Clase #26

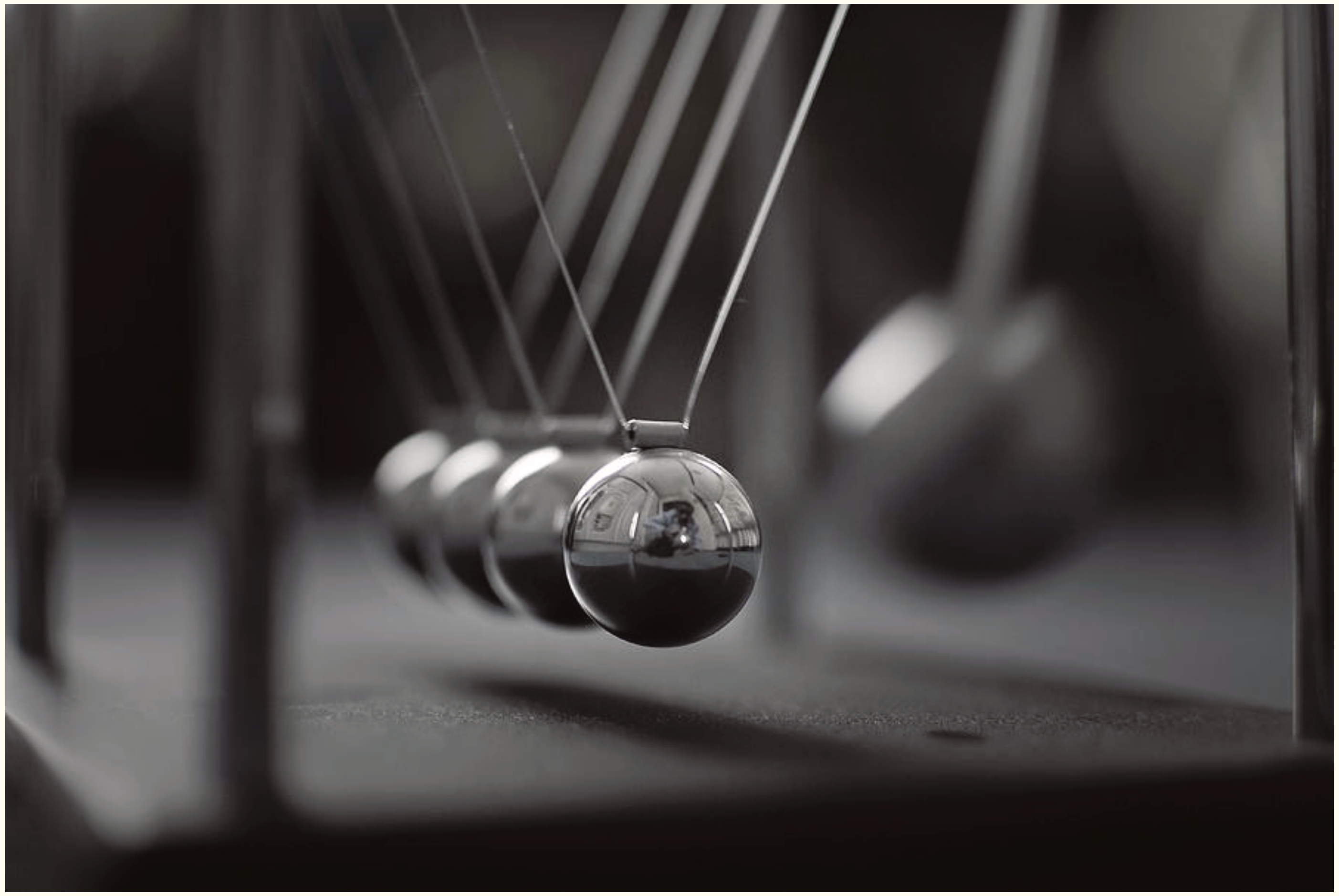
14-11-2018

Cuerpo Rígido

Estática y Dinámica FIS1513

Anuncios

- Espero que las notas de la i3 estén listas a finales de esta semana. ¡Lamento la tardanza!
- Nos quedan 3 clases
- El examen es el jueves 29 de Noviembre (un poco más de 2 semanas)



Cuerpo Rígido: Energía Rotacional, Rotación y Translación Combinadas

Para toda esta parte es mejor el Young & Freedman, Capítulos 9-10.

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS 9

? Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un

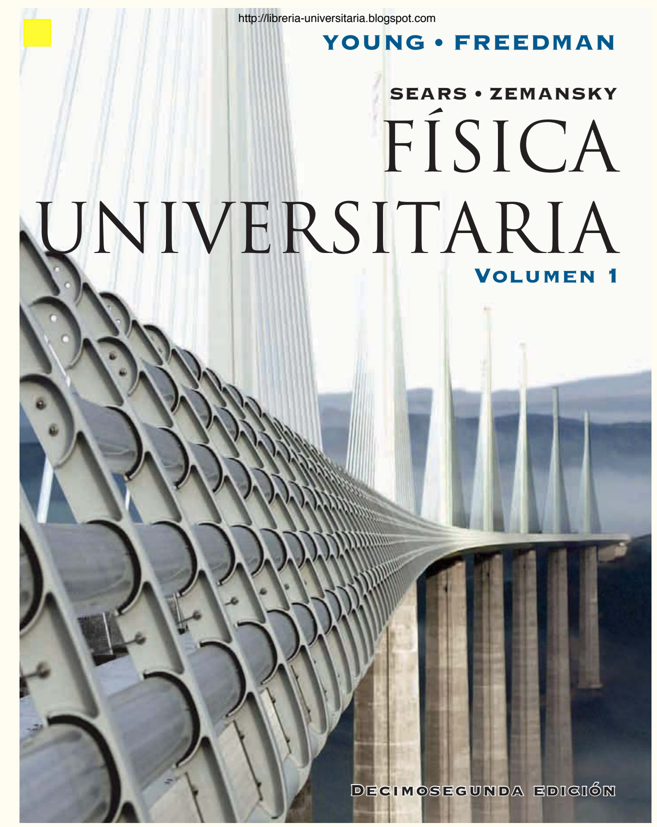
10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.

? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



<u>Específicamente:</u>

Energía Rotacional: 9.4
Combinación de Rotación y Traslación: 10.3

Energía Rotacional

¿Un cuerpo rígido en rotación tiene energía cinética?

¡Sí!

(las partículas de un cuerpo rígido en rotación están en movimiento, por lo que tienen que tener energía cinética)

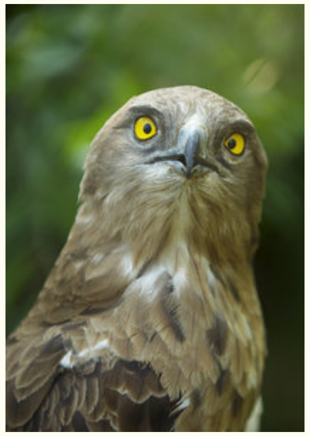
Para calcularla, hay que sumar las contribuciones de cada partícula:

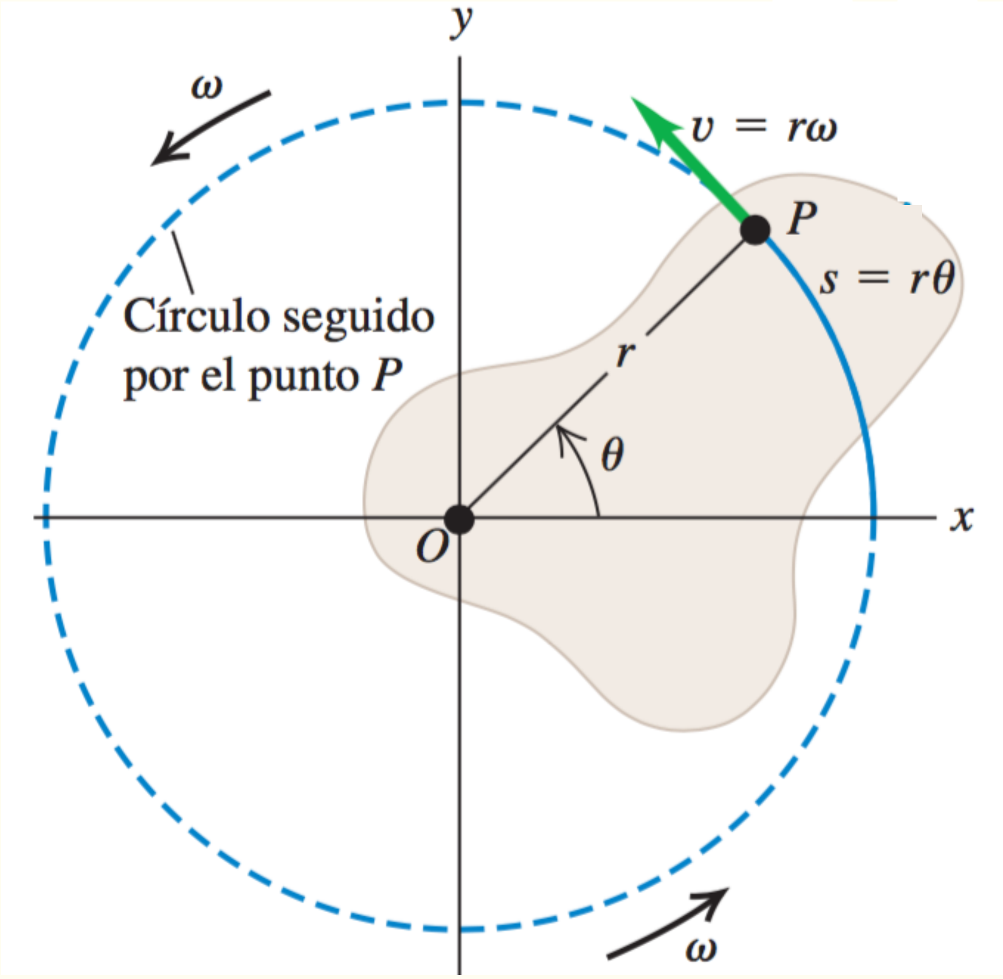
$$K_{rot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

que podemos re-escribir como:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)\omega^2$$

es decir: $\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$





Trabajando con Energía para Cuerpos Rígidos

La energía rotacional se tiene que incluir en el balance de energía y trabajo:

$$W_{no-cons} = \Delta K + \Delta U$$

si hay un cuerpo rígido rotando, esa energía debe ir contabilizada aquí

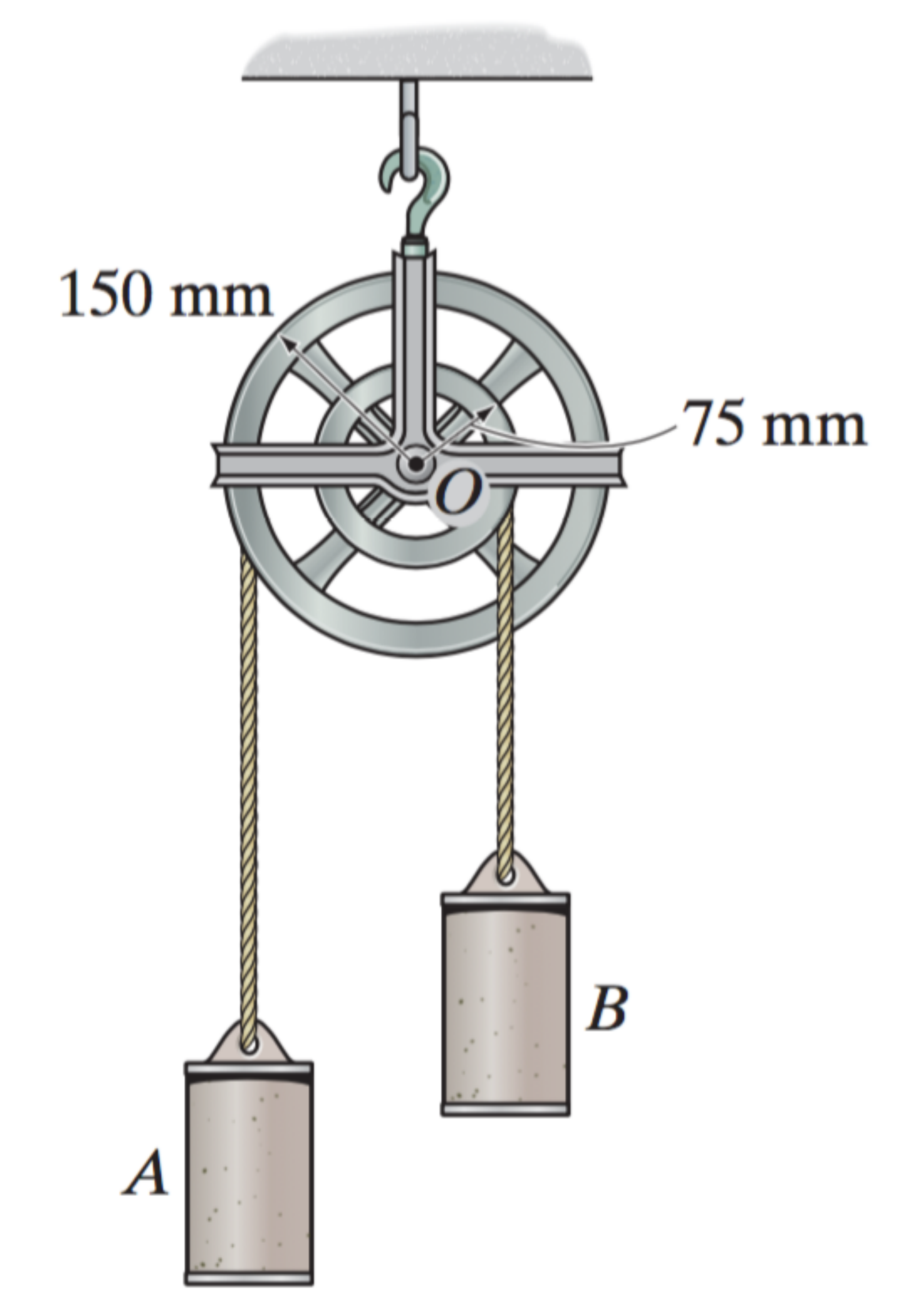
¿Y cómo contabilizar la energía potencial para un cuerpo rígido, ya que diferentes partes de él tienen diferente altura?

Para un cuerpo rígido, la energía potencial gravitatoria se contabiliza utilizando la altura del centro de masa.

Ejemplo

(18.15 en Hibbeler)

Se tiene el sistema mostrado en la figura. Los cilindros A y B tienen una masa de 20kg, y la polea de 15kg. El momento de inercia de la polea es I=0.15 kgm². Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la velocidad de ambos cilindros cuando A se ha desplazado 2m hacia abajo.



(resolver en pizarra)

Respuestas: v_A=3.52m/s (hacia abajo), v_B=1.76m/s (hacia arriba)

¡Tantas ecuaciones!

Alguien podría pensar que hemos introducido una enorme cantidad de ecuaciones nuevas al estudiar movimiento rotacional. Pero en realidad estas ecuaciones son **prácticamente las mismas que antes**:

Movimiento Traslacional		Movimiento Rotacional
Para a constante: $v = at + v_0$; $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$	**Cinemática**	Para α constante: $\omega = \alpha t + \omega_0$; $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$
$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	**2da Ley de Newton**	$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	**Momento**	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	**Energía Cinética**	$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

¡Son las mismas ecuaciones! Sólo hay que remplazar fuerza por torque, aceleración lineal por aceleración angular, momento lineal por momento angular, masa por momento de inercia…. etc.

Experimento #1

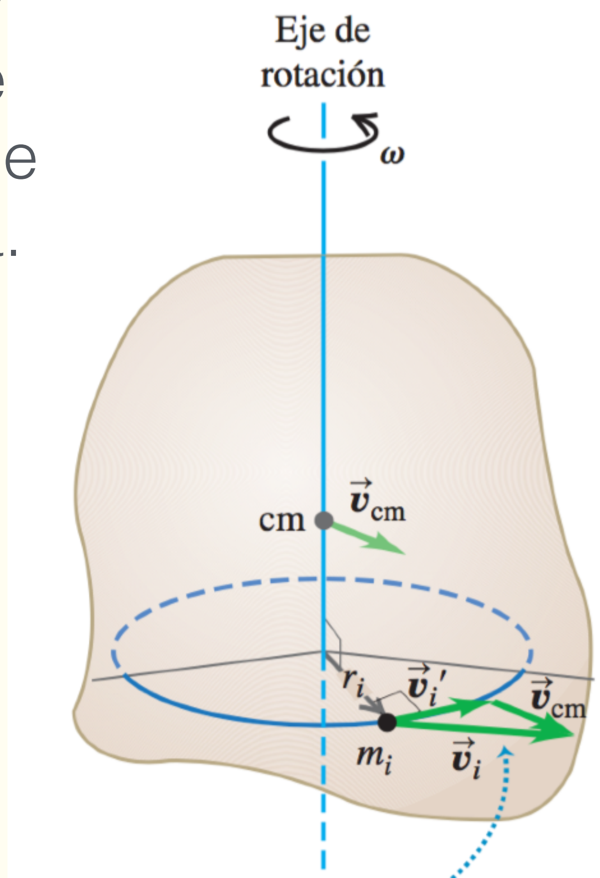
La “rueda de Maxwell”

Combinación de Rotación y Translación

Hemos pasado todo el capítulo de cuerpo rígido estudiando movimiento rotacional solamente. **¿Pero qué pasa si un cuerpo tiene translación y rotación al mismo tiempo?**

Veamos primero qué pasa con la energía cinética:

Si un cuerpo tiene traslación y rotación, significa que por definición no está rotando respecto a un punto de pivote fijo, sino respecto a otro eje en movimiento. Si el cuerpo se está moviendo libremente, este eje es su centro de masa.



Velocidad $\vec{v}_i$ de una partícula de un cuerpo rígido en rotación y traslación = (velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa) más (velocidad $\vec{v}_i{}'$ de la partícula relativa al centro de masa).

La energía cinética total es la suma de la energía cinética de todas las partículas:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i\right|^2$$

Conviene expresar la velocidad de cada partícula como la velocidad del CM más la velocidad relativa al CM:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}'$$

Energía Cinética: Rotación y Translación

Recordando que, para cualquier vector

$$|\vec{a}|^2 = a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Entonces nos queda que la energía cinética de una sola partícula i es:

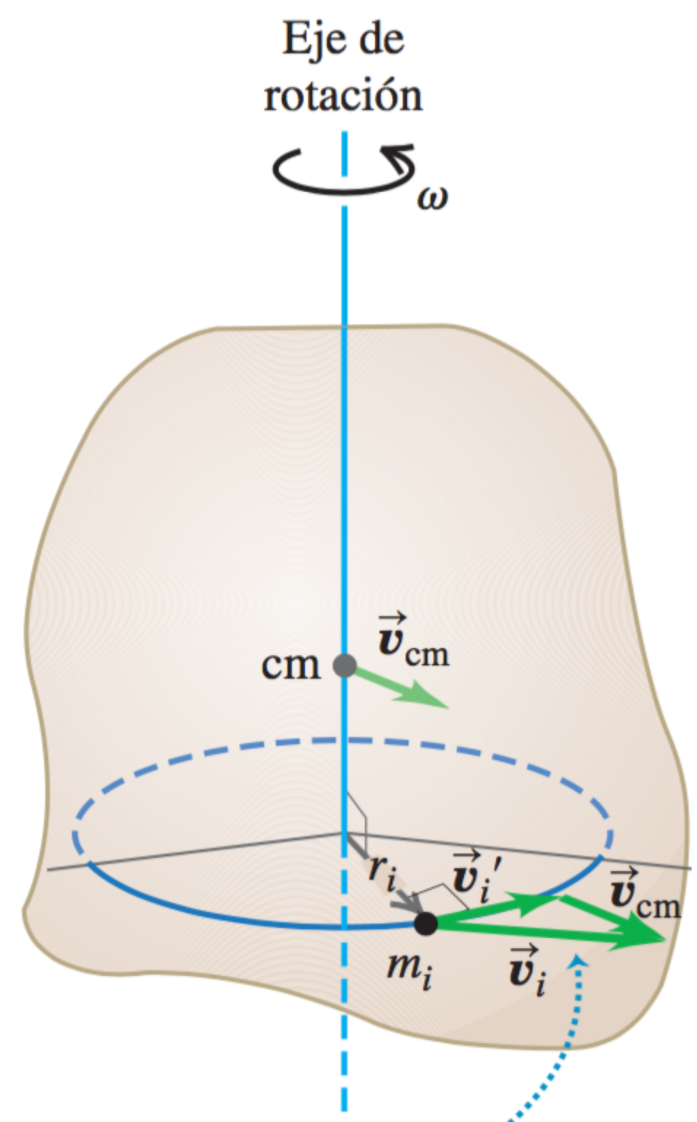
$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')$$
$$= \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i')$$
$$= \frac{1}{2} m_i (v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2)$$

La energía rotacional total queda:

$$K = \sum K_i = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_{cm}^2\right) + \sum (m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') + \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2\right)$$

que se puede re-escribir como:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \left(\sum m_i \vec{v}_i'\right) + \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2\right)$$



Velocidad $\vec{v}_i$ de una partícula de un cuerpo rígido en rotación y traslación = (velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa) más (velocidad $\vec{v}_i'$ de la partícula relativa al centro de masa).

Energía Cinética: Rotación y Translación

Esta expresión se puede simplificar:

$$K = \frac{1}{2}\boxed{\left(\sum m_i\right)}v_{\rm cm}^{2} + \boxed{\vec{v}_{\rm cm}\cdot\left(\sum m_i \vec{v}_i'\right)} + \boxed{\sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i'^2\right)}$$

masa total
M

Se cancela ya que:

$$\sum m_i \vec{v}_i' = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_{CM}$$
$$= M\vec{v}_{CM} - M\vec{v}_{CM}$$
$$= \vec{0}$$

energía cinética
rotacional
respecto al CM

$$K_{\rm rot/CM} = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2$$

Nos queda:

$$\boxed{K = K_{CM} + K_{\rm rot/CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2}$$

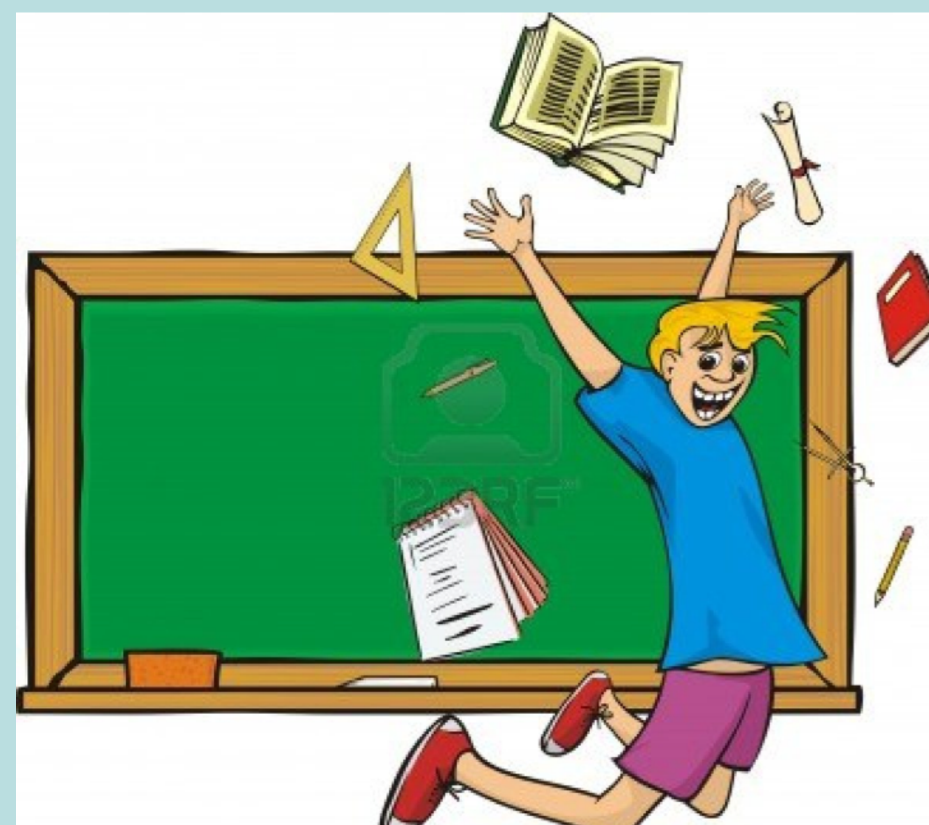
Esto es bastante intuitivo: **la energía cinética total es la energía de traslación del centro de masa más la energía de rotación respecto al centro de masa**

Experimento #2

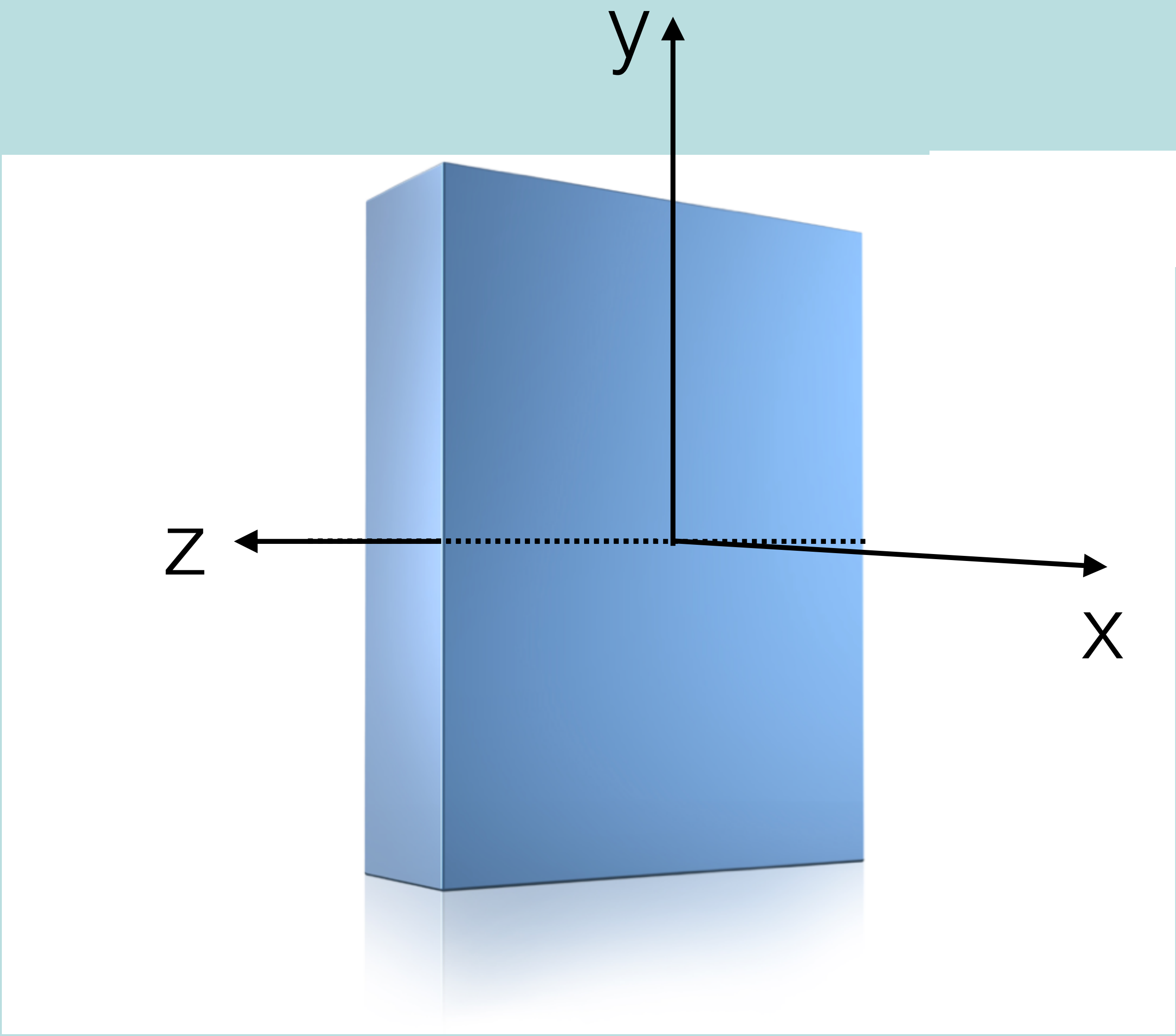
¡El Gran Reto de Estática y Dinámica!

¿Premio?

¡¡¡Algo mejor!!!



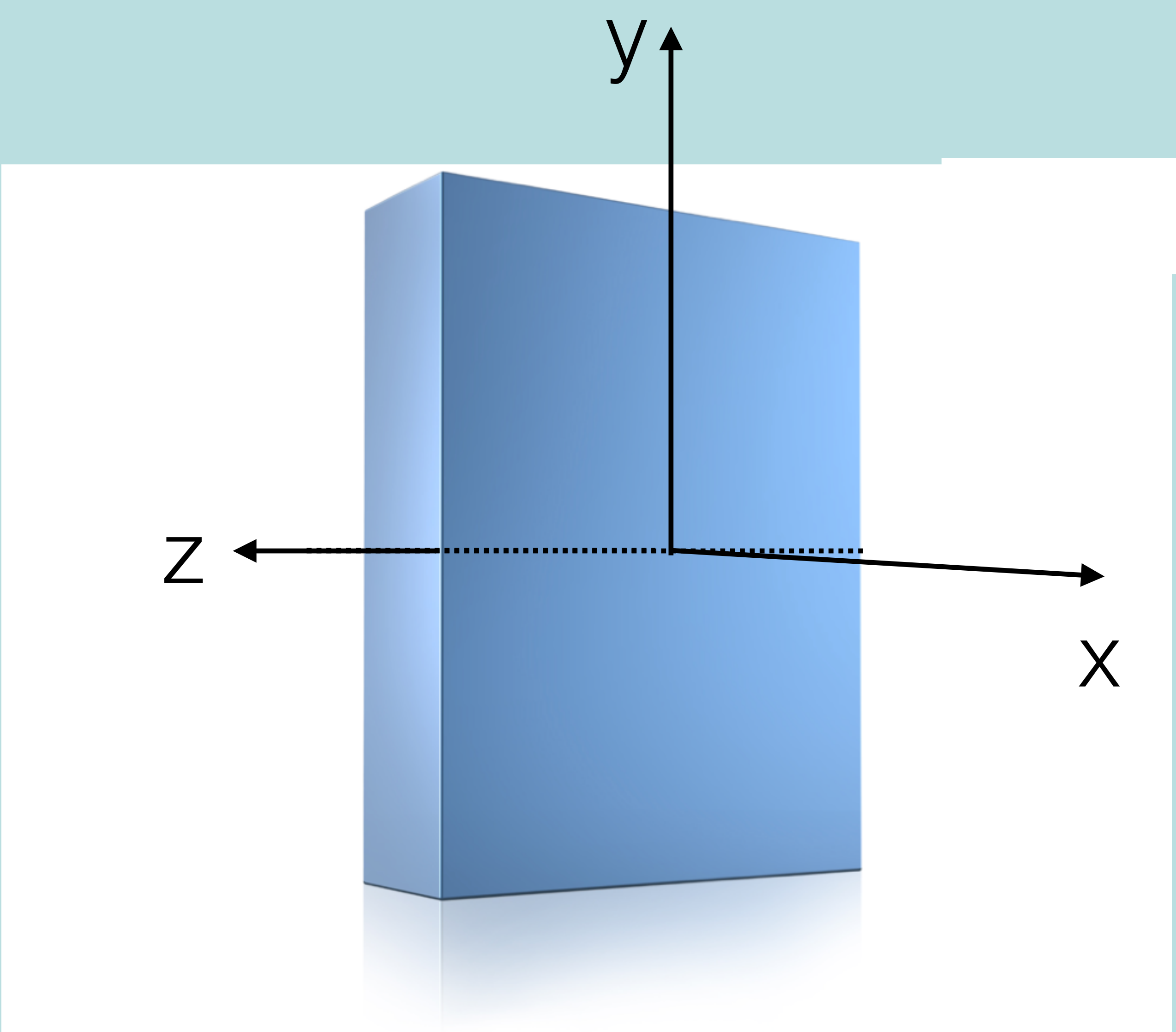
El Gran Reto



El reto es el siguiente: **La caja tiene 3 direcciones para rotar. Queremos que alguien tire la caja al aire logrando una rotación pura en z (con por lo menos dos vueltas)**

Entendiendo el Experimento

Lograr esto es técnicamente posible, pero es sumamente difícil. **¿Por qué?**



El momento de inercia depende del eje de rotación, y en este caso

$$I_x > I_z > I_y$$

Hay un teorema llamado "Teorema del eje Intermedio" (o "Teorema de la raqueta de Tenis")

*"Si un objeto tiene 3 ejes posibles sobre los que puede rotar, la rotación en el eje intermedio (es decir con el momento de inercia intermedio) es **inestable**"*

Esto significa que cualquier pequeña desviación de una rotación perfecta en z se va a amplificar y va a dominar

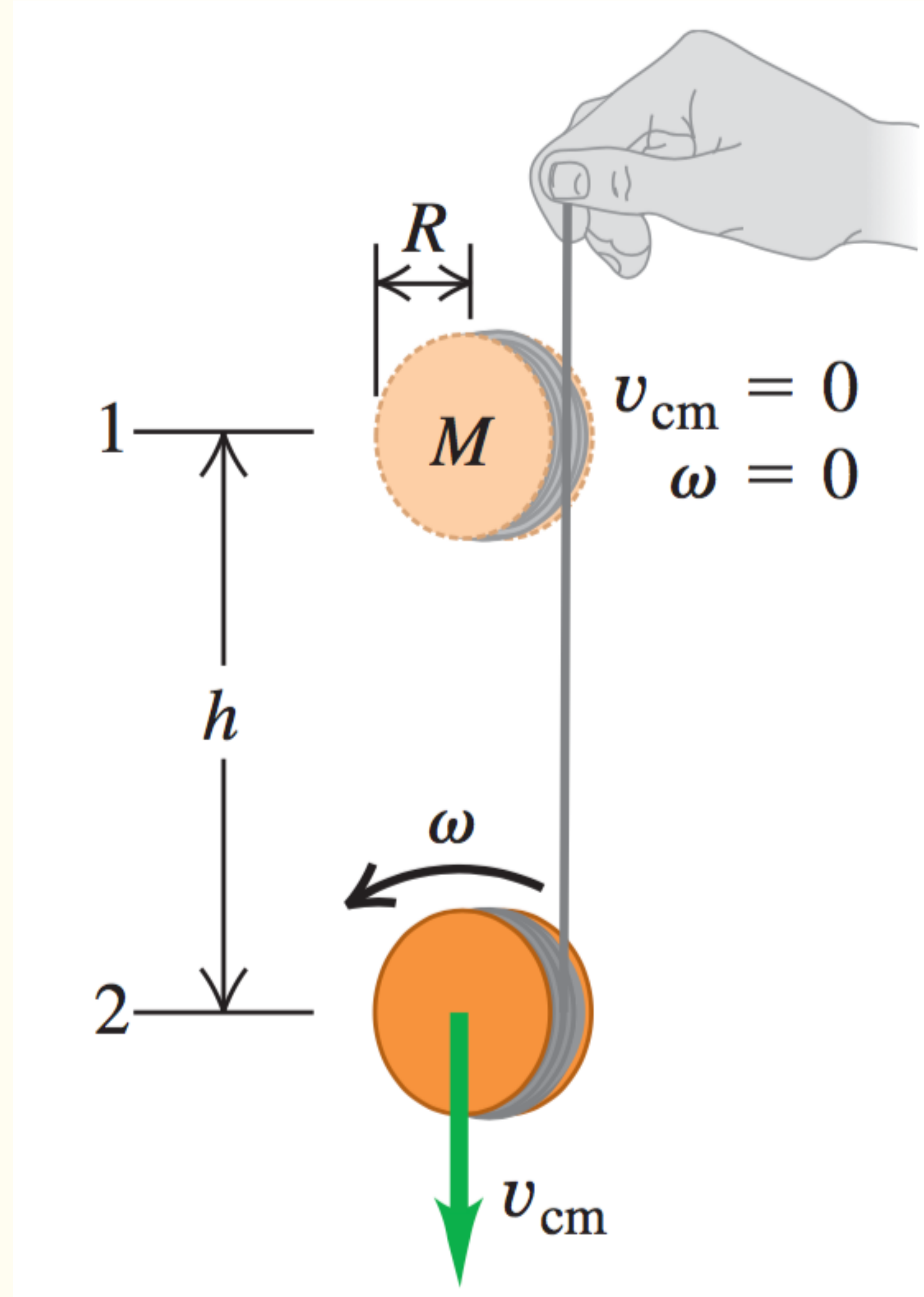
¡Inténtenlo con su raqueta de tenis o con su teléfono!

(Explained: 5 fun physics phenomena https://www.youtube.com/watch?v=jIMihpDmBpY)

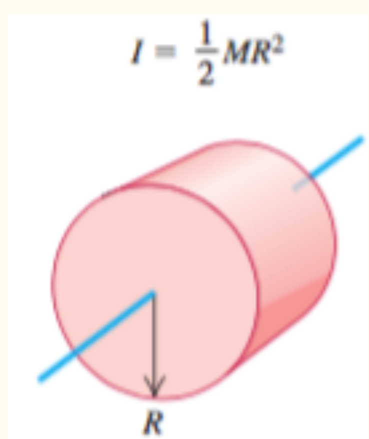
Ejemplo

(10.4 en Young&Freedman)

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R, como mostrado en la figura. Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Calcule la rapidez del centro de masa del cilindro después de caer una distancia h.



(puede usar la siguiente información de una tabla)



Respuesta: $v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido