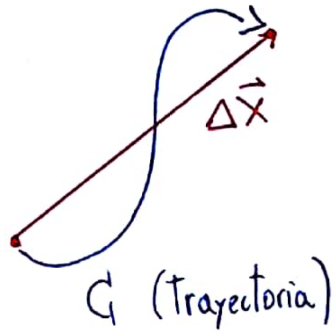
1. Vamos a abordar este problema bajo los conceptos de trabajo y energía.

- Trabajo efectuado por una fuerza

Si $\vec{F}$ cte actúa sobre un cuerpo en un desplazamiento $\Delta\vec{x}$,

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} \begin{cases} + \text{ si } \vec{F} \parallel \Delta\vec{x} \\ 0 \text{ si } \vec{F} \perp \Delta\vec{x} \\ - \text{ si } \vec{F} \text{ anti} \parallel \Delta\vec{x} \end{cases}$$



Si $\vec{F}$ no es constante en la trayectoria, integramos

$$W_F = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} \qquad \text{(Integral de línea)}: \quad d\vec{x} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

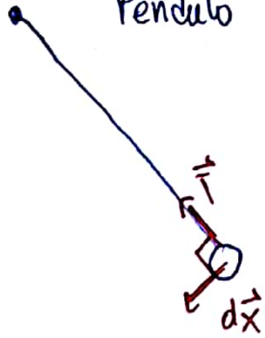
$$= \int F_x\,dx + \int F_y\,dy + \int F_z\,dz$$

Aunque $\vec{F}$ no sea cte, si es siempre perpendicular a $d\vec{x}$, el trabajo será nulo.

(En general nos harán calcular esto en casos fáciles 1-D)

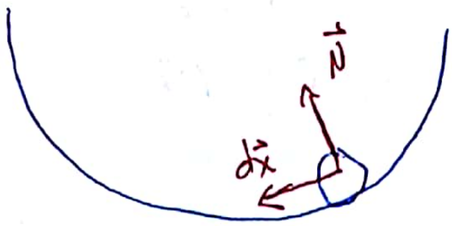
Ejemplos →

Péndulo



$W_{\vec{T}} = 0$

→



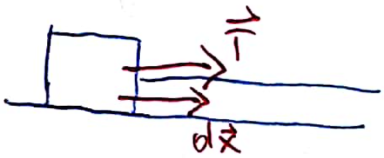
$W_{\vec{N}} = 0$

Ojo → Tensión y normal sí pueden hacer trabajo, si la cuerda se desplaza o la superficie se mueve

Ejemplos

Ascensor

$W_{\vec{N}} > 0$



$W_{\vec{T}} > 0$

- Energía cinética

  Cantidad asociada al movimiento de un cuerpo

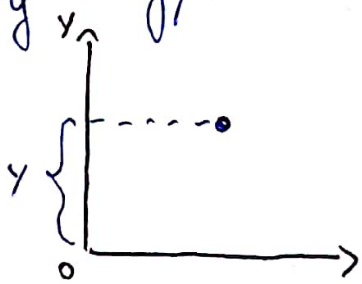
  $$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

- Energía potencial

  Cantidad asociada a la configuración espacial de un sistema en un campo de fuerzas. Ejemplos clásicos son:

  → Energía Potencial Gravitacional $\quad U_g = mgy$

  Se hace más grande a medida que me alejo de la superficie



  → Energía Potencial Elástica

  $$V_e = \frac{1}{2} k \,(\text{estiramiento})^2$$

  Se debe incluir un término por cada resorte del sistema

Toda fuerza que tenga asociada una energía potencial es llamada conservativa

• Energía Mecánica

Es la suma de la energía cinética y todas las potenciales correspondientes.

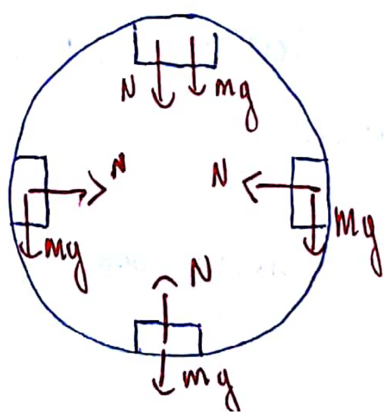
$$E = E_c + U$$

Con todo esto, viene la fórmula mágica

$$\Delta E = W_{NC}$$

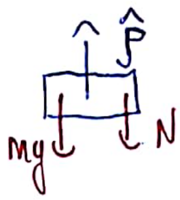
Donde W_{NC} es el trabajo efectuado por todas las fuerzas no conservativas (O sea, todas las no incluidas en la energía mecánica). Típicamente, esto será el trabajo efectuado por el roce.

Vamos a ver cómo aplicar esto al problema que tenemos. Primero estudiemos qué le pasa al carro a medida que da la vuelta al loop.



Del dibujo anterior es claro que el punto en donde es más fácil caerse es el superior. Intuitivamente, si la velocidad del carro no es lo suficientemente grande se caerá. Caerse significa perder contacto, y un indicador de si el carro está tocando la vía o no es la fuerza normal. (Si $N > 0$, hay contacto).

Veamos el diagrama de cuerpo libre en la parte superior, usaremos polares por tener un movimiento circular.



$$\vec{F}_{NETA} = -mg\hat{\rho} - N\hat{\rho}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Pero en toda la trayectoria hasta arriba $\rho = R$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{NETA} = m\vec{a}$$

$\hat{\rho}$: $mg + N = mR\dot{\theta}^2$

$\hat{\theta}$: $0 = mR\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$ (En el pequeño intervalo en que el carro está arriba)

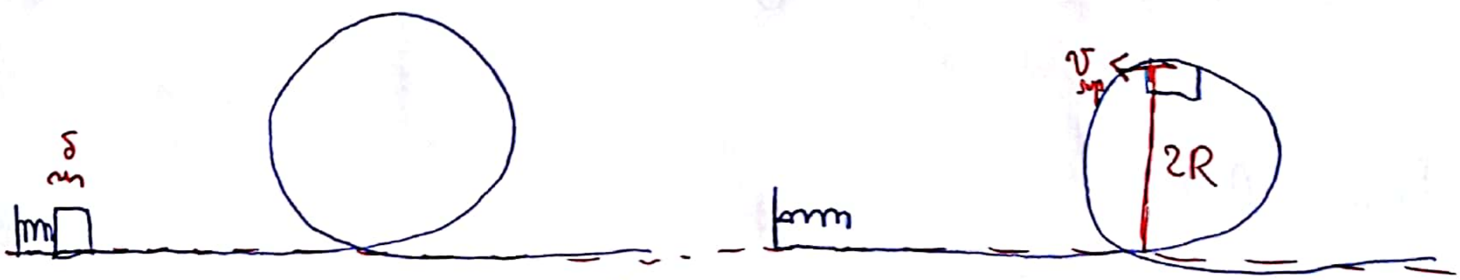
Por otro lado, $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\|\vec{v}\| = v = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

$$\therefore \quad mg + N = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N = \frac{mv^2}{R} - mg = 0$$ (Imponemos que justo se caiga)

$$v_{sup} = \sqrt{Rg}$$

Ahora apliquemos energía. Como no hay roce, la energía del carro se conserva. Tenemos que elegir un instante en que sepamos todo, y otro donde tengamos una incógnita. Como nos falta δ (La compresión inicial del resorte), elegimos este instante (Inicial), y en el instante final cuando el carro está en la parte superior del loop.



$$E_i = E_{c,i} + U_{g,i} + U_{e,i} = \frac{1}{2}k\delta^2$$

$$E_f = E_{c,f} + U_{g,f} + U_{e,f} = \frac{1}{2}mv_{sup}^2 + 2mgR = \frac{1}{2}mgR + 2mgR$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}$$

2. Al tener un sistema con más de un cuerpo, la relación entre energía y trabajo toma la siguiente forma:

$$\Delta E_{SIST} = W_{NC}$$

donde E_{SIST} es la suma de las energías mecánicas de cada una de las componentes, y W_{NC} es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas. En general, todas las fuerzas de contacto entre cuerpos, salvo el roce, produce trabajo nulo pues va a ser positivo para uno de los cuerpos y negativo para el otro ($\vec{E}_j$ -> Reacción entre cuerpos, tensión)

Luego, lo único que debe considerarse para W_{NC} son las fuerzas de roce, y otras fuerzas externas no conservativas.

En este problema particular, el bloque que reposa en la mesa inicialmente comienza a acelerar al ser tirado por la caja colgante. Sin embargo, el bloque va perdiendo energía debido a la acción del roce, hasta detenerse en el otro extremo.

Vamos a escribir la energía mecánica del sistema en los instantes inicial y final.

Para la caja 1 (Midiendo su U_g desde su altura inicial)

$$E_{1,i} = E_{c,1,i} + U_{g,1,i} = 0 + 0 = 0 \quad \text{(Parte del reposo)}$$

$$E_{1,f} = E_{c,1,f} + U_{g,1,f} = 0 + 0 = 0 \quad \text{(Se detiene al llegar al extremo)}$$

Para la caja 2 (Midiendo su U_g desde su altura inicial)

$$E_{2,i} = E_{c,2,i} + U_{g,2,i} = 0 + 0 = 0$$

$$E_{2,f} = E_{c,2,f} + U_{g,2,f} = 0 - mgd = -mgd$$

(Si la caja 1 se mueve "d" a la derecha, la caja 2 cae "d")

Entonces,

$$E_i = E_{1,i} + E_{2,i} = 0$$

$$E_f = E_{1,f} + E_{2,f} = -mgd$$

$$\Delta E = -mgd = W_{NC}$$

En este caso, W_{NC} es el trabajo ejercido por el roce sobre el cuerpo 1

Scanned by CamScanner

$$W_{NC} = \int \vec{F}_R \cdot d\vec{x} \qquad \text{Pero} \quad \vec{F}_R = -F_R\,\hat{x}$$

$$= -\int_0^d F_R\,dx = -\int_0^d N\mu_c\,dx = -mga\int_0^d x\,dx$$

$$= -\frac{mgad^2}{2}$$

Luego, $\Delta E = W_{NC}$

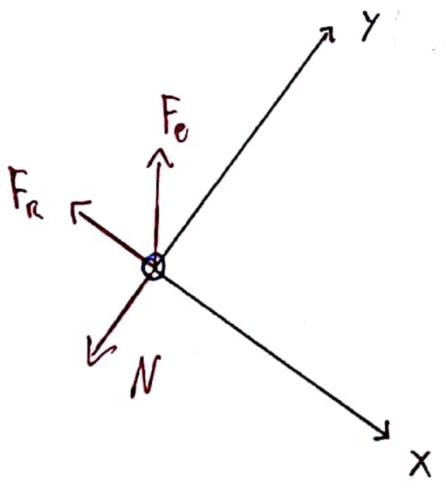
$$-mgd = -\frac{mgad^2}{2}$$

$$\frac{2}{d} = a$$

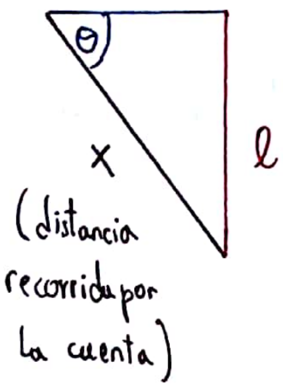
3. a) Vamos a dibujar todas las fuerzas:

- Elástica, hacia arriba, pues el resorte está estirado
- Fricción, paralela hacia izquierda, pues la cuenta se mueve en sentido opuesto
- Normal, perpendicular hacia abajo, para oponerse a la fuerza elástica

Elegiremos el sistema de referencia solidario al eje en que la cuenta puede deslizarse



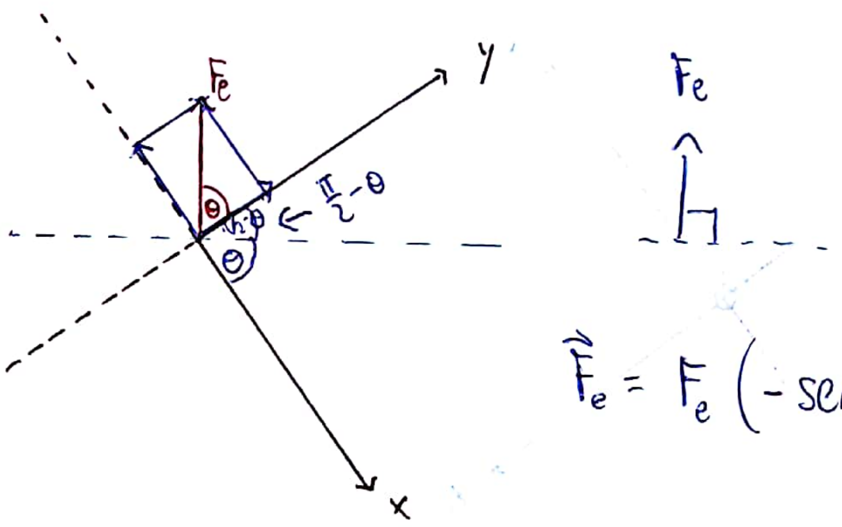
La magnitud de la fuerza elástica es $F_e = K \cdot$ estiramiento. Como el resorte tiene largo natural nulo, el estiramiento es el largo total del resorte. Tenemos que expresar este largo en términos de las coordenadas de la cuenta, usamos trigonometría



$$\text{sen}(\theta) = \frac{\ell}{x} \Rightarrow \ell = x\,\text{sen}\theta$$

Entonces, $F_e = Kx\,\text{sen}\theta$

Tenemos que descomponer $\vec{F}_e$ en el sistema indicado.



$$\vec{F}_e = F_e\left(-\text{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}\right)$$

b) La ruta a seguir será la siguiente

↳ Obtener las ecuaciones de movimiento con $\vec{F} = m\vec{a}$ será difícil. Mejor usamos $\Delta E = W_{NC}$ comparando con el instante inicial y el instante en que la cuenta se detiene

Scanned by CamScanner

Veamos energía mecánica inicial y final

$$E_i = E_{c,i} + U_{e,i} = \frac{1}{2}mv_0^2$$ (En el vértice, resorte tiene largo nulo)

$$E_f = E_{c,f} + U_{e,f} = \frac{1}{2}K\ell_f^2$$ (Resorte se ha estirado ℓ_f)

$$= \frac{1}{2}kx_f^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Así, $$\Delta E = \frac{1}{2}kx_f^2 \operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{NC}$$

En este caso, W_{NC} es el trabajo del roce

$$W_R = \int \vec{F}_R \cdot d\vec{x} = -\int_0^{x_f} F_R \, dx = -\int_0^{x_f} N\mu \, dx$$

Para encontrar N, usamos $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\hat{x}: \quad -F_e \operatorname{sen}\theta - F_R = m\ddot{x}$$

$$\hat{y}: \quad F_e \cos\theta - N = 0 \Rightarrow N = Kx \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

Luego, $$W_R = -\mu\int_0^{x_f} Kx \operatorname{sen}\theta\cos\theta \, dx = -\frac{K\operatorname{sen}\theta\cos\theta \, x_f^2\mu}{2}$$

Entonces, $\frac{1}{2}Kx_F^2 sen^2\theta - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}Kx_F^2 sen\theta cos\theta \mu$

$$K sen\theta\, x_F^2 (sen\theta + \mu cos\theta) = mv_0^2$$

$$x_F = v_0\sqrt{\frac{m}{K}}\sqrt{\frac{1}{sen\theta(sen\theta + \mu cos\theta)}}$$

c) Una vez que la cuenta se ha detenido, comienza a actuar el roce estático. Como bien sabemos, el roce estático tiene un límite, sobre el cual el cuerpo comienza a moverse.

Como el cuerpo tenderá a moverse a la izquierda, el roce irá a la derecha, y las ecuaciones de movimiento tendrán la siguiente forma:

$\hat{x}: -F_e sen\theta + F_R = 0$ (Nos ponemos en el caso en que está quieto)

$\hat{y}: F_e cos\theta - N = 0 \Rightarrow N = Kx sen\theta cos\theta$

$$\therefore F_R = F_e sen\theta \leq N\mu =$$

$$\mu \geq tg\theta$$

Scanned by CamScanner

Luego, si $\mu < tg\,\theta$ la cuenta volverá a moverse

d) Suponiendo que $\mu < tg\,\theta$, y que la cuenta alcanza a llegar al vértice, utilizaremos nuevamente el teorema de trabajo y energía.

Primero, en el instante inicial, con el resorte estirado

$$E_i = E_{c,i} + U_{e,i} = \frac{1}{2} K x_f^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Y en el instante final, la cuenta pasa por el vértice con una velocidad v_f

$$E_f = E_{c,f} + U_{e,f} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

El trabajo del roce será exactamente el mismo, pues sólo depende de la distancia recorrida, que es la misma (x_f)

$$W_{nc} = W_R = -\frac{K \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, x_f^2}{2}$$

Así,

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} K x_f^2 \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{1}{2} K \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, x_f^2 \mu$$

Con esto, $v_f = x_f\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\,\mu)}$

Y reemplazando el valor de x_f encontrado anteriormente,

$$v_f = v_0\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta}}$$