6.2 Momento de Inercia:

Para describir la rotación alrededor de ejes fijo, no necesitamos introducir nuevas leyes. Son suficiente las ecuaciones conocidas hasta ahora, sí – como en el caso del teorema de centro de masa – tomamos el cuerpo rígido compuesto de N puntos de masa.

Entonces la energía cinética (por ejemplo de una rueda pesada (volante) al rotar alrededor de un eje fijo es

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} v_i^2 \qquad (6.2-1)$$

Ya que todos los puntos de masa giran alrededor del eje con la misma velocidad angular ω, pero con distintos radio r_i, las velocidades de rotación son:

$$v_i = r_i \omega$$

$$\Rightarrow T = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad (6.2-2)$$

Definimos una nueva e importante dimensión física, el "Momento de Inercia", también conocido como "Momento de Inercia de la Masa":

$$\boxed{I := \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2} \qquad (6.2-3)$$

Con esto obtenemos la energía de rotación

$$\boxed{T = \frac{I}{2}\omega^2} \qquad (6.2-4)$$

Esta ecuación corresponde a la conocida ecuación

$$T = \frac{m}{2}v^2 \qquad (4.3-3)$$

Aquí podemos reconocer, que el momento de inercia $\underline{I}$ y la velocidad angular $\underline{\omega}$ poseen el mismo rol en las rotaciones como la Masa $\underline{m}$ y la velocidad $\underline{v}$ en las translaciones:

$$I \leftrightarrow m \qquad \omega \leftrightarrow v$$

Con estas analogías y con la ecuación (4.3-3) se puede resolver la importante ecuación (6.2-4).

Tenemos que volver a la definición ecu. (6.2-3):

Ella muestra que el momento de inercia y con ella también la energía de rotación aumentan, : $I := \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$

- Cuando para la misma geometría aumenta la masa total del cuerpo por medio del uso de materiales con mayor densidad ρ o
- Cuando para la misma masa total aumenta la distancia promedia $\bar{r}$ de los puntos de masa con respecto al eje de rotación.

Una duplicación de $\bar{r}$ es igual de efectiva que una cuadruplicación de la densidad ρ.

⇒ Un volante con una masa m y radio r dados es por lo tanto bastante eficiente, cuando una gran parte de la masa se encuentra en el borde exterior.

Cálculo del Momento de Inercia:

- La $\sum_{i=1}^{N}$ en ecu. (6.2-3) no se puede calcular, porque $N \Rightarrow \infty$.
- Además se considera un cuerpo en la mecánica clásica como un continuo con la densidad ρ.

Para una distribución de masa continua se reemplaza la suma sobre los puntos de masa m_i por un Integral sobre los elementos de masa dm infinitesimales:

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i \longrightarrow \int r^2 dm$$

con $dm = \rho dV$ obtenemos por la densidad ρ = constante:

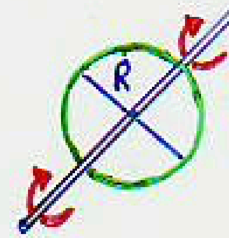
$$\boxed{I = \rho \int_V r^2 dV \quad \text{para } \rho = \text{const.}} \qquad (6.2\text{-}5)$$

con r = distancia del elemento de Volumen dV infinitesimales del eje de rotación.

Ejemplo 6.2-1:

Momento de Inercia de un anillo para Rotaciones al rededor del eje de Simetria:

Calcule el Momento de Inercia de un Anillo delgado para rotaciones al rededor del eje de simetria.



Solución:

Para el anillo delgado y el cilindro de paredes delgadas se pueden calcular los momentos de Inercia para rotaciones al rededor del eje de simetría con Integrales muy sencillas.
Ya que todos los Elementos de volumen dV por el pequeño espesor del anillo tienen la misma distancia R desde el eje de rotación, vale:

$$\underline{\underline{I}} = \rho \int_V r^2 dV = \rho R^2 \int_V dV = \rho R^2 V = \underline{\underline{m R^2}} \qquad (6.2-6)$$