PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Primer Semestre 2018

Interrogación 03 - Alternativas

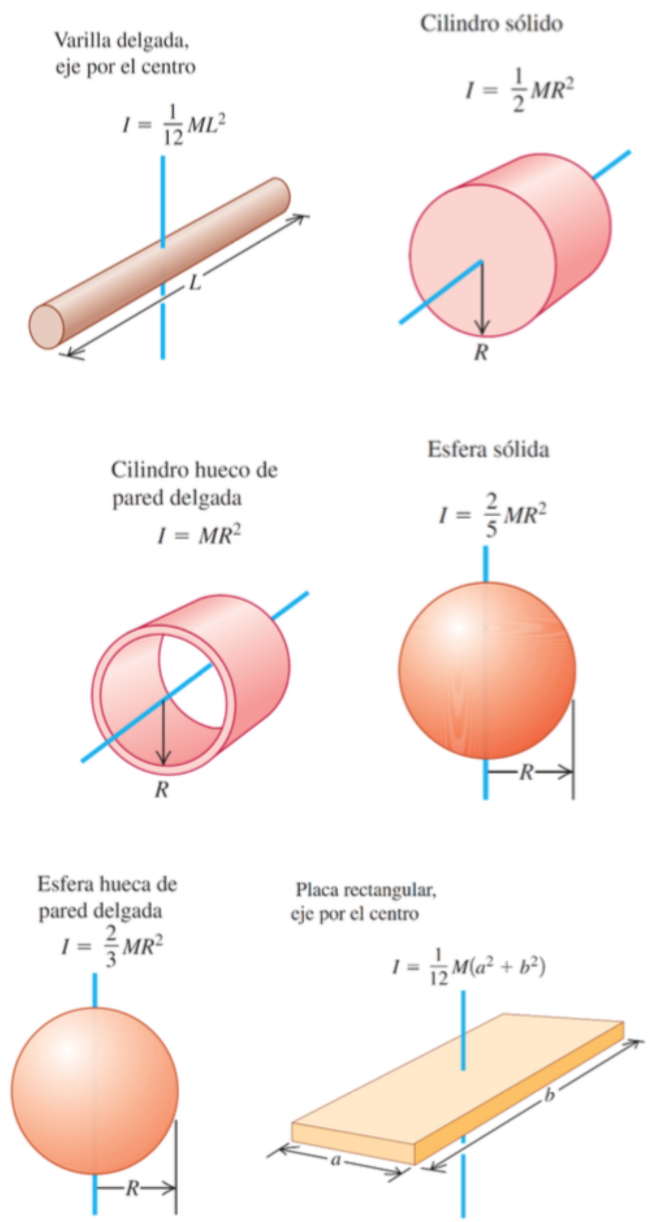
Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

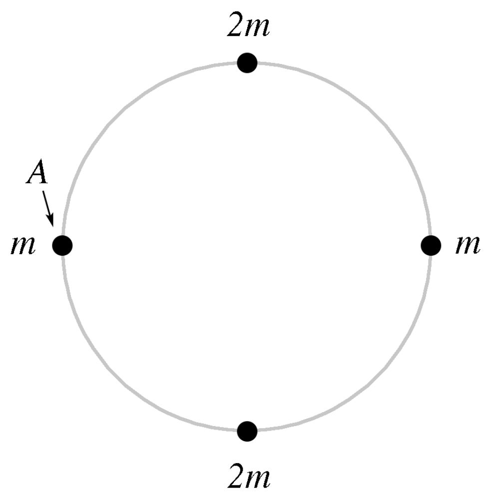
Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).


Varilla delgada, eje por el centro
$I = \frac{1}{12}ML^2$
L
Cilindro sólido
$I = \frac{1}{2}MR^2$
R
Cilindro hueco de pared delgada
$I = MR^2$
R
Esfera sólida
$I = \frac{2}{5}MR^2$
R
Esfera hueca de pared delgada
$I = \frac{2}{3}MR^2$
R
Placa rectangular, eje por el centro
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
a
b

Problema 1 [1 punto]

Se insertan 4 cuerpos esféricos en un alambre circular de radio R tal y como se muestra en la figura. Suponiendo que los cuerpos pueden ser considerados puntuales y que la masa del alambre es despreciable, los momentos de inercia del sistema con respecto a un eje de rotación vertical que pasa por el punto A contenido en el plano de la figura (I_A^1) y con respecto a un eje de rotación que pasa por el punto A y que es perpendicular al plano de la figura (I_A^2) son:



a) $I_A^1 = 8mR^2 \quad y \quad I_A^2 = 8mR^2$

b) $I_A^1 = 2mR^2 \quad y \quad I_A^2 = 0$

c) $I_A^1 = mR^2 \quad y \quad I_A^2 = 12mR^2$

d) $I_A^1 = 8mR^2 \quad y \quad I_A^2 = 5mR^2$

e) $I_A^1 = 8mR^2 \quad y \quad I_A^2 = 12mR^2$

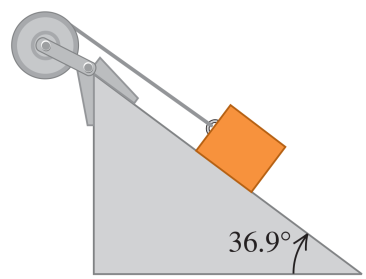
Solución

$$I_A^1 = 4mR^2 + 2mR^2 + 2mR^2 = 8mR^2$$

$$I_A^2 = 4mR^2 + 2 \cdot 2m \cdot 2R^2 = 12mR^2$$

Problema 2 [1 punto]

Un bloque de masa m baja deslizándose por una superficie inclinada 36.9° con respecto a la horizontal ($\sin(36.9°) = 3/5$ y $\cos(36.9°) = 4/5$). El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el bloque es $\mu_k = 1/3$. Una cuerda atada al bloque está enrollada en un disco de masa $M = 2m$ y radio R, y se desenrrolla sin resbalar cuando el bloque baja por la superficie inclinada. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del bloque?



a) $a = \dfrac{g}{10}$

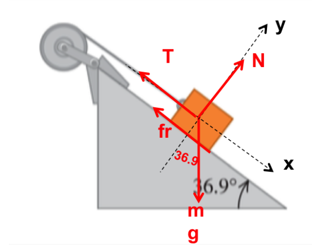
b) $a = \dfrac{g}{6}$

c) $a = \dfrac{2g}{9}$

d) $a = \dfrac{g}{4}$

e) $a = \dfrac{mg}{2R}$

Solución



$$x: m\ddot{x} = mg\sin(36.9) - T - fr$$

$$y: N = mg\cos(36.9)$$

$$fr = \mu N = \frac{1}{3}mg\frac{4}{5} = \frac{4}{15}mg$$

$$\text{Polea: } TR = I\alpha, \ddot{x} = R\alpha \rightarrow T = \frac{I\ddot{x}}{R^2} = \frac{M\ddot{x}}{2} = \frac{2m\ddot{x}}{2} = m\ddot{x}$$

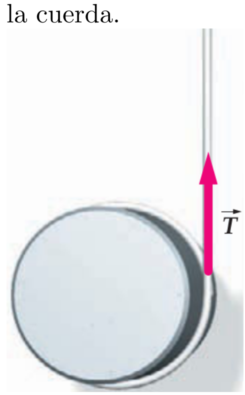
$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg\frac{3}{5} - m\ddot{x} - \frac{4}{15}mg$$

$$2\ddot{x} = g\frac{5}{15} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{6}$$

Problema 3 [1 punto]

En la siguiente figura se muestra un yo-yo en forma de cilindro sólido de masa M y radio R, con una cuerda enrollada a su alrededor. La mano de una persona acelera la cuerda hacia arriba de tal forma que el centro de masa del yo-yo no se mueve.

Indique cuál es la tensión de la cuerda.



a) $T = \frac{2}{3}Mg$

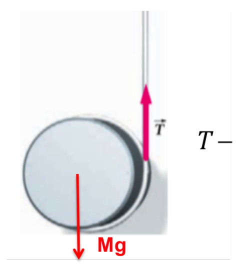
b) $T = \frac{4}{5}Mg$

c) $T = \frac{3}{7}Mg$

d) $T = Mg$

e) $T = \frac{1}{2}Mg$

Solución



$$T - Mg = Ma = 0 \Rightarrow T = Mg$$

Problema 4 [1 punto]

Un lápiz uniforme de masa M y longitud L está en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento cuando, de repente es golpeado cerca de uno de sus extremos, lo cual le da al lápiz un impulso inicial Q en la dirección perpendicular al lápiz (ver figura). Considerando al lápiz como una varilla delgada homogénea, ¿cuál es la velocidad angular del lápiz inmediatamente después del golpe?

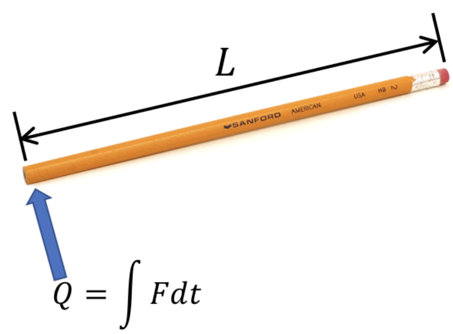
a) $\frac{12Q}{ML}$

b) $\frac{6Q}{ML}$

c) $\frac{12Q}{ML^2}$

d) $\frac{6Q}{ML^2}$

e) $\frac{8Q}{ML^2}$



Solución

$$Q \cdot \frac{L}{2} = I\omega$$

$$I = \frac{ML^2}{12}$$

$$\omega = \frac{Q \cdot L}{2I} = \frac{6Q \cdot L}{ML^2} = \frac{6Q}{ML}$$

Problema 5 [1 punto]

Un cilindro de masa M, radio R y momento de inercia I con respecto a su centro de masa se deja caer desde una altura H por un plano inclinado con roce cuyo ángulo con la horizontal es α. Si el cilindro rueda sin resbalar durante todo el recorrido ¿cuánto tiempo demora en llegar al punto más bajo del plano?

a) $\sqrt{\frac{H(MR^2-I)}{MR^2 gsen^2(\alpha)}}$

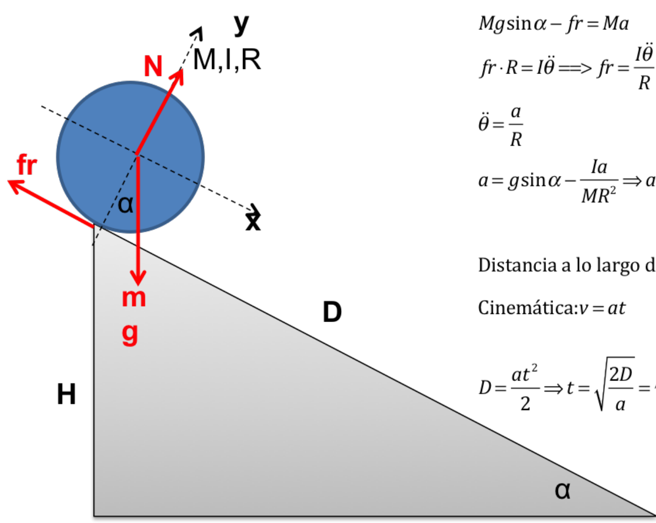
b) $\sqrt{\frac{2H}{g}}$

c) $\sqrt{\frac{H\left(M+\frac{I}{R^2}\right)}{Mg}}$

d) $\sqrt{\frac{2H\left(M+\frac{I}{R^2}\right)}{Mgsen^2(\alpha)}}$

e) $\sqrt{\frac{2H}{gsen(\alpha)}}$

Solución



$Mg\sin\alpha - fr = Ma$

$fr\cdot R = I\ddot{\theta} \Longrightarrow fr = \frac{I\ddot{\theta}}{R} = \frac{Ia}{R^2}$

$\ddot{\theta} = \frac{a}{R}$

$a = g\sin\alpha - \frac{Ia}{MR^2} \Rightarrow a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{MR^2}}$

Distancia a lo largo del plano: $D = \frac{H}{\sin\alpha}$

Cinemática: $v = at$

$D = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2D}{a}} = \sqrt{2\frac{H}{\sin\alpha}\frac{1+\frac{I}{MR^2}}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2H\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2H\left(M+\frac{I}{R^2}\right)}{Mg\sin^2\alpha}}$

Problema 6 [1 punto]

Una bailarina de ballet rota sobre el eje de su columna vertical con sus brazos extendidos y sosteniendo una masa M en cada una de sus manos, a una distancia R de su eje de rotación. Considere que no hay roce con el suelo. Si rota con un momento de inercia I_0 y una rapidez angular ω_0 ¿cuánto vale su rapidez angular una vez que suelta las masas que tenía en las manos?

a) $\frac{\omega_0 I_0}{I_0+MR^2}$

b) $\frac{\omega_0 I_0}{I_0-2MR^2}$

c) ω_0

d) $\frac{\omega_0(I_0-MR^2)}{I_0}$

e) $\frac{\omega_0(I_0+2MR^2)}{I_0}$

Solución

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

$$I = I_0 - 2MR^2$$

$$\omega = \frac{I_0\omega_0}{I_0 - 2MR^2}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Primer Semestre 2018

Nombre: ____

RUT: ____ N lista: _________

Interrogación 03
Preguntas de desarrollo

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

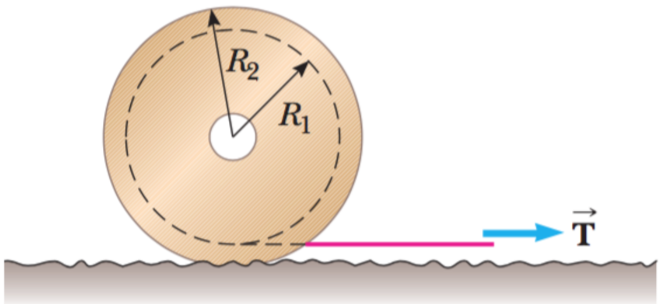
1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Reglas específicas a las preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.

Problema 1 [6 puntos]

Un carrete de hilo consiste en un cilindro de radio R_1 con tapas laterales de radio R_2, como se muestra en la vista lateral de la figura.

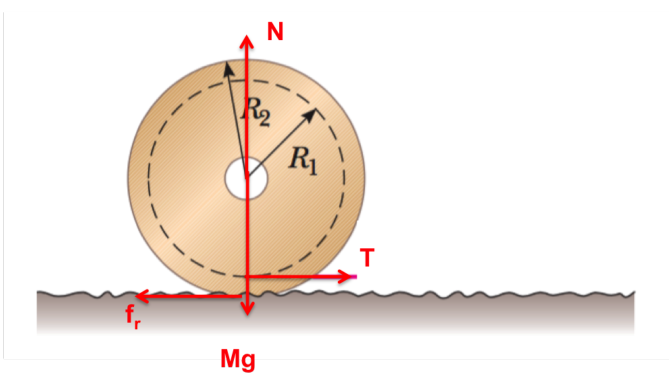


La masa del carrete, incluido el hilo, es m, y su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro es I. Asuma que la masa del hilo es despreciable.
El carrete se coloca sobre una superficie horizontal rugosa de modo que rueda sin resbalar cuando una fuerza $\vec{T}$ que actúa hacia la derecha, paralela al plano horizontal, se aplica al extremo libre del hilo. Determine:

a) La magnitud y dirección de la fuerza de fricción que ejerce la superficie sobre el carrete (4.0 pts)

b) La aceleración angular del carrete (2.0 pts).

Solución:



a) Las ecuaciones de movimiento del carrete son:

$\sum F_x : T - f_r = ma$ (1.0 puntos)

$\sum F_y : N - mg = 0$ (1.0 puntos) **NOTA: esta ecuación no es realmente necesaria para responder lo que se pregunta. Si el alumno no la escribe, pero de todas formas responde correctamente el problema, hay que asignar el puntaje completo de todos modos. Si no resuelve bien el problema, pero escribe esta ecuación, asignar también 1 punto.**

$\sum \tau_{CM} : f_r R_2 - T R_1 = I\omega$ (1.0 puntos)

Si rueda sin resbalar: $a = R_2 \alpha$. (0.5 puntos)

Entonces:
$T - f_r = m R_2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{T-f}{mR_2}$

$\rightarrow f_r R_2 - T R_1 = I\alpha$

$\rightarrow f_r R_2 - T R_1 = I \frac{T-f_r}{mR_2} = \frac{I}{mR_2} T - \frac{f_r}{mR_2} T$

$\rightarrow f \left(R_2 + \frac{I}{mR_2} \right) = T \left(R_1 + \frac{I}{mR_2} \right)$

$\rightarrow f = \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2} \right) T$ (0.5 puntos)

b)Aceleración angular:

$\alpha = \frac{T-f}{mR_2}$ (1.0 puntos)

$\alpha = \frac{1}{mR_2} \left(T - \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2} \right) T \right)$ (1.0 puntos)

Problema 2 [6 puntos]

Considere un sólido rígido que consiste en una varilla homogénea de masa M y largo ℓ la que tiene adosado en uno de sus extremos una esfera maciza de masa m y radio R. Este sólido se suspende de un pivote fijo O y originalmente se encuentra en forma horizontal como se muestra en la figura.

Se suelta el sólido desde el reposo (en la posición indicada). Al llegar a su posición más baja el sólido choca elásticamente con un bloque de masa $5m$ el cual está originalmente en reposo sobre una mesa horizontal. Encuentre el máximo ángulo α, medido con respecto a la vertical, que alcanza el sólido rígido después del choque.

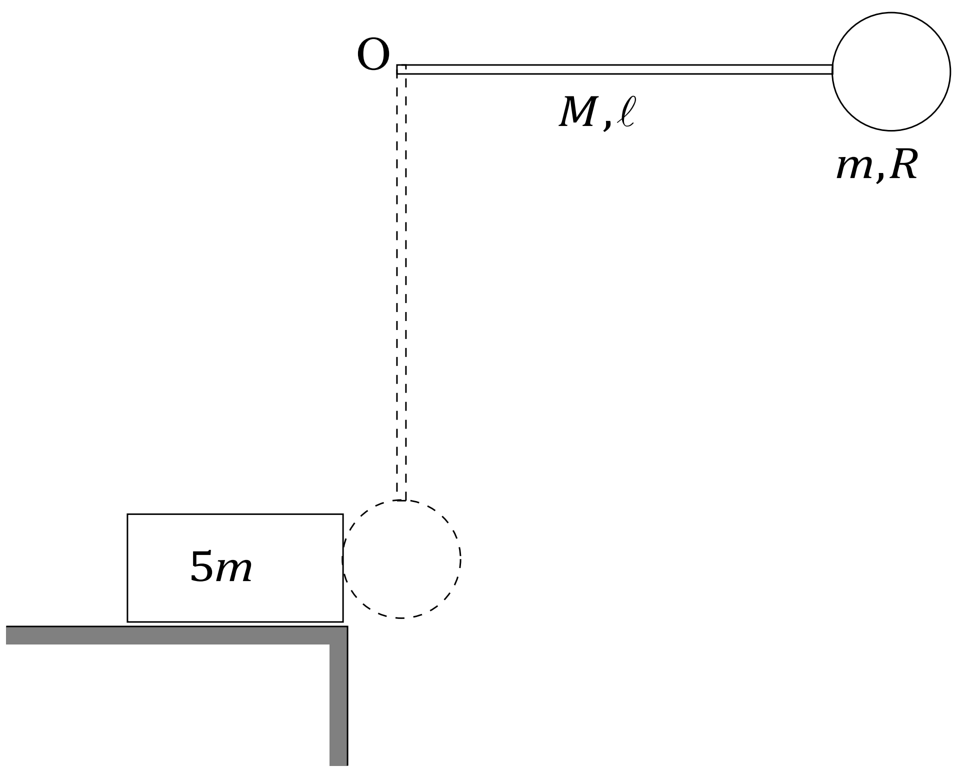
Indicaciones:

a) Encuentre el momento de inercia I_O del sólido con respecto al pivote. Si no sabe calcularlo expréselo simplemente como I_O en el resto del problema (1.5 ptos).

b) Encuentre la velocidad angular ω_0 que tiene el sólido rígido al llegar a la posición vertical, justo antes del choque. Para el resto del problema exprésela simplemente como ω_0 (1.5 ptos).

c) Encuentre la velocidad angular del sólido después del choque (1.5 ptos).

d) Finalmente encuentre el máximo ángulo α (1.5 ptos).



Solución:

a) El momento de inercia es aditivo y por lo tanto I_o del sólido de puede escribir como:

$$I_O = I_O^{varilla} + I_O^{esfera} \text{ (0.5 puntos)}$$

Usando el teorema de los ejes paralelos: $I_O^{varilla} = I_{CM}^{varilla} + Mh_1^2$(0.5 puntos)

donde h_1 es la distancia del pivote al centro de masa de la varilla, $h_1 = \frac{l}{2}$. Por lo tanto,

$I_O^{varilla} = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$

Para la esfera,

$I_O^{esfera} = I_{CM}^{esfera} + mh_2^2 = \frac{2}{5}mR^2 + m(l+R)^2 = \frac{7}{5}mR^2 + ml^2 + 2mlR$

Finalmente, $I_O = l^2\left(\frac{M}{3} + m\right) + \frac{7}{5}mR^2 + 2mlR$ (0.5 puntos)

b) Si llamamos A a la situación inicial (varilla horizontal) y B a la situación justo antes del choque, por conservación de energí tenemos:

$E_A = E_B$ (0.25 puntos)

Si tomamos el nivel inicial como referencia para el potencial gravitatorio, tenemos: $E_A = K_A + V_A = 0$. Por otra parte, en el punto B:

$E_B = K_B + V_B = \frac{1}{2}I_O\omega_O^2 + V_B$ (0.5 puntos)

Para el potencial gravitatorio, tenemos $V_B = -(M+m)gy$, donde y es la distancia desde O al centro de masa del sólido. Por definición del CM, tenemos:

$y = \frac{1}{M+m}\left(M\frac{l}{2} + m(l+R)\right)$ (0.5 puntos)

Por lo tanto: $E_B = \frac{1}{2}I_O\omega_O^2 - g\left(\frac{Ml}{2} + m(l+R)\right) = 0$

Finalmente, $\omega_O = \sqrt{\frac{g[Ml+2m(l+R)]}{I_O}}$ (0.25 puntos)

c) Si llamamos v_1 y ω_1 a la velocidad del bloque y la velocidad angular del sólido rígido justo después del choque y dado que el choque es elástico, por conservación de energía cinética tenemos que:

$K_{bloque}^i + K_{solido}^i = K_{bloque}^f + K_{solido}^f$

$0 + \frac{1}{2}I_O\omega_O^2 = \frac{1}{2}(5m)v_1^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_1^2$ (0.3 puntos)

Ahora es preciso notar que existe una fase impulsiva externa sobre el sistema bloque-sólido. De hecho, el eje que pasa por el pivote O en el momento del choque hace una fuerza impulsiva que mantiene al sólido ligado al pivote. Por esta razón, no se conserva el momentum lineal del sistema. Sin embargo, como esta fuerza está aplicada en O, el torque externo con respecto a O es cero, y por lo tanto se conserva el momento angular del sistema con respecto a O. Es decir,

$\vec{L_O^i} = \vec{L_O^f}$ (0.5 puntos)

Como el momento angular es aditivo, $\vec{L_O^i} = \vec{L_O^{solido}} + \vec{L_O^{bloque}}$.

Inicialmente el bloque está en reposo, y el sólido tiene velocidad angular $\vec{\omega_0} = -\omega_0\hat{k}$. Entonces,

$\vec{L_O^i} = -I_O\omega_0\hat{k}$ (0.2 puntos)

Después del choque, $\vec{L_O^{solido}} = -I_O\omega_1\hat{k}$, mientras que $\vec{L_O^{bloque}} = -5mv_1(l+R)\hat{k}$. Por lo tanto,

$\vec{L_O^f} = -I_O\omega_1\hat{k} - 5mv_1(l+R)\hat{k}$ (0.2 puntos)

Igualando momentum angular, tenemos:

$-I_O\omega_0\hat{k} = -I_O\omega_1\hat{k} - 5mv_1(l+R)\hat{k}$

$I_O(\omega_0 - \omega_1) = 5mv_1^2$
Resolvemos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para encontrar:

$v_1 = \frac{2\omega_0 I_0(l+R)}{I_0+5m(l+R)^2}$

$\omega_1 = \omega_0\frac{I_0-5m(l+R)^2}{I_0+5m(l+R)^2}$ (0.3 puntos)

d) Luego del choque la energía del sólido se conserva. Si llamamos h a la posición del CM del sólido rígido medido desde el pivote O, $h = y\cos\alpha$, entonces:

$\frac{1}{2}I_o\omega_1^2 = (M+m)g(y - y\cos\alpha)$ (0.75 puntos, uso de conservación de energía)

donde $y = \frac{1}{M+m}\left(M\frac{l}{2} + m(l+R)\right)$ (de la parte c).

Resolviendo, obtenemos:

$\cos\alpha = 1 - \frac{I_O\omega_1^2}{2(m+M)gy}$ (0.75 puntos)