Estática y Dinámica

## Clases Impulso y Momentum 3

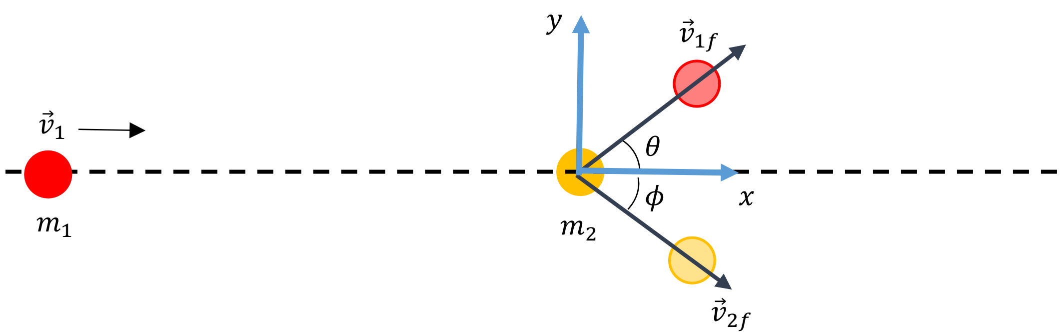
1. Choque elástico en dos dimensiones

2. Choque de esferas o discos duros

3. Choque entre discos duros, esquema general.

1. Choque elástico en dos dimensiones

En este punto vamos a considerar le caso especial del choque elástico en 2D. Estudiemos el choque de una partícula móvil contra un blanco fijo




Definamos:

$\theta$: ángulo medido con respecto a la dirección inicial del movimiento del proyectil

$\phi$: ángulo con que emerge el blanco medido también respecto a la dirección inicial del movimiento del proyectil.

Variables a determinar:

$v_{1f}, v_{2f}, \theta$ y $\phi$ o de manera equivalente, $v_{1xf}, v_{2xf}, v_{1yf}, v_{2yf}$

Como veremos, tres de estas cantidades quedarán determinadas por la conservación de $\vec{p}$ y de la energía cinética. La cuarta quedará determinada por las características específicas de la interacción entre las partículas en el momento del choque.

Eligiendo los ejes según lo indicado en la figura,

De la conservación del momento lineal

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \quad (1.1)$$

Eje x

$$m_1 v_1 = m_1 v_{1xf} + m_2 v_{2xf}$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi \quad (1.2)$$

Eje y

$$0 = m_1 v_{1yf} - m_2 v_{2yf}$$

$$0 = m_1 v_{1f}\sin\theta - m_2 v_{2f}\sin\phi \quad (1.3)$$

De la conservación de la energía cinética

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \tag{1.4}$$

Antes de proseguir, es conveniente introducir parámetros adimensionales que permiten simplificar los cálculos[1].

Usaremos la velocidad del proyectil $(v_1)$ como unidad de velocidad y su masa como unidad de masa,

$$u = \frac{v_{1f}}{v_1}, \qquad \omega = \frac{v_{2f}}{v_1} \qquad y \qquad r = \frac{m_2}{m_1} \tag{1.5}$$

En términos de las nuevas variables las tres leyes de conservación discutidas toman la forma,

Eje x

$$1 = u\cos\theta + r\omega\cos\phi \tag{1.6}$$

Eje y

$$0 = u\sin\theta - r\omega\sin\phi \tag{1.7}$$

Cons. de Energía

$$1 = u^2 + r\omega^2 \tag{1.8}$$

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones para encontrar las cuatro incógnitas del problema $u$, $\omega$, $\theta$ y $\phi$. La cuarta ecuación como comentamos saldrá de la propia dinámica del choque.

Nuestra estrategia será resolver (1.6)-(1.7) para las variables $u$, $\omega$, $\theta$ en función de[2] $\phi$.

De (1.6) y (1.7)

$$u\cos\theta = 1 - r\omega\cos\phi \tag{1.9}$$

$$u\sin\theta = r\omega\sin\phi \tag{1.10}$$

Dividiendo obtenemos

$$\tan\theta = \frac{r\omega\sin\phi}{1 - r\omega\cos\phi} \tag{1.11}$$

---

[1] Este proceso de expresar las variedades del problema en unidades que son propias del sistema considerado es realizado frecuentemente en física e ingeniería.

[2] El ángulo $\phi$ sale directamente de las características geométricas del choque.

con esto tenemos a $\theta$ en función de $\omega$ y $\phi$.

De (1.9) y (1.10) podemos obtener a $u$ en función de $\omega$ y $\phi$, i.e., elevando al cuadrado y sumando

$$u^2 = 1 - 2r\omega\cos\phi + r^2\omega^2 \tag{1.12}$$

y finalmente de (1.12) y (1.8) eliminamos $u$ para obtener $\omega$ en función de $\phi$.

$$0 = \omega^2(1+r) - 2\omega\cos\phi$$

Esta ecuación admite dos soluciones,

$$\omega = 0$$

Caso en el que el proyectil no impacta al blanco.

$$\omega = \frac{2\cos\phi}{(1+r)} \tag{1.13}$$

Una vez determinada $\omega$ por medio de (1.13) podemos determinar $u$ y $\theta$ por medio de (1.8) y (1.11).

*Caso especial*

$m_1 = m_2$

$Si,\ m_1 = m_2 \quad \Longrightarrow \quad r = 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \cos\phi$

De (1.12)

$$u = \sin\phi$$

y de (1.11)

$$\tan\theta = \frac{\cos\phi\sin\phi}{1-\cos^2\phi} = \cot\phi$$

i.e.,

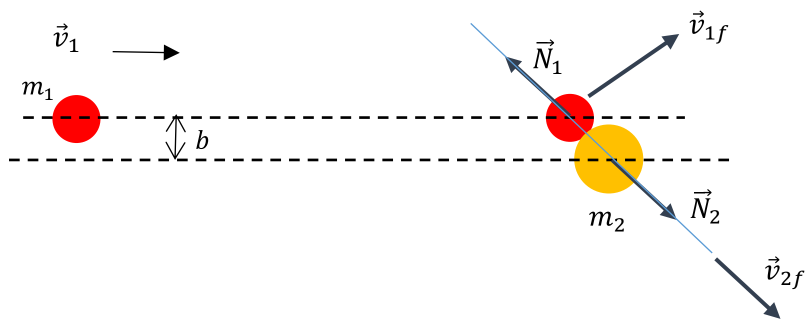
$$\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos(\theta+\phi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta+\phi = \frac{\pi}{2}$$

Es decir, si las dos partículas tienen la misma masa y el choque es elástico las trayectorias de las partículas que emergen del choque forman un ángulo recto.

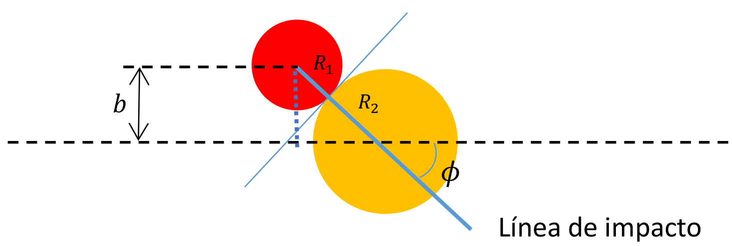
## 2. Choque de esferas o de discos duros

Como vimos, las leyes de conservación sólo permiten determinar tres de las cuatro variables que caracterizan un choque en 2D. Para determinar completamente el resultado de un choque es necesario considerar el detalle de la interacción entre los cuerpos que chocan.

Consideremos entonces choques entre discos duros o esferas duras (como en el juego de billar)




En detalle




En la figura dibujamos dos discos duros, el proyectil de radio $R_1$ y el blanco de radio $R_2$.

Línea de impacto: Recta que une los centros de los discos y paralela a la fuerza normal durante el impacto.

Parámetro de impacto, $b$: Distancia entre las trayectorias de impacto.

Queremos determinar el ángulo $\phi$ con que emerge el blanco luego del choque en términos del parámetro de impacto pues como vimos, una vez determinado $\phi$ tenemos determinadas las demás cantidades.

Para esto, notemos que en el momento de la interacción los discos interactúan entre ellos por medio de la fuerza normal perpendicular al contacto.

Como la única fuerza que experimenta el blanco es $\vec{N}_2$ la variación del impulso es

$$\Delta\vec{p}_2 = \int \vec{N}_2\, dt = \left[\int N_2\, dt\right]\hat{n}, \qquad \hat{n} = \frac{\vec{N}_2}{N_2} \tag{2.1}$$

y como, $\vec{p}_{2i} = \vec{0}$ pues inicialmente está en reposo,

$$\vec{p}_{2f} = \left[\int N_2 \, dt\right] \hat{n}, \tag{2.2}$$

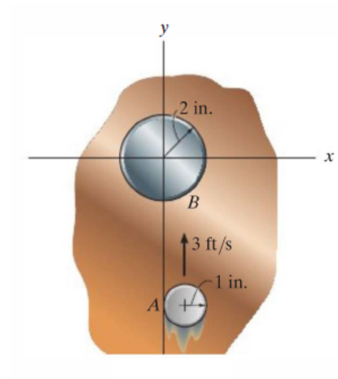
i.e.,

el momento del blanco luego de colidir está dirigido a lo largo de la normal entonces,

$$\sin\phi = \frac{b}{R_1 + R_2},$$

Ejemplo 1:

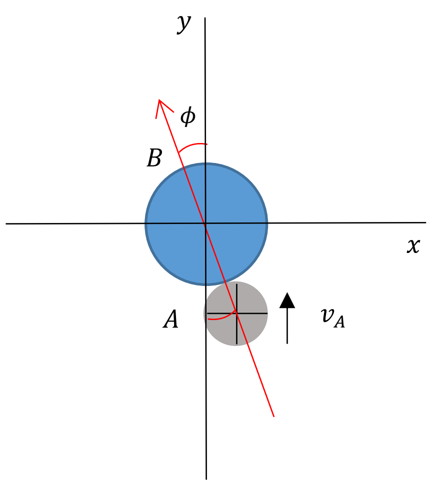
Disk $A$ weighs 2 lb and slides on the smooth horizontal plane with a velocity of 3 ft/s. Disk $B$ weighs 11 lb and is initially at rest. If after impact $A$ has a velocity of 1 ft/s, parallel to the positive $x$ axis, determine the speed of disk $B$ after impact.




Datos:

$m_B, m_A, v_A, v_B = 0$

Incógnitas $v_{Af}, v_{Bf}$




De las condiciones del choque podemos determinar de manera inmediata al ángulo del momento lineal de B en relación a la línea de impacto (eje y)

$$\sin\phi = \frac{R_A}{R_A + R_B},$$

De las leyes de conservación del momento y la energía cinética

Eje y $$m_A v_A = m_A v_{Af} \cos\theta + m_B v_{Bf} \cos\phi \qquad (1)$$

Eje x $$0 = m_A v_{Af} \sin\theta - m_B v_{Bf} \sin\phi \qquad (2)$$

y de la conservación de la energía cinética

$$m_A v_A^2 = m_A v_{Af}^2 + m_B v_{Bf}^2 \qquad (3)$$

Tenemos que eliminar $\theta$ y $v_{Af}$,

De (1) y (2)

Eje y $$v_A = v_{Af} \cos\theta + \frac{m_B}{m_A} v_{Bf} \cos\phi \qquad (1)$$

Eje x $$0 = v_{Af} \sin\theta - \frac{m_B}{m_A} v_{Bf} \sin\phi \qquad (2)$$

Obtenemos,

Eje y $$v_A^2 - 2 v_A v_{Bf} \frac{m_B}{m_A} \cos\phi + \left(\frac{m_B}{m_A} v_{Bf}\right)^2 = v_{Af}^2 \qquad (4)$$

y de (3)

$$v_A^2 = v_{Af}^2 + \frac{m_B}{m_A} v_{Bf}^2$$

Entonces,

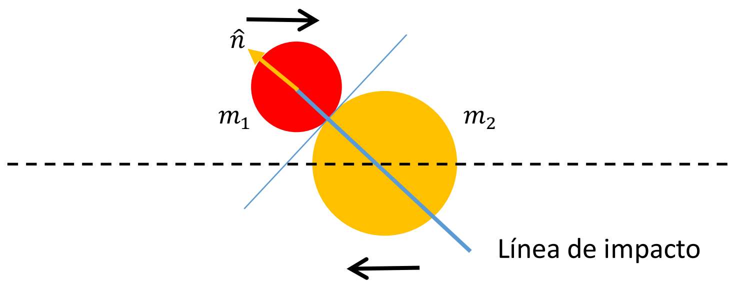
$$v_A^2 = v_A^2 - 2 v_A v_{Bf} \frac{m_B}{m_A} \cos\phi + \left(\frac{m_B}{m_A}\right)^2 v_{Bf}^2 + \frac{m_B}{m_A} v_{Bf}^2$$

$$0 = -2 v_A \cos\phi + \frac{m_B}{m_A} v_{Bf} + v_{Bf}$$

$$v_{Bf} = \frac{2 v_A \cos\phi}{\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)}$$

3. **Choque entre discos duros, esquema general.**

En general cuando tenemos un choque oblicuo en el que ambos discos se mueven el, procedimiento para encontrar las velocidades finales es:




1. Trazamos la línea de impacto (denotémosla por eje x) y escribimos la conservación del momento lineal en esta dirección.

La variación del momento para cada partícula es

$$\Delta\vec{p}_1 = \int \vec{N}_1\, dt = \left[\int N_1\, dt\right]\hat{n}, \qquad \hat{n} = \frac{\vec{N}_1}{N_1} \tag{3.1}$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \int \vec{N}_2\, dt = -\left[\int N_1\, dt\right]\hat{n}, \tag{3.2}$$

Entonces,

$$\Delta\vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_1 = \vec{0}, \tag{3.3}$$

y **aplicamos la conservación del momento lineal a lo largo de la línea de impacto.**

2. El coeficiente de restitución relaciona las componentes de las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto (eje x)

$$e = \frac{v_{2fx} - v_{1fx}}{v_{1ix} + v_{2ix}} \tag{3.3}$$

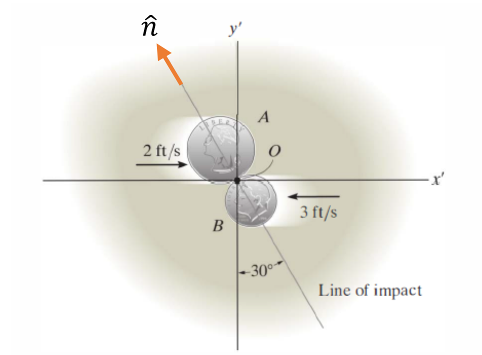
De estas dos ecuaciones obtenemos $v_{2fx}$ y $v_{1fx}$.

3. Los momentos de las partículas 1 y 2 se conservan en la línea perpendicular a la línea de impacto (eje y)

$$\Delta p_{1y} = 0, \qquad \Delta p_{2y} = 0$$

**Ejemplo 2**

Two coins $A$ and $B$ have the initial velocities shown just before they collide at point $O$. If they have weights of $W_A = 13.2(10^{-3})$ lb and $W_B = 6.60(10^{-3})$ lb and the surface upon which they slide is smooth, determine their speeds just after impact. The coefficient of restitution is $e = 0.65$.




La variación del momento de la partícula A viene dada por,

$$\Delta\vec{p}_A = \left[\int N_A\,dt\right]\hat{n}, \qquad \hat{n} = \frac{\vec{N}_A}{N_A}$$

Donde $\hat{n}$ está dirigida la dirección de la línea de impacto. Así mismo, la variación del momento de la partícula B viene dado por:

$$\Delta\vec{p}_B = -\left[\int N_B\,dt\right]\hat{n},$$

i.e.,

$$\Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B.$$

Entonces, en la dirección $\hat{n}$ tenemos

$$m_A v_{fA}\sin\phi_A - m_A v_{iA}\sin 30^0 = -m_B v_{fB}\sin\phi_B + m_B v_{iB}\sin 30^0$$

$$m_A v_{fA}\sin\phi_A + m_B v_{fB}\sin\phi_B = m_A v_{iA}\sin 30^0 + m_B v_{iB}\sin 30^0 \qquad (1)$$

En la dirección perpendicular

$$\Delta\vec{p}_A = \vec{0}$$

$$m_A v_{fA}\cos\phi_A - m_A v_{iA}\cos 30^0 = 0 \qquad (2)$$

$$m_B v_{fB}\cos\phi_B - m_B v_{iB}\cos 30^0 = 0 \qquad (3)$$

Restando estas dos ecuaciones obtenemos

$$m_B v_{fB}\cos\phi_B - m_A v_{fA}\cos\phi_A = (m_B v_{iB} - m_A v_{iA})\cos 30^0 \qquad (4)$$

**La otra ecuación viene del coeficiente de restitución que relaciona a las velocidades relativas en la dirección de $\hat{\boldsymbol{n}}$**

$$e = \frac{v_{ABf_n}}{v_{BAi_n}} = \frac{v_{Af}\sin\phi_A - v_{Bf}\sin\phi_B}{v_{Bi}\sin 30^0 + v_{Ai}\sin 30^0}$$

$$v_{Af}\sin\phi_A - v_{Bf}\sin\phi_B = e(v_{Bi} + v_{Ai})\sin 30^0 \qquad (5)$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$m_B v_{fB}\sin\phi_B + m_A v_{fA}\sin\phi_A = m_A v_{iA}\sin 30^0 + m_B v_{iB}\sin 30^0 \qquad \text{(I)}$$

$$v_{fA}\cos\phi_A = v_{iA}\cos 30^0 \qquad \text{(II)}$$

$$v_{fB}\cos\phi_B = v_{iB}\cos 30^0 \qquad \text{(III)}$$

$$v_{Af}\sin\phi_A - v_{Bf}\sin\phi_B = e(v_{Bi} + v_{Ai})\sin 30^0 \qquad \text{(IV)}$$

---

De (IV) en (I)

$$v_{fB}\sin\phi_B = \frac{[m_A v_{iA} + m_B v_{iB}](1-e)\sin 30^0}{(m_B + m_A)} \qquad \text{(V)}$$

Idem para $v_{fA}\sin\phi_A$

$$v_{Af}\sin\phi_A = \frac{[m_A v_{iA} + m_B v_{iB}](1+e)\sin 30^0}{(m_B + m_A)} \qquad \text{(VI)}$$

Finalmente, dividiendo (V) y (III)

$$\tan\phi_B = \frac{[m_A v_{iA} + m_B v_{iB}](1-e)}{(m_B + m_A)v_{iB}}\tan 30^0 \qquad \text{(V)}$$

Finalmente, dividiendo (VI) y (II)

$$\tan\phi_A = \frac{[m_A v_{iA} + m_B v_{iB}](1+e)}{(m_B + m_A)}\tan 30^0 \qquad \text{(VI)}$$

Con los ángulos calculados, de (II) y (III) obtenemos los módulos de las velocidades.