Estática y Dinámica

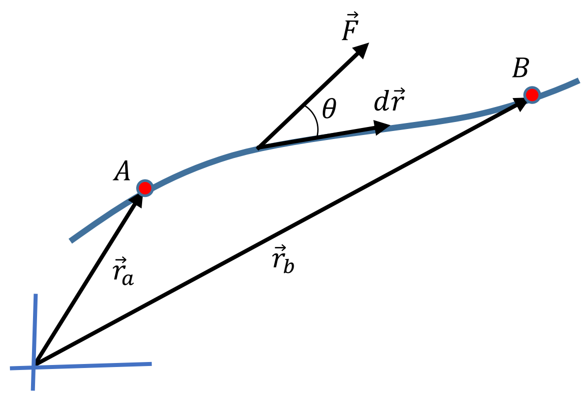
Material Clases Cuerpo Rigido - Rotacion 5

1. Trabajo y energía en el movimiento de rotación

2. Ejemplos

1. Trabajo y energía en el movimiento de rotación

En la primera parte del curso derivamos el teorema del trabajo y la energía cinética,



La variación de la energía cinética entre los instantes t_a y t_b es igual al trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al mover la partícula desde $\vec{r}_a(t_a)$ a $\vec{r}_b(t_b)$.

$$\Delta K = W_{a,b}. \tag{1.1}$$

donde,

$$W_{a,b} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \tag{1.2}$$

Podemos generalizar este teorema para el cuerpo rígido y mostrar que de manera natural se divide en dos partes, una relacionada con la energía de traslación y la otra con la energía de rotación.

Para derivar la parte traslacional partimos de la ecuación del movimiento para el centro de masas,

$$\vec{F} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} \tag{1.3}$$

El trabajo realizado en desplazar el CM una distancia $d\vec{R} = \vec{V}_{CM}dt$ es

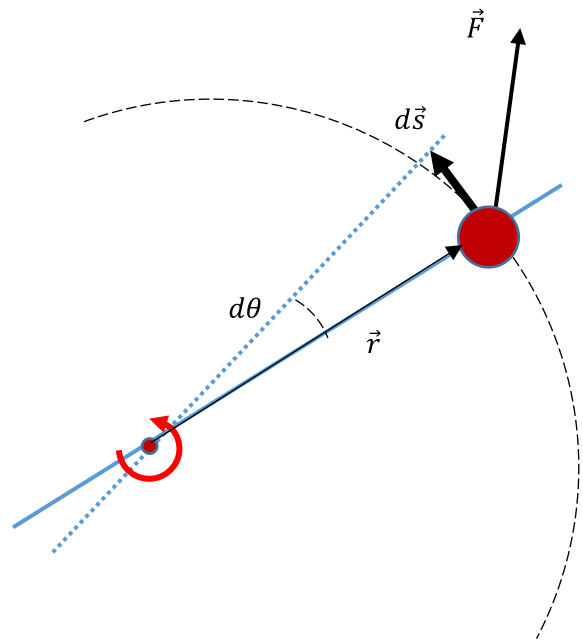
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{R} = mM \cdot \left(\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}dt\right) = M\vec{V}_{CM} \cdot d\vec{V}_{CM} = d\left(\frac{1}{2}MV_{CM}^2\right)$$

e integrando,

$$\int_{\vec{R}_A}^{\vec{R}_B} \vec{F} \cdot d\vec{R} = \frac{1}{2}MV_B^2 - \frac{1}{2}MV_A^2 \tag{1.4}$$

Evaluemos ahora el trabajo asociado con la energía cinética de rotación.

Comencemos analizando el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ al hacer rotar una partícula de masa m.



El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ al desplazar una distancia $d\vec{s}$ la partícula es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F}_{\parallel} \cdot d\vec{s} + \vec{F}_{\perp} \cdot d\vec{s}$$

donde $\vec{F}_{\parallel}$ y $\vec{F}_{\perp}$ son las componentes de la fuerza paralela y perpendicular a $d\vec{s}$. Pero, $\vec{F}_{\perp} \cdot d\vec{s} = 0$ y

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_{\parallel}\, ds$$

Pero, $ds = r d\theta$

$$dW = F_{\parallel}\, r\, d\theta$$

y como[1]

$$\tau = F_{\parallel}\, r$$

es el torque de la fuerza F. El trabajo de la fuerza lo podemos escribir como:

$$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \tag{1.5}$$

Para un sistema de partículas es fácil ver que:

[1] Notemos que $F_{\parallel}$ es la fuerza paralela a $d\vec{s}$ y perpendicular a $\vec{r}$.

$$dW = \sum_i \vec{\tau}_i \cdot d\vec{\theta} = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \tag{1.6}$$

La potencia será,

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha} \tag{1.7}$$

Escribamos entonces el teorema de la energía cinética en el movimiento de rotación.

El trabajo realizado por el torque cambia la energía cinética del cuerpo. Partiendo de

$$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

con $d\vec{\theta} = \vec{\omega}\, dt$ y $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$dW = I\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}\, dt$$

$$dW = I\vec{\omega} \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\, dt\right)$$

$$dW = I\vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = d\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right)$$

e integrando,

$$\int_{\theta_A}^{\theta_B} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2} I\omega_B^2 - \frac{1}{2} I\omega_A^2 \tag{1.8}$$

Entonces, el teorema del trabajo y la energía cinética para la rotación del cuerpo rígido se escribe como:

$$\Delta K = W_{a,b}. \tag{1.9}$$

con,

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2, \qquad y \qquad W_{a,b} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

Si la fuerza es conservativa $W_{a,b} = -\Delta U$ y

$$\Delta K + \Delta U = 0 \tag{1.10}$$

i.e.,

$$\Delta E = 0 \qquad (1.10)$$

donde,

$$E = K_{rot} + U \tag{1.11}$$

Rotación más traslación,

Ya vimos (clase 20) que para un cuerpo rígido que rota y se traslada la energía cinética se escribe como:

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2$$

donde u_i es la velocidad relativa en relación al CM. Pero, en relación a este, $u_i = \omega r_i$ así que

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)\omega^2 \tag{1.12}$$

o,

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.13}$$

Y el teorema general para el trabajo y la energía cinética del cuerpo rígido se escribe como,

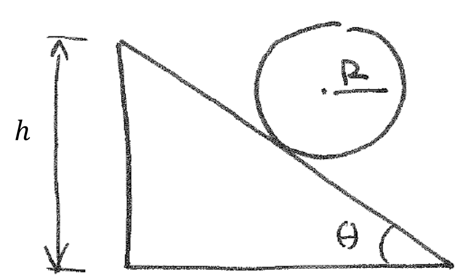
$$W = K_f - K_i \tag{1.14}$$

donde K es la energía cinética total dada por (1.13) y W el trabajo total sobre el cuerpo mientras se mueve de la posición inicial a la posición final.

2. Ejemplos

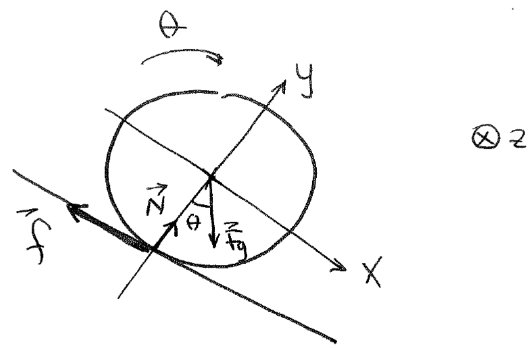
Ejemplo 1:

Un cilindro sólido de masa m, momento de inercia I y radio R rueda en una rampa que hace un ángulo θ con la horizontal. ¿Cuál es la velocidad del cilindro al llegar a la base del plano?



Antes de realizar cualquier cálculo analicemos la física del problema.

El cilindro acelera hacia abajo por el plano inclinado bajo la influencia de la fuerza de gravedad. Comencemos haciendo el diagrama de fuerzas. El cilindro está sujeto a la fuerza de gravedad por la interacción con la tierra y a la fuerza de contacto ejercida por la rampa. Si escogemos los ejes mostrados en la figura, la fuerza de contacto está compuesta por una componente normal $\vec{N}$ en la dirección y una componente tangencial $\vec{f}$ en la dirección negativa de x que es la fuerza de roce estática.



En la medida en que el objeto baja por la rampa, su energía rotacional y cinética aumenta. Debido a que la forma del objeto no cambia y a que **la fuerza de fricción estática no es disipativa** (el punto de contacto no se mueve en relación a la superficie), la energía interna del objeto no cambia. Notemos además que el punto de contacto es instantáneo (no hay deslizamiento) y en consecuencia la fuerza de roce no hace trabajo.

Como la fuerza que realiza trabajo es la fuerza de gravedad que es conservativa, podemos escribir la conservación de la energía.

$$\Delta E = 0$$

$$E_i = E_f$$

Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en la base del plano

$$E_i = Mgz_{CMi} = Mg(h + R)$$

$$E_f = MgR + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Pero, $V = \omega R$ y

$$V = \sqrt{2gh}\left[1 + \frac{I_0}{MR^2}\right]^{-1/2}$$

Método 2:

Si tomamos como eje de rotación el punto de contacto el sistema solo rotará en torno a este y de la conservación de la energía mecánica con

$$E_i = Mgz_{CMi} = Mg(h + R)$$

y

$$E_f = MgR + \frac{1}{2}I\omega^2$$

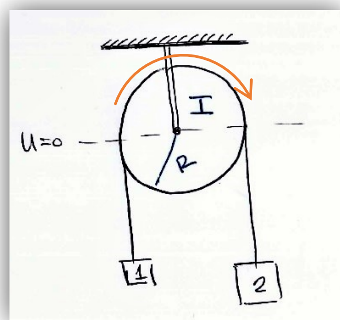
con $V = \omega R$ y $I = I_0 + MR^2$ obtenemos

$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I_0}{R^2}V^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

$$V = \sqrt{2gh}\left[1 + \frac{I_0}{MR^2}\right]^{-1/2}$$

Ejemplo 2:

Para el sistema mostrado en la figura compuesto por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 y una polea de momento de inercia I y radio R,



Calcule la velocidad de las masas luego de que se mueven una distancia h.

De la conservación de la energía mecánica,

$$E_i = E_f$$

Tomando el cero de energía potencial gravitatoria a la altura del eje (ver figura)

$$E_i = -m_1gz_{1i} - m_2gz_{2i}$$

$$E_f = -m_1gz_{1f} - m_2gz_{2f} + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

De las ecuaciones de ligadura,

$$z_1 + z_2 = l \quad \longmapsto \quad v_1 = -v_2$$

$$\Delta z_2 = R\Delta\theta \quad \longmapsto \quad v_2 = R\omega$$

Como lo que aparece en las ecuaciones es el cuadrado de las velocidades hacemos, $v_1^2 = v_2^2 = v^2$ y volviendo a la conservación de la energía,

$$m_1 g(-z_{1i} + z_{1f}) + m_2 g(-z_{2i} + z_{2f}) = +\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

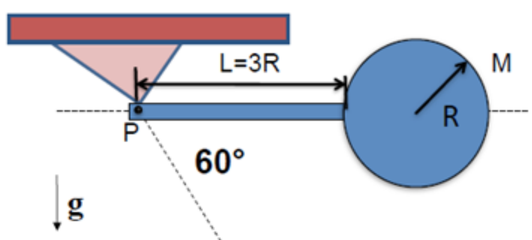
$$-m_1 gh + m_2 gh = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$2gh(m_2 - m_1) = \left(m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}\right)v^2$$

$$v = \sqrt{2gh(m_2 - m_1)}\left[m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}\right]^{-1/2}$$

Notemos que para que se mueva $m_2 > m_1$ como supusimos.

Un péndulo físico consta de una barra homogénea de masa M y largo L, soldada a un disco homogéneo de radio R y masa M, donde $L = 3R$. Este péndulo pivotizado en el extremo de la barra (punto P), ésta inicialmente en reposo en la posición horizontal mostrada en la figura.



El momento de inercia I del péndulo respecto a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto P, es

a) $I = \frac{69}{4}MR^2$

b) $I = \frac{25}{2}MR^2$

c) $I = \frac{39}{2}MR^2$

d) $I = 20MR^2$

Determine la distancia d entre el pivote y el centro de masa del péndulo.

a) $d = \frac{11R}{2}$
b) $d = \frac{11R}{4}$
c) $d = 3R$
d) $d = \frac{5R}{2}$

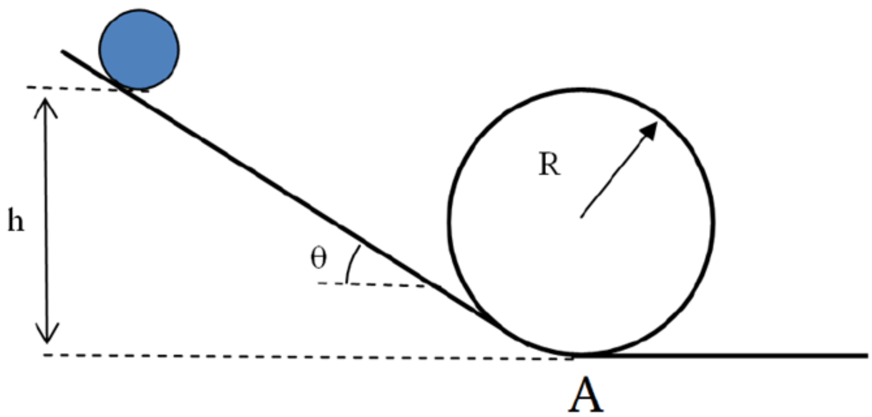
Si en cierto instante deja evolucionar libremente el sistema, determine el módulo de la aceleración angular α del péndulo cuando la barra forma un ángulo de 60° con la horizontal. (I y d son los valores pedidos en los problemas anteriores.)

a) $\alpha = \frac{Mgd}{I}$
b) $\alpha = \frac{Mgd}{2I}$
c) $\alpha = \frac{\sqrt{3}Mgd}{I}$
d) $\alpha = \frac{2\sqrt{3}Mgd}{I}$

Determine el módulo de la velocidad angular del péndulo cuando la barra forma un ángulo de 60° con la horizontal. (I y d son los valores pedidos en los problemas anteriores.)

a) $\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$
b) $\omega = \sqrt{\frac{2Mgd}{I}}$
c) $\omega = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}Mgd}{I}}$
d) $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}Mgd}{I}}$

Una esfera sólida homogénea de radio r rueda sin deslizarse a lo largo de una vía que posee una vuelta circular de radio R (figura abajo). La esfera inicia su movimiento partiendo desde el reposo desde una altura h.



¿Cuál es la rapidez v del centro de masa de la esfera al llegar a la base del plano (punto A)?

a) $v = \sqrt{\dfrac{10gh}{7}}$
b) $v = \sqrt{2gh}$
c) $v = \sqrt{\dfrac{10g(h-r)}{7}}$
d) $v = \sqrt{2g(h-r)}$

¿Cuál es la aceleración a del centro de masas de la esfera cuando se encuentra deslizándose sobre el plano inclinado?

a) $a = g\sin\theta$
b) $a = \dfrac{5g\sin\theta}{7}$
c) $a = \dfrac{7g\sin\theta}{5}$
d) $a = 2g\sin\theta$

¿Cuál es la mínima altura h requerida para que la esfera abandone la vía al pasar por el rizo?

a) $h = \dfrac{27(R-r)}{10}$
b) $h = \dfrac{27(R-r)}{5}$
c) $h = \dfrac{10(R-r)}{27}$
d) $h = \dfrac{5(R-r)}{27}$

¿Cuál es la velocidad v' del centro de masa de la esfera al llegar a la base del plano si en lugar de rodar lo hace deslizándose?

a) $v' = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$

b) $v' = \sqrt{2gh}$

c) $v' = \sqrt{\frac{10g(h-r)}{7}}$

d) $v' = \sqrt{2g(h-r)}$