Estática y Dinámica

Material Clases Cuerpo Rigido – Rotacion 1

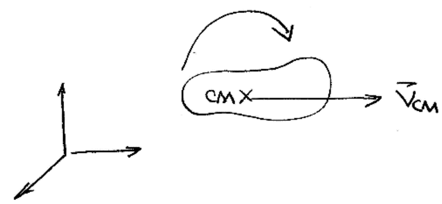
1. Cinemática del cuerpo rígido
    1.1. Velocidad angular
    1.2. Aceleración angular
2. Relación entre variables lineales y angulares
3. Análisis de movimiento relativo. Velocidad
4. Ejemplos

1. Cinemática del cuerpo rígido

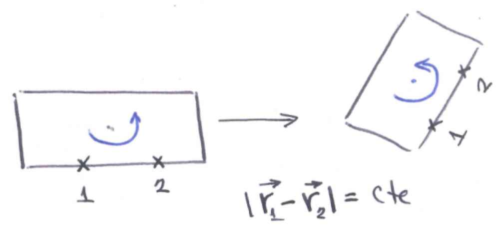
En la vida real, los objetos no son partículas puntuales como hemos considerado hasta ahora. Un objeto real posee una distribución de masa asociada a su forma y tamaño.

El movimiento de un objeto real puede ser descrito por:

- Movimiento de traslación del centro de masa (CM)
- Movimiento de rotación alrededor de un eje (en general se toma un eje que pasa por el CM o algún otro eje fijo)



Restringiremos nuestra discusión a cuerpos rígidos, esto es, cuerpos en los que coordenadas relativas que conectan las partículas que la constituyen permanecen contantes.

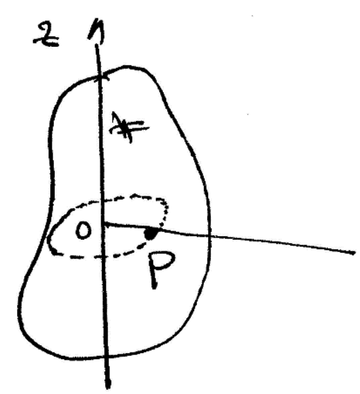


- Rotación entorno a un eje fijo.

Consideremos un cuerpo rígido rotando alrededor de un eje que se encuentra fijo en un sistema inercial de referencia.

Cualquier punto P, fuera del eje de rotación se desplaza a lo largo de una trayectoria circular.

Como el cuerpo es rígido, cuando el punto P se mueve a lo largo del círculo en relación a una línea de referencia, cualquier otro punto del cuerpo rota en mismo ángulo θ.



Esto nos permite definir la posición angular del cuerpo rígido.

Dado el punto de referencia, la posición angular es medida por el ángulo θ entre el vector posición $\vec{r}$ y el eje x.

Cuando el cuerpo rota un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ el punto P se mueve en un arco de longitud

$$s = r\Delta\theta \tag{1.1}$$

donde $\Delta\theta$ es medido en radianes[1].

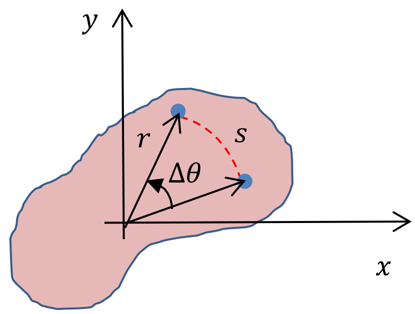
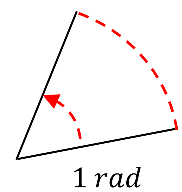


Fig. 1.1

Recordemos que el radian es al ángulo central en una circunferencia que subtiende a un arco de longitud igual al radio.

$$1\,rad. \longrightarrow r$$
$$\theta\,rad. \longrightarrow s$$



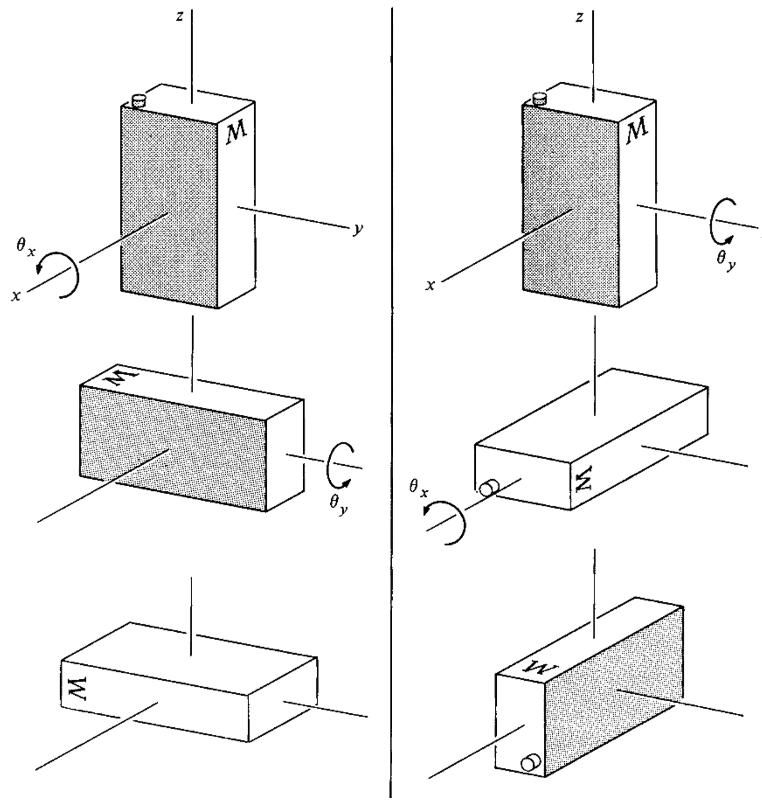
Tomaremos la siguiente notación para el signo en el cambio del ángulo. $\Delta\theta > 0$ representa un movimiento en contra de las manecillas del reloj.

El movimiento de rotación de un cuerpo es entonces descrito por el cambio de θ en el tiempo.

Notemos que $\Delta\theta$ no es un vector pues las rotaciones no conmutan. Por ejemplo $\theta_x\hat{\imath} + \theta_y\hat{\jmath} \neq \theta_y\hat{\jmath} + \theta_x\hat{\imath}$ como muestra de manera gráfica la Figura 1.2.

---

[1] Para llevar de radianes a grados se multilica 180^0 y se divide por π.
$\theta(grados) = \frac{180}{\pi}\theta(rad.)$ de aquí, 1 rad son 57.3 grados.



$\theta_x \hat{\imath} + \theta_y \hat{\jmath}$ $\theta_y \hat{\jmath} + \theta_x \hat{\imath}$

Fig. 1.2

Una rotación alrededor de los ejes x e y se representa por las matrices,

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Si realizamos las operaciones $R_x(\theta)R_y(\theta)$ y $R_y(\theta)R_x(\theta)$

$$R_x(\theta)R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos\theta & -\cos\theta\ \sin\theta \\ -\cos\theta\ \sin\theta & \sin\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta)R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\ \sin\theta \\ 0 & \cos\theta & -\ \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\ \sin\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

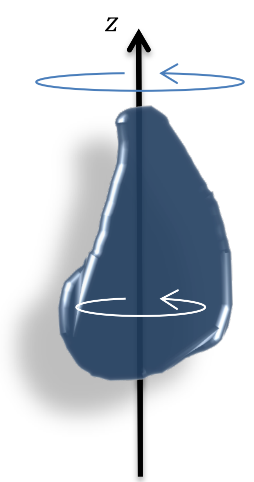
Evidentemente $R_x(\theta)R_y(\theta) \neq R_y(\theta)R_x(\theta)$

Sin embargo, si estas rotaciones fuesen infinitesimales, con $\Delta\theta = d\theta \ll 1$

$$R_x(d\theta)R_y(d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\theta \\ 0 & 1 & -d\theta \\ -d\theta & d\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(d\theta)R_x(d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\theta \\ 0 & 1 & -d\theta \\ -d\theta & d\theta & 1 \end{bmatrix}$$

i.e., $R_x(d\theta)R_y(d\theta) = R_y(d\theta)R_x(d\theta)$ conmutan[2]. De hecho es posible demostrar de manera general que $d\theta$ es un vector que definimos en la dirección del eje de rotación como sigue,



$$d\vec{\theta} = d\theta\,\hat{k} \tag{1.2}$$

- Velocidad angular

De la Figura 1.1 para una barredura de la linea de referencia en un ángulo $\Delta\theta$ en un tiempo Δt, definimos la velocidad angular media como:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad}{s}\right] o\ s^{-1} \tag{1.3}$$

De manera análoga a la velocidad lineal, la velocidad angular instantanea se define como:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}; \tag{1.4}$$

[2] En el resultado anteior despreciamos infinitesimales de orden superior, $d\theta^2 \approx 0$

La velocidad angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que puede ser escrita como segundo^{-1} (s^{-1}) porque el radian no es una dimensión. Tomaremos ω como positiva cuando θ aumenta (en contra de las manecillas del reloj en la Fig. 1.1) y negativa cuando θ está disminuyendo (a favor de las manecillas del reloj en la Fig. 1.1).

Si la velocidad angular es constante,

$$\omega = \omega_0$$

En término de revoluciones por unidad de tiempo,

$$1\ rev = \Delta\theta = 2\pi\ rad$$

El tiempo de una revolución o periodo i.e.,

$$\begin{array}{l} T \rightarrow\ 2\pi \\ \Delta t \rightarrow\ \ \Delta\theta \end{array}$$

De aquí que,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La frecuencia de revolución (número de revoluciones por segundo) es $\nu = 1/T$, entonces, $\omega_0 = 2\pi\upsilon$.

Si la velocidad angular del cuerpo cambia con el tiempo (i.e ω no es constante) entonces hay aceleración angular.

Si el cambio en la velocidad angular en el intervalo de tiempo Δt es $\Delta\omega$ la aceleración angular constante es

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\mathrm{\omega}}{\Delta\mathrm{t}} \qquad (1.5)$$

la aceleración angular instantánea es:

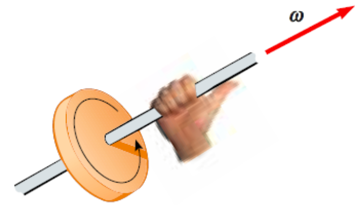
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathrm{\omega}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (1.6)$$

como $\omega = d\theta/dt$,

$$\alpha = \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

Cuando la rotación es a través de un eje fijo, cada partícula en el cuerpo posee la misma velocidad angular y la misma aceleración angular. La dirección de $\vec{\alpha}$ es a lo largo del mismo eje que $\vec{\omega}$. Si el eje de rotación cambia entonces α no tiene la misma dirección que ω.

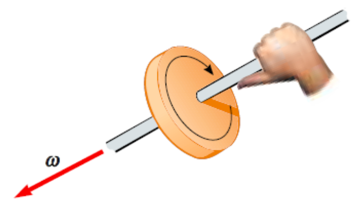
Para establecer la dirección de $\vec{\omega}$ utilizaremos la regla de la mano derecha.



Los dedos de la mano derecha se mueven en el sentido de la rotación y el dedo pulgar da la dirección de $\vec{\omega}$.

La dirección de $\vec{\alpha}$ está relacionada con $d\vec{\omega}/dt$.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$$ $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ tienen el mismo sentido



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$$ $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ tienen direcciones opuestas

Movimiento de rotación con $\boldsymbol{\omega}$ constante

Asumamos que el movimiento de rotación es alrededor de un eje fijo ($\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ están en la misma dirección)

de

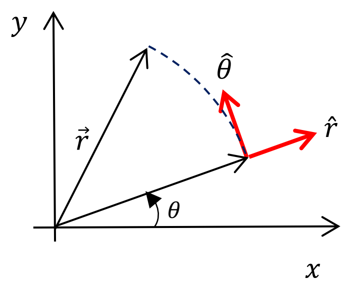
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \dashrightarrow \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \dashrightarrow \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

De estas ecuaciones, despejando t,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

2. Relación entre velocidad angular y lineal



En coordenadas polares,

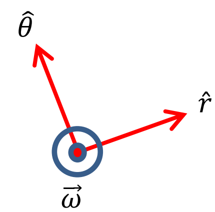
$$\vec{r} = r\hat{\rho}$$

Como $r = cte$ en el movimiento considerado,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{\rho}}{dt} = r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{2.1}$$

de donde,

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta} \tag{2.2}$$



que podemos escribir como;

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.3}$$

Relación entre aceleración angular y lineal

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.4}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.5}$$

$$\vec{a} = \alpha r\left(\hat{k} \times \hat{r}\right) + \omega^2 r\ (\hat{k} \times \hat{k} \times \hat{r})$$

$$\vec{a} = \alpha r\,\hat{\theta} - \omega^2 r\,\hat{r} \qquad (2.6)^3$$

$$\vec{a} = a_t\,\hat{\theta} - a_c\,\hat{r}$$

Donde $a_t = \alpha t$ es la aceleración transversal y $a_c = \omega^2 r$ es la aceleración radial (centrípeta).

Notemos que:

---

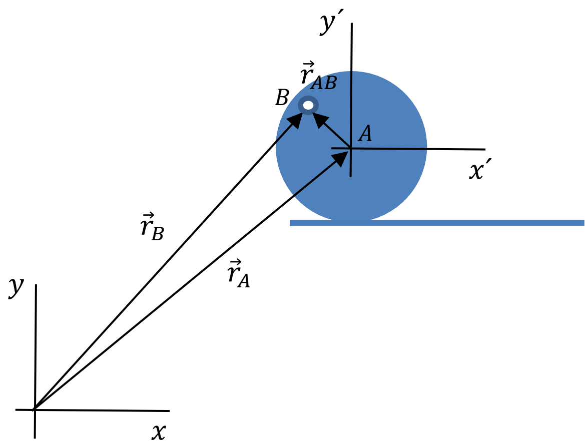
[3] Aquí usamos, $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

Todos los puntos de un cuerpo rígido que rota tienen el mismo valor ω y el mismo valor de α.

Puntos a diferentes distancias del eje de rotación poseen diferentes valores de $\vec{v}$, a_t y a_c.

3. Análisis de movimiento relativo. Velocidad.

En la figura el sistema x, y mide la posición absoluta de dos puntos A y B en el cuerpo. El origen del sistema x' y y' en el punto A pertenece al eje de rotación del cuerpo.



De la figura

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$$

donde,

$\vec{r}_{AB}$: vector que marca la posición relativa de B en relación a A.

La relación entre las velocidades de los puntos A y B es:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$$

donde $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ representan las velocidades absolutas de A y B. Como el movimiento relativo de B en relación a A es un movimiento de rotación, el segundo término es:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \qquad (3.1)$$

y

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \qquad (3.2)$$

Aceleración del movimiento relativo

Derivando en relación a t la expresión para $\vec{v}$ obtenemos:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} \qquad (3.3)$$

Para el sistema fijo en A,

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{ABt} + \vec{a}_{ABc} \qquad (3.3)$$

Y de (2.5),

$$\vec{a}_{AB} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB} \qquad (3.4)$$

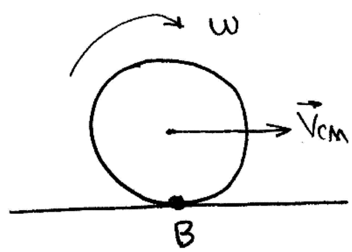
Entonces,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB} \tag{3.5}$$

4. Ejemplos

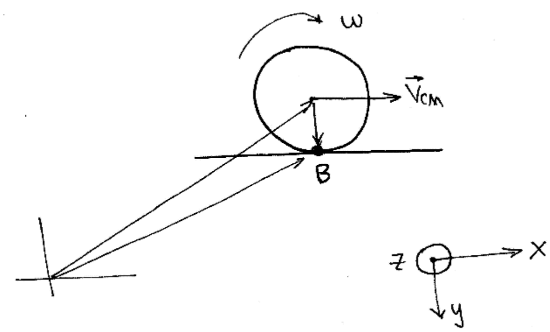
Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de ligadura entre la aceleración del centro de masa a_{CM} y la aceleraión angular α para el punto B mostrado en la figura.



Método 1. (Aplicando las ecuaciones anteriores)

En relación al sistema x, y fijo en relación a la superficie,



$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

($v_B =$ velocidad del CM más velocidad en relación al CM)

Pero como el punto B no desliza en relación a la superficie, su velocidad en un instante dado relación a esta es cero y por lo tanto, la velocidad instantánea del punto B en relación al sistema x, y y $\vec{v}_B = \vec{0}$.

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$$

En relación al sistema de ejes tomados,

$$\vec{\omega} = -\omega\hat{k}, \quad \vec{r} = R\hat{\jmath}$$

así que

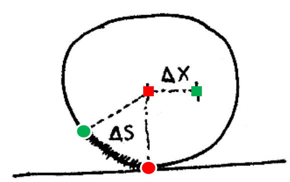
$$\vec{v}_{CM} = \omega R\big(\hat{k} \times \hat{\jmath}\big) = \omega R\ \hat{\imath},$$

De donde derivando en relación al tiempo obtenemos.

$$a_{CM} = \alpha R$$

Método 2:

En este método lo que haremos será simplemente relacionar el desplazamiento del CM, Δx con la longitud del arco (Δs) subtendido por el ángulo de rotación ($\Delta\theta$)



De la figura es claro que cuando el CM se desplaza una distancia Δx, la longitud de arco recorrida por el punto marcado es $\Delta s = \Delta x$,

Entonces, $\Delta x = \Delta s = \theta R$ de donde derivando en relación a t obtenemos

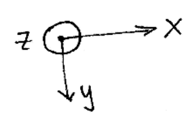
$$V_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

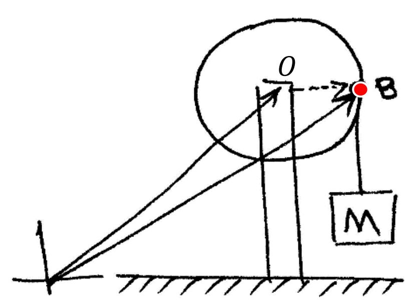
Ejemplo 2:

Encontrar la relación entre la aceleración de la masa M y la aceleración angular α del cilindro

Método 1:



$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Como $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$

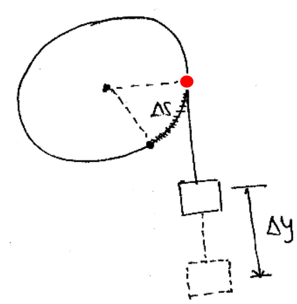
$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega R \hat{j}$$

Pero $v_B = v_M$

Así que $a_M = \alpha R$

Método 2

De la figura es claro que cuando el punto B se desplaza una distancia Δy, la longitud de arco recorrida por el punto marcado es $\Delta s = \Delta y$,



Entonces, $\Delta y = \Delta s = \theta R$ de donde derivando en relación a t obtenemos

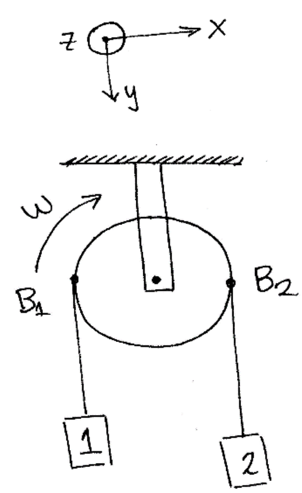
$$V_M = \omega R$$

$$a_M = \alpha R$$

Ejemplo 3:

Encontrar la relación entre las aceleraciones de los cuerpos 1 y 2 y la aceleración del cilindro.

Método 1:



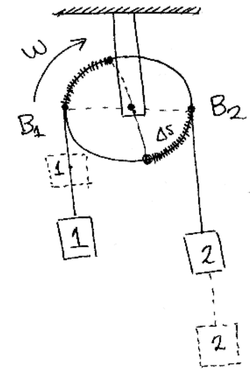
$$\vec{v}_{B1} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = -\omega R \hat{j}$$

$$\vec{v}_{B1} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_2 = \omega R \hat{j}$$

De aquí que,

$a_2 = \alpha R, \qquad a_1 = -\alpha R$

Método 2



De la figura,

$$\Delta y_2 = \Delta s = \Delta\theta R$$

Pero $y_1 + y_2 = l \quad \Longrightarrow \quad \Delta y_1 = -\Delta y_2$

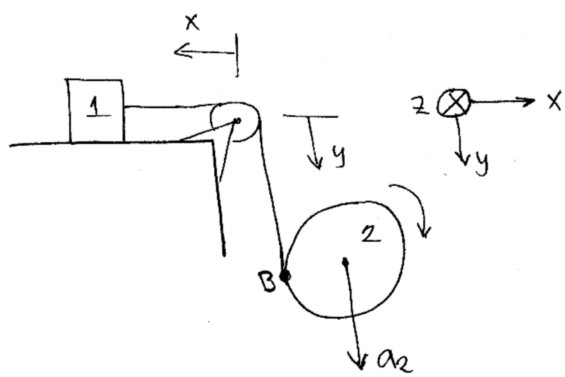
$$\Delta y_2 = \Delta s = \Delta\theta R \quad \rightsquigarrow \quad a_2 = \alpha R$$

$$\Delta y_1 = -\Delta y_2 \quad \rightsquigarrow \quad a_1 = -\alpha R$$

Ejemplo 4:

Encontrar la relación entre las aceleraciones de los cuerpos 1, 2 y la aceleración angular del cilindro

Método 1:



$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_B = (v_2 - \omega R)\hat{\jmath}$$

$$v_B = v_2 - \omega R$$

Pero

$$y_B + x = l \implies v_B + v_1 = 0$$

Entonces,

$$-v_1 = v_2 - \omega R$$

Y

$$a_2 = -a_1 + \alpha R$$

Método 2:

De la figura es fácil ver que[4]

$$\Delta y_2 = \Delta y_B + \Delta s = \Delta y_B + \Delta\theta R$$

entonces,

$$v_2 = v_B + \omega R$$

Pero

$$y_B + x = l \implies v_B + v_1 = 0$$

Así que $v_2 = -v_1 + \omega R$ y obtenemos

$$a_2 = -a_1 + \alpha R$$

Ejemplo 5:

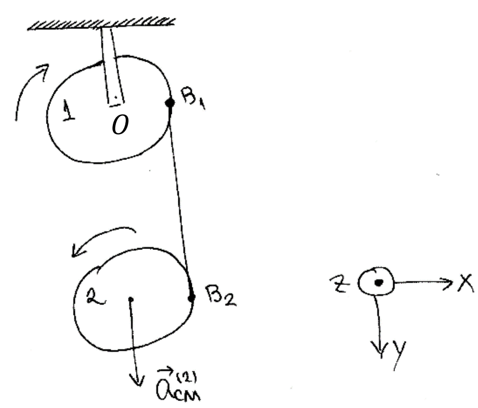
Considere que los discos de la figura son iguales y que sus aceleraciones y velocidades angulares también lo son.

a) calcular la a_{CM} del disco 2 en función de α.

Método 1

Notemos que $v_{B1} = v_{B2}$

Por otro lado, como la fuerza que los hace girar en relación a sus centros es la tensión y como los discos son iguales, sus velocidades angulares también serán iguales.



Punto B1

$$\vec{v}_{B1} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B1} = \omega R\hat{\jmath}$$

Punto B2

[4] Equivalente a decir: “lo que baja 2 es igual a lo que baja B más lo que se desenrrolla el cilindro”

$$\vec{v}_{B2} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B2} = (v_{CM} - \omega R)\hat{\jmath}$$

Así que,

$$v_{B1} = \omega R$$

$$v_{B2} = v_{CM} - \omega R$$

Y como $v_{B1} = v_{B2}$,

$$v_{CM} = 2\omega R$$

Método 2

De la figura podemos ver claramente que:

El desplazamiento del cilindro 2 es igual a == (lo que se desenrolla la cuerda en el cilindro 1 más lo que se desenrolla en el cilindro 2), esto es

$$\Delta y_2 = \Delta s_1 + \Delta s_2$$

Pero

$$\Delta s_1 = \Delta\theta_1 R,\ \ \Delta s_2 = \Delta\theta_2 R$$

Y como $\omega_1 = \omega_2$

$$v_2 = 2\omega R \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2\alpha R$$

Ejemplo 6

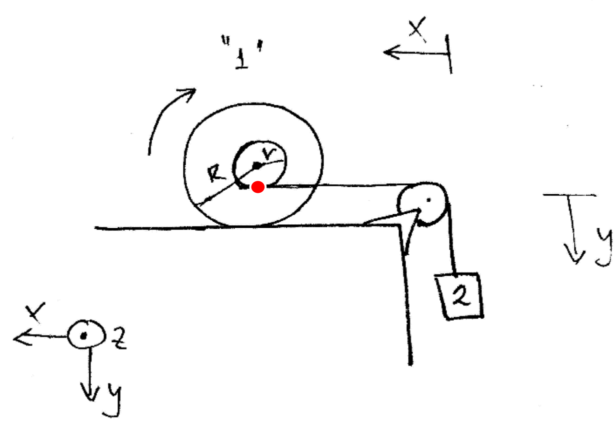
Encontrar la relación entre la aceleración del centro de masa del cilindro (a_1), su aceleración angular α y la aceleración del cuerpo 2, a_2

Método 1

$$\vec{v}_B = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r} = (-v_1 + \omega r)\hat{\imath}$$

Como $\vec{v}_B = -v_B\hat{\imath}$

$$v_B = v_1 - \omega r$$



De la ligadura a través de la cuerda,

$$x_B + y_2 = cte \quad \longrightarrow \quad v_B = -v_2$$

Y

$$-v_2 = v_1 - \omega r$$

$$a_1 = -a_2 + \omega r$$

Método 2:

De la figura, el desplazamiento del cilindro es igual a == lo que se desplaza el punto B mas lo que se enrolla el cilindro (a través del anillo interior),

$$\Delta x_1 = \Delta x_B + \Delta s_B = \Delta x_B + \Delta\theta R$$

$$v_1 = v_B + \omega R$$

pero

$$x_B + y_2 = cte \quad \longrightarrow \quad v_B = -v_2$$

$$v_1 = -v_2 + \omega R$$

Entonces,

$$a_1 = -a_2 + \omega R$$