Estática y Dinámica FIS1513

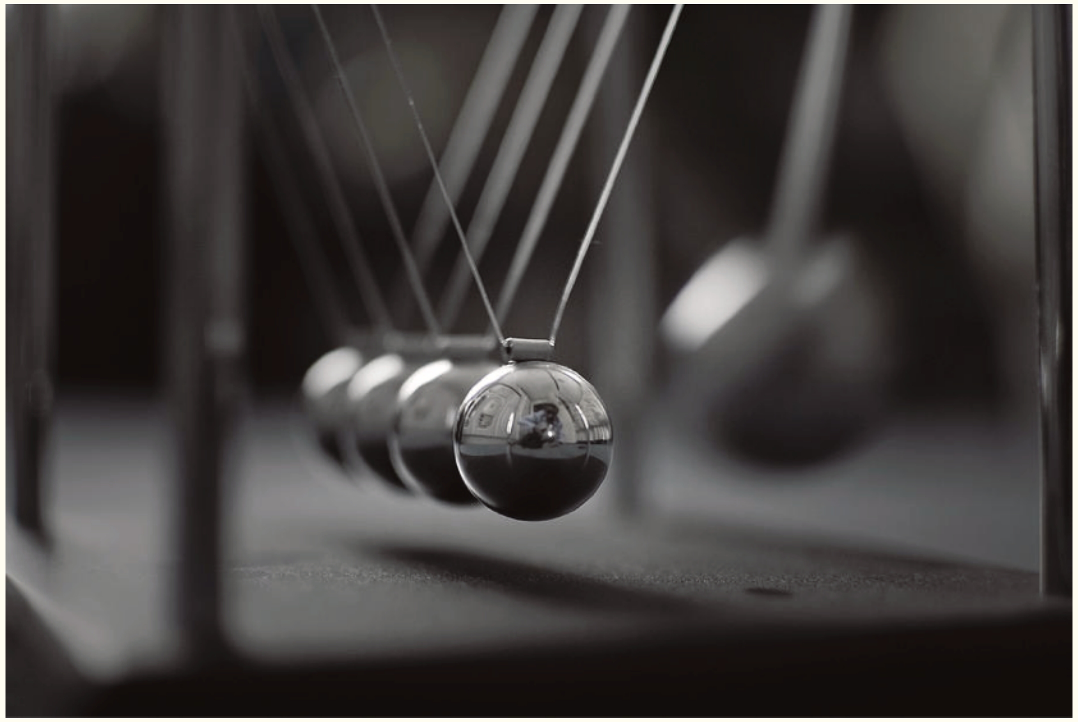
Clase #4

20-08-2018

Cinemática de una Partícula

Anuncios

- Pueden recoger sus cliqueras (también llamadas “tecleras”) en el laboratorio 1er piso edificio Raúl Deves
- Seguimos viendo si hubiera una sala aún más grande que la S9 para la cátedra
- Hoy hay ayudantía normal (sala K200)
- El lunes 27 tendremos clase en horario de ayudantía a las 15.30 (y clase normal a las 11.30)
  - El miércoles 29 tendrán ayudantía en horario de clase, lo cual se acomoda bien ya que la I1 es el 30 de Agosto
- Si alguien no es de esta sección y quiere acceso a las diapositivas, envíeme un correo(jpochoa@uc.cl)



Cinemática de una partícula

Seguimos en Cinemática pero ahora nos cambiamos a otros sistemas de coordenadas

12.7 Curvilinear Motion: Normal and Tangential Components

When the path along which a particle travels is *known*, then it is often convenient to describe the motion using n and t coordinate axes which act normal and tangent to the path, respectively, and at the instant considered have their *origin located at the particle.*

Planar Motion. Consider the particle shown in Fig. 12–24*a*, which moves in a plane along a fixed curve, such that at a given instant it is at position s, measured from point O. We will now consider a coordinate system that has its origin at a *fixed point* on the curve, and at the instant

12.8 Curvilinear Motion: Cylindrical Components

Sometimes the motion of the particle is constrained on a path that is best described using cylindrical coordinates. If motion is restricted to the plane, then polar coordinates are used.

Polar Coordinates. We can specify the location of the particle shown in Fig. 12–30*a* using a *radial coordinate* r, which extends outward from the fixed origin O to the particle, and a *transverse coordinate* θ,

Secciones 12.7-8 del Hibbeler

3.4 Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES 3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.

Sección 3.4 del Young & Freedman

Coordenadas Polares

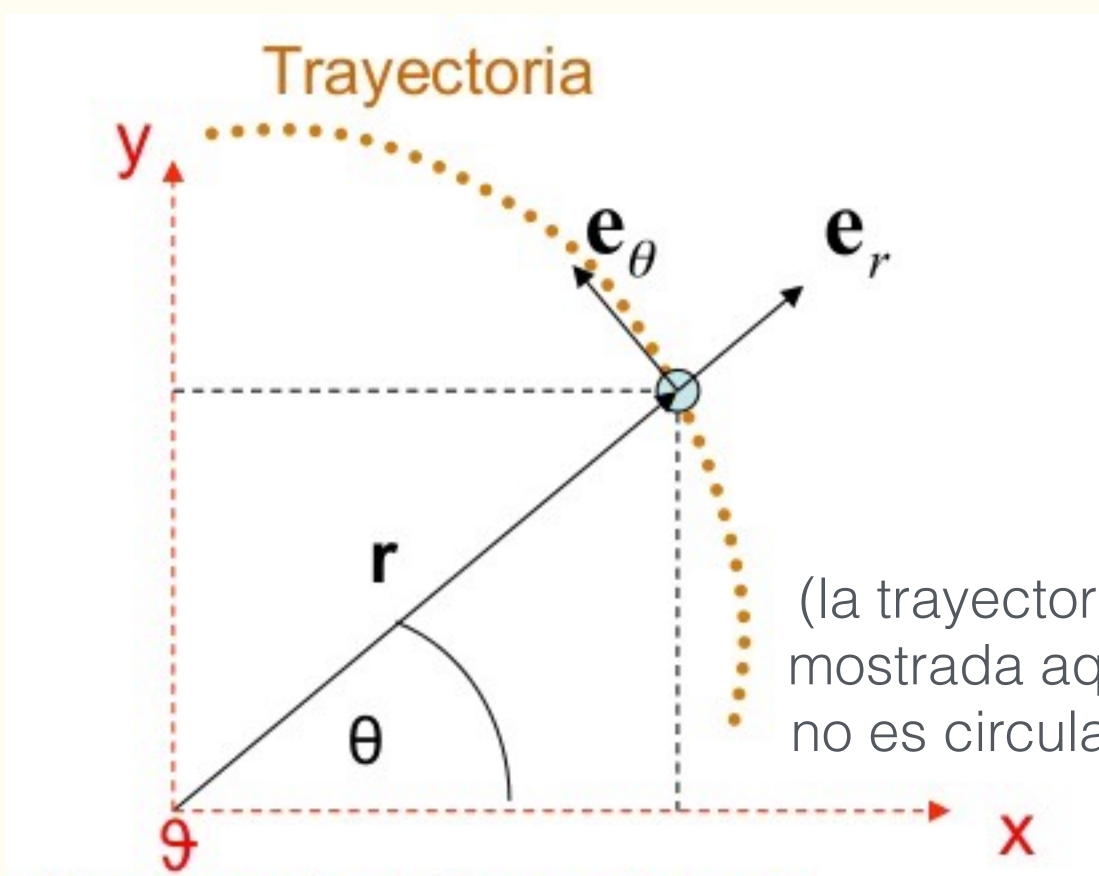
Ahora vamos a considerar el movimiento de una partícula en coordenadas polares y cilíndricas

Comencemos con polares: cualquier punto en un plano se puede ubicar con dos cantidades, r y θ

Le llamamos a los vectores unitarios correspondientes $\mathbf{e_r}$ y $\mathbf{e_\theta}$

$\hat{e}_r \rightarrow$ dirección radial, r
$\hat{e}_\theta \rightarrow$ dirección tangencial, θ

(también se pueden llamar $\hat{r}, \hat{\theta}$)



(la trayectoria mostrada aquí no es circular)

Le llamamos a los vectores unitarios correspondientes $\mathbf{e_r}$ y $\mathbf{e_\theta}$

El vector posición x(t) (o r(t)) en coordenadas cartesianas es:

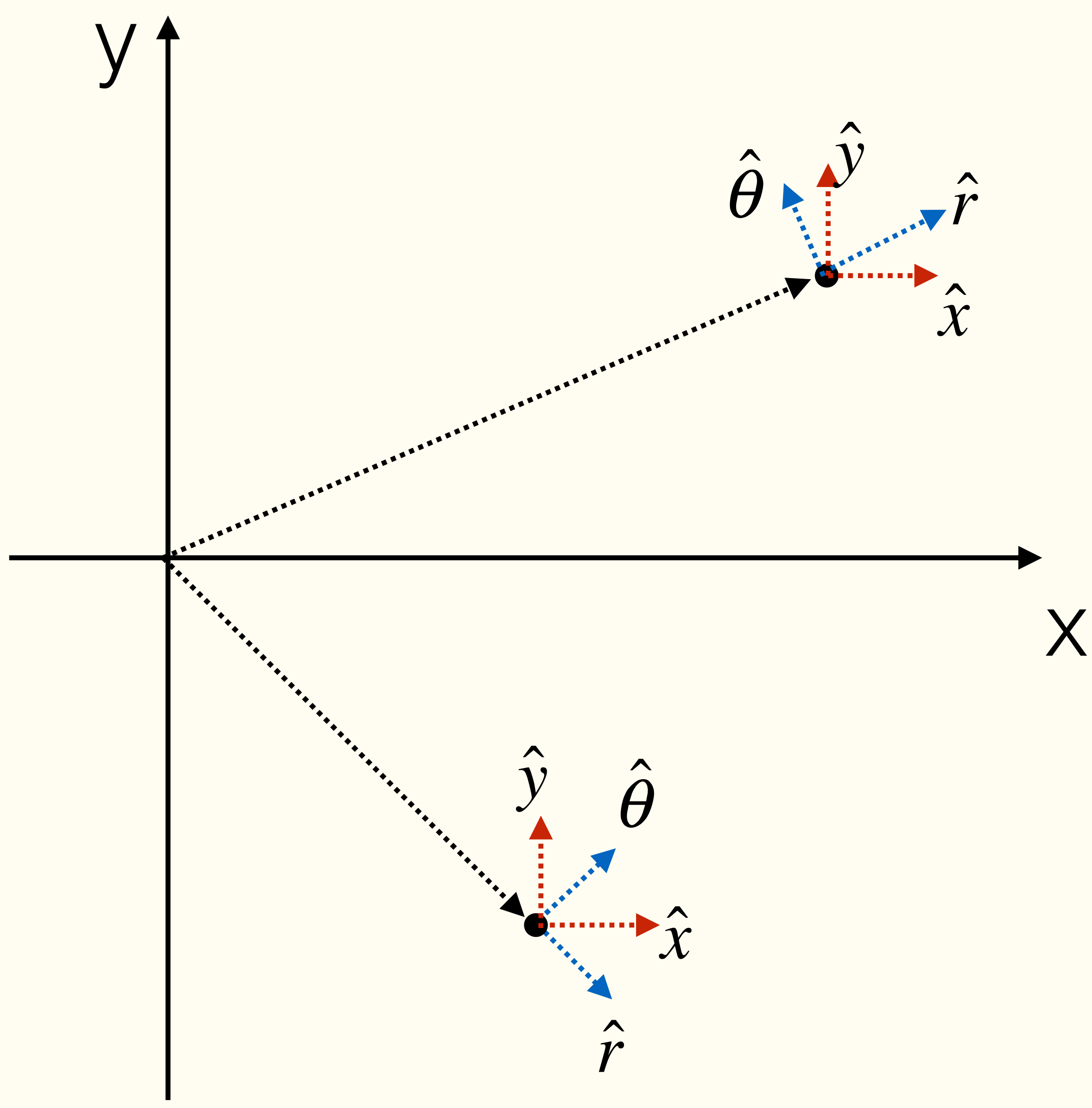
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Mientras que en coordenadas polares es simplemente:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r$$

Sobre los vectores unitarios

Hay una **gran** diferencia entre los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas y los de polares:

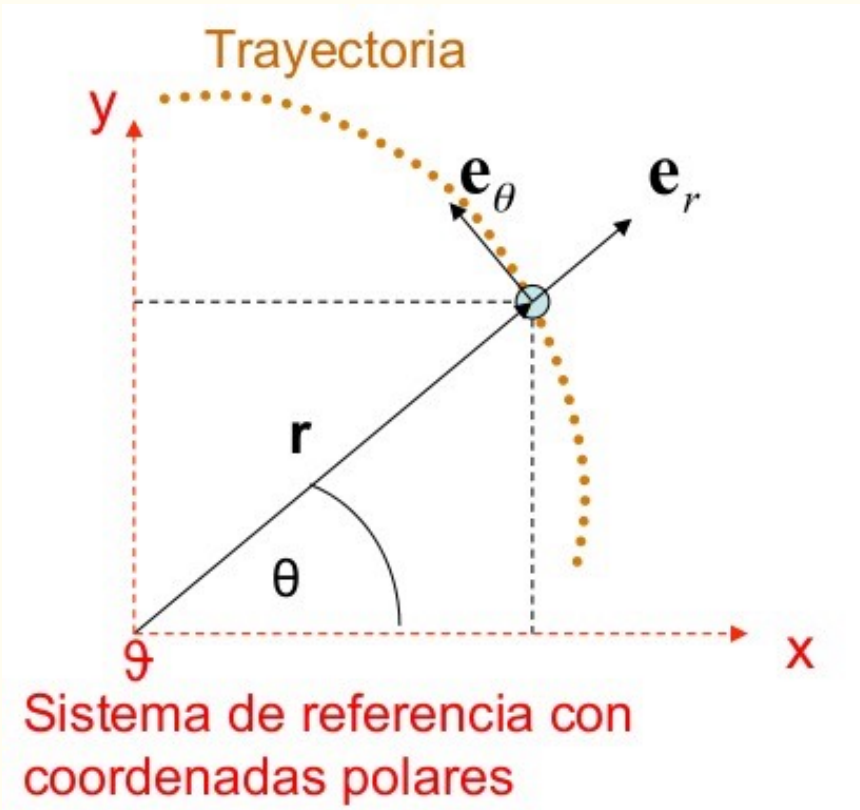


Los vectores unitarios cartesianos son constantes (los mismos) en todo el espacio.

¡Los de polares no, ya que **cambian con la posición**!

Relación entre Polares, Cartesianas y Cilíndricas

Ir de coordenadas polares a cartesianas es muy fácil:



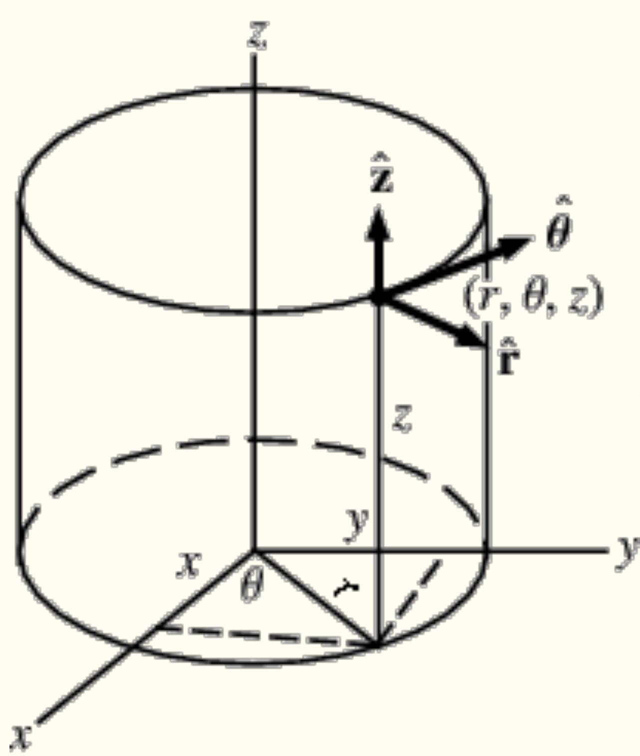
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Las relaciones para ir de cartesianas a cilíndricas se obtienen de las mismas ecuaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left({}^{y}\!/\!_{x} \right)$$

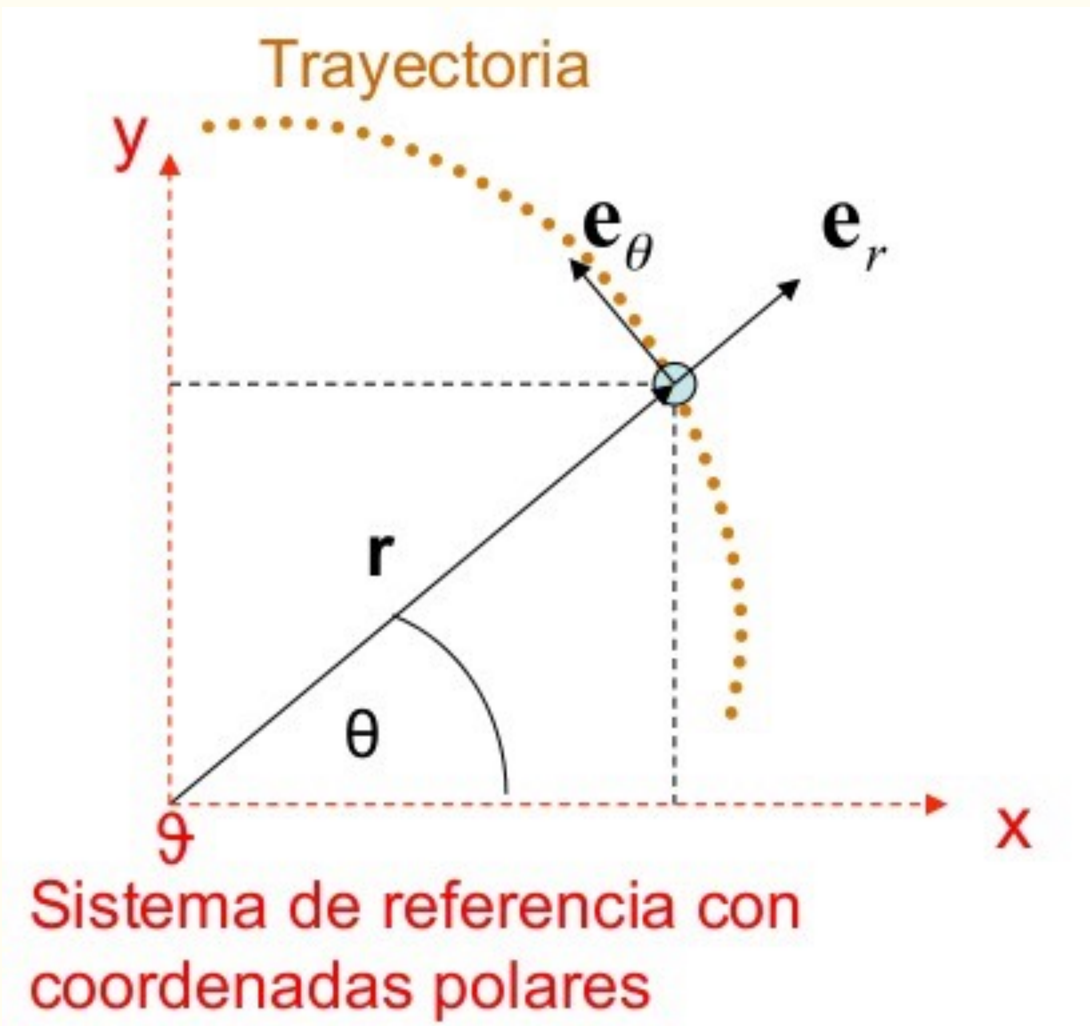


(podemos extender esto añadiendo z, la <u>misma coordenada que en cartesianas</u>; en este caso tendremos **coordenadas cilíndricas**)

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r + z(t)\hat{e}_z$$

Coordenadas Polares: Vectores Unitarios

¿Cómo expresar **e**



$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_z \times \hat{e}_r = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

Como ya mencionamos, aquí los vectores unitarios dependen de la posición (de θ específicamente)

Nótese que **en z el vector unitario es el mismo que en Cartesianas**.

Es fácil verificar que, como esperado, estos vectores son unitarios

Velocidad y Aceleración en Cartesianas

Si uno conoce la trayectoria seguida por una partícula en función del tiempo en coordenadas cartesianas (i.e. x(t), y(t) y z(t)), se puede determinar la velocidad y la aceleración de forma muy fácil:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \longrightarrow \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \longrightarrow \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

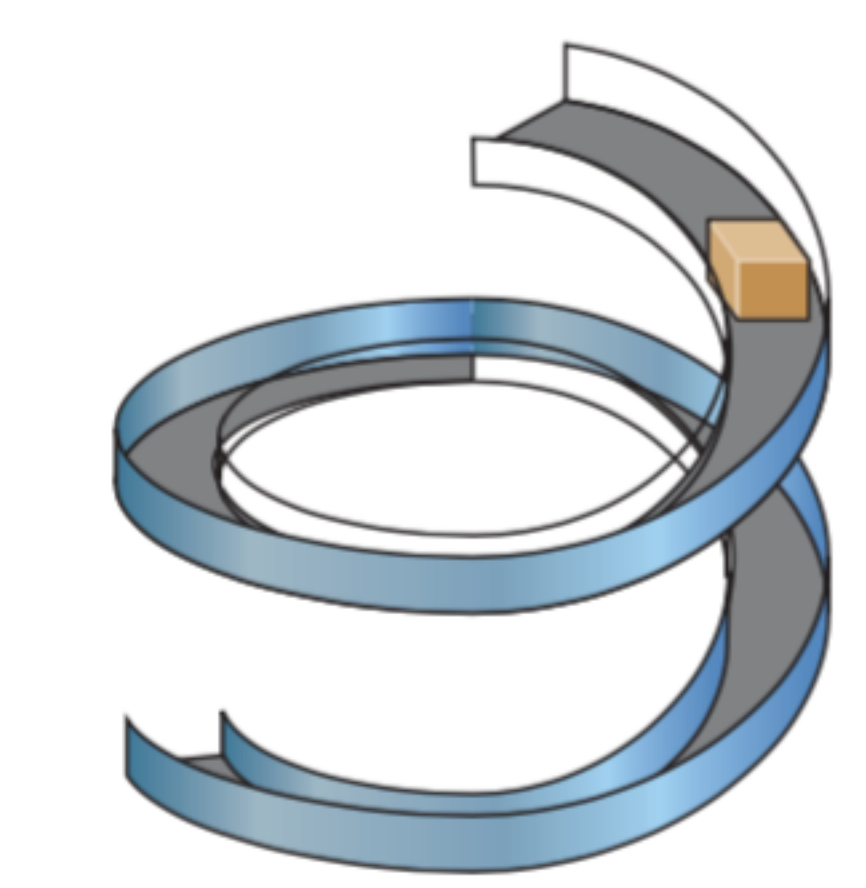
donde $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ y $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ (notación para simplificar las ecuaciones)

Ejemplo

(F12-20 en Hibbeler)

La posición de una caja que se desliza por una espiral está dada por

$$\vec{r} = 2\sin(2t)\hat{i} + 2\cos(t)\hat{j} - 2t^2\hat{k}$$



donde r está en metros, t está en segundos, y los argumentos de los senos y cosenos en radianes.

Determine la velocidad y la aceleración de la caja para cualquier tiempo.

(resolver en pizarra)

¡super papas!

Respuestas:

$$\vec{v} = 4\cos(2t)\hat{i} - 2\sin(t)\hat{j} - 4t\hat{k}$$

$$\vec{a} = -8\sin(2t)\hat{i} - 2\cos(t)\hat{j} - 4\hat{k}$$

Velocidad y Aceleración en Cartesianas

¿Qué pasa si ahora tenemos una trayectoria expresada en cilíndricas?
¿Cómo obtenemos la velocidad y la aceleración?

Recordemos que:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r + z(t)\hat{e}_z$$

por lo que:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{e}_r + \dot{z}(t)\hat{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}(t)\hat{e}_r + \ddot{z}(t)\hat{e}_z$$

¡Esto es incorrecto! Los vectores unitarios en polares no son constantes, y hay que derivarlos también

Derivando los Vectores Unitarios

¿Cómo derivar los vectores unitarios en polares?

Recordemos que:

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

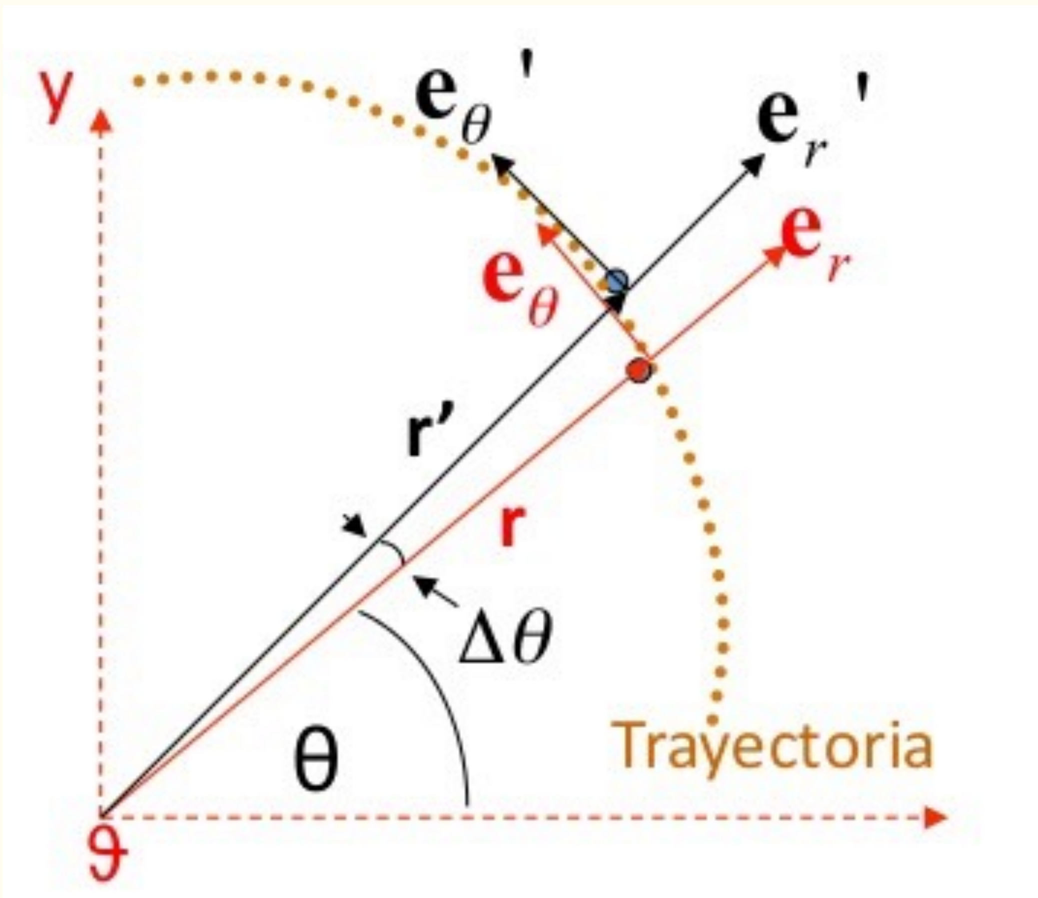
Por lo que, aplicando la regla de la cadena (recordando que θ también es una función del tiempo):

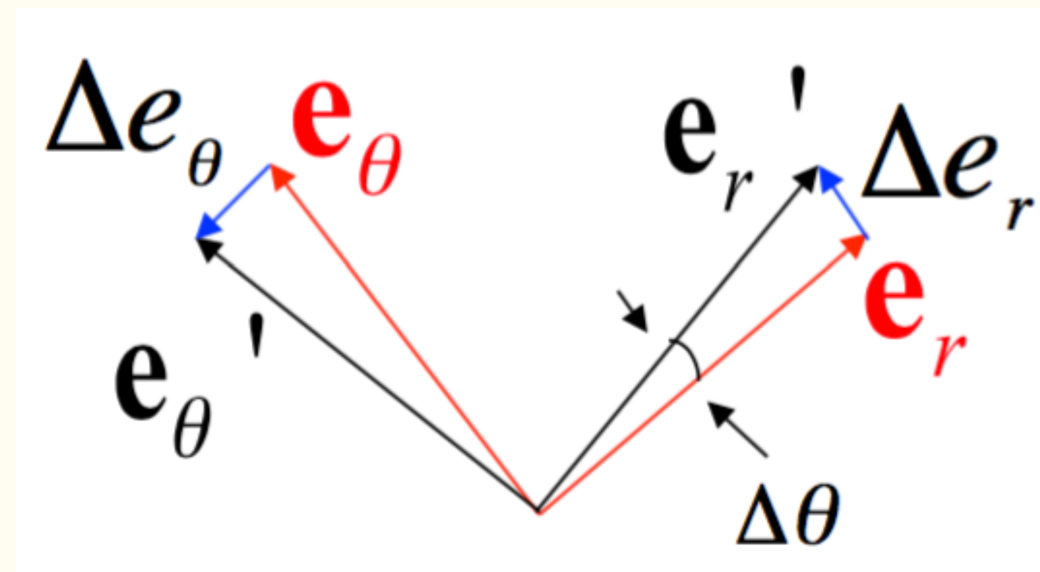
$$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

Paréntesis: viendo las derivadas graficamente

Las relaciones de la diapositiva pasada podrían parecer extrañas, pero se pueden entender gráficamente:

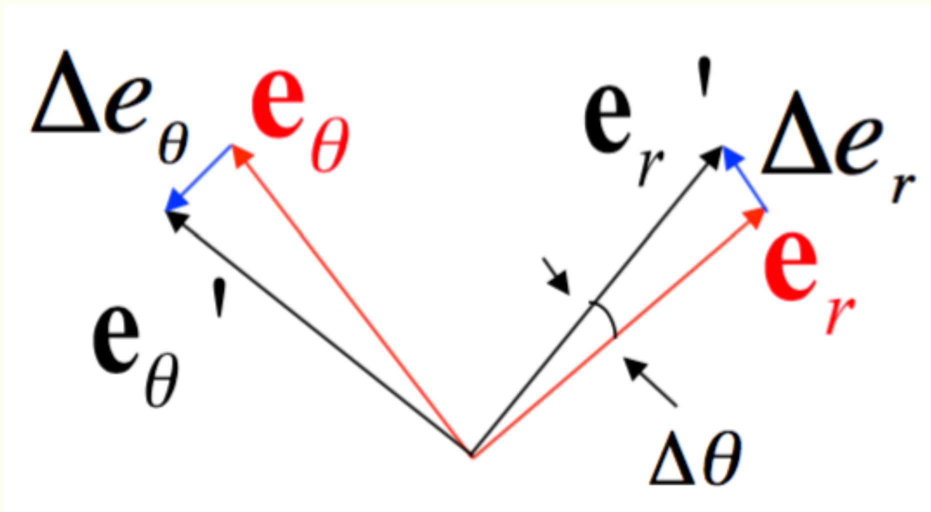




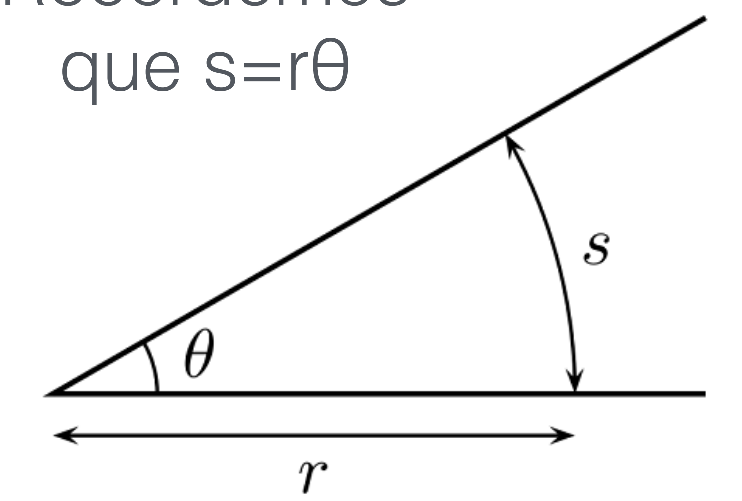
Supongamos que r cambia a r', y θ a θ', como mostrado en la figura. Esto hace que $\mathbf{e_r}$ cambie a $\mathbf{e_r}$**'**, y $\mathbf{e_\theta}$ a $\mathbf{e_\theta}$**'**.

Es fácil ver que $\mathbf{\Delta e_r}$ va en la dirección $\mathbf{e_\theta}$**,** y $\mathbf{\Delta e_\theta}$ en la dirección -$\mathbf{e_r}$ (ver imagen de la derecha)

Paréntesis: viendo las derivadas graficamente



Recordemos que s=rθ



En base a las figuras de arriba, ¿cuáles son las magnitudes de **Δe$_r$** y **Δe$_\theta$**?

$$\left|\Delta\hat{e}_r\right| \cong \Delta\theta\left|\hat{e}_r\right| \qquad \left|\Delta\hat{e}_\theta\right| \cong \Delta\theta\left|\hat{e}_\theta\right|$$

Concluimos que:

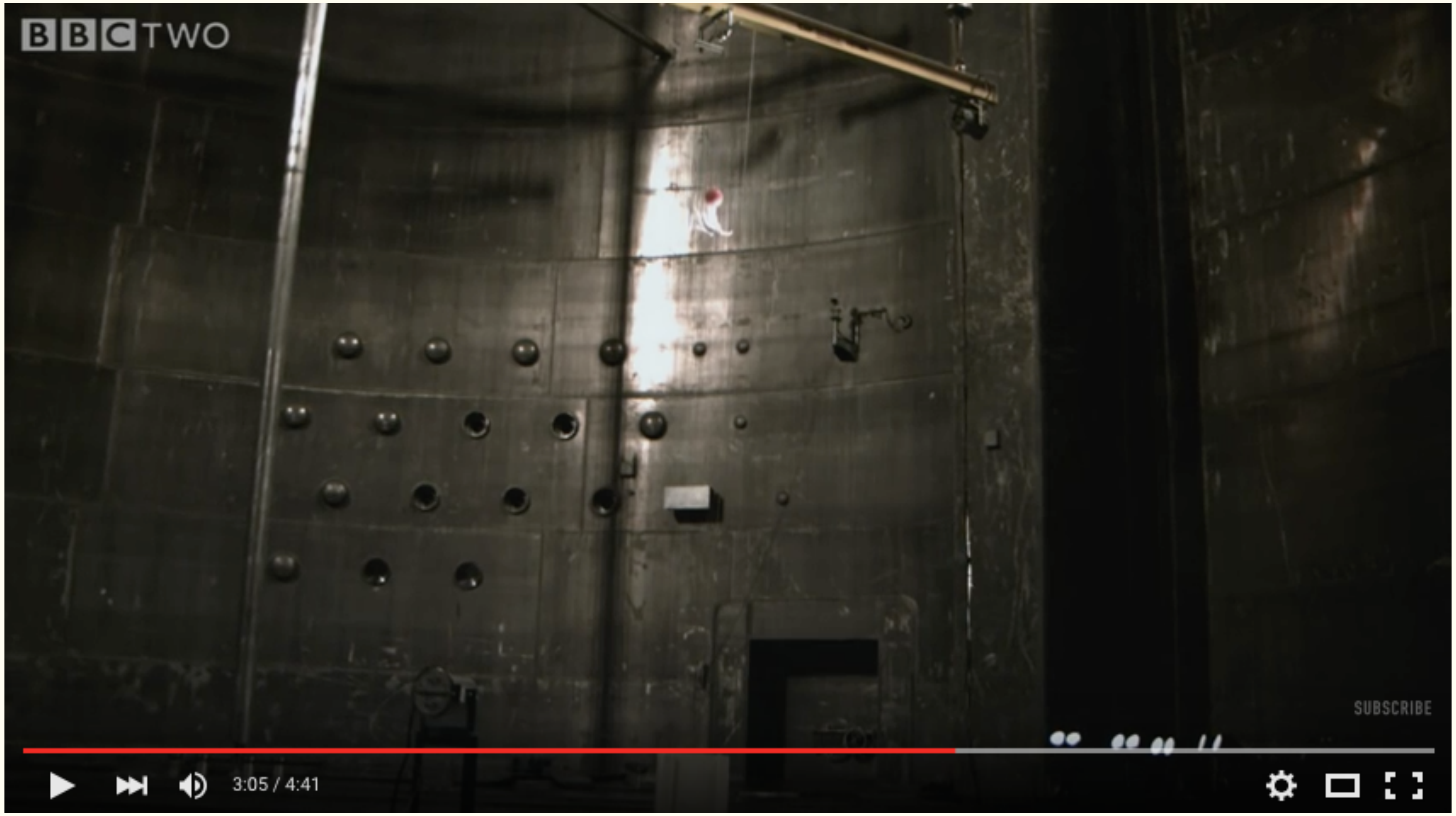
$$\Delta\hat{e}_r \cong \Delta\theta\hat{e}_\theta \qquad \Delta\hat{e}_\theta \cong -\Delta\theta\hat{e}_r$$

Dividiendo por Δt y tomando el límite a 0, confirmamos que:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

Experimento #1 (virtual)

El experimento que hicimos en la clase anterior con la pluma se hizo en una instalación de la NASA, que es la cámara de vacío más grande en el mundo



Ver "Brian Cox visits the world's biggest vacuum chamber"
https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

Experimento #2

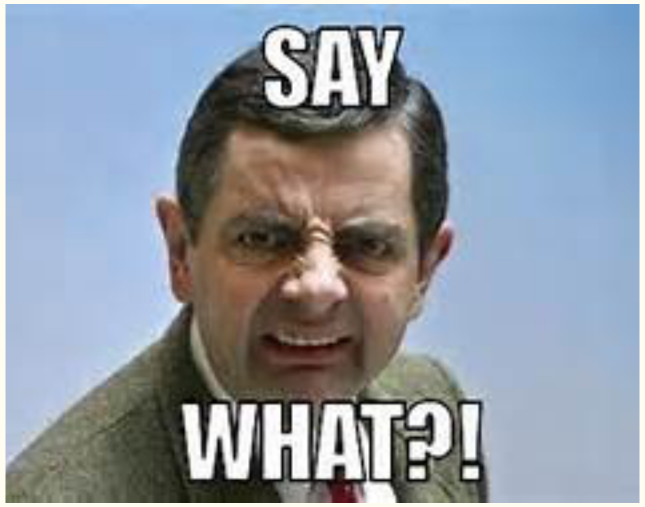
¿Hay alguna manera de disminuir (o quitar) la resistencia del aire sin tener que hacer un vacío?

¡Sí!

¡Esto se puede lograr si dejamos caer un libro por abajo de la pluma!

Comentario Histórico

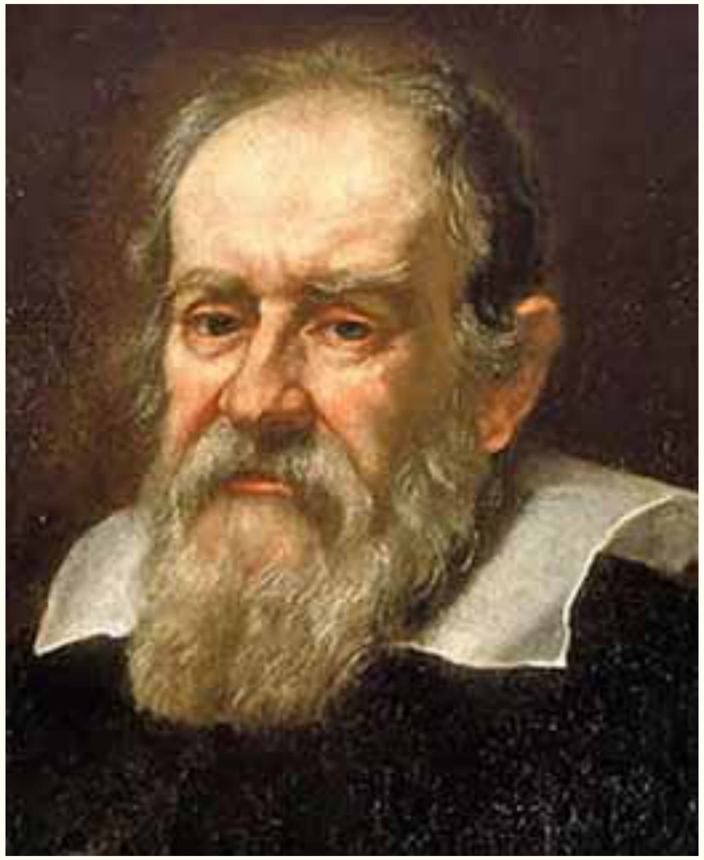
Es sorprendente es que **las ideas de Aristóteles fueron aceptadas por milenios**, hasta Galileo (~1600 después de Cristo).



¿Cómo puede ser que no se hayan dado cuenta antes?

Aristóteles (y los que vinieron después) no fueron buenos experimentadores. ¡Nunca probaron sus ideas de forma rigurosa!

De hecho Aristóteles también dijo que los hombres tienen más dientes que las mujeres. ¡Un simple experimento con su señora debiera haber matado esa teoría!



Incluso en nuestros dias, mucha gente todavía piensa que un objeto más pesado cae más rápido: https://www.youtube.com/watch?v=aRhkQTQxm4w

Velocidad y Aceleración en Polares

Regresando al cálculo de la velocidad en polares:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\underbrace{\dot{\hat{e}}_r}_{= \dot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

Y también:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\underbrace{\dot{\hat{e}}_r}_{= \dot{\theta}\hat{e}_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\underbrace{\dot{\hat{e}}_\theta}_{= -\dot{\theta}\hat{e}_r}$$

Y nos queda que:

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta}$$

Nota: esto tiene sentido. Es fácil ver gráficamente que tanto la velocidad como la aceleración tienen que tener componente en otras direcciones aparte de la radial

Velocidad y Aceleración en Cilíndricas

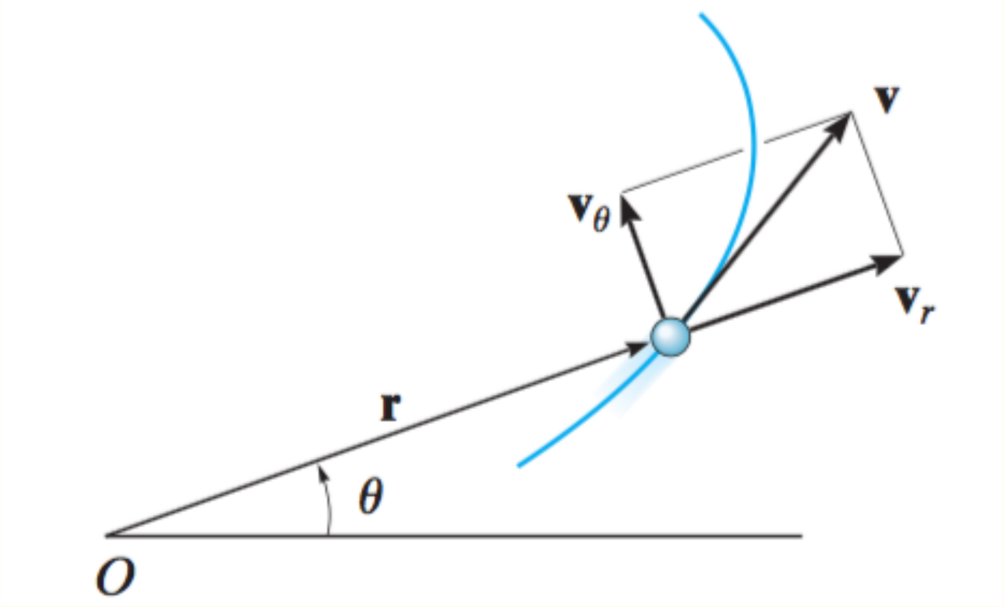
Resumiendo, y extendiendo a coordenadas cilíndricas, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}}$$

(hicimos la extensión a cilíndricas simplemente añadiendo la dimensión z como en cartesianas)

¿Para qué me sirve esto?

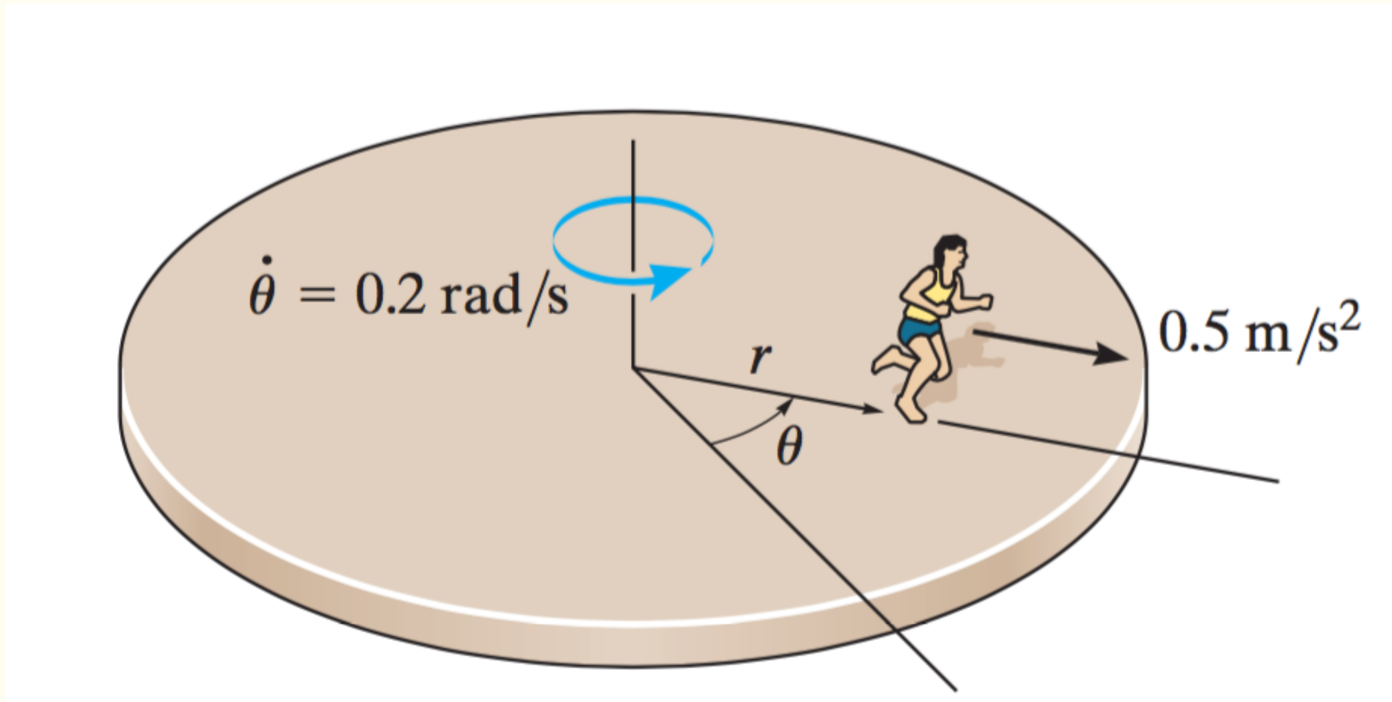
Si yo conozco la trayectoria que sigue una partícula como r(t), θ(t) y z(t) puedo calcular la velocidad y la aceleración en cualquier momento utilizando estas relaciones



(Comentario: en general la velocidad en θ no tiene por qué ser tangencial a la trayectoria. Esto es cierto sólo en movimiento circular).

Ejemplo

(12.170 en el Hibbeler)



Un joven en reposo y en el centro de una plataforma circular comienza a correr con una aceleración constante de $0.5 m/s^2$ hacia afuera en la dirección radial desde el reposo. La plataforma está rotando a una velocidad angular de 0.2 rad/s. Determine las componentes radiales y transversales de la velocidad y de la aceleración del joven en t=3s. Puede considerarlo como si fuera una partícula (es decir, puede ignorar su tamaño).

(resolver en pizarra)

Respuestas:

v_r = 1.5 m/s; v_θ=0.450 m/s

a_r = 0.410 m/s^2; a_θ=0.6 m/s^2

Próxima clase: cinemática de una partícula