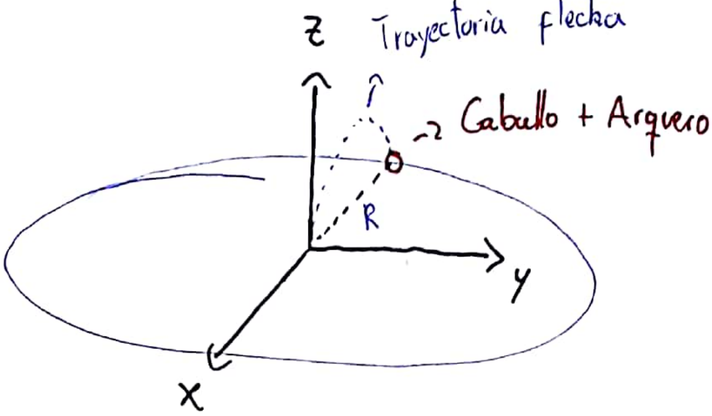
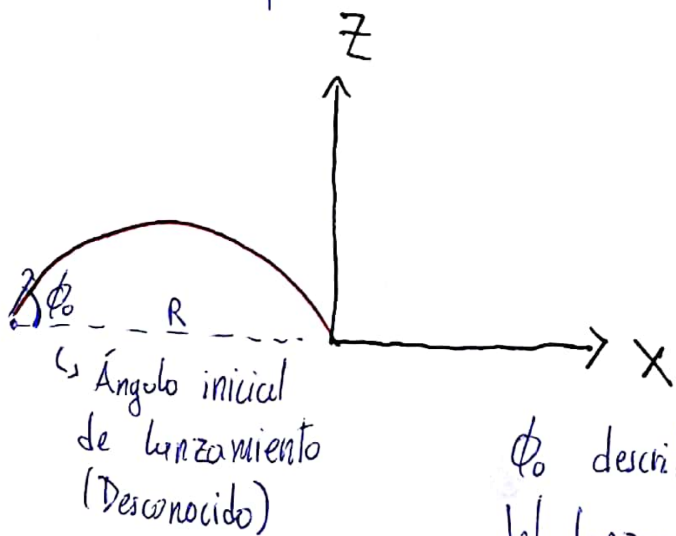
1.a) Primero se dibujará la situación en perspectiva para entender lo que sucede.



Se ha elegido el sistema cartesiano tal que el movimiento de la flecha ocurre en el plano xz



ϕ_0 describirá la desviación vertical del lanzamiento.

Escribimos las ecuaciones cinemáticas,

$$x = -R + v_A \cos(\phi_0)t$$
$$y = v_A \operatorname{sen}(\phi_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Al llegar al centro de la circunferencia, $x=0$, $y=0$

$$R = v_A \cos(\phi_0)t \qquad (1)$$
$$0 = v_A \operatorname{sen}(\phi_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

De (1), $$t = \frac{R}{v_A \cos(\phi_0)}$$

En (2), $$0 = R\,tg(\phi_0) - \frac{gR^2}{2v_A^2\cos^2(\phi_0)}$$

$$0 = R\,tg(\phi_0) - \frac{gR^2}{2v_A^2}\sec^2(\phi_0)$$

$$0 = R\,Tg(\phi_0) - \frac{gR^2}{2v_A^2}\left(Tg^2(\phi_0) + 1\right)$$

$$tg^2(\phi_0) - \frac{2v_A^2}{gR}tg(\phi_0) + 1 = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática para $tg(\phi_0)$

$$\operatorname{tg}(\phi_0) = \frac{v_A^2}{gR} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4v_A^4}{g^2R^2} - 4}$$

$$= \frac{v_A^2}{gR} \pm \frac{1}{gR}\sqrt{v_A^4 - g^2R^2}$$

$$= \frac{v_A^2}{gR}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{gR}{v_A^2}\right)^2}\right)$$

De la ecuación es inmediato ver que si $\left(\frac{gR}{v_A^2}\right)^2 > 1$, no existe solución. Luego, para que haya solución, $v_A \geq \sqrt{gR}$

Si hay solución, $\phi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_A^2}{gR}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{gR}{v_A^2}\right)^2}\right)\right)$

(Hay dos posibilidades)

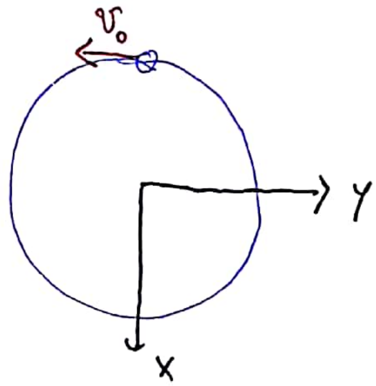
Ahora veamos qué sucede con la inclinación horizontal. Si el arquero estuviese quieto, bastaría con que apuntara en dirección al eje x con inclinación vertical ϕ_0. Pero está en movimiento. Veamos la forma intuitiva y la formal de resolver este problema.

Intuitiva → Sea O el centro de la circunferencia, C el caballo y F la flecha. Por movimiento relativo,

$$\vec{X}_{F/O} = \vec{X}_{C/O} + \vec{X}_{F/C}$$

$$\vec{v}_{F/O} = \vec{v}_{C/O} + \vec{v}_{F/C}$$

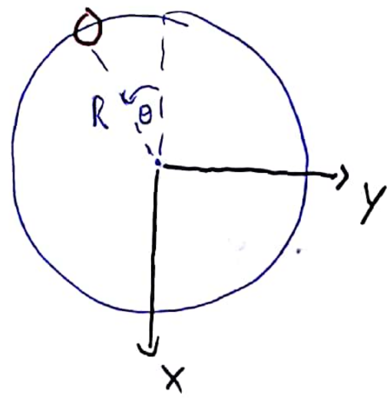
Mirando el primer mono, la velocidad del caballo respecto a O es $\vec{v}_{C/O} = -v_0\,\hat{y}$.



Además, $\vec{v}_{F/O} = v_A \cos(\phi_0)\,\hat{x} + v_A \operatorname{sen}(\phi_0)\,\hat{z}$

Luego, $\vec{v}_{F/O} = v_A \cos(\phi_0)\,\hat{x} + v_0\,\hat{y} + v_A \operatorname{sen}(\phi_0)\,\hat{z}$

Ahora para la manera formal, parametrizamos la posición del caballo respecto a O.



$$\vec{x}_{c/o} = -R\cos\theta\,\hat{x} - R\,\text{sen}\theta\,\hat{y}$$

Necesitamos $\theta(t)$. Pero sabemos que $\|\vec{v}_{c/o}\| = v_0$ (cte)

$$\vec{v}_{c/o} = \frac{d}{dt}\vec{x}_{c/o} = R\dot{\theta}\,\text{sen}\theta\,\hat{x} - R\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{y}$$

$$\|\vec{v}_{c/o}\| = \sqrt{\vec{v}_{c/o}\cdot\vec{v}_{c/o}} = \sqrt{(R\dot{\theta})^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} = R|\dot{\theta}| = R\dot{\theta} = v_0$$

(Pues θ siempre crece)

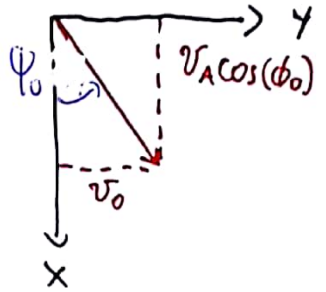
$$\therefore \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} \quad \Big/ \int_0^t dt'$$

$$\theta = \frac{v_0}{R}t \quad , \text{ pues } \theta(t=0) = 0$$

Así, $\vec{v}_{c/o} = v_0\,\text{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right)\hat{x} - v_0\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\hat{y}$

En $T=0$, $\vec{v}_{c/o} = -v_o\,\hat{y}$, recobrando el resultado anterior

Tenemos que $\vec{v}_{F/C} = v_A\cos(\phi_0)\,\hat{x} + v_0\,\hat{y} + v_A\,\mathrm{sen}(\phi_0)\,\hat{z}$. Para ver la desviación horizontal de lanzamiento, vemos la componente xy del vector velocidad



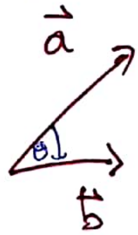
ψ_0 describirá la desviación respecto al eje x (Desviación horizontal)

Por trigonometría, podemos decir inmediatamente que

$$\tan(\psi_0) = \frac{v_0}{v_A\cos(\phi_0)} \qquad \text{(Con esto basta)}$$

Podemos también usar una herramienta mucho más general y poderosa. Si tenemos dos vectores cualquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el ángulo θ entre ellos puede encontrarse como

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \cos\theta$$



En este caso, ψ_0 es el ángulo que se forma entre $(v_A \cos\phi_0\, \hat{x} + v_0\, \hat{y})$ y $\hat{x}$. Entonces, recordando que

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$$

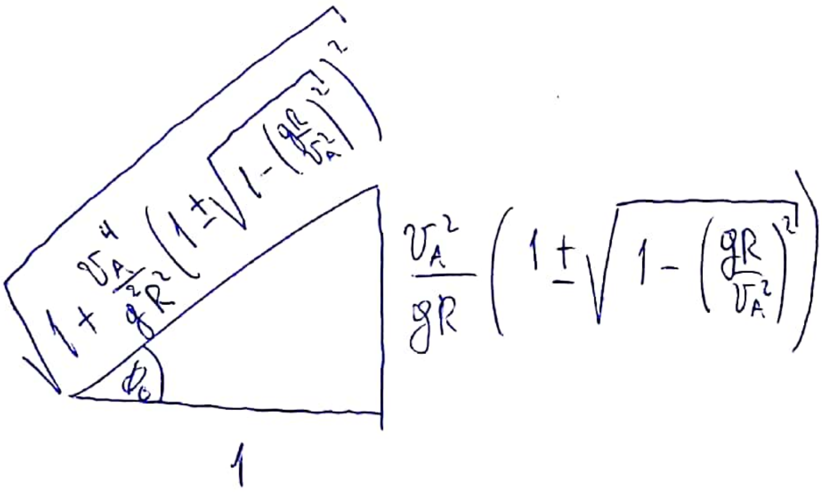
$$\frac{(v_A \cos\phi_0\, \hat{x} + v_0\, \hat{y})\cdot\hat{x}}{\sqrt{v_A^2\cos^2\phi_0 + v_0^2}} = \cos(\psi_0)$$

$$\frac{v_A\cos\phi_0}{\sqrt{v_A^2\cos^2\phi_0 + v_0^2}} = \cos(\psi_0)$$

Sin embargo, en este caso basta usar la tangente.

$$\operatorname{tg}(\psi_0) = \frac{v_0}{v_A\cos(\phi_0)}$$

Veamos ϕ_0 en un triángulo



Entonces,

$$\frac{1}{\cos(\phi_0)} = \sqrt{1 + \frac{v_A^4}{g^2R^2}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{gR}{v_A^2}\right)^2}\right)^2}$$

Así,

$$\varphi_0 = \text{arctg}\left(\frac{v_0}{v_A}\sqrt{1 + \frac{v_A^4}{g^2R^2}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{gR}{v_A^2}\right)^2}\right)^2}\right)$$

b) En este caso, debe imponerse en las ecuaciones cinemáticas para la flecha que $t = \frac{\pi R}{v_0}$ (Tiempo en que $\theta = \pi$), y que el X final es R. O sea,

$$2R = v_A \cos(\phi_0)\frac{\pi R}{v_0}$$

$$0 = v_A \text{sen}(\varphi_0)\frac{\pi R}{v_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\pi R}{v_0}\right)^2$$

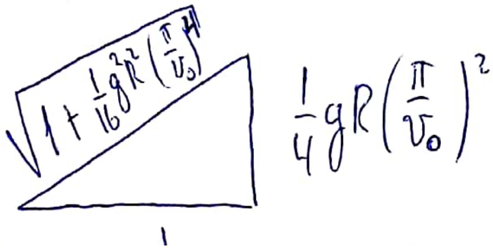
$$\Rightarrow$$

$$2R = v_A \cos(\phi_0)\frac{\pi R}{v_0} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{\pi R}{v_0}\right)^2 = v_A \text{sen}(\phi_0)\frac{\pi R}{v_0} \quad (4)$$

Con $\frac{(4)}{(3)}$: $\text{tg}(\phi_0) = \frac{1}{4}gR\left(\frac{\pi}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \phi_0 = \text{arctg}\left(\frac{1}{4}gR\left(\frac{\pi}{v_0}\right)^2\right)$

Ahora debemos encontrar v_A. Reemplazamos ϕ_0 en (3)



$$\cos(\phi_0) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}g^2R^2\left(\frac{\pi}{v_0}\right)^4}}$$

De (3), $$v_A = \frac{2v_0}{\pi}\sqrt{1+\frac{1}{16}g^2R^2\left(\frac{\pi}{v_0}\right)^4}$$ (En realidad no lo utilizamos. Sólo por completitud)

Ahora para φ_0, podemos usar la misma ecuación de la parte a)

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{v_0}{v_A\cos(\varphi_0)}$$

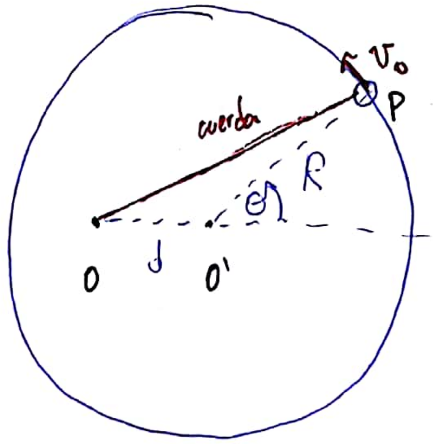
Pero, de (3),

$$v_A\cos(\varphi_0) = \frac{2v_0}{\pi}$$

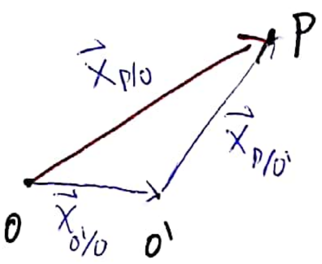
$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

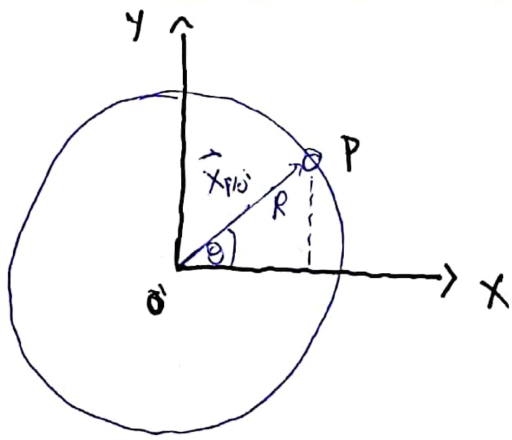
2. Vamos a dibujar la situación desde arriba



a) Será necesario encontrar el largo de cuerda que reposa sobre la mesa. Como es complicado parametrizar la posición de P desde O, lo haremos desde O' para luego aplicar nuestros conocimientos de movimiento relativo.



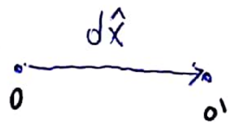
Podemos establecer nuestro sistema de coordenadas así,



Podemos ver que

$$\vec{X}_{P/O'} = R\cos\theta\,\hat{x} + R\operatorname{sen}\theta\,\hat{y}$$

Es claro también que $\vec{x}_{O'/O} = d\hat{x}$



Entonces, $\vec{x}_{P/O} = (d + R\cos\theta)\hat{x} + R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{y}$

Al igual que en el problema anterior, $\theta = \frac{v_0}{R}t$. Luego,

$$\vec{x}_{P/O} = \left(d + R\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)\hat{x} + R\,\text{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right)\hat{y}$$

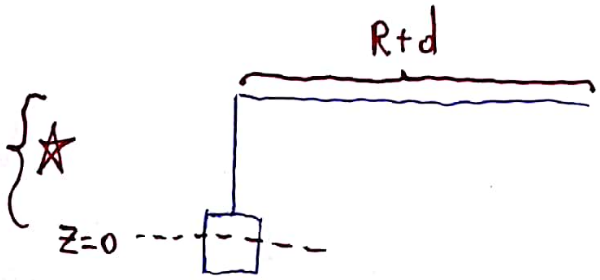
Para ver el largo de la cuerda sobre la mesa,

$$\|\vec{x}_{P/O}\| = \sqrt{\vec{x}_{P/O}\cdot\vec{x}_{P/O}} = \sqrt{\left(d + R\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)^2 + R^2\,\text{sen}^2\left(\frac{v_0}{R}t\right)}$$

$$= \sqrt{d^2 + 2dR\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) + R^2\left(\cos^2\left(\frac{v_0}{R}t\right) + \text{sen}^2\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)}$$

$$= \sqrt{d^2 + R^2 + 2dR\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)}$$

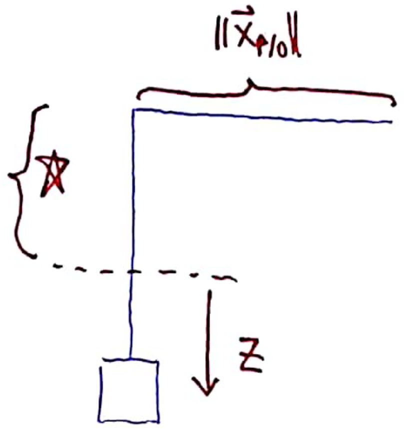
Ahora relacionemos el largo de la cuerda sobre la mesa con la altura de la caja. Veamos la mesa de frente. En $t=0$, $\|\vec{x}_{P/O}\| = R + d$



Si l es el largo total de la cuerda,

$$R + d + ☆ = l$$

Ahora veamos qué pasa para un tiempo posterior. La pelota se acerca a O y la caja baja. Definiremos por conveniencia la coordenada z positiva hacia abajo.



Como la cuerda es inextensible, su largo no cambia

$$\|\vec{X}_{P/O}\| + ★ + z = \ell$$

Igualando las ecuaciones anteriores,

$$R + d + ★ = \|\vec{X}_{P/O}\| + ★ + z$$

$$z = (d+R) - \|\vec{X}_{P/O}\|$$

$$z = d + R - \sqrt{d^2 + R^2 + 2dR\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)}$$

b) Para encontrar la distancia recorrida por un móvil, recordemos que

$$S = \int_C ds = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

En el caso de la caja, sólo tiene movimiento en z.

$$S = \int_0^{t_f} \sqrt{\dot{z}^2}\, dt = \int_0^{t_f} |\dot{z}|\, dt \, .$$

Son dos vueltas, $\theta = 4\pi = \frac{v_0}{R} t_f$

$$t_f = \frac{4\pi R}{v_0}$$

Ahora separamos el intervalo de integración en las regiones donde $\dot{z} \geq 0$ y $\dot{z} < 0$. Derivemos z

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}\left(d+R-\sqrt{d^2+R^2+2dR\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{d^2+R^2+2dR\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)}}\cdot\left(-2dR\frac{v_0}{R}\operatorname{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)$$

$$= \frac{dv_0\operatorname{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right)}{\sqrt{d^2+R^2+2dR\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)}} = \text{algo positivo}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right)$$

$$= \text{algo positivo}\cdot\operatorname{sen}(\theta)$$

Basta acordarse del signo del seno (Coordenada Y en la circunferencia unitaria)

$0 < \theta < \pi \rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$

$\pi < \theta < 2\pi \rightarrow \operatorname{sen}(\theta) < 0$

...

$2\pi < \operatorname{sen}(\theta) < 3\pi \rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$

$3\pi < \operatorname{sen}(\theta) < 4\pi \rightarrow \operatorname{sen}(\theta) < 0$

Entonces, dividimos el intervalo en 4

$0 < t < \frac{\pi R}{v_0} \rightarrow \dot{z} > 0$

$\frac{\pi R}{v_0} < t < \frac{2\pi R}{v_0} \rightarrow \dot{z} < 0$

$\frac{2\pi R}{v_0} < t < \frac{3\pi R}{v_0} \rightarrow \dot{z} > 0$

$\frac{3\pi R}{v_0} < t < \frac{4\pi R}{v_0} \rightarrow \dot{z} < 0$

Con esto,

$$S = \left[\int_0^{\frac{\pi R}{v_0}} + \int_{\frac{2\pi R}{v_0}}^{\frac{3\pi R}{v_0}} - \int_{\frac{\pi R}{v_0}}^{\frac{2\pi R}{v_0}} - \int_{\frac{3\pi R}{v_0}}^{\frac{4\pi R}{v_0}} \right] \left[\dot{z}\, dt \right]$$

La integral de $\dot{z}$ es simplemente z. Luego, evaluamos z en los extremos de integración.

$$S = z(\pi R/v_0) - z(0) + z\left(\frac{3\pi R}{v_0}\right) - z(0) - z\left(\frac{2\pi R}{v_0}\right) + z\left(\frac{\pi R}{v_0}\right) - z\left(\frac{4\pi R}{v_0}\right) + z\left(\frac{3\pi R}{v_0}\right)$$

$$= 2d - 0 + 2d - 0 - 0 + 2d - 0 + 2d$$

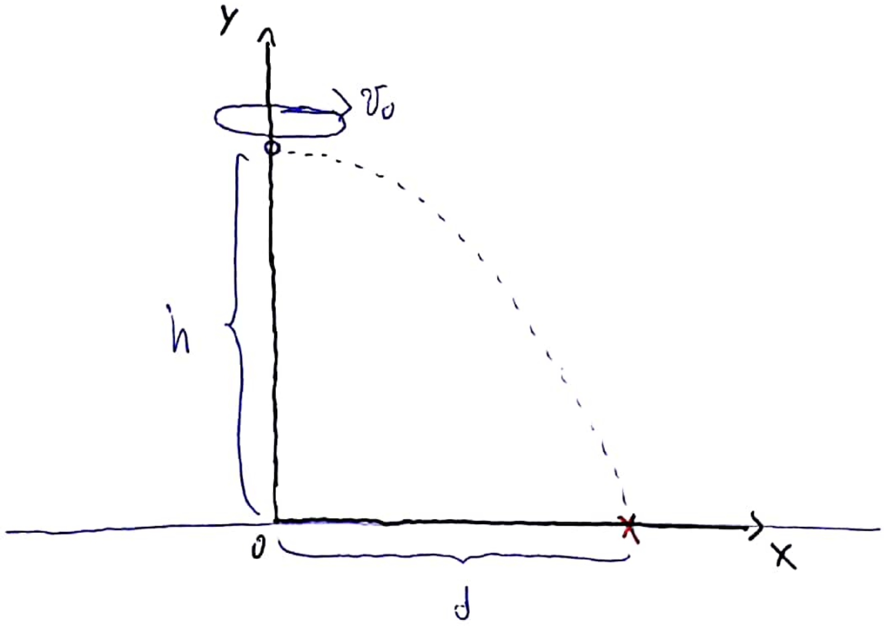
$$= 8d$$

ojo $\rightarrow$ $z\left(\frac{\pi R}{v_0}\right) = d + R - \sqrt{(R-d)^2}$

$= d + R - |R - d|$

$= d + R - (R - d)$ Pues $R > d$

3. Dibujemos la situación en el momento en que se suelta la bomba



Dado que la bomba se suelta, la velocidad inicial que lleva es igual a la del bombardero, $v_0 \hat{x}$. Luego, podemos escribir las ecuaciones cinemáticas

$$x = v_0 t \qquad (1)$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Calculemos el tiempo de caída, en (2) imponemos $y = 0$

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distancia horizontal recorrida debe ser d. Luego, en (1)

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

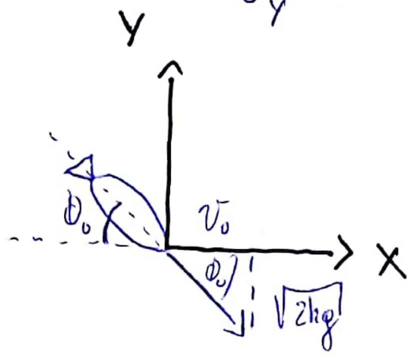
Esta ecuación relaciona d y v_0 con cosas conocidas (h y g), pero falta imponer algo.

Para que la bomba explote, el ángulo con que su punta (Vector velocidad) toca el suelo debe ser ϕ_0. Escribimos las ecuaciones cinemáticas para la velocidad:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_x = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad v_x = v_0$$

$$v_y = -gt \qquad\qquad v_y = -\sqrt{2hg}$$



$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\sqrt{2hg}}{v_0}$$

$$\therefore \quad v_0 = \sqrt{2hg}\, \operatorname{ctg}(\phi_0)$$

Entonces, $\quad d = 2h \operatorname{ctg}(\phi_0)$