PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 03

Cinemática III

Problema 1.

Un auto que parte desde el reposo; acelera y luego desacelera como muestra la Figura 1. Se pide:

a) Determine la distancia s' de frenado.

b) Bosqueje la gráfica v–s .

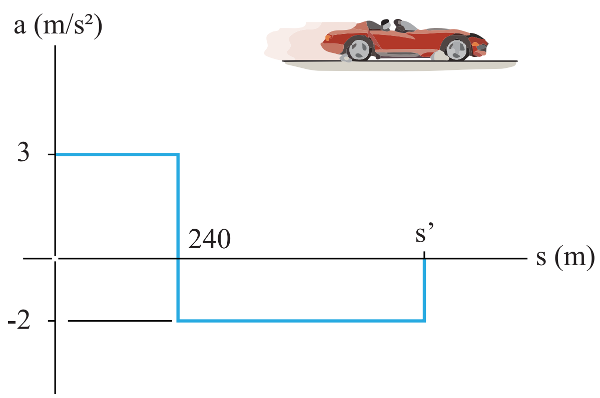


Figura 1: Gráfica $a\,(s)$, donde s es la posición

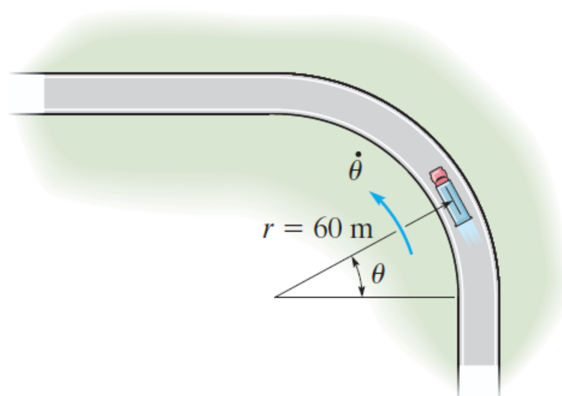


Figura 2: Camión en trayectoria circular.

Problema 2.

Un camión recorre una curva circular con radio $r = 60\,m$. En cierto instante su marcado de velocidad (velocidad tangencial) indica $v_t = 20\,m/s$, y se encuentra acelerando con $a_t = 3\,m/s^2$. Determine las componentes radial y transversal de la aceleración; a_r y a_θ, respectivamente.

Hint: En un círculo la relación entre un ángulo y su arco es: $s = r \cdot \theta$. Con ello puede relacionar velocidad angular $\dot{\theta}$ con velocidad tangencial $v_t = \dot{s}$. Lo mismo ocurre con las aceleraciones.

Problema 3.

Un cohete se dispara verticalmente y es rastreado por un radar como muestra la Figura 3. Cuando $\theta = 60°$, el radar captura la siguiente información: $r = 9000\,m$, $\ddot{r} = 20\,m/s^2$, y $\dot{\theta} = 0{,}02\,rad/s$. En dicho instante, se pide determinar:

a) La magnitud de la velocidad del cohete (rapidez).

b) La magnitud de la aceleración de cohete.

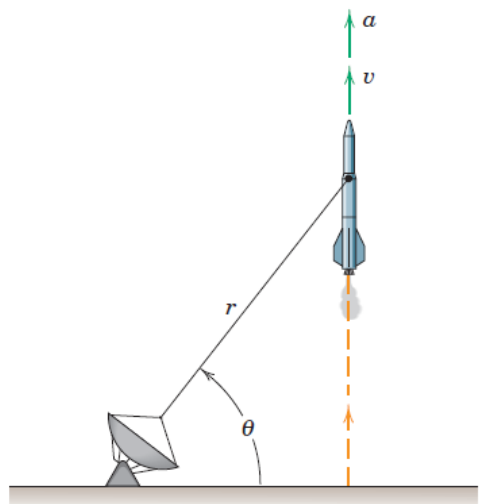


Figura 3: Cohete y radar.

Hint: Use la geometría del problema y los datos que le entregan para escribir $r(\theta)$. Además, si tiene una expresión de la forma $f(\theta) = g(r)$, puede tomar derivadas implícitas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\{f(\theta)\} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\{g(r)\} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Problema 4.

Un jet de combate necesita cargar combustible de un avión tanque que se mueve a velocidad constante $v_A = 132\,m/s$. Comenzando desde la posición que indica la Figura 4. Determine un vector de velocidad constante (en coordenadas absolutas) que permite que los aviones se encuentren en $\Delta t = 120\,s$.

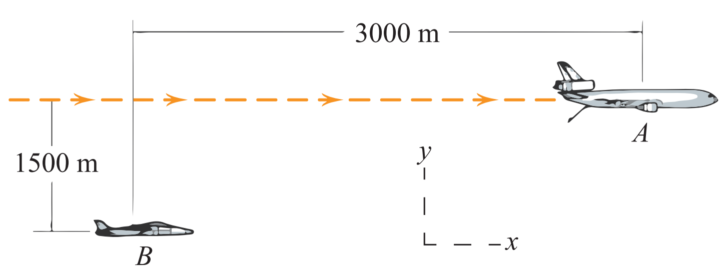


Figura 4: Jet y avión tanque.

Soluciones.

Problema 1 – Solución A

Se puede usar la regla de la cadena para obtener una relación entre velocidad y posición:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}s = v \cdot \mathrm{d}v$$
$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}s = \int_{v_1}^{v_2} v \cdot \mathrm{d}v$$
$$\int_{s_1}^{s_2} a \cdot \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Como el auto parte del reposo: $u_0 = 0$ y $v_0 = 0$. Con ello, la velocidad al final del tramo I (tramo de aceleración) es:

$$\frac{1}{2}\left(v_{s=240}^2 - v_0^2\right) = (3)\,(240)$$
$$v_{s=240}^2 = 1440 \qquad \rightarrow \qquad v_{s=240} = 37{,}95\,m/s$$

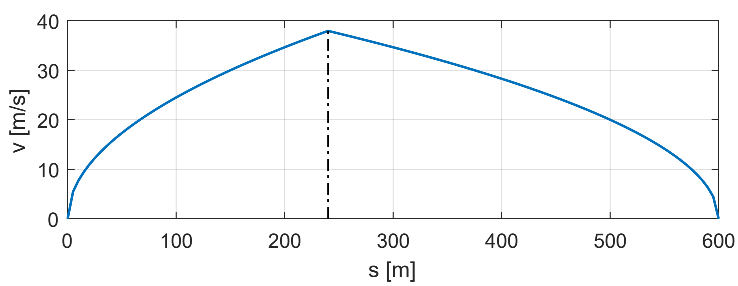
Luego, en el tramo II (tramo de desaceleración):

$$\frac{1}{2}\left(v_f^2 - v_{s=240}^2\right) = (-2)\,(s' - 240)$$
$$1440 = (-4)\,(s' - 240) \qquad \rightarrow \qquad s' = 600\,m$$

El bosquejo de la curva se obtiene de:

$$v\,(s) = \begin{cases} \sqrt{6s} & \text{si } s \leq 240\,m \\ \sqrt{2400 - 4s} & \text{si } s > 240\,m \end{cases}$$

Con ello se obtiene la siguiente figura:



Problema 1 – Solución B

La distancia recorrida al término del primer tramo (tramo de aceleración) es $240\,m$ con aceleración constante. Es decir, el tramo I tiene una duración de:

$$d = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad \rightarrow \qquad 240 = \frac{1}{2}\,(3)\,t_I^2$$
$$t_I = 12{,}65\,s$$
$$v = a \cdot t \qquad \rightarrow \qquad v\,(t_I) = 3 \cdot t_I = 37{,}95\,m/s$$

Sabemos que al final del tramo II $v_f = 0$, y con ello:

$$v_f = v_I + a \cdot \Delta t_{II} = 37{,}95 + (-2)\,(t_f - 12{,}65) = 0$$
$$2t_f = 63{,}2455$$
$$t_f = 31{,}623\,s$$

La distancia que se recorrió en el tramo II es:

$$\Delta d_{II} = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t_{II}^2 + v_I \cdot \Delta t_{II}$$
$$\Delta d_{II} = 360\, m$$

El desplazamiento total es $\Delta t_I + \Delta t_{II} = 240 + 360 = 600\, m$.
La gráfica se puede obtener evaluando la velocidad para ciertos t y obteniendo d (o s) asociado a dicho t: si bien esto resulta en la misma gráfica, puede requerir bastante trabajo.

Problema 2 – Solución A
Sabemos que $s = r \cdot \theta$, entonces:

$$\dot{s} = v_t = r \cdot \dot{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{v_t}{r} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}\, rad/s$$
$$\ddot{s} = a_t = r \cdot \ddot{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\theta} = \frac{a_t}{r} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}\, rad/s^2$$

Además, como el movimiento es circular:

$$\dot{r} = 0 \qquad ; \qquad \ddot{r} = 0$$

La aceleración en coordenadas polares es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = (60)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \hat{\mathbf{e}}_r + (60)\left(\frac{1}{20}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{-20}{3}\hat{\mathbf{e}}_r + 3\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Es decir, la aceleración en sentido radial $a_r = \frac{-20}{3}$ y $a_\theta = 3$.

Problema 2 – Solución B
Utilizando directamente las ecuaciones de movimiento circular:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(-r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left(-\frac{v_t^2}{r}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + (a_t)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{20^2}{60}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(3\ddot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{-20}{3}\hat{\mathbf{e}}_r + 3\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Es decir, la aceleración en sentido radial $a_r = \frac{-20}{3}$ y $a_\theta = 3$.

Problema 3
Del enunciado y de la figura sabemos que:

$$\begin{array}{ll} \theta = 60^\circ = (\pi/6)\ rad & r = 9000\, m \\ \dot{\theta} = 0{,}02\, rad/s & \dot{r} = ? \\ \dot{\theta} = 0 & \ddot{r} = 20\, m/s^2 \end{array}$$

Llamando b a la distancia horizontal entre el radar y el lanzamiento del cohete:

$$\cos(60^\circ) = \frac{b}{r} \qquad \rightarrow \qquad b = 4500\, m$$

, y con ello podemos obtener una relación entre $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{b}{r} \\
-\sin(\theta)\cdot\dot{\theta} &= -\frac{b}{r^2}\cdot\dot{r} \\
\dot{r} &= \frac{r^2}{b}\sin(\theta)\cdot\dot{\theta} = 2r\sin(\theta)\,\dot{\theta} \\
\dot{r} &= (2)\,(9000)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0{,}02) = 180\sqrt{3}\,m/s
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos $\dot{r}$ podemos calcular la velocidad y aceleración pedida. La velocidad es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta = 180\sqrt{3}\hat{\mathbf{e}}_r + (9000)\,(0{,}02)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\
\mathbf{v} &= 180\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 180\,\hat{\mathbf{e}}_\theta
\end{aligned}$$

, y su magnitud es: $|\mathbf{v}| = 180\sqrt{3+1} = 360\,m/s$.
La aceleración es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\
\mathbf{a} &= \left[20 - (9000)\,(0{,}02)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[0 + (2)\left(180\sqrt{3}\right)(0{,}02)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\
\mathbf{a} &= 16{,}4\,\hat{\mathbf{e}}_r + 7{,}2\,\hat{\mathbf{e}}_\theta
\end{aligned}$$

, y su magnitud es: $|\mathbf{a}| = \sqrt{424{,}48} = 20{,}603\,m/s^2$.

Problema 4

Pongamos nuestro sistema de ejes móvil en el avión A (tanquero). Además, sabemos que dicho avión se mueve a velocidad constante:

$$\dot{\mathbf{u}}_A = \begin{Bmatrix} 132 \\ 0 \end{Bmatrix}\ m/s$$

El jet B debe cubrir una distancia (medida desde el sistema de ejes A) igual a:

$$\Delta\mathbf{u}_{B/A} = \begin{Bmatrix} 3000 \\ 1500 \end{Bmatrix}$$

El jet B se moverá también a velocidad constante $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{u}}_{B/A}$ que es igual a la velocidad promedio $\mathbf{v}_{ave}$:

$$\dot{\mathbf{u}}_{B/A} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{ave} = \frac{\Delta\mathbf{u}_{A/B}}{\Delta t} = \frac{1}{120\,s}\begin{Bmatrix} 3000 \\ 1500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 12{,}5 \end{Bmatrix}\ m/s$$

Con la ecuación de velocidad relativa, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}_B &= \dot{\mathbf{u}}_A + \dot{\mathbf{u}}_{B/A} = \begin{Bmatrix} 132 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 25 \\ 12{,}5 \end{Bmatrix} \\
\dot{\mathbf{u}}_B &= \begin{Bmatrix} 157 \\ 12{,}5 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$