Estática y Dinámica

Para clase Oscilador armónico

1. Sistema Masa resorte

2. Movimiento armónico Simple

3. Ejemplos

1. Sistema masa resorte

En este punto estudiaremos la dinámica de un sistema compuesto por una masa que se desplaza sobre una mesa lisa, i.e., sin roce y que está unida a la pared por un resorte de constante k y largo natural l_0,

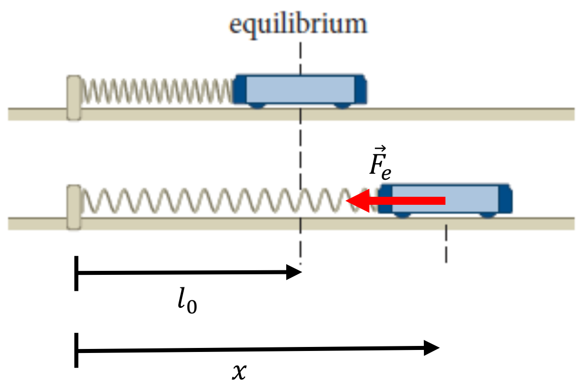


Figura 1

Para pequeños desplazamientos la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) \tag{1.1}$$

Donde x_0 es el largo natural medido desde el origen del sistema tomado. En este caso, $x_0 = l_0$.

Notemos que en la posición de equilibrio $\ddot{x} = 0$, $x_{eq} = x_0 = l_0$.

Para describir el problema de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio, introduzcamos la variable,

$s = x - x_{eq} = x - l_0$

entonces, $\dot{s} = \dot{x}$, $\ddot{s} = \ddot{x}$ y de (1.1) la ecuación para $s(t)$ es

$$m\ddot{s} + ks = 0. \tag{1.2}$$

Para determinar la evolución del sistema necesitamos conocer,

$$s(0), \quad y \quad \dot{s}(0).$$

Para resolver la ecuación (1.2) notemos que la derivada de la exponencial es la propia exponencial.

Intentamos una solución de la forma:

$$s = e^{pt} \tag{1.3}$$

y substituyendo en la ecuación tenemos:

$$[mp^2 + k]e^{pt} = 0.$$

Como $e^{pt} > 0 \quad \Longrightarrow \quad mp^2 + k = 0$ entonces,

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$$

La solución general es entonces una combinación lineal de las soluciones particulares,

$$s(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} \tag{1.4}$$

donde A y B dependen de las condiciones iniciales,

$$\begin{gathered} A + B = s(0) \\ Ap_1 + Bp_2 = \dot{s}(0) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Resolviendo el sistema para A y B obtenemos,

$$\begin{gathered} A = \frac{\dot{s}(0) - p_2 s(0)}{p_1 - p_2} \\ \\ B = \frac{\dot{s}(0) - p_1 s(0)}{p_2 - p_1} \end{gathered} \tag{1.6}$$

Reemplazando estos valores en $s(t)$ obtenemos

$$s(t) = s(0)\left[\frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_2 - p_1}\right] + \dot{s}(0)\left[\frac{e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{p_2 - p_1}\right] \tag{1.7}$$

y con

$$p_2 = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega, \qquad p_1 = -i\sqrt{\frac{k}{m}} = -i\omega,$$

$$s(t) = s(0)\left[\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2}\right] + \dot{s}(0)\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i\sqrt{k/m}}\right] \tag{1.8}$$

Pero, $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos\omega t, \quad e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i\sin\omega t$

Entonces,

$$s(t) = s(0)\cos\omega t + \frac{\dot{s}(0)}{\omega}\sin\omega t \tag{1.9}$$

A pesar de que hemos obtenido la solución para condiciones iniciales arbitrarias en general al resolver algún problema en partículas escribiremos la solución como,

$$s(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.10}$$

o,

$$s(t) = A\sin(\omega t + \phi_i) \tag{1.11}$$

2. Movimiento armónico simple

Notemos que el movimiento descrito por (1.11) es periódico en el tiempo, pues

$$\sin(\omega t + \phi_i) = \sin(\omega t + 2\pi + \phi_i) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi_i\right] \tag{2.1}$$

Esto es,

$$s(t) = s(t + T)$$

Donde de (2.1)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.2}$$

es el **periodo del movimiento**, el tiempo en que el sistema da una oscilación completa.

Cualquier movimiento periódico que lleve a una solución sinusoidal como (1.11) es llamado de **movimiento armónico simple** y el sistema que ejecuta este movimiento de **oscilador armónico**.

El inverso del periodo es llamado de **frecuencia** del movimiento,

$$f = \frac{1}{T} \tag{2.3}$$

y nos da el número de ciclos por segundo[1].

---

[1] Es una simple regla de tres,

$T \to 1\ osc$
$1\ s \to n\ osc.$

La unidad de medida en el SI para la frecuencia es el Hertz (Hz) en honor al físico alemán del siglo 19 Heinrich Hertz que fue el primero en generar ondas de radio,

$$1H_z \equiv 1\, s^{-1}$$

Substituyendo (2.2) en (2.3) encontramos,

$$\omega = 2\pi f \qquad (2.4)$$

En el contexto de las oscilaciones ω es llamada de **frecuencia angular**.

La figura 2 muestra la variación sinusoidal de una función descrita por un movimiento armónico simple representado por una flecha de longitud A que rota describiendo un círculo. La flecha es llamada de **fasor**. El fasor rota en la dirección contraria a las manecillas de reloj con una velocidad angular (o frecuencia angular constante ω). La componente vertical del fasor varía sinusoidalmente con el tiempo.

c

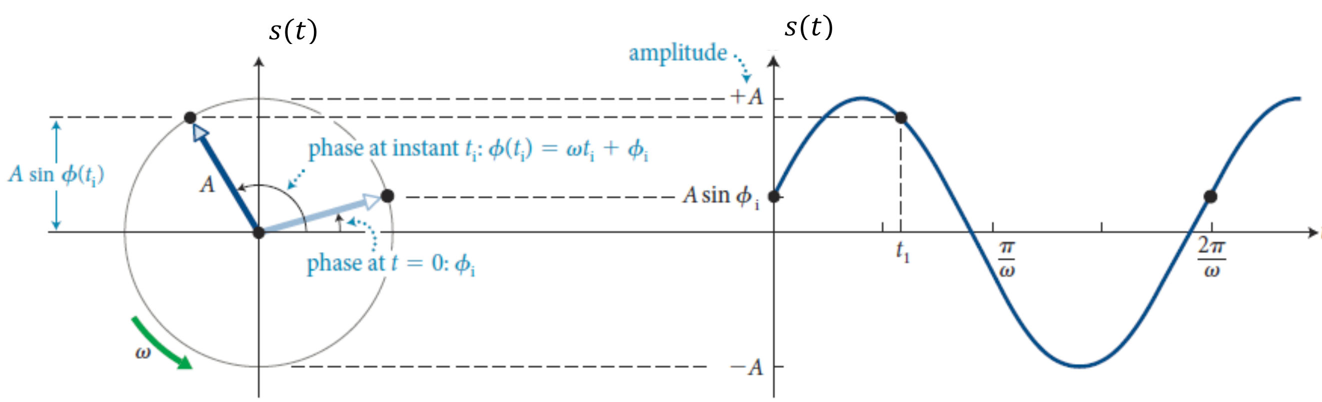


Figura 2

La posición rotacional de la punta del fasor relativa al eje horizontal es llamada de fase del movimiento. La fase es representada por la letra $\phi(t)$. Para una frecuencia angular constante, la fase aumenta linealmente con el tiempo:

$$\phi(t) = \omega t + \phi_i \quad \text{(a frecuencia angular constante)} \qquad (2.5)$$

donde $\phi_i$es la fase inicial en $t = 0$.

La componente vertical de A en la Figura 2 puede ser escrita en la forma

$$s(t) = A \sin(\omega t + \phi_i) \qquad (2.6)$$

Derivando la ecuación (2.6) con respecto al tiempo, podemos encontrar la velocidad

$$\dot{s}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi_i) \tag{2.7}$$

y de esta última la aceleración,

$$\ddot{s}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi_i) \tag{2.8}$$

Las ecuaciones (2.6-2.7) son las ecuaciones cinemáticas básicas de un movimiento armónico.

Substituyendo (2.8) en (2.6) obtenemos

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0 \tag{2.9}$$

Esta ecuación es llamada de ecuación del oscilador harmónico simple debido a que cualquier sistema que satisface la ecuación realiza un movimiento armónico simple.

Notemos que la ecuación anterior nos dice también que el objeto está sometido a una fuerza restauradora,

$$m\ddot{s} = -m\omega^2 s \tag{2.10}$$

Energía en el movimiento armónico simple

Como la interacción (2.10) que causa la oscilación es reversible, el cambio en la energía cinética debe ser provista por alguna forma de energía potencial.

De (2.10) el trabajo de la fuerza es

$$W = \int_{s_0}^{s} -m\omega^2 s \, ds = -\left[\frac{1}{2}m\omega^2 s^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 s_0^2\right] \tag{2.11}$$

y el teorema del trabajo y la energía,

$$\Delta K = -\left[\frac{1}{2}m\omega^2 s^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 s_0^2\right] \tag{2.12}$$

Si incluimos el objeto que causa la oscilación en nuestro sistema, en el sistema cerrado, $\Delta E = 0$. Por lo tanto, el cambio en la energía potencial del sistema cerrado es $\Delta K = -\Delta U$ y substituyendo en (2.12) con $s = x - x_{eq}$

$$\Delta U = \frac{1}{2}m\omega^2 (x - x_{eq})^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 (x_0 - x_{eq})^2 \tag{2.13}$$

Si tomamos x_0 como la posición de equilibrio, $U(x_0) = 0$ y

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_{eq})^2 \tag{2.14}$$

Entonces, la energía mecánica es,

$$E = K + U = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 s^2 \tag{2.15}$$

y substituyendo las ecuaciones (2.6) y (2.7) para s y $\dot{s}$ obtenemos,

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_i) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_i)$$

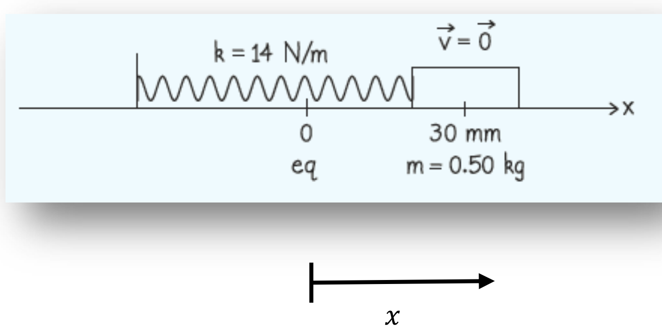
$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \tag{2.16}$$

donde utilizamos la identidad trigonométrica, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. La ecuación (2.16) muestra que la energía mecánica del oscilador armónico simple es constante y proporcional al cuadrado de la amplitud.

Ejemplo 1: **Sistema masa resorte**

Un carro de masa $m = 0.50$ kg que se encuentra unido a un resorte de constante elástica $k = 14$ N/m es desplazado 30 mm desde la posición de equilibrio y luego liberado desde el reposo.

¿Cuál es la posición del carro y su velocidad 2.0 segundos después de ser liberado?



Fijemos el origen del sistema coordenado en la posición de equilibrio. En ese caso, la ecuación de movimiento es,

$$m\ddot{x} = -kx$$

que podemos escribir como,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

donde

$$\omega = \sqrt{k/m} = 5.3\ Hz$$

es la frecuencia angular y por lo tanto el periodo de las oscilaciones es,

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

La solución general de (2.6) la escribimos como,

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi_i)$$

De la condición inicial, $\dot{x}(0) = 0$,

$$0 = A\omega\sin(\phi_i) \Longrightarrow \ \phi_i = \pi/2$$

y

$$x(t) = A\sin(\omega t + \pi/2) = A\cos(\omega t)$$

Y la velocidad es

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t)$$

De, la condición inicial para $x(t)$, $\ x(0) = A = 30\ mm$

Entonces,

$$x(2) = 30\cos[(5.3\ s^{-1})(2.0\ s)] = -12\ mm$$

$$v_x(2) = -30\ mm \cdot (5.3\ s^{-1}) \cdot \sin\big((5.3\ s^{-1})(2.0\ s)\big) = +1.5 \times 10^2\ mm/s$$

Ejemplo 2

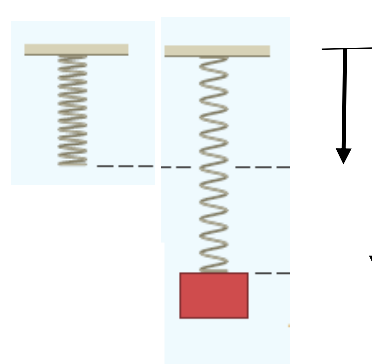
Un bloque de masa $m = 0.50\ kg$ está unido a un resorte de constaste elástica $k = 100\ N/m$. (a) ¿Cuán es la posición de equilibrio del resorte medida desde el punto de suspensión?. b) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del sistema?

Escribamos la ecuación de movimiento. Con el origen tomado en el punto de suspensión,

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) + mg$$

La posición de equilibrio es ($\ddot{x} = 0$),

$$0 = -k\big(x_{eq} - l_0\big) + mg$$



$$x_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0 = l_0\left(1 + \frac{mg}{l_0 k}\right)$$

Para escribir la ecuación de movimiento es conveniente al igual que hicimos al inicio, hacer un campo de variable por,

$$s = x - x_{eq}$$

Con esto,

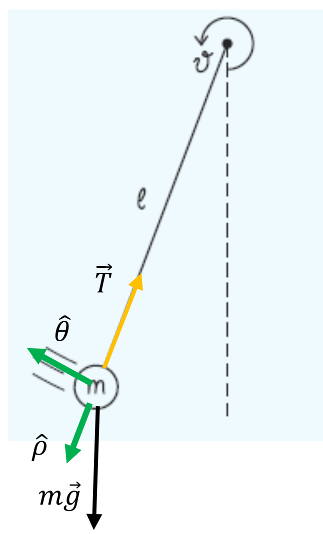
$$m\ddot{s} = -ks + k\left(x_{eq} - l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

i.e.,

$$m\ddot{s} = -ks$$

y el problema es el mismo que resolvimos anteriormente.

Ejemplo 2. Péndulo simple



Coloquemos el origen de coordenadas en el punto de sujeción.

En coordenadas polares,

$$\vec{r} = \ell\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\hat{\theta} - \ell\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

Escribamos las ecuaciones de movimiento en las direcciones $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$.

$$m\ell\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta$$

Analicemos el caso de las oscilaciones pequeñas. Si $\theta \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ y en la primera ecuación,

$$\ddot{\theta} - \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

Esta es la ecuación que describe un movimiento armónico simple. La frecuencia de la oscilación es, $\omega = \sqrt{g/l}$ y el periodo,

$T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Si queremos continuar investigando, de la segunda ecuación podemos ver que,

$$T = m\ell\dot{\theta}^2 + mg = mg\left[1 + \frac{v^2}{gl}\right]$$

Notemos que la tensión es máxima en el punto más bajo de la trayectoria, donde la energía cinética es máxima.