PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 01

Cinemática I

Problema 1.

La posición de una partícula está dada por $\mathbf{u}(t) = \alpha(1+t) + \beta t^2$. Se pide determinar:

a) La expresión de velocidad $\mathbf{v}(t)$ asumiendo α y β conocidos.

b) Los valores α y β y re-escribir la ecuación del movimiento. Para ello usted sabe que en $t = 0$ la partícula se encuentra en la posición $\mathbf{u}(t=0) = 5$, y acelera con $\mathbf{a}(t=0) = 2$.

Problema 2.

Una partícula acelera según $\mathbf{a}(t) = \alpha t + \beta$. Su posición en $t = 0$ es $\mathbf{u}(t=0) = 2\,m$. Transcurridos $3\,s$, su posición es $\mathbf{u}(t=3) = 14\,m$. Se pide determinar:

a) La posición en $t = 5\,s$.

b) El desplazamiento entre $t = 2\,s$ y $t = 5\,s$.

c) La variación de velocidad $\Delta\mathbf{v}$ entre los instantes $t = 1\,s$ y $t = 3\,s$.

Problema 3.

Un auto frena con aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{-k \cdot v_0}{(t+1)^2} \qquad \text{con } k > 1$$

Si la velocidad del auto al inicio del frenado es igual a v_0, se pide determinar:

a) El tiempo que tarda en frenar.

b) La distancia de frenado $\Delta\mathbf{u}$.

Problema 4.

Dos automóviles (A y B) inician su carrera a $8\,m$ de distancia y viajan el uno-al-otro. El automóvil A comienza desde el origen (i.e. $\mathbf{u}_A(t=0) = 0$) en reposo y con aceleración constante $1\,m/s^2$. El automóvil B comienza desde $\mathbf{u}_B(t=0) = 8\,m$ y viaja con velocidad constante e igual a $3\,m/s$. Se pide determinar:

a) La posición $\mathbf{u}(t^\star)$ en que ambos automóviles chocan.

Soluciones.

Problema 1 – Solución
La velocidad es:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \alpha + 2\beta t$$

Sabemos que $\mathbf{u}(t=0) = 5$ y $\mathbf{a}(t=0) = 2$, con lo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\beta \qquad \forall t \\ \mathbf{a}(t=0) = 2 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 1 \end{aligned}$$

, y luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t=0) = 5 \\ \alpha(1+t) + \beta t^2 = 5 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 5 \end{aligned}$$

La ecuación del movimiento es: $\mathbf{u}(t) = 5(1+t) + t^2$.

Problema 2 – Solución
La velocidad es:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\ dt = \int (c\alpha t + \beta)\, dt = \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + C_1$$

La posición es:

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{v}(t)\ dt = \int \left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + C_1\right) dt = \frac{\alpha}{6}t^3 + \frac{\beta}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

Sabemos que $\mathbf{u}(t=0) = 2\,m$ y $\mathbf{u}(t=3) = 14$, con lo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t=0) &= C_2 = 2 \qquad \rightarrow \qquad C_2 = 2\,m \\ \mathbf{u}(t=3) &= \frac{27\alpha}{6} + \frac{9\beta}{2} + 3C_1 + 2 = 14 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = \frac{12 - {}^{9}\!/\!{}_{2}\,(\alpha+\beta)}{3} = 4 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

El desplazamiento en $t = 2 \ldots 5$ es:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_{2\to5} &= \mathbf{u}(5) - \mathbf{u}(2) \\ \Delta\mathbf{u}_{2\to5} &= \left\{22 + \frac{40\alpha}{3} + 5\beta\right\} - \left\{10 - \frac{5\alpha}{3} - \beta\right\} = 12 + 15\alpha + 6\beta \end{aligned}$$

La variación de velocidad entre $t = 1 \ldots 3$ es:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{v}_{1\to3} &= \mathbf{v}(3) - \mathbf{v}(1) \\ \Delta\mathbf{v}_{1\to3} &= \left\{4 - 3\alpha - \frac{3}{2}\beta\right\} - \left\{4 - \alpha - \frac{1}{2}\beta\right\} = 4\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

Problema 3 – Solución
La velocidad es:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\ dt = \frac{k\,v_0}{t+1} + C_1$$

La posición es:

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{v}(t)\ dt = k\,v_0 \log(t+1) + C_1 t + C_2$$

Ubicando el auto inicialmente en el orígen del sistema coordenado, entonces sabemos que $\mathbf{u}\left(t=0\right)=0\,m$ y $\mathbf{v}\left(t=0\right)=v_0$, con lo que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\left(t=0\right) &= C_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_2 = 0 \\
\mathbf{v}\left(t=0\right) &= k\,v_0 + C_1 = v_0 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = v_0\left(1-k\right)
\end{aligned}
$$

El auto se detiene cuando $\mathbf{v}\left(t^s tar\right)=0$. Es decir:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\left(t\star\right) &= \frac{k\,v_0}{t^\star+1} + v_0\left(1-k\right) = 0 \\
\frac{k\,v_0}{t^\star+1} &= v_0\left(k-1\right) \\
t^\star + 1 &= \frac{k\,v_0}{v_0\left(k-1\right)} \qquad \rightarrow \qquad t^\star = \frac{1}{k-1}
\end{aligned}
$$

, y la distancia de frenado es:

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{u}_{0\rightarrow t^\star} &= \mathbf{u}\left(t^\star\right) - \mathbf{u}\left(0\right) = k\,v_0\log\left(\frac{1}{k-1}+1\right) + v_0\left(1-k\right)\left(\frac{1}{k-1}\right) \\
\Delta\mathbf{u}_{0\rightarrow t^\star} &= v_0\left[k\log\left(\frac{k}{k-1}\right)-1\right]
\end{aligned}
$$

<u>Problema 4 – Solución</u>
Las ecuación de movimiento para el caso de aceleración constate (incluso si es igual a cero) es:

$$
\mathbf{u}\left(t\right) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0
$$

, que aplicados a los vehículos A y B:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_A\left(t\right) &= \frac{1}{2}t^2 \\
\mathbf{u}_B\left(t\right) &= -3t + 8
\end{aligned}
$$

Los vehículos colisionan cuando $\mathbf{u}_A\left(t^\star\right)=\mathbf{u}_B\left(t^\star\right)$. Es decir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(t^\star\right)^2 &= -3t^\star + 8 \\
\left(t^\star\right)^2 + 6t^\star - 16 &= 0 \\
\left(t^\star+8\right)\left(t^\star-2\right) &= 0
\end{aligned}
$$

, donde la solución con $t^\star$ no es relevante. Es decir, la colisión ocurre en $t^\star=2\,s$. Finalmente, la posición de los vehículos al momento de la colisión es:

$$
\mathbf{u}_A\left(t^\star\right) = \mathbf{u}_B\left(t^\star\right) = 2\,m
$$