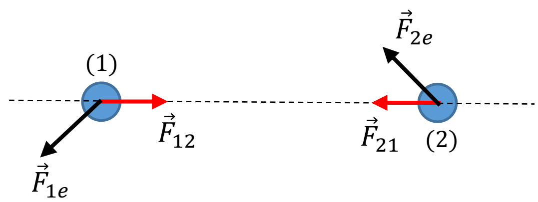
Estática y Dinámica

Profundización y Problemas Resueltos 2 de TRABAJO, ENERGIA y POTENCIA

Trabajo y Energía:

1. Conservación de energía para sistemas de dos y más partículas

Consideremos un sistema[1] compuesto por dos cuerpos que interactúan entre sí y que además están sujetos a fuerzas externas,



donde, $\vec{F}_{ie}$: es la fuerza externa sobre la partícula "i", $\vec{F}_{ij}$: indica la fuerza sobre la partícula "i" debido a la interacción con la partícula "j".

La ecuación de movimiento para cada cuerpo es:

Partícula 1
$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{1e} \tag{1.1}$$

Partícula 2
$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{2e} \tag{1.2}$$

Apliquemos el esquema realizado en clases anteriores para encontrar una relación entre el trabajo realizado por las fuerzas externas y el cambio en la energía cinética. Para esto multipliquemos escalarmente (1.1) por $d\vec{r}_1$ y (1.2) por $d\vec{r}_2$,

Partícula 1
$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 \tag{1.3}$$

Partícula 2
$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2 \tag{1.4}$$

Con[2], $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ el lado izquierdo lo podemos escribir como:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m_i v_i^2\right] dt = \left(\frac{dK_i}{dt}\right) dt \tag{1.5}$$

Donde $K_i = m_i v_i^2/2$ es la energía cinética del cuerpo "i".

Sumando (1.3) y (1.4), obtenemos

[1] Notemos que parece la palabra sistema que definirá que fuerzas son internas o externas. Por este motivo antes de comenzar resolver cualquier problema es necesario definir el sistema previamente.

[2] Notemos que hicimos, $d\vec{r}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i)dt = \vec{v}_i dt$

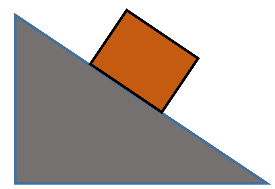
$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]\, dt = \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \tag{1.6a}$$

$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]\, dt = \left[\vec{F}_{1e} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\right] dt \tag{1.6b}$$

donde hemos tenido en cuenta por la Tercera Ley de Newton que, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

A partir de este punto distinguiremos diversas situaciones de acuerdo a distintos tipos de interacciones posibles entre los cuerpos.

1.1 La fuerza de interacción entre los cuerpos es una fuerza de interacción normal



En este caso, $\vec{F}_{12}$ es ortogonal al desplazamiento relativo entre los dos cuerpos y por lo tanto:

$$\vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$$

y de (1.6)

$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]dt = \left[\vec{F}_{1e} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot \vec{v}_2\right]dt = \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2$$

Integrando,

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}[K_1 + K_2]dt = \int_{\vec{r}_{1a}}^{\vec{r}_{1b}} \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{2b}} \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2$$

$$\Delta K = W_1 + W_2$$

Donde,

$$K = K_1 + K_2,$$

$$W_1 = \int_{\vec{r}_{1a}}^{\vec{r}_{1b}} \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1\,, \qquad W_2 = \int_{\vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{2b}} \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2$$

K: es la energía cinética del sistema y W_1 y W_2 los trabajos realizados por las fuerzas externas al mismo.

Si, $\vec{F}_{1e}$ y $\vec{F}_{2e}$ son conservativas $W_1 = -\Delta U_1;\ W_2 = -\Delta U_2$ y

$$\Delta K = -\Delta U_1 - \Delta U_2$$

Entonces,

$$\Delta[K+U]=0, \quad \Longrightarrow \quad \Delta E=0 \quad \Longrightarrow \quad E_i=E_f$$

donde,

$$K=K_1+K_2,$$

$$U=U_1+U_2$$

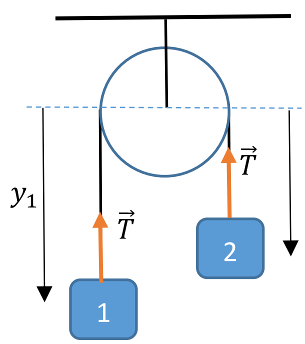
son aditivas.

1.2 Cuerpos unidos por barras ideales

Como las barras ideales son inextensibles, la posición relativa entre los cuerpos $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\overrightarrow{cte}$, de manera que $(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=\vec{0}$ y tenemos el caso anterior.

1.3 Cuerpos unidos por cuerdas ideales

Considerando los cuerpos (1) y (2), mostrados en la figura, la ecuación (1.6a) la podemos escribir como,



$$\frac{d}{dt}[K_1+K_2]dt=\vec{F}_{1e}\cdot d\vec{r}_1+\vec{F}_{2e}\cdot d\vec{r}_2+\vec{T}\cdot d\vec{r}_1+\vec{T}\cdot d\vec{r}_2$$

Donde hemos dejado de manera explícita a la tensión como fuerza externa pues no es una fuerza que pueda expresarse como menos el gradiente de una función escalar.

Como,

$$y_1+y_2=cte$$

$$d\vec{r}_1=-d\vec{r}_2$$

y

$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]dt = \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2$$

Como en el primer caso, de manera que,

$$K = K_1 + K_2,$$

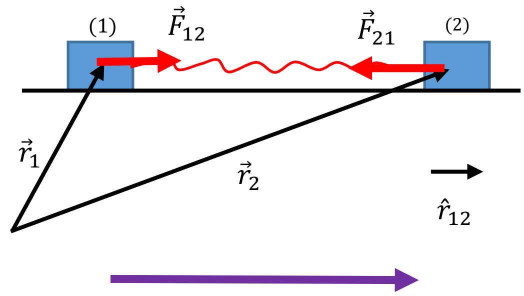
$$U = U_1 + U_2$$

1.4 Los cuerpos se encuentran unidos por resortes ideales

En este caso, definiendo el sistema como formado por los dos cuerpos la fuerza mutua entre los mismos es,

$$\vec{F}_{12} = k(r_{12} - l_0)\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(donde consideramos $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| > l_0$)



$$\hat{r}_{12} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Notemos la sutiliza en definir el sistema. La sutileza está en que podemos tomar al mismo como dos sistemas separados, cuerpo (1) y cuerpo (2) o tomar el sistema de los dos cuerpos (como hicimos). En el primer caso, $\vec{F}_{12}$ es externa al cuerpo (1), $\vec{F}_{21}$es externa al cuerpo (2) y en el segundo caso son fuerzas internas.

Tomemos el sistema formado por el resorte y los cuerpos. De la Ec.(1.6b)[3]

$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]\,dt = \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot\, d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot\, d\vec{r}_2$$

y teniendo en cuenta que, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$,

$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]\,dt = \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\frac{d}{dt}[K_1 + K_2]\,dt = \vec{F}_{1e} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{F}_{12} \cdot \hat{r}_{12}\,dr_{12}$$

[3] Que viene de la suma de (1.3) y (1.4)

donde el último término representa la interacción entre los cuerpos.

Integrando la ecuación anterior tenemos,

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = W_{F1e} + W_{F2e} - \int F_{12}\, dr_{12}$$

Pero el integrando en la integral de la derecha se puede escribir como,

$$dU_{12} = F_{12}\, dr_{12} = k(r_{12} - l_0)dr_{12} = d\left[\frac{1}{2}k(r_{12} - l_0)^2\right]$$

de mamera que

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = W_{F1e} + W_{F2e} - \Delta U_{12}$$

y,

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta U_{12} = W_{F1e} + W_{F2e}$$

Con,

$$U_{12} = \frac{1}{2}k(r_{12} - l_0)^2$$

Notemos que si las fuerzas externas son conservativas, $W_{F1e} = -\Delta U_1 - \Delta U_2$ y

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta U_{12} + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

o

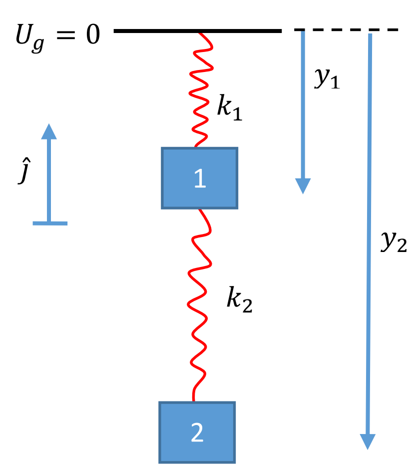
$$\Delta E = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad E_i = E_f$$

Esto es,

$$E = K_1 + K_2 + U_1 + U_1 + U_{12}$$

es constante.

Ejemplo:



Obtener las ecuaciones de movimiento para los cuerpos (1) y (2) en el sistema mostrado en la figura. Suponga que los resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 tienen largo natural l_{01} y l_{02}, respectivamente.

Como no hay fuerzas que disipen energía, la energía mecánica del sistema es constante y $\frac{dE}{dt} = 0$.

Tomemos al sistema como el formado por los cuerpos y resortes. La energía mecánica es,

$$E = K_1 + K_2 + U_1^{(g)} + U_2^{(g)} + U_1^{(e)} + U_{12}^{(e)}$$

Esto es,

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_1^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1 - l_{02})^2$$

Derivando en relación al tiempo obtenemos, con $\frac{dE}{dt} = 0$

$$0 = m_1\dot{y}_1\ddot{y}_1 + m_2\dot{y}_2\ddot{y}_2 - m_1g\dot{y}_1 - m_2g\dot{y}_2 + k_1(y_1 - l_{01})\dot{y}_1 + k_2(y_2 - y_1 - l_{02})(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

Agrupando,

$$0 = [m_1\ddot{y}_1 - m_1g + k_1(y_1 - l_{01}) - k_2(y_2 - y_1 - l_{02})]\dot{y}_1$$
$$+[m_2\ddot{y}_2 - m_2g + k_2(y_2 - y_1 - l_{02})]\dot{y}_2$$

Para que la igualdad se cumpla para todo instante de tiempo,

$$[m_1\ddot{y}_1 - m_1g + k_1(y_1 - l_{01}) - k_2(y_2 - y_1 - l_{02})] = 0$$
$$[m_2\ddot{y}_2 - m_2g + k_2(y_2 - y_1 - l_{02})] = 0$$

y obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$m_1\ddot{y}_1 = m_1g - k_1(y_1 - l_{01}) + k_2(y_2 - y_1 - l_{02})$$
$$m_2\ddot{y}_2 = m_2g - k_2(y_2 - y_1 - l_{02})$$

Sistema de N cuerpos con fuerzas de interacción restitutivas

Para un sistema de N cuerpos se puede proceder de manera análoga y concluir con una ley de balance energía-trabajo de la forma:

$$W_{fno-cons} = \Delta E \tag{1.7}$$

donde,

$$E = K + U \tag{1.8}$$

Siendo,

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i v_i^2 \tag{1.9}$$

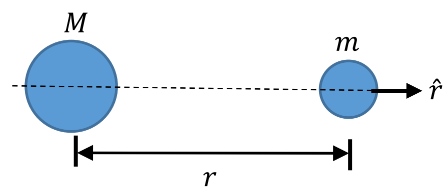
$$U = \sum_{i} U_i^{(ext)} + \sum_{\substack{i,j \\ 1 \le i < j \le N}}^{N} U_{ij}^{(e)} \tag{1.10}$$

Donde $U_i^{(ext)}$ representa la energía potencial asociada a las fuerzas externas conservativas, y W el trabajo de total que realizan las fuerzas no conservativas, es decir, aquellas que disipan energía.

2. Energía potencial gravitatoria

La fuerza de atracción gravitatoria entre los cuerpos es,

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$



Donde es la constante de gravitación universal o también llamada constante de Cavendish en honor al físico ingles Henrry Cavendish (1731-1810)

, $G = 6.673 \cdot\ 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}$

Encontremos la expresión para la energía potencial.

De,

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dU = G\frac{Mm}{r^2}\,dr = -d\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

Así que,

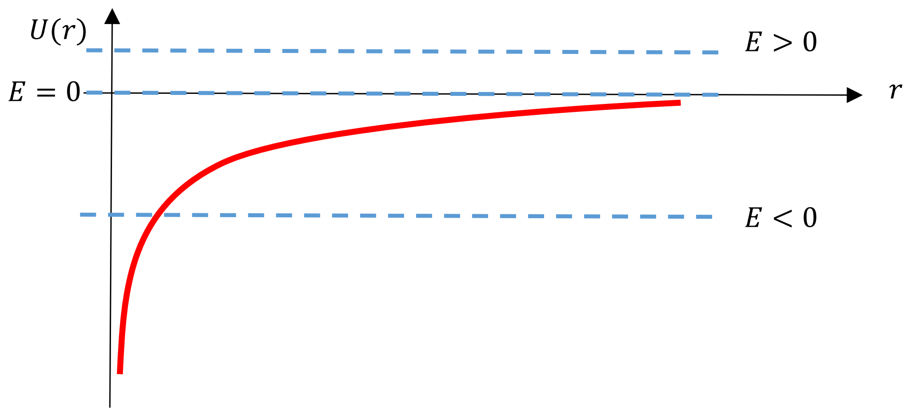
$$U(r) = G\frac{Mm}{r} \tag{2.1}$$

Si elegimos cuando las masas están infinitamente separadas,

$$U(r)|_{r \to \infty} = 0$$

El grafico de $U(r)$ lo mostramos en la siguiente figura (línea roja). Para entender mejor el mismo, consideremos el movimiento de una partícula de masa m en el campo gravitatorio de Mque permanece fija en el origen.

Como $E = K + U$ es constante, y como $K \geq 0$ entonces, $E \geq U$ siendo igual a U sólo cuando $K = 0$ esto es, cuando la partícula se detiene.



Observando la figura vemos que existen tres posibilidades esencialmente diferentes según sea E: $E > 0$, $E = 0$, o $E < 0$.

$E < 0$: En este rango la partícula se alejará del origen hasta que $E = U$, i.e., la partícula de masa m queda atrapada (estado ligado).

$E > 0$: La partícula tiene tanta energía como para llegar hasta el infinito sin nunca agotar la energía cinética (estado no ligado)

$E = 0$: Es el caso límite entre los anteriores, m tiene la energía mínima necesaria como para llegar a infinito, pero lo hace agotando toda su energía cinética de modo que queda a lo lejos en reposo.

Velocidad de Escape de la superficie de la Tierra.

La velocidad de escape es mínima velocidad con que es necesario disparar una masa m desde la superficie de la Tierra para que escape hasta el infinito sin que nunca vuelva a caer. Para cualcularla hacemos,

$$E = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G \frac{Mm}{R} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

que es de ~ 11 km/s en la Tierra.

Hoyos negros

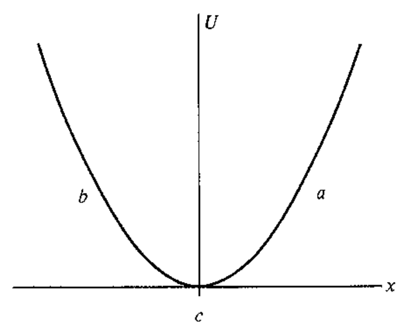
Si una estrella es lo suficientemente masiva, hacia el final de su vida, cuando termine de consumir su combustible colapsará bajo su propio peso y su radio disminuirá dramáticamente. De acuerdo a lo anterior, esto se traduce en un aumento de la velocidad de escape desde la superficie de la estrella y cuando esta velocidad llegue a ser la velocidad de la luz, c ni siquiera esta puede escapar. Es este momento la estrella se habrá transformado en un hoyo negro de radio,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Este es llamado de radio de Schwarzschild.

Para una estrella de la masa solar, $R_S = 3\ km$, el radio del sol es de 700.000 km!!!, sin embargo los cálculos muestra que para que una estrella colapse debe tener una masa de aproximadamente 1.5 masas solares.

3. Equilibrio y energía potencial



El resultado $\vec{F} = -\nabla U$ o en una dimensión,

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

es importante no sólo para calcular la fuerza sino tb para visualizar la estabilidad del sistema desde el diagrama de la energía potencial. Por ejemplo, en el caso del oscilador armónico la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ describe una parábola.

En el punto a de la figura al lado, $\frac{dU}{dx} > 0$ y la fuerza es negativa. En el punto b, $\frac{dU}{dx} < 0$ y la fuerza es positiva. En c, $\frac{dU}{dx} = 0$ y la fuerza es cero. La fuerza está dirigida al origen sin importar hacia donde la partícula se desplace. El mínimo de la curva de energía potencial coincide con la posición de equilibrio del sistema. Evidentemente, esta es una posición estable dado que el desplazamiento del sistema provoca una fuerza que tiende a llevar a la partícula a su punto de equilibrio.

Siempre que $\frac{dU}{dx} = 0$ el sistema estará en equilibrio. Sin embargo, si este ocurre en un máximo de U el equilibrio no es estable debido a que un desplazamiento positivo produce una fuerza positiva que tiende a aumentar el desplazamiento y viceversa, un desplazamiento negativo produce una fuerza negativa que provoca un aumento del desplazamiento en esa dirección.

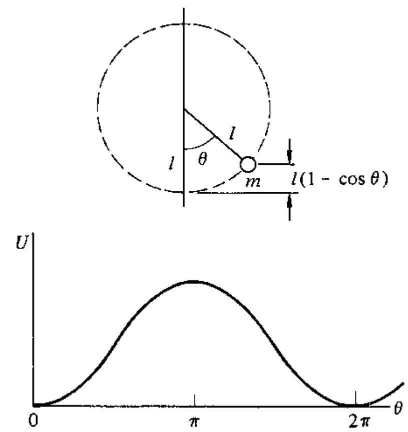
El péndulo de longitud l con una masa m es un buen ejemplo de esto. Si tomamos la energía potencial como siendo cero en el punto más bajo de su trayectoria, obtenemos

$$U(\theta) = mgz = mgl(1 - \cos\theta)$$

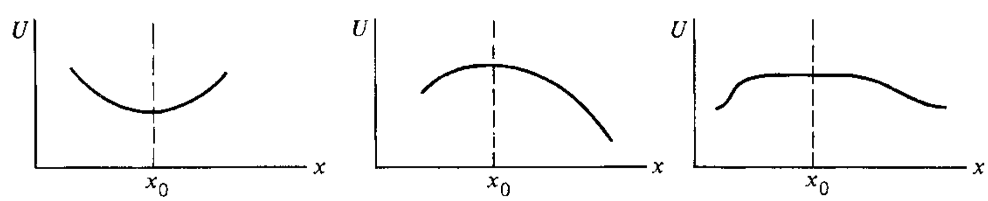
El péndulo está en equilibrio en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ sin embargo en este último punto el equilibrio es inestable, lo que queda claro del gráfico de U vs. θ.

El gráfico de la energía potencial nos da una idea de la estabilidad del sistema. Un mínimo en la curva de la energía potencial es un punto de equilibrio estático.

Matemáticamente para probar la estabilidad en un punto x_0 examinamos la segunda derivada de la energía potencial en este.



$\frac{dU}{dx} = 0$	$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$	Equilibrio estable
$\frac{dU}{dx} = 0$	$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$	Equilibrio inestable
$\frac{dU}{dx} = 0$	$\frac{d^2U}{dx^2} = 0$	Debemos analizar las derivadas de orden superior. Si todas sin ceros decimos que el sistema se encuentra en una condición de equilibrio neutral



$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ stable $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ unstable $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$ neutral

Problema 1

El sistema mostrado en la figura adjunta se "abandona", partiendo del reposo, cuando el bloque de masa m_1 está a una distancia d por encima del suelo. Desprecie el roce.

(a) Encuentre la aceleración de la masa mayor. ($m_1 > m_2$.)

(b) Usando el resultado de la parte (a), encuentre la velocidad con que la masa mayor llega al suelo.

(c) Suponiendo que todo el trabajo realizado sobre el sistema se transforma en energía cinética, calcule la velocidad de la masa mayor justo antes de que choque contra el suelo.

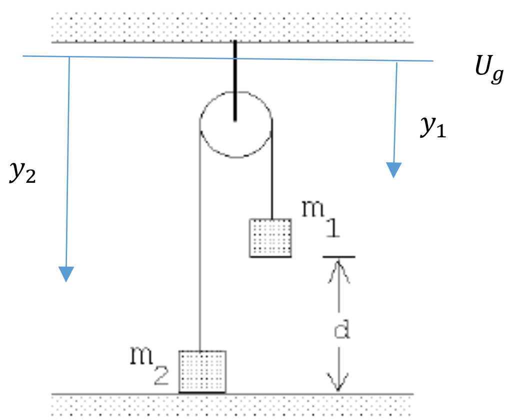


Figura 5.11

Apliquemos el método de la energía

Recordemos que la expresión general para la energía potencial viene de

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = d - (m\vec{g} \cdot \vec{r})$$

i.e.,

$$U = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

Colocando el sentido positivo del eje y como muestra la figura,

$$U = -mgy$$

Resp/

a) Como no hay fuerzas disipativas,

$$E = cte$$

La energía mecánica en un instante dado es,

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2$$

Derivando en relación al tiempo, como E es constante obtenemos,

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m_1\dot{y}_1\ddot{y}_1 + m_2\dot{y}_2\ddot{y}_2 - m_1g\dot{y}_1 - m_2g\dot{y}_2$$

De la ecuación de ligadura,

$$y_1 + y_2 = cte$$

$$\dot{y}_1 = -\dot{y}_2$$

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

Y entonces,

$$0 = m_1\dot{y}_1\ddot{y}_1 + m_2\dot{y}_1\ddot{y}_1 - m_1g\dot{y}_1 + m_2g\dot{y}_1$$

De donde,

$$\ddot{y}_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)}$$

b)

$$E_i = E_f$$

$$-m_2gy_{20} - m_1gy_{10} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 - m_1gy_{20} - m_2gy_{10}$$

$$m_2g(y_{10} - y_{20}) + m_1g(y_{20} - y_{10}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2$$

$$-m_2gd + m_1gd = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2$$

Donde tuvimos en cuenta que $\dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_1^2 = \dot{y}_2^2$ así que,

$$\dot{y}_1^2 = \frac{2(m_1 - m_1)gd}{(m_1 + m_2)}$$

Notemos que se obtiene el mismo resultado si hubiésemos ocupado la ecuación de la cinemática,

$$\dot{y}_1^2 = 2\ddot{y}_1d$$

c)

De la clase anterior sabemos que para cuerpos unidos por cuerdas ideales,

$$W_1 + W_2 = \Delta K_1 + \Delta K_2$$

$$m_1 g \Delta y_1 \cos 0^0 + m_2 g \Delta y_2 \cos 180^0 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

$$m_1 g d - m_2 g d = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2$$

Y se obtiene el resultado del inciso anterior.

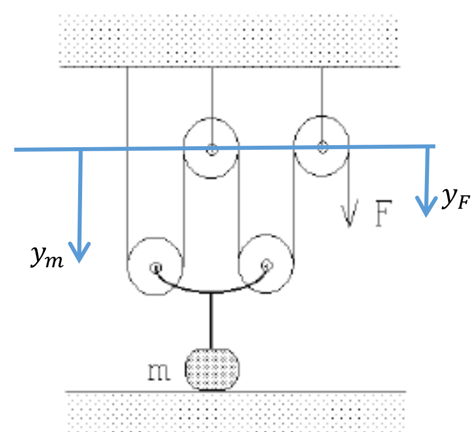
Problema 2

Se desea levantar lentamente una masa M hasta una altura h, usando el sistema de poleas mostrado en la figura adjunta.

(a) ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse?

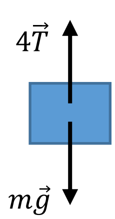
(b) ¿Qué trabajo se realiza?

(c) ¿Cuál es el cambio en energía potencial de la masa?



a) En la figura y_F y y_m marcan la posición del punto de aplicación de la fuerza y de las poleas fijas a m, respectivamente.

Para subir a la masa lentamente, $a \approx 0$, del diagrama de fuerzas para el cuerpo



$$4T - mg \approx 0$$

Pero en la cuerda, $F = T$ así que

$$F = \frac{mg}{4}$$

b) El trabajo realizado por le fuerza es,

$$W = F|\Delta y_F|$$

Pero $4y_m + y_F = cte$ de manera que,

$$W = 4F\Delta y_m$$

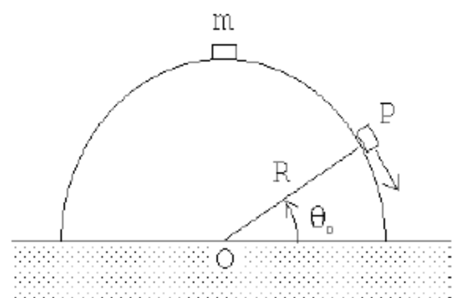
$$W = mgh$$

Como esperado.

b) $\Delta U = mgh$

Problema 3

Una masa m resbala, sin roce y debido a la gravedad, por la superficie de una semiesfera de radio R. La masa parte desde la cúspide sin velocidad inicial. Sea P el punto en el cual la masa se separa de la semiesfera. Encuentre el ángulo de elevación θ_0 del punto P.



Tomando el cero de energía potencial en la base, de la conservación de la energía

$$E_i = E_f$$

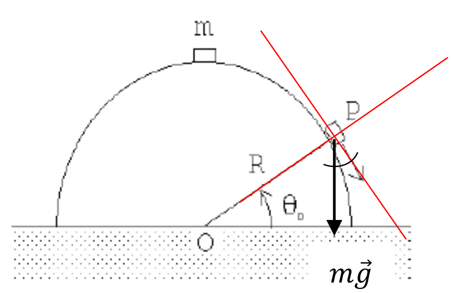
$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

La condición para que la masa se separe es simplemente cuando se pierde la interacción con la superficie, es decir cuando la normal se anula,

Del diagrama de fuerzas con $N = 0$ en el punto en que se despegan, en la dirección radial,

$mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$

Así que,



en el punto en que se despega, $v^2 = gR\sin\theta$ y volviendo a la ecuación inicial

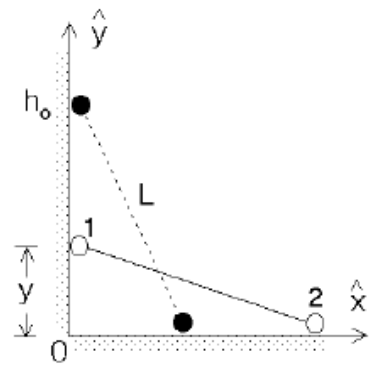
$$mgR = \frac{1}{2}mgR\sin\theta + mgh$$

De la figura, $\sin\theta = h/R$ y

$$1 = \frac{3}{2}\sin\theta \quad \rightsquigarrow \quad \sin\theta_0 = \frac{2}{3}$$

Problema 4

Considere dos masas m unidas por una varilla de largo L que no tiene peso. Inicialmente el sistema está apoyado en una pared, formando un ángulo θ_0 con la normal . El sistema comienza a resbalar sin roce debido a la gravedad. ¿A qué altura la masa # 1 se separa de la pared vertical?



Resp/

De la conservación de la energía,

$$E_i = E_f \tag{4.1}$$

Tomando el cero de energía potencial en $y = 0$,

$$mgh_0 = mgy_1 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \tag{4.2}$$

Realicemos el diagrama de cuerpo libre para la masa 1. Recordemos que las fuerzas son medidas de las interacciones y la masa interactúa con la Tierra, la pared y la barra.

En el punto en que se despega, la normal en m_1 es cero y

en el eje x

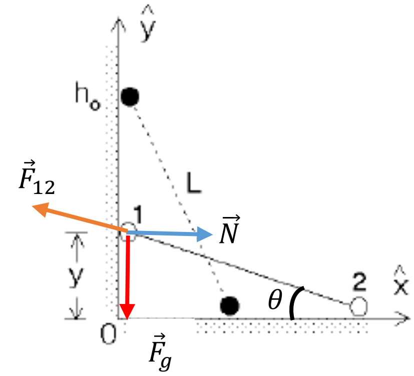
$$F_{12}\cos\theta = m\ddot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow F_{12} = 0$$

en el eje y:

$$-F_{12}\sin\theta + mg = m\ddot{y}_1 \qquad \Rightarrow \ddot{y}_1 = g$$

Entonces, para la partícula (2) es claro que,

$$F_{12}\cos\theta = m\ddot{x}_2 \quad \Rightarrow \ddot{x}_2 = 0$$



Escribamos (4.2) en función de x_2 y su derivada $\dot{x}_2$ y notemos que la ecuación anterior indica que en el punto en que la partícula "1" pierde contacto con la pared la derivada de la velocidad es cero, i.e., la velocidad es máxima.

De la figura,

$$x_2^2 = L^2 - y_1^2 \quad \Rightarrow \quad x_2\dot{x}_2 = -y_1\dot{y}_1$$

Entonces (4.2) se escribe como,

$$gh_0 = gy_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{y_1}\right)^2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2$$

$$\dot{x}_2^2 = \frac{2g(h_0 - y_1)}{\left(\left(\frac{x_2}{y_1}\right)^2 + 1\right)}$$

$$\dot{x}_2^2 = \frac{2g(h_0 - y_1)y_1^2}{L^2} \tag{4.3}$$

De esta ecuación, la condición de que $\ddot{x}_2 = 0$ se cumple cuando

$$-2g\dot{y}_1y_1^2 + 2g(h_0 - y_1)2y_1\dot{y}_1 = 0$$

De donde obtenemos la respuesta final.

$$y_1 = 2\frac{h_0}{3}$$