}$$

¡Muy Interesante!

Trabajo realizado por la fuerza constante

¡Depende sólo del cambio en la rapidez!

El Teorema del Trabajo y de la Energía

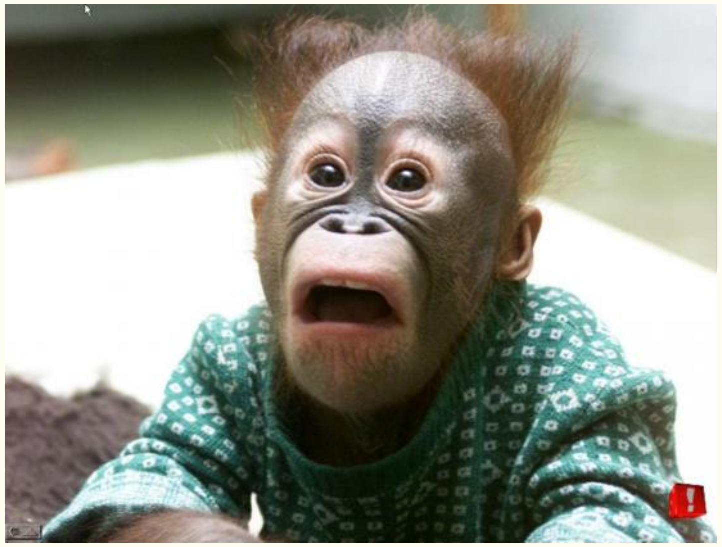
Hicimos esta demostración asumiendo una fuerza constante, pero la conclusión también es válida en el caso de una fuerza variable (ver sección 14.2 del Hibbeler para la demostración)

En general, resulta que:

$$\boxed{W_{\text{neto}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2}$$

donde $W_{\text{neto}} = \sum_i W_i$ es la suma de los trabajos hechos por todas las fuerzas que actúan sobre el objeto (que es lo mismo que el trabajo hecho por la fuerza neta)

A esta relación se le llama **"el teorema del trabajo y la energía"**



El Teorema del Trabajo y de la Energía

$$\boxed{W_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}$$

Esta relación es <u>sumamente importante</u>:

Si hay un objeto en el cual actúan muchas fuerzas, **el trabajo neto sólo depende de la rapidez inicial y final**

No importa cuántas fuerzas sean y que tan complicado sea el movimiento, si conozco la rapidez inicial y final puedo calcular el trabajo neto (o viceversa)

Y no sólo esto, sino que el teorema se puede escribir de esta forma:

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K$$

donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ ⟵ energía cinética

En otras palabras, el trabajo neto hecho sobre un objeto sólo afecta una cantidad que llamaremos **energía cinética** y que <u>sólo depende de la rapidez</u>

(más adelante quedará más claro por qué llamarle a esta cantidad “energía”)

Experimento #2

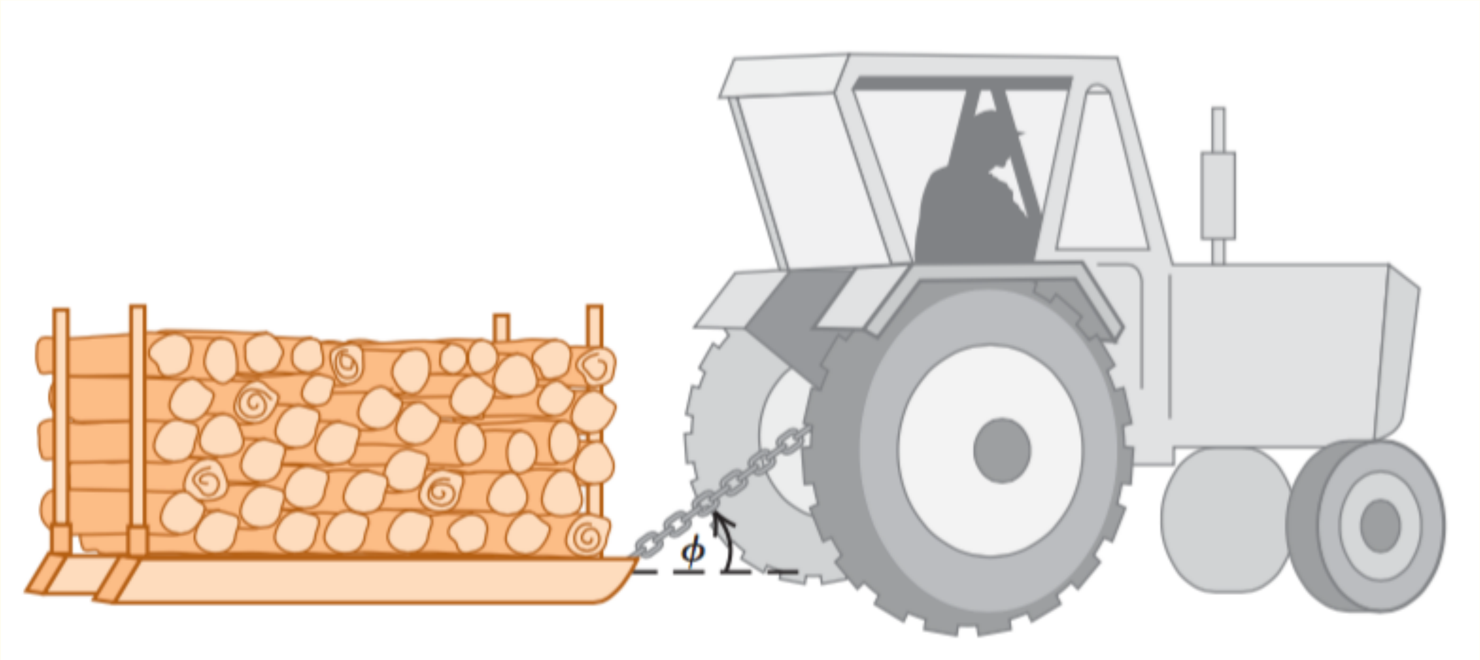
Moraleja #1: la energía nunca se pierde ni se crea. En otras palabras, **siempre se conserva**.

Moraleja #2: cuando hay roce o deformación de objetos, parte de la energía se transforma en calor. En estos casos la energía mecánica no se conserva, ya que parte se va en calor (que en este curso no consideraremos en las ecuaciones).

Ejemplo

(6.2 y 6.3 en el Young & Freedman)

Un tractor tira un trineo con madera por la nieve. El trineo y su carga tienen un peso de 14700N. El tractor ejerce una fuerza de 5000N a un ángulo ϕ=36.9º, y la fuerza de roce es 3500N. Si inicialmente el trineo tiene una velocidad de 2m/s, ¿cuál es su velocidad después de avanzar 20m?



(resolver en pizarra)

Respuesta: 4.2 m/s

(Nota: este problema se hubiera podido resolver con las leyes de Newton, pero hubiéramos tardado más)

Trabajo y Trayectoria

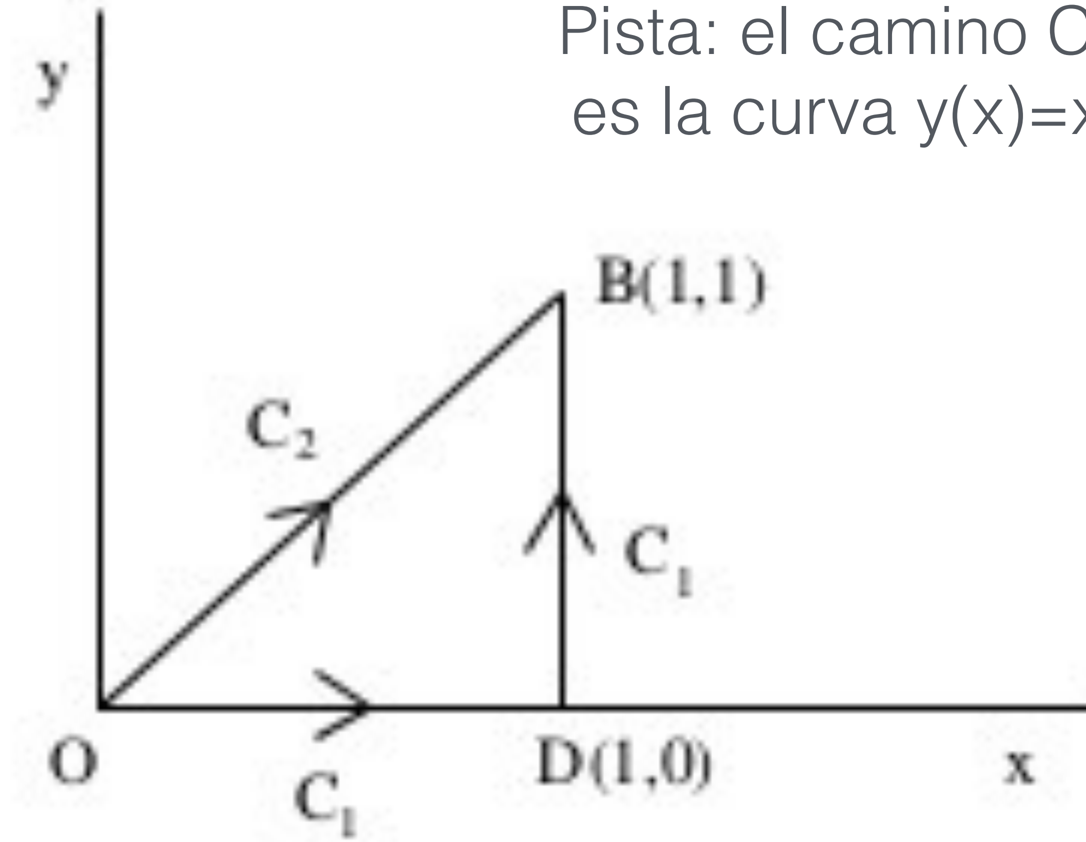
Por lo general, el trabajo realizado por una fuerza depende de la trayectoria seguida

Por ejemplo, considere una fuerza no constante (es decir que depende de la posición):

$$\vec{F} = 3y\hat{i} + 2x\hat{j}$$

¿Cuánto trabajo hace esta fuerza para una partícula que se desplaza por el camino C_1, y otra que se desplaza por C_2?

Pista: el camino C_2 es la curva $y(x)=x$



(resolver en pizarra)

Respuestas: W_{C1}=2 J y W_{C2}=5/2 J

A pesar de que los puntos de partida y llegada con los mismos, los trabajos no lo son. **¡El trabajo depende de la trayectoria seguida!**

Próxima clase: más sobre trabajo y energía