para asegurar, que Uds. puedan aplicar sin problemas su conocimiento de Cálculo I y II en la ciencia y tecnología, una breve repetición de las "ideas" del "Cálculo Integral":

3.4 Integración:

→ Calculo Diferencial:

conocemos $f(t)$ y buscamos $\dot{f}(t)$

→ Cálculo Integral: Al contrario:

conocemos $\dot{f}(t)$ y calcolamos $f(t)$

Ejemplo simple (3.4-1):

Tenemos la derivada $\dot{x}(t) = \cos \omega t$

Calcule todas las funciones $x(t)$ con $\dot{x}(t) = \cos \omega t$

Solución:

Cualquier función $x(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t + c$ con $c = \text{const.}$ es una solución, porque

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + c\right) = \cos(\omega t)$$

La constante de Integración c se puede calcular solamente, si se asigna para la función $x(t)$ un valor para algún tiempo t – típicamente para el tiempo $t=0$.

⇒ Con la condición /asignación $x(t=0)=0$

tenemos $c=0$ y una solución inconfundible.

En otras palabras:

"El cálculo integral se puede tratar como la inversión de cálculo diferencial. El objetivo es, buscar la función $F(x)$ de cuya derivación es $f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

$d\,F(x) = f(x)\cdot dx$ se llama "diferencial" de la función $F(x)$.

ojo: También $F(x)+C$ es una solución

↑

constante arbitraria, se calcula desde las condiciones iniciales (ver ejemplo (3.4-1))

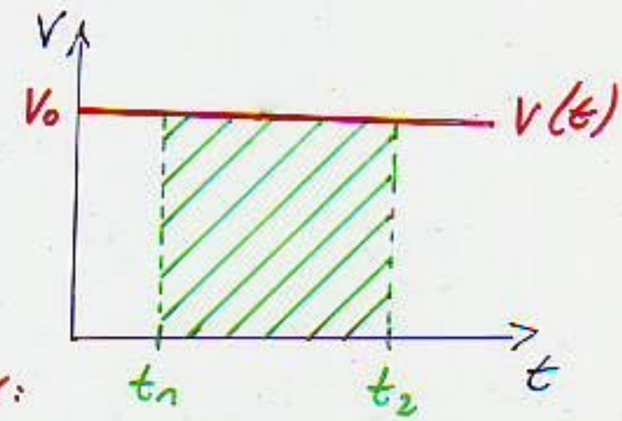
4 Ejemplo típico de un problema simple:

Se tiene la velocidad $v(t)$ - por ejemplo a través del tacógrafo de un camión - y buscamos el lugar $x(t)$.

1) Caso más fácil: movimiento uniforme con

$$v(t) = \text{const.} =: v_0$$

Diagrama velocidad - tiempo:
→ $v(t)$ es paralelo al eje t (abscisa).



⇒ Integración es muy fácil:

Según ecu. (2.2-3) el camión recorre en el intervalo $[t_1, t]$ el camino

$$x(t) - x(t_1) = v_0 \cdot (t - t_1)$$

⇒ El camino recorrido es igual a el area sombreada en la figura.

Con $c := x(t_1) - v_0 \cdot t_1$ tenemos

$$x(t) = v_0 t + c \quad \text{para } v(t) = v_0 = \text{const.}$$

Así calculamos la función "diferencial" $x(t)$ de una velocidad constante $v(t) = v_0$ y logramos un primer indicio para la relación

Area $\Leftrightarrow$ Integral

2) ¿Qué pasa en el caso de un movimiento No uniforme? :

Aquí tenemos que utilizarlo, el hecho que la velocidad está casi constante, si el intervalo de tiempo Δt es suficientemente pequeño:

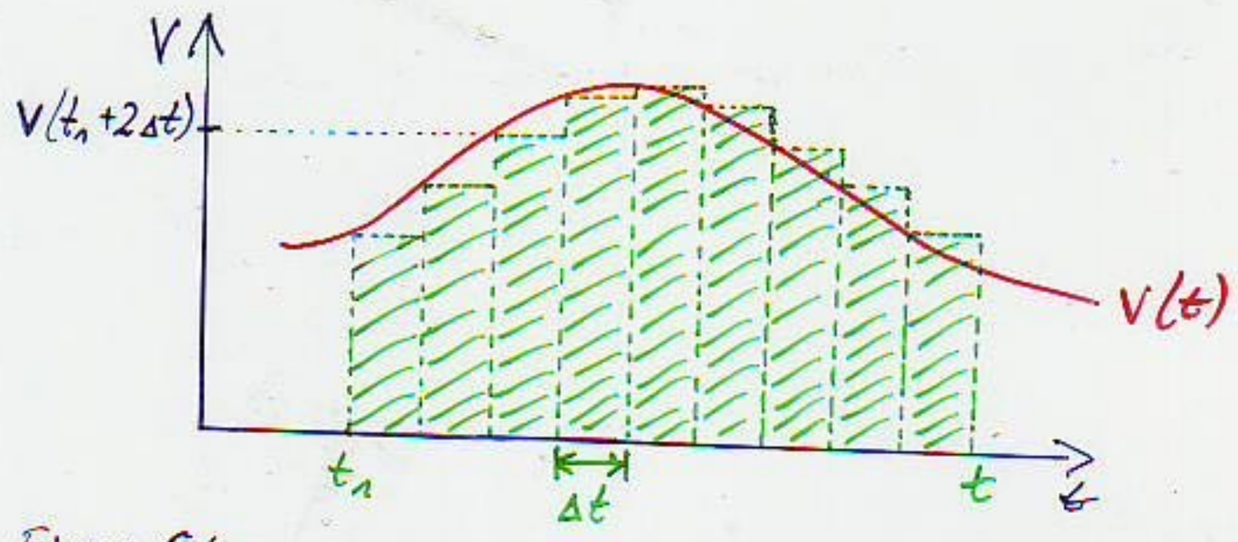


Figura: El camino recorrido total es la suma de los caminos recorridos parciales en los intervalos de tiempo Δt, donde la velocidad $v(t)$ en los intervalos parciales Δt está aprox. constante.

Con estos pensamientos se puede desarrollar un procedimiento válido en general:

para calcular el camino recorrido en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, se divide el intervalo $[t_1, t_2]$ en n intervalos parciales iguales con el "ancho"

$$\Delta t = \frac{t - t_1}{n}$$

y calcule las velocidades, por ejemplo, para el principio de los intervalos parciales $v[t_1 + (i-1)\cdot\Delta t]$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Camino recorrido en el intervalo total = Suma de $\underbrace{\text{durante}}_{}$ todos los intervalos parciales:

(caminos recorridos)

$$x(t) - x(t_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[x(t_1 + i\Delta t) - x(t_1 + (i-1)\Delta t)\right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(t_1 + (i-1)\Delta t)\cdot\Delta t}_{\text{|||}} \qquad (3.4\text{-}3)$$

con $\Delta t = (t - t_1)/n$.

área sombreada en la figura anterior.

Ahora: Aumentamos el número n de los intervalos parciales más y más

$\Rightarrow$ El "ancho" $\Delta t = (t - t_1)/n$ de los intervalos parciales disminuye más y más.

$\rightarrow$ Mientras más angosto Δt menos varía la velocidad $v(t)$ en el intervalo. parcial.

Y más preciso la suma de las velocidades de el camino recorrido $\Delta x = x(t) - x(t_1)$.

$\rightarrow$ piensen, p.ej., en la lectura del tacógrafo de un camión recorriendo el camino Santiago – Valparaiso: Leyendo la velocidad cada 5 minutos, cada minuto, cada 5 segundos, cada segundo...

para $n \to \infty$ la $\sum\limits_{i=1}^{n}$ se aprox. al valor límite, el cual llamamos el "Integral" de $v(t)$:

$$\boxed{x(t) - x(t_1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v\left[t_1 + (i-1)\frac{t-t_1}{n}\right] \cdot \frac{t-t_1}{n} =: \int_{t_1}^{t} v(t')\,dt'} \quad (3.4\text{-}4)$$

$\Rightarrow$ a) El Integral es $\equiv$ área entre la Función $v(t)$ y la abscisa en el intervalo $[t_1, t]$.

b) El Integral es $\equiv$ aumento $x(t) - x(t_1)$ de la derivada

con ecu. (3.4-4) tenemos para el lugar/posición $x(t)$ de una partícula puntual en el momento t:

$$\boxed{x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(t')\,dt'} \qquad (3.4\text{-}5)$$

Del mismo modo se puede mostrar:

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(t')\,dt'$$

<u>Ejemplo</u> (para desarrollarlo Ud. mismo): (3.4-2)

Movimiento acelerado:

Velocidad crece al cuadrado con el tiempo:

$v(t) = ct^2$ con $c = \text{const}$ $[c] = \frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow$ calcule el camino recorrido en el intervalo $[0, t]$ <u>no</u> por integración, sino através de sumas y el valor límite para $\Delta t \to 0$.

Ejemplo (3.4-3): Lanzamiento inclinado sin roce:

Un cuerpo será lanzado con una velocidad inicial v_0 bajo el ángulo φ con inclinación hacia arriba. Elegimos un sistema de coordinados cartesianas pendientes con su orijen en el lugar del lanzamiento. El eje z indica en dirección vertical, hacia arriba. El eje x se encuentra en el plano horizontal e indica la dirección del lanzamiento. El cuerpo se lanzará en el momento $t=0$.

Las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}(t=0) := \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(t=0) := \dot{\vec{r}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \\ 0 \\ v_0 \sin\varphi \end{pmatrix}$$

¡Calcule el vector local $\vec{r}(t)$ através de integración!

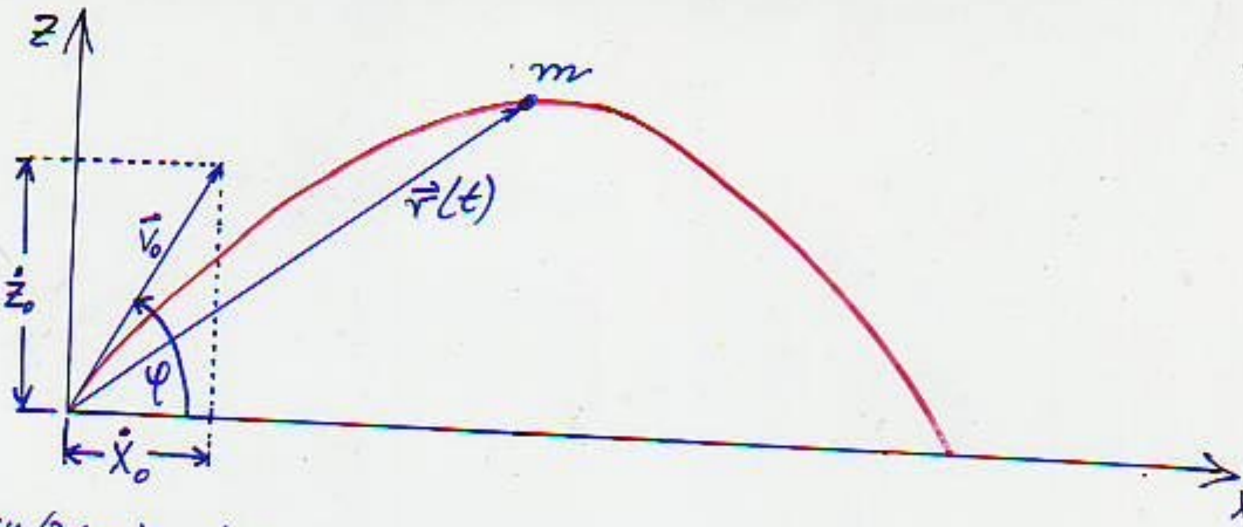


Fig.(3.4-4): Lanzamiento inclinado sin roce

Solución:

La ecuación de movimiento según el segundo axioma de Newton es:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$$

o en anotación de coordinadas:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad (3.4-7)$$

podemos solucionar la Ecua. diferencial por coordinadas:

La solución de la primera ecu. $\ddot{x} = 0$ es fácil: Según ecu. (3.4-6) el aumento de la función $x(t)$ en el intervalo $[0, t]$ es:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_0 = \int_0^t \ddot{x}(t')\,dt' = \int_0^t 0 \cdot dt' = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}_0$$

La segunda Integración da:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t \dot{x}(t')dt' = \dot{x}_0 \int_0^t dt' = \dot{x}_0 t$$

con $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = V_0 \cos\varphi$ resulta:

$$x(t) = V_0 \cdot t \cdot \cos\varphi \qquad (3.4-8a)$$

La solución de la ecu. $\ddot{y} = 0$ se realiza de igual modo y resulta:

$$y(t) = 0 \qquad (3.4-8b)$$

Después solucionamos la ecu. $\ddot{z} = -g$ para el movimiento vertical:

$$\dot{z}(t) - \dot{z}_0 = \int_0^t \ddot{z}(t')dt' = -g \int_0^t dt' = -gt$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{z}_0 - gt$$

Una integración adicional conduce a

$$z(t) - z_0 = \int_0^t \dot{z}(t')dt' = \int_0^t (\dot{z}_0 - gt')dt' = \dot{z}_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Con $z_0 = 0$ y $\dot{z}_0 = V_0 \sin\varphi$ resulta:

$$z(t) = V_0 t \sin\varphi - \frac{g}{2} t^2 \qquad (3.4-8c)$$

12 El vector local

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ v_0 \cdot t \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$

muestra, que el lanzamiento está compuesto de dos componentes independientes:

1. componente vertical: "Caida Libre".

2. —"— horizontal: "Movimiento uniforme".

¡Estos dos movimientos no se influyen entre sí!

→ $\boxed{\text{Ver Experimento}}$

Finalmente cambiamos ecu. (3.4-8a) a t y sustituimos t en ecu. (3.4-8c). Resulta la trayectoria en el plano x, z:

$$z = x \tan\varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 \qquad (3.4\text{-}9)$$

⇒ la trayectoria es una parábola.

¿Cuál es el ángulo φ para x_{max}?