Clase #27

19-11-2018

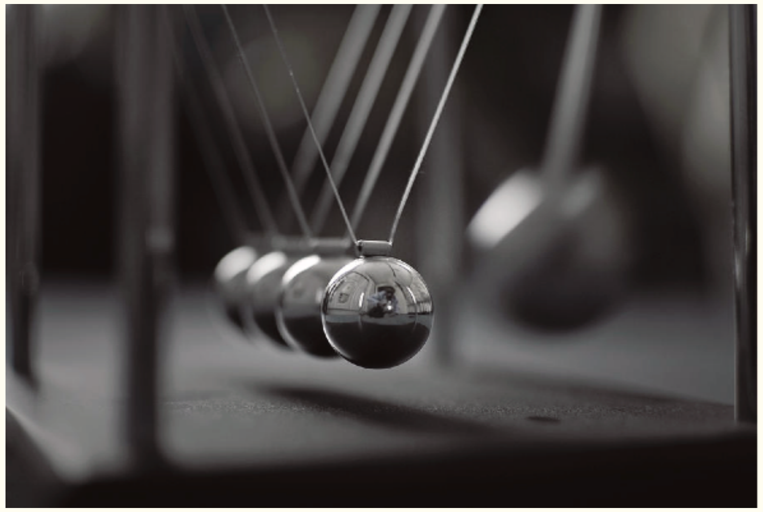
Cuerpo Rígido

Estática y Dinámica

FIS1513

Anuncios

- Nos quedan 2 clases
- El examen es el jueves 29 de Noviembre (menos de 2 semanas)
  - Tengo que salir de viaje del 21 al 28 de Noviembre por trabajo
  - Tendré horario de consulta el 21 justo después de clase en esta misma sala, y le pediré a uno de nuestros ayudantes que tenga horario de consulta la semana entrante
  - Como siempre, respondo preguntas por correo (jpochoa@uc.cl)
- Hoy terminamos la materia. El miércoles vamos a hacer experimentos, cliqueras y ejercicios



Cuerpo Rígido: Energía Rotacional, Rotación y Translación Combinadas

Para toda esta parte es mejor el Young & Freedman, Capítulos 9-10.


ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

9

? Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un


10

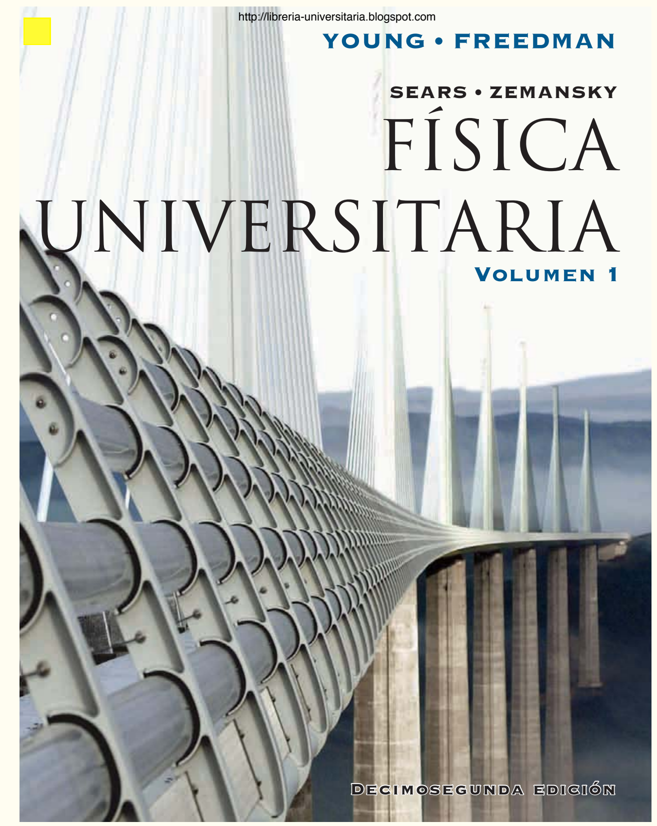
DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.

? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



<u>Específicamente:</u>

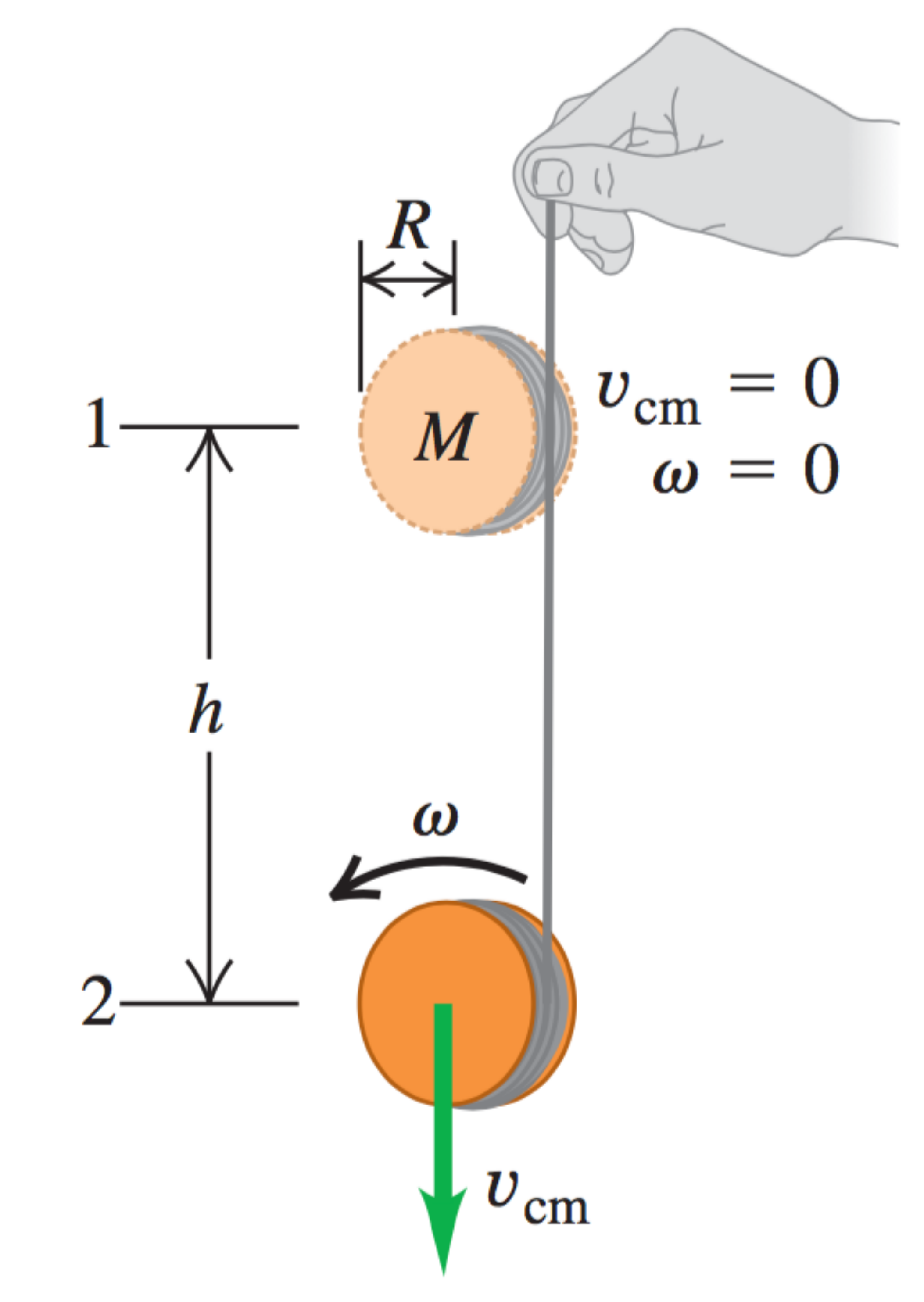
Energía Rotacional: 9.4

Combinación de Rotación y Traslación: 10.3

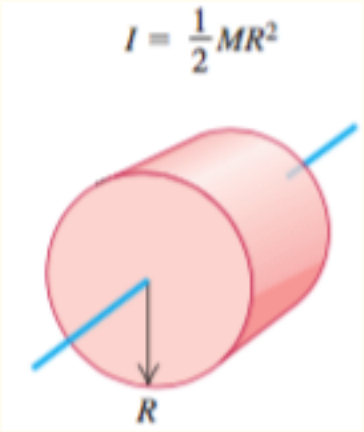
Ejemplo

(10.4 en Young&Freedman)

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R, como mostrado en la figura. Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Calcule la rapidez del centro de masa del cilindro después de caer una distancia h.



(puede usar la siguiente información de una tabla)



Respuesta: $v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

Fuerzas Que No Hacen Trabajo

Al utilizar energía para estudiar un movimiento de rotación y traslación, es importante considerar que hay algunas fuerzas que no hacen trabajo.

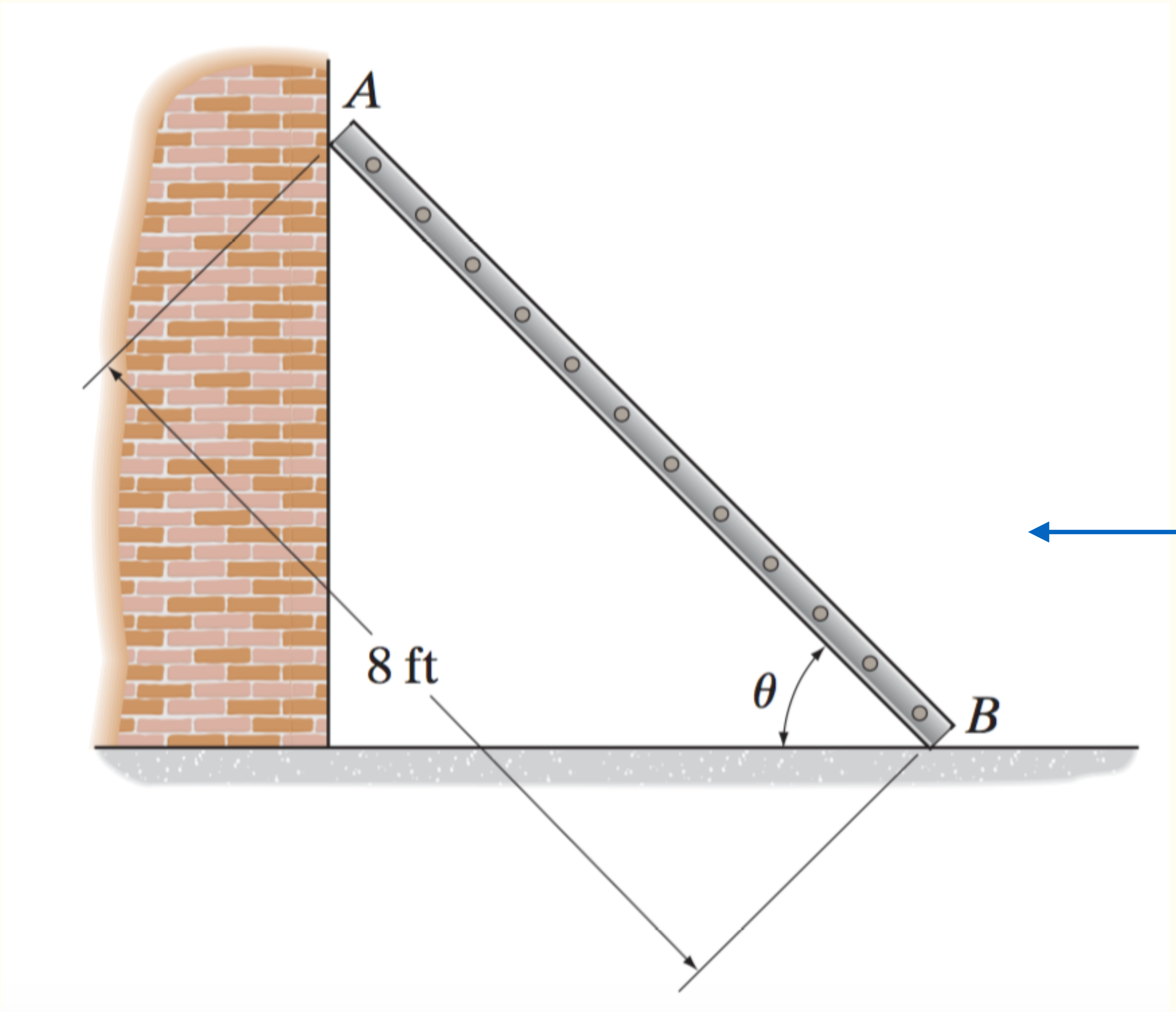
Principio General: si una fuerza se aplica sobre un punto de un cuerpo rígido, y ese punto no se desplaza (o se desplaza en la dirección perpendicular a la fuerza), esa fuerza no hace trabajo.

Esto se puede entender por lo siguiente:

- Debido a la definición de trabajo, si la partícula sobre la cual se aplica la fuerza no se desplaza o se desplaza en la dirección perpendicular a la fuerza, entonces la fuerza no hizo trabajo sobre esa partícula.

- Uno podría pensar que la partícula sobre la cual se aplica la fuerza ejerce fuerzas sobre otras y por ende hace trabajo sobre otras partículas del mismo cuerpo. Sin embargo, resulta que el trabajo neto hecho por todas las fuerzas internas es cero (esto se puede demostrar, aunque no lo haremos aquí).

Sobre Fuerzas que no Hacen Trabajo:



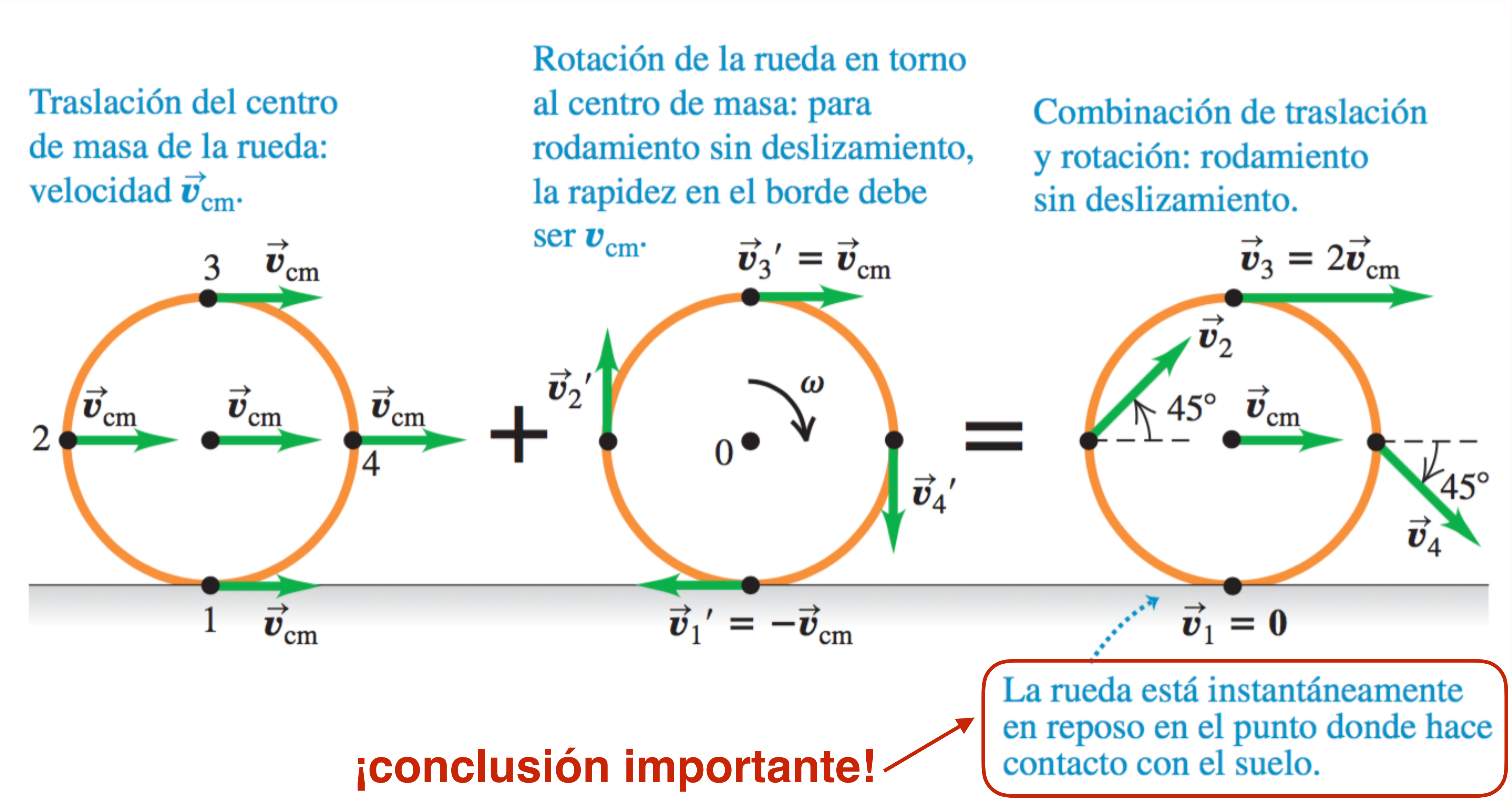
Por ejemplo, una escalera que resbala y cae.

Las normales en A y en B no hacen trabajo ya que el desplazamiento es en la dirección normal a estas fuerzas

Sobre Fuerzas que no Hacen Trabajo:

Pero el ejemplo típico de esto es el de un objeto que rueda sin deslizarse

Un objeto que rueda tiene un movimiento de traslación y rotación. La velocidad en cada punto es la suma vectorial de la velocidad debido a la traslación y la velocidad debido a la traslación:



Sobre Fuerzas que no Hacen Trabajo:

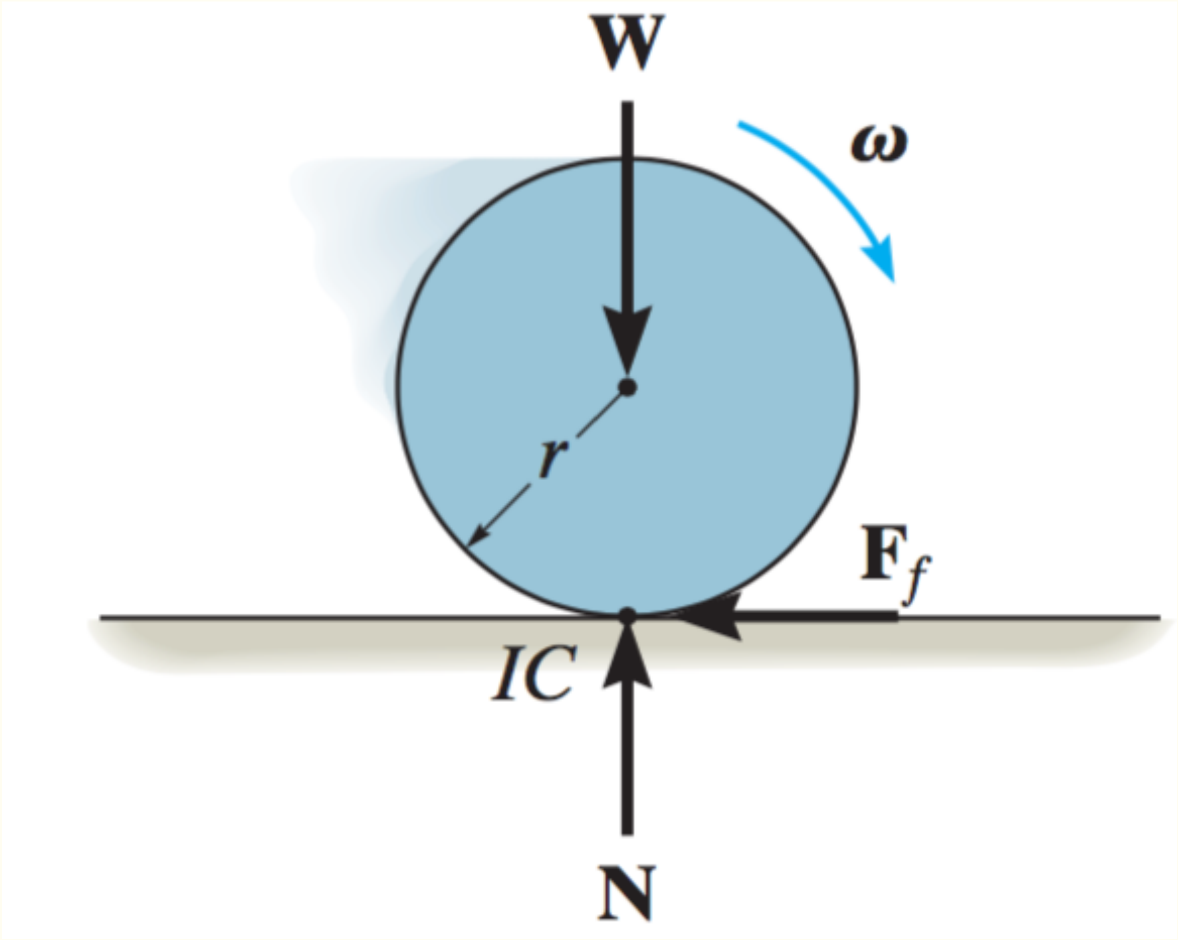
La consecuencia de este hecho es algo sumamente útil:

Para un cuerpo rígido de sección perfectamente circular que rueda sin deslizarse en una superficie perfectamente plana, la fuerza de roce no hace trabajo

Esto es debido a que la fuerza de roce se aplica siempre sobre un punto que, en cada instante, no tiene velocidad.

Este punto se puede ver como un "centro instantáneo de rotación" (IC)

Esto significa que, en principio, un objeto **puede rodar sobre una superficie con roce y no perder energía mecánica**

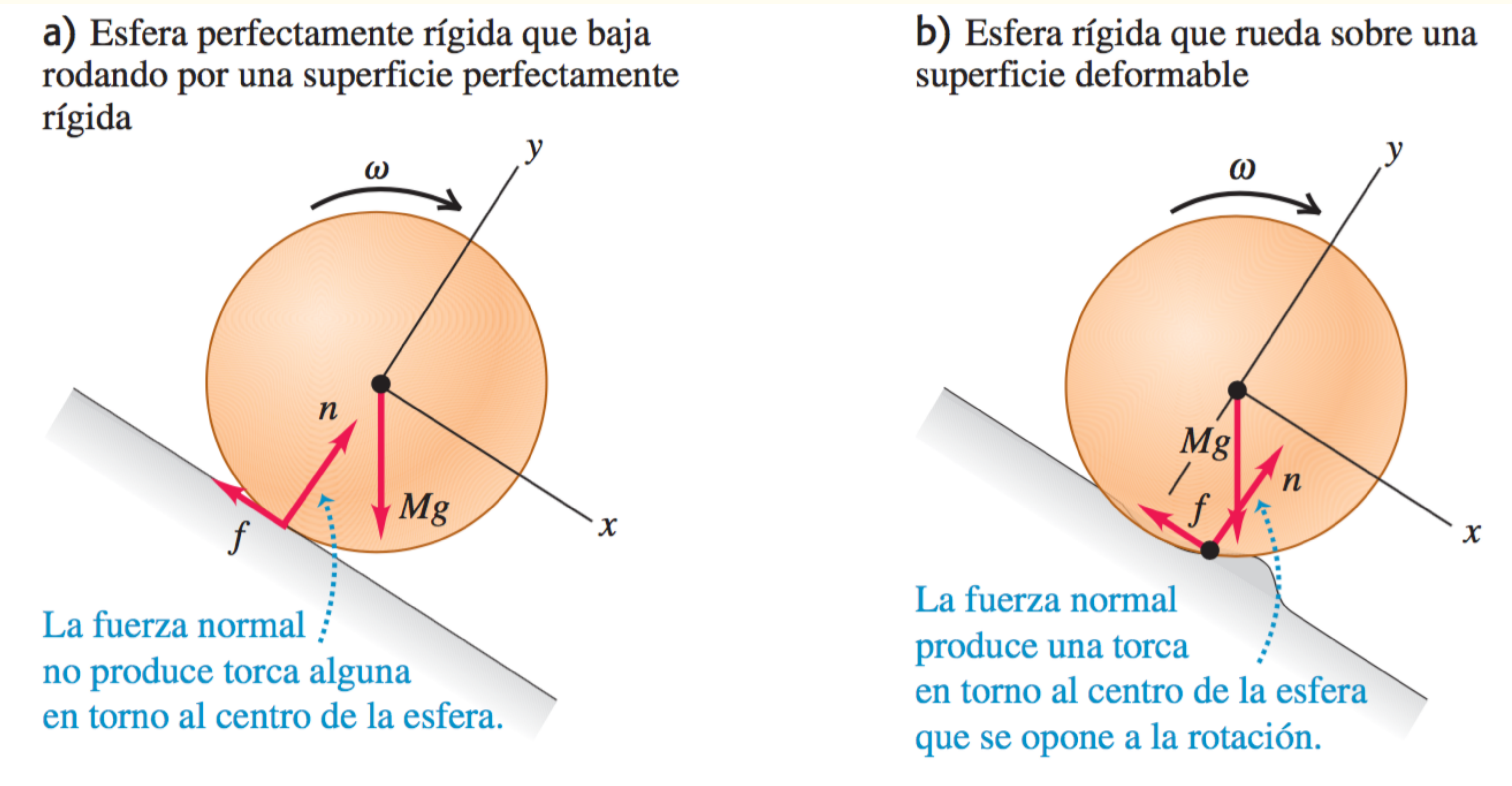


Nota: haremos un experimento para demostrar esto la próxima semana

En la Vida Real:

En la vida real sin embargo hay mecanismos (aparte del deslizamiento) que ocasionan pérdidas de energía de un cuerpo que rueda.

El principal mecanismo es la existencia de imperfecciones en las superficies o deformaciones que causan "**baches**":



Experimento #1

Hace poco dijimos que, para un cuerpo de sección eficaz circular rodando sobre una superficie plana y sin “baches”, el roce no hace trabajo.

Esto significa que en principio puede seguir rodando hasta el infinito, (siempre y cuando no se encuentre con algún bache u obstáculo)

¿Cómo verificar esto experimentalmente?

Experimento

Introduciendo el “Disco de Euler”:

Momento Angular: Rotación y Translación

Casi terminamos con cuerpo rígido. Lo único que nos falta es ver cómo calcular el momento angular de un objeto que se traslada y rota al mismo tiempo

El momento angular total respecto a un punto fijo O es la suma de las contribuciones de cada partícula:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Una vez más usamos las coordenadas relativas al CM:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,'} \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{\,'}$$

Nos queda:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,'}\right) \times m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{\,'}\right)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_{CM} \times \left(m_i \vec{v}_{CM}\right) + \vec{r}_{CM} \times \left(m_i \vec{v}_i^{\,'}\right) + \vec{r}_i^{\,'} \times \left(m_i \vec{v}_{CM}\right) + \vec{r}_i^{\,'} \times \left(m_i \vec{v}_i^{\,'}\right)\right]$$

Momento Angular: Rotación y Translación

Esta expresión se puede simplificar:

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\left[\boxed{\vec{r}_{CM}\times\left(m_i\vec{v}_{CM}\right)}+\boxed{\vec{r}_{CM}\times\left(m_i\vec{v}_i^{\,'}\right)}+\boxed{\vec{r}_i^{\,'}\times\left(m_i\vec{v}_{CM}\right)}+\boxed{\vec{r}_i^{\,'}\times\left(m_i\vec{v}_i^{\,'}\right)}\right]$$

Momento angular del centro de masa **L_{CM}**

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_{CM}\times\left(m_i\vec{v}_{CM}\right)\right]$$
$$=\left(\vec{r}_{CM}\times\vec{v}_{CM}\right)\sum_{i=1}^{N}m_i$$
$$=\left(\vec{r}_{CM}\times M\vec{v}_{CM}\right)$$
$$=\vec{r}_{CM}\times\vec{p}_{CM}$$

Se hace cero ya que

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_{CM}\times\left(m_i\vec{v}_i^{\,'}\right)\right]=\vec{r}_{CM}\times\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i^{\,'}$$

y $$\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i^{\,'}=\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\left(\vec{v}_i-\vec{v}_{CM}\right)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i-\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\vec{v}_{CM}$$
$$=\mathrm{M}\vec{v}_{CM}-M\vec{v}_{CM}$$
$$=0$$

Se hace cero ya que

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i^{\,'}\times\left(m_i\vec{v}_{CM}\right)\right]=\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i^{\,'}\right)\times\vec{v}_{CM}$$

y $$\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i^{\,'}=\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\left(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_i\right)\right]$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\vec{r}_{CM}\ -\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i$$
$$=\mathrm{M}\vec{r}_{CM}-M\vec{r}_{CM}$$
$$=0$$

Momento angular del cuerpo rígido respecto al CM **L_{rot/CM}**

$$\vec{L}_{\mathrm{rot/CM}}=I_{CM}\vec{\omega}$$

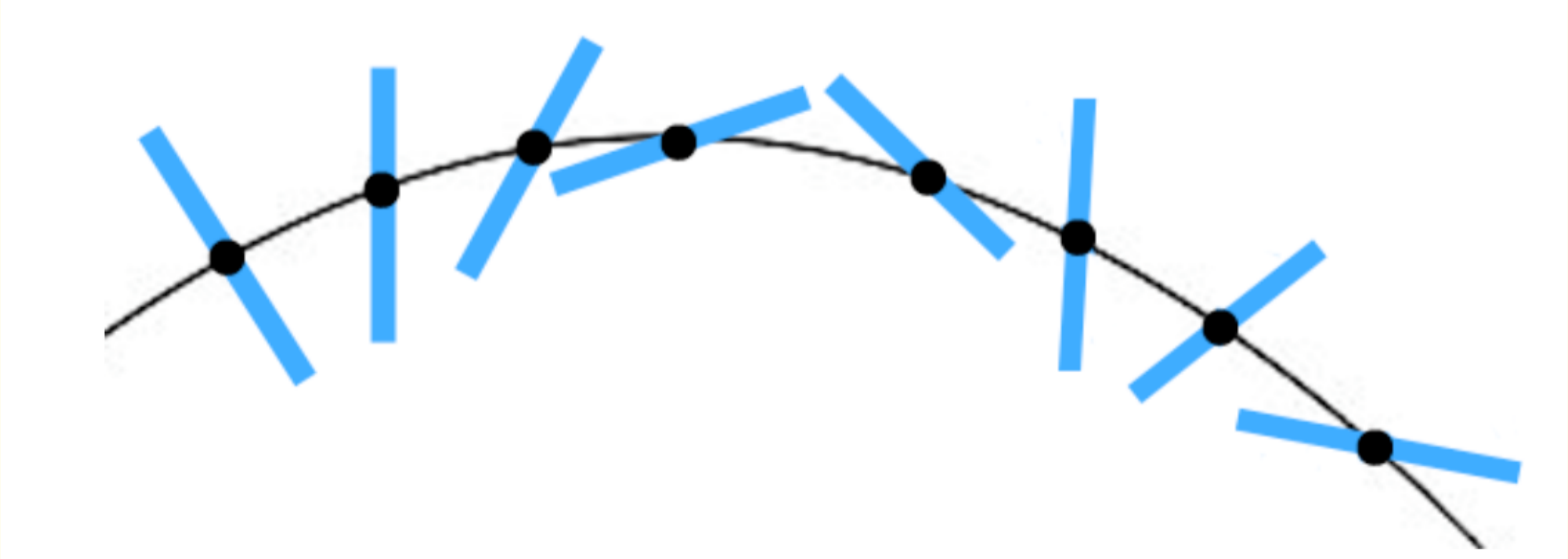
Nos queda: $\vec{L}=\vec{L}_{CM}+\vec{L}_{rot/CM}$

Momento Angular: Rotación y Translación

Una vez más el resultado es lo que se esperaba intuitivamente:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\mathrm{rot/CM}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{p}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega}}$$

El momento angular de un cuerpo rígido en translación y rotación es **la suma del momento angular del centro de masa, más el momento angular de rotación respecto al centro de masa.**



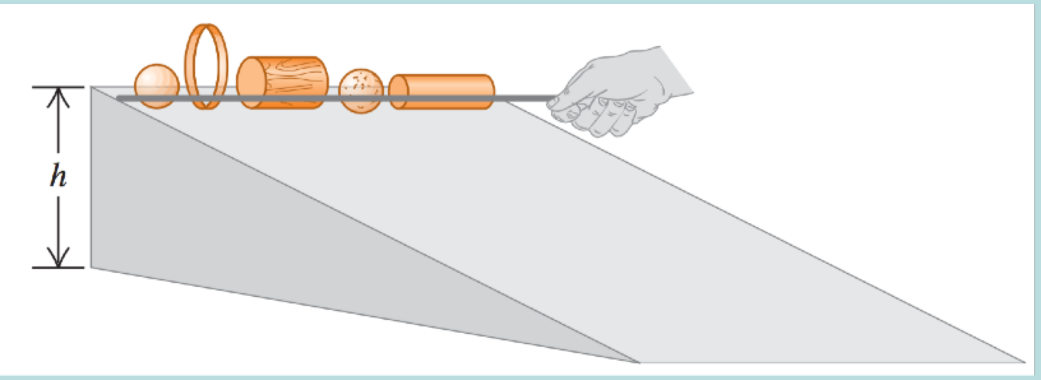
Nota: la relación $d\vec{L}/dt = \sum \vec{\tau}$ sigue siendo válida para un cuerpo que se traslada y rota al mismo tiempo. Sólo hay que usar la expresión recién derivada para calcular el momento angular

Ejemplo y Experimento #2

Vamos a aplicar lo aprendido tanto en papel como en experimento:

¡Vamos a hacer Carreras!

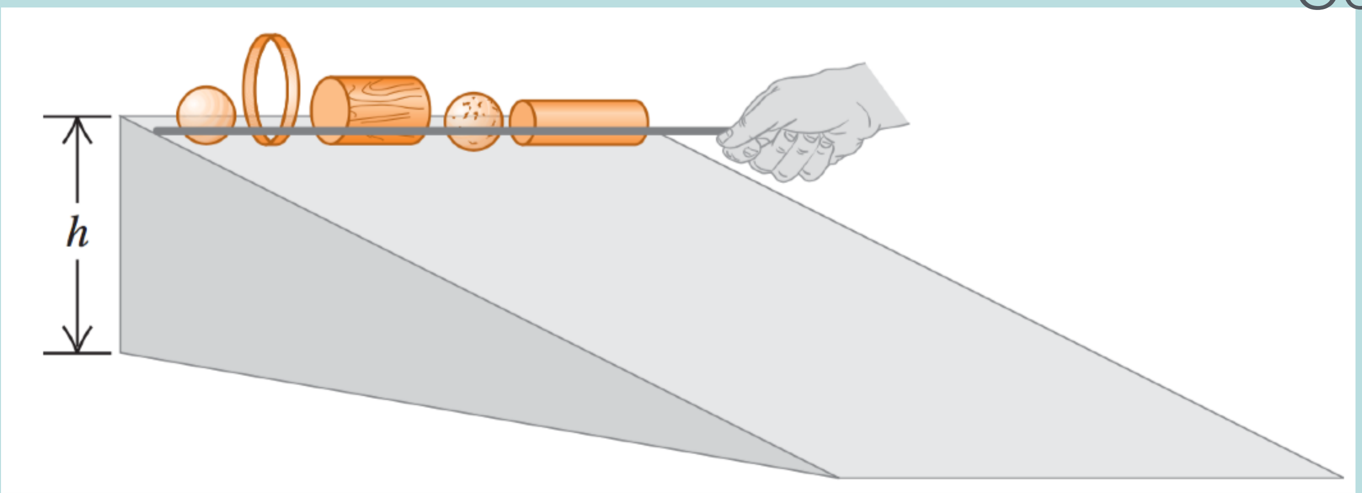
Pero de cilindros… 😀



Ver “Walter Lewin demonstrates moment of inertia”:
https://www.youtube.com/watch?v=cB8GNQuyMPc

Ejemplo y Experimento #2

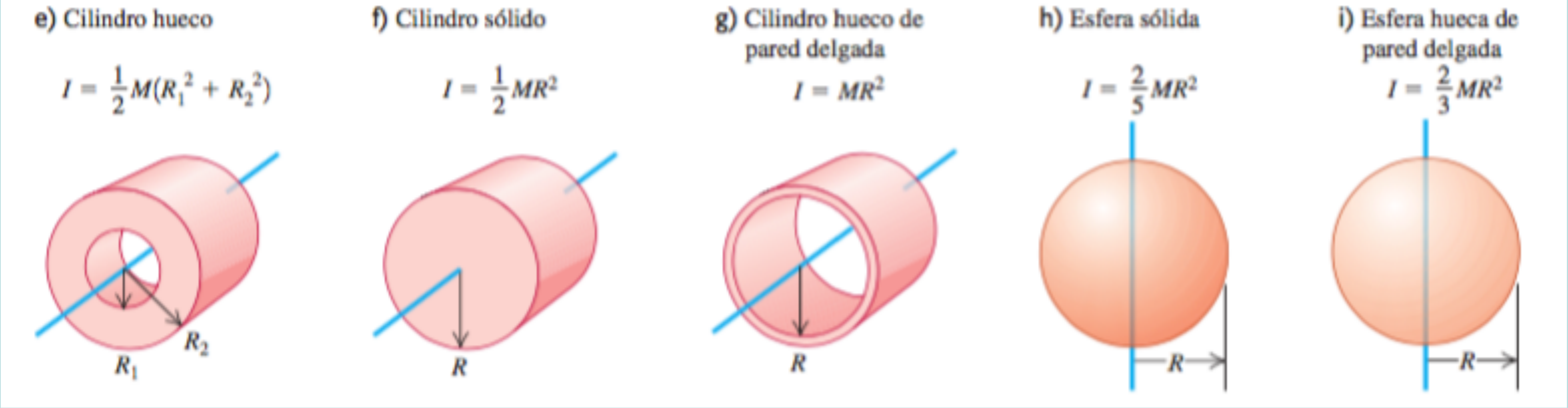
(Problema 10.5 en el Young&Freedman)



Conservación de energía para un objeto rodando por un plano inclinado:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + 0$$



Nos queda: $v_{CM} = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + I/MR^2}}$

Pero todos los cilindros y las esferas tienen momentos de inercia de forma $I = kMR^2$, por lo que el resultado no depende del radio, ni del largo, ni de la masa, sino sólo de la constante k!

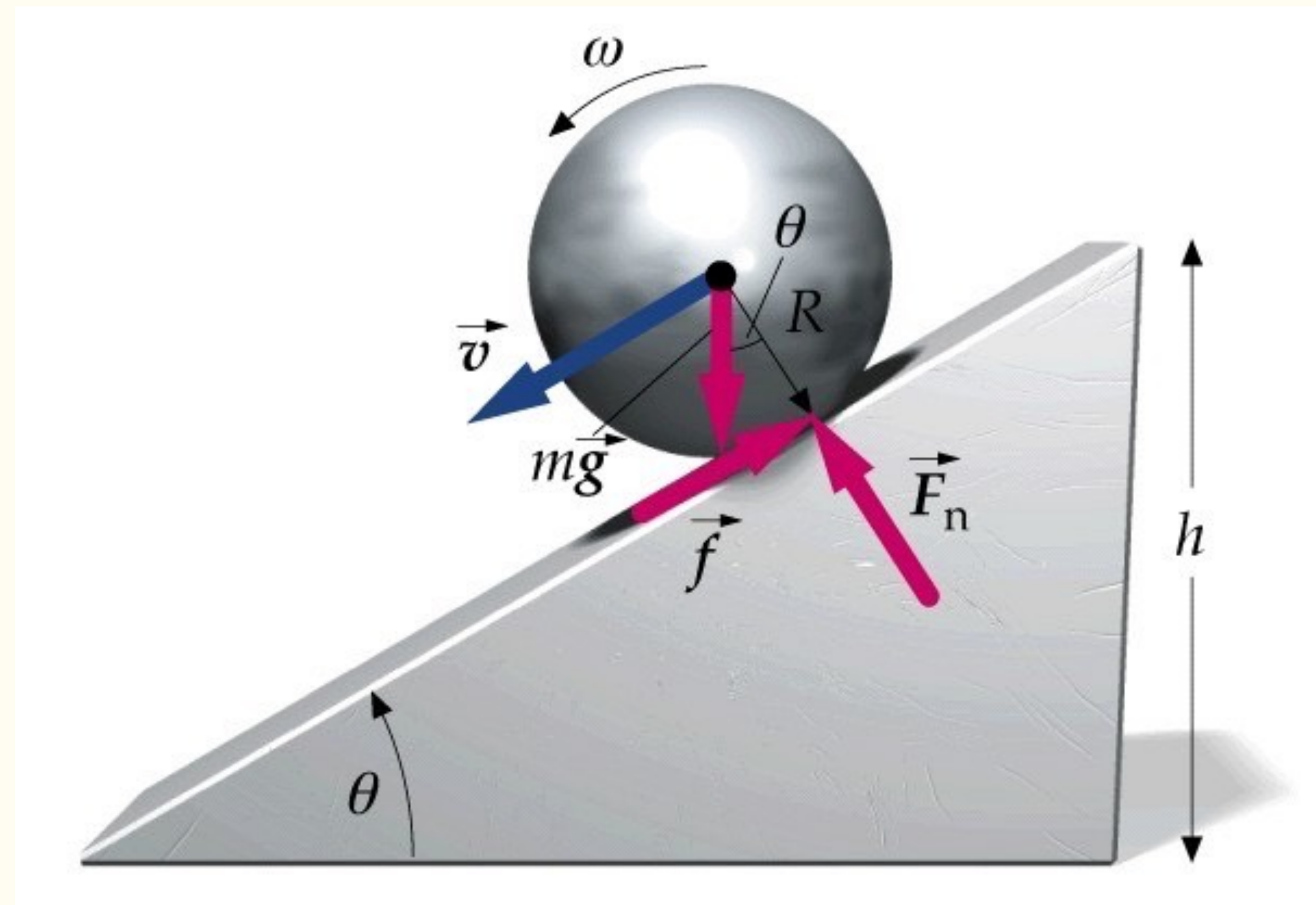
Nota: aquí estamos asumiendo que los cilindros ruedan sin deslizar, o de otra forma no hubiéramos podido ignorar el trabajo hecho por el roce.

Ejemplo

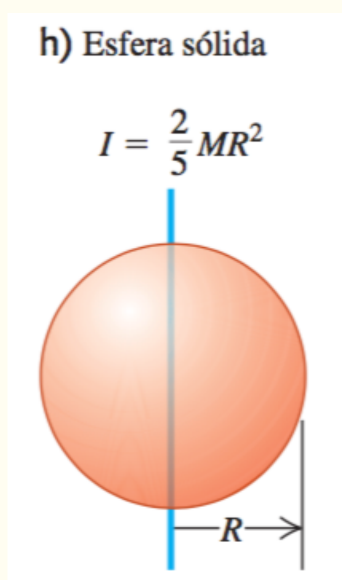
(No en libros)

Resuelva el siguiente problema utilizando (i) la segunda ley de Newton (rotacional), (ii) energía, y (iii) momento angular.

Una pelota sólida de masa m y radio R rueda sin deslizar hacia abajo por un plano inclinado en un ángulo θ. Encuentre la aceleración del centro de masa

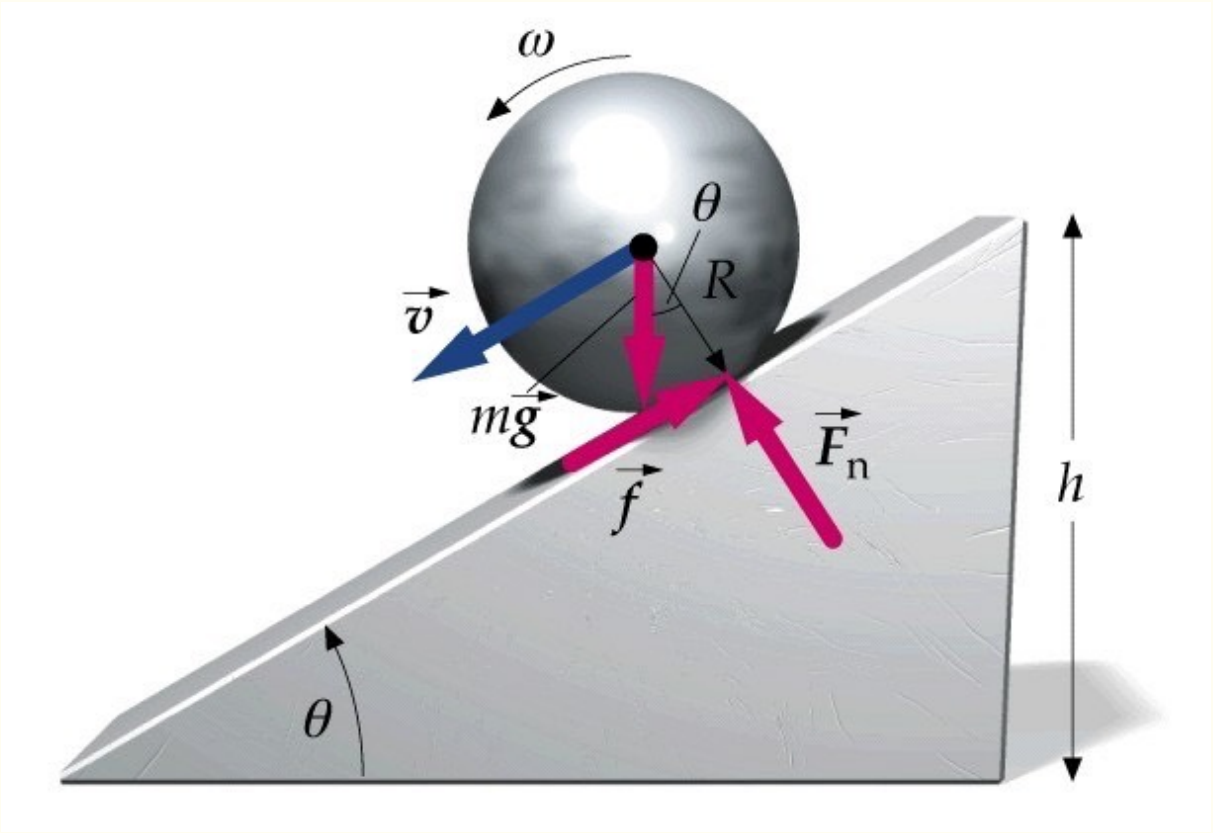


Resolver en pizarra; puede utilizar la siguiente información de una tabla:



Respuesta: $a_{CM} = \frac{5}{7} g \sin\theta$

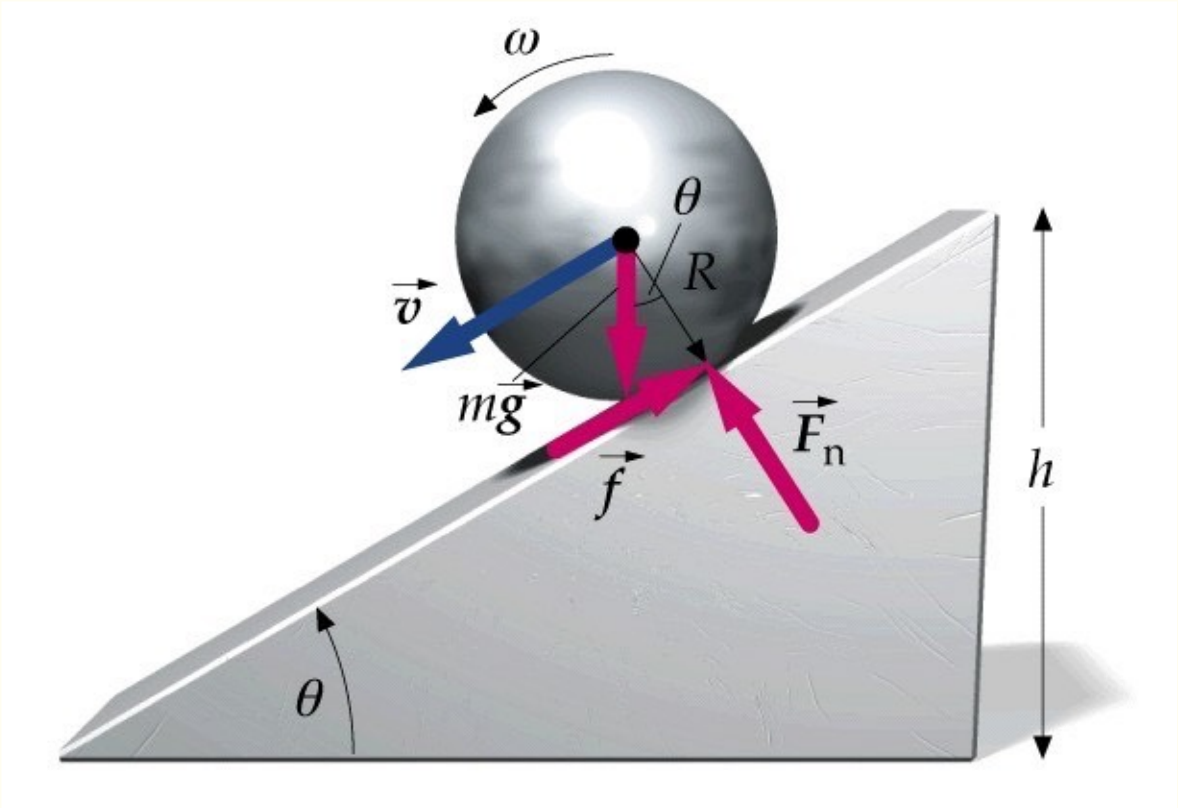
Comentarios sobre problema anterior



<u>Comentarios</u>:

- Al utilizar la segunda ley de Newton no se puede utilizar f=μN ya que la fuerza de roce no es constante y no es necesariamente igual al máximo posible.
- Como siempre, es importante ver que el resultado tenga sentido. Aquí esperábamos algo menor que gsinθ ya que la energía potencial no se puede convertir toda en energía cinética traslacional, sino que una parte se tiene que ir en energía cinética rotacional.

Comentarios sobre problema anterior



- En este problema se podría pedir el coeficiente de roce estático mínimo para que la esfera no deslice.

  En este caso habría que utilizar el hecho que la fuerza de roce tiene que ser igual a

$$F_r = \frac{2}{7} mg \sin\theta$$

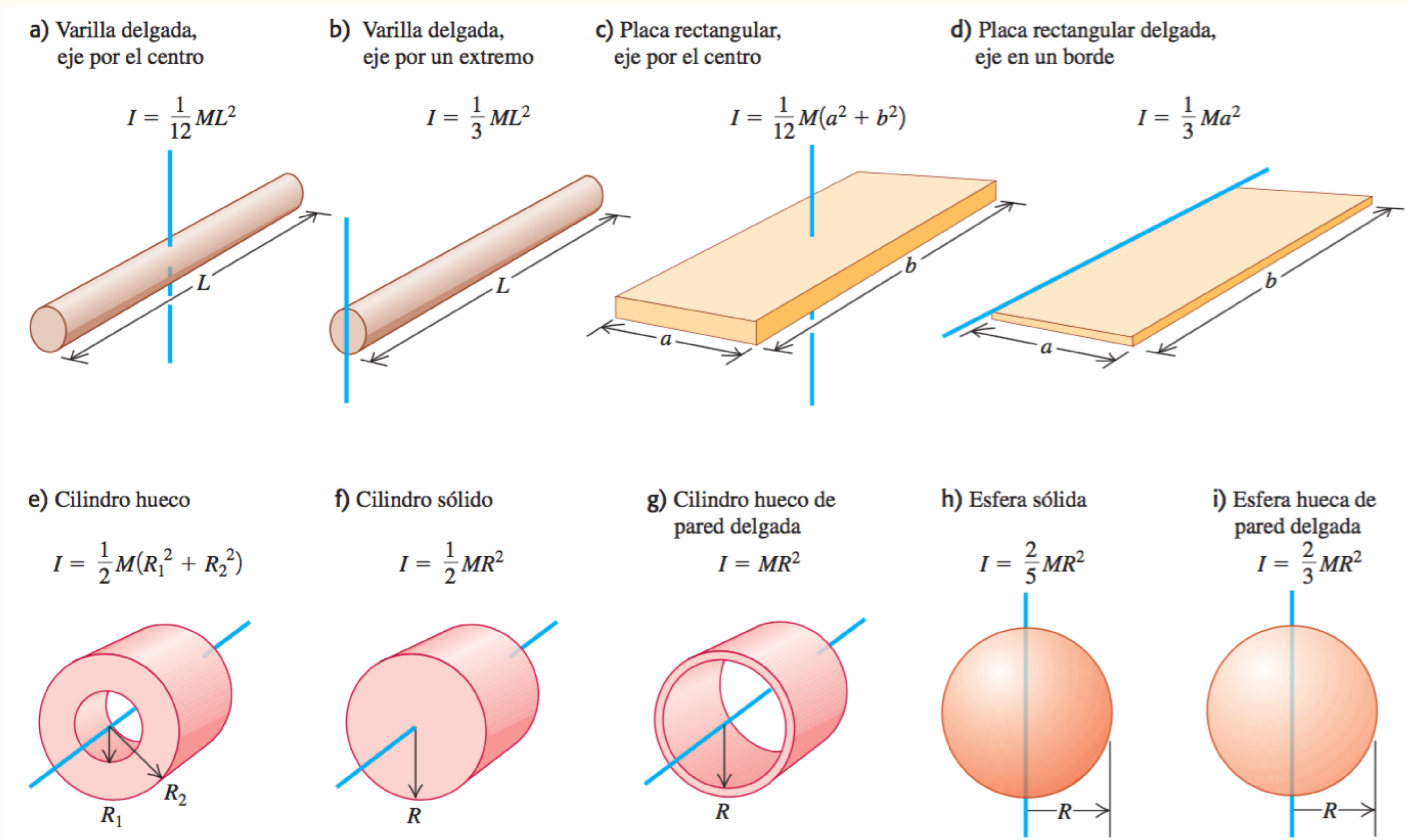
  Esto se obtiene aplicando la 2da ley de Newton en la dirección del movimiento del CM una vez conocido a_{CM}

  Esta fuerza tiene que ser igual o menor a la fuerza máxima de roce posible:

$$F_r \le \mu_s N \quad \text{por lo que} \quad \mu_s \ge \frac{2}{7} \tan\theta$$

Tabla de momentos de inercia

(para los ejemplos a continuación)



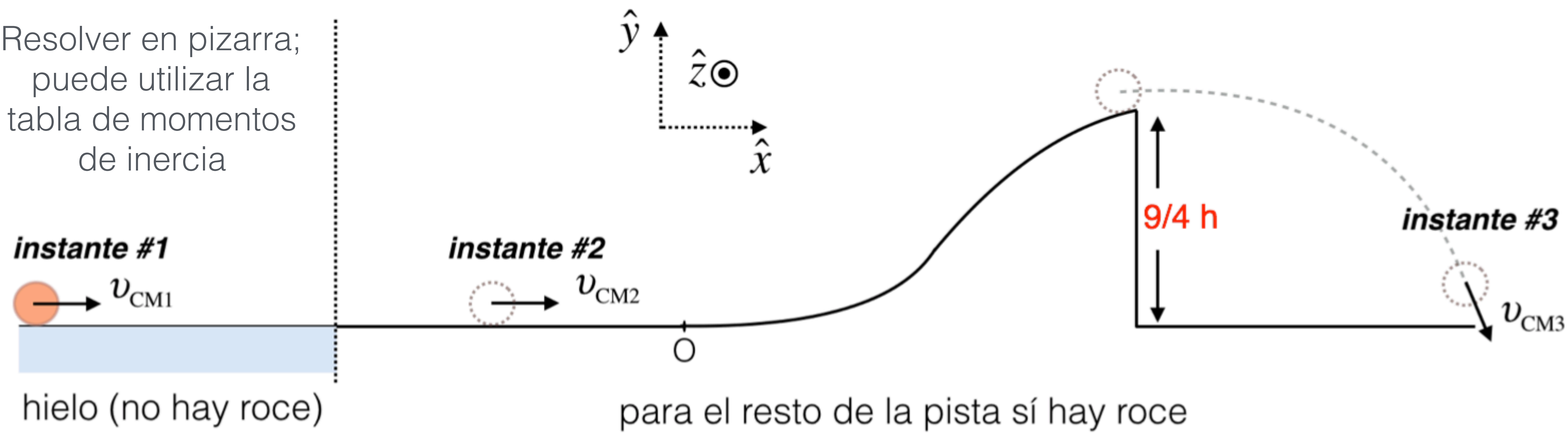
(Recordatorio: el momento de inercia depende de donde se pone el eje de rotación)

Ejemplo

(Problemas 5-7 en I3 de 2016-02)

Enunciado para problemas 5-7:
Se tiene una esfera sólida de masa m y radio R que avanza inicialmente sin rodar por una superficie plana de hielo sin roce, con una rapidez de su centro de masa igual a $v_{\mathrm{CM}1}$ (*instante #1*). A continuación ingresa a una región en la que hay roce entre la esfera y la pista y en donde, después de un breve periodo de transición, se estabiliza en un movimiento de rodamiento sin deslizamiento (*instante #2*). Por último, la esfera rueda sin deslizar por una colina de altura máxima h y cae por el abismo hasta una altura igual a la inicial (*instante #3*). Puede asumir que en todo momento el roce viscoso con el aire es despreciable.

Resolver en pizarra; puede utilizar la tabla de momentos de inercia



(1) Determine el momento angular **$L_{1/0}$** de la esfera en el instante #1 respecto a un punto O sobre la superficie

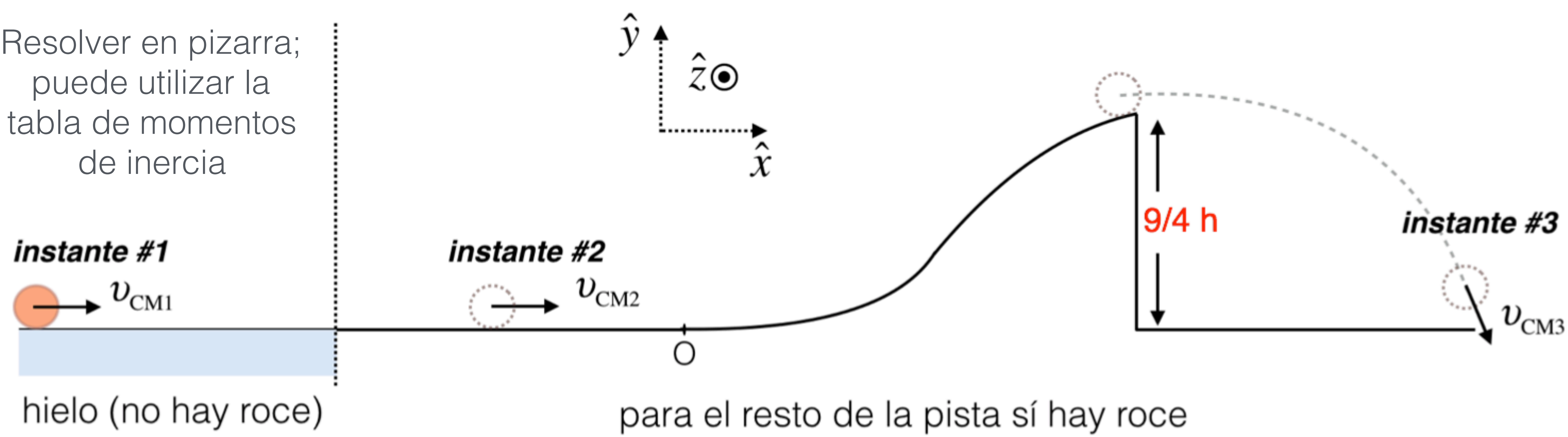
Respuesta: $\vec{L}_{1/0} = -mRv_{CM1}\hat{z}$

Ejemplo

(Problemas 5-7 en I3 de 2016-02)

Enunciado para problemas 5-7:
Se tiene una esfera sólida de masa m y radio R que avanza inicialmente sin rodar por una superficie plana de hielo sin roce, con una rapidez de su centro de masa igual a v_{CM1} (*instante #1*). A continuación ingresa a una región en la que hay roce entre la esfera y la pista y en donde, después de un breve periodo de transición, se estabiliza en un movimiento de rodamiento sin deslizamiento (*instante #2*). Por último, la esfera rueda sin deslizar por una colina de altura máxima h y cae por el abismo hasta una altura igual a la inicial (*instante #3*). Puede asumir que en todo momento el roce viscoso con el aire es despreciable.

Resolver en pizarra; puede utilizar la tabla de momentos de inercia



(2) Determine la rapidez del centro de masa de la esfera v_{CM2} durante el instante #2 en función de la magnitud del momento angular del instante #1, $L_{1/0}$:

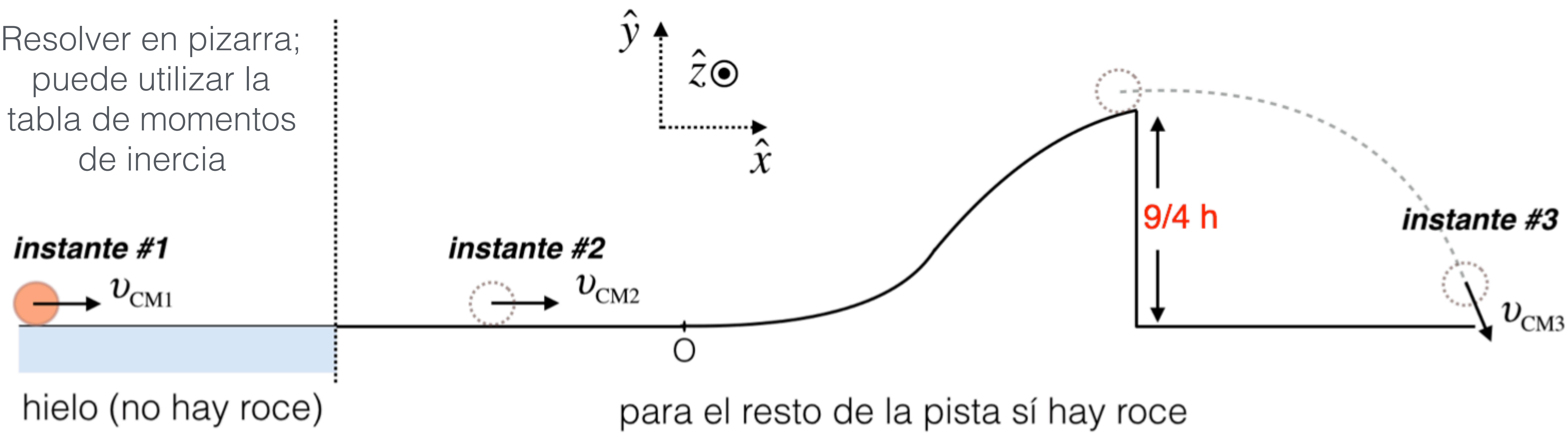
Respuesta: $$v_{CM\,2} = \frac{5}{7mR} L_{1/0}$$

Ejemplo

(Problemas 5-7 en I3 de 2016-02)

Enunciado para problemas 5-7:
Se tiene una esfera sólida de masa m y radio R que avanza inicialmente sin rodar por una superficie plana de hielo sin roce, con una rapidez de su centro de masa igual a v_{CM1} (*instante #1*). A continuación ingresa a una región en la que hay roce entre la esfera y la pista y en donde, después de un breve periodo de transición, se estabiliza en un movimiento de rodamiento sin deslizamiento (*instante #2*). Por último, la esfera rueda sin deslizar por una colina de altura máxima h y cae por el abismo hasta una altura igual a la inicial (*instante #3*). Puede asumir que en todo momento el roce viscoso con el aire es despreciable.

Resolver en pizarra; puede utilizar la tabla de momentos de inercia



(3) Determine la rapidez del centro de masa de la esfera v_{CM3} durante el instante #3, justo antes de que se impacte con el suelo, en función de v_{CM2}:

Respuesta: $v_{CM3} = \sqrt{(v_{CM2})^2 + \frac{9}{7}gh}$

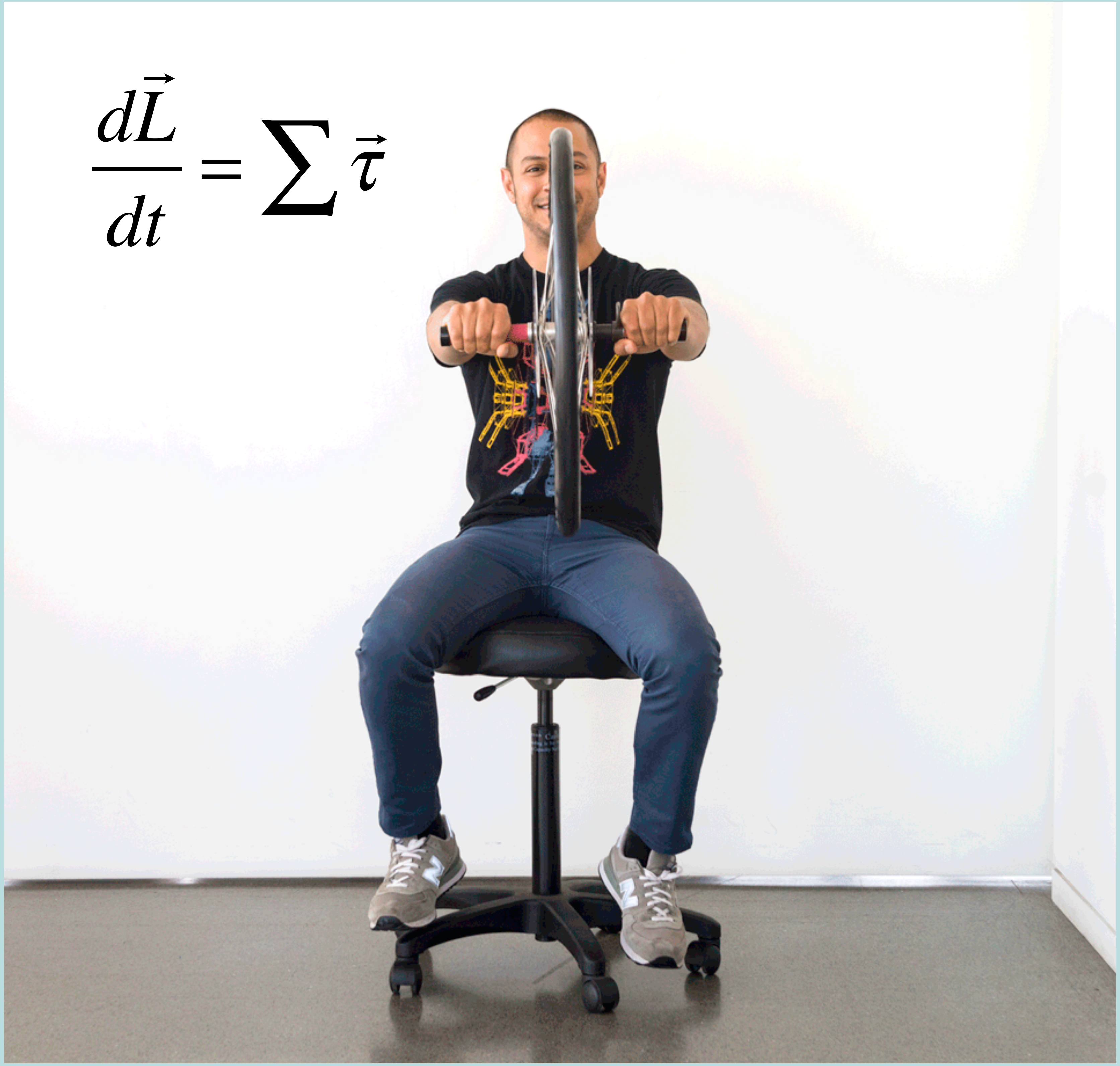
Preguntas con cliqueras

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido

Experimento

La “rueda de Maxwell”

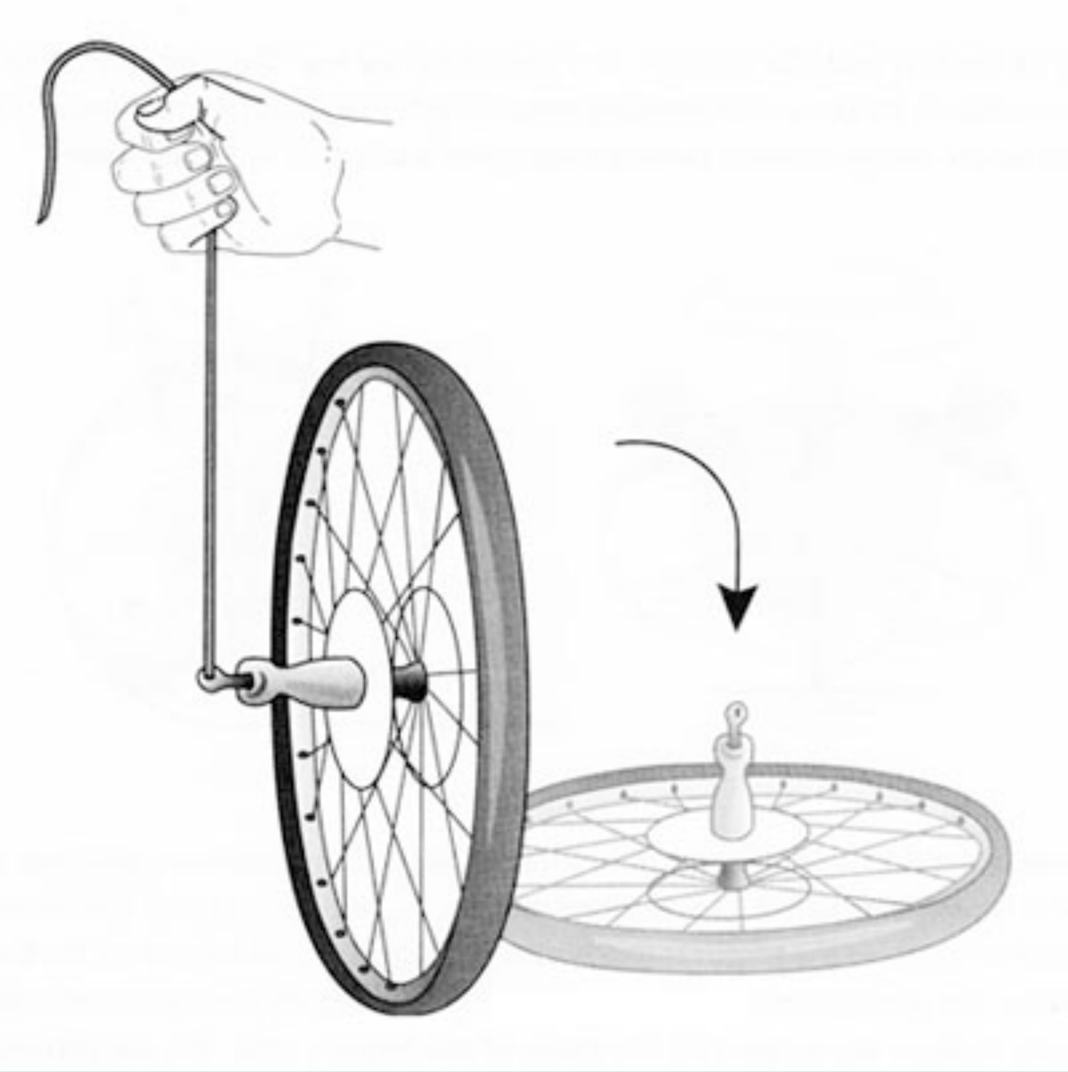
Experimento #1



Experimento #2

¿Qué pasa si tomamos una rueda de bicicleta, amarramos una cuerda a un extremo en su eje, y la soltamos?

Si la rueda no estaba rotando sobre su eje inicialmente, simplemente cae



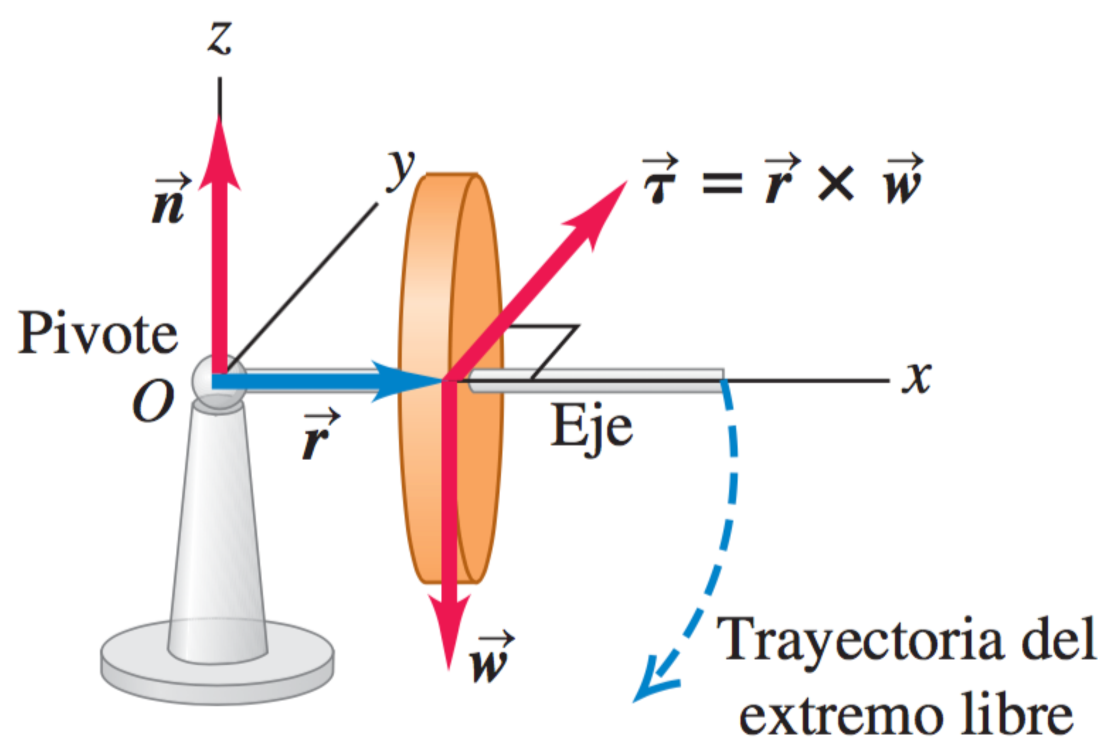
Pero si estaba rotando, ¡no cae!
(de hecho tiene un movimiento de precesión en la dirección paralela a la cuerda)

Bicycle Wheel Gyroscope (MIT): https://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM

Anti-Gravity Wheel (Veritasium): https://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo

Entendiendo el Experimento #2

¿Por qué es esto?



Cuando el volante no gira, su peso crea una torca alrededor del pivote, haciendo que este caiga una trayectoria circular

La rueda (o volante) siente un torque en **y** respecto al pivote O debido al peso, como mostrado en la figura

La ecuación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}$$

nos dice que:

$$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$$

(para Δt muy pequeño), es decir

$$\vec{L}_2 = \vec{\tau}\Delta t + \vec{L}_1$$

El torque va en la dirección **y**, por lo que si la rueda no está girando inicialmente (**L_1**=**0**) el momento un instante después (**L_2**) tiene que ir en la dirección y:

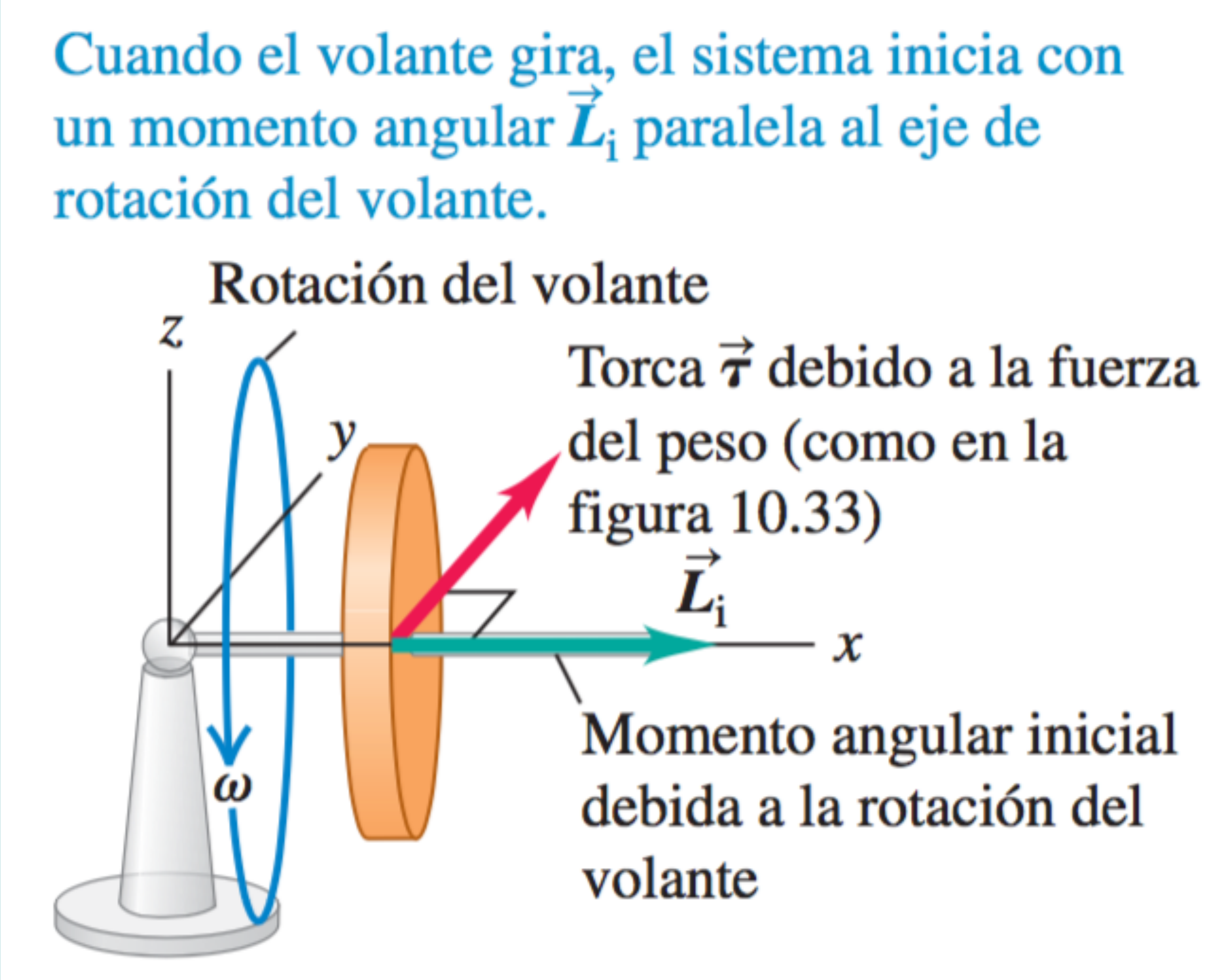
$$\vec{L}_2 = \tau\Delta t\hat{y}$$

Esto es lo que sucede cuando la rueda cae… ¡como un péndulo!

Entendiendo el Experimento #2

Pero si la rueda tenía momento angular inicial, la situación cambia:

$$\vec{L}_2 = \vec{\tau}\Delta t + \vec{L}_1$$



Ahora el **L₁** va en la dirección **x**, y τ sigue yendo en la dirección **y**

La suma de un vector en **x** más otro en **y** nos da uno en el plano x-y, por lo que **L_2** nunca deja ese plano (siempre y cuando la rueda siga girando):

$$\vec{L}_2 = \tau\Delta t\hat{y} + L_1\hat{x}$$

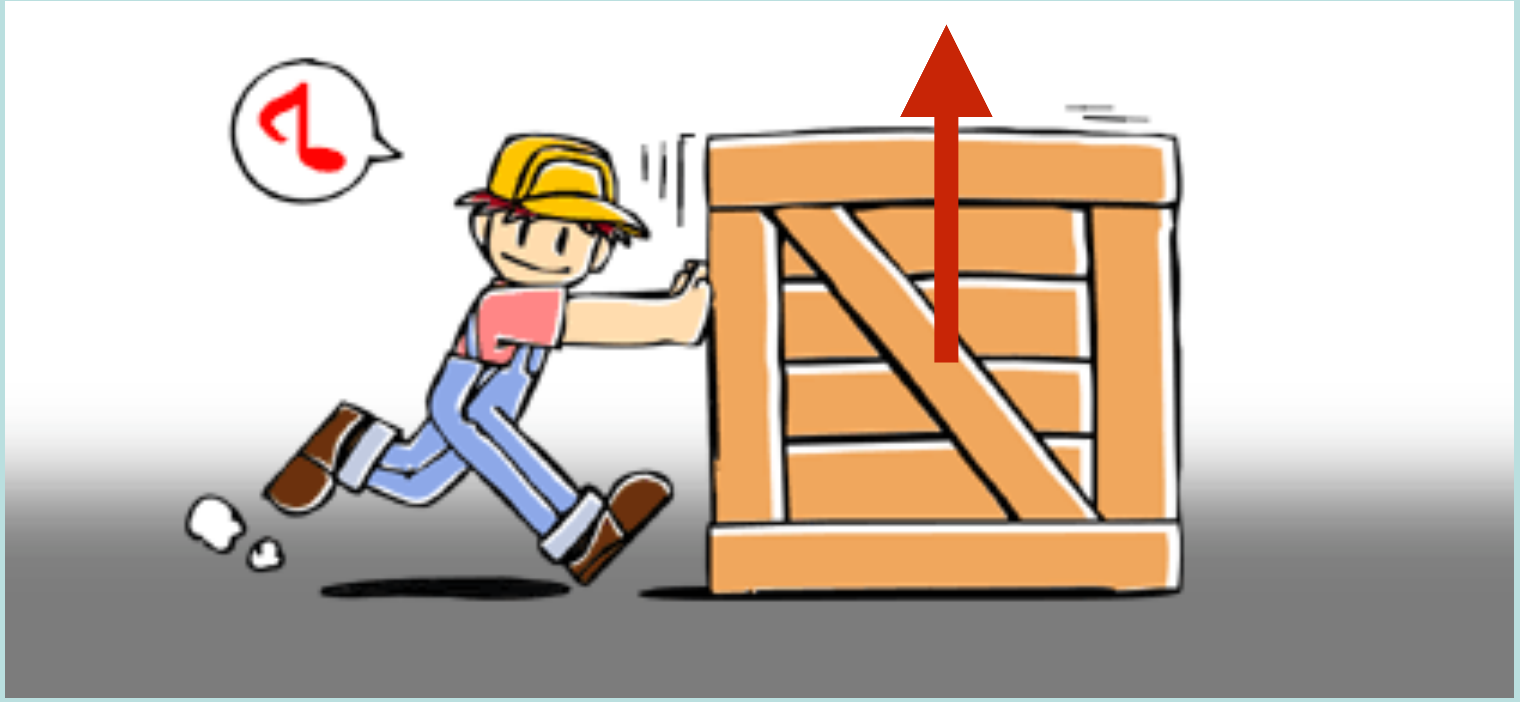
¡El torque causado por el peso le imparte una pequeña componente a **L_2** en la dirección **y**, haciendo que rote continuamente!

A este fenómeno se le llama precesión giróscopica, y es cuando el eje de rotación de un objeto a su vez rota en el espacio

Nota: esto está muy bien explicado en la sección 10.7 del Young & Freedman

Experimento

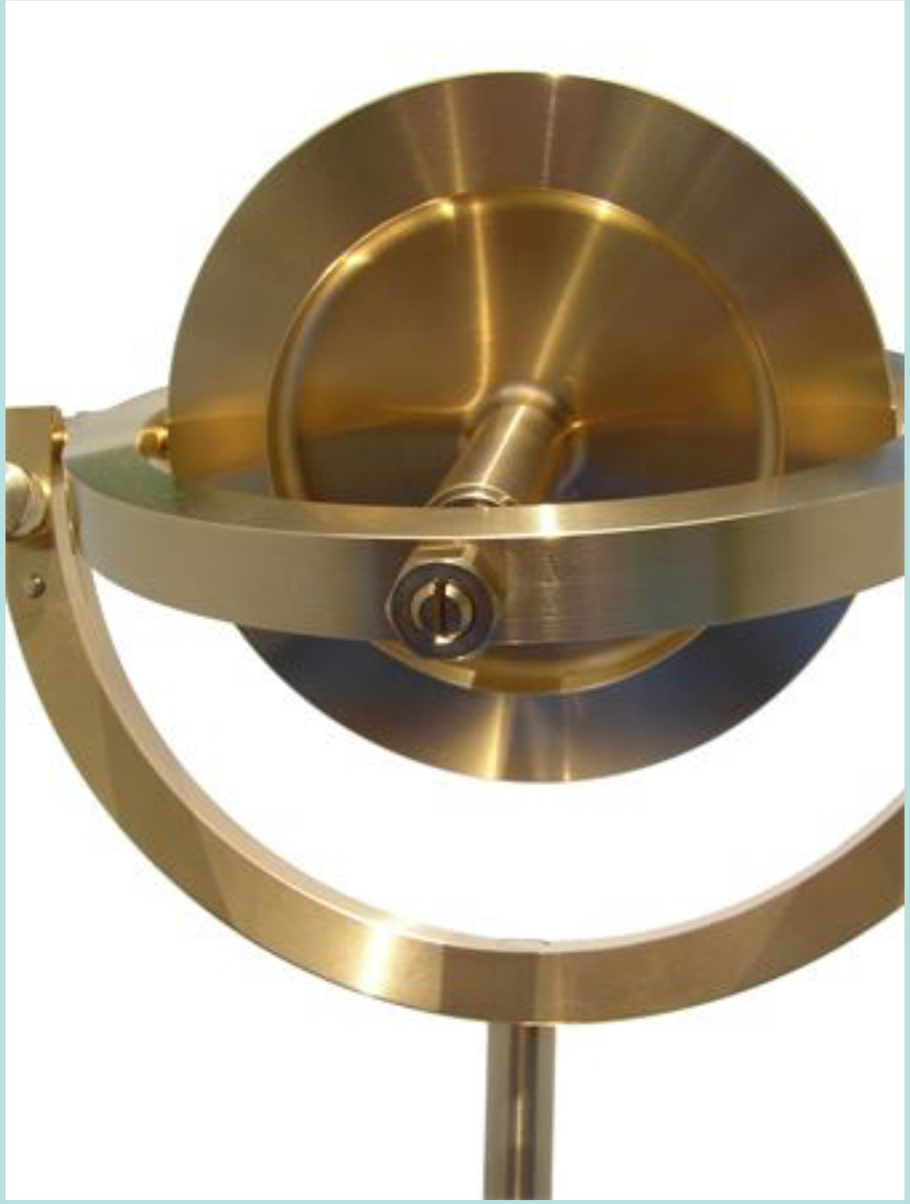
¿Alguna vez les ha pasado que empujen una caja en reposo a la derecha y se mueva hacia arriba?



Esto nunca pasa con cajas, ¡pero con giroscopios pareciera que sí!
Su comportamiento va completamente en contra de la intuición…

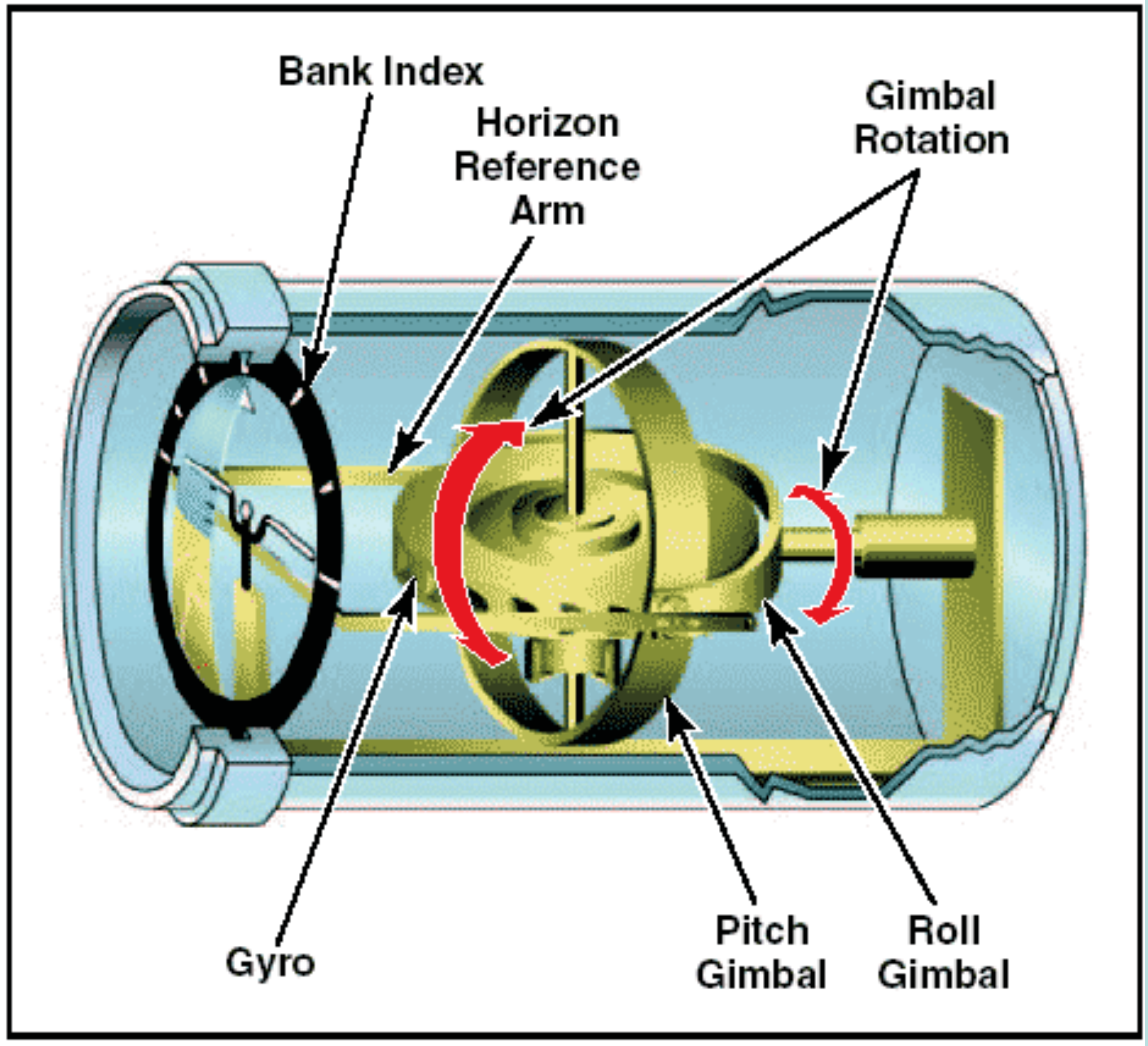
Large Brass Gyroscope Demonstration: https://www.youtube.com/watch?v=mrGfc-3uv7o

Experimento



¿Para qué sirven los Giroscopios?

Una aplicación (entre muchas): sistemas de determinación de inclinación en aviones



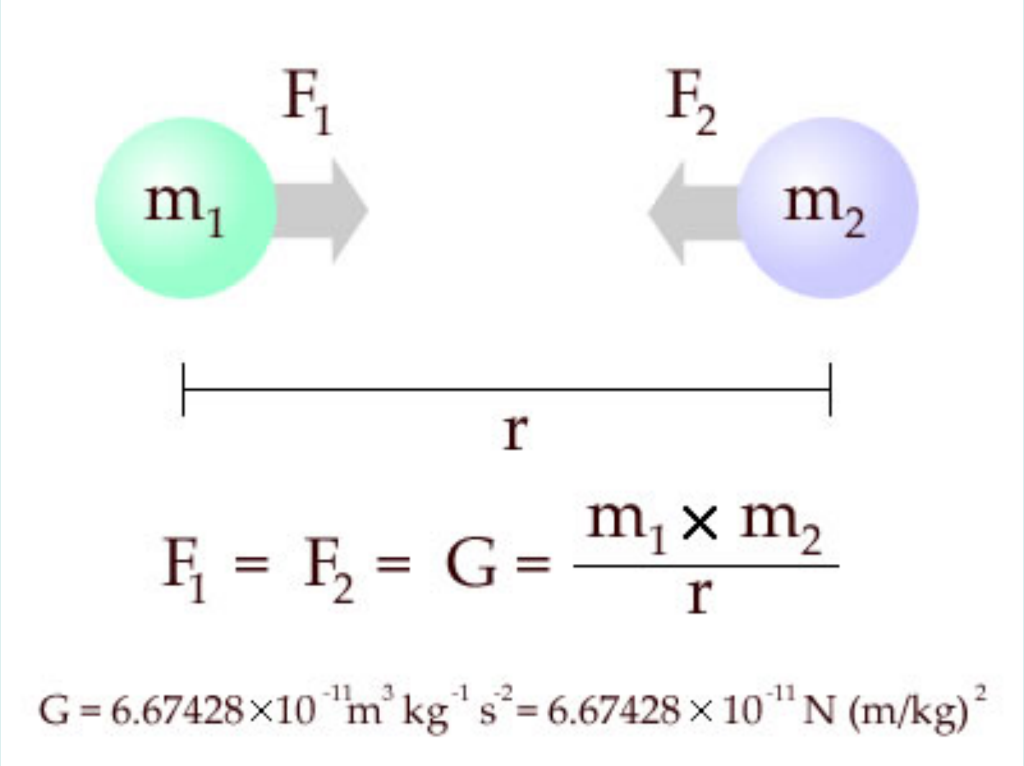
https://www.quora.com/What-the-function-of-gyroscopes-in-airplane

Gyroscopes in the Cockpit: https://www.youtube.com/watch?v=rrEb4_3i3Sw

Experimento

En este curso hemos hablado mucho de la gravedad, así que **tomemos unos minutos para filosofar un poco** sobre esta interacción de la naturaleza y lo que sabemos hasta el momento sobre ella.

Hasta ahora hemos modelado la gravedad como una **fuerza instantánea y a distancia** entre dos objetos con masa:

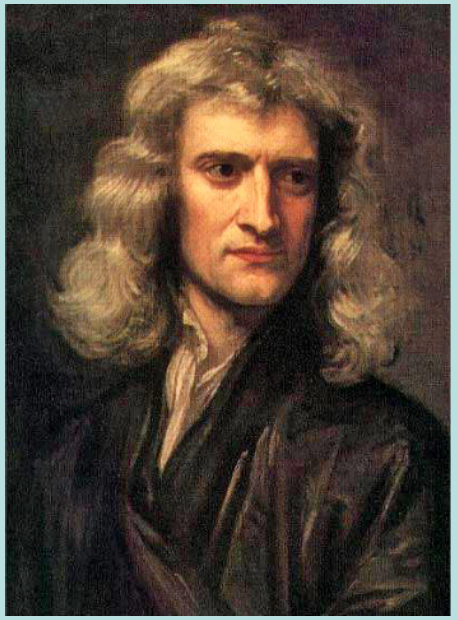


Experimento

Pero hay algo que molesta con esto: **¿cómo puede un cuerpo afectar a otro sin tocarlo o sin de alguna forma enviarle información?**

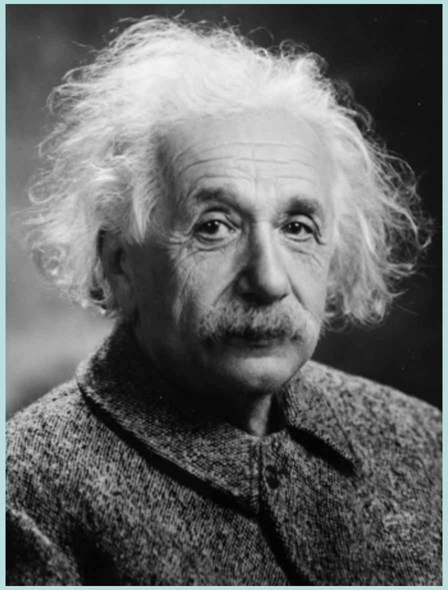
“That one body may act upon another at a distance through a vacuum without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one another, is to me so great an absurdity that, I believe, no man who has in philosophic matters a competent faculty of thinking could ever fall into it.”

Isaac Newton, 1962



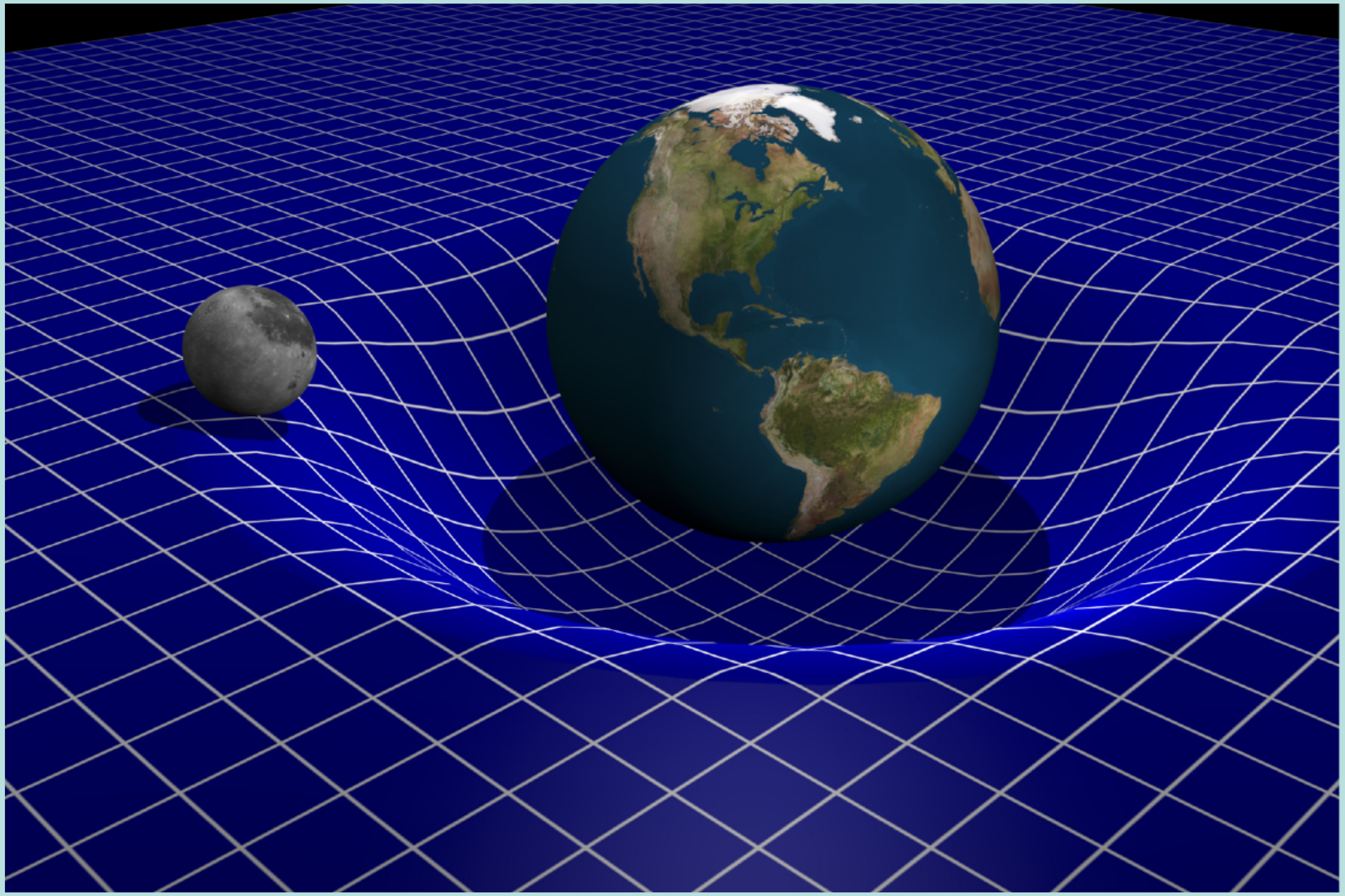
“According to Albert Einstein's theory of special relativity, instantaneous action at a distance was seen to violate the relativistic upper limit on speed of propagation of information. If one of the interacting objects were to suddenly be displaced from its position, the other object would feel its influence instantaneously, meaning information had been transmitted faster than the speed of light.”

Wikipedia



Experimento

La idea desde tiempos de Newton es que una masa produce un “campo” que siente la otra masa



¿Pero en qué consiste este campo a un nivel fundamental?

Einstein encontró la respuesta: **es una curvatura del espacio-tiempo.**

Una masa curva el espacio-tiempo a su alrededor. Al entrar a este espacio curvo, la trayectoria de un cuerpo se modifica y es como si una fuerza invisible lo estuviera afectando.

Pero en realidad no es que haya una fuerza actuando a distancia. Más bien es que un objeto con masa distorsiona el espacio tiempo a su alrededor, y otro objeto se mueve diferente al entrar a este espacio modificado

http://www.einstein-online.info/elementary/generalRT/GeomGravity

Experimento

Podemos ilustrar esto tomando un “espacio-tiempo” de dos dimensiones hecho de “lycra-spandex” que se curva en la presencia de masa:

Con esto se pueden replicar muchos de los comportamientos de las órbitas de estrellas, planetas y satélites

Gravity Visualized: https://www.youtube.com/watch?v=MTY1Kje0yLg