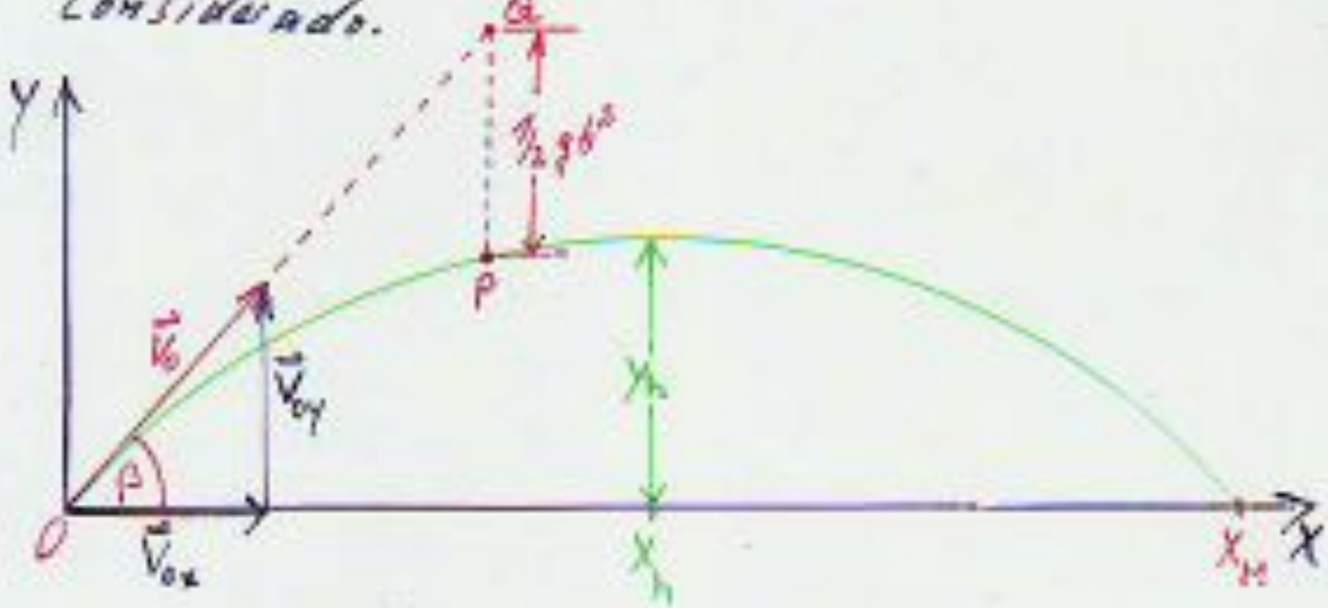
Trayectoria de un Proyectil:

(Lanzamiento oblicuo / inclinado)

Queremos calcular la trayectoria del vuelo de un cuerpo / proyectil en el campo de gravedad de la tierra. El cuerpo / proyectil se mueve con una cierta velocidad inicial v_0 en una dirección que forma un ángulo β con la horizontal. El roce del aire no está considerado.



Elegimos para la descripción del movimiento un sistema de coordinadas x, y (x-coordinada horizontal, y-eje perpendicular a la superficie de la tierra). La trayectoria del movimiento del cuerpo es en el plano x-y. El cuerpo está en el momento / tiempo $t=0$ en el origen del sistema de coordinatos.

Después del disparo/lanzamiento el cuerpo se mueve bajo de la superposición de dos movimientos:

a) El movimiento del cuerpo libre y

b) de la caida libre, el movimiento uniformamente acelerado hacia abajo (en dirección del eje negativo de y).

Solución:

Separamos/descomponemos el vector de la velocidad $\vec{V_0}$ en sus componentes $\vec{V_{0x}}$ y $\vec{V_{0y}}$:

$$\vec{V_0} = \vec{V_{0x}} + \vec{V_{0y}}$$

Para los modulos/magnitudes de la velocidad inicial paralelo a los ejes "x" e "y" se obtiene:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \beta$$
$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \beta$$

Calculamos los componentes "x" e "y" en forma separada:

⇒ La componente horizontal V_x se mantiene sin cambio durante todo el vuelo.

→ La componente vertical V_y se disminuye con el tiempo:

Tenemos:

$$V_x = V_{0x} = V_0 \cdot \cos\beta$$

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t = V_0 \cdot \sin\beta - g \cdot t \; .$$

La integración de estas ecuaciones da la coordinada local de la trayectoria como función del tiempo:

(1) $$X(t) = \int_0^t V_x \, dt = V_0 \cdot t \cdot \cos\beta$$

(2) $$Y(t) = \int_0^t V_y \, dt = \int_0^t (V_0 \sin\beta - gt) \, dt$$

$$= V_0 \cdot t \cdot \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2 .$$

¡Sin la influencia de la gravitación de la tierra el cuerpo estaría en el tiempo t no en el punto P, sino en el punto Q!

La trayectoria $y = y(x)$ se calcula a través de las ecuaciones (1) y (2) por eliminación de tiempo t (con ecuación (1) se calculan el tiempo t y entran en ec. (2)):

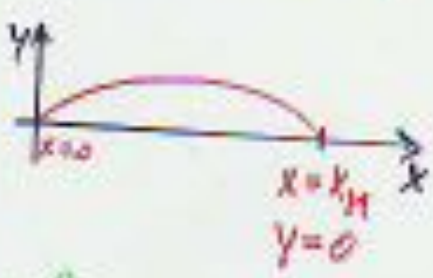
Resultado:

$$(3) \quad \underbrace{y = x \cdot \tan\beta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\beta} \cdot x^2}$$

Esta ecuación representa una parabola (de lanzamiento).

Interesantes son dos valores/posiciones de esta trayectoria del lanzamiento: La distancia lograda x_M y la altura y_h:

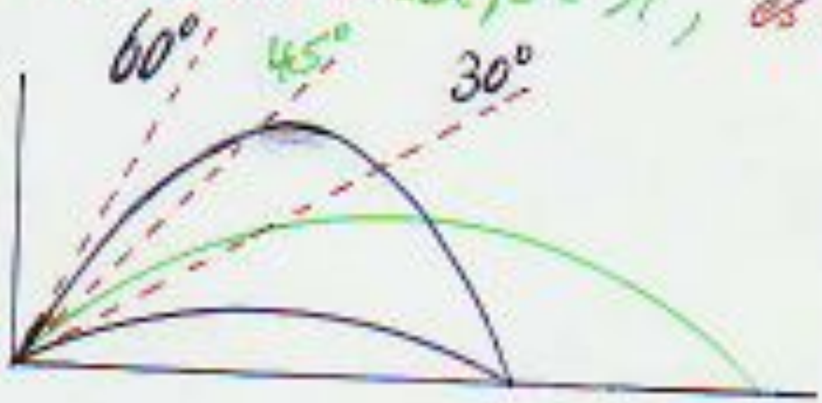
a) distancia lograda x_M:



⇒ con (3):

$$\underbrace{x_M = \frac{2v_0^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\beta}$$

⇒ La distancia lograda <u>maxima</u> entonces se mantiene si $\sin 2\beta = 1$, es decir $\beta = 45$



<u>Experimento:</u> Las trayectorias de lanzamiento oblicuo para distintos angulos β se puede demostrar con un haz de agua (con velocidad de flujo constante):

b) <u>altura de lanzamiento</u> Y_h: (punto maximo de la parabola)

en este punto la componente vertical de la velocidad v_y esta zero:

$v_y = v_0 \cdot \sin\beta - g \cdot t = 0$ es decir $t = \frac{v_0 \cdot \sin\beta}{g}$

Sustituir t en ec. (2) da:

$$Y_h = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2\beta}{2g}$$

Ejemplo:

a) $\beta = 45°$, $V_0 = 1.000\ \frac{m}{s}$

$\Rightarrow \underline{X_M} = \frac{(1.000)^2}{9,81} \cdot \sin(2 \cdot 45°) = 101.936,8\ m$

$\cong \underline{102\ Km}$

b) calculo de la altura maxima Y_h:

$\underline{Y_h} = \frac{(1.000)^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \sin^2(45°) = 25.484,2\ m$

$\cong \underline{25,5\ Km}$

Cuando se dispara a 45° la altura Y_h es 1/4 del rango de X_M.