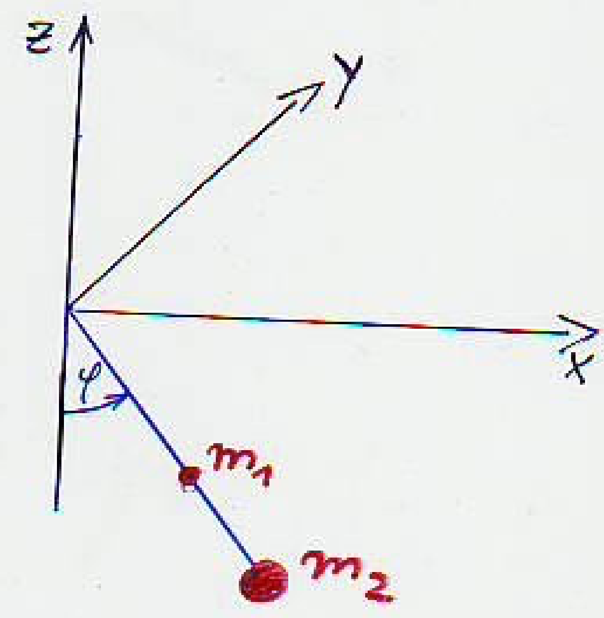
Ejemplo:

Barra de péndulo con dos puntos de masa:

Un péndulo colgado en el origen del sistema de coordenada oscila en el plano-x,z. El péndulo consiste en una barra sin masa en la cual las masas m_1 y m_2 estan sujetas en la distancia l_1 y l_2 del punto de rotación / punto de fijación del péndulo.
Plantee la ecuación de movimiento del péndulo.



Solución:

Sobre ambas masas actúan las Fuerzas de gravedad $m_i\vec{g}$ $(i=1,2)$ y la Fuerza de la Barra / Tensión.

La Fuerza de la Barra / Tensión está paralela a los vectores locales de las masas y por lo tanto no produce un momento de torque.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin\varphi \, \vec{e}_y$$

con $\vec{e}_y$ = vector unitario en dirección y.

(Tener en cuenta que $\sin\varphi$ es negativo, cuando el péndulo oscila hacia la izquierda).

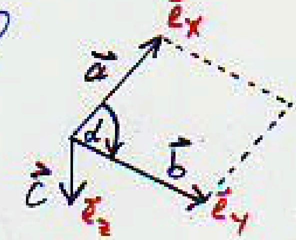
Ademas vale con $|\vec{p}_i| = m_i l_i |\dot{\varphi}|$:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = -(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi} e_y \qquad *)$$

Si el péndulo oscila hacia la derecha (izquierda), entonces $\dot{\varphi}$ es mayor (menor) que cero y el momento angular L indica en la dirección negativa $\swarrow \vec{L}$ (positiva $\nearrow \vec{L}$) del eje-y.

La ecu. $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ conduce a

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g \sin\varphi = 0$$



---

*) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$; $|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

Dirección de $\vec{c}$: Se mueve $\vec{a}$ en el trayecto mas corto a la dirección de $\vec{b}$. $\Rightarrow$ $\vec{c}$ tiene dirección de "tira buzon" o "pano"

para ángulos φ pequeños vale $\sin\varphi \approx \varphi$ y
la solución de esta ecuación diferencial (Dgl.) es:

$$\varphi(t) = \Phi \sin\left(\sqrt{\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\, g}\; t - \delta\right)$$

para $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$ o para $l_1 = l_2$
resultan las ecuaciones conocidas del
péndulo plano simple como caso especial
(→ ver ejercicio 7-5).

5.4 Resumen:

1) El "golpe de fuerza" sobre una partícula
es igual al cambio del Impulso / Momento
de esta partícula:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

2) Según el teorema de impulso el impulso/momento total en un sistema aislado (es decir en un sistema, que no está influido por fuerzas externas) es constante.

Contrariamente al teorema de energía para el teorema de impulso/momento no se exige un sistema libre de roce.

3) El teorema de impulso es un caso especial de la ecu.:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{F}^{(a)}$$

con $\vec{F}^{(a)}$ = Fuerza externa total sobre el sistema de N-partículas.

4) Para el choque central elástico de dos cuerpos, los cuales no interactúan con el "mundo externo" vale:

Resumen:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot v_2 + \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_1$$

5) Para los movimientos rotatorios de un punto de masa / partícula el momento de torque $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ y el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ toman el rol de la Fuerza $\vec{F}$ y del impulso / momento lineal $\vec{p}$.
Aquí es el origen del sistema de coordenadas y con esto también el vector local $\vec{r}$ de libre elección.

6) La ecuación de movimiento para las rotaciones es la ecución del momento angular:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \qquad \left(\text{compare con } \vec{F} = \dot{\vec{p}}\right)$$

Resumen:

7) Según la ecuación del momento angular el momento angular $\vec{L}$ de un punto de masa / partícula es constante si $\vec{F} = \vec{0}$ y $\vec{F} \parallel \vec{r}$ (Fuerza central).

La Fuerza Central más importante es la Fuerza de atracción del sol sobre los planetas.

Los planetas tienen un impulso / momento angular $\vec{L}$ = constante.

El módulo constante

$$|\vec{L}| = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

es la segunda Ley de Kepler.

8) Para los sistemas de N-partículas valen relaciones análogos como para un punto de masa / partícula.