Estática y Dinámica

Clases Impulso y Momentum 2

1. Colisiones

2. Colisiones elásticas

4. Colisiones inelásticas.

3. Colisiones plásticas

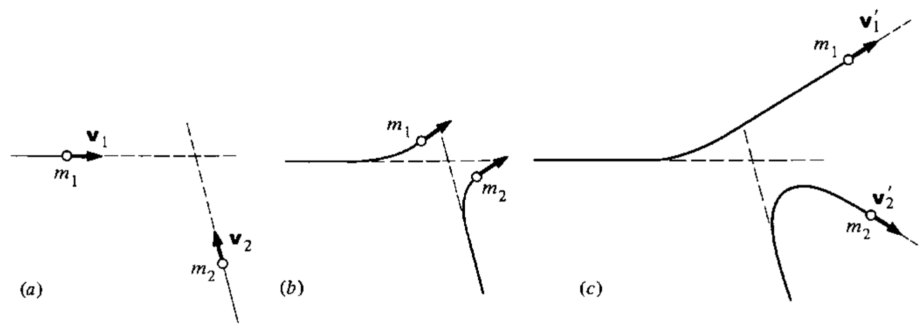
1. Colisiones

Mucho de lo que sabemos acerca de los átomos, sus núcleos y partículas elementares viene de experimentos de dispersión. Probablemente el más dramático de estos experimentos fue realizado por Ernest Rutherford en 1911 en el cual partículas alfa (núcleos de helio, dos protones y dos neutrones) son dispersadas por átomos de oro en una capa fina de este material. Estudiando como el número de partículas dispersadas cambiaba con el ángulo de dispersión, Rutherford concluyó con el modelo nuclear del átomo. Hoy en día utilizamos aceleradores de partículas donde haces de partículas de enorme energía son colocados en punto de colisión para descubrir las fuerzas de interacción entre partículas a través del estudio de los patrones de dispersión de las mismas.

En esta clase veremos cómo aplicar las leyes de conservación del momento lineal y la energía a los experimentos de colisiones.

Colisiones y leyes de conservación

La figura abajo muestra tres estados durante la colisión de dos partículas. En (a), mucho antes de que esta ocurra cada partícula es libre dado que las fuerzas de interacción son en general importantes a muy pequeñas distancias. En la medida en que las partículas se aproximan, (b) el momento y la energía de cada partícula cambia debido a las fuerzas de interacción. Finalmente, después de la colisión las partículas son nuevamente libres y se mueven en línea recta con nuevas direcciones y velocidades. Experimentalmente, usualmente conocemos las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. El experimento consiste en medir las velocidades finales $\vec{v}_{1f}, \vec{v}_{2f}$



Cuando las dos partículas coliden como mostrado en la figura anterior, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo de una forma complicada. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza de interacción esta fuerza es interna al sistema de las dos partículas. Durante el instante de la colisión, cualquier fuerza externa es mucho menor que las fuerzas de interacción de manera que las únicas fuerzas relevantes son las fuerzas internas. Así, las dos partículas forman un sistema aislado y el momento del sistema debe ser conservado.

Contrariamente, la energía cinética del sistema de partículas, $K = K_{CM} + K_{rel}$ (K del CM + K relativa al CM) puede ser o no conservada dependiendo del tipo de colisión. De hecho, el que la energía cinética sea o no conservada es utilizado para clasificar las colisiones como elásticas o inelásticas.

En una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en la cual **la energía cinética total (así como el momento) del sistema es el mismo antes y después de la colisión**[1]. Las colisiones que ocurres entre partículas atómicas y subatómicas son verdaderamente elásticas.

Una colisión inelástica es aquella en la cual la energía cinética del sistema no es la misma antes y después de la colisión (aun cuando el momento del sistema se conserva). Las colisiones inelásticas son de dos tipos.

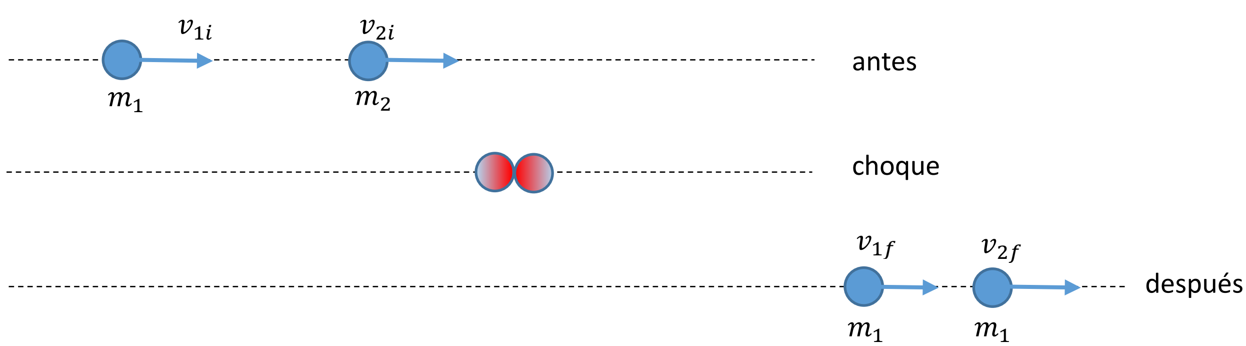
Cuando los objetos que coliden permanecen unidos después de la colisión es llamada de colisión **perfectamente inelástica**, como sucedió cuando el meteorito colidió con la Tierra.

Cuando los objetos que coliden no permanecen pegados pero una parte de la energía cinética es perdida, la colisión es llamada de **inelástica**, como el choque de una bola con la pared. Cuando parte de la energía cinética coherente es convertida en energía incoherente (calor o deformaciones irreversibles de la red atómica)

2. Colisiones elásticas

Colisiones en 1D

Consideremos el choque de dos partículas en una dimensión. Como discutiremos choques unidimensionales, todas las cantidades como momento y velocidades las consideraremos escalares.



Nuestras incógnitas son, v_{1f} y v_{2f}

De la conservación del momento lineal del sistema y la energía cinética,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{2.2}$$

[1] Notemos que las colisiones elásticas son perfectamente silentes!!!

Una forma rápida y elegante de resolver el sistema anterior consiste en reescribir las ecuaciones anteriores de modo que las cantidades que involucren una misma partícula se encuentren del mismo lado de la ecuación.

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}) \tag{2.3}$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \tag{2.4}$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores ($ec. 2.4/ec. 2.3$) obtenemos[2]

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \tag{2.5}$$

que reescribimos como,

$$v_{2i} - v_{1i} = -(v_{2f} - v_{1f}) \tag{2.6}$$

La cantidad $|v_2 - v_1|$ representa la rapidez relativa de la partícula 2 en relación a la partícula 1. Podemos interpretar la ecuación anterior como la conservación de la rapidez relativa entre las partículas durante el choque.

$$v_{rel,i} = -v_{rel,f} \tag{2.7}$$

Esta puede ser otra definición para una colisión elástica.

En una colisión elástica la velocidad relativa de las partículas es la misma antes y después de esta, $v_{2i} - v_{1i} = v_{1f} - v_{2f}$, o $v_{21i} = v_{12f}$. Esto es, la velocidad del carro 2 relativa al carro 1 antes de la colisión es igual a la velocidad del carro 1 relativa al carro 2 después de la colisión.

Volviendo al sistema de ecuaciones, de (2.6)

$v_{2f} = v_{1i} - v_{2i} + v_{1f}$

e introduciendo en (2.3)

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{1i} + v_{2i} - v_{1f})$$

de donde,

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_{2i} \tag{2.8}$$

De (2.3) y (2.4) vemos que cambiar (1 por 2) deja las ecuaciones iguales. Entonces, cambiando 1 por 2 en la ecuación anterior,

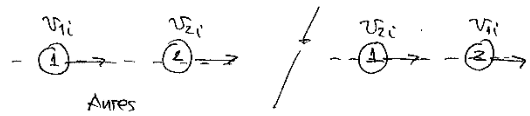
$$v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_{2i} + \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1i} \tag{2.9}$$

[2] Notemos que al dividir hemos supuesto que $v_i - v_f \neq 0$ pues de lo contrario no habría colisión.

Casos particulares

a)

$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \; v_{1f} = v_{2i}, \;\; v_{2f} = v_{1i}$



Las partículas durante el choque intercambian velocidades.

b)

$m_2 \gg m_1$ y $v_{2i} = 0 \;\; \Rightarrow \; v_{1f} = -v_{1i}, \;\; v_{2f} = 0.$

La partícula simplemente rebota[3].

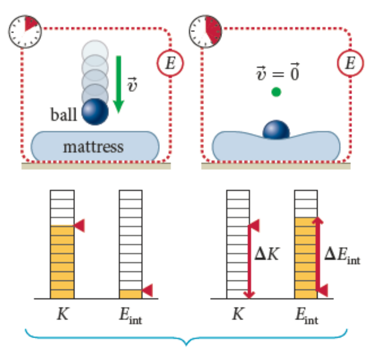
c)

$m_1 \gg m_2$ y $v_{2i} = 0 \;\; \Rightarrow \; v_{1f} = v_{1i}, \;\; v_{2f} = 2v_{2i}.$

Este es el caso en que una partícula pesada colide con una partícula muy ligera. Un ejemplo puede ser la colisión entre un átomo de Uranio y uno de Hidrógeno.

3. Colisiones inelásticas en 1D.

Como vimos, en un choque inelástico se conserva el momento lineal pero hay pérdida de energía cinética. Denotemos Q a la perdida de energía cinética. Esto significa que en una colisión inelástica una forma de energía es convertida en otra (cinética ⇝ interna incoherente) pero la suma de la energía cinética y Q no cambia



Collision converts kinetic energy to internal energy; sum of K and E_{int} does not change.

[3] En el experimento realizado por Rutherford se encontró que algunas de las partículas alfa volvían por el mismo camino. Eso dio un indicio de que algo muy pesado y con carga negativa debía formar parte del átomo.

Entonces, del balance de energía[4]:

$$K_i = K_f + Q \tag{3.1}$$

o

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + Q \tag{3.2}$$

Notemos que:

Si $Q = 0$ el choque es elástico

Si $Q > 0$, parte de la energía se pierde en el choque. Esta energía se transforma en un aumento de la energía interna (deformaciones en la red, aumento de la temperatura, etc.)

Como el momento lineal del sistema se conserva ($P_i = P_f$), $V_{CM} = cte$ y es conveniente introducir a esta como una variable. La otra variable que tomaremos será la velocidad relativa entre las partículas pues como quedó claro en el punto anterior su conservación define si la colisión es o no elástica.

La velocidad del CM será (antes = después)

$$V_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2} \tag{3.3}$$

pero

$v_{12i} = v_{1i} - v_{2i}$ Velocidad relativa antes del choque (3.4a)

$v_{12f} = v_{1f} - v_{2f}$ Velocidad relativa después del choque (3.4b)

De estas ecuaciones obtenemos la relación entre v_{1i} y v_{2i} con V_{CM} y v_{12i}. Por ejemplo para v_{1i} de (3.3) y (3.4a)

$$V_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 (v_{1i} - v_{12i})}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2}[(m_1 + m_2)v_{1i} - m_2 v_{12i}]$$

$$v_{1i} = V_{CM} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{12i} \tag{3.5}$$

Así mismo para escribir v_{2i} en función de las variables escogidas, nuevamente de de (3.3) y (3.4a)

[4] En general lo correcto es escribir para un sistema cerrado que $K_i + E_{int,i} = K_f + E_{int,f}$ donde E_{int} es la energía interna, esto es, la suma de la energía cinética incoherente y energía potencial. En la ecuación de balance $Q = \Delta E_{int}$.
Notemos que $\Delta E_{int} = -\Delta K$, así, una forma de contabilizar la variación de energía interna es medir el cambio en la energía cinética del sistema.

$$V_{CM} = \frac{1}{m_1+m_2}[m_1(v_{12i}+v_{2i}) + m_2 v_{2i}] = \frac{1}{m_1+m_2}[m_1 v_{12i} + (m_1+m_2)v_{2i}]$$

$$v_{2i} = V_{CM} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{12i} \tag{3.6}$$

Finalmente, de (3.3) y (3.4b) o simplemente cambiando $i \to f$ en (3.5) y (3.6) obtenemos la relación entre v_{1f} y v_{2f} con V_{CM} y v_{12f}

$$v_{1f} = V_{CM} + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_{12f} \tag{3.7}$$

$$v_{2f} = V_{CM} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_{12f} \tag{3.8}$$

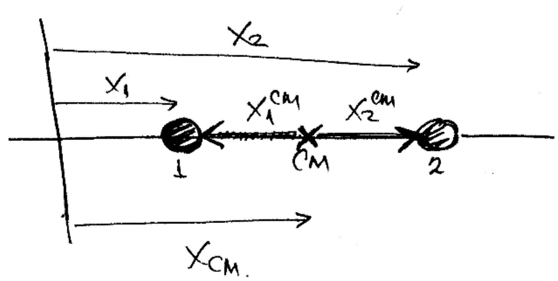
Escribamos ahora la energía cinética en función de V_{CM} y $v_{12(i,f)}$.

En la clase anterior vimos que la energía cinética del sistema se puede escribir como la suma de la energía cinética del CM más la energía cinética relativa al CM. Entonces,

Antes del choque

$$K_i = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i u_i^2 \tag{3.9}$$

donde u_i es la velocidad relativa de la partícula i en relación el CM. O sea, $\vec{u}_i = \vec{V}_{CM} - \vec{v}_i$ y en una dimensión,



$$X_2 = X_{CM} + X_2^{(CM)}$$
$$v_2 = V_{cm} + u_2$$
$$X_1 = X_{CM} - X_1^{(CM)}$$
$$v_1 = V_{cm} - u_1$$

$$K_i = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 (V_{CM} - v_{1i})^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_{CM} - v_{2i})^2$$

y de (3.5) y (3.6)

$$K_i = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 v_{12i}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v_{12i}^2$$

$$K_i = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)v_{12i}^2 \quad (3.10)$$

El segundo término continúa siendo la energía relativa en relación al CM pero ahora escrita en relación a la velocidad relativa entre las partículas. La cantidad $\mu \equiv \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)$ es llamada masa reducida y aparece a menudo en sistemas de dos partículas. Reescribamos (3.10) como

$$K_i = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{12i}^2 \quad (3.11)$$

Para la energía cinética después del choque obtenemos el mismo resultado ($i \rightarrow f$)

$$K_f = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{12f}^2 \quad (3.12)$$

Entonces, del balance de energía

$$K_i = K_f + Q$$

$$\frac{1}{2}\mu v_{12i}^2 = \frac{1}{2}\mu v_{12f}^2 + Q \quad (3.13)$$

o

$$v_{12i}^2 = v_{12f}^2 + \frac{2MQ}{m_1 m_2} \quad (3.14)$$

Notemos que cuando el choque es elástico, esto es, cuando $Q = 0$ la energía cinética se conserva y las velocidades relativas de las partículas son iguales.

Si el choque es inelástico, i.e., cuando $Q > 0$ se pierde energía y

$$|v_{12f}| < |v_{12i}|.$$

Finalmente, el cambio en la energía interna es

$$\Delta E_{int} = Q = \frac{1}{2}\mu v_{12i}^2 - \frac{1}{2}\mu v_{12f}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(v_{12i}^2 - v_{12f}^2\right)$$

4. Colisiones plásticas

En las colisiones plásticas o perfectamente inelásticas entre dos objetos, los mismos se mueven juntos después de la colisión (quedan pegados) y sus velocidades finales son idénticas. Esto significa que la velocidad relativa entre ellos es cero

$$v_{12f} = 0 \qquad \text{Choque plástico} \tag{4.1}$$

Entonces, de (3.7) o (3.8)

$$v_f = v_{1f} = v_{2f} = V_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{4.2}$$

Resultado al que llegamos también de la conservación del momento lineal

$$P_i = P_f \quad \rightsquigarrow \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

Adicionalmente, de (3.11) y (3.12) el cambio en la energía cinética del sistema

$$\Delta E_{int} = Q = K_i - K_f = \frac{1}{2} \mu v_{12i}^2 \tag{4.3}$$

La mayoría de las colisiones se encuentra entre los extremos de ser completamente inelásticas o elásticas. Para estas, la velocidad relativa final entre las partículas es o cero o igual a su valor inicial. En estos casos es conveniente definir la razón entre las velocidades relativas como

$$e = \frac{v_{12f}}{v_{21i}} \tag{4.4}$$

Esta cantidad adimensional es llamada de coeficiente de restitución de la colisión y nos dice en cuanto la velocidad relativa es restituida después del choque.

Cuando $e = 1$, $v_{12f} = v_{21i}$ y la colisión es elástica. Un valor de $e = 0$ significa que $v_{12f} = 0$ la colisión es totalmente inelástica. Para calores entre 0 y 1 la colisión es inelástica.

En las colisiones inelásticas tenemos las ecuaciones (3.5)-(3.7) pero necesitamos conocer el valor de e para poder calcular las velocidades finales. El detalle de como el estado de los objetos cambia en la colisión está oculto en este coeficiente e.

Coefficient of restitution for various processes

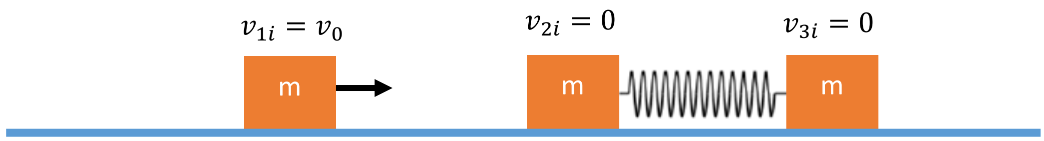
Process	Relative speed	Coefficient of restitution
totally inelastic collision	$v_{12f} = 0$	$e = 0$
inelastic collision	$0 < v_{12f} < v_{12i}$	$0 < e < 1$
elastic collision	$v_{12f} = v_{12i}$	$e = 1$
explosive separation	$v_{12f} > v_{12i}$	$e > 1$

Ejemplo:

Con los datos dados en la siguiente figura:

Calcular la deformación máxima del resorte si la colisión entre los cuerpos 1 y 2 es elástica.

Considere la superficie lisa.



Siempre que resolvamos un problema de colisiones es conveniente seguir los siguientes pasos,

1. Resolver el choque (en este caso entre 1 y 2). Para eso aíslo los cuerpos 1 y 2, esto es, considero el sistema formado por estos.

Como la colisión es elástica la velocidad relativa se conserva, específicamente

$$v_{21i} = v_{12f}$$

i.e.,

$$v_{2i} - v_{1i} = v_{1f} - v_{2f} \quad \Rightarrow \quad -v_0 = v_{1f} - v_{2f}$$

$$v_{2f} = v_{1f} + v_0$$

De la conservación de P,

$$mv_0 = mv_{1f} + mv_{2f} \qquad \Rightarrow \; v_{2f} = v_0 - v_{1f}$$

Sumando y restando obtenemos,

$$v_{2f} = v_0$$

$$v_{1f} = 0$$

2. Con el choque resuelto analizamos ahora lo que sucede al sistema de cuerpos 2-3.

Luego del choque de la conservación de la energía,

$$E_i = E_2$$

Donde,

E_i: Energía del cuerpo 2 inmediatamente después de la colisión

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

Donde $d = largo - l_0$; i.e., la deformación

Pero la suma de las energías cinéticas de los dos cuerpos se puede escribir como la suma de la energía cinética del CM más la energía relativa a este.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

Como la velocidad del CM es constante por la conservación del momento lineal, nos damos cuenta que la elongación de resorte será máxima cuando $v_{rel} = 0$

Debemos calcular V_{CM}. Como es constante, la calculamos en el instante inicial y

$$V_{CM} = \frac{mv_0}{M} = \frac{v_0}{2}$$

Así,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{m}{4}v_0^2 + \frac{1}{2}kd_{max}^2$$

$$\frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{2}kd_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad d_{max} = \sqrt{\frac{m}{2k}}v_0$$