Estática y Dinámica

Material Clases Cuerpo Rigido - Rotacion 4

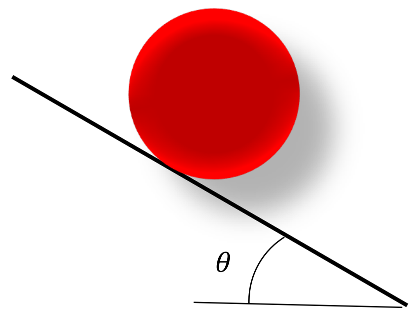
Dinámica de la rotación

Ejemplos

Ejemplo 1:

Una esfera sólida de masa M y radio R rueda sin deslizar por un plano inclinado.

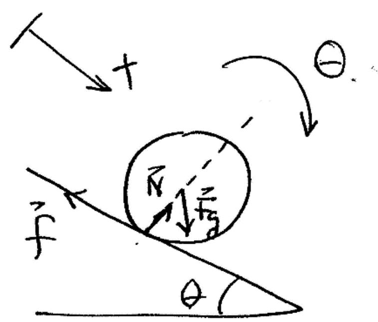
Calculemos la aceleración del CM.



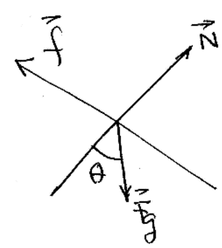
1. Identificar cuerpos

Esfera

2 y 3. Identificar fuerzas, puntos de aplicación (diagrama de fuerzas) y coordenadas.



4. Escribir ecuaciones



Traslación[1]:

$$mg\sin\theta - f = ma_{CM}$$

$$mg\cos\theta = N$$

Rotación (en relación al eje que pasa por el centro de masa)[2]

$$fR = I_{CM}\alpha$$

5. Ecuaciones de ligadura

$$\Delta x = \Delta s = R\Delta\theta \quad \Longrightarrow \quad a_{CM} = \alpha R$$

[1] Cuidado!!!...recordemos que la fuerza de roce estática es solamente igual a μN cuando el cuerpo está en la inminencia de deslizar, lo cual no es el caso.

[2] Notemos que el sentido de la fuerza hace torque positivo de acuerdo al sentido de rotación tomado en el punto 3.

6. Algebra

Sistema de ecuaciones

$$mg\sin\theta - f = ma_{CM}$$

$$f = \frac{I}{R^2}a_{CM}$$

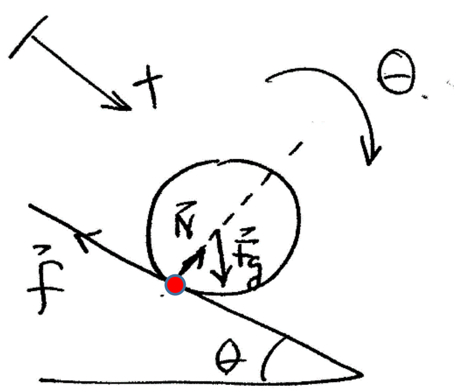
Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{(1 + \frac{I_{CM}}{mR^2})}$$

Ejemplo2:

Resolvamos el problema anterior tomando el eje de rotación en el punto de contacto con el plano.

La diferencia con el caso anterior está en el punto 4. Notemos que en relación al eje que pasa por el punto de contacto con el plano



En relación a este punto, la suma de torque externos es,

$$mg\sin\theta\, R = I\alpha$$

donde aplicando el teorema de los ejes paralelos el momento de inercia en relación al punto de contacto es,

$$I = I_{CM} + mR^2$$

y

$$mg \sin\theta \, R = I \frac{a_{CM}}{R}$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin\theta \, R}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}}$$

Ejemplo 3

En el mismo problema, ¿cuál debe ser el valor mínimo del coeficiente de roce estático para que la esfera no resbale?

Resp/ Para que la esfera no resbale, $f \leq \mu_e N$

de,

$$f = mg \sin\theta - ma_{CM}$$

$$\mu_e N \geq mg \sin\theta - ma_{CM}$$

Pero,

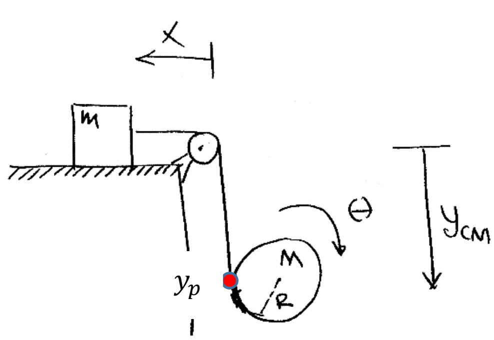
$$N = mg \cos\theta$$

$$\mu_e g \cos\theta \geq g \sin\theta - a_{CM}$$

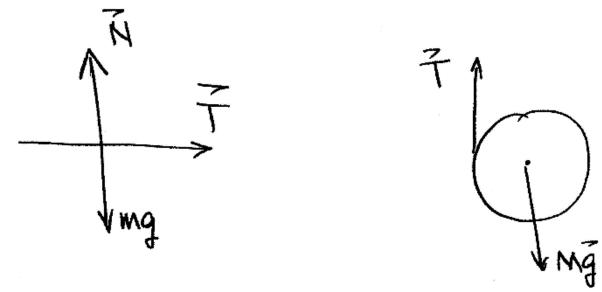
$$\mu_e \geq \tan\theta - \frac{a_{CM}}{g \cos\theta}$$

Ejemplo 4:

Encontrar la aceleración del cuerpo y del disco. Supongamos que no hay roce.



Una vez identificados los cuerpos y el sistema de coordenadas, realicemos el diagrama de fuerzas,



Escribamos las ecuaciones:

Traslación:

$$-T = ma_m$$

$$-T + Mg = Ma_2$$

Rotación (en relación al eje que pasa por el centro de masa)

$$TR = I_{CM}\alpha$$

Ecuaciones de ligadura,

Ligadura entre x e y_p (imaginando que el cilindro no rota)

$$x + y_p = l$$

de donde

$$\Delta x + \Delta y_p = 0 \implies \quad a_p = -a_m$$

Ligadura entrey_p y y_{CM}

$$y_{CM} = \; y_p + \Delta\theta R$$

de donde

$$a_M = \; -a_m + \alpha R$$

Sistema de ecuaciones,

$$-\frac{T}{m} = a_m$$

$$-\frac{T}{M} + g = a_M$$

$$\frac{TR^2}{I_{CM}} = a_M$$

Y de la ecuación de ligadura, $a_M + \ a_m - \alpha R = 0$

$$-\frac{T}{m} - \frac{T}{M} + g - \frac{TR^2}{I_{CM}} = 0$$

$$\frac{T}{m} + \frac{T}{M} + \frac{T}{(I_{CM}/R^2)} = g$$

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\frac{T}{m} + \frac{3T}{M} = g$$

$$T = \frac{Mmg}{3m + M}$$

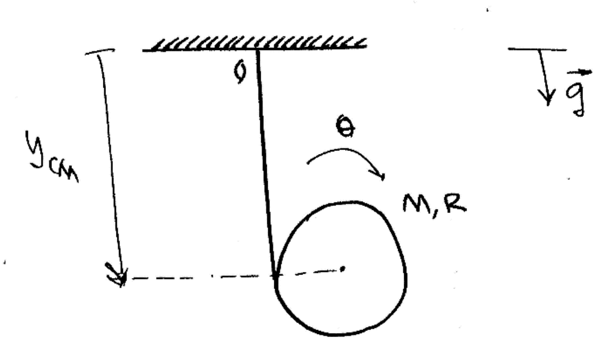
Con la tensión calculada, encontramos a_M y a_m.

Ejemplo 5

Considere un yo-yo que consiste en un cilindro de masa M y radio R. El extremo superior de la cuerda del yo-yo se mantiene fijo (ver figura)

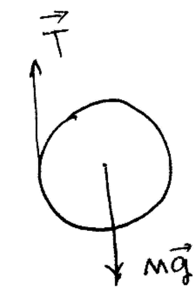
a) Calcule la aceleración del CM

b) Calcule la tensión en la cuerda.



Resp/

Una vez identificados los cuerpos y las coordenadas, realizamos los diagramas de fuerzas, Escribamos las ecuaciones,



Traslación

$$-T + Mg = Ma_{CM}$$

Rotación (en relación al CM):

$$TR = I\alpha$$

Ecuación de ligadura:

$$\Delta y_{CM} = \Delta s = R\Delta\theta$$

y derivando dos veces en relación a t:

$$a_M = R\alpha$$

Entonces, las ecuaciones quedan como:

$$-T + Mg = Ma_M$$

$$T = \frac{I}{R^2} a_{CM}$$

Sumando obtenemos,

$$Mg = \left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_{CM}$$

Con $I = \frac{MR^2}{2}$,

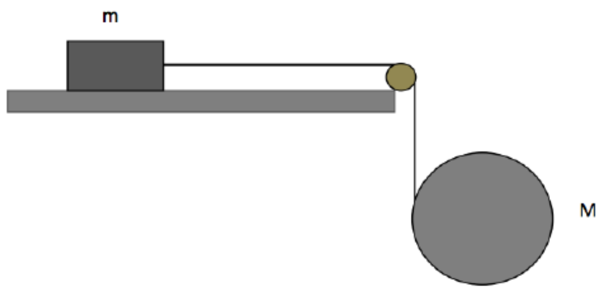
$$g = \left(1 + \frac{1}{2}\right) a_{CM} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{2}{3} g$$

b) Para calcular la tensión de

$$T = \frac{I}{R^2} a_{CM} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{M}{2} a_{CM} \quad \Rightarrow T = \frac{Mg}{3}$$

Ejemplo 6

En el sistema de la figura, el bloque de la izquierda tiene masa m y descansa sobre una superficie horizontal con coeficientes de roce estático μ_e y dinámico μ_d. El bloque m se encuentra unido a un cilindro macizo de masa M y radio R mediante una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. La cuerda está enrollada en el borde del cilindro como se ilustra la figura.

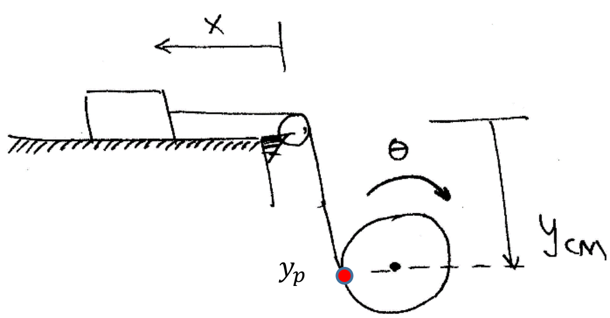


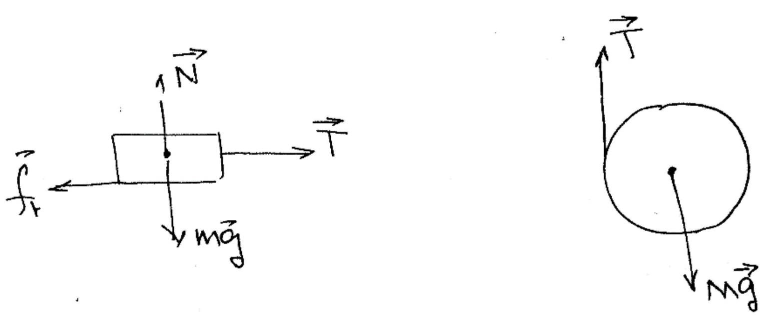
a) Encuentre el coeficiente de roce máximo μ_e a partir del cual m no se mueve.

b) Ahora asuma que m sí se mueve. Calcule la aceleración angular del centro de masa del cilindro, y la tensión de la cuerda.

Resp/

a)





Del diagrama de fuerzas escribimos las ecuaciones,

Traslación:

$$-T + f_r = -T + \mu_e mg = 0$$

$$-T + Mg = Ma_{CM}$$

Rotación (en relación al eje que pasa por el centro de masa)

$$TR = I_{CM}\alpha$$

Ecuaciones de ligadura,

Como el cuerpo de masa m no se mueve, la ligadura entre las variables lineales y angulares es:

$$y_{CM} = \Delta\theta R$$

de donde

$$a_M = \alpha R$$

Sistema de ecuaciones,

$$-\frac{T}{M} + g = a_{CM}$$

$$\frac{TR^2}{I_{CM}} = a_{CM}$$

Restando obtenemos la tensión

$$-\frac{T}{M} + g - \frac{TR^2}{I_{CM}} = 0$$

De donde

$$\frac{T}{M} + \frac{2T}{M} = g$$

$$T = \frac{Mg}{3}$$

Así que, de la primera ecuación

$$\mu_e = \frac{T}{mg} = \frac{1}{3}\frac{M}{m}$$

b) asumiendo que se mueve:

Escribamos las ecuaciones:

Traslación:

$$-T + f_r = -T + \mu_d mg = ma_m \qquad \text{(I)}$$

$$-T + Mg = Ma_M \qquad \text{(II)}$$

Rotación (en relación al eje que pasa por el centro de masa)

$$TR = I_{CM}\alpha \qquad \text{(III)}$$

Ecuaciones de ligadura,

Ligadura entre x e y_p (imaginando que el cilindro no rota)

$$x + y_p = l$$

de donde

$$\Delta x + \Delta y_p = 0 \implies \quad a_p = -a_m$$

Ligadura entrey_p y y_{CM}

$$y_{CM} = y_p + \Delta\theta R$$

de donde

$$a_M = -a_m + \alpha R$$

Sistema de ecuaciones,

$$-\frac{T}{m} + \mu_d g = a_m$$

$$-\frac{T}{M} + g = a_M$$

$$\frac{TR^2}{I_{CM}} = \alpha R$$

Y de la ecuación de ligadura, $a_M + a_m - \alpha R = 0$

$$-\frac{T}{m} + \mu_d g - \frac{T}{M} + g - \frac{TR^2}{I_{CM}} = 0$$

$$\frac{T}{m} + \frac{T}{M} + \frac{T}{(I_{CM}/R^2)} = g(1 + \mu_d)$$

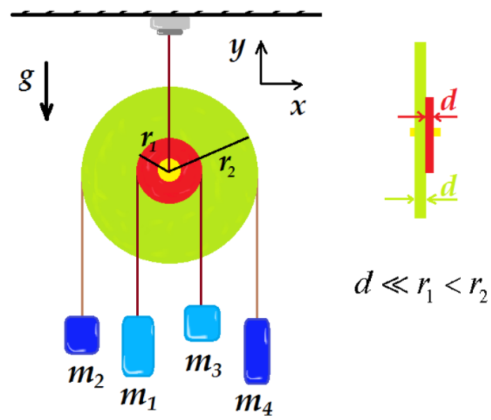
$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\frac{T}{m} + \frac{3T}{M} = g(1 + \mu_d)$$

$$T = \frac{Mmg}{3m + M}(1 + \mu_d)$$

Con la tensión calculada, encontramos a_M y a_m.

Ejemplo 7



Para el sistema mostrado en la figura,

a) ¿Qué relaciones deben satisfacer las masas para que el sistema esté en equilibrio?

b) Considerando que los discos tienen grosor despreciable y que todos están hechos del mismo material y de distribución de masa uniforme, determine el momento de inercia I del sistema.

c) Suponiendo que $m_3 > m_1$ y $m_4 = m_2$ y que el momento de la polea es I, determine la magnitud de a el sentido de la aceleración que sufre la masa m_4.

---

a)

Para que el sistema se encuentre en equilibrio, la suma de los torques en relación al eje de rotación tiene que ser cero, i.e.,

$$m_3gr_1 - m_1gr_1 + m_4gr_2 - m_2gr_2 = 0$$

$$(m_3 - m_1)r_1 + (m_4 - m_2)r_2 = 0$$

b) De la definición de momento de inercia,

$$I = \sum_{i(disco\ 1)} m_i r_i^2 + \sum_{i(disco\ 2)} m_i r_i^2 = \frac{1}{2}M_1 r_1^2 + \frac{1}{2}M_2 r_2^2$$

$$\rho = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} = \frac{M}{V}$$

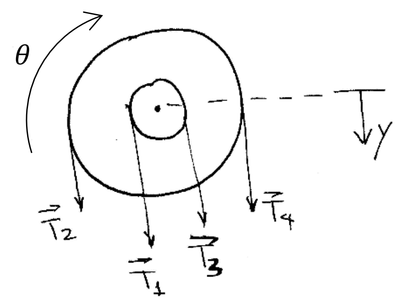
$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{Mr_1^2}{(r_1^2 + r_2^2)}\right) r_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{Mr_2^2}{(r_1^2 + r_2^2)}\right) r_2^2$$

$$I = \frac{1}{2} M \frac{(r_1^4 + r_2^4)}{(r_1^2 + r_2^2)}$$

c)

Ecuaciones de la traslación:

$$-T_2 + m_2 g = m_2 a_2$$



$$-T_1 + m_1 g = m_1 a_1$$

$$-T_3 + m_3 g = m_3 a_3$$

$$-T_4 + m_4 g = m_4 a_4$$

Rotación:

$$-T_2 r_2 - T_1 r_1 + T_3 r_1 + T_4 r_2 = I\alpha$$

Ecuaciones de ligadura,

$$a_2 = -\alpha r_2$$

$$a_1 = -\alpha r_1$$

$$a_3 = \alpha r_1$$

$$a_4 = \alpha r_2$$

Calculemos primero α. De las ecuaciones anteriores

$$-T_2 r_2 = -m_2 \alpha r_2^2 - m_2 g r_2$$

$$-T_1 r_1 = -m_1 \alpha r_1^2 - m_1 g r_1$$

$$T_3 r_1 = -m_3 \alpha r_1^2 + m_3 g r_1$$

$$T_4 r_2 = -m_4 \alpha r_2^2 + m_4 g r_2$$

Substituyendo en la ecuación para la rotación,

$$-m_2\alpha r_2^2 - m_2 g r_2 - m_1\alpha r_1^2 - m_1 g r_1 - m_3\alpha r_1^2 + m_3 g r_1 - m_4\alpha r_2^2 + m_4 g r_2 = I\alpha$$

$$[(-m_1 + m_3)r_1 + (m_4 - m_2)r_2]g = [I + r_2^2(m_2 + m_4) + r_1^2(m_1 + m_3)]\alpha$$

$$\alpha = \frac{[(-m_1 + m_3)r_1 + (m_4 - m_2)r_2]}{[I + r_2^2(m_2 + m_4) + r_1^2(m_1 + m_3)]} g$$

Si $m_4 = m_2$

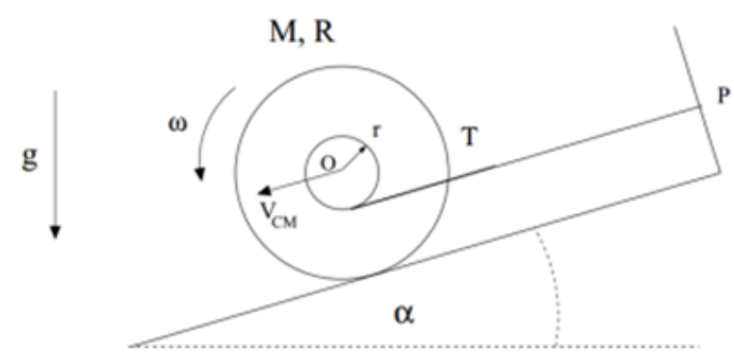
$$\alpha = \frac{(m_3 - m_1)r_1}{[I + r_2^2(m_2 + m_4) + r_1^2(m_1 + m_3)]} g$$

y $m_3 > m_1$

y como $\alpha > 0$, $a_4 < 0$ y el cuerpo se mueve hacia abajo.

Ejemplo 8

Considere el cilindro de masa M y radio R, que puede desplazarse por un plano inclinado de ángulo α como se muestra en la figura abajo. El cilindro tiene una garganta de radio r en la cual está amarrada una cuerda que en el otro extremo está fija en el punto P de dicha figura. Suponga que no hay deslizamiento de la cuerda con respecto a la garganta.

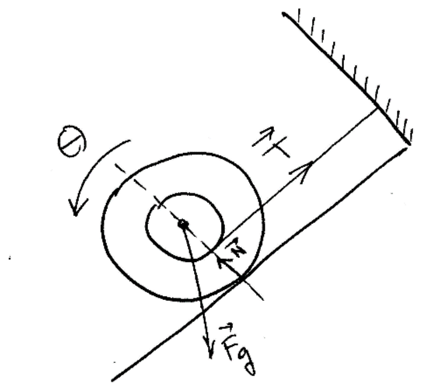


a) Si no hay roce entre el cilindro y el plano, cuando esta rueda plano abajo, ¿Cuál es la aceleración del CM?

b) suponiendo que hay roce entre el cilindro y la superficie, encuentre la condición que debe satisfacer el coeficiente de roce estático para que el cilindro permanezca en reposo.

c) Si el coeficiente de roce estático no satisface la condición del inciso anterior y el cilindro se mueve plano abajo, calcule la aceleración del cilindro y la tensión en la cuerda.

a) Del diagrama y de fuerzas, las ecuaciones para la traslación y rotación quedan como:



Traslación:

$$Mg\sin\theta - T = Ma_{CM} \tag{1}$$

Rotación (en relación al CM):

$$Tr = I\alpha \tag{2}$$

Ecuaciones de ligadura:

$$\Delta x = \Delta s = \Delta\theta\, r$$

$$a_{CM} = \alpha r \tag{3}$$

De (1) y (2)

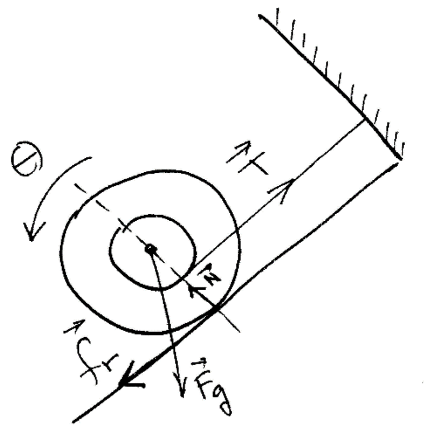
$$Mg\sin\theta - T = Ma_{CM}$$

$$T = \frac{I}{r^2}a_{CM}$$

Sumando obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)}$$

b) Del diagrama de fuerzas teniendo en cuenta el roce,



Traslación:

$$Mg\sin\theta - T + f = 0 \tag{1}$$

Rotación (en relación al CM): [3]

$$Tr - fR = 0 \tag{2}$$

De donde,

$$T = f\frac{R}{r}$$

$$Mg\sin\theta - f\frac{R}{r} + f = 0$$

$$\left(\frac{R}{r} - 1\right)f = Mg\sin\theta$$

Pero $N = mg\cos\theta$ así que,

$$\mu_e \geq \frac{r\tan\theta}{(R - r)}$$

c) el caso en que el cilindro se desplaza las ecuaciones quedan como

Traslación:

$$Mg\sin\theta - T + f = Ma_{CM} \tag{3}$$

[3] Notemos que por la convención de signo que tomamos, la tensión hace torque en el sentido de α y la fuerza de roce contrario.

Rotación (en relación al CM):

$$Tr - fR = I\alpha \tag{4}$$

Ecuación de ligadura

$$\Delta s = r\Delta\theta \quad \Longrightarrow \quad a_{CM} = r\alpha \tag{5}$$

Eliminando T de (3) y (4),

$$Mg\sin\theta + f - f\frac{R}{r} = Ma_{CM} + \frac{I}{r^2}a_{cM} \tag{6}$$

Notemos que a diferencia del problema (1) en este problema la fuerza de roce alcanza su valor máximo i.e., $f = \mu_d N = \mu_d Mg\cos\theta$ y (6) se escribe como:

$$a_{CM} = \frac{(\sin\theta + \mu_d\cos\theta - \mu_d\cos\theta\frac{R}{r})}{(1 + \frac{R^2}{2r^2})}g \tag{7}$$

$$a_{CM} = (\sin\theta + \mu_d\cos\theta - \mu_d\cos\theta\frac{R}{r})\left(\frac{2r^2}{2r^2 + R^2}\right)g \tag{7}$$

Y de (3)

$$Mg\sin\theta + \mu_d Mg\cos\theta - Ma_{CM} = T$$

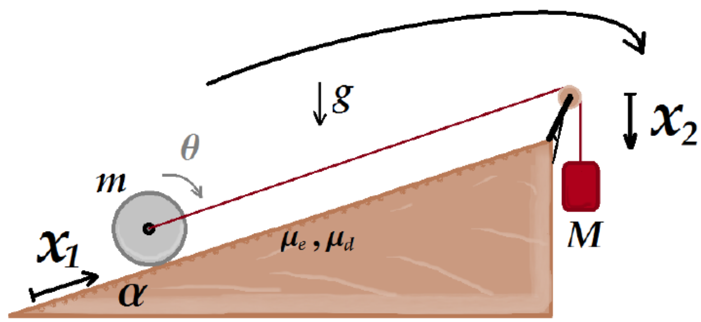
$$T = Mg\sin\theta + \mu_d Mg\cos\theta - M\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta - \mu_d\cos\theta\frac{R}{r}\right)\left(\frac{2r^2}{2r^2 + R^2}\right)g$$

$$T = Mg\left[\left(\frac{R^2}{2r^2 + R^2}\right)\sin\theta + \mu_d\cos\theta\left(\frac{R^2}{2r^2 + R^2}\right) + \mu_d\cos\theta\left(\frac{2Rr}{2r^2 + R^2}\right)\right]$$

$$T = Mg\left[\sin\theta + \mu_d\cos\theta\left(1 + \frac{2r}{R}\right)\right]\left(\frac{R^2}{2r^2 + R^2}\right)$$

Ejemplo 9

Un disco macizo de masa m y radio R está unido a un bloque de masa M por una cuerda ideal enrollada a su centro de masa y que pasa por una polea ideal sin masa (figura abajo). Asuma que el disco rueda sin deslizar, y asuma también que el sistema se mueve hacia la derecha de la figura como se indica. Utilice el sistema coordenado de la figura.



a) Llamando f a la fuerza de roce y T a la tensión en la cuerda, escriba las ecuaciones de Newton para ambos cuerpos.

b) Obtenga la aceleración del bloque de masa M

Resp/

a) Definidas las variables en el problema realicemos el diagrama de fuerzas

Traslación

Cuerpo de masa m $$T - f - mg\sin\theta = ma \quad (1)$$

Cuerpo de masa M $$-T + Mg = Ma \quad (2)$$

Rotación (en relación al eje de rotación)

Cuerpo de masa m
$$fR = I\alpha \tag{3}$$

Ecuación de ligadura

$$\Delta s = R\Delta\theta \quad \Longrightarrow \quad a = R\alpha \tag{4}$$

Sumando (1) y (2) y de (3) y (4) con $I = mR^2/2$

$$-f + Mg - mg\sin\theta = (m + M)a \tag{5}$$

$$fR = \frac{MR^2}{2}\alpha \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{M}{2}a$$

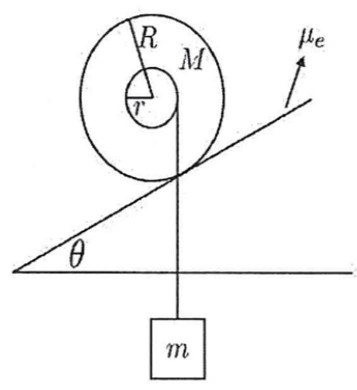
Substituyendo f en (5)

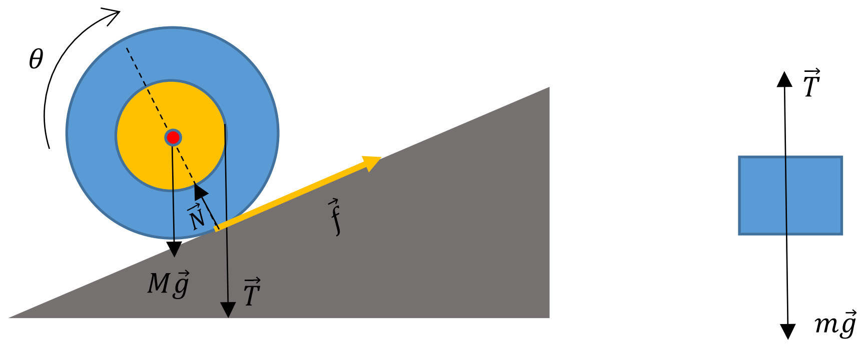
$$-\frac{M}{2}a + Mg - mg\sin\theta = (m + M)a$$

$$a = g\frac{(M - m\sin\theta)}{\left(m + \frac{3M}{2}\right)}$$

Ejemplo 10

Una bobina de masa M consiste en un cilindro central de radio r y dos discos en cada extremo de radio R. Está puesta en una superficie inclinada por la cual puede rodar sin resbalar, y una masa m cuelga de una cuerda enrollada alrededor de la bobina (figura abajo). Si consideramos que el sistema está en equilibrio, el ángulo de inclinación de la superficie es





Traslación

Cuerpo de masa M
Eje x

$$-T\sin\theta + f - Mg\sin\theta = Ma_M \quad (1)$$

Cuerpo de masa m

$$-T + mg = ma_m \quad (2)$$

Rotación (en relación al eje de rotación)

Cuerpo de masa m

$$-fR + T\cos\theta\, r = I\alpha \quad (3)$$

En equilibrio, las ecuaciones son:

$$-T\sin\theta + f - Mg\sin\theta = 0 \quad (I)$$

$$-T + mg = 0 \quad (II)$$

$$-fR + T\cos\theta\, r = 0 \quad (III)$$

de donde con (II) en (I) y (III) obtenemos:

$$-mg\sin\theta + f - Mg\sin\theta = 0$$

$$-fR + mg\cos\theta\, r = 0$$

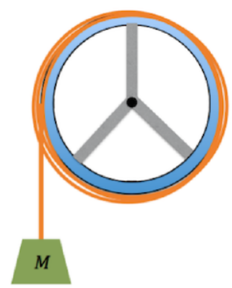
Y substituyendo $f = \frac{mg\cos\theta r}{R}$ en la primera de estas dos últimas ecuaciones,

$$-mg\sin\theta + \frac{mg\cos\theta\ r}{R} - Mg\sin\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{m}{(m+M)}\frac{r}{R}$$

Ejemplo 11

Una rueda, compuesta por un aro de masa M y radio L, y 3 barras de masa M y largo L, que forman ángulos de 120° entre ellas, tal como se muestra en la figura, puede girar libre de roce respecto al eje perpendicular que pasa por su centro. Una cuerda de masa despreciable está enrollada en la rueda y un bloque M está atado en el otro extremo.



a) ¿Cuál es el momento de inercia en relación a al eje de rotación?

b) Si en cierto instante el sistema se deja evolucionar en el tiempo, calcule la aceleración del bloque de masa M.

c) calcule el momento angular del sistema cuando la rueda ha girado una vuelta completa

d) Determine la rapidez cuando haya recorrido una distancia h

Resp/

a) El momento de inercia es la suma de los momentos de inercia de los componentes del sistema,

$$I = I_{aro} + 3I_{barras}$$

$$I = ML^2 + 3\frac{1}{3}ML^2 = 2ML^2$$

b)

Ecuaciones

Traslación

$$-T + Mg = Ma$$

Rotación

$$TL = I\alpha$$

Ligadura,

$$a = L\alpha$$

De donde,

$$Mg = Ma + 2Ma$$

$$a = \left(\frac{1}{3}\right) g$$

c) El momento angular del sistema es la suma del momento angular de la rueda y el bloque

$$L = L_{rueda} + L_{bloque}$$

$$L = I\omega + rMv\sin\theta = I\omega + L\,Mv = (I + ML^2)\omega$$

donde r es la distancia del eje al bloque.

Después de una vuelta completa,

$$\omega^2 = 2\alpha\Delta\theta = 4\pi\frac{a}{L} = \frac{4\pi}{3}\frac{g}{L}$$

$$L = 3ML^2\sqrt{\frac{4\pi}{3}\frac{g}{L}}$$

d)

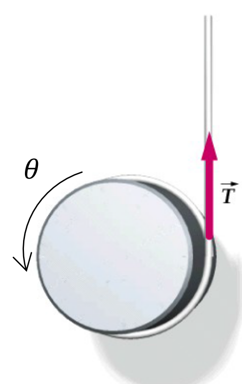
$$v^2 = 2ah = 2\frac{gh}{3}$$

$$v = \sqrt{2\frac{gh}{3}}$$

Ejemplo 12

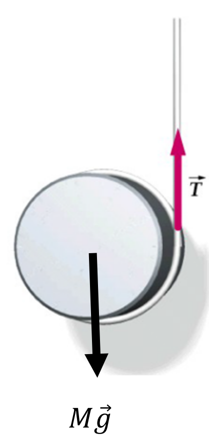
a) Si la cuerda que envuelve el cilindro es sostenida por una persona que acelera su mano hacia

Un cilindro uniforme de masa M y radio R tiene arrollada una cuerda a su alrededor, tal como muestra la figura. Considerar que la cuerda no desliza sobre la superficie del cilindro.



arriba sin que se mueva el CM del cilindro, ¿Cuánto vale la aceleración angular del cilindro?

b) Supongamos ahora que sostenemos la cuerda con la mano quieta y el cilindro cae verticalmente. ¿Cuánto vale la aceleración angular del cilindro.



a) Ecuaciones

Traslación

$$T = Mg$$

Rotación

$$TR = \frac{MR^2}{2}\alpha$$

Entonces,

$$\alpha = \frac{2g}{R}$$

b) Ecuaciones

Traslación

$$-T + Mg = Ma \qquad (1)$$

Rotación

$$TR = \frac{MR^2}{2}\alpha \qquad (2)$$

Ligadura,

$$\Delta s = \Delta y = R\Delta\theta$$

$$a = \alpha R \qquad (3)$$

Eliminando T de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$a = \frac{2}{3}g \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$$

Ejemplo 13

Se tiene un tambor de radio r y masa despreciable que rota sin roce. El tambor está conectado a cuatro esferas de masa m cada una. La distancia entre el centro del tambor y cada esfera es R. Una caja está unida a una cuerda delgada y ligera que se enrolla en el borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la cuerda se desenrolla sin deslizarse y la caja adquiere una rapidez V después de caer una distancia d. Si la distancia entre cada esfera y el tambor se acorta a $R/2$, la rapidez de la caja después de caer una distancia d:

Resp/

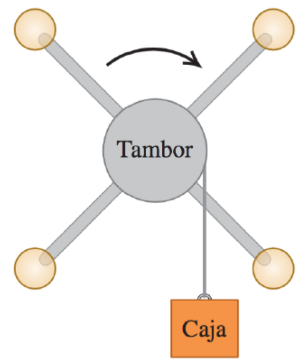
(a) es mayor que V, pero no necesariamente igual a $2V$

(b) es mayor que V e igual a $2V$

(c) es menor que V, pero no necesariamente igual que $V/2$

(d) es menor que V, e igual a $V/2$

(e) es igual a V



Traslación

$$-T + Mg = Ma \tag{1}$$

Rotación

$$Tr = I\frac{a}{r} \tag{2}$$

Como el tambor y las barras tienen masas despreciables el momento de inercia es

$$I = 4mR^2$$

Y

$$Mg = M\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)a$$

$$a = \frac{g}{\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)}$$

La velocidad al recorrer una distancia d será

$$v = \sqrt{2ad}$$

Si la distancia entre las bolas y el centro de tambor es R,

$$a_1 = \frac{g}{\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)}$$

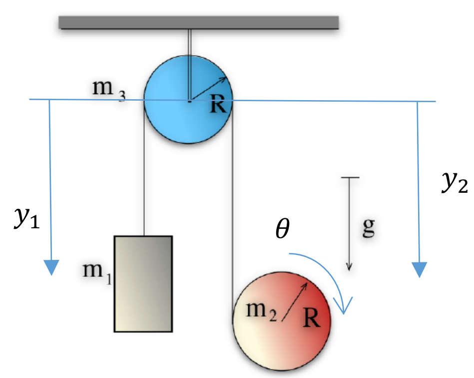
Si la distancia entre las bolas y el centro de tambor es $R/2$,

$$a_2 = \frac{g}{\left(1 + \frac{I}{4Mr^2}\right)}$$

En este caso sólo podemos decir que $a_2 > a_1$ y en este caso que $v_2 > v_1$ y la respuesta correcta es el inciso a).

Ejemplo 14

Considere el sistema de la figura que consiste en un bloque de masa $m_1 = m$, que se puede mover verticalmente, que está ligado a un cilindro macizo y homogeneo de masa $m_2 = 3m$ y radio R, mediante una cuerda que pasa por la polea ideal ($m_3 = 0$), sujeta al techo. La cuerda enrolla al cilindro de masa m_2 como lo indica la figura.

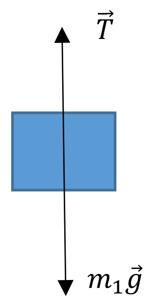


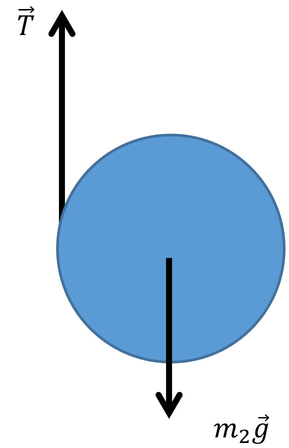
a) Calcular la tensión en la cuerda

b) Calcular las aceleraciones de los bloques.

Resp/

Identifiquemos las fuerzas y variables involucradas.





Escribamos las ecuaciones

Traslación

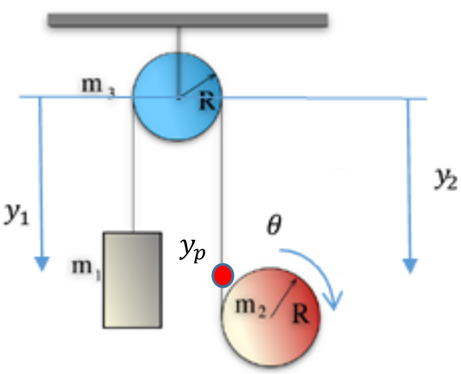
Cuerpo de masa m_1 $$-T + m_1 g = m_1 a_1 \tag{1}$$

Cuerpo de masa M $$-T + m_2 g = m_2 a_2 \tag{2}$$

Rotación (en relación al eje de rotación)

Cuerpo de masa m $$TR = I\alpha \tag{3}$$

Ecuación de ligadura



$$y_1 + y_p = l \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_p$$

$$y_2 = y_p + \Delta s = y_p + \Delta\theta R$$

i.e.,

$$a_2 = a_p + \alpha R$$

Y la ecuación de ligadura es

$$a_2 = -a_1 + \alpha R \tag{4}$$

De (1), (2) y (3)

$$-\frac{T}{m_1}+g=a_1$$

$$-\frac{T}{m_2}+g=a_2$$

$$\frac{2T}{m_2}=\alpha R$$

Y de la ecuación de ligadura, $a_2+a_1-\alpha R=0$

$$-\frac{T}{m_1}+g-\frac{T}{m_2}+g-\frac{2T}{m_2}=0$$

$$T=2g\frac{m_1 m_2}{3m_1+m_2}$$

Con $m_1=m$ y $m_2=3m$

$$T=mg$$

b) Con esto,

$$-\frac{mg}{m}+g=a_1=0$$

$$-\frac{g}{3}+g=a_2$$

$$a_1=\frac{2g}{3}$$

Ejemplo 15:

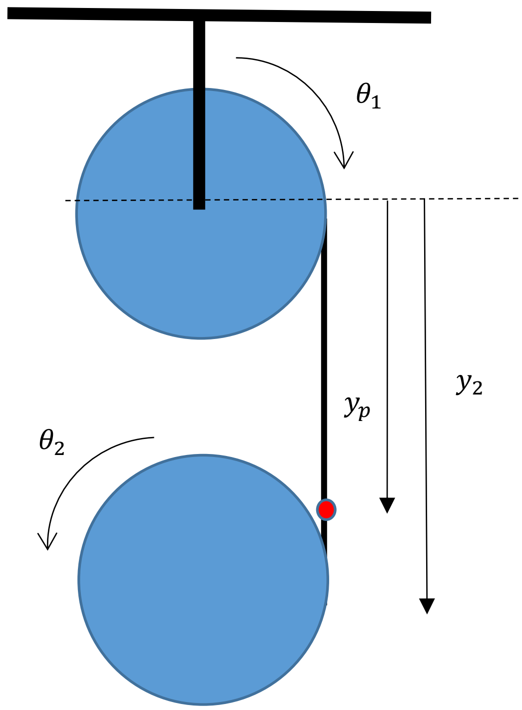
Los dos discos mostrados en la figura tienen masa m y radios iguales R. El disco superior puede rotar libremente en torno a su eje mientras una cuerda se encuentra enrollada alrededor de los mismos.

Encuentre

a) La aceleración del CM del disco inferior

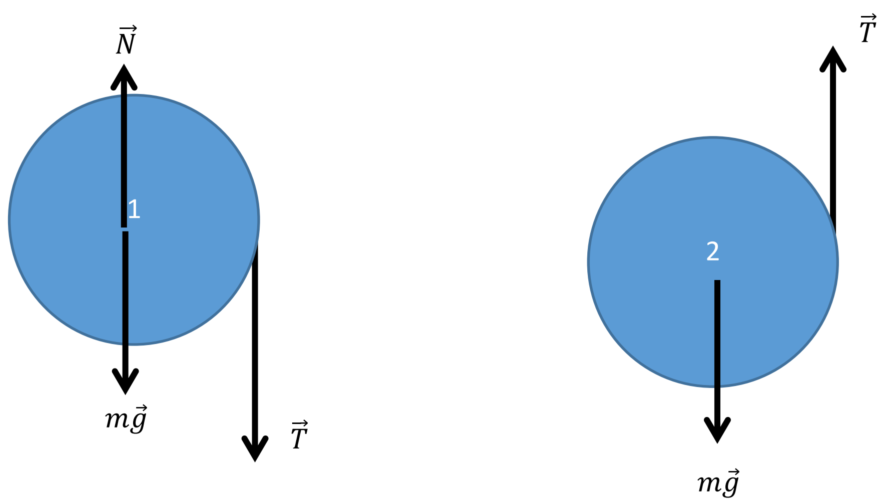
b) La tensión en la cuerda

c) La aceleración del disco alrededor de su CM.



Resp/

Diagrama de fuerzas



Ecuaciones

Escribamos las ecuaciones

Traslación

Disco 2 $$-T + mg = ma_2 \tag{1}$$

Rotación (en relación al eje de rotación)

Disco 1 $$TR = I\alpha_1 \tag{2}$$

Disco 2 $$TR = I\alpha_2 \tag{3}$$

Notemos que como los discos son iguales, $\alpha_1 = \alpha_2$

Ecuaciones de ligadura

$$\Delta y_p = \Delta\theta_1 R \tag{4}$$

$$\Delta y_2 = \Delta y_p + \Delta\theta_2 R \tag{5}$$

De donde,

$$a_2 = 2\alpha R \tag{6}$$

De (1) y (2), con la ecuación de ligadura

$$-T + mg = ma_2$$

$$T = I\frac{a}{2R^2}$$

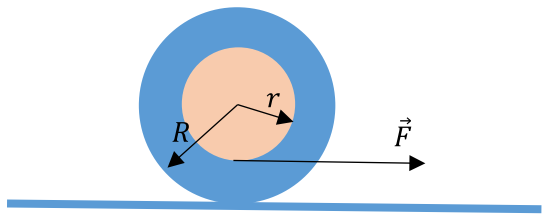
Entonces

$$a = \frac{g}{\left(1 + \frac{I}{2mR^2}\right)}$$

$$a = \frac{4g}{5}$$

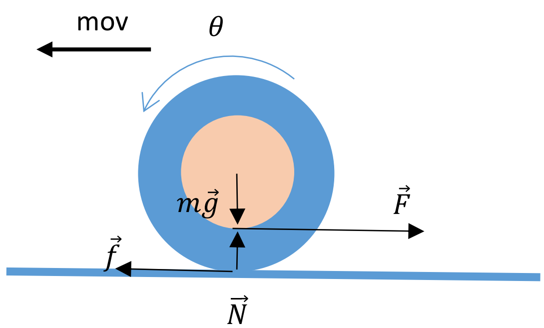
Ejemplo 16

Para el sistema mostrado en la figura, calcule la aceleración del centro de masa.



Resp/

Diagrama de cuerpo libre



Notemos que "intuitivamente" hemos supuesto que el rodillo se mueve hacia atrás. Las ecuaciones finales nos dirán el sentido correcto.

Ecuaciones

Traslación $$-F + f = ma \qquad (1)$$

Traslación $$N - mg = 0$$

Rotación $$Fr - fR = I\alpha \qquad (2)$$

Ecuación de ligadura $$a = \alpha R \qquad (3)$$

De las ecuaciones escribimos:

$$-F + f = ma$$

$$F\frac{r}{R} - f = \frac{ma}{2}$$

Sumando obtenemos

$$F\frac{r}{R} - F = \frac{3ma}{2}$$

y

$$a = -\frac{2F}{3m}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

El signo nos indica que el rodillo se moverá hacia la derecha, en el sentido contrario al tomado.

La fuerza de roce es,

$$f = F + ma = F - \frac{2}{3}F + \frac{2}{3}F\frac{r}{R}$$

$$f = \frac{F}{3}\left[1 + 2\frac{r}{R}\right]$$

TABLE 9.2 **Moments of inertia for various bodies**