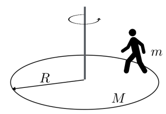
Interrogación 2
FIS1513 - Estática y Dinámica

Instituto de Física

Martes 19 de Mayo de 2015

Problema 1

Una plataforma horizontal en forma de disco de radio R y masa M, rota en un plano horizontal sin roce alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un estudiante de masa m camina desde el borde de la plataforma hasta una distancia r del centro. Si la velocidad angular de la plataforma cuando el estudiante estaba en el borde era ω_0, la velocidad angular final del sistema es:



Solución

Si llamamos I_e al momento de inercia del estudiante y I_p al de la plataforma, el momento de inercia inicial del sistema es:

$$I_i = I_p + I_{ei} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

donde hemos considerado al estudiante como una partcula de masa m. Cuando el estudiante camina hacia el centro, el momento de inercia final será

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

Por conservación de momentum angular:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$
$$\Longrightarrow (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_0 = (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_f$$

Despejando ω_f

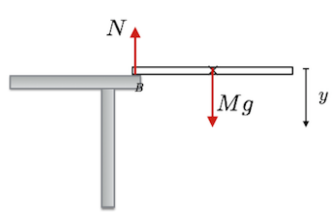
$$\omega_f = \left(\frac{(\frac{M}{2} + m)R^2}{\frac{MR^2}{2} + mr^2}\right)\omega_0$$

Problema 2

Una barra homogénea de masa M y largo L está suspendida horizontalmente con el extremo B apoyado en una mesa y el extremo A sujetado por un estudiante (como muestra la figura). El estudiante suelta el extremo A. En ese instante, la fuerza Normal que ejerce la mesa sobre la barra es:

Solución

Las fuerzas que actúan sobre el sistema están marcadas en la figura:



Por segunda ley de Newton (con la coordenada y positiva hacia abajo):

$$-N + Mg = Ma$$

donde a es la aceleración tangencial.
El torque respecto al punto B es:

$$\tau_B = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{L}{2} Mg\hat{k}$$

Por otro lado, el torque es

$$\tau_B = I\alpha$$

En este caso, $I = \frac{1}{3}ML^2$, ya que la barra está pivoteada en uno de sus extremos.
Juntando ambas ecuaciones para el torque, obtenemos:

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2\alpha$$
$$\alpha = \frac{3g}{2L}$$

Por otro lado, se cumple que

$$a = \alpha R = \frac{L}{2}\alpha = \frac{L}{2}\frac{3g}{2L} = \frac{3g}{4}$$

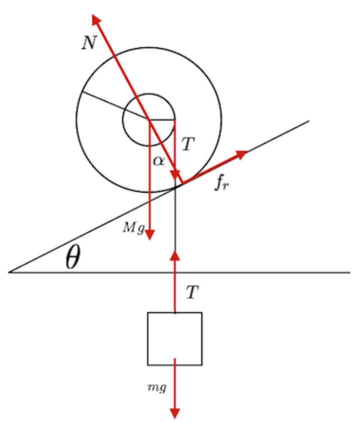
Por lo tanto, despejando N de la primera ecuación, tenemos

$$\implies N = Mg - Ma = Mg - \frac{3Mg}{4} = \frac{Mg}{4}$$

Problema 3

Una bobina de masa M consiste en un cilindro central de radio r y dos discos en cada extremo de radio R. Está puesta en una superficie inclinada por la cual puede rodar sin resbalar, y una masa m cuelga de una cuerda enrollada alrededor de la bobina. Si consideramos que el sistema está en equilibrio, el ángulo de inclinación de la superficie es:

Solución



Como el sistema está en equilibrio, las ecuaciones de fuerza y torque son:

$$[\sum F_y = 0] \qquad T = mg \tag{1}$$
$$[\sum F_x = 0] \qquad Mg\sin\alpha + T\sin\alpha - f_r = 0 \tag{2}$$
$$[\sum F_y = 0] \qquad Mg\cos\alpha + T\cos\alpha = N \tag{3}$$
$$[\sum \tau = 0] \qquad -Tr + Rf_r = 0 \tag{4}$$

Reemplazando (1) en (2)

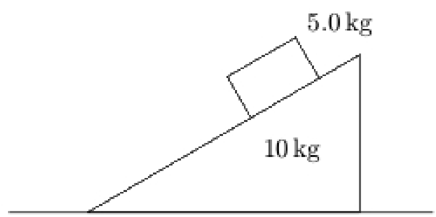
$$f_r = (m+M)g\sin\alpha \quad (5)$$

Y reemplazando (5) y (1) en (4), obtenemos el ángulo de inclinación:

$$-mgr + R(m+M)g\sin\alpha = 0$$
$$\Longrightarrow \sin\alpha = \frac{mr}{R(M+m)}$$

Problema 4

Una cuña con 10 kg de masa reposa sobre una superficie horizontal sin roce, como muestra la figura. Un bloque de masa 5 kg parte del reposo y desliza hacia abajo sobre la superficie inclinada de la cuña, la cual tiene roce. En el instante en que la componente vertical de la velocidad del bloque es 3 m/s y la componente horizontal es 6 m/s, ¿cuál es la velocidad de la cuña?



Solución

Considerando el sistema formado por la cuña, el bloque y la Tierra, no hay fuerzas externas actuando sobre él, entonces se conserva el momentum del sistema. En la dirección horizontal del sistema de coordenadas cartesiano,

$$0 = m_b\, v_b + m_c\, v_c \qquad \longrightarrow \qquad v_c = -\frac{m_b}{m_c}\, v_b$$

$$v_b = \text{-6 m/s} \qquad \longrightarrow \qquad v_c = 3 \text{ m/s} \quad \text{(hacia la derecha)}$$

Problema 5

Dos objetos, X y Y, se mantienen en reposo sobre una superficie horizontal sin roce comprimiendo entre ellos a un resorte. La masa de X es 2/5 veces la masa de Y. Inmediatamente después de que se libera el resorte, X adquiere energía cinética de 50 J mientras que Y adquiere energía cinética igual a.

Solución

Como no hay fuerzas externas, se conserva el momentum del sistema y el momentum inicial del sistema es nulo, entonces

$$0 = m_X\, v_X + m_Y\, v_Y \qquad \longrightarrow \qquad v_Y = -\frac{m_X}{m_Y}\, v_X = -\frac{2}{5}\, v_X$$

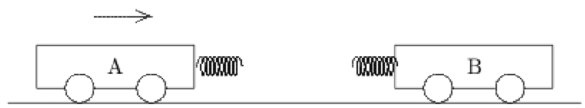
La energía cinética de cada bloque viene dada por

$$K_X = \frac{1}{2}\, m_X\, v_X^2 = 50 \text{ J}$$

$$K_Y = \frac{1}{2}\, m_Y\, v_Y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\, m_X\right)\left(-\frac{2}{5}\, v_X\right)^2 = \frac{2}{5}\, K_X = \frac{2}{5} \times 50 = 20 \text{ J}$$

Problema 6

Dos carros que tienen parachoques elásticos colisionan como muestra la figura. El carro A tiene 2 kg de masa y está inicialmente moviéndose hacia la derecha. El carro B tiene 3 kg de masa y está inicialmente en reposo. Cuando la separación entre los carros es mínima se cumple que



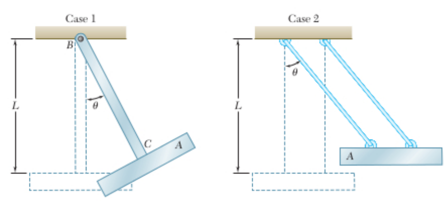
Solución

La energía total del sistema en este caso tiene dos componentes, la energía cinética y la energía potencial elástica.

Cuando la separación entre los carros es mínima, la deformación del resorte es máxima y, por ende, la energía potencial elástica es máxima. Entonces, para un dado valor de energía total, la energía cinética del sistema (los dos carros) es mínima.

Problema 7

Una barra A rígidamente unida a una varilla BC sin masa será el caso 1 a estudiar. El caso 2 consiste de la barra A pero que cuelga mediante dos cuerdas sin masa como se muestra en la figura. El grosor de la barra A es despreciable comparado con L. En ambos casos A es liberado del reposo en un ángulo θ_o. ¿Cuándo $\theta = 0$, cuál de los dos sistemas tendrá mayor energía cinética?

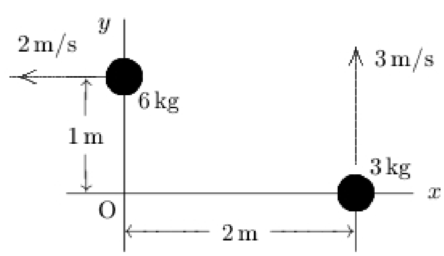


Solución

En las dos situaciones, la diferencia de altura del centro de masa de la barra A entre la posición inicial, θ_o, y cuando $\theta = 0$ es la misma. Por tanto, la variación de energía potencial gravitatoria en ambos casos es igual y, como la energía total se conserva, la variación de energía cinética también es igual en cada una de las situaciones. Si la velocidad inicial de la varilla es cero en los dos casos, la energía cinética es la misma en ambos casos.

Problema 8

Dos objetos están moviéndose en el plano (x, y) como se ve en la figura. La magnitud del momento angular respecto del origen O es



Solución

Usando la definición del momento angular, tenemos que

$$\vec{L}_{sistema} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = m_1\,\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

Los valores numéricos de las cantidades físicas conocidas son

$$m_1 = 6 \text{ kg} \qquad\qquad m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$\vec{r}_1 = (1 \text{ m})\,\hat{\jmath} \qquad\qquad \vec{r}_2 = (2 \text{ m})\,\hat{\imath}$$

$$\vec{v}_1 = (\text{-2 m/s})\,\hat{\imath} \qquad\qquad \vec{v}_2 = (3 \text{ m/s})\,\hat{\jmath}$$

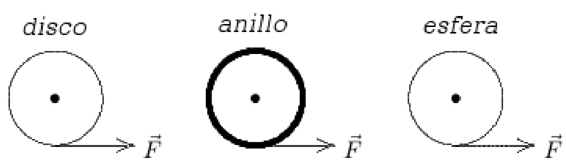
Reemplazando,

$$\vec{L}_{sistema} = (12 \text{ kg m}^2/\text{s})\,\hat{k} + (18 \text{ kg m}^2/\text{s})\,\hat{k} = (30 \text{ kg m}^2/\text{s})\,\hat{k}$$

$$L_{sistema} = ||\vec{L}_{sistema}|| = 30 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Problema 9

Un disco uniforme, un anillo delgado y una esfera uniforme, todos con la misma masa y el mismo radio exterior, son libres de rotar alrededor de un eje que pasa por su centro. Considerar que el anillo se conecta al eje de rotación por delgados radios. Los objetos parten del reposo e idénticas fuerzas son aplicadas simultáneamente en los bordes de los objetos, como se muestra. Ordenar los objetos de acuerdo con su momento angular después de un dado tiempo t, de menor a mayor.



Solución

Usando la relación entre el torque aplicado y la variación del momento angular,

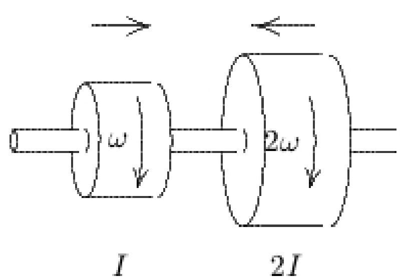
$$\vec{\tau}_{cm} = \vec{r}_{F/cm} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \Delta\vec{L} = \vec{r}_{F/cm} \times \vec{F}\,t = R\,F\,t\,\hat{k}$$

El momento angular inicial es cero para los 3 objetos. El radio de los objetos, la fuerza aplicada y el tiempo es igual para los 3 objetos. Por tanto, el momento angular es igual para los 3.

$$\vec{L}_{disco} = \vec{L}_{anillo} = \vec{L}_{esfera}$$

Problema 10

Dos discos montados sobre rodamientos de bajo rozamiento giran sobre un mismo eje. El primer disco tiene momento de inercia I y su velocidad angular es ω. El segundo disco tiene momento de inercia $2I$ y velocidad angular 2ω. Los dos discos son lentamente forzados a juntarse hasta que se acoplan y alcanzan una velocidad angular común. ¿Cuánto vale la velocidad angular final del sistema?



Solución

Como no hay fuerzas externas al sistema formado por los dos discos y el agente que los acerca, se conserva el momento angular. Así,

$$L_{inicial} = L_{final}$$

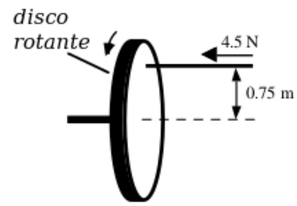
$$L_{inicial} = L_1 + L_2 = I\,\omega + 2I\,2\omega = 5\,I\,\omega$$

$$L_{final} = (I + 2I)\,\omega_f = 3\,I\,\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{5}{3}\,\omega$$

Problema 11

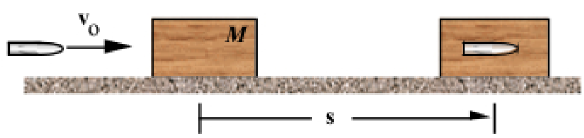
Un disco uniforme con radio de 1.2 m y masa igual a 0.60 kg está rotando a 25 rad/s entorno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al disco. Una varilla hace contacto con el disco rotante y ejerce una fuerza de 4.5 N en un punto que está a 0.75 m del eje de rotación. El disco se detiene luego de 5 segundos. ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético entre los materiales del disco y de la varilla?



Solución

Problema 12

Una bala de masa m es disparada con velocidad v_o hacia un bloque de madera de masa M. EL bloque con la bala incrustada desliza sobre la superficie horizontal con un coeficiente de roce cinético μ.



¿Cuál es la expresión que determina cuan lejos llega el bloque antes de detenerse (magnitud de s)?

Solución

Considerando el sistema formado por la bala, el bloque y la superficie de apoyo, no hay fuerzas externas aplicadas y se conserva el momentum. Así,

$$m\,v_b = (M+m)\,v_o \qquad\qquad v_o : \text{velocidad de las masas después del choque}$$

Plantenado la ecuación del Newton en la dirección horizontal,

$$-f = -\mu\,N = -\mu\,(M+m)\,g = (M+m)\,a \quad\longrightarrow\quad a = -\mu\,g$$

Escribiendo las ecuaciones de Cinemática para el movimiento del bloque con la bala incrustada a partir de la colisión,

$$v(t) = v_o - \mu\,g\,t \quad\longrightarrow\quad t^* = \frac{v_o}{\mu\,g}$$

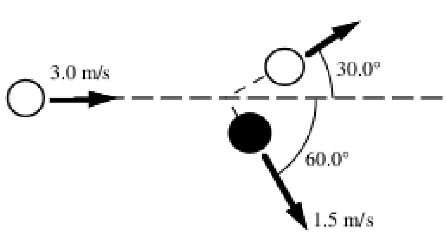
$$v^2 - v_o^2 = 2\,a\,s \quad\longrightarrow\quad s = \frac{v_o^2}{2\,\mu\,g} \qquad\qquad s : \text{desplazamiento posterior a la colisión hasta detenerse}$$

Reemplazando entre las ecuaciones,

$$s = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_o^2}{2\,\mu\,g}$$

Problema 13

En un juego de billar, todas las bolas tienen aproximadamente la misma masa, cerca de 0.17 kg. En la figura, la bola blanca impacta una bola de color tal que sigue la trayectoria que se muestra. La otra bola tiene una rapidez de 1.5 m/s inmediatamente después de la colisión. ¿Cuál es la rapidez de la bola blanca después de la colisión?



Solución

Para el sistema formado por las bolas y la mesa de billar no existen fuerzas externas, por tanto se conserva el momentum y considerando que las masas de las bolas son todas iguales,

$$\vec{v}_{blanca,i} + \vec{v}_{negra,i} = \vec{v}_{blanca,f} + \vec{v}_{negra,f}$$

Usando la información de la figura, las velocidad son

$$\vec{v}_{blanca,i} = (3.0 \text{ m/s})\,\hat{\imath} \qquad\qquad \vec{v}_{negra,i} = 0$$

$$\vec{v}_{blanca,f} = v_{blanca,f}\,(\cos 30^o\,\hat{\imath} + \sin 30^o\,\hat{\jmath}) \qquad\qquad \vec{v}_{negra,f} = (1.5 \text{ m/s})\,(\cos 60^o\,\hat{\imath} - \sin 60^o\,\hat{\jmath})$$

Reemplazando en la primera ecuación e igualando componente a componenete,

$$3.0 = v_{blanca,f}\,\cos 30^o + 1.5\,\cos 60^o$$

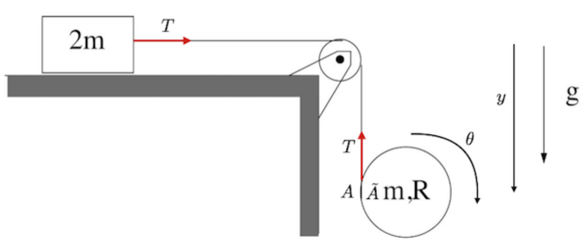
$$0 = v_{blanca,f}\,\sin 30^o - 1.5\,\sin 60^o$$

$$v_{blanca,f} = 1.5\left(\frac{\sin 60^o}{\sin 30^o}\right) = 2.6 \text{ m/s}$$

Problemas 14 y 15

El sistema de la figura consiste en un bloque de masa 2m que se puede deslizar por un superficie horizontal sin roce, una polea ideal (sin masa) y un cilindro homogéneo y macizo de masa m y radio R sobre el cual está enrollada una cuerda que, pasando por la polea ideal, lo une al bloque de masa 2m. Cuando se deje evolucionar el sistema, ¿cuánto vale la aceleración vertical del Centro de Masa del cilindro? y ¿cuánto es la tensión de la cuerda?

Solución



Considerando las fuerzas y coordenadas de la figura, las ecuaciones de fuerza son:

$$-T = 2m\ddot{x}$$
$$mg - T = m\ddot{y}$$

Por otro lado, el torque sobre el cilindro, respecto a su centro es:

$$TR = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}$$

Por último, debemos considerar la relación entre $\ddot{\theta}$, $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$. La velocidad en el punto Ã es

$$v_{\tilde{A}} = \dot{y} - R\dot{\theta}$$

y en A es

$$v_A = -\dot{x}$$

Como debe ser la misma, y derivando, tenemos que

$$-\ddot{x} = \ddot{y} - R\ddot{\theta}$$

Con estas ecuaciones podemos resolver el sistema y encontrar los valores para $\ddot{y}$ y T

$$T = \frac{2}{7}mg \qquad\qquad \ddot{y} = \frac{5}{7}g$$