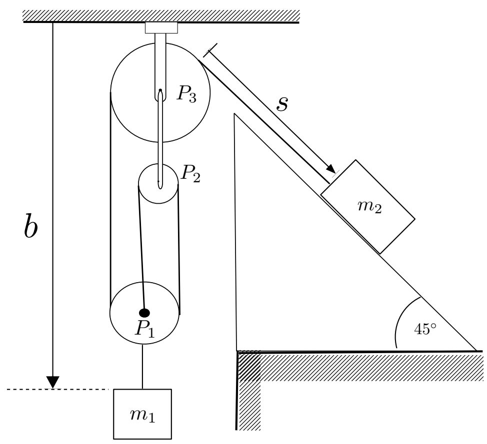
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Primer Semestre 2018

Interrogación 01 - Pauta

Problema 1 [1 punto]

En el sistema de la figura el bloque de masa m_2 desliza por un plano inclinado liso (sin roce) de ángulo 45° y el bloque de masa m_1 se mueve a lo largo de la vertical. Las poleas P_1, P_2 y P_3, que sirven de guía a la cuerda ideal que une P_1 con el bloque de masa m_2, son ideales. El bloque de masa m_1 cuelga del eje de la polea P_1 mediante otra cuerda ideal como se indica en la figura. El sistema se deja evolucionar bajo la acción de la gravedad.



La relación entre las aceleraciones $\ddot{b}$ y $\ddot{s}$ (ver figura) está dada por

a)
$$\ddot{b} + \ddot{s} = 0$$

b)
$$\ddot{b} - \ddot{s} = 0$$

c)
$$2\ddot{b} + \ddot{s} = 0$$

d)
$$3\ddot{b} + \ddot{s} = 0$$

e)
$$3\ddot{b} - \ddot{s} = 0$$

La ecuación de ligadura es:
$$3\ddot{b} + \ddot{s} = 0$$

Problema 2 [1 punto]

Considere nuevamente el sistema del Problema 1. Cualquiera haya sido su respuesta anterior, escriba la relación entre las entre las aceleraciones $\ddot{b}$ y $\ddot{s}$ como $\alpha\,\ddot{b} + \ddot{s} = 0$.

Entonces, en términos de los parámetros del problema y de α, la tensión de la cuerda que une m_2 con P_1 está dada por,

a)
$$T = \frac{m_1\, m_2(\alpha + (\sqrt{2}/2))}{m_1 + m_2\alpha}\, g$$

b)
$$T = \frac{m_1\, m_2(\alpha + (\sqrt{2}/2))}{m_1 + 3m_2\alpha}\, g$$

c)
$$T = \frac{m_1\, m_2(\alpha - (\sqrt{2}/2))}{m_1 + 3m_2\alpha}\, g$$

d)
$$T = \frac{m_1\, m_2(\alpha - (\sqrt{2}/2))}{m_1 + m_2\alpha}\, g$$

e)
$$T = \frac{m_1\, m_2(\alpha - (\sqrt{2}/2))}{m_1 - 3m_2\alpha}\, g$$

La tensión en la cuerda es:
$$T = \frac{m_1\, m_2(\alpha + (\sqrt{2}/2))}{m_1 + 3m_2\alpha}\, g$$

Problema 3 [1 punto]

Considere nuevamente el sistema del Problema 1. Finalmente, en términos de los parámetros del problema y de α, la aceleración del bloque m_1 está dada por,

a)

$$\ddot{b} = \frac{m_1 + 3(\sqrt{2}/2)\, m_2}{m_1 + 3m_2\alpha}\, g$$

b)

$$\ddot{b} = \frac{m_1 - (\sqrt{2}/2)\, m_2}{m_1 + m_2\alpha}\, g$$

c)

$$\ddot{b} = \frac{m_1 - (\sqrt{2}/2)\, m_2}{m_1 - m_2\alpha}\, g$$

d)

$$\ddot{b} = \frac{m_1 - 3(\sqrt{2}/2)\, m_2}{m_1 + 3m_2\alpha}\, g$$

e)

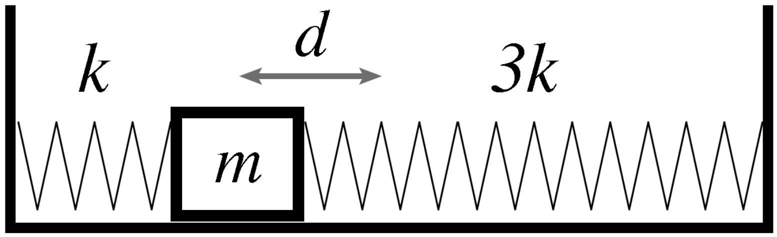
$$\ddot{b} = \frac{m_1 - 3(\sqrt{2}/2)\, m_2}{m_1 - 3\, m_2\alpha}\, g$$

La aceleración del bloque m_1 es:

$$\ddot{b} = \frac{m_1 - 3(\sqrt{2}/2)\, m_2}{m_1 + 3m_2\alpha}\, g$$

Problema 4 [1 punto]

Se dispone de dos resortes de constantes elásticas k y $3k$, unidos a un bloque de masa m como se muestra en la Figura. En la situación inicial, los resortes están en su largo natural.



Si se desprecia el roce del cuerpo de masa m con el suelo, la magnitud de la aceleración en el instante en el que dicho cuerpo se separa una distancia d pequeña en torno a su posición de equilibrio vendrá dada por:

a)
$$\frac{4kd}{m}$$

b)
$$\frac{2kd}{m}$$

c)
$$0$$

d)
$$\frac{3kd}{m}$$

e)
$$\frac{kd}{m}$$

Al plantear el diagrama de cuerpo libre en la dirección relevante y utilizando la Segunda Ley de Newton en esa dirección podemos escribir:

$$-k_1\, d - k_2\, d = m\ddot{d}$$

$$-k\, d - 3k\, d = m\ddot{d}$$

Por lo tanto:

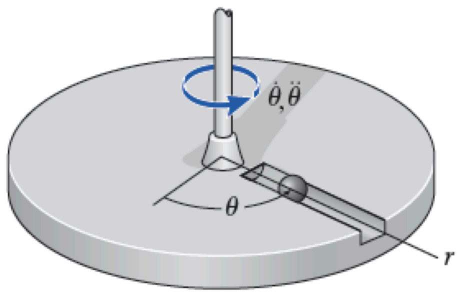
$$\ddot{d} = -4\frac{kx}{m}$$

Con lo que la magnitud de la aceleración será:

$$4\frac{kx}{m}$$

Problema 5 [1 punto]

La plataforma gira en torno al eje vertical de modo que en cualquier instante su posición angular es $\theta = At^{3/2}\,rad$, donde A es una constante y t está en segundos. Una bola rueda hacia fuera a lo largo de la ranura radial de modo que su posición es $r = Bt^3\,m$, donde B es otra constante y t también está en segundos. En $t = 1\,s$ los vectores velocidad y aceleración de la bola son:



a)
$$\vec{v}(t = 1\,s) = 3B\hat{\rho} + \frac{3}{2}AB\hat{\theta} \qquad y \qquad \vec{a}(t = 1\,s) = (6B - \frac{9}{4}A^2B)\hat{\rho} + (\frac{15}{4}AB)\hat{\theta}$$

b)
$$\vec{v}(t = 1\,s) = 3B\hat{\rho} + \frac{2}{3}AB\hat{\theta} \qquad y \qquad \vec{a}(t = 1\,s) = (6B - \frac{9}{4}AB^2)\hat{\rho} + (\frac{15}{4}AB)\hat{\theta}$$

c)
$$\vec{v}(t = 1\,s) = 3B\hat{\rho} + \frac{3}{2}AB\hat{\theta} \qquad y \qquad \vec{a}(t = 1\,s) = (6B - \frac{9}{4}A^2B)\hat{\rho} + (\frac{39}{4}AB)\hat{\theta}$$

d)
$$\vec{v}(t = 1\,s) = 3B\hat{\rho} + \frac{2}{3}AB\hat{\theta} \qquad y \qquad \vec{a}(t = 1\,s) = (6B - \frac{9}{4}AB^2)\hat{\rho} + (\frac{39}{4}AB)\hat{\theta}$$

e)
$$\vec{v}(t = 1\,s) = 3B\hat{\rho} + \frac{2}{3}AB\hat{\theta} \qquad y \qquad \vec{a}(t = 1\,s) = (6B - \frac{9}{4}A^2B)\hat{\rho} + (\frac{15}{4}AB)\hat{\theta}$$

Es un problema donde las coordenadas polares son claramente ventajosas. Las expresiones en polares para la velocidad y la aceleración son:

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Derivamos las expresiones para θ y r:

$$r = Bt^3 \qquad \dot{r} = 3Bt^2 \qquad \ddot{r} = 6Bt$$

$$\theta = At^{3/2} \qquad \dot{\theta} = \frac{3}{2}At^{1/2} \qquad \ddot{\theta} = \frac{3}{4}At^{-1/2}$$

En $t = 1\,s$:

$$r = B \qquad \dot{r} = 3B \qquad \ddot{r} = 6B$$

$$\theta = A \qquad \dot{\theta} = \frac{3}{2}A \qquad \ddot{\theta} = \frac{3}{4}A$$

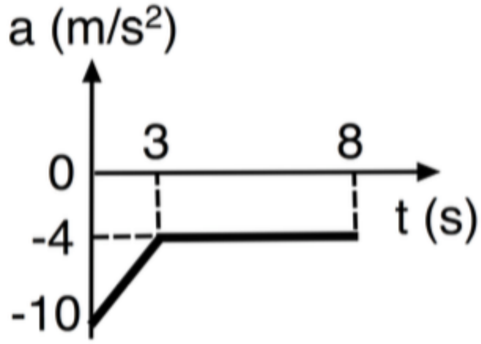
Sustituyendo en las expresiones para la velocidad y la aceleración, se obtiene:

$$\vec{v}(t = 1\,s) = 3B\hat{\rho} + \frac{3}{2}AB\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t = 1\,s) = (6B - \frac{9}{4}A^2B)\hat{\rho} + (\frac{39}{4}AB)\hat{\theta}$$

Problema 6 [1 punto]

El siguiente gráfico indica la aceleración de un avión durante los primeros segundos de su aterrizaje.



Si el avión comienza su aterrizaje con una rapidez de 50 m/s, ¿cuál es la distancia total recorrida por el avión durante los primeros 3 s?

a) 105 m

b) 114 m

c) 150 m

d) 159 m

e) 204 m

$$a_{0-3}(t) = 2t - 10$$
$$v_{0-3}(t) = t^2 - 10t + 50$$
$$x_{0-3}(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 50t$$
$$\Delta x_{0-3}(3) = 9 - 45 + 150 = 114m$$

Problema 7 [6 puntos]

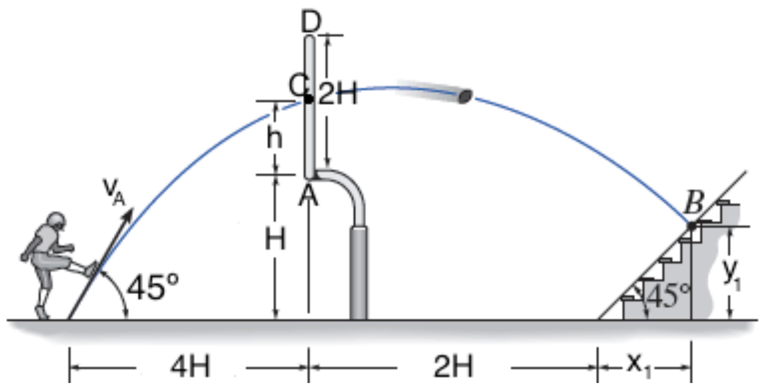
Se patea el balón sobre el poste de meta con una rapidez inicial v_A como se muestra en la figura.

a) Encuentre v_A, en función de H, h y g, para que la pelota pase por el punto C. [2 ptos]

b) Determine el valor mínimo y máximo de v_A para que se anote un gol (es decir, que la pelota pase sobre el poste de meta, entre los puntos A y D indicados en la figura). [1 pto]

c) Si $v_A = \sqrt{8gH}$, determine el tiempo que le toma a la pelota en chocar con las gradas (punto B). [2 ptos]

d) Si $v_A = \sqrt{8gH}$, determine el punto $B(x_1, y_1)$ donde la pelota choca con las gradas. [1 pto]



(a) Las ecuaciones de la trayectoria son

$$x = v_A \cos\theta t$$
$$y = v_A \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

Las coordenadas del punto C son $(4H, H+h)$, entonces

$$[0{,}5 \text{ puntos}]\, 4H = v_A \cos\theta t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4H}{v_A\cos\theta}\,[0{,}5 \text{ puntos}]$$

$$[0{,}5 \text{ puntos}]\, H + h = v_A \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = v_A \sin\theta \frac{4H}{(v_A\cos\theta)} - \frac{1}{2}g\left(\frac{4H}{v_A\cos\theta}\right)^2$$

$$H + h = 4H\tan\theta - \frac{8gH^2}{v_A^2\cos^2\theta}$$

como $\theta = 45$, $\tan\theta = 1$ y $\cos^2\theta = 1/2$, por lo tanto

$$H + h = 4H - \frac{16gH^2}{v_A^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_A = 4H\sqrt{\frac{g}{3H-h}}}\,[0{,}5 \text{ puntos}]$$

(b) La velocidad mínima se obtiene con $h = 0$:

$$v_{Amin} = 4H\sqrt{\frac{g}{3H}} = \mathbf{4\sqrt{\frac{gH}{3}}}\text{[0,5 puntos]}$$

y la velocidad máxima con $h = 2H$:

$$v_{Amax} = 4H\sqrt{\frac{g}{3H - 2H}} = \mathbf{4\sqrt{gH}}\text{[0,5 puntos]}$$

(c) Considerando que se dispara con una velocidad $v_A = \sqrt{8gH}$ y reemplazando las coordenadas del punto

B $(x_1 + 6H,\, y_1)$ en las ecuaciones de la trayectoria, tenemos

$$x_1 + 6H = v_A \cos\theta t\text{[0,5 puntos]}$$

$$y_1 = v_A \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\text{[0,5 puntos]}$$

Como las gradas tienen una inclinación de 45^o, se debe tener $x_1 = y_1$ [0.5 puntos], por lo tanto

$$v_A \cos\theta t - 6H = v_A \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_A\frac{\sqrt{2}}{2}\,t - 6H = v_A\frac{\sqrt{2}}{2}\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

osea

$$\mathbf{t = 2\sqrt{\frac{3H}{g}}}\text{[0,5 puntos]}$$

(d) Reemplazando el tiempo en $x_1 + 6H = v_A \cos\theta t$:

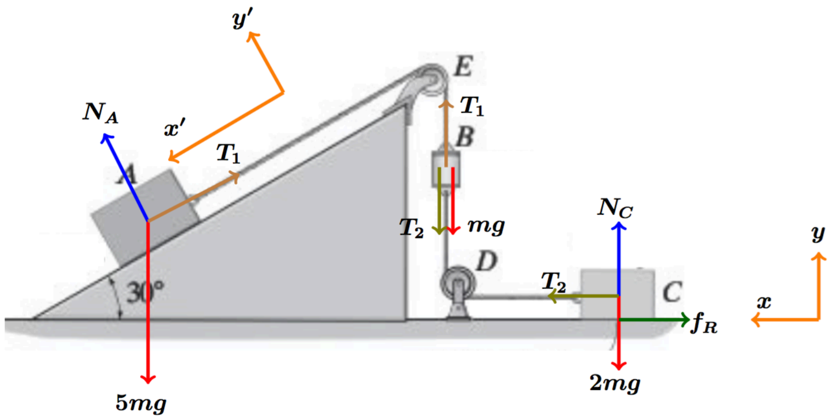
$$x_1 + 6H = \sqrt{8gH}\frac{\sqrt{2}}{2}\,2\sqrt{\frac{3H}{g}}\;\; 2\sqrt{\frac{3H}{g}} = 4H\sqrt{3} - 6H\text{[0,5 puntos]}$$

es decir

$$\mathbf{x_1 = y_1 = (4\sqrt{3} - 6)H}\text{[0,5 puntos]}$$

Problema 8 [6 puntos]

Considere el sistema mostrado en la figura. Asuma que tanto las cuerdas como las poleas son ideales. Además el plano inclinado es liso (no hay roce) y los coeficientes de fricción estático y cinético (dinámico) entre la superficie horizontal y el bloque C son μ_s y μ_k respectivamente.



a) ¿ Cuál es el mínimo valor para el coeficiente de fricción estático de manera que el sistema se encuentre en reposo? [2 puntos].

Asuma de ahora en adelante que los coeficientes de fricción estático y cinético entre la superficie horizontal y el bloque C son $\mu_s = 0{,}3$ y $\mu_k = 0{,}2$ respectivamente. Determine:

b) La aceleración del cuerpo A de masa $5m$ [2 puntos].

c) La tensión en el cable que une el cuerpo A y B [1 punto].

d) La tensión en el cable que une el cuerpo B y C [1 punto].

Nota: Expresse sus respuestas en función de m y g

Para comenzar, hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos:
a) Cuál es el mínimo valor para el coeficiente de fricción estático de manera que el sistema se encuentre en reposo? [2 puntos].

1. 0.25 puntos por cada diagrama de cuerpo libre correcto como en la figura anterior [0.75 puntos total].
2. Elegir los sistemas de coordenadas y escribir la segunda ley de Newton para cada cuerpo. En el caso de la pregunta a), los cuerpos están en reposo, por lo tanto todos los cuerpos tienen aceleración cero ($\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = 0$)
Cuerpo A:
Dirección x': $5mg \sin 30^o - T_1 = 0 \implies T_1 = \frac{5}{2}mg$ [0.25 puntos]
Cuerpo B:
Dirección y: $T_1 - T_2 - mg = 0 \implies T_2 = T_1 - mg = \frac{5}{2}mg - mg \implies T_2 = \frac{3}{2}mg$ [0.25 puntos]
Cuerpo C:
Dirección y: $N_C - 2mg = 0 \implies N_C = 2mg$
Dirección x: $T_2 - f_R = 0 \implies f_R = T_2 = \frac{3}{2}mg$ [0.25 puntos]
Para que el sistema está en equilibrio, la fuerza roce debe ser igual a $3/2mg$.

3. Ahora el máximo valor que puede tomar la fuerza roce está determinado por el coeficiente de roce estático.

$$f_R^{\max} = \mu_s N_C = 2mg\mu_s \quad \text{[0.25 puntos]}$$

Por lo tanto, el mínimo valor de μ_s para que el sistema está en equilibrio es tal que $f_R^{\max} = 3/2mg$. De esta forma tenemos que:

$$2mg\mu_s = \frac{3}{2}mg \implies \mu_s = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \text{[0.25 puntos]}$$

b) La aceleración del cuerpo A de masa $5m$ [2 puntos].

1. Como el coeficiente de roce estático para esta pregunta es $\mu_s = 0{,}3$, por lo tanto, menor al mínimo para que el sistema se encuentre en reposo (0,75 del inciso anterior), el sistema va a entrar en movimiento [0.2 puntos].
2. Se utilizan los mismos diagramas de cuerpo libre del inciso anterior.
3. Elegir los sistemas de coordenadas y escribir la segunda ley de Newton para cada cuerpo.
Cuerpo A:
Dirección x':

$$\begin{aligned} 5mg\sin 30^o - T_1 &= 5m\ddot{x}' \\ \frac{5}{2}mg - T_1 &= 5m\ddot{x}' \quad \text{[0,2 puntos]} \end{aligned} \tag{1}$$

Cuerpo B:
Dirección y:

$$T_1 - T_2 - mg = m\ddot{y}_B \quad \text{[0,2 puntos]} \tag{2}$$

Cuerpo C:
Dirección y: $N_C - 2mg = 0 \implies N_C = 2mg$
Dirección x:

$$\begin{aligned} T_2 - f_R &= 2m\ddot{x}_C \\ T_2 - \mu_k N_C &= 2m\ddot{x}_C \\ T_2 - \mu_k 2mg &= 2m\ddot{x}_C \\ T_2 - \frac{2}{5}mg &= 2m\ddot{x}_C \quad \text{[0,2 puntos]} \end{aligned} \tag{3}$$

4. Condición de ligadura. Como el cuerpo A está unido por una cuerda al cuerpo B y este a su vez unido al cuerpo C por otra cuerda, la magnitud de la aceleración de todos los cuerpos es la misma. Es decir, $\ddot{x}' = \ddot{y}_B = \ddot{x}_C = a$ [0.2 puntos].
De esta forma podemos escribir el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3) como:

$$\frac{5}{2}mg - T_1 = 5ma \tag{4}$$

$$T_1 - T_2 - mg = ma \tag{5}$$

$$T_2 - \frac{2}{5}mg = 2ma \quad \text{[0,25 puntos]} \tag{6}$$

donde las incógnitas son a, T_1 y T_2. Sumando las ecuaciones (4), (5) y (6)obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}mg - mg - \frac{2}{5}mg &= 8ma \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5}\right) g = 8a &\implies a = \frac{11}{80}g \quad \text{[0,75 puntos]} \end{aligned} \tag{7}$$

c) La tensión en el cable que une el cuerpo A y B [1 punto].

La tensión en el cable que une los cuerpos A y B corresponde a T_1 en la ec. (4). Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{5}{2}mg - T_1 = 5ma$$

$$T_1 = \frac{5}{2}mg - 5ma \quad \text{[0,25 puntos]} \tag{8}$$

Usando $a = \frac{11}{80}g$ del inciso anterior obtenemos que:

$$T_1 = \frac{5}{2}mg - 5ma = \frac{5}{2}mg - \frac{11}{16}mg \implies T_1 = \frac{29}{16}mg \quad \text{[0,75 puntos]} \tag{9}$$

d) La tensión en el cable que une el cuerpo B y C [1 punto].

La tensión en el cable que une los cuerpos B y C corresponde a T_2 en la ec. (6). Por lo tanto tenemos que:

$$T_2 - \frac{2}{5}mg = 2ma$$

$$T_2 = \frac{2}{5}mg + 2ma \quad \text{[0,25 puntos]} \tag{10}$$

Usando $a = \frac{11}{80}g$ del inciso b) obtenemos que:

$$T_2 = \frac{2}{5}mg + 2ma = \frac{2}{5}mg + \frac{11}{40}mg \implies T_2 = \frac{27}{40}mg \quad \text{[0,75 puntos]} \tag{11}$$