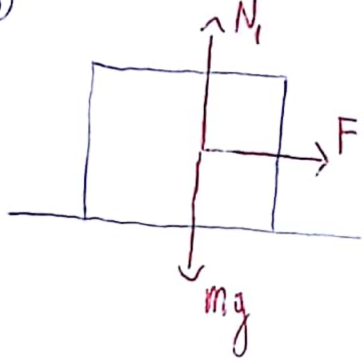
1. Primero dibujaremos el diagrama de cuerpo libre de cada caja. Será clave no olvidarnos de ningún par de acción y reacción.

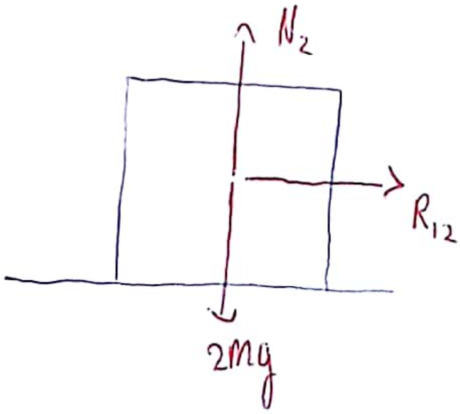
Sobre la caja de la izquierda actúa, a primera vista, la fuerza externa F, el peso (ya que hay gravedad), y una fuerza normal que ejerce el suelo (Si no, la caja traspasaría el suelo y caería)

①

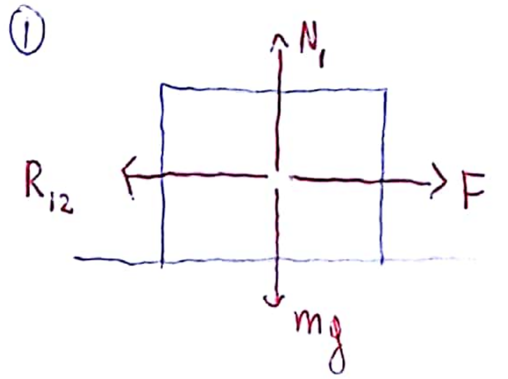


Sobre la caja central actúa el peso y la normal. Dado que la primera caja la está empujando, existe una fuerza R_{12} que ejerce 1 sobre 2 a la derecha.

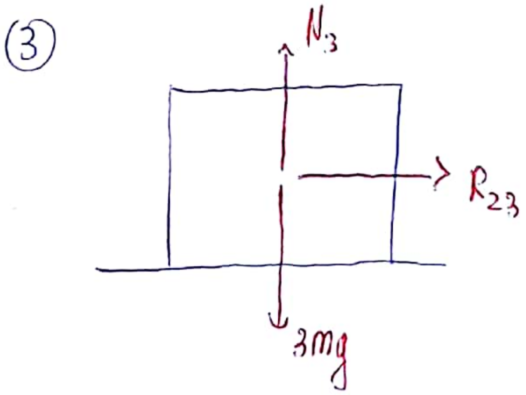
②



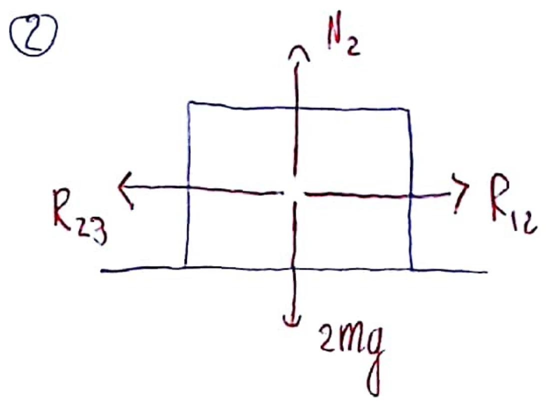
Por acción y reacción, la caja 1 siente una fuerza de igual magnitud pero en sentido opuesto. Así, completando el D.C.L de 1:



La caja 3 siente su peso, la fuerza normal del suelo, y el empuje producto de la caja 2 (R_{23}). Así:



Por lo tanto, completando el diagrama de cuerpo libre de ②



Ahora que tenemos todas las fuerzas, procedemos a aplicar $\vec{F} = m\vec{a}$ sobre cada cuerpo. Podemos utilizar un sistema 

para cada cuerpo. Dado que se mueven juntos, $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = a$.

① $\hat{x}: F - R_{12} = ma$

$\hat{y}: N_1 - mg = 0$

② $\hat{x}: R_{12} - R_{23} = 2ma$

$\hat{y}: \cancel{N_2 - 2mg = 0}$

③ $\hat{x}: R_{23} = 3ma$

$\hat{y}: N_3 - 3mg = 0$

Deducimos inmediatamente que

$$N_1 = mg$$
$$N_2 = 2mg$$
$$N_3 = 3mg$$

Ahora despejamos R_{23} de ③ y R_{12} de ①, para reemplazar en ②.

$$(F - ma) - 3ma = 2ma$$
$$F = 6ma \Rightarrow a = \frac{F}{6m}$$

Luego, como las cajas se mueven juntas y tienen el mismo coeficiente de roce con el suelo (cero), podemos abordar el problema como una gran caja de masa 6m (m+2m+3m) sobre la cual actúa una fuerza F.

Los valores de las reacciones son

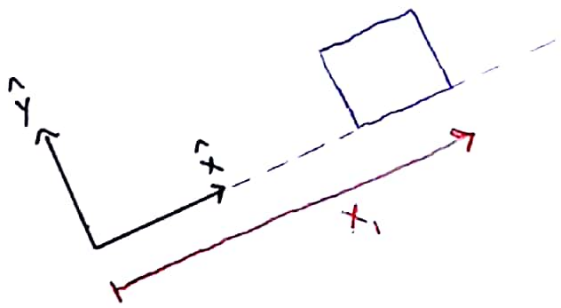
$$R_{12} = F - ma = F - \frac{F}{6} = \frac{5}{6}F$$

$$R_{23} = 3ma = \frac{F}{2}$$

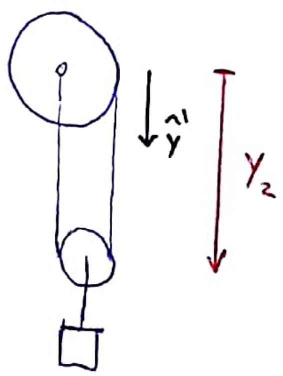
2. a) Tenemos que describir el movimiento de ambas cajas. Para esto, utilizaremos un sistema de coordenadas que se ajuste a cada caso.

↳ Elegiré un sistema de coordenadas en que el movimiento del cuerpo sea lo más fácil de describir posible

Para m_1, como se mueve sobre el plano inclinado,

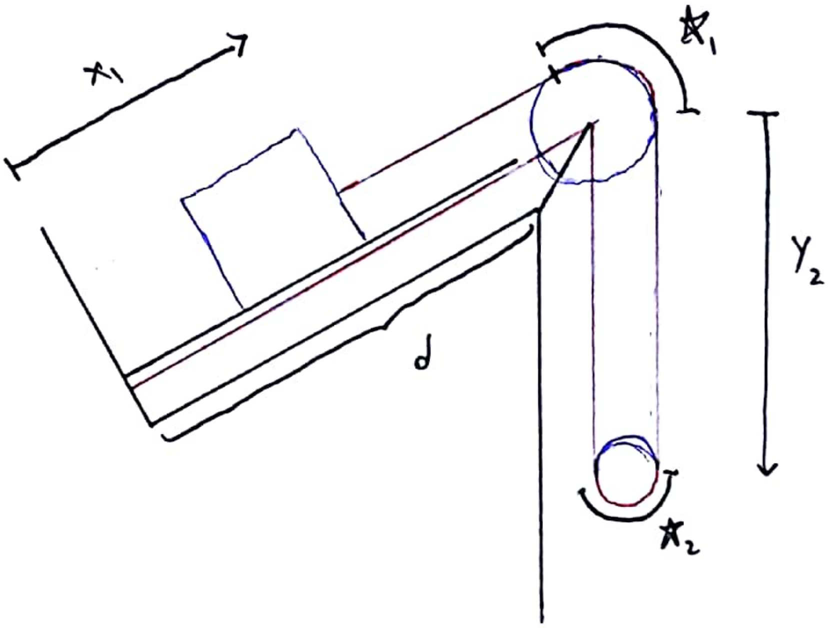


Para m_2, dado que sólo puede subir y bajar,



(Dado que la polea móvil y m_2 siempre están a la misma distancia tendrán la misma velocidad y aceleración. Luego podemos usar la coordenada de la polea móvil para $\vec{F} = m\vec{a}$)

Ahora que hemos parametrizado, tenemos que considerar la restricción (Ligadura) de la cuerda inextensible.



Los segmentos de cuerda suman:

$$\underline{d} - X_1 + \underline{\star_1} + Y_2 + \underline{\star_2} + Y_2 + \underline{d} = \underline{\ell}^{\,cte} \qquad / \frac{d^2}{dt^2}$$

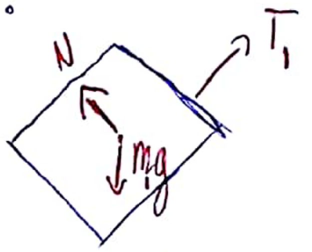
$$\boxed{2\ddot{Y}_2 = \ddot{X}_1} \quad (1)$$

Ahora aplicamos $\vec{F} = m\vec{a}$ sobre cada cuerpo y polea móvil. Notar que:

- En una cuerda ideal, la tensión es la misma en todo punto de ella
- En cada punto de contacto entre una cuerda y un objeto actúa la tensión.

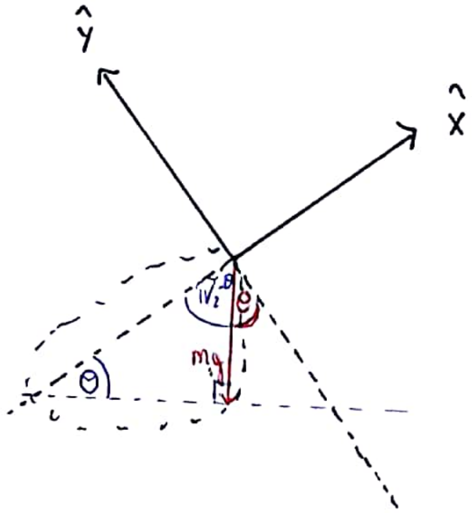
Veamos la fuerza neta en cada cuerpo. Hacemos DCL

m_1:



Puede verse que $\vec{T}_1 = T_1\hat{x}$ y $\vec{N} = N\hat{y}$

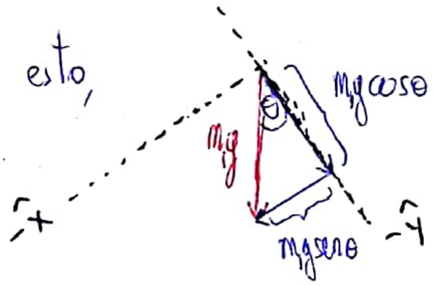
Tenemos que descomponer el peso ($\vec{W}_1$)



Pasos

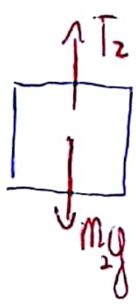
1. Dibujar sistema $\hat{x}, \hat{y}$
2. Dibujar vector peso (↓)
3. Extender ejes xy hacia los negativos (---)
4. Dibujar perpendicular al peso (---)
5. Reconocer θ y $\pi/2 - \theta$ en el triángulo que se forma
6. Reconocer θ

Con esto,



$$\vec{W}_1 = -(mg\,sen\theta\,\hat{x} + mg\cos\theta\,\hat{y}) = -mg(\cos\theta\,\hat{y} + sen\theta\,\hat{x})$$

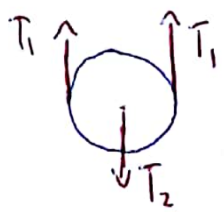
Ahora vemos m_2:



$$\vec{T}_2 = -T_2\hat{y}'$$

$$\vec{W}_2 = m_2 g\hat{y}'$$

Por último, vemos la polea móvil



(Dos puntos de contacto para la primera cuerda)

Haciendo $\vec{F} = m\vec{a}$, como es una polea ideal sin masa, $\vec{F}_{NETA} = 0$

Así, $-2T_1\hat{y} + T_2\hat{y} = 0 \Rightarrow \boxed{T_2 = 2T_1}$ (2)

Ahora hacemos $\vec{F} = m\vec{a}$ en m_1

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{w} = m_1 \ddot{x}_1 \hat{x}$$

$$(N\hat{y} + T\hat{x} - m_1 g \operatorname{sen}\theta\, \hat{x} - m_1 g \cos\theta\, \hat{y}) = m_1 \ddot{x}_1 \hat{x}$$

$\hat{x}$: $T_1 - m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 \ddot{x}_1$ (3)

$\hat{y}$: $N - m_1 g \cos\theta = 0$ (4)

Ahora hacemos $\vec{F} = m\vec{a}$ en m_2. El único eje que importa es $\hat{y}$

$$m_2 g - T_2 = m_2 \ddot{y}_2 \quad (5)$$

Queremos encontrar las aceleraciones. Usamos (1) en (3)

$$T_1 - m_1 g \operatorname{sen}\theta = 2m_1 \ddot{y}_2$$

Scanned by CamScanner

Usamos ② en ⑤,
$$m_2 g - 2T_1 = m_2 \ddot{Y}_2 \qquad ⑥$$
$$T_1 - m_1 g \, sen\theta = 2m_1 \ddot{Y}_2 \qquad ⑦$$

De ⑦ despejamos T_1 y reemplazamos en ⑥

$$m_2 g - 4m_1 \ddot{Y}_2 - 2m_1 g \, sen\theta = m_2 \ddot{Y}_2$$

$$\ddot{Y}_2 = \frac{1}{4m_1 + m_2}\left(m_2 g - 2m_1 g \, sen\theta\right)$$

$$\therefore \quad \ddot{X}_1 = \frac{2g}{4m_1 + m_2}\left(m_2 - 2m_1 \, sen\theta\right)$$

b) Como la tensión es la misma en toda la cuerda, la fuerza con que la misma tira del soporte P' es T_1. De ⑦

$$T_1 = 2m_1 \ddot{Y}_2 + m_1 g \, sen\theta$$

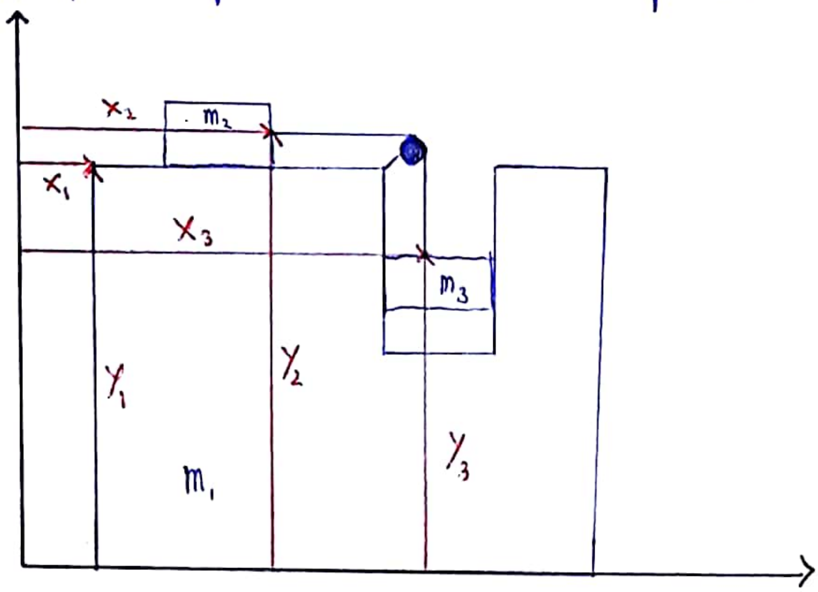
$$T_1 = \frac{2m_1 g}{4m_1 + m_2}\left(m_2 - 2m_1 sen\theta\right) + m_1 g \, sen\theta$$

$$= \frac{2m_1 m_2 g - 4m_1^2 g \, sen\theta + 4m_1^2 g \, sen\theta + m_1 m_2 g \, sen\theta}{4m_1 + m_2}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}\left(2 + sen\theta\right)$$

Scanned by CamScanner

3. Primero dibujaremos el sistema con un sistema de referencia apropiado para describir la posición de cada masa



Dado que ni m_1 ni m_2 ni m_3 cambian de forma, podemos establecer lo siguiente:

- $y_1 = cte$
- $y_2 = cte$ (Suponiendo que m_2 no cae)
- $x_3 - x_1 = cte$
- $x_3 - x_2 + y_2 - y_3 = \ell$ (Cuerda inextensible)

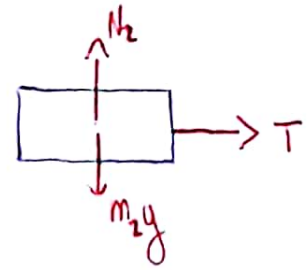
Derivando dos veces las relaciones,

$$\boxed{\ddot{x}_3 = \ddot{x}_1} \quad (1)$$

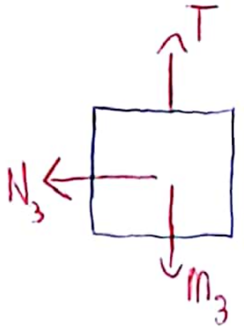
$$\boxed{\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2 - \ddot{y}_3 = 0} \quad (2)$$

Ahora veamos el diagrama de cuerpo libre para cada masa

m_2 :

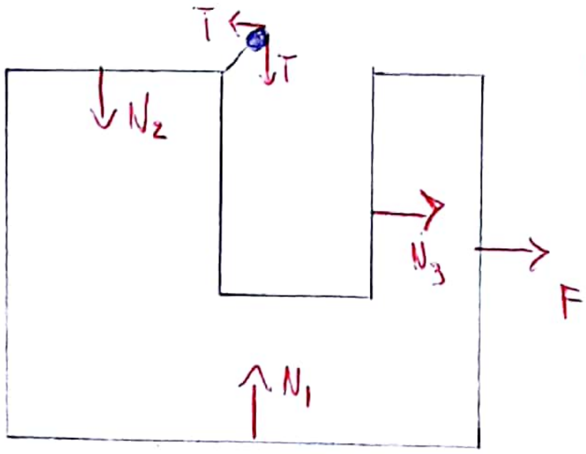


m_3 :



Ojo: m_3 está entre dos paredes, no sabemos cuál de las dos empujará a m_3, luego N_3 podría ser $(\leftarrow)$ o $(\rightarrow)$
Sin embargo esto no influirá en nuestros cálculos. Si dibujamos bien N, saldrá con signo positivo, si no, con signo negativo

m_1 :



¡No olvidar pares de acción y reacción!

No hay nada que descomponer, simplemente usamos $\vec{F} = m\vec{a}$ en cada cuerpo

m_2: $\quad T = m_2 \ddot{x}_2 \quad$ (3)

$N_2 - m_2 g = 0 \quad$ (4)

m_3: $\quad -N_3 = m_3 \ddot{x}_3 \quad$ (5)

$T - m_3 g = m_3 \ddot{y}_3 \quad$ (6)

m_1: $\quad F + N_3 - T = m_1 \ddot{x}_1 \quad$ (7)

$N_1 - N_2 - T - m_1 g = 0 \quad$ (8)

m_3 estará estática respecto a m_1 si no sube ni baja $\rightarrow \ddot{y}_3 = 0$
(En rigor, debe cumplirse que $\vec{x}_3 - \vec{x}_1 = cte \Rightarrow \ddot{\vec{x}}_3 - \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{0}$)
Imponiendo esto en (6)

$T = m_3 g \quad$ (9)

Reemplazando (5) y (9) en (7)

$$F - m_3 \ddot{x}_3 - m_3 g = m_1 \ddot{x}_1$$

Usando (1),

$$F = m_3 g + \ddot{x}_3 (m_3 + m_1)$$

De (2), $\ddot{x}_3 = \ddot{x}_2$.

$$F = m_3 g + \ddot{x}_2 (m_3 + m_1)$$

Usando (9) en (3), $\ddot{x}_2 = \frac{m_3}{m_2} g$

$$F = m_3 g \left(1 + \frac{1}{m_2} (m_1 + m_3) \right)$$

$$F = \frac{m_3 g}{m_2} (m_1 + m_2 + m_3)$$

Para la segunda parte del problema, tomamos $F = 0$. Buscamos $\ddot{x}_1$.

Usando (3) y (5) en (7)

$$-m_3 \ddot{x}_3 - m_2 \ddot{x}_2 = m_1 \ddot{x}_1 \quad (10)$$

Ese $\ddot{X}_2$ molesta. De (2) sabemos que

$$\ddot{X}_2 = \ddot{X}_3 - \ddot{Y}_3 \qquad (11)$$

Podemos igualar tensiones en (3) y (6) para relacionar $\ddot{X}_2$ con $\ddot{Y}_3$.

$$m_2 \ddot{X}_2 = m_3 \ddot{Y}_3 + m_3 g$$

$$\ddot{Y}_3 = \frac{m_2}{m_3}\ddot{X}_2 - g$$

Reemplazando en (11),

$$\ddot{X}_2 = \ddot{X}_3 - \frac{m_2}{m_3}\ddot{X}_2 + g$$

Usando (1),

$$\ddot{X}_2\left(1+\frac{m_2}{m_3}\right) = \ddot{X}_1 + g \quad \Rightarrow \quad \ddot{X}_2 = \frac{m_3}{m_2+m_3}\left(\ddot{X}_1 + g\right)$$

Reemplazando en (10), y usando (1)

$$-m_3\ddot{X}_1 - \frac{m_2 m_3}{m_2+m_3}\left(\ddot{X}_1 + g\right) = m_1 \ddot{X}_1$$

$$\ddot{x}_1\left(m_1+m_3+\frac{m_1 m_3}{m_2+m_3}\right)=-\frac{m_2 m_3}{m_2+m_3}g$$

$$\ddot{X}_1\ \frac{1}{m_2+m_3}\left(m_1 m_2+m_1 m_3+2m_2 m_3+m_3^2\right)=-\frac{m_2 m_3}{m_2+m_3}g$$

$$\ddot{X}_1=-\frac{m_2 m_3 g}{m_1 m_2+m_1 m_3+2m_2 m_3+m_3^2}$$