PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Segundo Semestre 2017

Examen

Duración total: 180 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación
   Adulterar el acta de asistencia
   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas
   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

Si el resorte tiene una constante k y una longitud no deformada ℓ_0, determine la fuerza P cuando el mecanismo está en la posición mostrada. Ignore el peso de los elementos.

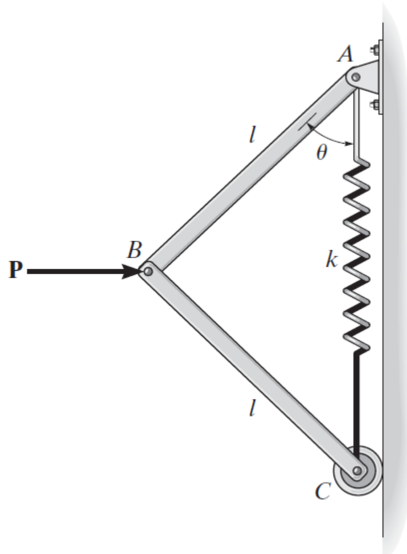


Figura 1: Mecanismo tijera–resorte.

a) $P = 2k(2\ell\cos\theta - \ell_0)\tan\theta$

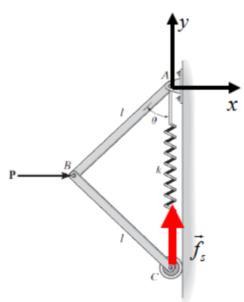
b) $P = 2k(\ell\cos\theta - \ell_0)\cot\theta$

c) $P = k(\ell_0 - 2\ell\cos\theta)\tan\theta$

d) $P = 2k(\ell_0 - \ell\cos\theta)\tan\theta$

e) $P = 2k(\ell_0 - \ell\sin\theta)\tan\theta$

Solución



Al aplicarse la fuerza P sobre el nodo B, el resorte es estirado de su posición de reposo, por tanto aparece una fuerza fs hacia arriba de magnitud

$$f_s = k\left(2\ell\cos\theta - \ell_0\right)$$

Si consideramos como origen de un sistema coordenado el punto A, entonces

$$\delta w = \vec{p}\cdot\delta\vec{x}_B + \vec{f}_s\cdot\delta\vec{y}_C = 0$$

Nótese que para un estiramiento virtual del resorte el ángulo se reduce, es decir

$\theta \to \theta - \delta\theta$ por tanto $\vec{x}_B + \delta\vec{x}_B = -\ell\sin(\theta-\delta\theta)\hat{i}$ donde $\vec{x}_B = -\ell\sin(\theta)\hat{i}$

$$\delta\vec{x}_B = \frac{d(-\ell\sin\theta)}{d\theta}(-\delta\theta)\hat{i} = \ell\cos\theta\delta\theta\hat{i}$$

Por otro lado $\vec{y}_C = -2\ell\cos\theta\hat{j}$ entonces $\vec{y}_C + \delta\vec{y}_C = -2\ell\cos(\theta-\delta\theta)\hat{j}$

$$\delta\vec{y}_C = \frac{d(-2\ell\cos\theta)}{d\theta}(-\delta\theta)\hat{j} = -2\ell\sin\theta\delta\theta\hat{j}$$

Finalmente $\vec{p}\cdot\delta\vec{x}_B + \vec{f}_s\cdot\delta\vec{y}_C = p\hat{i}\cdot\delta\vec{x}_B + f_s\hat{j}\cdot\delta\vec{y}_C = p\hat{i}\cdot\ell\cos\theta\delta\theta\hat{i} + f_s\hat{j}\cdot(-2\ell\sin\theta\delta\theta\hat{j}) = 0$

$p\ell\cos\theta\delta\theta - f_s 2\ell\sin\theta\delta\theta = 0$ ➡ $p = 2f_s\tan\theta$ ➡ $\boxed{p = 2k\left(2\ell\cos\theta - \ell_0\right)\tan\theta}$

Problema 2 [1 punto]

Una barra homogénea de largo L y masa M esta en reposo colgando libremente de un pivote como se muestra en la Figura 2. Una bala de masa m impacta en el extremo inferior de la barra con una rapidez v_0. El choque es plástico (totalmente inelástico).

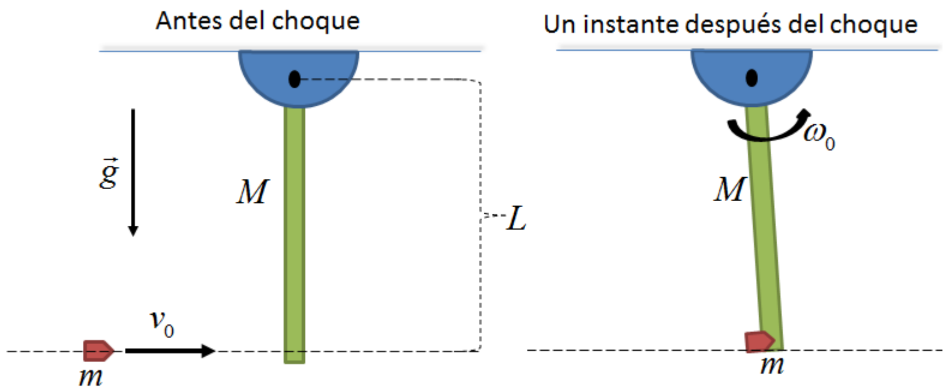


Figura 2: Choque plástico bala–barra. La bala tiene masa m, y la barra (péndulo) masa M.

Si llamamos I_{CM} al momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masa; ¿Cuál es la velocidad angular ω_0 del sistema bala–barra en el instante justo después del choque?

a) $\omega_0 = \left(\dfrac{m}{\frac{I_{CM}}{L^2} + \frac{M}{4} + m} \right) \dfrac{v_0}{L}$

b) $\omega_0 = \left(\dfrac{m}{\frac{I_{CM}}{L^2} + M + m} \right) \dfrac{v_0}{L}$

c) $\omega_0 = \left(\dfrac{M}{\frac{I_{CM}}{L^2} + M} \right) \dfrac{v_0}{L}$

d) $\omega_0 = \left(\dfrac{m}{\frac{I_{CM}}{L^2} + m} \right) \dfrac{v_0}{L}$

e) $\omega_0 = \left(\dfrac{M}{\frac{I_{CM}}{L^2} + m} \right) \dfrac{v_0}{L}$

Solución

Si ponemos el origen de un sistema coordenado en el pivote entonces el momento angular total del sistema antes del choque es $\vec{L}_0 = Lmv_0\hat{k}$

En el instante después del choque obtenemos:

$\vec{L}_f = I_T\omega_0\hat{k}$ con $I_T = I_{CM} + M\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + mL^2$

Si el momento angular total del sistema se conserva, $\vec{L}_0 = \vec{L}_f$, entonces rápidamente obtenemos que:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{Lmv_0}{I_T} = \frac{m}{\frac{I_{CM}}{L^2} + \frac{M}{4} + m}\frac{v_0}{L}}$$

Problema 3 [1 punto]

El reticulado de la figura es sometido a una carga F en el nodo E, como se muestra en la figura 3. El apoyo en A permite rotación pero impide traslación en cualquier dirección, y el apoyo en G permite rotación y traslación horizontal. ¿Qué aseveración es correcta respecto a las fuerzas en las barras AB, AH y HG?

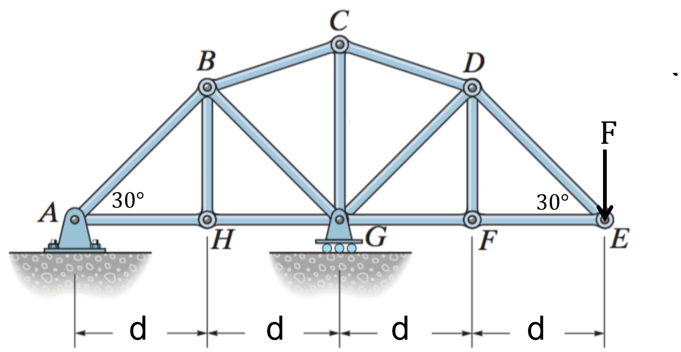


Figura 3: Reticulado simple

a) AB está en tracción, AH en compresión, y HG en tracción.

b) AB está en tracción, AH en tracción, y HG en compresión.

c) AB está en compresión, AH en tracción, y HG en compresión.

d) AB está en compresión, AH en tracción, HG en tracción.

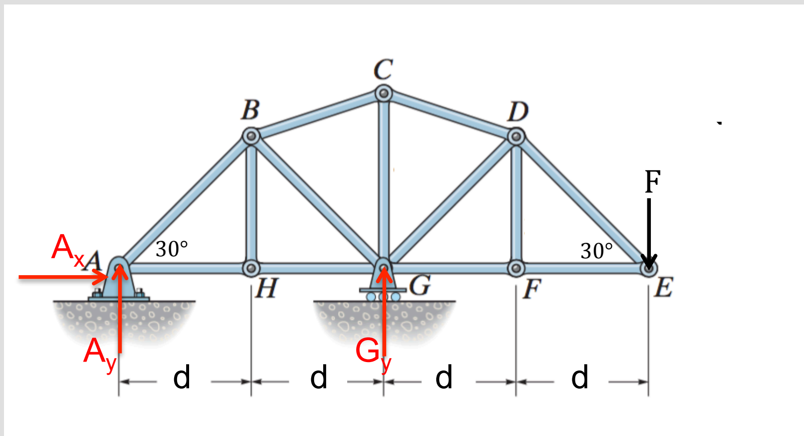
e) AB está en tracción, AH en compresión, y HG en compresión.

Solución

La barra BH es un miembro de fuerza cero, por lo tanto se puede inferir inmediatamente que las fuerzas en las barras AH y HG tienen que ser ambas de compresión, o ambas de tracción. Con ello, se descartan las tres primeras alternativas.

Además, aplicando condiciones de equilibrio al reticulado completo, se obtiene que la reacción vertical en el punto A es: $A_y = -F$. Si hacemos luego el DCL para el nodo A, vemos que la fuerza en la barra AB debe ser de tracción, para equilibrar fuerzas en la dirección y. Por lo tanto, la alternativa correcta es **e)**.

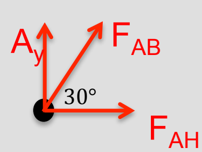
También se puede resolver aplicando el método de los nodos en A y calculando las fuerzas en las barras AB y AH.



Primero calculamos las reacciones en los apoyos A y G:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + G_y = F$$
$$\sum M_A = 0 : \quad 2d \cdot G_y = 4dF$$
$$\rightarrow \quad G_y = 2F \quad ; \quad A_y = -F$$

Y si vemos el DCL para el nodo A:



Entonces tenemos:

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + F_{AB} \sin 30 = 0$$
$$\rightarrow \quad F_{AB} = -2A_y = 2F \quad \text{(tracción)}$$
$$\sum F_x = 0 : \quad F_{AH} + F_{AB} \cos 30 = 0$$
$$\rightarrow \quad F_{AH} = -F_{AB} \cos 30 = -2F \cos 30 \quad \text{(compresión)}$$

Problema 4 [1 punto]

Una rueda de inercia $I = \frac{2}{3}mR^2$ gira con velocidad angular ω_0. En el instante $t = 0$ se aplican los frenos: una zapata hace contacto con el manto de la rueda con fuerza N, como muestra la Figura 4. El coeficiente de roce entre la zapata y la rueda es μ. Determine el ángulo total de rotación (medido en radianes) que da la rueda antes de detenerse.

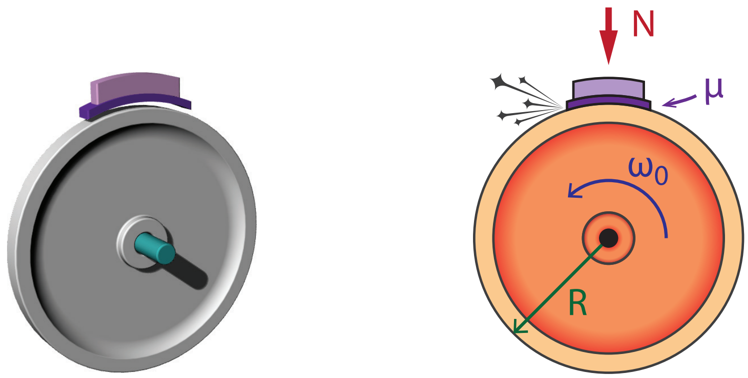


Figura 4: Rueda de inercia $I = \frac{2}{3}mR^2$ siendo frenada por una zapata de freno.

a) $\theta = \dfrac{1}{3}\dfrac{\omega_0^2 mR}{N\mu}$

b) $\theta = \dfrac{2}{3}\dfrac{\omega_0^2 mR}{N\mu}$

c) $\theta = \dfrac{1}{3}\dfrac{\omega_0 mR}{N\mu}$

d) $\theta = \dfrac{2}{3}\dfrac{\omega_0 mR}{N\mu}$

e) $\theta = \dfrac{2}{3}\dfrac{\omega_0^2 mR^2}{N\mu}$

Solución

La energía cinética inicial de la rueda es:

$$T_1 = \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

La energía disipada por el roce es:

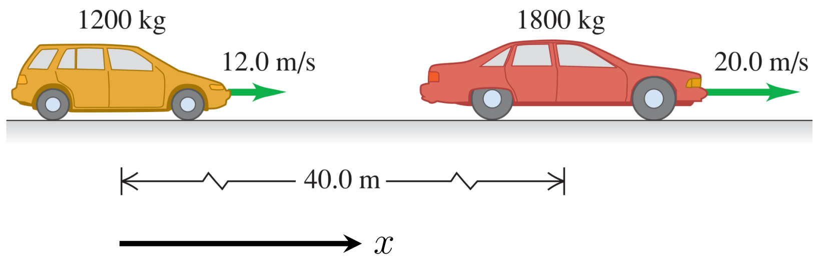
$$U'_{12} = -\left(f_r\right)\left(s\right) = -\left(\mu N\right)\left(R\theta\right) = -\mu N R\theta$$

La energía cinética final es cero (i.e. $T_2 = 0$). La ecuación de energía del sistema es:

$$\begin{aligned} T1 + U'_{12} &= T_2 \\ \frac{1}{2}I\omega_0^2 &= \mu N R\theta \\ \theta &= \frac{1}{2}I\omega_0^2\frac{1}{\mu N R} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR^2\right)\omega_0^2\frac{1}{\mu N R} = \frac{1}{3}\frac{\omega_0^2 mR}{N\mu} \end{aligned}$$

Problema 5 [1 punto]

Una camioneta de 1200 kg avanza en una autopista recta a 12.0 m/s. Otro auto, de masa 1800 kg y rapidez 20.0 m/s, tiene su centro de masa 40.0 m adelante del centro de masa de la camioneta (Figura 5). Determine la posición del centro de masa x_{CM} (medida desde la camioneta como se muestra en la figura) del sistema formado por los dos vehículos y la rapidez del centro de masa del sistema v_{CM}.



a) $x_{\mathrm{CM}} = 24$ m y $v_{\mathrm{CM}} = 84/5$ m/s

b) $x_{\mathrm{CM}} = 20$ m y $v_{\mathrm{CM}} = 16$ m/s

c) $x_{\mathrm{CM}} = 16$ m y $v_{\mathrm{CM}} = 16$ m/s

d) $x_{\mathrm{CM}} = 22$ m y $v_{\mathrm{CM}} = 84/5$ m/s

e) $x_{\mathrm{CM}} = 18$ m y $v_{\mathrm{CM}} = 18$ m/s

Solución

El centro de masa del sistema completo es:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \overline{x}_1 + m_2 \overline{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1200)\,(0) + (1800)\,(40)}{1200 + 1800}$$
$$x_{CM} = 24\,m$$

La velocidad del centro de masa es:

$$v_{CM} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1200)\,(12) + (1800)\,(20)}{1200 + 1800} = \frac{(12)\,(12) + (18)\,(20)}{30}$$
$$v_{CM} = \frac{84}{5}\,m/s$$

Problema 6 [1 punto]

Un bloque de 100 Kg se encuentra en reposo en una superficie sin roce como muestra la Figura 5. En $t = 0$ se comienza aplicar una fuerza $P(t)$ como se muestra en el gráfico. Determine la velocidad $v(3\text{s})$ que alcanza el bloque en $t = 3s$.

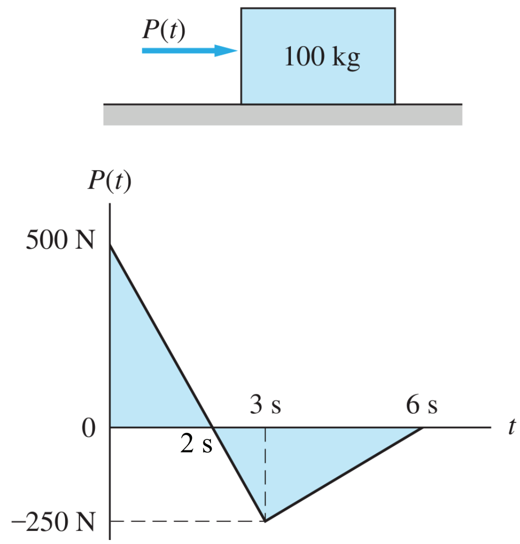


Figura 5: Bloque de 100 Kg sometido a una fuerza $P(t)$.

a) $v(3\text{s}) = 6,25$ m/s

b) $v(3\text{s}) = 3,75$ m/s

c) $v(3\text{s}) = 22,5$ m/s

d) $v(3\text{s}) = 7,5$ m/s

e) $v(3\text{s}) = 2,75$ m/s

Solución

El principio de impulso–momentum dice: $m\,v_1 + \int f\,\mathrm{d}t = m\,v_2$ En este caso $v_1 = 0$, con lo que:

$$(m)\,(0) + \int_0^{3s} f\,\mathrm{d}t = (m)\,(v_{t=3s})$$

$$\int_0^{2s} f\,\mathrm{d}t + \int_{2s}^{3s} f\,\mathrm{d}t = (m)\,(v_{t=3s})$$

$$\frac{(500)\,(2)}{2} + \frac{(-250)\,(1)}{2} = (m)\,(v_{t=3s})$$

$$\frac{750}{2} = (100)\,(v_{t=3s})$$

Finalmente:

$$v\,(3s) = 3{,}75\,m/s$$

Problema 7 [1 punto]

Un automóvil circula por una carretera curva de radio R con rapidez constante (ver Figura 6). Si el coeficiente de roce estático entre las ruedas y el asfalto es μ_e; ¿Cuál es la rapidez máxima que el automóvil puede tener para que se mueva por la curva sin resbalar?

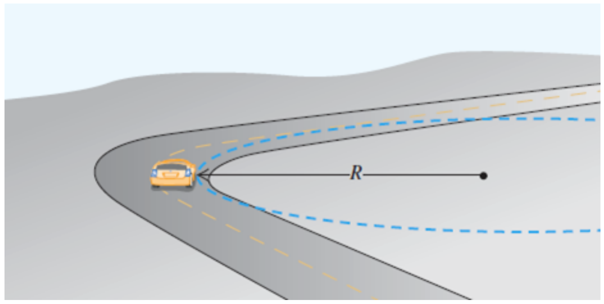


Figura 6: Automóvil en curva circular de radio R.

a) $v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_e}}$

b) $v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_e g R}$

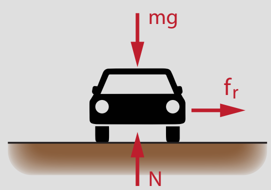
c) $v_{\text{máx}} = \mu_e \sqrt{gR}$

d) $v_{\text{máx}} = \mu_e^2 \sqrt{gR}$

e) $v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{gR^2}{\mu_e}}$

Solución

Comenzamos haciendo un DCL para identificar las fuerzas que actúan sobre el vehículo:



La aceleración centrípeta es: $a_c = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$ La máxima aceleración centrípeta que se puede desarrollar esta dada por la fricción de los neumáticos:

$$f_r = (m)\,[a_c]_{\text{máx}}$$
$$(\mu_e)\,(N) = m\frac{v_{\text{máx}}^2}{R}$$
$$(\mu_e)\,(mg) = m\frac{v_{\text{máx}}^2}{R}$$

Finalmente:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_e g R}$$

Problema 8 [1 punto]

Un cohete que ha sido lanzado verticalmente es monitoreado por una estación de radar como muestra la Figura 7. En el instante mostrado se conoce el valor de θ, r, y $\dot{\theta}$. Calcule la velocidad del cohete.
Ayuda: Para encontrar $\dot{r}$ determine primero $r(s, \theta)$.

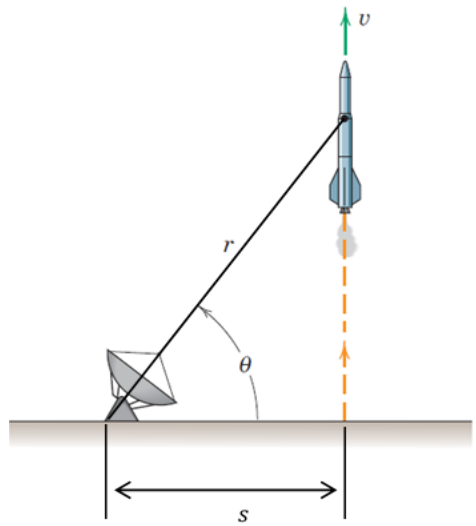


Figura 7: Cohete monitoreado por un radar.

a) $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\left(\frac{r}{s}\cos\theta\hat{r} + \hat{\theta}\right)$

b) $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\left(\frac{r}{s}\sin\theta\hat{r} + \hat{\theta}\right)$

c) $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\left(-\frac{r}{s}\cos\theta\hat{r} + \hat{\theta}\right)$

d) $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\left(-\frac{r}{s}\sin\theta\hat{r} + \hat{\theta}\right)$

e) $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\left(\frac{s}{r}\cos\theta\hat{r} + \hat{\theta}\right)$

Solución

Sabemos que la velocidad en coordenadas polares es: $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. Dada la geometría del problema se sabe que: $\cos\theta = \frac{s}{r}$. Tomando la derivada temporal de dicha expresión:

$$(-\sin\theta)\,\dot{\theta} = \left(-\frac{s}{r^2}\right)\dot{r}$$

$$\dot{r} = \frac{r^2\dot{\theta}}{s}\sin\theta$$

, lo que reemplazado en la expresión para la velocidad resulta:

$$\mathbf{v} = \frac{r^2\dot{\theta}}{s}\sin\theta\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\left[\frac{r}{s}\sin\theta\hat{r} + \hat{\theta}\right]$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Segundo Semestre 2017

Nombre: ____

RUT: ____ N lista: _________

Examen

Duración total: 180 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación
   Adulterar el acta de asistencia
   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas
   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas específicas a las preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.
2. Al finaizar la prueba no es necesario entregar las hojas con los enunciados, a menos que haya escrito parte de la solución ahí

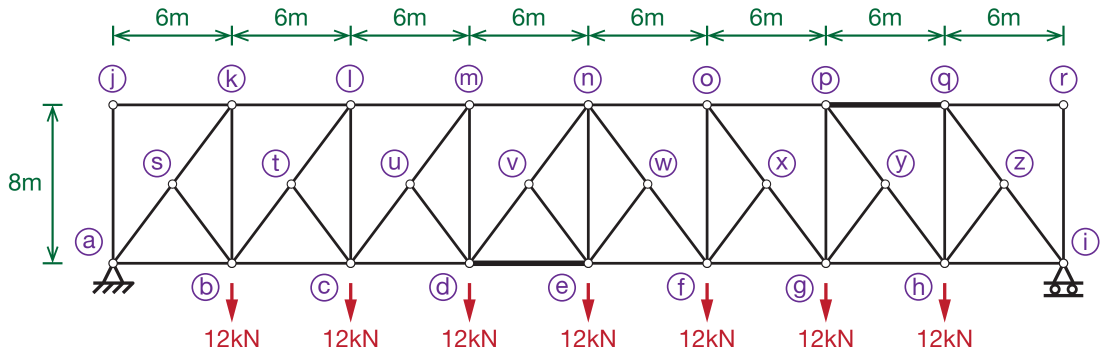
Nombre: ______________________________

RUT: ______________________________

N lista: ________

Problema 1 [6 puntos]

El reticulado (armadura) de la Figura 1 es estáticamente determinado.



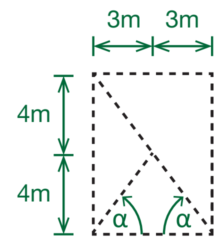


Figura 1: Puente de reticulado.

Nota: El reticulado (armadura) está compuesto por 8 bahías idénticas de $6m \times 8m$, donde se sabe que el ángulo de las diagonales α es tal que; $\cos(\alpha) = 3/5$, $\sin(\alpha) = 4/5$, y $\tan(\alpha) = 4/3$.

El apoyo en **a** es una *rótula (pivote) fija*: restringe translaciones y permite rotación.
El apoyo en **i** es una *rótula (pivote) deslizante*: restringe translación en "y". Permite traslación en "x" y rotación.

Determine:

a) Las reacciones (de vínculo/soporte/apoyo) en los nodos (nudos o uniones) "**a**" e "**i**". [1 punto]

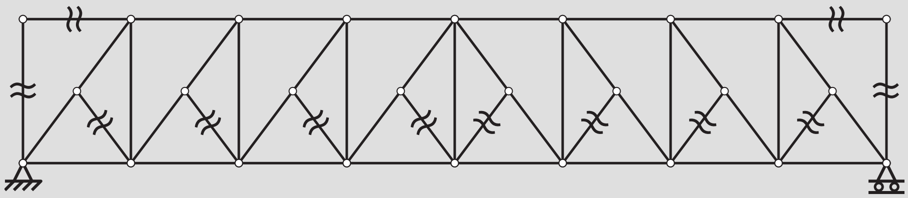
b) Todas las barras (miembros) en las que la fuerza (axial) es cero. **Indíquelas claramente en el diagrama que se entrega en la hoja de respuestas**. [0.8 punto]
Siga el ejemplo al costado del diagrama "en blanco".

c) La magnitud y sentido (indicar si es compresión o tensión) de la fuerza axial (interna) en la barra $\overline{de}$. **Use para ello el <u>método de las secciones</u>**. [2 puntos]

d) La magnitud y sentido (indicar si es compresión o tensión) de la fuerza axial (interna) en la barra $\overline{pq}$. **Use para ello el <u>método de los nodos</u>**. [2.2 puntos]
Nota: No use resultados obtenidos por el "método de las secciones".

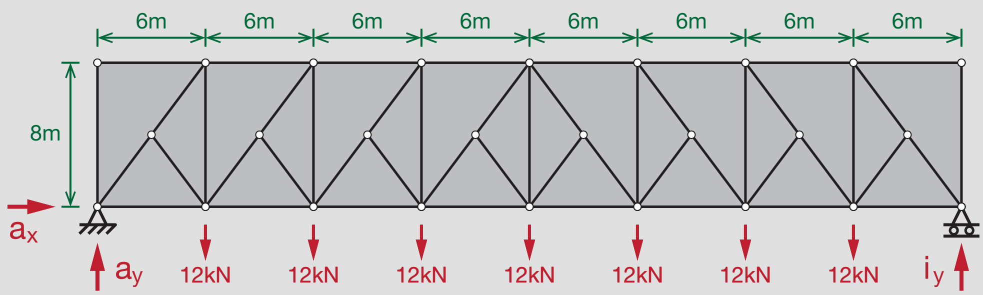
Solución

Item (a)
Hay un total de 12 barras con fuerza cero. El diagrama de solución es el siguiente:



Identifica las 4 barras de las esquinas (nodos en "L" sin fuerzas externas) [**0.4 puntos**].
Identifica las 8 barras internas (nodos en "T" sin fuerzas externas) [**0.4 puntos**].
Encontrar conjuntos incompletos de barras reduce el puntaje proporcionalmente.

Item (b)
Haciendo un DCL para el reticulado como un cuerpo:



Las reacciones se encuentran formulando el equilibrio global:

$$\sum f_x : \quad a_x = 0 \qquad ; \qquad \sum f_y : \quad a_y + i_y - (7)\,(12) = 0$$

La tercera ecuación puede ser $\sum m_z\,(\mathbf{a})$, $\sum m_z\,(\mathbf{i})$, o bien el uso de la simetría del problema:

$$\sum m_z\,(\mathbf{a}) : \quad -(12)\,(6) - (12)\,(12) - (18)\,(12) - (24)\,(12) - (30)\,(12) - (36)\,(12) - (40)\,(12) + (48)\,(i_y) = 0$$

$$\sum m_z\,(\mathbf{i}) : \quad -(48)\,(a_y) + (12)\,(6) + (12)\,(12) + (18)\,(12) + (24)\,(12) + (30)\,(12) + (36)\,(12) + (40)\,(12) = 0$$

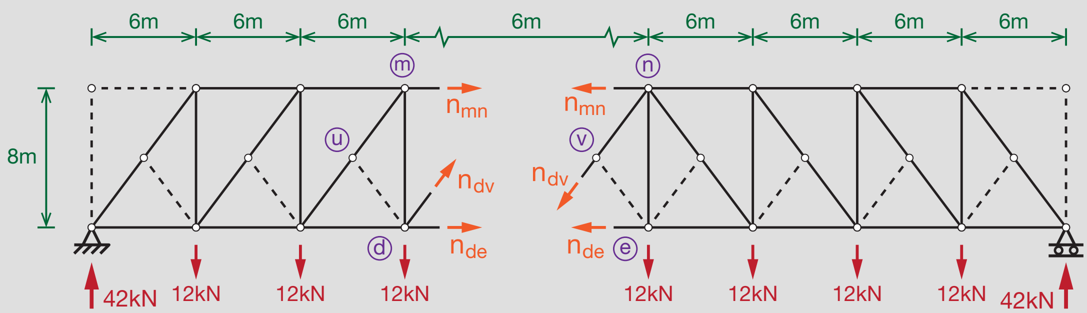
$$\text{simetría:} \quad a_y = i_y$$

La correcta formulación del equilibrio en cualquiera de sus formas [**3** $\times$ **0.2 puntos**].
La solución del sistema resulta en:

$$a_x = 0 \qquad ; \qquad a_y = 42\,kN \qquad ; \qquad i_y = 42\,kN$$

La correcta solución del sistema [**0.4 puntos**], donde olvidar las unidades resta [**-0.1 puntos**].

Item (c)
Se procede a tomar una sección (o corte) asegurándose de cortar 3 barras o menos, y que incluya la barra $\overline{de}$: sólo hay una sección posible como indica la siguiente figura:



Tomar una sección adecuada para la solución del problema [**0.4 puntos**].
Se puede formular el equilibrio con la mitad izquierda o derecha:

Mitad izquierda	**Mitad derecha**
$\sum f_x: \quad n_{mn} + \frac{3}{5}n_{dv} + n_{de} = 0$ $\sum f_y: \quad 42 - 12 - 12 - 12 + \frac{4}{5}n_{dv} = 0$	$\sum f_x: \quad -n_{mn} - \frac{3}{5}n_{dv} - n_{de} = 0$ $\sum f_y: \quad -\frac{4}{5}n_{dv} - 12 - 12 - 12 - 12 + 42 = 0$
Opciones de $\sum m_z$	Opciones de $\sum m_z$
$\sum m_z\,(\mathbf{d}): \quad -(42)(18) + (12)(12) + \ldots$ $+ (12)(6) - n_{mn}(8) = 0$ $\sum m_z\,(\mathbf{n}): \quad -(42)(24) + (12)(18) + \ldots$ $+ (12)(12) + (12)(6) + n_{de}(8) = 0$	$\sum m_z\,(\mathbf{n}): \quad -n_{de}(8) - (12)(6) - (12)(12)$ $-(12)(18) + (42)(24) = 0$ $\sum m_z\,(\mathbf{d}): \quad n_{mn}(8) - (12)(6) - (12)(12)$ $-(12)(18) - (12)(24) + (42)(30) = 0$

La correcta formulación del equilibrio en cualquiera de sus formas [**3 × 0.4 puntos**].
La solución del sistema resulta en:

$$n_{de} = 72\,kN \qquad ; \qquad n_{dv} = -7{,}5\,kN \qquad ; \qquad n_{mn} = -67{,}5\,kN$$

Es decir, la magnitud de la fuerza axial en la barra $\overline{de}$ es de $72\,kN$ en ***tensión***.
La magnitud correcta son [**0.2 puntos**], el signo (compresión o tensión) son [**0.2 puntos**], la falta de unidades resta [**-0.1 puntos**].

Item (d)
Hay sólo un camino que lleva a n_{pq} en pocos pasos: tomar equilibrio en el nodo **i**, y luego en el nodo **q**. Para ello es necesario saber que $n_{iz} = n_{qz}$ por ser un nodo en "T" (nodo **z**), y que $n_{ir} = 0$ por tener un nodo en "L" (nodo **r**). [**2 × 0.2 puntos**] Formulando el equilibrio en el nodo **i**:

$$\sum f_x: \quad -n_{hi} - \frac{3}{5}n_{iz} = 0 \qquad ; \qquad \sum f_y: \quad \frac{4}{5}n_{iz} + 42 = 0$$

Con ello:

$$n_{iz} = -\frac{105}{2} = -52{,}5\,kN \qquad ; \qquad n_{hi} = \frac{63}{2} = 31{,}5\,kN$$

La correcta formulación del equilibrio [**0.6 puntos**]. La correcta solución del sistema [**0.2 puntos**].
Formulando el equilibrio en el nodo **q**:

$$\sum f_x: \quad -n_{pq} + \frac{3}{5}n_{qz} = -n_{pq} + \frac{3}{5}n_{iz} = 0 \qquad ; \qquad \sum f_y: \quad -n_{hq} - \frac{4}{5}n_{qz} = -n_{hq} - \frac{4}{5}n_{iz} = 0$$

Con ello:

$$n_{pq} = -\frac{63}{2} = -31{,}5\,kN \quad \leftarrow \text{compresión}$$

La correcta formulación del equilibrio [**0.6 puntos**]. La correcta solución del sistema (magnitud de fuerza axial) [**0.2 puntos**]. Si determina el signo *compresión/tensión* por cualquier metodología [**0.2 puntos**]. La falta de unidades resta [**-0.1 puntos**].

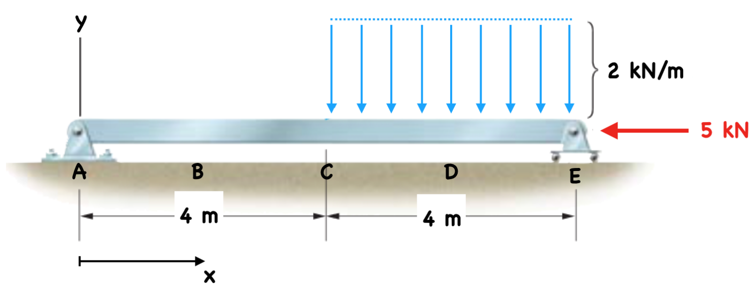
Nombre: ____________________________________

RUT: ______________________________________

N lista: _________

Problema 2 [6 puntos]

Se tiene una viga de 8 m de longitud y de masa despreciable sostenida en el punto A por un pivote que no restringe la rotación y en el punto E por un soporte que puede rodar libremente sobre la superficie horizontal. Se aplica una fuerza distribuida uniforme (de densidad constante) entre C y E. También, en el punto E se aplica una fuerza externa horizontal de magnitud 5 kN, como mostrado en la figura. El punto D se encuentra a $x_D = 6$ m, es decir a la mitad entre C y E.



a) Reduzca la fuerza distribuida a una sola fuerza resultante, indicando la magnitud y posición de ésta.

b) Determine todas las reacciones en los soportes A y E.

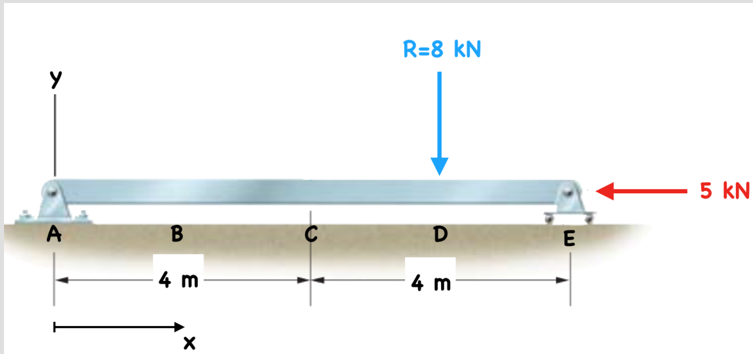
c) Determine los esfuerzos internos (fuerza normal, fuerza de corte y momento flector) en el punto D.

d) Determine la fuerza de corte $V(x)$ para la viga en función de la posición x desde A hasta E. Indique el máximo que alcanza la magnitud de la fuerza de corte, así como el valor de x correspondiente. Indique también si la fuerza de corte llega a ser cero, y en caso afirmativo determine el(los) valor(es) de x correspondiente(s).

Nota: utilice la convención vista en clase al reportar los signos de los esfuerzos internos.

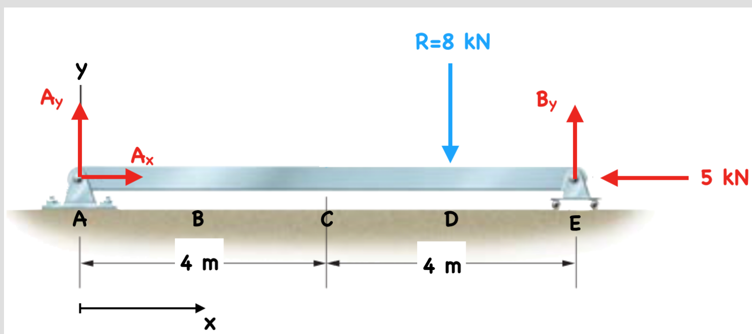
Solución

(a) **(1 punto)** La magnitud R de la fuerza resultante es el área bajo la curva, es decir $R = 2\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}(4\ \text{m})$=8 kN. Su posición es claramente en la mitad, es decir arriba del punto D ($x = 6$ m).



(0.5 pts por la magnitud y 0.5 pts por la posición; no es necesario que el estudiante demuestre ninguno de los dos resultados)

(b) **(1.5 puntos)** El pivote puede hacer una fuerza vertical (A_y) y otra horizontal (A_x), mientras que el soporte rodante sólo una fuerza horizontal hacia arriba (B_y):



(0.2 pts por considerar cada una de las 3 fuerzas en los soportes; puede haber considerado A_y y A_x en la dirección negativa, pero B_y tiene que ir hacia arriba para obtener puntaje)

Balance de fuerzas en x:

$$\Sigma F_x = A_x - 5 = 0 \rightarrow A_x = 5\ \text{kN}$$

Balance de momentos en z respecto al punto B:

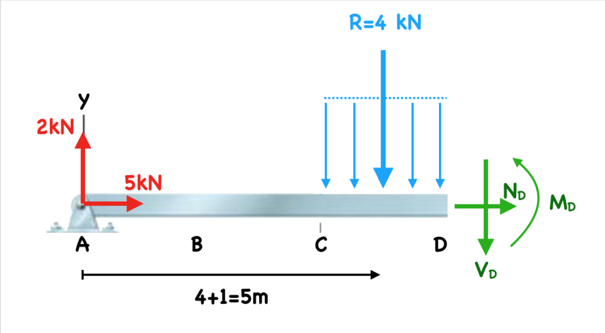
$$\Sigma M_B = -A_y(8) + 8(2) = 0 \rightarrow A_y = 2\ \text{kN}$$

Balance de fuerzas en y:

$$\Sigma F_y = 2 + -8 + B_y = 0 \rightarrow B_y = 6\ \text{kN}$$

(Para cada fuerza: 0.2 pts por plantear el equilibrio correctamente y 0.1 pts adicionales por valor numérico correcto)

(c)**(1.75 puntos)** Pedazo izquierdo: Cortamos la barra en el punto D y nos quedamos con el trozo izquierdo. Dibujamos los esfuerzos internos siguiendo la convención, notando que la resultante debido al trozo de fuerza distribuida tiene magnitud de $R = 2\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}(2\ \text{m})$=4 kN y que su posición debe ser a la mitad entre C y D, es decir en $x = 4 + 1 = 5$ m:



(Para cada esfuerzo interno: 0.15 pts por considerarlo en la dirección dada por la convención)

Balance de fuerzas en x:

$$\Sigma F_x = 5 + N_D = 0 \rightarrow N_D = -5 \text{ kN}$$

Balance de fuerzas en y:

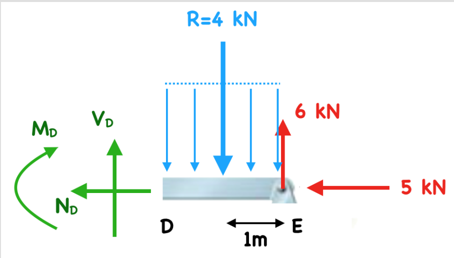
$$\Sigma F_y = 2 + -4 - V_D = 0 \rightarrow V_D = -2 \text{ kN}$$

Balance de momentos en z respecto al punto D:

$$\Sigma M_D = M_D + 4(1) - 2(6) = 0 \rightarrow M_D = 8 \text{ kNm}$$

(Para cada esfuerzo interno: 0.3 pts por plantear equilibrio correctamente, y 0.1 pts adicionales por valor numérico correcto)

Pedazo derecho: Se puede obtener el mismo resultado cortando la barra en el mismo punto D y trabajando con el pedazo derecho. Dibujamos los esfuerzos internos siguiendo la convención, notando que la resultante debido al trozo de fuerza distribuida tiene magnitud de $R = 2\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$(2 m)=4 kN y que su posición debe ser a la mitad entre D y E, es decir en $x = 4 + 1 = 7$ m (a 1 m a la izquierda de E):



Balance de fuerzas en x:

$$\Sigma F_x = -N_D - 5 = 0 \rightarrow N_D = -5 \text{ kN}$$

Balance de fuerzas en y:

$$\Sigma F_y = V_D - 4 + 6 = 0 \rightarrow V_D = -2 \text{ kN}$$

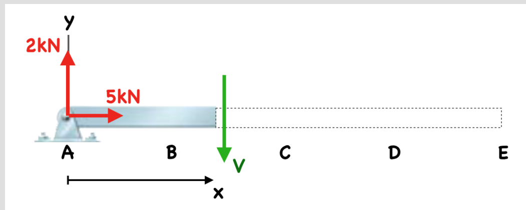
Balance de momentos en z respecto al punto D:

$$\Sigma M_D = -M_D - 4(1) + 6(2) = 0 \rightarrow M_D = 8 \text{ kNm}$$

(d) **(1.75 puntos)** Para graficar $V(x)$ necesitamos considerar dos segmentos: $0 < x < 4$ (entre A y C) y $4 < x < 8$ (entre C y E). Optamos por utilizar el pedazo izquierdo al cortar, aunque también se podría utilizar el derecho.

(0.35 pts por considerar los dos segmentos correctos)

Segmento $0 < x < 4$: cortamos entre A y C y tomamos el pedazo izquierdo, dibujando la fuerza de corte de acuerdo a la convención:



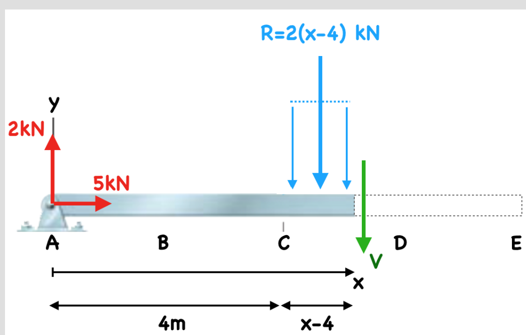
Balance de fuerzas en y:

$$\Sigma F_y = 2 - V(x) = 0 \to V(x) = 2 \text{ kN (constante)}$$

(0.2 pts por llegar a que $V(x)$ es constante para este tramo, y otros 0.2 pts por el valor numérico correcto)

Nota: se puede llegar al mismo resultado utilizando la realación $\frac{dV(x)}{dx} = -w(x)$ y dándose cuenta que, como $w(x) = 0$ en este tramo, $V(x)$ debe ser constante e igual al valor que tiene justo a la derecha de A, es decir 2 kN.

Segmento $4 < x < 8$: cortamos entre C y E y tomamos el pedazo izquierdo, dibujando la fuerza de corte de acuerdo a la convención. El fragmento de la fuerza distribuida que queda al cortar tiene una resultante igual al área bajo la curva, es decir $R = 2(x - 4)$:



Balance de fuerzas en y:

$$\Sigma F_y = 2 - 2(x-4) - V(x) = 0 \to V(x) = 10 - 2x \text{ kN}$$

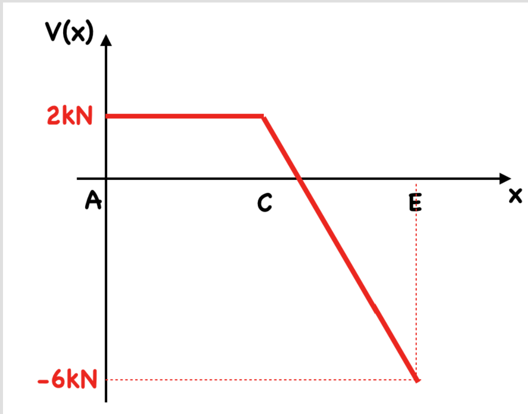
(0.2 pts por llegar a una línea con la pendiente correcta, y otros 0.2 pts por tener toda la expresión correcta para este segmento)

Nota: se puede llegar al mismo resultado utilizando la relación $\frac{dV(x)}{dx} = -w(x)$. Puesto que $w(x) = 2$, separando las variables e integrando de D a x nos da que

$$\begin{aligned} V(x) - V_D &= -\int_D^x w(x)d(x) \\ V(x) - 2 &= -\int_D^x 2dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(x) - 2 &= -2x + 2(4) \\
\longrightarrow V(x) &= 10 - 2x
\end{aligned}
$$

Notamos que $V(x = 4) = 2$ kN y que $V(x = 8) = -6$ kN, por lo que la curva de $V(x)$ se ve de la siguiente forma:



Por ende, la magnitud máxima que toma $V(x)$ en la barra es en el punto E (x=8 m), en donde $|V| = 6$ kN. La función $V(x)$ cruza una vez por cero, para $10 - 2x = 0$ es decir $x = 5$ m.

(0.15 pts por magnitud máxima correcta, 0.15 pts por posición de magnitud máxima correcta, 0.15 pts por encontrar que función cruza cero una vez, y 0.15 pts por valor correcto de x en el que cruza cero. Si hay error de arrastre del (b) pero procedimiento correcto se otorga la mitad de cada puntaje)