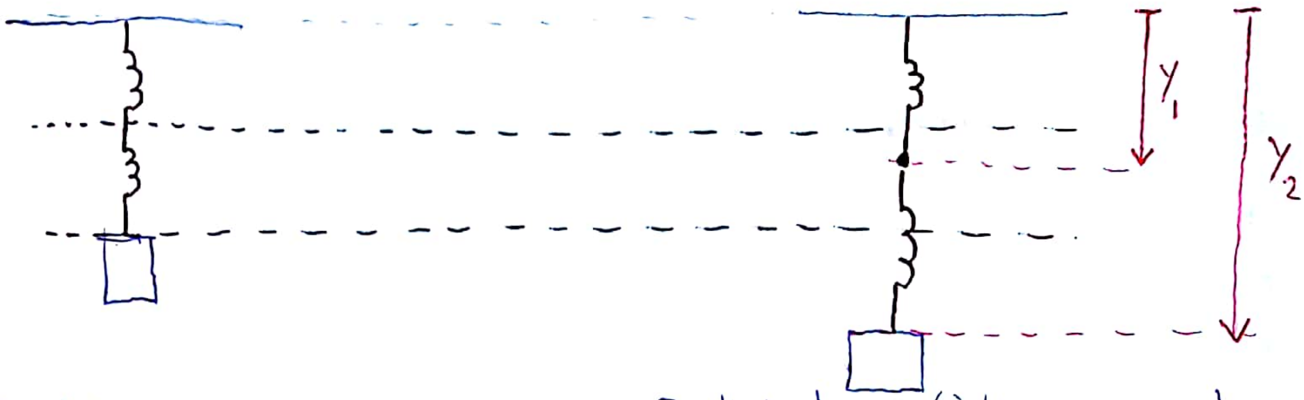
1\. a) Primero vamos a estudiar el caso de los dos resortes en serie

Elegiremos un sistema de referencia apropiado, para ello dibujemos el sistema en equilibrio, y luego lo perturbaremos.



Equilibrio

Perturbado (Estiramos ambos resortes)

Sabemos de la ley de Hooke que la fuerza que ejerce un resorte es proporcional a su estiramiento. O sea,

$$\|F_e\| = K \cdot (\text{estiramiento})$$

Debemos estudiar el estiramiento de ambos resortes utilizando el sistema de coordenadas antes dibujado

Sea ℓ el largo natural de ambos resortes (Por enunciado es el mismo para ambos).

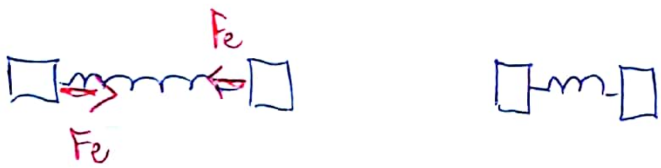
Scanned by CamScanner

El estiramiento de cada uno vendrá dado por (Largo actual - Natural)

① $Y_1 - \ell$

② $Y_2 - Y_1 - \ell$

Ahora una aclaración, Al estirar un resorte, este quiere volver a su largo natural, La fuerza elástica es ejercida en <u>ambos extremos</u> del mismo.



Hagamos el diagrama de cuerpo libre para cada punto de unión y cuerpo.

m :

unión :

Ahora $\vec{F} = m\vec{a}$. Como los resortes no tienen masa, la unión tampoco. Así, $\vec{F}_{NETA} = \vec{0}$, y por tanto,

$$\left(F_{e_2}\hat{y} - F_{e_1}\hat{y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{e_1} = F_{e_2} \qquad ③$$

$$K_1\left(Y_1 - \ell\right) = K_2\left(Y_2 - Y_1 - \ell\right)$$

Ahora para la caja,

$$-F_{e_2}\hat{y} = m\ddot{y}_2\hat{y}$$

$$-K_2(Y_2 - Y_1 - \ell) = m\ddot{Y}_2 \quad (4)$$

Tenemos una mezcla de Y_1 con Y_2 en la ecuación (4). Esto no sirve, queremos dejar la ecuación en términos de Y_2. Vamos a despejar Y_1 en términos de Y_2 de (3)

$$Y_1(K_1 + K_2) = K_2Y_2 + \ell(K_1 - K_2)$$

$$Y_1 = \frac{K_2}{K_1 + K_2}Y_2 + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\ell$$

Reemplazamos en (4)

$$-K_2Y_2 + \frac{K_2^2}{K_1 + K_2}Y_2 + \frac{K_2(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2}\ell + K_2\ell = m\ddot{Y}_2$$

$$-\left(\frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}Y_2 - \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}2\ell\right) = m\ddot{Y}_2$$

$$-\frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}\left(Y_2 - 2\ell\right) = m\ddot{Y}_2$$

Notemos que esta es la misma ecuación de movimiento que se habría obtenido con un resorte de constante elástica $\frac{K_1 K_2}{K_1+K_2}$ y largo natural 2ℓ.

La frecuencia angular de oscilación de un resorte es

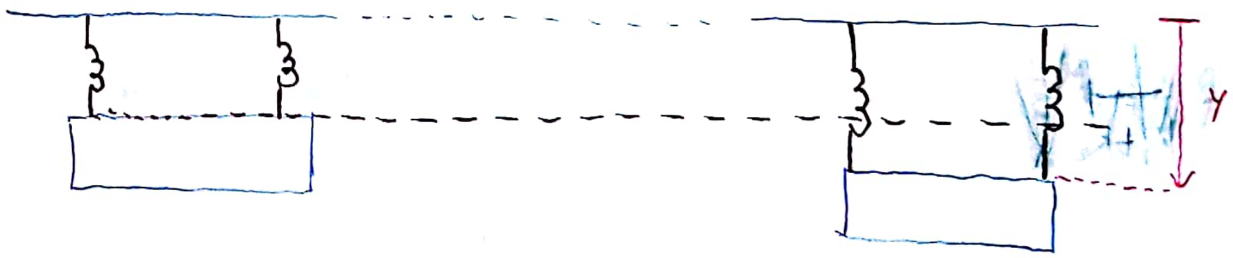
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

En este caso, basta reemplazar el K_{eff}

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{K_1 K_2}{K_1+K_2}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}\frac{K_1 K_2}{K_1+K_2}}$$

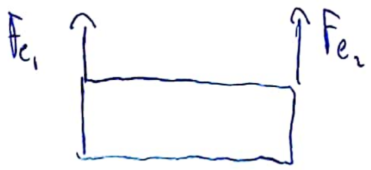
Para resortes en serie, $\frac{1}{K_{eff}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$ (Como resistencias en paralelo)

b) Ahora veamos qué ocurre en paralelo



Dado que la caja no rota, la coordenada "y" es la misma para ambos resortes.

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de la caja,



Y ahora $\vec{F} = m\vec{a}$

$$-F_{e_1} - F_{e_2} = m\ddot{y}$$

$$-K_1(y-\ell) - K_2(y-\ell) = m\ddot{y}$$

$$-(K_1+K_2)(y-\ell) = m\ddot{y}$$

Es la misma ecuación de movimiento que se habría obtenido con un resorte de constante elástica K_1+K_2 y largo natural ℓ.

O sea, $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}(K_1+K_2)} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}(K_1+K_2)}$

Para resortes en paralelo, $K_{eff} = K_1 + K_2$ (Como resistencias en serie)

Scanned by CamScanner

2. Antes de abordar el problema, vamos a hablar un poco sobre la fuerza de roce. Existen dos tipos de roce (seco):

- Roce estático → Se opone al movimiento relativo que existiría entre dos superficies en ausencia del mismo.

  Su magnitud es variable, viene dada por

  $$\|F_r\| \leq \mu_s N$$

  N → Fuerza normal entre ambas superficies

  μ_s → Coeficiente de roce estático entre ambas superficies

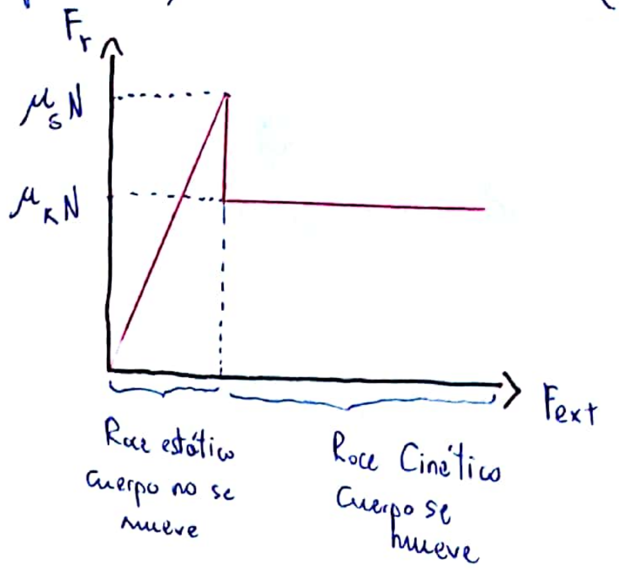
- Roce cinético → Se opone al movimiento relativo existente entre dos superficies. Su magnitud viene dada por

  $$\|F_r\| = \mu_K N = \mu_c N = \mu_D N$$

  μ_K, μ_c, μ_D → Coeficiente de roce cinético entre ambas superficies

* El roce siempre apunta en una dirección paralela (tangente, contenida en) ambas superficies. No tiene componente normal.

Si vieramos un gráfico de fuerza V/s fuerza externa aplicada, veríamos esto (Pues en general, $\mu_s > \mu_k$)



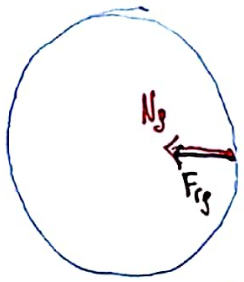
Habiendo hecho estas aclaraciones, vamos a comenzar con el problema. Notemos que el punto de contacto entre el auto y el suelo son las ruedas, y sabemos que al rodar sin resbalar el punto de contacto entre estas y el suelo tiene velocidad relativa 0 (Respecto al suelo). Entonces, en este caso tenemos roce estático entre las ruedas y el suelo.

Supongamos que el auto da la curva con una cierta rapidez v, constante. Claramente no puede haber ninguna fuerza que sea paralela al vector velocidad, porque de lo contrario habría aceleración en dirección de la velocidad, y la rapidez aumentaría. En efecto, si utilizamos un sistema de coordenadas cilíndricas (Apropiado pues el auto lleva una trayectoria circunferencial), vemos que

Tenemos que entender físicamente qué representa cada caso. Pensemos un poco.

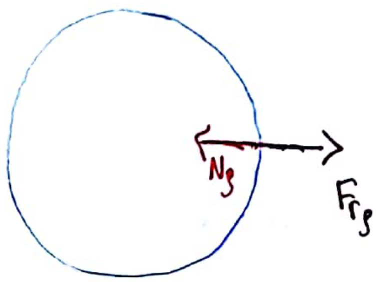
Las únicas fuerzas que tienen componente en $\hat{\rho}$ son $\vec{N}$ y $\vec{F}_r$. $\vec{N}$ siempre tiene componente negativa en $\hat{\rho}$, y $\vec{F}_r$ puede variar. Sea $N_\rho = \vec{N} \cdot \hat{\rho}$ y $F_{r_\rho} = \vec{F}_r \cdot \hat{\rho}$ las componentes radiales de la fuerza normal y el roce. Si dibujamos cada caso en una vista superior

(I)



$$N_\rho + F_{r_\rho} = \frac{mv^2}{R}$$

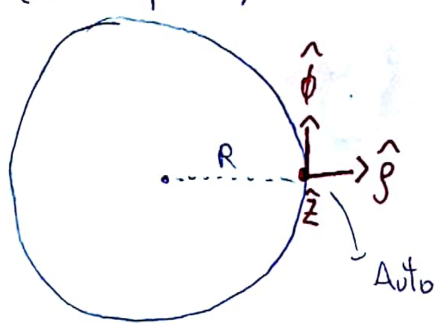
(II)



$$N_\rho - F_{r_\rho} = \frac{mv^2}{R}$$

En el caso (I), a la normal le falta para ser igual a $\frac{mv^2}{R}$, y el roce debe "ayudarle". En (II), la normal excede en valor a $\frac{mv^2}{R}$ y el roce debe "quitarle". Esto implica que en (I) estamos hablando de alta velocidad (Pues $\frac{mv^2}{R}$ es grande), y en (II) estamos hablando de baja velocidad (Pues $\frac{mv^2}{R}$ es chico).

(Vista superior)



$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

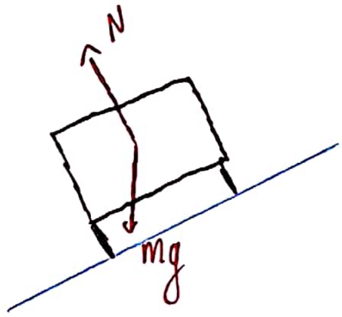
Aquí, $\rho = R$

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R}$$

$$z = cte$$

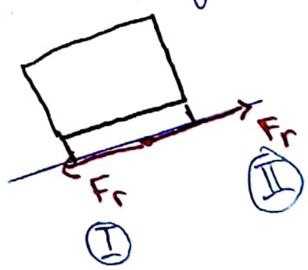
Luego, $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\hat{\rho} = \dfrac{\vec{F}_{NETA}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{NETA} = -\dfrac{mv^2}{R}\hat{\rho}$

Osea, la suma de fuerzas en $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$ debe anularse. Veamos un dibujo de la parte trasera del auto para ver qué sucede.

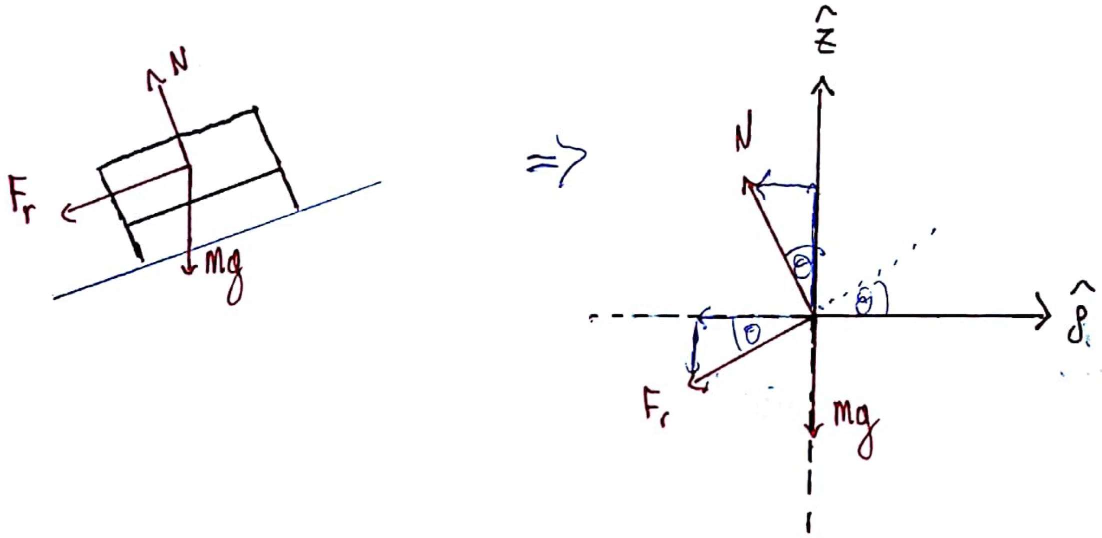


¿Y el roce?

El camino por el que se desplaza el auto tiene dos vectores directores. Uno de ellos es $\hat{\phi}$, sin embargo el roce no puede tener componente en $\hat{\phi}$ por la discusión anterior. Luego, el roce tiene dos opciones:



Vamos a trabajar primero en el caso I. Vemos el DCL del auto



$$\vec{W} = -mg\,\hat{z}$$
$$\vec{N} = N(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{z})$$
$$\vec{F_r} = -F_r(\cos\theta\,\hat{\rho} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{z})$$

Así, $\vec{F}_{NETA} = -(N\operatorname{sen}\theta + F_r\cos\theta)\hat{\rho} + (N\cos\theta - F_r\operatorname{sen}\theta - mg)\hat{z} = -\frac{mv^2}{R}\hat{\rho}$

Separando por componentes,

$$N\operatorname{sen}\theta + F_r\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \qquad (1)$$

$$N\cos\theta - F_r\operatorname{sen}\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Tenemos que ponernos en el caso que F_r es lo más grande posible (Para que ayude lo que más pueda a la normal) $\Rightarrow F_r = \mu_s N$

Reemplazando en ① y ②,

$$N(\operatorname{sen}\theta + \mu_s \cos\theta) = \frac{mv^2}{R} \quad (3)$$

$$N(\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta) = mg \quad (4)$$

Podemos tomar $\frac{(3)}{(4)}$ para eliminar N,

$$\frac{v^2}{Rg} = \frac{\operatorname{sen}\theta + \mu_s \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}$$

$$v_{max} = \sqrt{Rg}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\theta + \mu_s \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}}$$

Ahora para el caso (II), tenemos las mismas ecuaciones pero cambiando el signo de $\vec{F}_r$.

$$N\operatorname{sen}\theta - F_r \cos\theta = \frac{mv^2}{R} \quad (5)$$

$$N\cos\theta + F_r \operatorname{sen}\theta - mg = 0 \quad (6)$$

Usando nuevamente $F_r = \mu_s N$,

$$N(\operatorname{sen}\theta - \mu_s \cos\theta) = \frac{mv^2}{R} \quad (7)$$

$$N(\cos\theta + \mu_s \operatorname{sen}\theta) = mg \quad (8)$$

Nuevamente tomando $\frac{⑦}{⑧}$ para eliminar N,

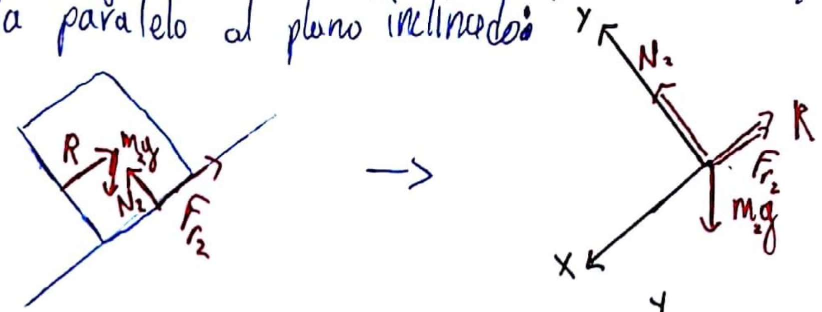
$$\frac{v^2 g}{R} = \frac{sen\theta - \mu_s \cos\theta}{\cos\theta + \mu_s \, sen\theta}$$

$$v_{min} = \sqrt{Rg}\sqrt{\frac{sen\theta - \mu_s \cos\theta}{\cos\theta + \mu_s \, sen\theta}}$$

3. Vamos a suponer que ambos bloques caen pegados (Que no tiene por qué ser así necesariamente, depende de las masas y coeficientes de roce).

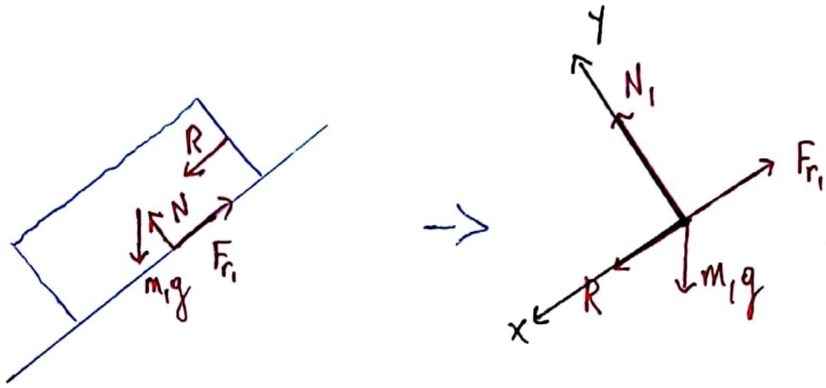
Hacemos el diagrama de cuerpo libre para cada uno, eligiendo un sistema de referencia paralelo al plano inclinado:

m_2 :



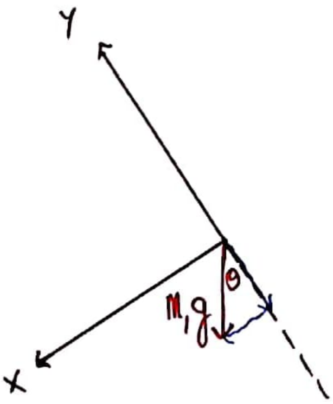
→ Fuerza de reacción producto de m_2 empujando a m_1

m_1 :



* Por enunciado, las cajas ya están cayendo. Luego, tenemos roce cinético

La única fuerza a descomponer en ambos casos es el peso.
Ya sabemos dónde está el ángulo θ,



$$\vec{W}_1 = m_1 g \left(\operatorname{sen}\theta \, \hat{x} - \cos\theta \, \hat{y} \right)$$

$$\vec{W}_2 = m_2 g \left(\operatorname{sen}\theta \, \hat{x} - \cos\theta \, \hat{y} \right)$$

Scanned by CamScanner

Ya estamos listos para ver las ecuaciones de movimiento

$$m_1: \quad R\hat{x} - F_{r_1}\hat{x} + N_1\hat{y} + m_1 g(\text{sen}\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y}) = m_1\ddot{x}_1\hat{x}$$

Roce cinético

No hay aceleración en eje y

$$R - \mu_1 N_1 + m_1 g\,\text{sen}\theta = m_1\ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$N_1 - m_1 g\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$m_2: \quad -R\hat{x} - F_{r_2}\hat{x} + N_2\hat{y} + m_2 g(\text{sen}\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y}) = m_2\ddot{x}_2\hat{x}$$

$$-R - \mu_2 N_2 + m_2 g\,\text{sen}\theta = m_2\ddot{x}_2 \qquad (3)$$

$$N_2 - m_2 g\cos\theta = 0 \qquad (4)$$

Como las cajas caen pegadas, $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$. Despejamos R de (1) y reemplazamos en (3).

$$-m_1 a - \mu_1 N_1 + m_1 g\,\text{sen}\theta - \mu_2 N_2 + m_2 g\,\text{sen}\theta = m_2 a$$

Usando (2) y (4),

$$a(m_1 + m_2) = m_1 g(\text{sen}\theta - \mu_1\cos\theta) + m_2 g(\text{sen}\theta - \mu_2\cos\theta)$$

$$a(m_1 + m_2) = g\,\text{sen}\theta(m_1 + m_2) - g\cos\theta(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)$$

Con esto,
$$a = \underbrace{g\,\text{sen}\,\theta}_{\text{En ausencia de roce}} - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\, g\cos\theta$$

Tal como se mencionó, este resultado es válido si ambas cajas caen pegadas. Caer pegadas implica que $R \geq 0$ (Si $R>0$, m_2 está empujando a m_1 hacia abajo. Si $R=0$, caen juntas sin empujarse). Si $R>0$, m_2 estaría a m_1 hacia arriba, osea, debería existir algún pegamento o cuerda para que caigan juntas.

Despejando R de 1

$$R = m_1 g\,\text{sen}\,\theta - \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\, g\cos\theta + \mu_1 m_1 g\cos\theta - m_1 g\,\text{sen}\,\theta$$

$$R = \frac{g\cos\theta}{m_1+m_2}\left(-\mu_1 m_1^2 - \mu_2 m_1 m_2 + \mu_1 m_1^2 + \mu_1 m_1 m_2\right)$$

$$R = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, g\cos\theta}_{\geq 0}\,(\mu_1 - \mu_2)$$

O sea, mientras $(\mu_1 - \mu_2) \geq 0$, las cajas caen juntas.

Si las cajas no caen juntas $(\mu_2 > \mu_1)$, entonces las ecuaciones de movimiento se "desacoplan" pues $R=0$. (Ya no hay contacto)

$$-\mu_1 N_1 + m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 \ddot{x}_1 \quad (5)$$

$$-\mu_2 N_2 + m_2 g \operatorname{sen}\theta = m_2 \ddot{x}_2 \quad (6)$$

Usando (2) y (4),

$$\ddot{x}_1 = g(\operatorname{sen}\theta - \mu_1 \cos\theta)$$

$$\ddot{x}_2 = g(\operatorname{sen}\theta - \mu_2 \cos\theta)$$