Estática y Dinámica

Clases Impulso y Momentum 4

Sistemas de masa variable

1. Transferencia de material hacia un objeto sin transferencia de momento

2. Transferencia de material hacia fuera de un objeto sin transferencia de momento

2. Ecuación del cohete

Introducción

Hasta ahora hemos restringido nuestra discusión a sistemas que consisten en objetos discretos u objetos puntuales que tienen masa constante. En este punto consideraremos situaciones en las cuales hay flujo de material tanto hacia el sistema como para fuera de este.

Ya mostramos que la fuerza externa total provoca un cambio en el momento del sistema,

$$\vec{F}_{ext}^{total} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Lo que haremos será analizar cómo el momento de los elementos del sistema cambia en el tiempo en el intervalo $[t, t + \Delta t]$, para después considerar el límite cuando $\Delta t \to 0$ y así calcular la derivada en el lado derecho como,

$$\vec{F}_{ext}^{total} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} \ .$$

Analizaremos cuatro categorías de problemas de flujo de masa que son caracterizados por la transferencia de momento de material de masa Δm.

1. Transferencia de material hacia un objeto sin transferencia de momento

Consideremos como ejemplo el caso de un vagón de ferrocarril de masa m que moviéndose a una velocidad v está siendo llenado con material que cae verticalmente con velocidad u. Una pequeña cantidad de material Δm que cae hacia el vagón no tiene componente de momento en la dirección de movimiento de este. Hay una transferencia de material particulado hacia el vagón pero no transferencia de momento.

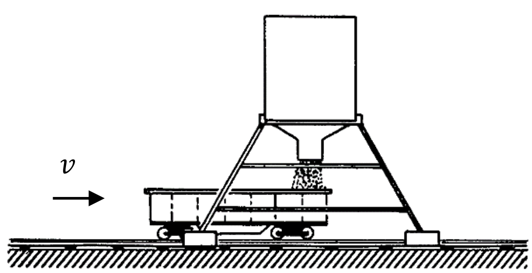


Figura 1.1 Transferencia de masa hacia el vagón sin que haya transferencia de momento en la dirección de movimiento.

2. Transferencia de material hacia fuera de un objeto sin transferencia de momento

El material continuamente abandona el objeto pero no hay transferencia de momento para fuera del sistema en la dirección de movimiento del objeto. Como ejemplo consideremos un patinador en el hielo que se mueve a una velocidad instantánea v con una bolsa en sus manos que pierde arena de manera continua.

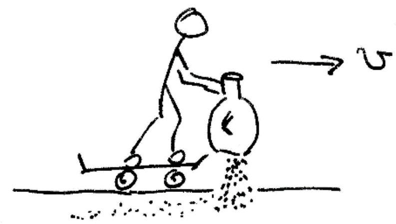


Figura 2.1. Transferencia de masa para fuera del sistema sin que haya transferencia de momento en la dirección de movimiento.

3. Material siendo expelido continuamente por el objeto

Cuando un flujo de masa Δm es expelido con velocidad u el objeto de masa m este retrocede. En el sistema de referencia en el cual el objeto se mueve hacia delante con velocidad v entonces, después del retroceso su velocidad es $v + \Delta v$.

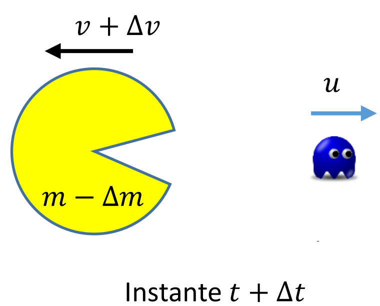
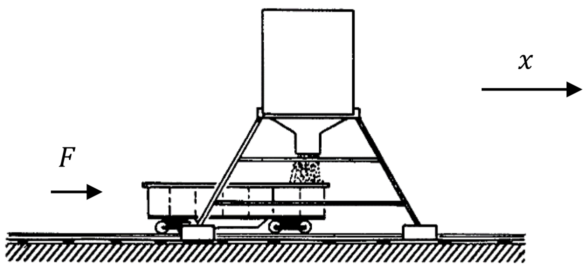


Figura 4.1 Sistema de referencia en el cual el cohete se mueve hacia la izquierda con velocidad v.

Ejemplos:

Ejemplo 1

Un vagón vacío de masa m_0 parte del reposo bajo la acción de una fuerza aplicada F. Al mismo tiempo, carbón comienza a ser vertido hacia el vagón a una razón b desde la tobera en reposo en relación a los rieles. Encontremos la velocidad cuando una masa m_c de carbón ha sido transferida.



Como el carbón cae en la dirección vertical no hay transferencia de momento en la dirección x.

En un instante t el momento del vagón es,

$$P(t) = mv$$

y en un instante posterior de tiempo

$$P(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(v + \Delta v)$$

El cambio en el momento, considerando $\Delta m, \Delta v \ll 1$ es,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) \cong mv + m\Delta v + \Delta mv - mv$$

$$\Delta P = m\Delta v + \Delta mv$$

Dividiendo entre Δt y aplicando el limite cuando este tiende a cero obtenemos

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = F$$

Multiplicando por dt obtenemos,

$$mdv + vdm = Fdt$$

Pero, $m = m_0 + bt$, así que $dm = bdt$ y la ecuación anterior se escribe como:

$$m_0 dv + btdv + vbdt = Fdt$$

$$(m_0 + bt)dv = (F - vb)dt$$

Separando variables e integrando,

$$\int_0^v \frac{d(bv)}{(bv - F)} = -\int_0^t \frac{d(bt)}{(m_0 + bt)}$$

$$\ln\left(\frac{bv - F}{-F}\right) = -\ln\left(\frac{m_0 + bt}{m_0}\right)$$

Entonces,

$$\frac{-bv + F}{F} = \frac{m_0}{m_0 + bt}$$

$$(m_0 + bt)(-bv + F) = Fm_0$$

$$v = \frac{Ft}{(m_0 + bt)}$$

y la velocidad cuando la masa de carbón es m_c es cuando $t_f = m_c/b$.

Ejemplo 2

Un vagón vacío de masa m_0 está cargado con arena de masa m_s. En $t = 0$ una fuerza horizontal F le es aplicada y al mismo tiempo una compuerta en el nivel inferior es abierta dejando la arena salir a una razón constante $b = dm_s/dt$. Encontremos la velocidad cuando toda la arena haya sido vertida. Asumamos que el vagón parte del reposo.

Al igual que en el ejemplo anterior,

En un instante t el momento lineal del sistema es,

$$P(t) = mv$$

y en un instante posterior de tiempo

$$P(t + \Delta t) = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m v = mv + m\Delta v$$

Notemos que la arena abandona el vagón con una velocidad v en relación al sistema de referencia en al cual se mueve a esta velocidad.

El cambio en el momento, considerando es,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = m\Delta v$$

Entonces,

$$mdv = Fdt$$

donde,

$$m = m_0 + m_s - bt$$

Así que integrando,

$$\int_0^v dv = F \int_0^t \frac{dt}{m_0 + m_s - bt}$$

$$v = \frac{F}{b} \ln\left(\frac{m_0 + m_s}{m_0 + m_s - bt}\right)$$

donde $t = b/m_s$.

Ejemplo 3.1. Propulsión. El cohete.

Consideremos el caso en que un objeto de masa m moviéndose a una velocidad v y un objeto de masa Δm que se mueve a una velocidad u como .

Los instantes t y $t + \Delta t$ son mostrados en la figura.

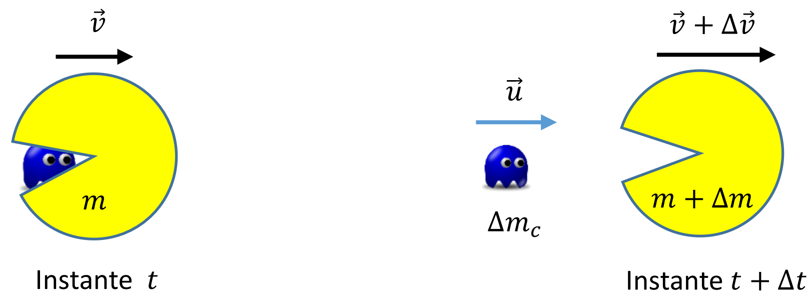


Fig. Sistema de referencia externo

El cambio en el momento del sistema es

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t) = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m_c\,\vec{u} - m\vec{v} \qquad (1.1)$$

Pero $\Delta m_c = \Delta m$. Entonces

$$\Delta\vec{P} \cong m\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{v} - \Delta m\vec{u} \qquad (1.2)$$

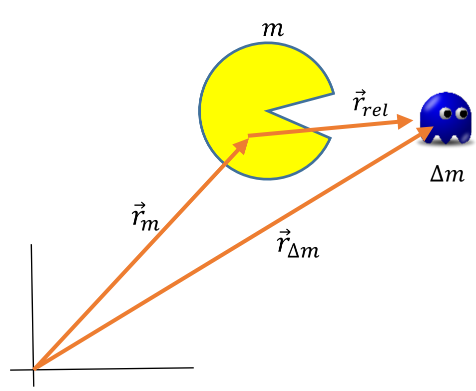
Aplicando el principio del impulso y el momento,

$$\Delta\vec{P} \cong m\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{v} - \Delta m\vec{u} = \vec{F}_{ext}\Delta t \qquad (1.3)$$

$$m\Delta\vec{v} - \Delta m(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{F}_{ext}\Delta t \qquad (1.4)$$

El término $(\vec{u} - \vec{v})$ es la velocidad relativa de Δm en relación a m.

$$\vec{v}_{rel} = (\vec{u} - \vec{v})$$



Dividiendo entre Δt, cuando este tiende a cero la ec.(1.5) se escribe como:

$$\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} + \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.5)$$

El primer término de la izquierda:

$\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt}$: representa la razón a la que el momento transferido al sistema por un aumento o disminución de masa.

El segundo término:

$\vec{F}_{ext}$: representa las fuerzas externas actuando sobre el sistema (fuerza de gravedad, resistencia del aire, etc.)

La ecuación (1.5)

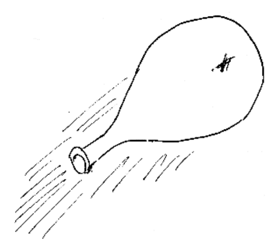
$$\vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt}$$

se conoce como ecuación del cohete.

Ejemplo 3.2: Globo que se desinfla

Despreciemos la fuerza de gravedad.

De la ecuación (1.5)



$$\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$$

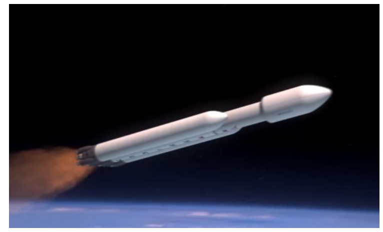
El término de la izquierda puede ser identificado entonces como una fuerza de empuje hacia la dirección de movimiento del globo.

$\vec{v}_{rel} = -v_{rel}\hat{k}$, y como $\frac{dm}{dt} < 0$, $\vec{a} = a\hat{k}$

Ejemplo 3.3 : Ecuación del cohete en el espacio libre (gravedad cero)

Consideremos primero el caso en el cual no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. En este caso la ecuación (1.5) queda como,

$$\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$



que en una dimensión escribimos como

$$-v_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt}$$

Pues por ejemplo en la dirección z , $\vec{v}_{rel} = -v_{rel}\hat{k}$ y $\vec{v} = v\hat{k}$

Para resolver a ecuación multiplicamos por dt y separamos variables,

$$-v_{rel}\frac{dm}{dt}dt = m\frac{dv}{dt}dt \qquad \Rightarrow -v_{rel}dm = mdv$$

e integramos,

$$-v_{rel}\int_{m_o}^{m_f}\frac{dm}{m} = \int_{v_0}^{v}dv$$

obteniendo

$$v - v_0 = v_{rel}\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)$$

Notemos que $\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) > 1$, por lo tanto, $v > v_0$ como esperamos. Examinemos en más detalle nuestro resultado. Primero supongamos que todo el combustible fue quemado y expelido. Entonces $m_f \equiv m_d$ es la masa final del cohete en seco (cohete sin combustible). La razón

$$R = \frac{m_0}{m_d}$$

es la razón entre la masa inicial del cohete (incluyendo el combustible) y la masa final en seco (sin combustible).

La velocidad final del cohete será entonces,

$$v = v_0 + v_{rel}\ln R.$$

Esta es la razón por la cual cohetes de múltiples etapas son utilizados. Se necesita de un gran contenedor para almacenar el combustible. Una vez que todo el combustible haya sido quemado en la primera etapa, el tanque es desconectado del cohete. Durante la próxima etapa la masa en seco del cohete es mucho menor y por lo tanto R es mayor en relación a una única etapa. Así, en la etapa final se producirá una velocidad final mayor comparado con un lanzamiento de una única etapa.

En general los cohetes no queman combustible a una razón constante pero si asumimos que lo es,

$$b = -\frac{dm}{dt}, \quad \rightarrow \quad m_f = m_0 - bt$$

y

$$v = v_0 + v_{rel} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - bt}\right)$$

Ejemplo 3.3.1 Cohete de una etapa

Antes del cohete comenzar a quemar combustible, su masa es de $m_0 = 2.81 \times 10^7\ kg$, de la cual $m_c = 2.46 \times 10^7\ kg$ es de combustible. El combustible es quemado a una razón constante tal que el tiempo total de quema es de $t = 510\ s$ y es expelido a una velocidad $v_{rel} = 3000\ m/s$ relativa al cohete. Si el cohete parte del reposo, ¿cuál es su velocidad final cuando todo el combustible haya sido quemado?

Resp/ La masa en seco del cohete es, $m_d = 2.81 \times 10^7 - 2.46 \times 10^7 = 0.35 \times 10^7\ kg$, entonces, $R = \frac{m_0}{m_d} = 8.03$. La velocidad final del cohete después de que todo el combustible haya sido quemado es.

$$v = v_{rel} \ln R = 6250\ m/s$$

Ejemplo 3.3.2 Cohete de dos etapas

Supongamos ahora que el mismo cohete del ejemplo anterior quema el combustible en dos etapas expulsándolo en cada etapa a la misma velocidad relativa. En la etapa 1, el combustible para quemar tiene una masa de $m_{c1} = 2.03 \times 10^7\ kg$ y lo hace en 150 s. Entones, el tanque vacío y sus accesorios son desconectados del resto del cohete. Esta parte desconectada tiene una masa de $m = 1.4 \times 10^6\ kg$. Todo el combustible restante es quemado durante la segunda etapa en 360 s. ¿cuál es la velocidad final luego de que todo el combustible haya sido quemado?

Resp/

En la primera etapa,

$$R_1 = \frac{m_{01}}{m_{01} - m_{c1}} = 3.60$$

$$v_{1f} = v_{rel} \ln R_1 = 3840\ m/s$$

En la segunda etapa, la masa del cohete sin el accesorio es $m_{02} = m_{01} - m_{c1} - m = 6.4 \times 10^6\ kg.$

La masa en seco en la segunda etapa es, $m_{d2} = m_d - m = 3.5 \times 10^6 - 1.4 \times 10^6 = 2.11.4 \times 10^6$ kg

Así,

$$R_2 = \frac{m_{02}}{m_{d2}} = 3.05$$

$$v_{2f} = v_{1f} + v_{rel} \ln R_2 = 3840 + 3340 = 7190\ m/s$$

que es mayor que si el combustible fuera quemado en una sola etapa.

Ejemplo 3.4 Ecuación del Cohete bajo la acción del campo gravitatorio

Supongamos el ejemplo del cohete que se mueve hacia arriba cerca de la superficie de la Tierra.

En la ecuación

$$\vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt} + \vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{F}_{ext} = -mg\hat{k}$

$\vec{v}_{rel} = -v_{rel}\hat{k}$

$\frac{dm}{dt} < 0.$

Entonces, la ecuación quedaría como,

$$-v_{rel} \frac{dm}{dt} - mg = m \frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

Notemos que el primer término de la izquierda que representa la fuerza de empuje sobre el cohete por los gases es positivo porque $\frac{dm}{dt} < 0$, i.e., $\vec{F}_{empuje} = v_{rel} \left|\frac{dm}{dt}\right| \hat{k}.$

Para obtener la variación de la velocidad, multiplicamos (1) por dt

$$\frac{dv}{dt} dt = -\frac{v_{rel}}{m} \frac{dm}{dt} dt - g dt$$

E integrando

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_{M_0}^{m} \frac{v_{rel}}{m}\, dm - g\int_0^t dt \qquad (2)$$

Suponiendo que la velocidad relativa es constante,

$$v = v_0 - gt - v_{rel} \ln \frac{m}{M_0}$$

$$v = v_0 - gt + v_{rel} \ln \frac{M_0}{m(t)} \qquad (3)$$

Donde

v_0: velocidad inicial

$m(t)$: masa en el instante t

v_{rel}: Velocidad relativa de escape de los gases.

Después de que todo el combustible haya sido quemado en $t = t_f$, la masa del cohete es igual a la masa en seco, $m_f \equiv m_d$ y

$$v = v_0 + v_{rel} \ln R - gt_f \qquad (4)$$

El segundo término del lado derecho es independiente del tiempo en que se quema el combustible. Sin embargo el último término depende de este. Mientras más rápido se queme el combustible menor será la contribución del término negativo y el cohete alcanzará una velocidad final mayor. Entonces, los motores del cohete deben quemar combustible lo más rápido posible para alcanzar el máximo de velocidad. Esta es la explicación de por qué el despegue de los cohetes es tan espectacular.

Ejemplo:

Consideremos como datos

$M_0 = 21\ 000\ kg$

$m_f = 6\ 000\ kg$ (después de quemar el combustible)

$\frac{dm}{dt} = -190\ kg/s$

$v_{rel} = 2800\ m/s$

$g = 9.8\ m/s^2$

Calculemos,

a) La fuerza de empuje

$$\vec{F}_{empuje} = \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = \left|v_{rel}\frac{dm}{dt}\right|\hat{k} = 5.3\ \times 10^5\ N$$

b) La fuerza neta al comienzo y al final

En $t = 0$ $\qquad \vec{F}_{neta} = \vec{F}_{empuje} - M_0\vec{g} = 3.2\ \times 10^5\ \hat{k}$

aceleración, $a = 3.2 \times 10^5/2.1 \times 10^4 = 15.23\frac{m}{s^2} = 1.52\ g$

Cuando quemó el combustible $\qquad \vec{F}_{neta} = \vec{F}_{empuje} - m_f\vec{g} = 4.7\ \times 10^5\ \hat{k}$

aceleración, $a = 4.7 \times 10^5/6 \times 10^3 = 78.3\frac{m}{s^2} \approx 8\ g$

c) Tiempo para quemar el combustible

$$m_f = M_0 - 190\ t \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{M_0 - m_f}{190} = 79\ s$$

Velocidad final

$$v = -gt + v_{rel}\ln\frac{M_0}{m(t)} = -9.8 \times 79 + 2800\ln\left(\frac{21000}{6000}\right) = 2830\frac{m}{s} = 10080\ km/h$$