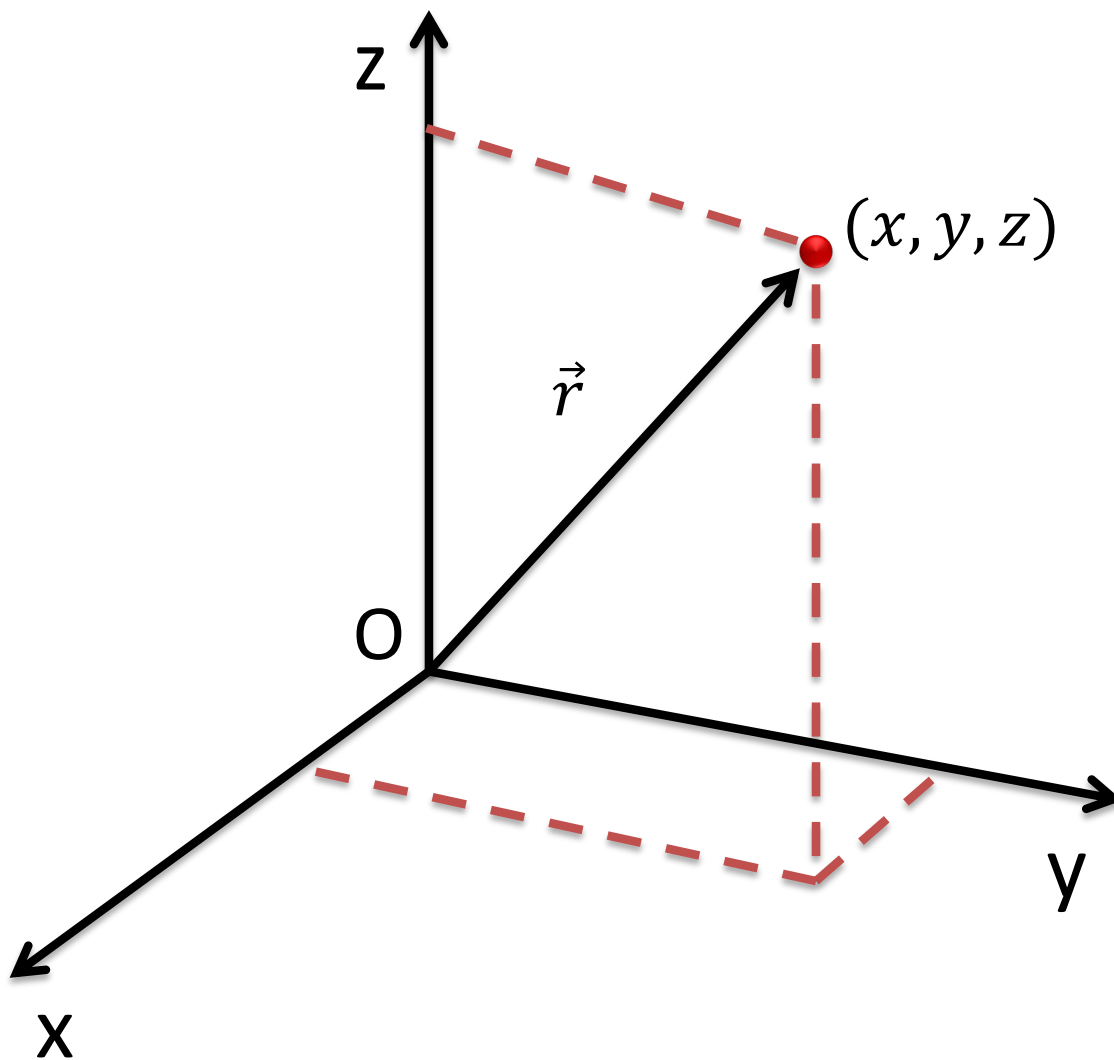


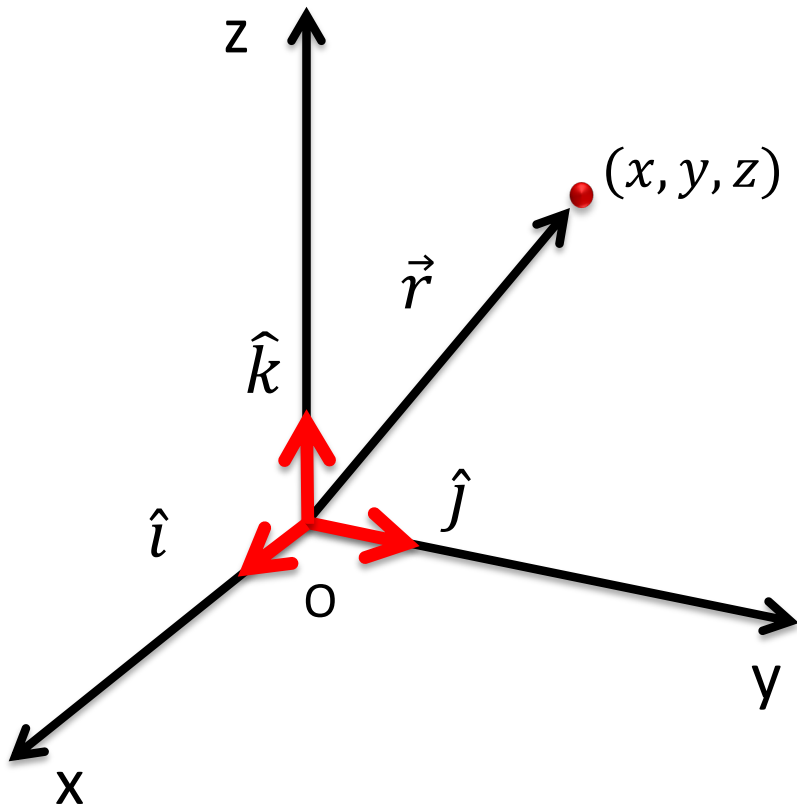
Estática y Dinámica

Cinemática

Coordenadas Cartesianas



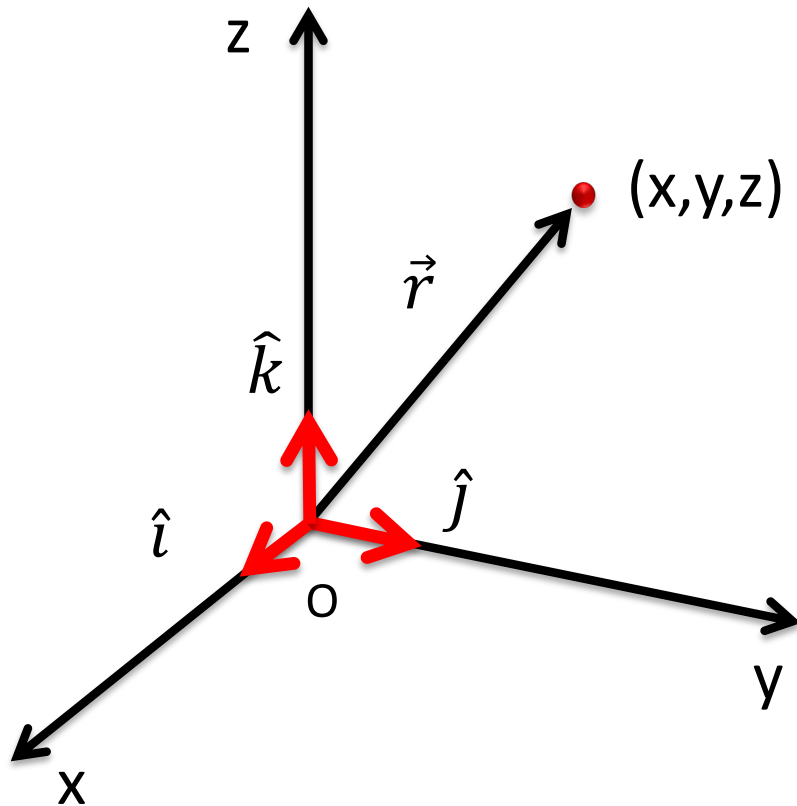
Coordenadas Cartesianas



$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

Coordenadas Cartesianas

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$



Velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Coordenadas Cartesianas

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Aceleración

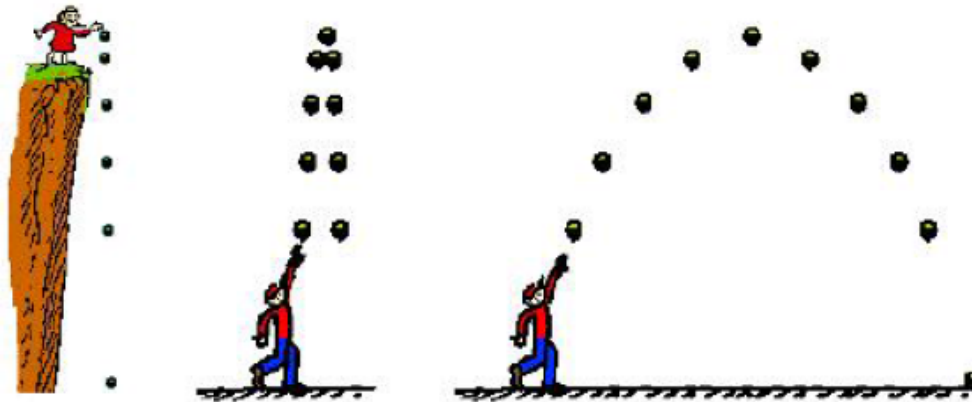
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Movimiento bajo aceleración de gravedad



Distintas condiciones iniciales

En el caso de la izquierda (caída libre)

$$v_o = 0 \quad y_o = H$$

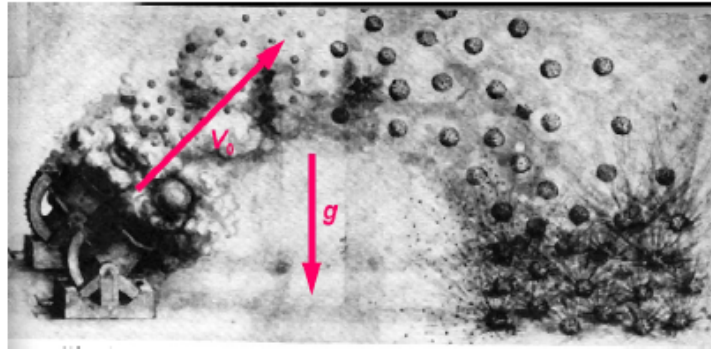
En el caso del centro (tiro vertical)

$$v_o \neq 0 \quad y_o = h_o \quad \vec{v}_o = v_o \hat{j}$$

En el caso de la derecha (más general)

$$v_o \neq 0 \quad y_o = h_o \quad \vec{v}_o = v_{ox} \hat{i} + v_{oy} \hat{j}$$

Movimiento bajo aceleración de gravedad

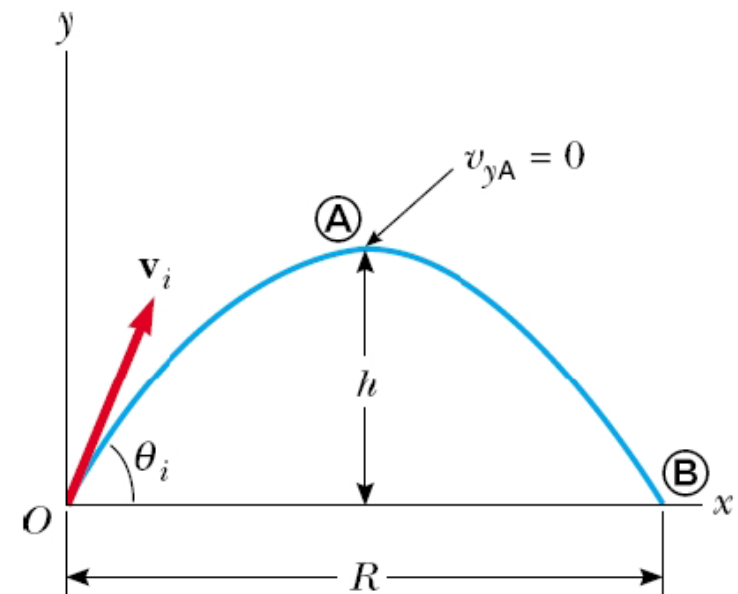


Supongamos que conocemos v_o y θ_o

$$v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$

$$v_{oy} = v_o \sin \theta_o$$

- ¿Cuál es la altura máxima, h_{max} , alcanzada?
- ¿Cuál es el alcance o rango, R , del proyectil?
- ¿Cuánto tiempo está en el aire?



$$h_{max} \iff v_y(t) = 0$$

$$R \iff y(t) = 0$$

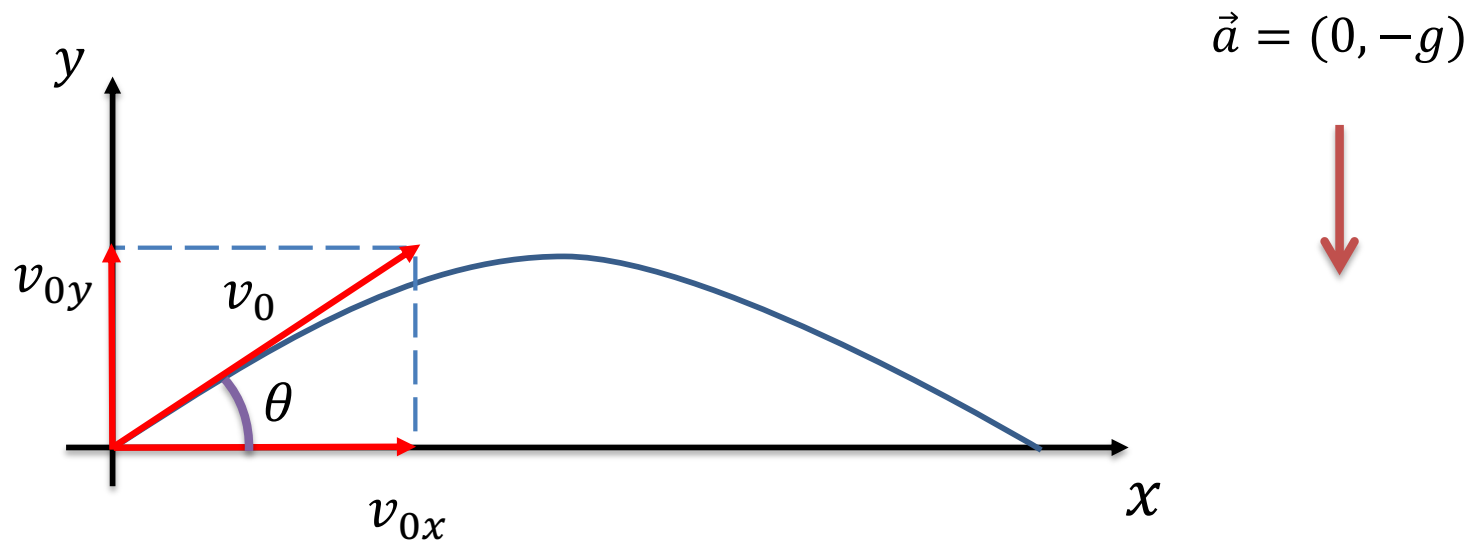
Proyectiles



Problema: Describir el movimiento, i.e., encontrar $\vec{r} = (x, y) = x \hat{i} + y \hat{j}$

Dado, $\vec{a}, \vec{v}(0), \vec{r}(0)$

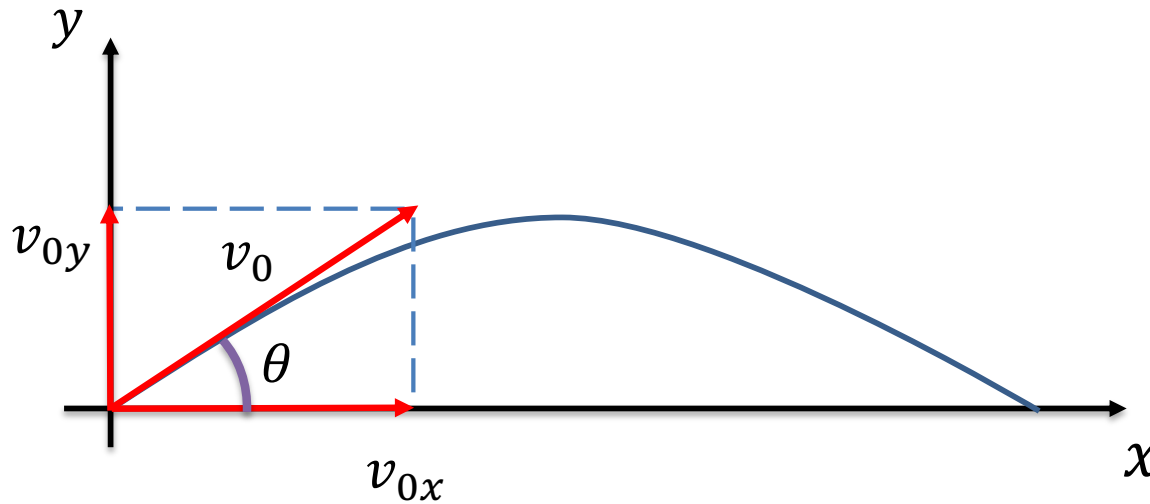
Ecuaciones del movimiento: Condiciones iniciales



$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Ecuaciones del movimiento:



$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Eje x:

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

Eje y:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ecuaciones del movimiento:

Eje x:

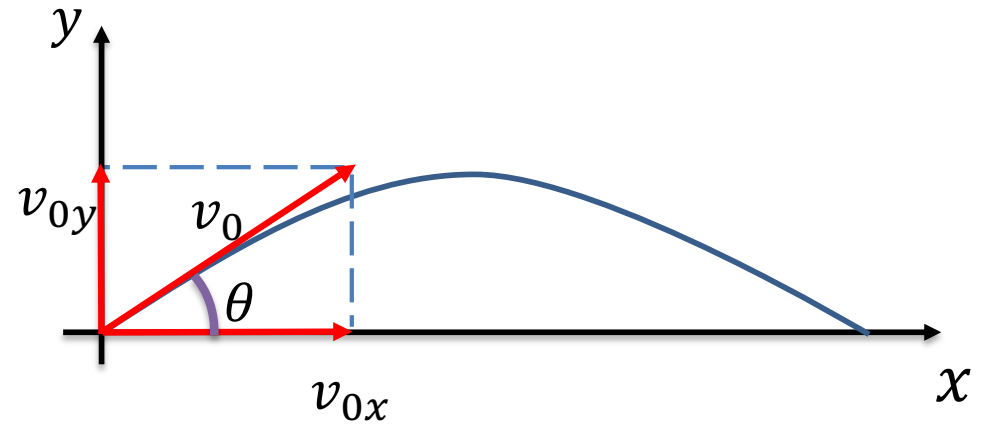
$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta t$$

Eje y:

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$



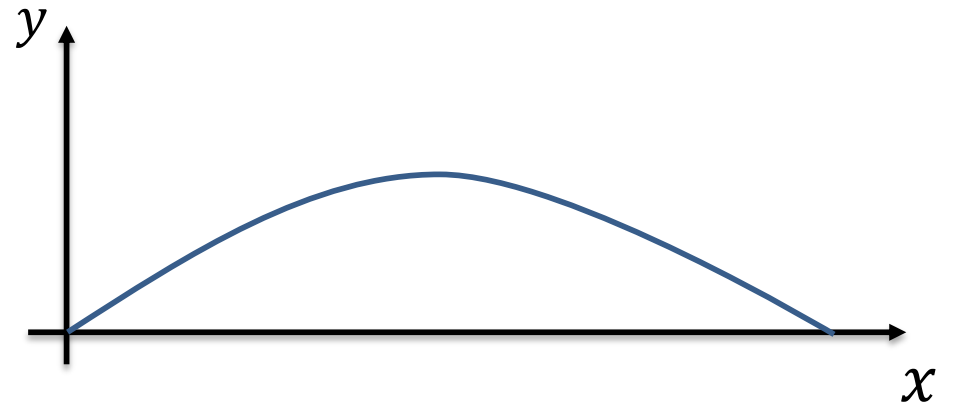
Tiempo de vuelo

$$\text{Cdo } y = y_0$$

$$v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$\left(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t \right) t = 0$$

$$t_v = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$



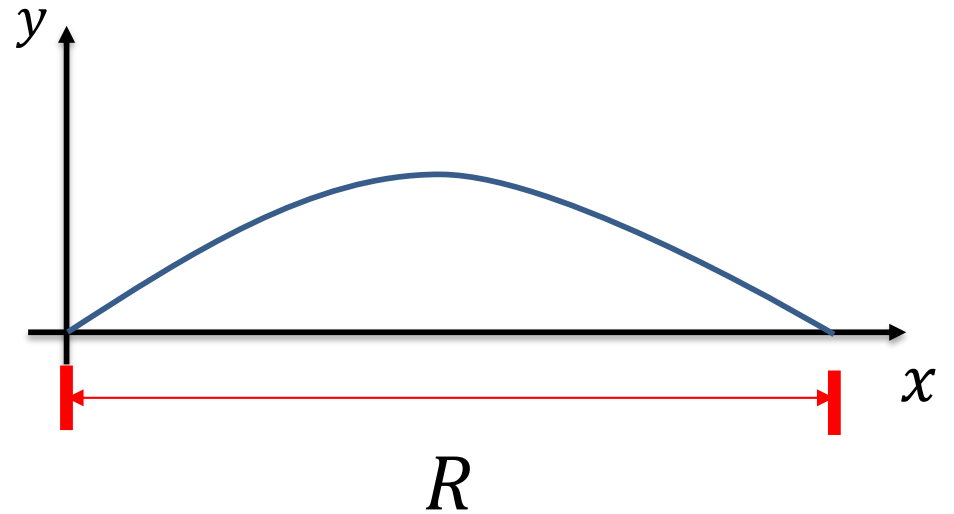
Alcance

$$R = v_0 \cos \theta t_v$$

$$t_v = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

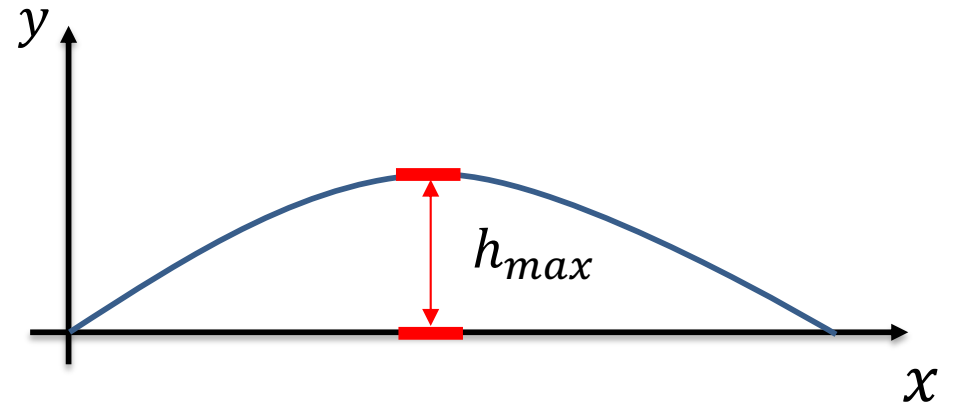
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$



Altura máxima

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{En } t = t_v/2$$



$$\frac{t_v}{2} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{2g}$$


Ecuación de la trayectoria

Eje y:

Eje x:

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta t$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$


$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

Ecuación de la trayectoria

$$y = y_0 + \tan \theta (x - x_0) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

$$t_v = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (\text{Tiempo de vuelo})$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (\text{Alcance})$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{2g} \quad (\text{Altura máxima})$$

$$y = y_0 + \tan \theta (x - x_0) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (\text{Trayectoria})$$