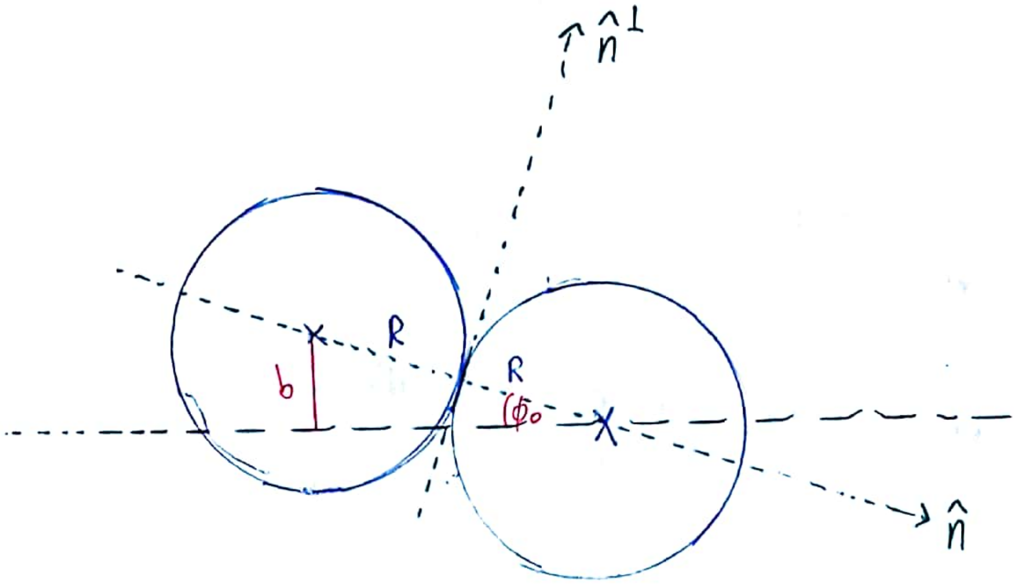
1.
Dibujaremos el instante de la colisión



Algunas consideraciones :

-> Como no hay fuerzas ajenas al sistema de dos bolitas, el momentum lineal del sistema se conserva

-> Como la interacción entre ambas bolitas corresponde a una fuerza normal en el eje $\hat{n}$, el momentum lineal de cada bolita se conserva en el eje $\hat{n}^{\perp}$

El ángulo ϕ_0 podemos obtenerlo mediante trigonometría,

$$\operatorname{sen}(\phi_0) = \frac{b}{2R}$$

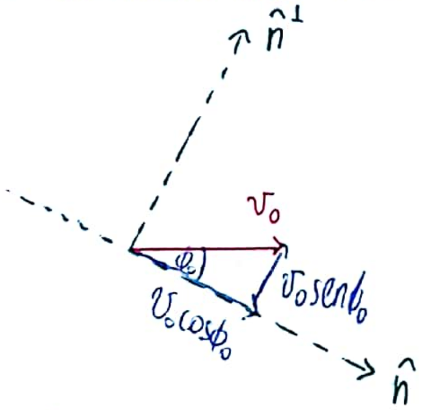
Consideramos $\vec{P}_f = \vec{P}_i$ para todo el sistema. Calculamos primero el momentum inicial de cada partícula, que luego proyectaremos sobre cada eje.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_{1,i} + \vec{P}_{2,i} = mv_0\hat{x} - 2m\frac{v_0}{2}\hat{x} = 0$$

$$\vec{P}_f = \vec{P}_{1,f} + \vec{P}_{2,f} = m\vec{v}_{1,f} + 2m\vec{v}_{2,f} = 0 \quad \text{(Por conservación)}$$

Obtenemos inmediatamente que $\vec{v}_{2,f} = -\frac{1}{2}\vec{v}_{1,f}$ (1)

Mirando nuestro sistema de referencia inclinado, vamos a descomponer $\vec{v}_{2,f}$ y $\vec{v}_{1,f}$. Partiremos descomponiendo las velocidades iniciales para hacernos una idea de cómo continuar

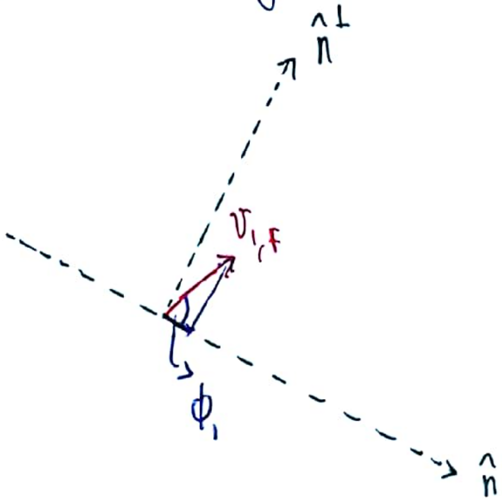


$$v_0\hat{x} = v_0(\cos\phi_0\hat{n} + sen\phi_0\hat{n}^{\perp})$$

Debido al impacto, sabemos que la componente en $\hat{n}^{\perp}$ se mantendrá invariante pues sólo hay impulso en $\hat{n}$. La componente en este último eje se ve disminuida, y podría llegar a cambiar su signo.

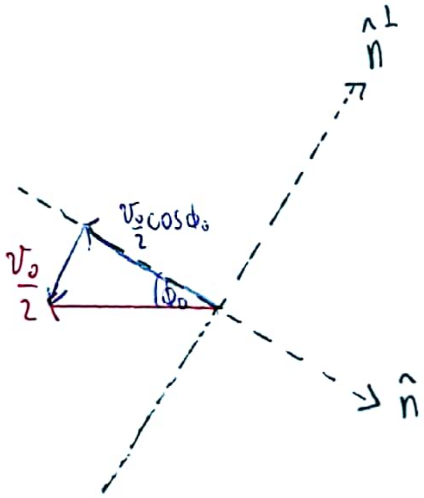
Scanned by CamScanner

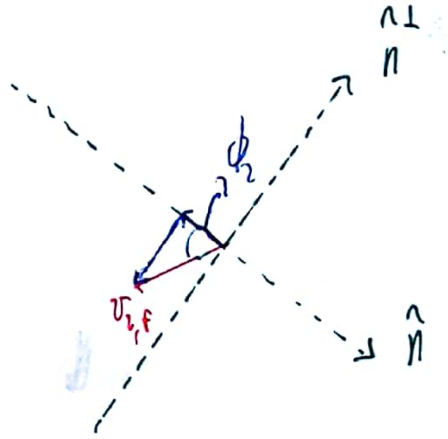
Supondremos que el signo de la componente en $\hat{n}$ no se invierte. O sea, $\vec{v}_{1,f}$ tiene la siguiente forma



$$\vec{v}_{1,f} = v_{1,f}\left(\cos\phi_1\,\hat{n} + \operatorname{sen}\phi_1\,\hat{n}^{\perp}\right)$$

Siguiendo una argumentación análoga para la otra bolita





$$-\frac{v_0}{2}\hat{x} = -\frac{v_0}{2}\left(\cos\phi_0\,\hat{n} + \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{n}^{\perp}\right)$$

$$\vec{v}_{2,f} = -v_{2,f}\left(\cos(\phi_2)\,\hat{n} + \operatorname{sen}(\phi_2)\,\hat{n}^{\perp}\right)$$

Con esto, podemos escribir la ecuación (1) nuevamente

$$\vec{v}_{F,2} = -\frac{1}{2}\vec{v}_{F,1}$$

$$\hat{n}: \quad -v_{2,f}\cos(\phi_2) = -\frac{1}{2}v_{1,f}\cos(\phi_1) \qquad (2)$$

$$\hat{n}^{\perp}: \quad -v_{2,f}\,\mathrm{sen}(\phi_2) = -\frac{1}{2}v_{1,f}\,\mathrm{sen}(\phi_1) \qquad \star$$

Debido a que el momentum lineal de cada partícula se conserva en el eje $\hat{n}^{\perp}$, podemos escribir

$$v_0\,\mathrm{sen}(\phi_0) = v_{1,f}\,\mathrm{sen}(\phi_1) \qquad (3)$$

$$-\frac{v_0}{2}\,\mathrm{sen}(\phi_0) = -v_{2,f}\,\mathrm{sen}(\phi_2) \qquad (4)$$

Ojo: $\star$ es una combinación de (3) y (4). Esto siempre será así, por tanto no la consideraremos al ser más compleja que estas dos.

Falta otra ecuación para determinar todo, y esta corresponde al coeficiente de restitución "e".

Sea $u_i^{\parallel} = (\vec{v}_{2,i} - \vec{v}_{1,i}) \cdot \hat{n}$ la velocidad relativa inicial entre ambos cuerpos en componente paralela al eje de colisión. Similarmente,

$u_f^{\parallel} = (\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{1,f}) \cdot \hat{n}$ la velocidad relativa final entre ambos cuerpos en componente paralela al eje de colisión. Luego,

$$e = \left| \frac{u_f^{\parallel}}{u_i^{\parallel}} \right|$$ es el coeficiente de restitución

→ Si $e=1$, la colisión es elástica y la energía cinética del sistema no se conserva durante la colisión

→ Si $0<e<1$, la colisión es inelástica, y la energía cinética del sistema no se conserva durante la colisión

→ Si $e=0$, la colisió es completamente inelástica, la energía cinética no se conserva y cuerpos quedan pegados

Calculemos $u_f^{\parallel}$ y $u_i^{\parallel}$ en nuestro caso

$$u_i'' = (\vec{v}_{2,i} - \vec{v}_{1,i}) \cdot \hat{n}$$

$$= \left(-\frac{v_0}{2}\left(\cos\phi_0\,\hat{n} + \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{n}^\perp\right) - v_0\left(\cos\phi_0\,\hat{n} + \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{n}^\perp\right)\right) \cdot \hat{n}$$

$$= -\frac{v_0}{2}\cos(\phi_0) - v_0\cos(\phi_0) = -\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0$$

$$u_f'' = (\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{1,f}) \cdot \hat{n}$$

$$= \left(-v_{2,f}\left(\cos\phi_2\,\hat{n} + \operatorname{sen}\phi_2\,\hat{n}^\perp\right) - v_{1,f}\left(\cos\phi_1\,\hat{n} + \operatorname{sen}\phi_1\,\hat{n}^\perp\right)\right) \cdot \hat{n}$$

$$= -v_{2,f}\cos\phi_2 - v_{1,f}\cos\phi_1$$

$$e = 1 = \frac{|-v_{2,f}\cos\phi_2 - v_{1,f}\cos\phi_1|}{|-\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0|} = \frac{v_{2,f}\cos\phi_2 + v_{1,f}\cos\phi_1}{\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0}$$

$$\hookrightarrow \frac{3}{2}v_0\cos\phi_0 = v_{1,f}\cos\phi_1 + v_{2,f}\cos\phi_2 \qquad (5)$$

De (5), despejamos $v_{2,f}\cos\phi_2$ y reemplazamos en (2)

$$\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0 - v_{1,f}\cos\phi_1 = \frac{1}{2}v_{1,f}\cos\phi_1 \Rightarrow \overset{(6)}{v_0\cos\phi_0 = v_{1,f}\cos\phi_1}$$

Scanned by CamScanner

Si tomamos $\frac{(3)}{(6)}$, llegamos a la conclusión de que

$$tg(\phi_0) = tg(\phi_1) \Rightarrow \phi_1 = \phi_0$$

Esto no tiene sentido, pues indicaría que la trayectoria no cambia luego de la colisión ¡ volvamos atrás para ver dónde hemos fallado

El único paso donde teníamos dos opciones era al tener

$$|\underbrace{v_{2,f}\cos\phi_2 + v_{1,f}\cos\phi_1}_{\Delta}| = \begin{cases} \Delta & \text{si } \Delta \geq 0 \\ -\Delta & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Como la primera opción nos llevó a una solución sin sentido, tomamos el segundo camino y vemos qué pasa.

$$e = \frac{|v_{2,f}\cos\phi_2 + v_{1,f}\cos\phi_1|}{\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0} = -\frac{v_{2,f}\cos\phi_2 - v_{1,f}\cos\phi_1}{\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0} = 1$$

$$-\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0 = v_{2,f}\cos\phi_2 + v_{1,f}\cos\phi_1 \quad (5b)$$

De (5b) reemplazamos en (2) despejando $v_{2,f}\cos\phi_2$ (6b)

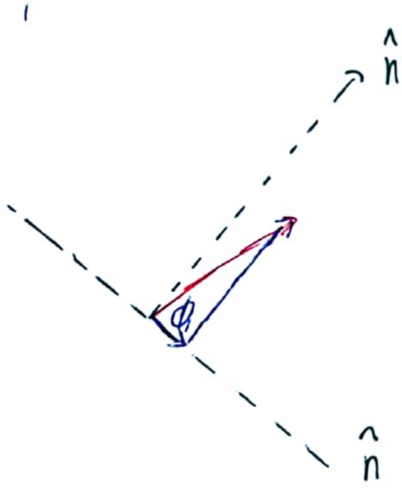
$$-\frac{3}{2}v_0\cos\phi_0 - v_{1,f}\cos\phi_1 = \frac{1}{2}v_{1,f}\cos\phi_1 \Rightarrow -v_0\cos\phi_0 = v_{1,f}\cos\phi_1$$

Si tomamos $\frac{(3)}{(6b)}$, llegamos a que

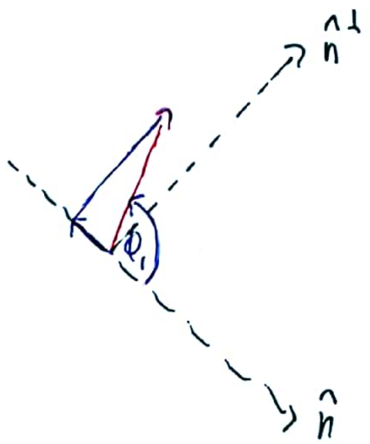
$$-tg\,\phi_0 = tg(\phi_1) \qquad \text{Pero} \qquad -tg(\phi_0) = tg(\pi - \phi_0)$$

$$tg(\pi - \phi_0) = tg(\phi_1) \Rightarrow \boxed{\phi_1 = \pi - \phi_0}$$

O sea, la componente en $\hat{n}$ de la velocidad sí cambia de sentido, lo cual ocurre pues las bolitas no se pueden atravesar



Lo que pensamos



En realidad

Veamos ahora qué pasa con ϕ_2. En este caso particular podríamos aprovechar ☆, y tomar $\frac{☆}{(1)}$. Así

$$tg(\phi_2) = tg(\phi_1) \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 = \pi - \phi_0$$

Para la bolita dos ocurre lo mismo, hay una inversión de la velocidad en el eje $\hat{n}$. Ahora que tenemos ϕ_1 y ϕ_2, reemplazamos en (3) y (4) para obtener $v_{1,f}$ y $v_{2,f}$

- $v_0 \operatorname{sen}(\phi_0) = v_{1,f} \operatorname{sen}(\phi_1) = v_{1,f} \operatorname{sen}(\pi - \phi_0) = v_{1,f} \operatorname{sen}(\phi_0)$

$$v_0 = v_{1,f}$$

- $\frac{v_0}{2} \operatorname{sen}(\phi_0) = v_{2,f} \operatorname{sen}(\phi_2) = v_{2,f} \operatorname{sen}(\pi - \phi_0) = v_{2,f} \operatorname{sen}(\phi_0)$

$$\frac{v_0}{2} = v_{2,f}$$

O sea, las magnitudes de las velocidades se mantienen iguales

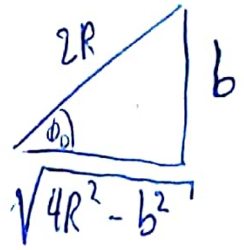
Finalmente, $\vec{v}_{1,f} = v_0 \left(\cos(\pi - \phi_0)\hat{n} + \operatorname{sen}(\pi - \phi_0)\hat{n}^\perp\right)$

$$= v_0 \left(-\cos(\phi_0)\hat{n} + \operatorname{sen}(\phi_0)\hat{n}^\perp\right)$$

$$\vec{v}_{2,f} = -\frac{v_0}{2}\left(\cos(\pi - \phi_0)\hat{n} + \operatorname{sen}(\pi - \phi_0)\hat{n}^\perp\right)$$

$$= -\frac{v_0}{2}\left(-\cos(\phi_0)\hat{n} + \operatorname{sen}(\phi_0)\hat{n}^\perp\right)$$

Busquemos $\cos\phi_0$. Sabemos que $\operatorname{sen}\phi_0 = \dfrac{b}{2R}$,



$$, \quad \cos\phi_0 = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$$

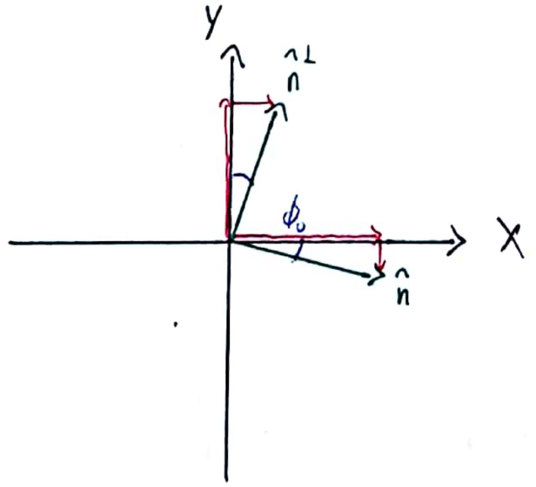
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2}$$

Entonces,

$$\vec{v}_{1,f} = v_0\left(-\sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{n} + \frac{b}{2R}\,\hat{n}^{\perp}\right)$$

$$\vec{v}_{2,f} = -\frac{v_0}{2}\left(-\sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{n} + \frac{b}{2R}\,\hat{n}^{\perp}\right)$$

Ahora queremos expresar esto en el sistema cartesiano $\hat{x}, \hat{y}$. Descompo-nemos $\hat{n}$ y $\hat{n}^{\perp}$ en términos de estos dos vectores



$$\hat{n} = \cos\phi_0\,\hat{x} - \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{y}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{x} - \frac{b}{2R}\,\hat{y}$$

$$\hat{n}^{\perp} = \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{x} + \cos\phi_0\,\hat{y}$$

$$= \frac{b}{2R}\,\hat{x} + \sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{y}$$

Así, $$\vec{v}_{1,f} = v_0\left(-\left(1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2\right)\hat{x} + \frac{b}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{y} + \left(\frac{b}{2R}\right)^2\hat{x} + \frac{b}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{y}\right)$$

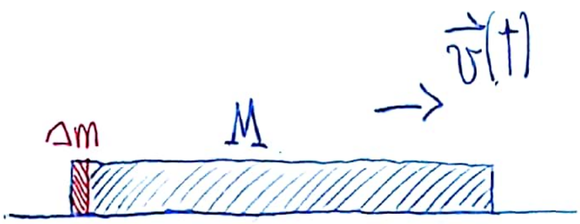
$$= v_0\left[\left(2\left(\frac{b}{2R}\right)^2-1\right)\hat{x} + \frac{b}{R}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{y}\right]$$

$$\vec{v}_{2,f} = -\frac{v_0}{2}\left[\left(2\left(\frac{b}{2R}\right)^2-1\right)\hat{x} + \frac{b}{R}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2R}\right)^2}\,\hat{y}\right]$$

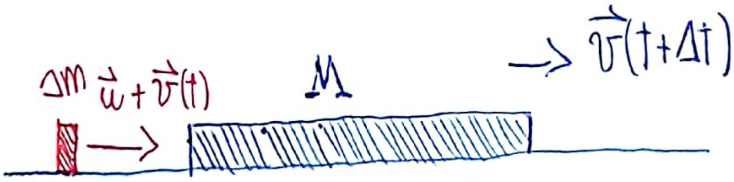
2 a) Vamos a tener que trabajar de forma especial debido a que el objeto que se está estudiando posee masa variable. Primero, notar que la ecuación

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

es válida únicamente para un sistema en que no hay cambio de masa. Entonces, vamos a considerar un intervalo de tiempo Δt de nuestro problema, y escribiremos la variación de momentum $\Delta\vec{p}$



$$\vec{p}(t) = (\Delta m + M)\,\vec{v}(t)$$



* Δm se eyecta con velocidad $\vec{u}$ relativa a M

$$\vec{p}(t+\Delta t) = \Delta m\left(\vec{u}+\vec{v}(t)\right) + M\vec{v}(t+\Delta t)$$

$$\Delta\vec{p} = \Delta m\,\vec{u} + \Delta m\,\vec{v}(t) + M\vec{v}(t+\Delta t) - \Delta m\,\vec{v}(t) - M\vec{v}(t)$$

$$= \Delta m\,\vec{u} + M\Delta\vec{v}$$

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{u} + M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow{\lim \Delta t \to 0} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + M\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Notemos que M es la masa restante en el cuerpo. Si llamamos m a la masa eyectada total,

$$M + m = cte \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$$

Con esto, $$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\,\frac{dM}{dt}$$

En el caso particular de este problema, $$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\vec{u} = -u\hat{x}$$

$$\vec{F}_{ext} = N\hat{y} - Mg\hat{y} - F_R\hat{x}$$

Separando la ecuación por componentes,

$$N = Mg$$

$$-F_R = u\frac{dM}{dt} = -N\mu = -Mg\mu$$

Luego, $$\frac{dM}{dt} = -\frac{g\mu}{u}M$$

Luego, M es una función que al ser derivada queda igual, pero multiplicada por una constante. Sabemos que las exponenciales satisfacen esta condición.

Si proponemos $M(t) = Ae^{\alpha t}$, $\frac{d}{dt}M = \alpha A e^{\alpha t} = \alpha M$

Luego, $\alpha = -g\frac{\mu}{u}$

$$M(t) = Ae^{-g\frac{\mu}{u}t}$$

Para pillar el valor de A, usamos la condición inicial de la masa

$$M(0) = M_R + \underbrace{\rho V_R}_{\text{Densidad x Volumen} \,=\, \text{masa de líquido}} = A$$

Luego, $M(t) = (M_R + \rho V)\, e^{-g\frac{\mu}{u}t}$

Queremos saber cómo varía el volumen de líquido en función del tiempo, por definición $M(t) = M_R + \rho V(t)$ (La masa del exterior del móvil no cambia, sólo su contenido líquido)

Así, $V(t) = \frac{1}{\rho}\left([M_R + \rho V_R]\, e^{-g\frac{\mu}{u}t} - M_R \right)$

Claramente esta ecuación es válida mientras se siga expeliendo líquido. O sea, $V(t)$ es una función por partes

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\left([M_R + \rho V_R] e^{-\frac{g\mu}{u}t} - M_R \right) &, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_f \\ 0 &, \quad t \geqslant t_f \end{cases}$$

Buscaremos t_f. Imponemos $V(t_f) = 0$

$$0 = [M_R + \rho V_R] e^{-\frac{g\mu}{u}t_f} - M_R$$

$$\frac{M_R}{M_R + \rho V_R} = e^{-\frac{g\mu}{u}t_f} \quad / \ln(\,)$$

$$\ln\left(\frac{M_R}{M_R + \rho V_R}\right) = -\frac{g\mu}{u} t_f$$

$$\downarrow$$

$$t_f = \frac{u}{g\mu} \ln\left(\frac{M_R + \rho V_R}{M_R}\right)$$

b) Ahora veamos la distancia recorrida. En el trayecto mientras se eyecta masa, el móvil viaja con rapidez constante v_0. Luego,

$$d_1 = v_0 t_f = \frac{v_0 u}{g\mu} \ln\left(\frac{M_R + \rho V_R}{M_R}\right)$$

Ahora veamos la distancia recorrida luego de haber agotado el combustible. Tenemos un cuerpo de masa M_R que desliza en presencia de roce, con rapidez inicial v_0 y final 0. Podemos abordar esto usando trabajo y energía.

$$E_i = \frac{1}{2} M_R v_0^2 \quad , \quad E_f = 0 \quad \Rightarrow \Delta E = -\frac{1}{2} M_R v_0^2 = W_{NC}$$

La fuerza no conservativa que hace trabajo es el roce,

$$\vec{F}_R = -\mu M_R g \hat{x} \quad , \quad \vec{F}_R \cdot d\vec{x} = -\mu M_R g \, dx$$

$$W_{NC} = W_{F_R} = -\int_0^{d_2} \mu M_R g \, dx = -\mu M_R g \, d_2$$

Luego,

$$\frac{1}{2} M_R v_0^2 = \mu M_R g \, d_2$$

$$\Downarrow$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g}$$

Así,

$$d_{TOT} = d_1 + d_2 = \frac{v_0 u}{\mu g} \ln\left(\frac{M_R + \rho V_R}{M_R} \right) + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g}$$

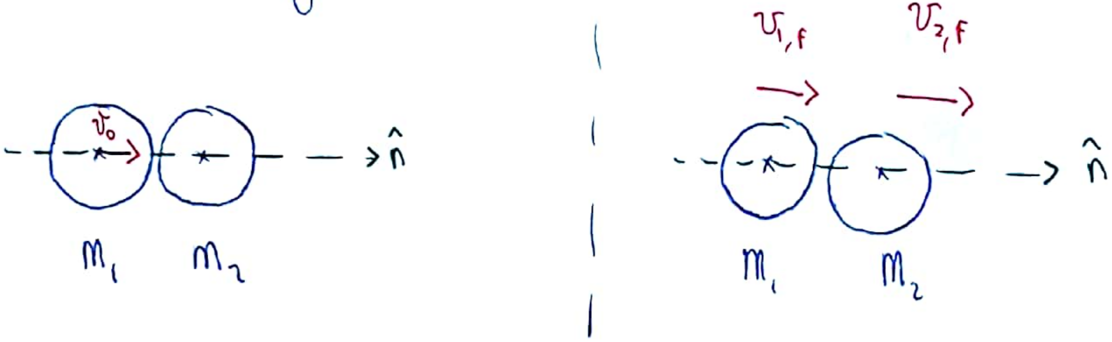
$$= \frac{1}{2} \frac{v_0}{\mu g} \left(2u \ln\left(\frac{M_R + \rho V_R}{M_R} \right) + v_0 \right)$$

3. En este caso la situación de colisión es unidimensional, por lo que será todo mucho más sencillo. Reconocemos lo siguiente

-> Una vez que ocurre la colisión, m_2 se mueve recorriendo un arco de circunferencia, y llega a una altura máxima pues hay gravedad

-> Cómo el instante de la colisión es tan pequeño, no importa la acción de la gravedad. Se conserva el momentum lineal

Tenemos lo siguiente



Justo antes de la colisión

Justo después de la colisión

Igualando momentum lineal antes y después, en el eje $\hat{x}$ ($\hat{n}$)

$$m_1 v_0 = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

Ahora ocupamos el coeficiente de restitución,

$$u_f'' = (\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{1,f}) \cdot \hat{n} = (\vec{v}_{2,f} - \vec{v}_{1,f}) \cdot \hat{x}$$

$$= v_{2,f} - v_{1,f}$$

$$u_i'' = (\vec{v}_{2,i} - \vec{v}_{1,i}) \cdot \hat{n} = (\vec{v}_{2,i} - \vec{v}_{1,i}) \cdot \hat{x}$$

$$= -v_0$$

$$e = \frac{|v_{2,f} - v_{1,f}|}{|-v_0|} = \frac{|v_{2,f} - v_{1,f}|}{v_0}$$

Para que las bolitas no se atraviesen, $v_{2,f} > v_{1,f}$.

Luego, $|v_{2,f} - v_{1,f}| = v_{2,f} - v_{1,f}$. Así,

$$v_0 e = v_{2,f} - v_{1,f} \Rightarrow v_{1,f} = v_{2,f} - e v_0$$

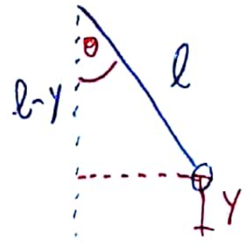
Reemplazando en la ecuación de conservación de momentum,

$$m_1 v_0 = m_1 (v_{2,f} - e v_0) + m_2 v_{2,f}$$

$$m_1 v_0 (1+e) = (m_1 + m_2) v_{2,f}$$

$$v_{2,f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 (1+e)$$

Ahora para encontrar la desviación angular máxima, usaremos conservación de la energía,



$$\frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 = m_2 g y \Rightarrow y = \frac{1}{2g} v_{2,f}^2$$

$$= \frac{1}{2g}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}(1+e)v_0\right)^2$$

Por trigonometría, $\cos\theta = \dfrac{\ell - y}{\ell} = 1 - \dfrac{y}{\ell}$

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 (1+e)^2\right)$$