Clase #21

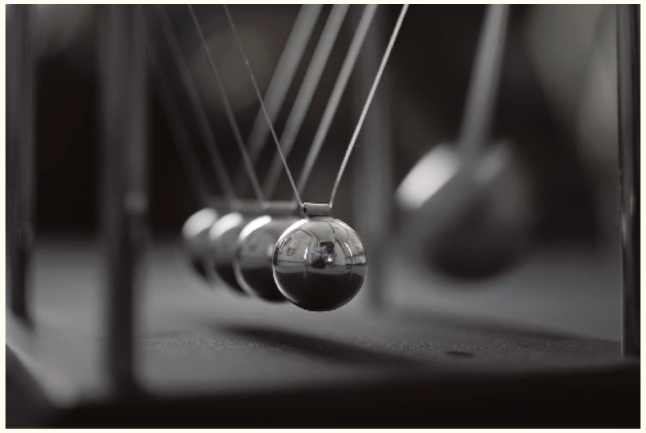
29-10-2018

Momento e impulso,
Cuerpo Rígido

Estática y Dinámica
FIS1513

Anuncios

- La i3 es *MAÑANA*
  - Entra “Trabajo y Energía” (con un poco más de énfasis en la materia no evaluada en la i2, que es potencia y movimiento armónico simple), y todo el capítulo de “Impulso y Momento”.
    - Noten que las secciones 15.5-15.8 del Hibbeler no entran
  - Tendré horario de consulta hoy lunes de 14.30 a 16.00 en mi oficina (Facultad de Física, arriba de los laboratorios docentes)
- El periodo de recorrecciones de la i2 se extiende hasta (e incluyendo) el miércoles 31 de Octubre
- Hoy haremos un poco de repaso del material de la i3 con las cliqueras y con los experimentos, y comenzaremos materia nueva también



Preguntas con cliqueras

¡Momento Memorable!

Hemos completado un hito en el curso: nos graduamos con **partículas**, y ahora vamos con **cuerpos rígidos**

Introducción

Hasta ahora hemos estado modelando los cuerpos con los que hemos estado trabajando como si fueran partículas, es decir como puntos que no tienen volumen

Esto es una muy buena aproximación en muchos casos, pero no siempre

En general, ¿cuándo no se puede modelar un objeto como una partícula?

¡Cuando hay rotación!

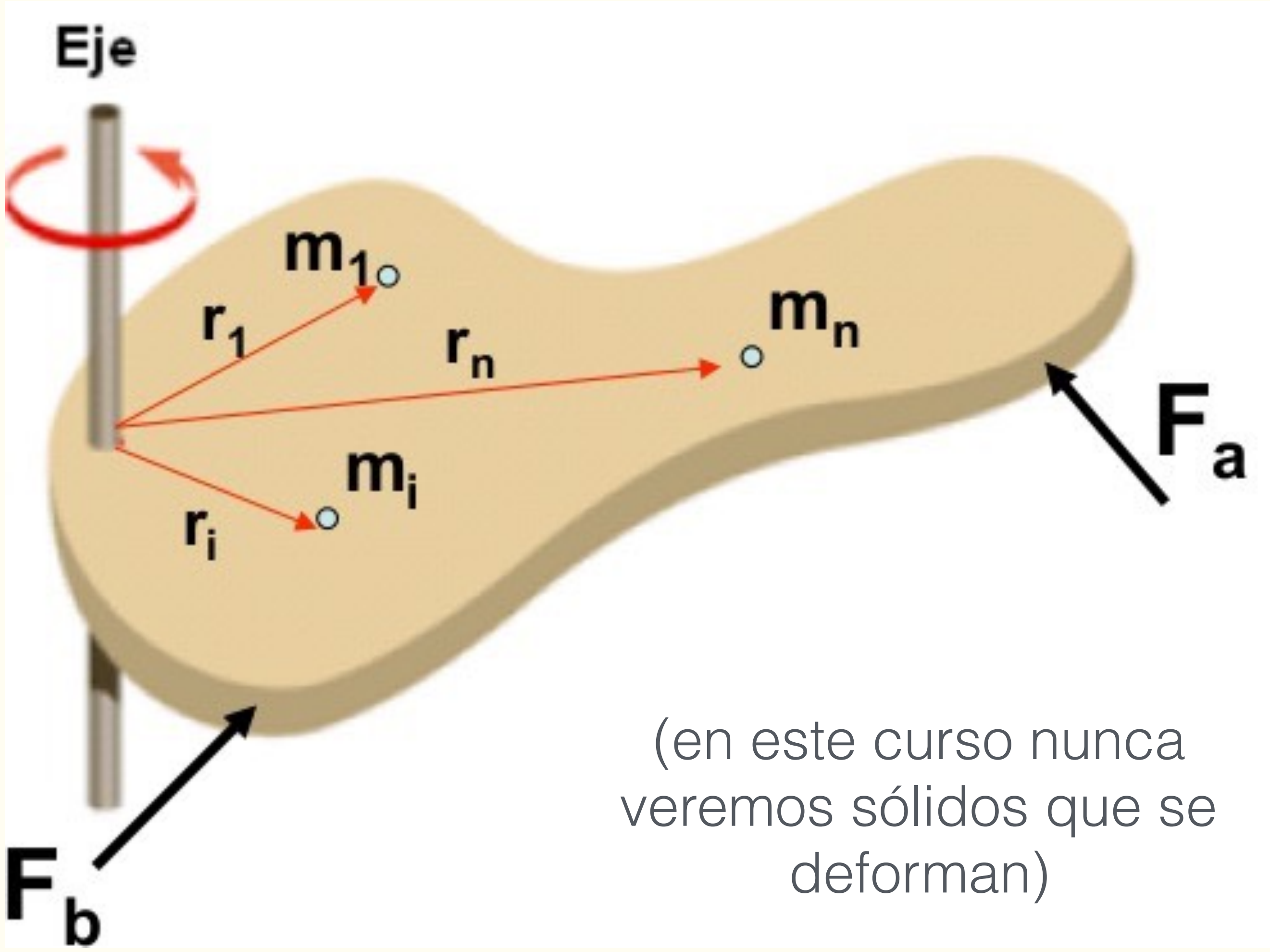
(una partícula no puede rotar ya que no tiene volumen)

Definición: Cuerpo Rígido

Primero hay que definir bien lo que entendemos por cuerpo rígido:

Es un sistema de muchas partículas, pero uno donde la distancia entre cada par de ellas se mantiene constante.

En otras palabras, **es un sólido que no se deforma,** independientemente de las fuerzas que se apliquen sobre él



(en este curso nunca veremos sólidos que se deforman)

Vamos a hablar mucho de **rotación** en este capítulo. Pero primero necesitamos hablar de un concepto que utilizaremos al lidiar con cuerpos rígidos

Centro de Masa

Center of Gravity and Centroid

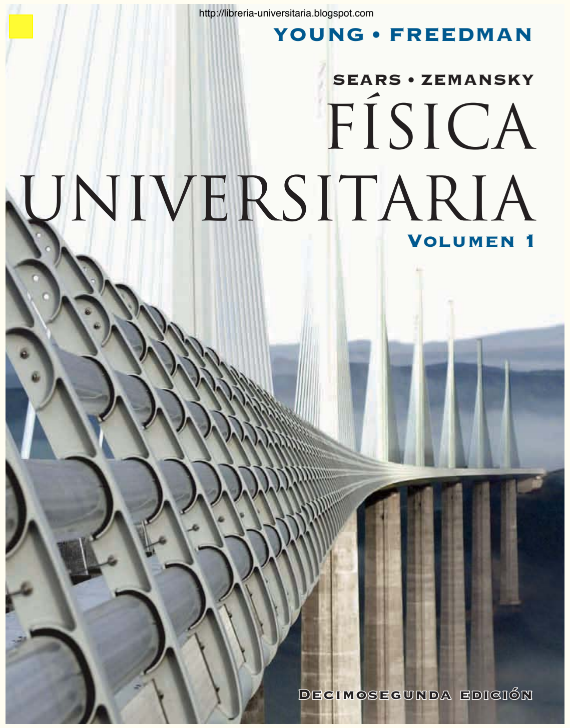
9

CHAPTER OBJECTIVES

- To discuss the concept of the center of gravity, center of mass, and the centroid.
- To show how to determine the location of the center of gravity and centroid for a system of discrete particles and a body of arbitrary shape.
- To use the theorems of Pappus and Guldinus for finding the surface area and volume for a body having axial symmetry.

When a water tank is designed, it is important to be able to determine its center of gravity, calculate its volume and surface area, and reduce three-dimensional distributed loadings caused by the water pressure to their resultants. All of these topics are discussed in this chapter.

Sección 9.1 del Hibbeler y 8.5 del Young



8.5 Centro de masa

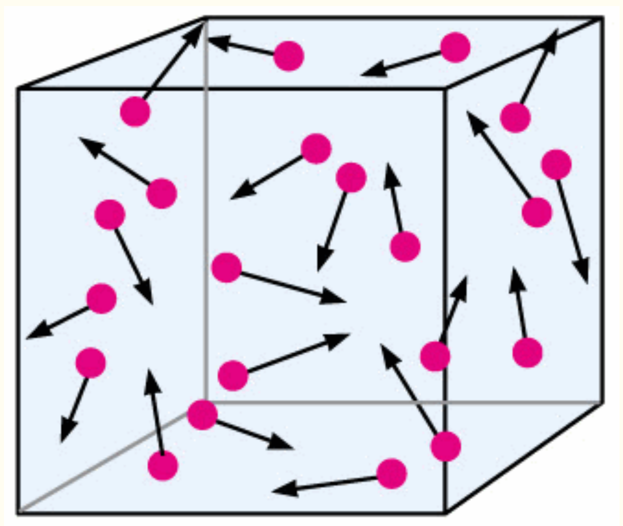
Podemos replantear el principio de conservación del momento lineal en una forma útil usando el concepto de **centro de masa**. Supongamos que tenemos varias partículas con masas m_1, m_2, etcétera. Las coordenadas de m_1 son (x_1, y_1), las de m_2, (x_2, y_2), y así sucesivamente. Definimos el centro de masa del sistema como el punto con coordenadas (x_{cm}, y_{cm}) dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Recordatorio

Ya hemos definido el concepto de “sistema de partículas”. Supongamos que tenemos uno conformado por N partículas, cada una con masa m_i y vector posición $\mathbf{r}_i$, velocidad $\mathbf{v}_i$ y aceleración $\mathbf{a}_i$

las partículas pueden moverse independientemente unas de otra como en un gas, o formar un sólido cualquiera



Habíamos visto que, para cualquier sistema de partículas, se cumple esta ecuación:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt}$$

Lo que hemos hecho hasta ahora en el curso es sacar provecho de que, cuando la suma de fuerzas externas es cero, el momento total del sistema se conserva. Pero podemos hacer más….

Recordatorio

Ahora quisiéramos re-escribir esta ecuación de forma que aparezca una aceleración que caracterice el sistema entero:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N\right)$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N$$

Multiplicando arriba y abajo por la masa total nos queda:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \underbrace{\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_N\right)}_{\text{masa total}} \boxed{\left(\frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}\right)}$$

¿qué es esto?

Definición

Vamos a definir un punto llamado "centro de masa" del sistema y que está dado por:

$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M_{\mathrm{total}}}}$$

es decir: $$\begin{cases} x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} \\ y_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} \end{cases}$$

(y lo mismo para z)

¿Qué es entonces el centro de masa (en palabras)?

El centro de masa es la posición promedio ponderada por la masa de las partículas

¿Para qué sirve?

¿Qué nos queda entonces para la 2da Ley de Newton?

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_N\right) \boxed{\left(\frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} \right)}$$

masa total

¡esto es simplemente la aceleración del centro de masa!

Y nos queda:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M_{\text{total}}\vec{a}_{\text{CM}}}$$

La segunda ley de Newton se puede aplicar a todo el sistema como si fuera una sola partícula si consideramos su centro de masa

¿Para qué sirve?

También podemos utilizar el centro de masa para la definición de momento:

Dijimos que: $$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

Por lo que: $$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

Y por ende: $$M_{\mathrm{total}}\vec{v}_{\mathrm{CM}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \vec{p}_{\mathrm{total}}$$

es decir: $$\boxed{M_{\mathrm{total}}\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \vec{p}_{\mathrm{total}}}$$

¡El momento total de un sistema es igual a la masa total por la velocidad del centro de masa!

O, en otras palabras, la definición de momento se puede aplicar a todo el sistema considerando su centro de masa

Resumiendo

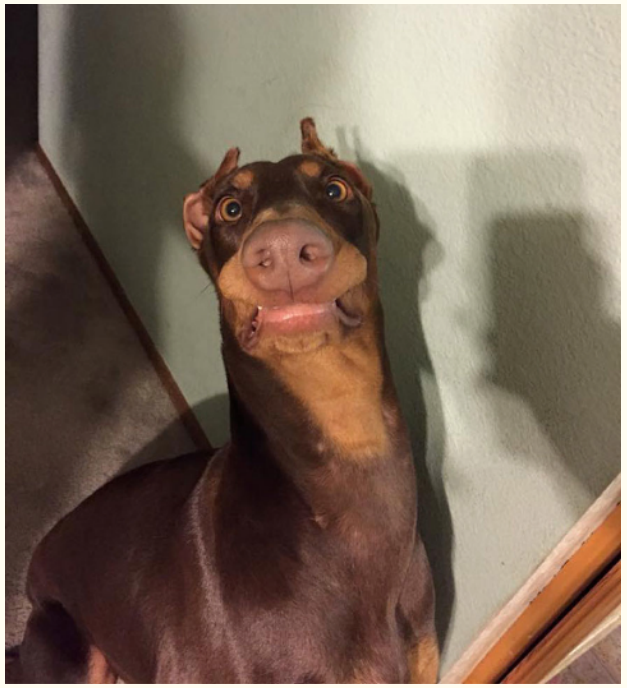
Para cualquier sistema de partículas:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

$$\vec{p}_{\text{total}} = M_{\text{total}}\vec{v}_{\text{CM}}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M_{\text{total}}\vec{a}_{\text{CM}}$$

(y por ende $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{total}}}{dt}$)



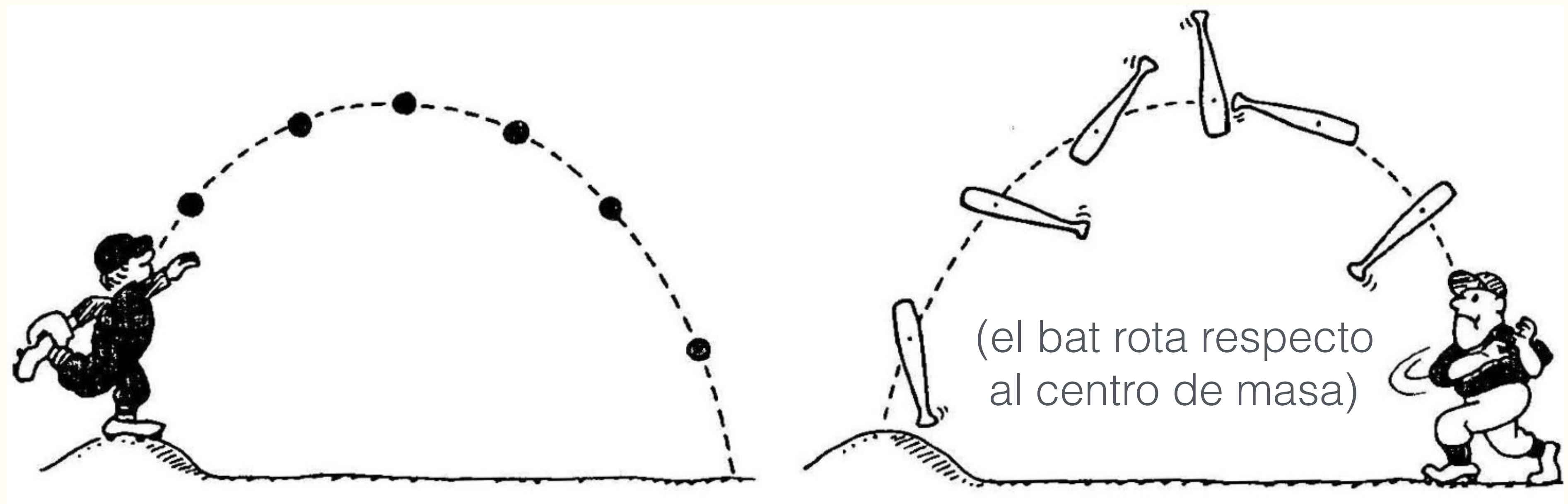
Cuando fuerzas externas actúan sobre un cuerpo o conjunto de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto.

Este resultado puede sonar papas, pero en realidad es la base para todo lo que hemos hecho a lo largo del semestre. Si no fuera por esto no hubiéramos podido considerar el movimiento de cuerpos rígidos (autos, pelotas de tenis…. etc) como partículas.

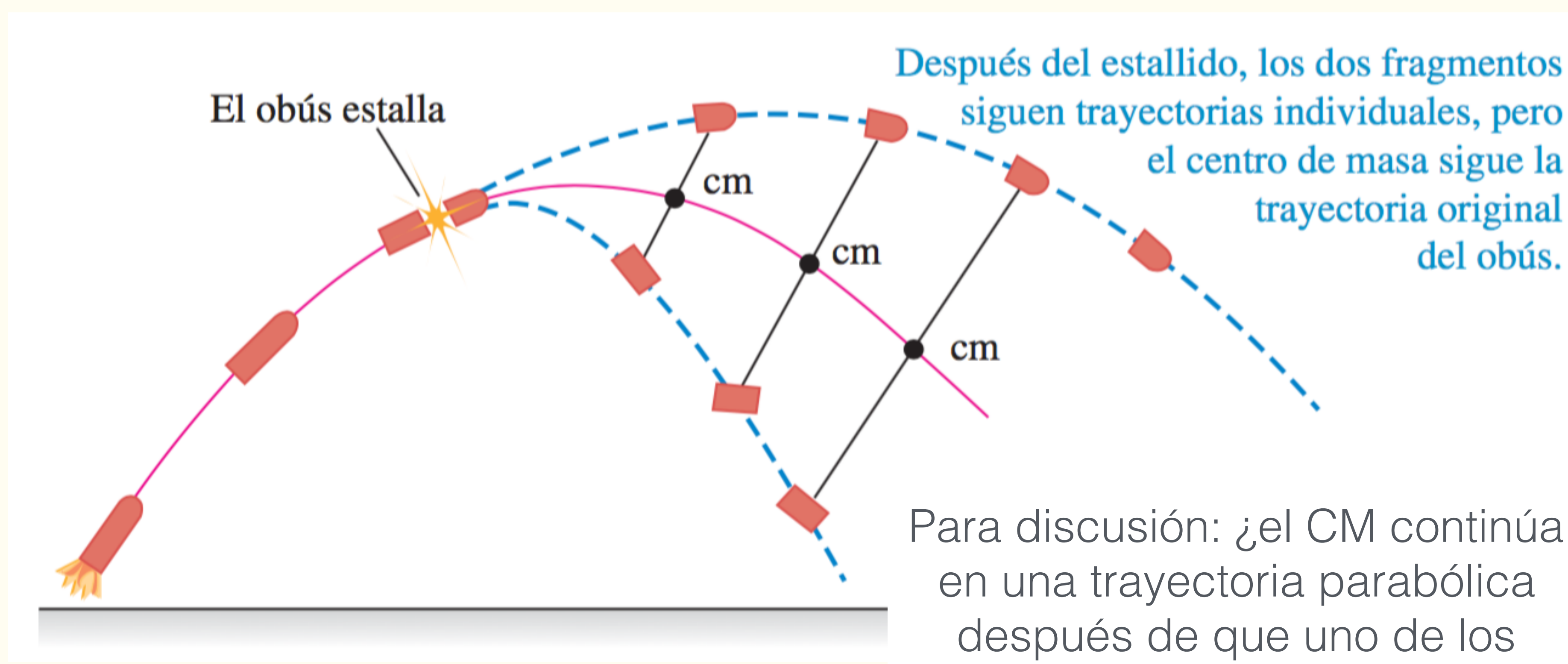
Ejemplos Prácticos

Dos ejemplos de lo que significa este principio en la vida práctica:

Un bat de beisbol que se tira bajo la acción de la gravedad va a describir un movimiento "tambaleante", pero en realidad su centro de masa describe una parábola, como si fuera una sola partícula.



Si un obús estalla en dos partes en el aire, ninguna de las dos partes describe una parábola. Sin embargo, su centro de masa sí, tanto antes como después de la explosión.

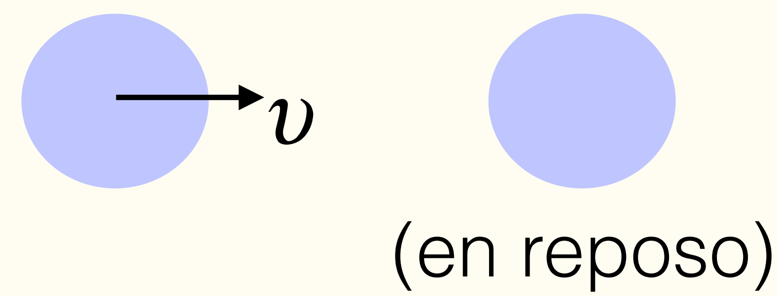


Para discusión: ¿el CM continúa en una trayectoria parabólica después de que uno de los fragmentos pega en el suelo?

Experimento #1

Consideremos una colisión **elástica** entre **dos pelotas idénticas**, una con velocidad inicial v y la otra en reposo:

Antes de la colisión



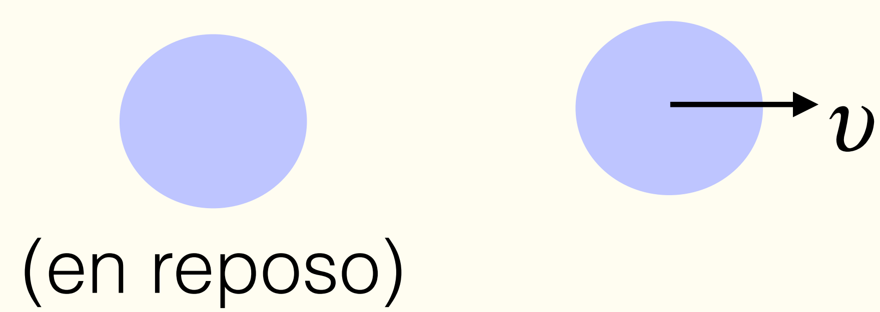
¿Cuáles son las velocidades finales de las pelotas?

Haciendo los cálculos llegamos a:

$$v_{1f} = 0 \quad \text{y} \quad v_{2f} = v_{1i}$$

En otras palabras, la primera bola se queda inmóvil y la segunda adquiere todo su momento

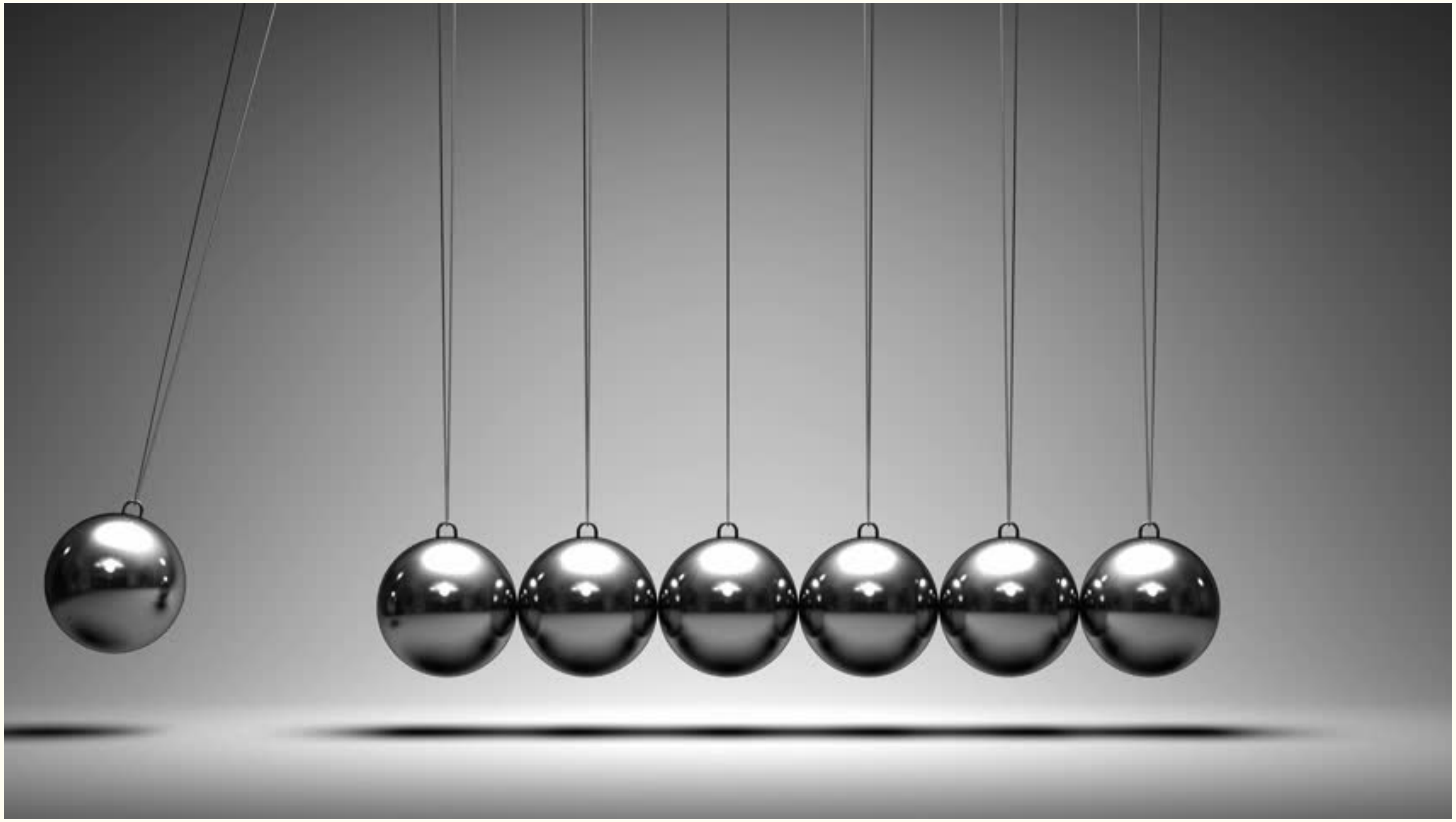
Después de la colisión



La mejor forma de observar esto experimentalmente es con….

Experimento #1

¡La “cuna de Newton”!



Malabares con cunas de Newton: https://www.youtube.com/watch?v=zr3pHOTMiKg

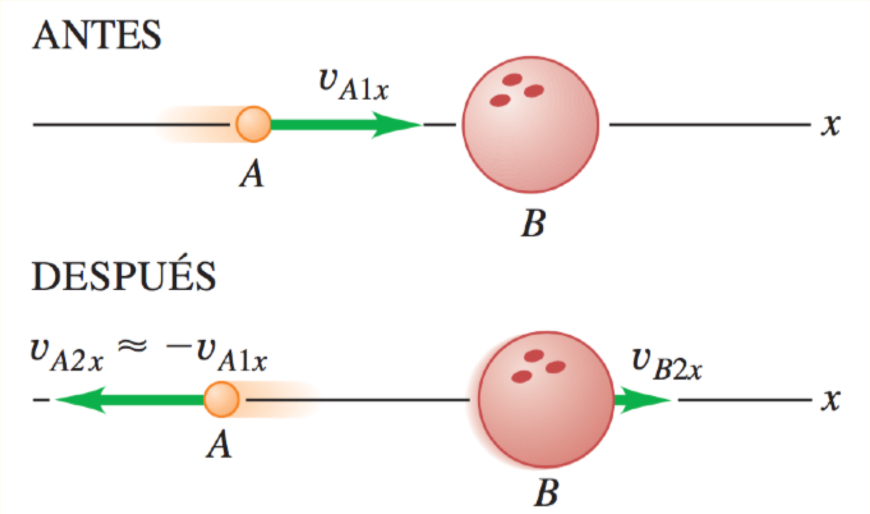
Experimento #2

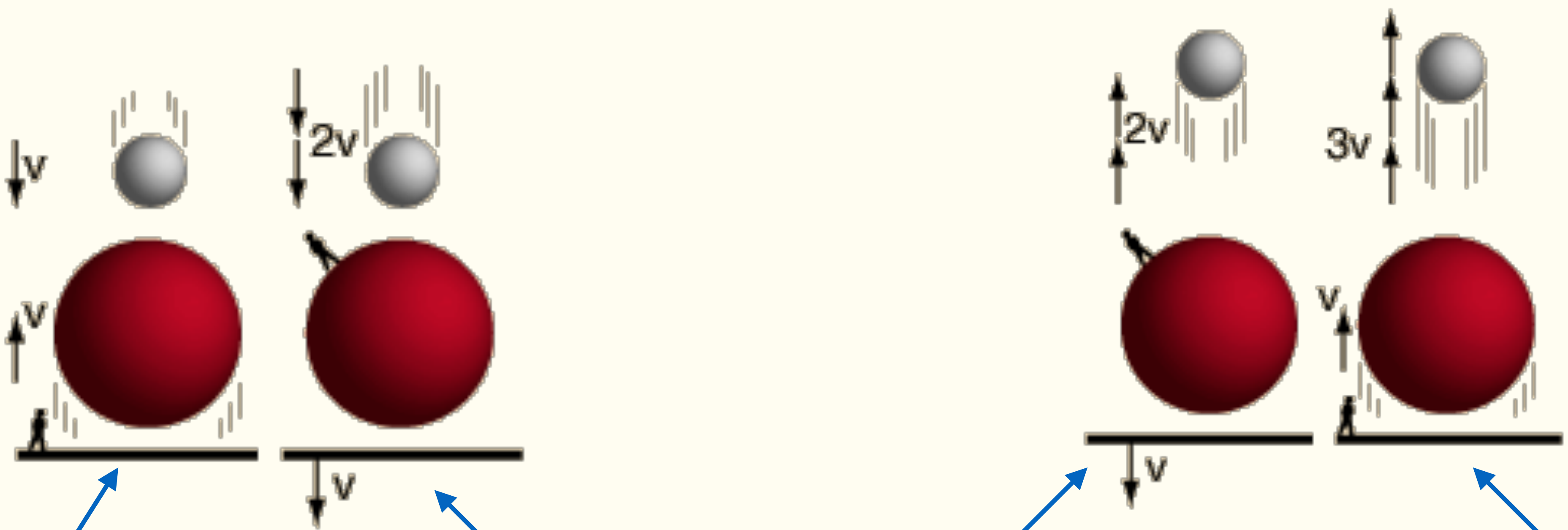
Hagamos un paréntesis para demostrar una lección importante sobre colisiones elásticas:

Un video con 3 pelotas: https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60

¿Por qué sucede esto?

Recordatorio de la clase #22: para una colisión elástica entre una pelota muy ligera y otra muy pesada, si la segunda está en reposo la primera rebota con prácticamente la misma velocidad





La pelota de basketball toca el suelo antes y por ende rebota antes

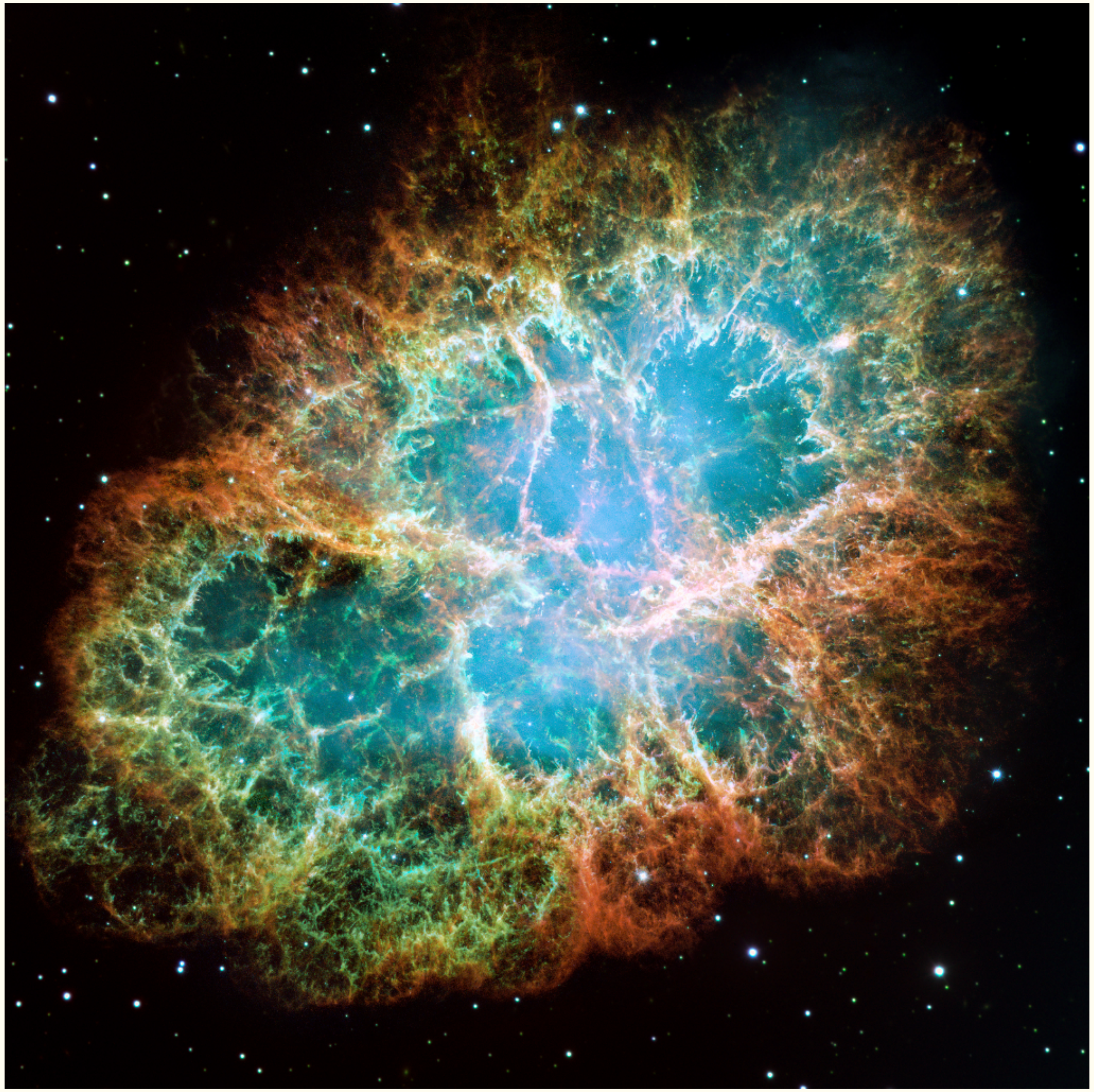
Desde el marco de referencia de la pelota de basketball, la de tenis se acerca con velocidad 2v, y por ende rebota con la misma velocidad en sentido opuesto

Desde el marco de referencia de suelo, la pelota de tenis tiene velocidad 3v. **¡Eso significa que llega a 9 veces la altura inicial!**

Explicación en: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/doubal.html

Relación con Supernovas

¡Así sucede una supernova!



Cuando a una estrella se le acaba el combustible para fusión nuclear, el material más denso se va hacia el centro, dejando el material más liviano en las capas exteriores

Esta implosión hace que el material se acelere hacia el centro a velocidades enormes, pero cuando la densidad sube demasiado se provoca una repulsión que causa un "rebote", y por ende una explosión hacia afuera

Conforme el material denso quiere salir, se encuentra con las capas más livianas afuera, y les transfiere una gran cantidad de momento, tal como la pelota de basketball hizo con la pelota de tenis.

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido