# 4. Trabajo, Potencia y Energía:

## 4.1 Trabajo:

Trabajo físico será realizado solamente si:

1) se ha recorrido una trayectoria y
2) actúa una Fuerza a lo largo del tramo.

Definimos el trabajo para el caso más sencillo:

→ La Fuerza es constante y
→ el tramo recorrido $s$ es recto.

En este caso el trabajo $W$ (en Inglés: "work") está definido de la siguiente forma:

$$\boxed{W := F_s \cdot s = F \cdot s \cdot \cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \text{para } F=\text{const. y } s \text{ recto}} \qquad (4.1\text{-}1)$$

En palabras: Trabajo $W$ := Componente de Fuerza $F_s$ en dirección del trayecto por el tramo recorrido.

⟹ Unidad de Trabajo:

$$[\text{Newton} \cdot \text{metro}] := [\text{Joule}] \quad \text{o}$$

$$[Nm] := [J]$$

Nota: Entre el trabajo físico y el biológico corporal existe una gran diferencia:

a) Sujetando un gran peso en el aire y en reposo y por largo tiempo con fuerza muscular
→ gran trabajo corporal / biológico
(→ se siente el cansancio)
→ ¡para un científico en Ciencias Naturales e Ingeniero no es un trabajo físico!
(→ se puede de igual forma suspender el peso con una mesa o estructura).

b) Trabajador llevando sobre sus hombros cada día sacos de papas sobre un recorrido horizontal:
→ duro trabajo biológico
→ No es trabajo físico, ya que la fuerza del peso está vertical al camino recorrido (→ carro sin roce sobre riel horizontal)

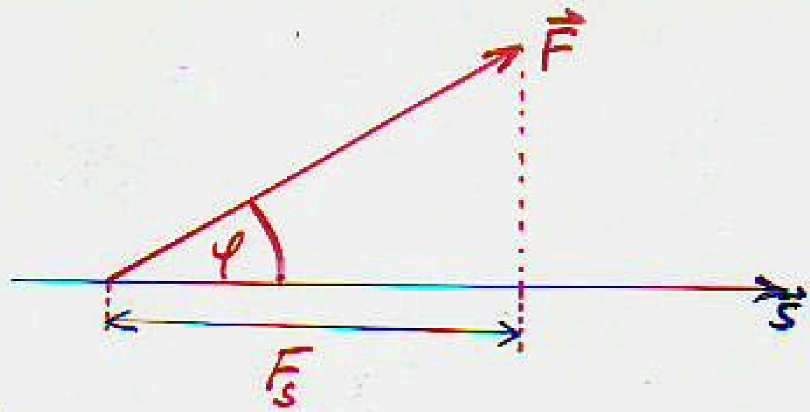



Fig. (4.1-1): Para una Fuerza constante y un camino recto, el Trabajo esta definido como:

$$F_s \cdot s = \vec{F} \cdot \vec{s} \, .$$

Caso general:

Según definición (4.1-1) y el cálculo integral resulta el Trabajo para el caso general:

- la componente de Fuerza $F_s = F \cos \varphi$ en dirección del camino / recorrido no es constante porque el módulo F de la Fuerza o el ángulo entre Fuerza y incremento de camino cambia. (por ejemplo en el caso de caminos curvilineo).

En este caso se va a dividir el camino recorrido en $n$ elementos / incrementos de camino ("intervalos") de mismo largo:

$$\Delta s = \frac{s}{n}$$

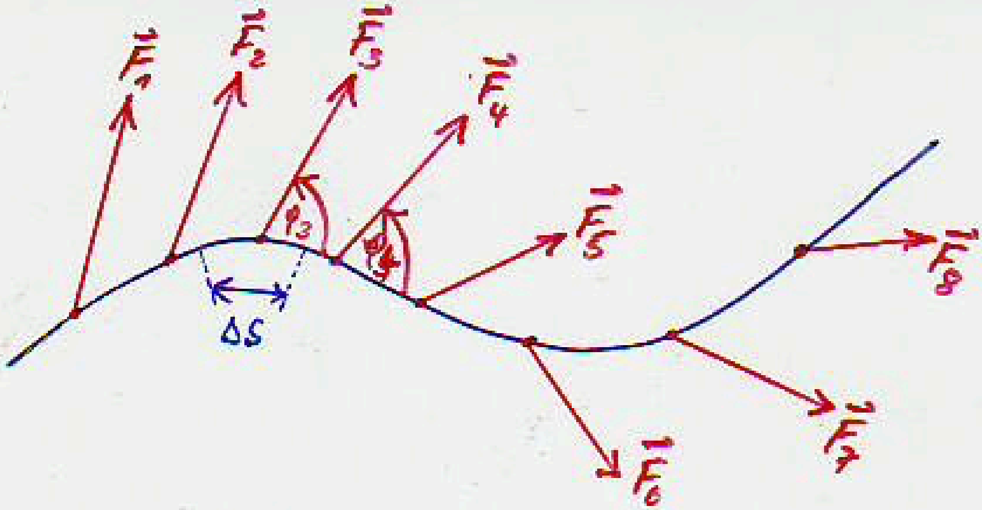



Fig. (4.1-2): En el caso de un camino curvilíneo o en el caso de Fuerza No constante se divide el camino en caminos parciales $\Delta s$, los cuales estan casi recta y donde la Fuerza casi no cambia.

⇒ Las condiciones de ecu. (4.1-1) – $F$ = constant y camino recto – estan satisfactionado en buena aproximación.

⇒ Trabajo realizado a lo largo del elemento de camino "i" es aprox.:

$$\Delta W_i \approx F_i \cos\varphi_i \cdot \Delta s$$

⇒ Trabajo total = Suma sobre todos los elementos de camino:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\varphi_i \, \Delta s \qquad (4.1\text{-}2)$$

Si $n$ aumenta

$\Rightarrow$ $\Delta s$ disminuye y $\Delta s$ más recta

$\Rightarrow$ resultado en ecu.(4.1-2) más exacta.

$\Rightarrow$ Para $n \Rightarrow \infty$ resulta el valor límite:

$$\boxed{W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\varphi_i \, \Delta s = \int_C F \cos\varphi \, ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}} \qquad (4.1\text{-}3)$$

- C es el camino (en general el camino curvilíneo) sobre cual se desplaza la partícula puntual.

- El Integral sobre el camino C se llama "Integral de camino" o "Integral de Línea".

En general entonces el Trabajo es el "Integral de camino" de la Fuerza.

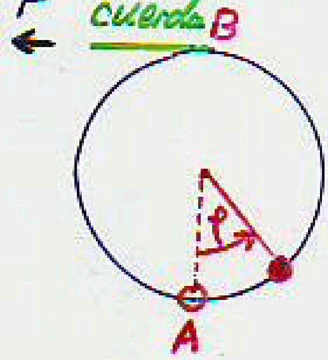
($\rightarrow$ Calculo II)

$$\boxed{W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}} \qquad (4.1\text{-}3)$$

$[Nm] := [J]$

## Ejemplo (4.1-1): Trabajo para elevar una Masa:

Tenemos una rueda simétrica del radio $R$ la cual se puede girar sin roce al rededor de un eje horizontal, fijo. La llanta de la rueda contiene una cuerda enrollada. Una masa "$m$" se ajustará en el extremo inferior, punto "A" de la llanta en reposo.




Compruebe con el Integral de camino/recorrido de la Fuerza $\int_c F ds$ matemáticamente, que necesita el Trabajo $W = mg2R$ para levantar la masa "$m$" desde su punto inferior "A" al punto superior "B", tirando la cuerda lentamente. (Es decir mover la rueda en 180°).

### Solución:

La Fuerza de la cuerda como función del ángulo $\varphi$ de la rotación es:

$$F = m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

Si la Fuerza $F$ depende del ángulo de rotación $\varphi$, también el elemento infinitesimal del camino depende de $\varphi$: $ds = R d\varphi$

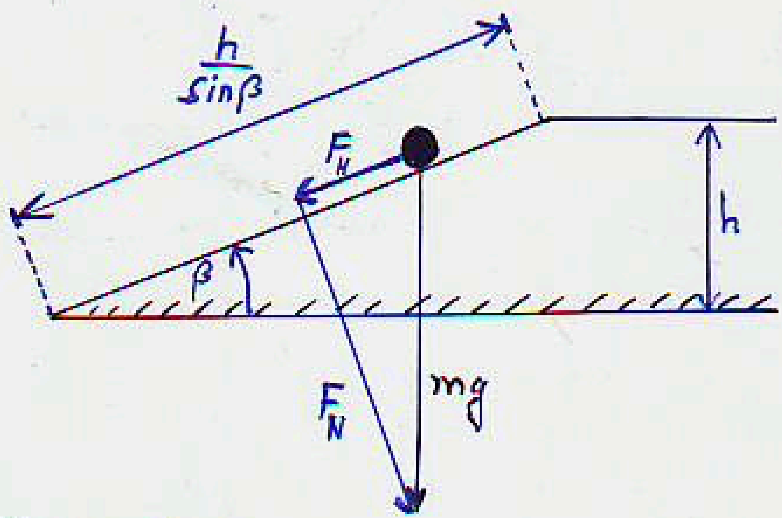
$$\Rightarrow \underline{W} = \int F ds = \int_0^{\pi} (mg \sin\varphi)(R d\varphi) = \underline{mg2R}$$

Investigamos ahora las tres versiones más importantes del trabajo mecánico:

1) <u>Trabajo de elevación</u>: Para levantar una masa $m$ en forma vertical a una altura $h$, hay que invertir el trabajo:

$$\boxed{W_H = mgh} \qquad (4.1\text{-}4)$$

Si levantamos una masa $m$ a la misma altura $h$ a través de un plano inclinado:




Nesecitamos trabajar en contra de la Fuerza $F_H$ (Fuerza derivada del declive = "Hangabtriebskraft")

$$F_H = mg\sin\beta$$

⇒ Trabajo de elevación en este caso también es

$$W_H = (mg\sin\beta)\cdot\left(\frac{h}{\sin\beta}\right) = m\cdot g\cdot h$$

¡igual como en el caso del levantamiento vertical!

Nota: Levantando una masa con un aparejo*)/ poli(s) pasto*) tampoco ahorra Trabajo: El recorrido aumenta en el mismo factor, como se disminuye la Fuerza.

*) "tecle"

Con ecu. (4.1-3) $[W = \int_C \vec{F} d\vec{s}]$ se puede mostrar, que el Trabajo en contra de la Fuerza de Gravedad también en el caso de caminos curvilineos solamente depende de la diferencia de altura $h$, y no de lo transcurrido del camino. ¡Siempre vale $W_H = mgh$! El ejemplo inicial (4.1-1) confirma esta conclusión.

2) Trabajo de Deformación elástica:

Al oprimir un resorte se aplica la Fuerza $F = Dx$. (El signo positivo significa que la Fuerza aplicada tiene la dirección de la elongación $x$.)

Podemos calcular el trabajo de deformación en dos maneras:

a) La Fuerza promedio $F_m$ para expandir el resorte de su largo de reposo / sin tensión $l$ a un largo $(l+x)$ es:

$$F_m = D\,\frac{x}{2}$$

El Trabajo de Deformación $W_V$ es entonces:

$$W_V = F_m \cdot x = \frac{D}{2}\,x^2$$

Ojo: El cálculo de una Fuerza promedio $F_m$ es fácil solamente en el caso de Fuerzas lineales!

b) A través de la Integración sobre la Fuerza el trabajo de deformación se puede calcular fácilmente también para Fuerzas no-lineales.

En este ejemplo: No usamos la ecu. (4.1-3), sino – para mostrar de nuevo el sentido del cálculo Integral – derivamos el Integral del Camino de la Fuerza para este caso Simple:

La Fuerza del resorte no es constante.

$\Rightarrow$ partimos la elongación $x$ en $n$ elongaciones parciales iguales:

$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

Si $n$ es suficientemente grande, la Fuerza $F_i$ a lo largo de la elongación parcial nº "i" ($i = 1, 2, \dots n$) es aprox. constante.

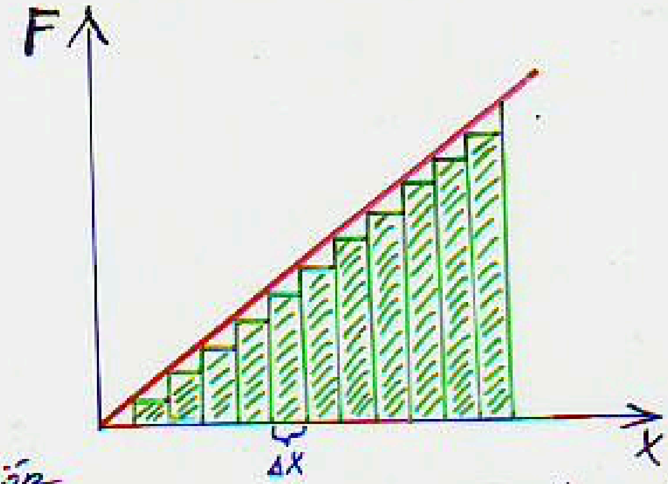



Fig. (4.1-5)

El Trabajo de Deformación para una elongación $x$ es entonces:

$$W_V = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x$$

Si se calculan las Fuerzas $F_i$ en los extremos izquierdos de los intervalos parciales, esta Suma $\sum_{i=1}^{n}$ representa el área sombreada en la figura (4.1-5). para $n \to \infty$ (Limes) la Suma $\Sigma$ se transforma en un Integral $\int$:

$$W_V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x = \int_0^x F(x')\,dx' = \int_0^x D x'\,dx' = \frac{D}{2} x^2$$

$$\boxed{W_V = \frac{D}{2} x^2} \qquad (4.1\text{-}5)$$

El Trabajo de la Deformación elástica es proporcional al cuadrado de la elongación $x$.

Si se expanden un Resorte no del estado del reposo (equilibrio), sino de una elongación preexistente $x_1$ a una elongación $x_2$, el Trabajo de Deformación es: 

$$W_V = \int_{x_1}^{x_2} Dx\,dx = \frac{D}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Es entonces igual a la diferencia de los Trabajos de Deformación para una elongación de caso a $x_1$ y de caso a $x_2$.

## 3) Trabajo de Aceleración:

Para acelerar un cuerpo hay que hacer Trabajo en contra de la inercia.

Consideramos primero el caso más fácil del cálculo del trabajo de aceleración $W_B$ para acelerar una masa $m$ uniformemente de su posición de reposo $V_0 = 0$.

Multiplicando la Fuerza constante $F = m \cdot a$ con el camino recto recorrido $x$ resulta el Trabajo

$$W_B = m \cdot a \cdot x \qquad (4.1\text{-}6)$$

En el caso de aceleraciónes uniformes con $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$ vale:

$$v = at \qquad x = \frac{a}{2}t^2 = \frac{v^2}{2a}$$

Entramos con $x$ en ecu. (4.1-6) resulta:

$$\boxed{W_B = \frac{m}{2}v^2} \qquad (4.1\text{-}7)$$

El Trabajo de aceleración es proporcional al cuadrado de la velocidad.

La ecu. (4.1-7) también vale para movimientos acelerados no-uniforme. Esto vamos a comprobar ahora:

- limitémonos nuevamente a movimientos en el eje $x$.
- permitimos también $v_0 \neq 0$

Trabajo es $\int_C$ de camino sobre la Fuerza:

$$W_B = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = m\int_{x_1}^{x_2} a(x)\,dx \qquad (4.1\text{-}8)$$

Podemos calcular el $\int$, si conocemos $a$ como función de $x$: $a = a(x) \rightarrow$ ejemplo (4.1-3).

Si a(x) no es conocido (como en la mayoría de los casos) la situación será "sin esperanza".

Un truco ayuda y hace el problema muy fácil:

$$W_B = m\int_{x_1}^{x_2} a\,dx = m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt}\,dx \underset{\text{sustitución}}{\overset{\uparrow}{=}} m\int_{v_1}^{v_2} dv\,\frac{dx}{dt} =$$

$$= m\int_{v_1}^{v_2} dv\,v = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \qquad (4.1\text{-}9)$$

"Correr" dt bajo dx cambia la variable de la integración de "x" a "v". Esta operación se llama en la matemática "sustitución". (→ ver "Cálculo II").

La ecu. (4.1-7) con $v_0 = 0$ es un caso especial de ecu. (4.1-9).

El Trabajo de Aceleración depende solamente de la masa y de la velocidad inicial y final; <u>no</u> depende de la naturaleza de la Fuerza actuando, ni de la duración de la aceleración.

## Ejemplo 4.1-2:

### Trabajo de aceleración de un tren:

Poner en marcha un tren de la masa $m = 10^6$ kg se necesita / consume un trabajo $W_B = 8 \cdot 10^8 J = 222$ kWh.
¿Cuál es la velocidad final $v_E$?

## Solución:

$$v_E = \sqrt{2 W_B / m} = 40 \frac{m}{s} = 144 \frac{km}{h}.$$

## Ejemplo 4.1-3:

### Trabajo de Aceleración:

Una partícula de la masa $m = 8$ kg esta acelerada sin roce a través de una Fuerza externa sobre el eje x horizontal desde $x_0 = 0$ m hasta $x_1 = 10$ m. En esto aumenta la aceleración a (no la velocidad!) lineal con el camino recorrido

$$a = c\,x \quad \text{con} \quad c = 3\,s^{-2}$$

Calcule el Trabajo, el cual la Fuerza efectúa en el intervalo [0m, 10m].

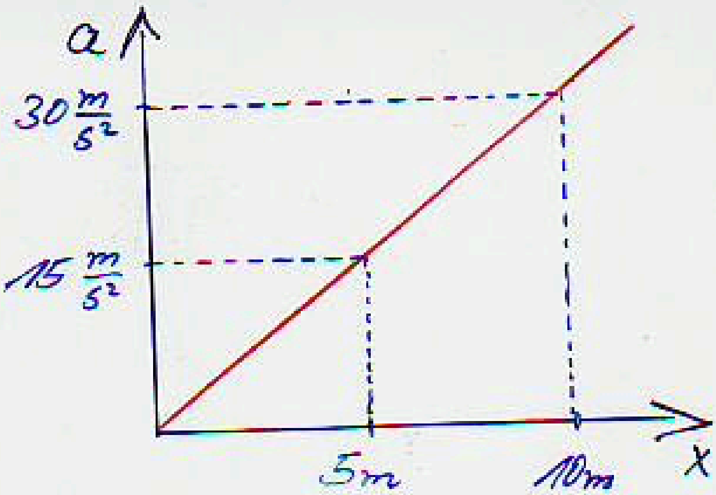



Fig.: (4.1-6) Aceleración como Función lineal del camino recorrido.

Solución:

$$W=\int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} ma\,dx = mc\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = mc\,\frac{x_1^2}{2} = 1{,}2\,kJ$$

# 4.2 Potencia:

Recuerde: En la definición del Trabajo el tiempo no influye.

Pero normalmente importa el tiempo que se necesita para hacer un trabajo:

El tiempo que necesita un tren para llegar a la velocidad final.

→ Un Metro / U-Bahn que para cada 500 - 1000m tiene que acelerar más fuerte que un tren de carga, el cual recorre distancias largas sin parar.