5.2 El Teorema de Impulso / Momento:

Consideramos dos masas m_1 y m_2, que chocan, es decir, ejercen fuerzas entre si por poco tiempo.
Importante para el siguiente cálculo es:

→ ambas masas interactúan solamente entre ellos (no hay interacción con Fuerzas externas).

Velocidades antes del choque: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.
Velocidades despues del choque: $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$.

$\vec{F}_{12}(t)$ es la Fuerza de la masa 2 sobre la Masa 1 en el momento t.

$\vec{F}_{21}(t)$ es la Fuerza de m 1 sobre m2 en el mismo momento t.

primer index: partícula sobre la cual la fuerza actúa.

Con "actio = reactio" vale para todo t:

$$\vec{F}_{12}(t) = -\vec{F}_{21}(t) \qquad (5.2\text{-}1)$$

Integración de esta ecuación entre el comienzo del golpe t_1 hasta el fin del golpe t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}(t)dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}(t)dt$$

El integral del tiempo de la Fuerza $\vec{F}_{12}(t)$ sobre la partícula 1 da según ecu. (5.1-5) el cambio del impulso / momento de la partícula 1.
Lo mismo corresponde para la partícula 2.

$$\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = -\left[\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1)\right]$$

o

$$\vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2} \qquad (5.2\text{-}2)$$

si ninguna de las dos masas están influidas por fuerzas externas.

El impulso / momento total de ambos cuerpos se conserva, con la condición que ambos interactúan solamente entre ellos, sin la influencia de fuerzas externas.

La conservación del impulso / momento (5.2-2) se puede también comprobar de otra forma:

De la ecu. (5.2-1) y del segundo axioma de Newton sigue:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_1(t) = -\frac{d}{dt}\vec{P}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) = \text{const.} \qquad (5.2\text{-}3)$$

La suma de los dos impulsos esta constante para todo t. Este resultado corresponde a la ecuación (5.2-2).

Nota: El teorema del impulso / momento resulta del 2° y 3^{ero} axioma de Newton.

El teorema de impulso recién planteado (5.2-3) para dos cuerpos, se puede generalizar de inmediato a un sistema aislado con "cualquier cantidad" de cuerpos. Mantenemos el llamado "Teorema de conservación del Impulso":

Teorema de Impulso / Momento: En un sistema aislado, es decir, en un sistema, en el cual los cuerpos sólo interactúan entre ellos a través de Fuerzas "internas" $\vec{F}_{ij}$ y no estan influidas por Fuerzas externas, la suma vectorial sobre todos los impulsos es constante:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const.} \qquad (5.2-3')$$

con N = número de cuerpos en el sistema aislada.

Nota: Considere, que el Teorema de impulso requiere sólo la aislación del sistema respecto a las fuerzas. El Teorema de impulso vale también (al contrario del teorema de Energía), si roce aparece entre los cuerpos del sistema aislada.

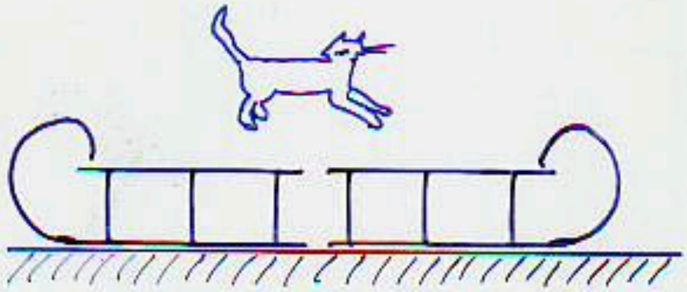
(El teorema de impulso por su puesto no vale, si aparecen roces con el mundo externo, ya que el sistema deja de ser aislado.)

Ejemplo (5.2-1):

Salto del Gato:

Dos trineos iguales con las masas $m_1 = m_2 = 25\,kg$ estan ubicados directamente uno detrás del otro sobre el hielo resbaladizo. Un gato de masa $m_g = 8\,kg$ esta sobre el trineo izquierdo y salta entonces con una velocidad horizontal $v_g = 6\,m/s$ – medido en forma relativa a la tierra – sobre el trineo derecho y permanece allí sentado.

¿Qué velocidad u_i tiene el trineo izquierdo y qué velocidad u_d tiene el trineo derecho después del salto?



Solución:

– sistema consiste de dos trineos y un gato:
  → está un sistema aislado.

– No hay que aplicar el teorema de Energía Mecánica:
  → hay energía muscular biológica → energía mecánica.

$\Rightarrow$ el proceso no es puramente mecánico.

El teorema de impulso sin embargo corresponde, ya que en dirección horizontal - y sólo esa dirección nos interesa - no actúan fuerzas externas al sistema.

Ya que con u_i, u_d tenemos dos incógnitos, tenemos que aplicar dos veces el teorema de impulso.

Teorema de impulso para el salto desde el trineo izquierdo indica:

$$m_1 \cdot 0 + m_g \cdot 0 = m_1 \cdot u_i + m_g V_g$$

$$\Rightarrow u_i = -\frac{m_g}{m_1} V_g = -1{,}92 \frac{m}{s}$$

Teorema de impulso para la llegada al trineo derecho es:

$$m_g \cdot V_g = (m_g + m_2) u_d$$

$$\Rightarrow u_d = \frac{m_g}{m_g + m_2} V_g = 1{,}45 \frac{m}{s}$$

Nota: Después del salto del gato el impulso total nuevamente es cero: $m_1 u_i + (m_2 + m_g) u_d = 0$

Esto es una confirmación/control para la exactitud del cálculo.

Ejemplo 5.2-2:

Pájaro aterrizando:

Un tronco $m_t = 60\,kg$ flota con velocidad constante $V_t = 3\,m/s$ con la corriente del río. Un pájaro $m_p = 8\,kg$ intenta aterrizar en el tronco, mientras él vuela con velocidad horizontal $V_p = 4\,m/s$ aguas arriba (contra la corriente). El pájaro resbala a lo largo del tronco y se cae al final al agua con velocidad horizontal $u_p = 1{,}2\,m/s$ (en dirección aguas arriba).

Calcule la velocidad u_t del tronco después del intento de aterrizaje (No tome en cuenta el roce del tronco con el agua. Todas las velocidades serán medidas desde la orilla del río).

Solución:

El teorema de Energía mecánica no corresponde aquí, ya que el pájaro resbala a lo largo del tronco y entonces transforma Energía mecánica en calor. (Al pájaro "se le calientan las patas" con el roce).

Ya que el sistema está aislado/cerrado con respecto a la fuerza en dirección horizontal vale el teorema de Impulso:

$$m_t \cdot V_t + m_p(-V_p) = m_t u_t + m_p(-u_p)$$

$$\Rightarrow \quad u_t = \frac{1}{m_t}\left[m_t V_t + m_p (u_p - V_p)\right] = 2{,}62\bar{6}\ \frac{m}{s}$$

Si actúa desde afuera en total la fuerza $\vec{F}^{(a)}$ sobre el sistema de N-partículas, entonces No hay conservación de impulso.
En este caso vale por el segundo Axioma de Newton:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right] = \vec{F}^{(a)}} \qquad (5.2-4)$$

El teorema de Impulso (5.2-3') $\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const.}\right]$ es un caso especial de la ecuación (5.2-4).
La siguiente comprobación de la ecu. (5.2-4) por eso también es una comprobación del teorema de impulso (5.2-3'):

Comprobación:

A la partícula N° i ($i = 1,2,\dots N$) del sistema de N-partículas actúan las Fuerzas internas F_{ij} ($j = 1,\dots i-1, i+1,\dots N$) los cuales resultan de los otros N-1 partículas del sistema y la Fuerza externa $F_i^{(a)}$, la cual resulta del mundo externo de este sistema no cerrada/aislada (e.g. Gravedad $m_i g$).

Según el 2° Axioma de Newton vale:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

con $\vec{F}_{ii} = 0$, porque las partículas no pueden ejercer una Fuerza sobre sí mismo ($\rightarrow$ cuento del Barón Münchhausen).

Sumamos esta ecu. sobre los i desde 1 a N:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Porque se anulan en la suma doble respectivamente dos términos (e.g. $(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21})$ y $(\vec{F}_{47} + \vec{F}_{74})$) ($\rightarrow$ "actio = reactio") $\Rightarrow$ la suma doble $\equiv 0$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} =: \vec{F}^{(a)}$$

q.e.d.

Hay muchos sucesos los cuales se pueden aclarar con el teorema del Impulso:

- hombre saltando desde un bote en reposo a la orilla: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_1$
- escopeta y proyectil
  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_1$

Münchhausen

O. Herrfurth pinx

Ejemplo (5.2-3):

Fuerza sobre un codo de tubo:

En un codo con una área transversal, constante, A, predomina una corriente agua estacionaria, libre de roce (estacionaria: estado de corriente no cambia; velocidad, presión, densidad,... estan en cualquier lugar/posición y tiempo constante).

¿**Cuál** es la fuerza que ejerce el agua como consecuencia de la desviación sobre el codo?

Esta fuerza debe ser absorbida por los fijadores del codo y por lo tanto debe ser exactamente conocida. En las grandes centrales Eléctricas estas Fuerzas deben ser calculadas con exactitud. Las Fuerzas pueden abarcar los kN.

Solución:

Calulamos el cambio del Impulso $\dot{\vec{p}}$ de un volumen apropiado de líquido, que pasa por el codo. El volumen consiste de todos las particulas del líquido, que en el tiempo t se encuentran en el marco puntado entre las transversalas 1 y 2 (area sombreada en la figura:)