Clase #23

05-11-2018

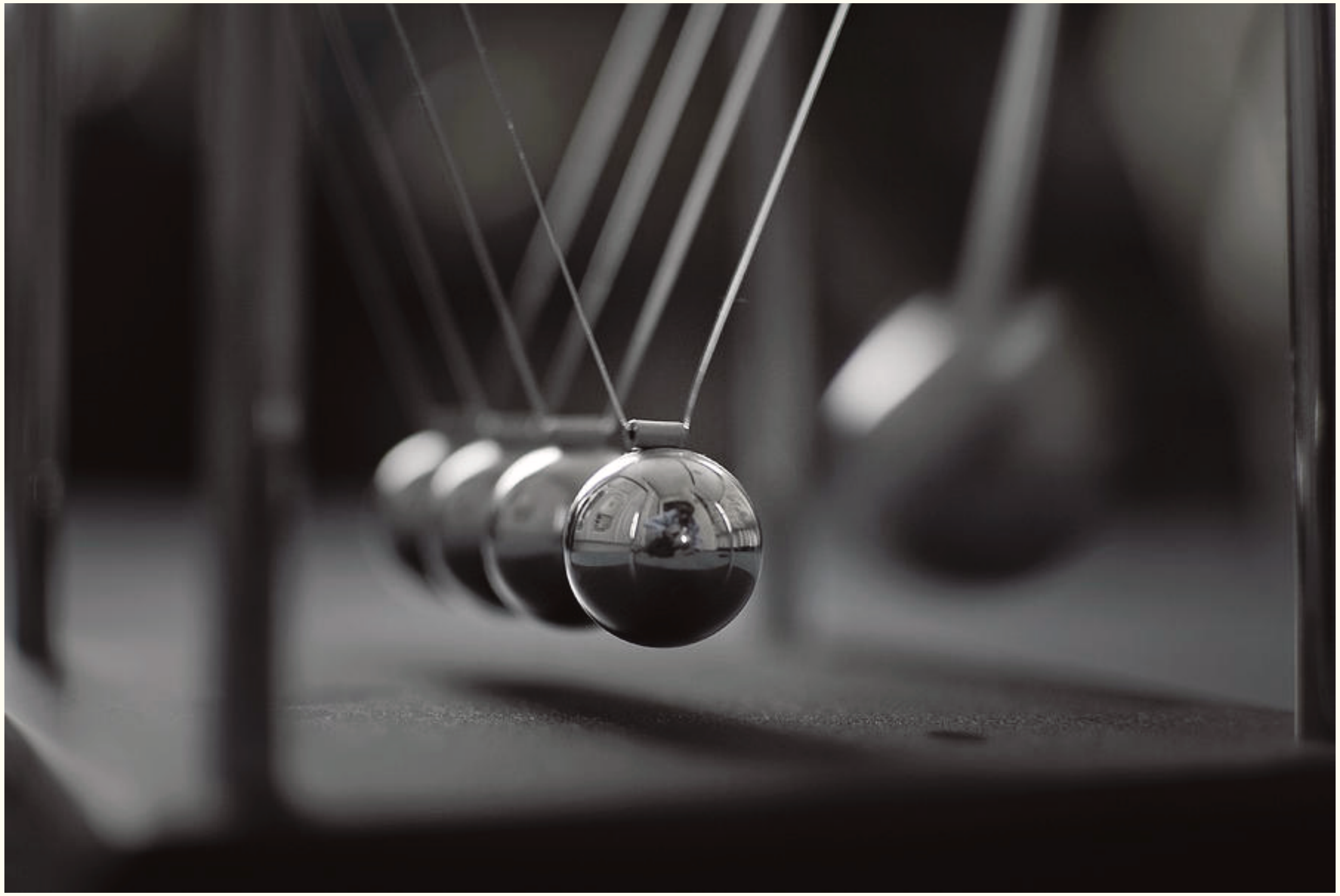
Cuerpo Rígido

Estática y Dinámica

FIS1513

Anuncios

- No hay anuncios….



Cuerpo Rígido: Cinemática Rotacional, Torque y Momento de inercia

Para toda esta parte es mejor el Young & Freedman, Capítulos 9-10.

9

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

? Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un

10

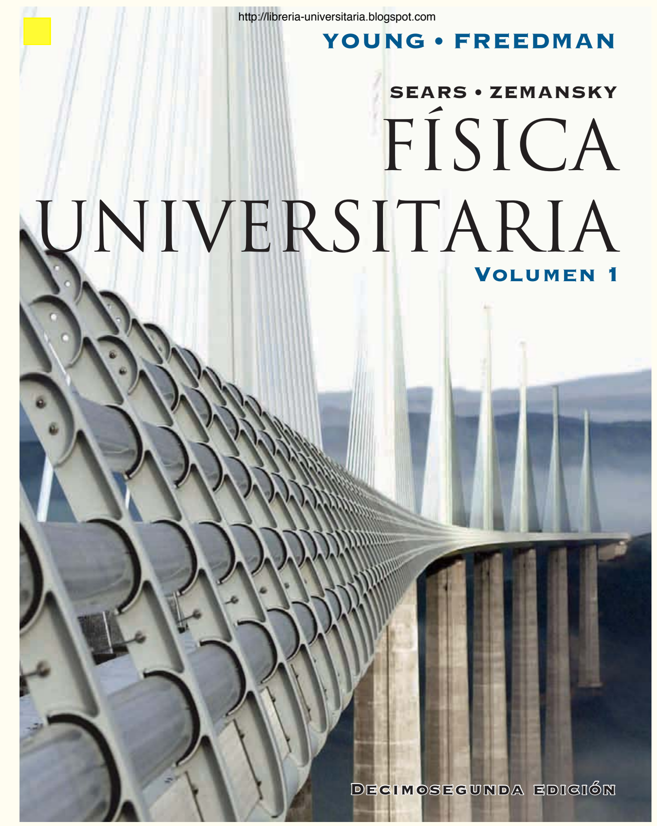
DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.

? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



Específicamente:

Cinemática Rotacional: 9.1-9.2
Momento de Inercia: 9.4-9.6
Torque: 10.1 (y/o Hibbeler 4.1-4.3)

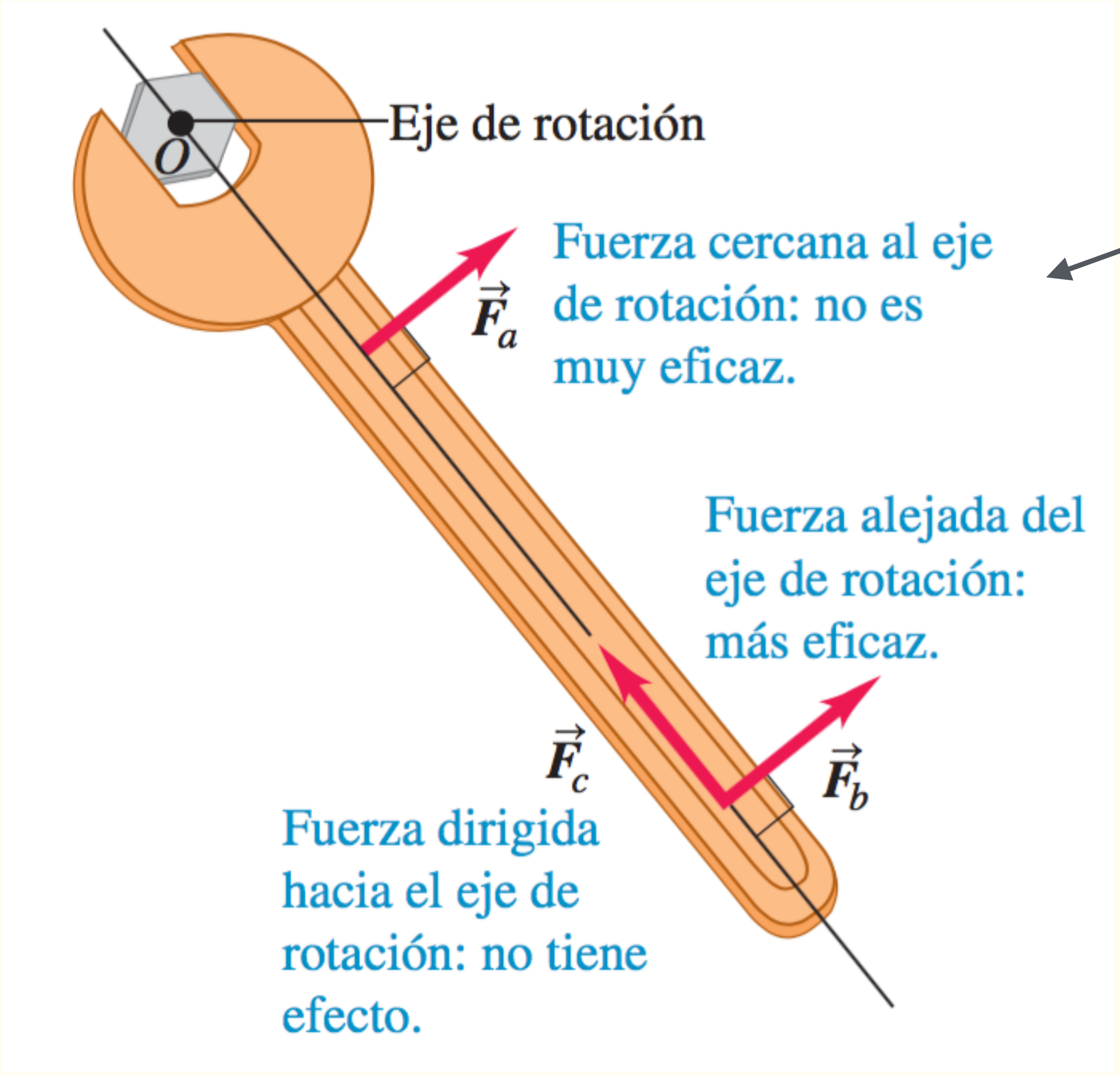
Torque

Para causar una aceleración en translación se necesita una fuerza. ¿Cómo causar una aceleración angular?

¡Se requiere un torque!

¿Qué es un torque?

El torque es la medida de la efectividad de una fuerza para causar una rotación respecto a un cierto punto



¿De qué depende?

Supongamos que queremos aflojar un tornillo apretado con una llave inglesa

Tendremos más éxito si:

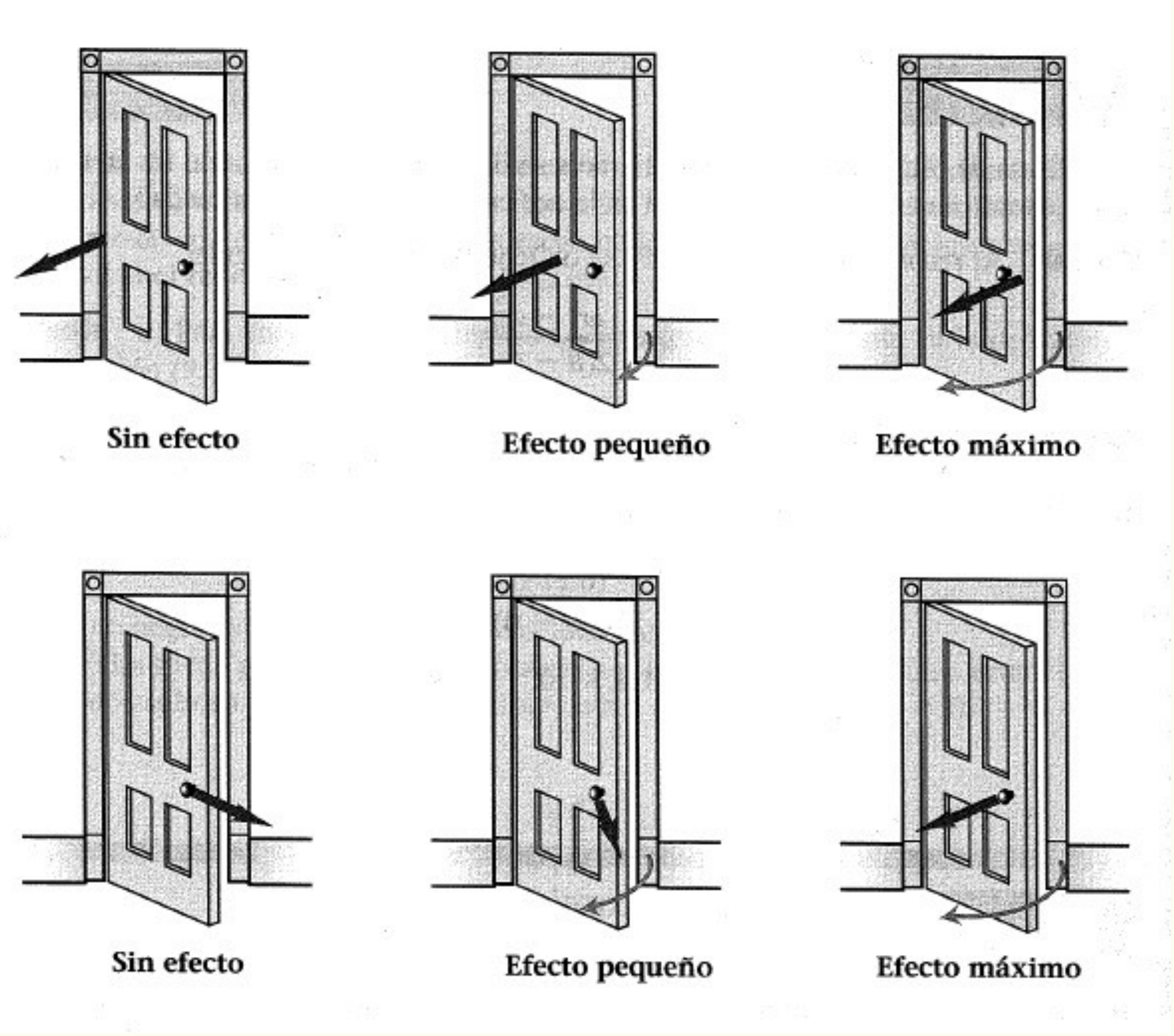
(i) Aplicamos la fuerza más lejos del eje de rotación

(ii) Aplicamos la fuerza en dirección perpendicular a la línea imaginaria que une el punto de aplicación con el eje de rotación

Torque

La experiencia nos muestra lo mismo en el caso de una puerta.

Para alcanzar el efecto máximo no sólo hay que incrementar la magnitud de la fuerza, sino aplicar la fuerza lo más lejos de las bisagras que sea posible y en dirección perpendicular a la puerta



Torque

Matemáticamente el torque se define como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Torque

Posición del punto de aplicación de la fuerza desde el eje de rotación

Fuerza que causa el torque

Comentarios:

1) **Las unidades del torque son Nm (es decir kgm²/s²)**

Son las mismas unidades que para trabajo y energía, aunque son conceptos muy diferentes. Aparte, el trabajo y la energía son escalares.

2) **El torque es un vector**

La dirección es perpendicular al plano de la posición y de la fuerza.

3) **Tanto la dirección como el sentido del torque se determinan fácilmente con la regla de la mano derecha**

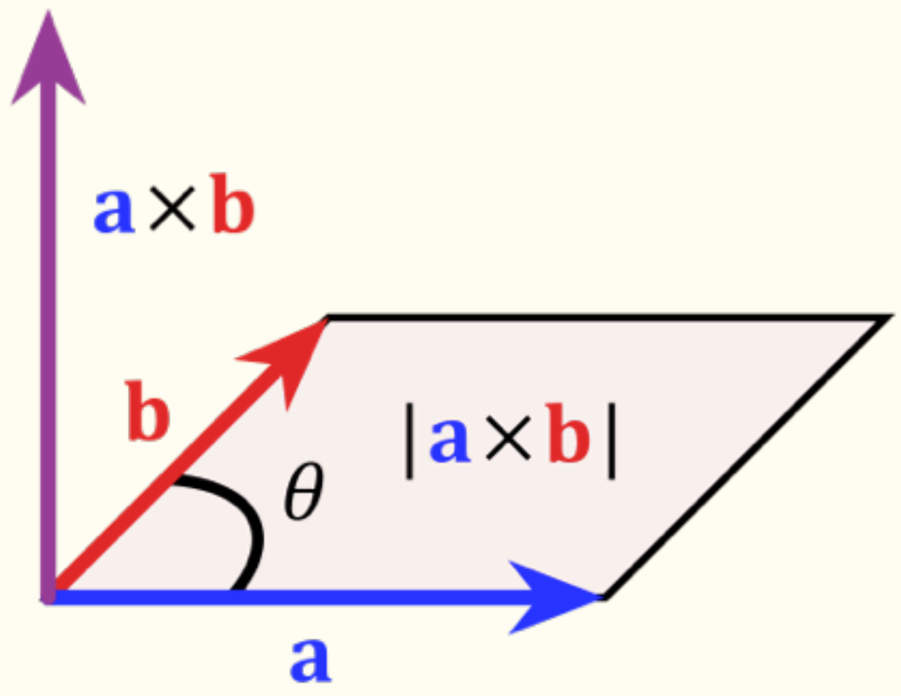
Ver dos diapositivas más adelante

4) **Al torque también se le llama “torca”, “momento de torsión”, o “momento de la fuerza”**

Recordatorio: Producto Cruz

Recordatorio:

El producto cruz entre dos vectores da como resultado otro vector, pero perpendicular al plano de los dos vectores originales



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\theta \ \mathbf{n}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

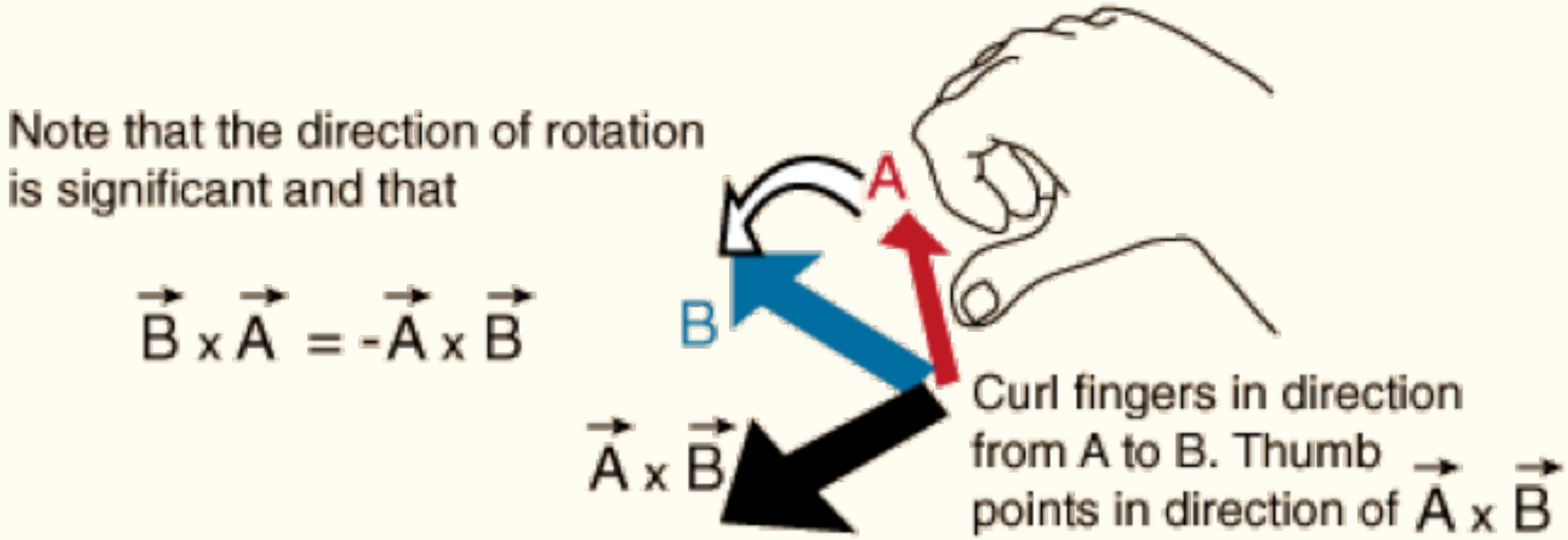
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

(recordatorio: cantidades en negritas son vectores)

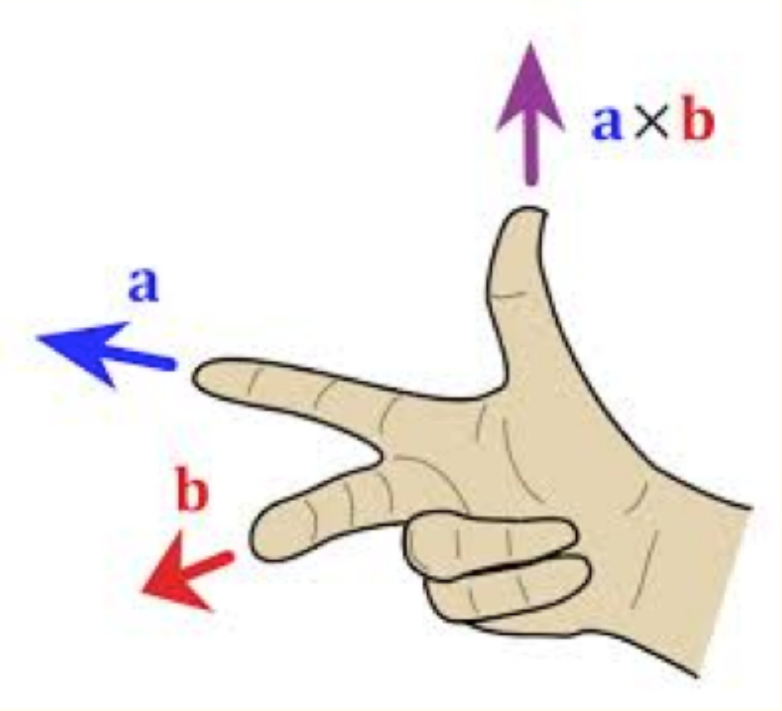
Recordatorio: Regla de la Mano Derecha

Para determinar la dirección del vector resultante de un producto cruz se utiliza la regla de la mano derecha. Hay varias formas de implementarla

forma #1

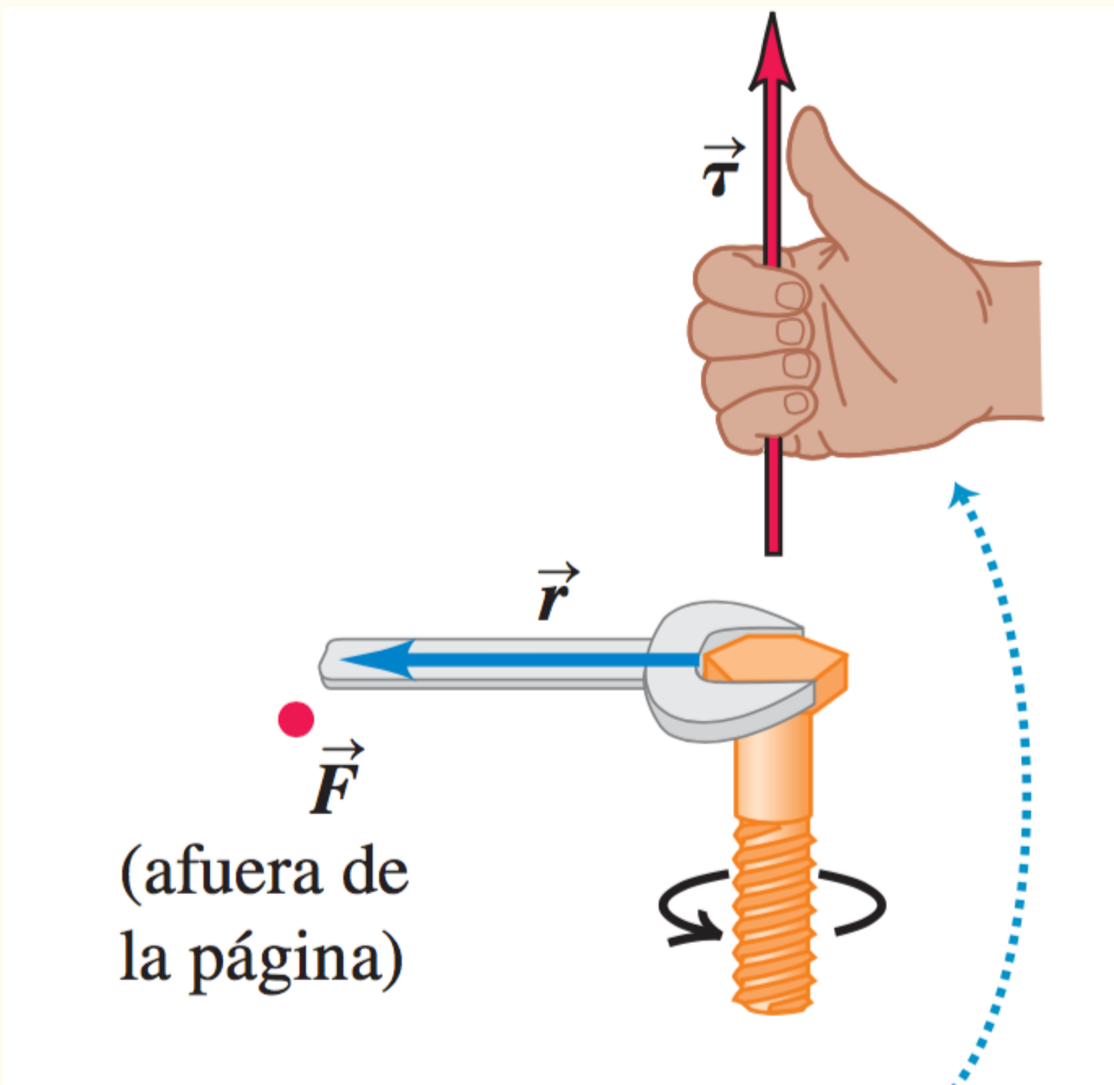


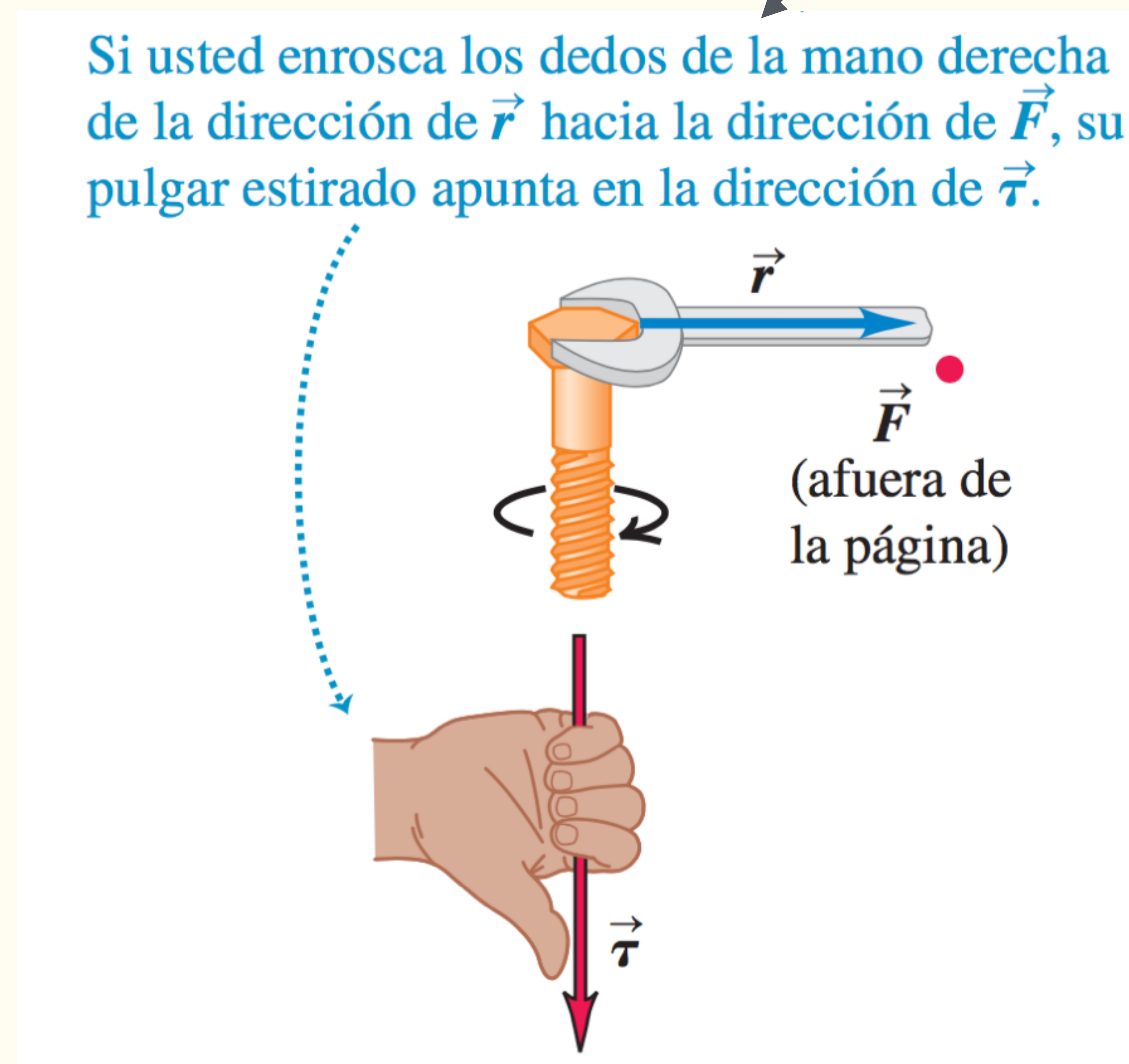
forma #2



Ejemplos

Nota: esta descripción corresponde a la forma #1 de la diapositiva pasada





Los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de rotación que el torque causa

Concepto de Brazo de Palanca

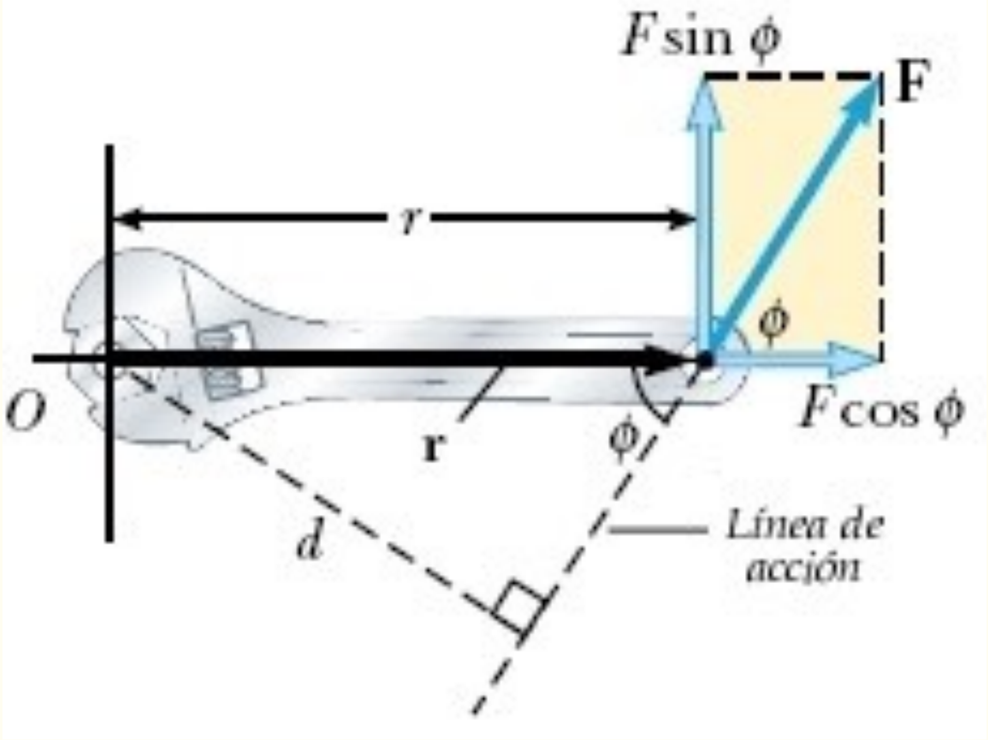
Por lo general en problemas de 2 dimensiones es mejor utilizar el concepto de "brazo de palanca" al calcular torque que resolver el producto cruz:

En general es cierto que:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\phi$$

por lo que:

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{r}\right|\sin\phi$$



Por lo que podemos escribir que $\tau = Fd$

magnitud del torque

magnitud de la fuerza

d = r sinϕ es el **"brazo de palanca"**

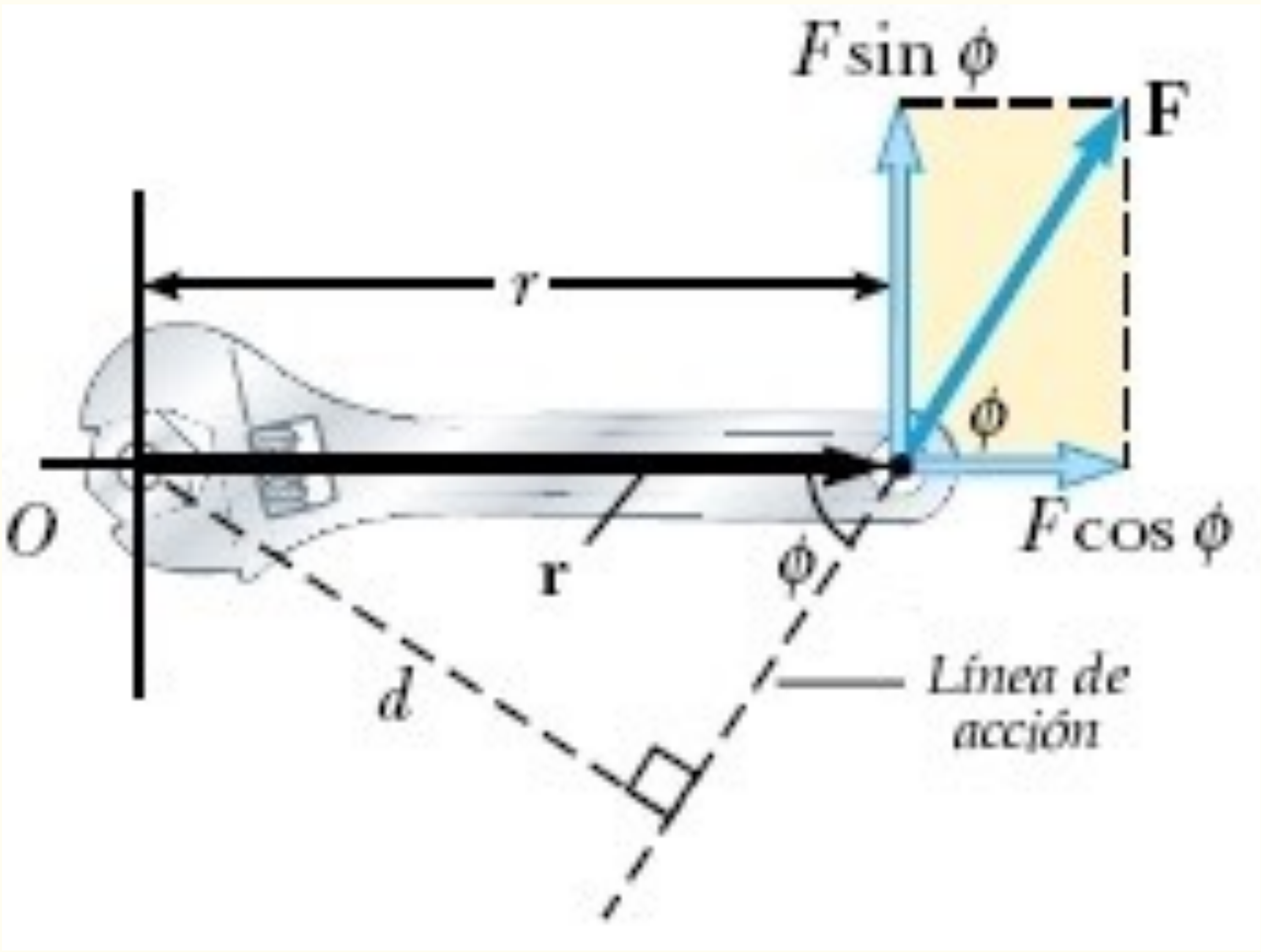
El brazo de palanca es la distancia perpendicular entre el eje de rotación y la línea de acción de la fuerza

Otra forma de ver el torque: componente normal

También se puede hacer lo mismo que en la diapositiva pasada, pero en vez de absorber el sinϕ con el r lo podemos absorber con la fuerza:

$$\tau = r\left(F\sin\phi\right)$$

esta es la componente perpendicular de la fuerza al vector posición.



Por lo que podemos escribir que:

$$\tau = rF_{\perp}$$

magnitud del torque

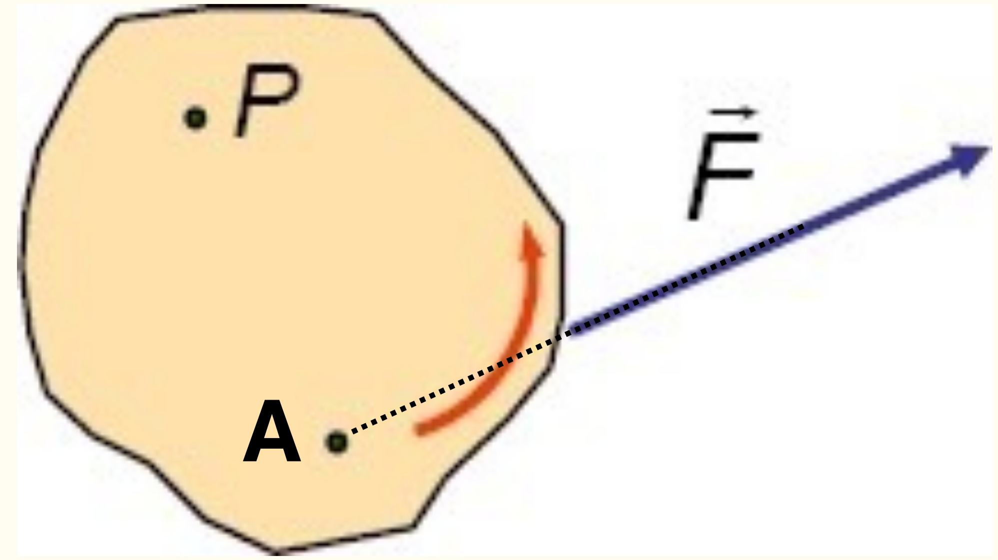
distancia del eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza

$F_{\perp} = F\sin\phi$ es la magnitud de la componente perpendicular de la fuerza al vector posición

¿Eje de Rotación?

Para calcular el torque que hace una fuerza se necesita conocer el eje de rotación.

Por ejemplo, no es lo mismo el torque que hace **F** respecto a P que respecto a A (en este último caso el torque es cero)

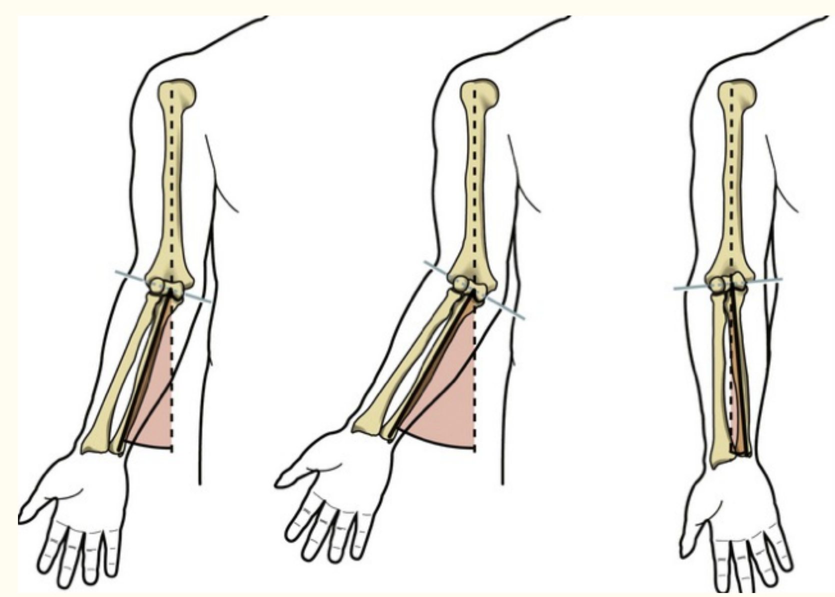


En la mayoría de las aplicaciones ingenieriles, el eje de rotación es un eje fijo respecto al cual el resto del objeto rota (pivote):

En casos como estos hay que calcular los torques respecto a estos ejes fijos

ejemplo: eje de un balancín

ejemplo: codo



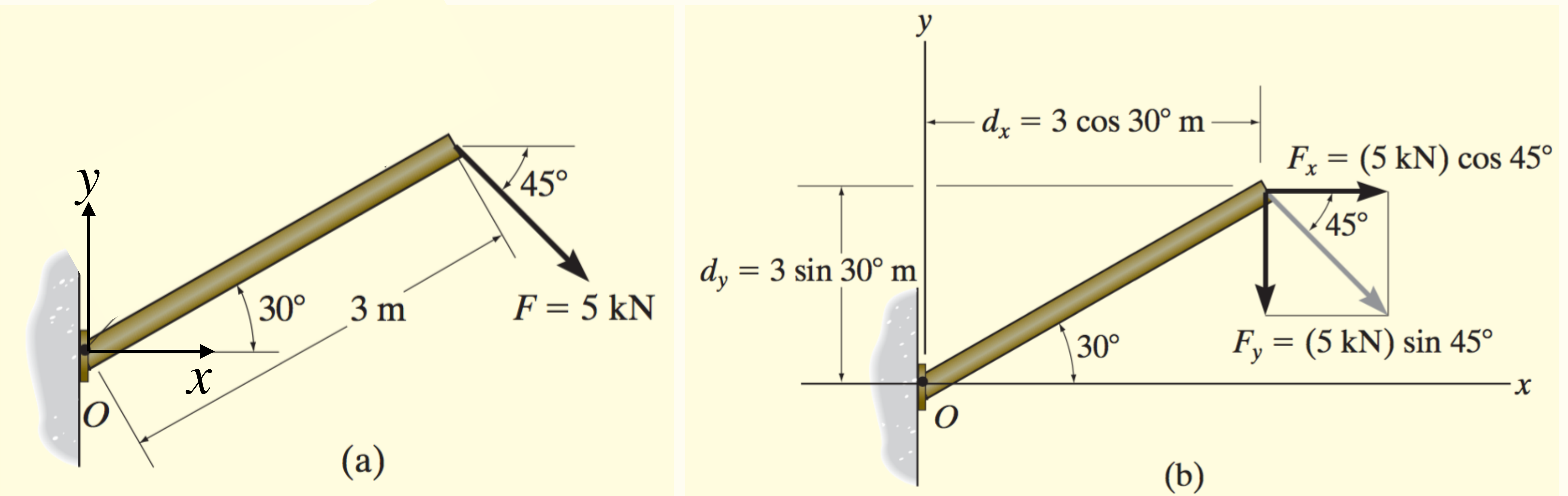
Si el objeto está libre entonces rota respecto a su CM

Experimento

Ejemplo: Torque

(Ejemplo Resuelto 4.5 en el Hibbeler)

Determine el torque que hace la fuerza F respecto al punto O utilizando



(resolver en pizarra)

Respuesta: $-14.5 \text{ kNm } \hat{z}$

Nota: este es un buen ejemplo de como para encontrar el torque lo más fácil es utilizar el concepto de brazo de palanca, ya sea descomponiendo o no la fuerza (casos (b) y (a) respectivamente).

¿Cómo afecta un torque la velocidad angular de un objeto?

Consideremos un cuerpo rígido rotando alrededor del eje z. Sea **F**

$\mathbf{F}_i$ la fuerza neta (suma de internas + externas) que se aplica sobre cada partícula i.

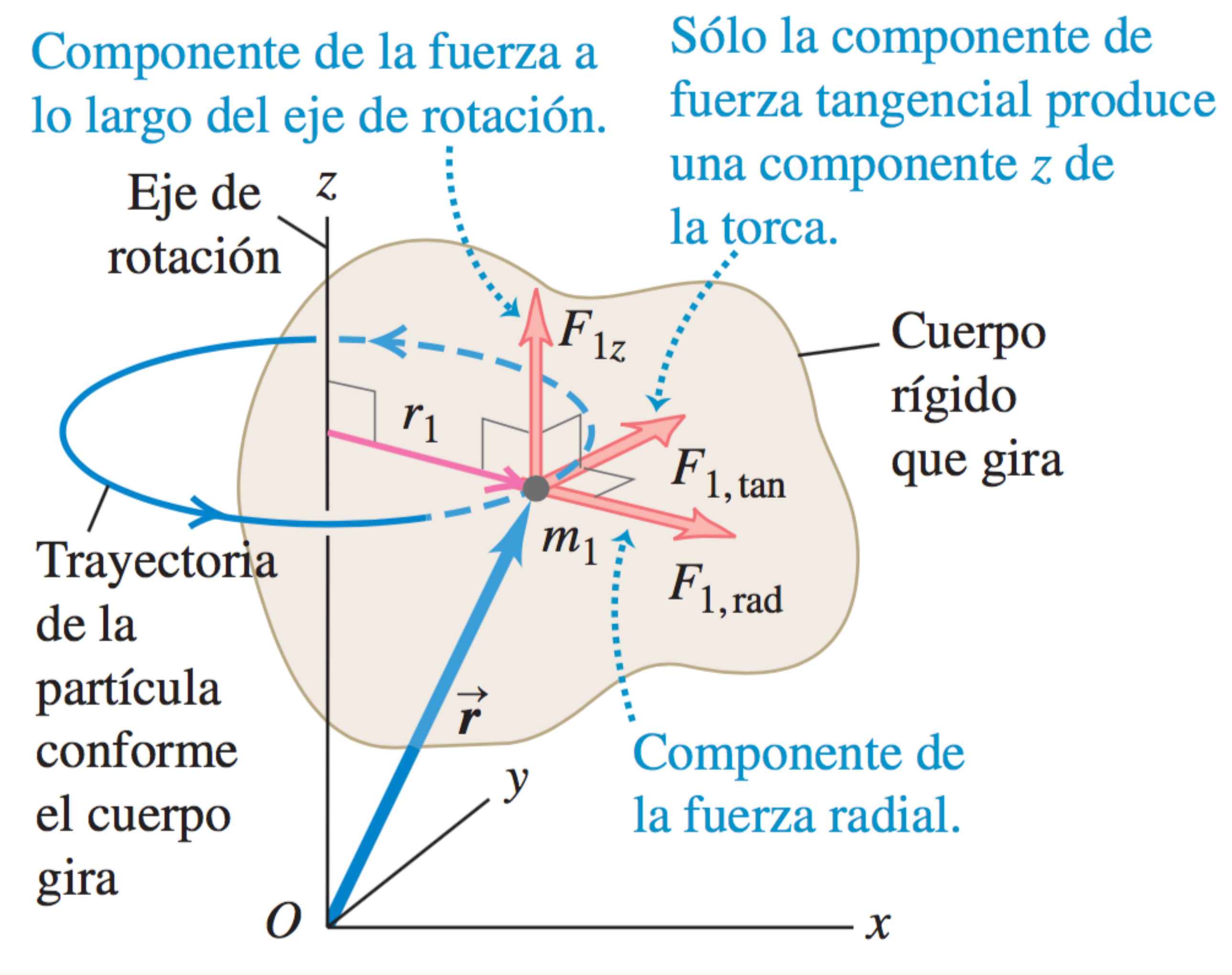
$\mathbf{F}_i$ puede tener componente en cada uno de los 3 ejes (z, tangencial a la rotación, y radial a la rotación).

Si calculamos el torque realizado por **$\mathbf{F}_1$** sobre la partícula 1, la única componente que contribuye en z es la tangencial:

$$\tau_{1z} = F_{1,\tan} r_1$$

Pero de acuerdo a la segunda ley de Newton,

$$F_{1,\tan} = m_1 a_{1,\tan} = m_1 r_1 \alpha_z$$



Remplazando esto en la primera ecuación tenemos que: $\tau_{1z} = m_1 r_1^2 \alpha$

Torque, Velocidad Angular y Momento de Inercia

Si hacemos lo mismo para cada partícula del cuerpo y sumamos nos queda:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \ldots + \tau_{Nz} = \boxed{\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2\right)} \alpha_z$$

Esta es la suma de los torques que actúan sobre todas las partículas

Esta es una cantidad escalar que depende de la forma del objeto, así como de la ubicación y orientación del eje de rotación.

Se le llama **momento de inercia.**

$$I = \sum_{i=1..N} m r_i^2$$

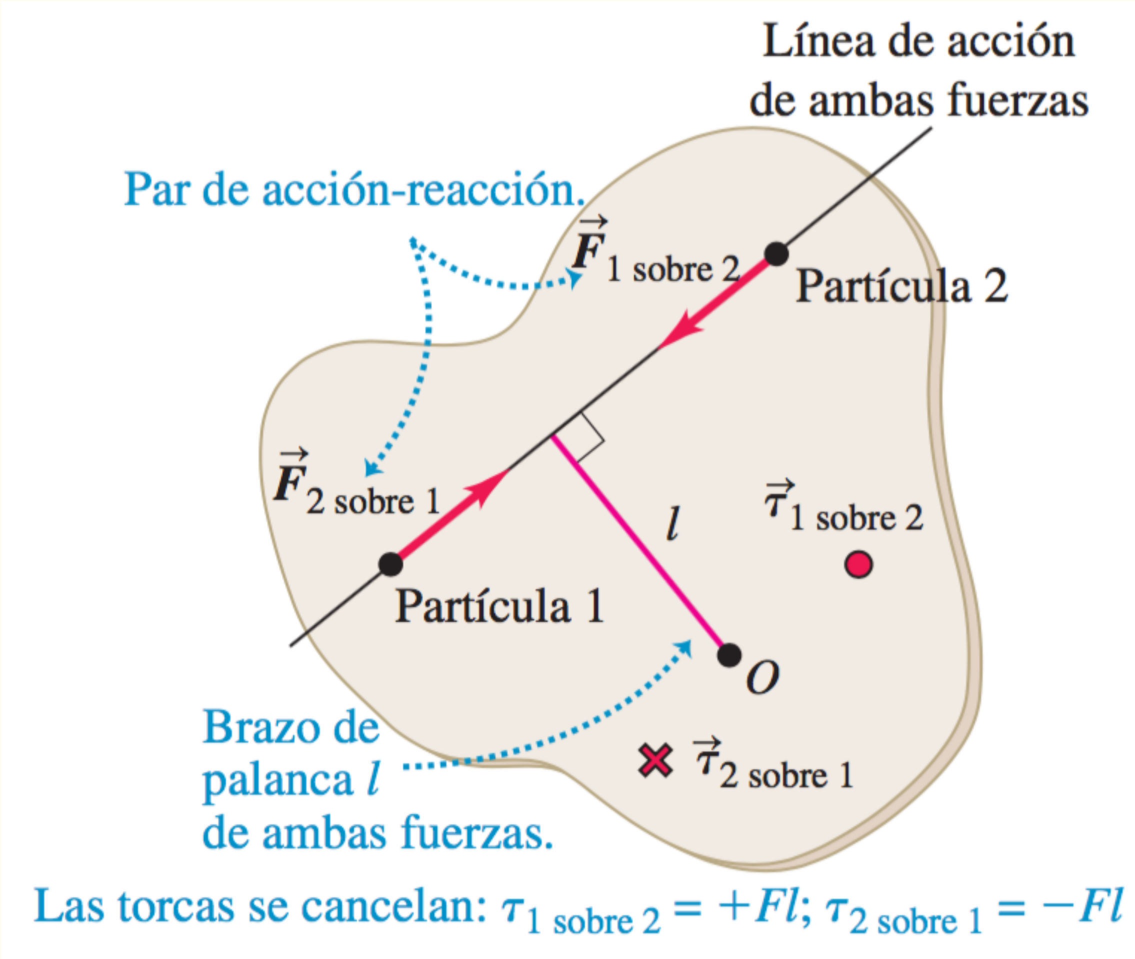
Esto significa que, para una sola partícula, el momento de inercia es $I=mr^2$, donde m es su masa y r es la distancia al eje de rotación.

Para un cuerpo rígido, el momento de inercia es la suma de los momentos de inercia de todas las partículas.

Torque, Velocidad Angular y Momento de Inercia

Del lado izquierdo tenemos la suma **total** de torques. En realidad la partícula #1 hace una fuerza (y por ende un torque) sobre la partícula #2, y etc. Estas son las fuerzas internas.

Sin embargo**,** es fácil ver que en un sistema de muchas partículas, **los torques causados por las fuerzas internas se cancelan** *(siempre y cuando estas fuerzas actúen sobre la línea que va de una partícula a otra, que es siempre)*



Concluimos que en la sumatoria **sólo contribuyen los torques externos**. No hay que preocuparse por los torques que unas partículas del cuerpo hacen sobre las otras.

Concluímos entonces que:

¡este es el análogo a la segunda ley de Newton, pero para rotaciones!

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$$

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido