Estática y Dinámica FIS1513

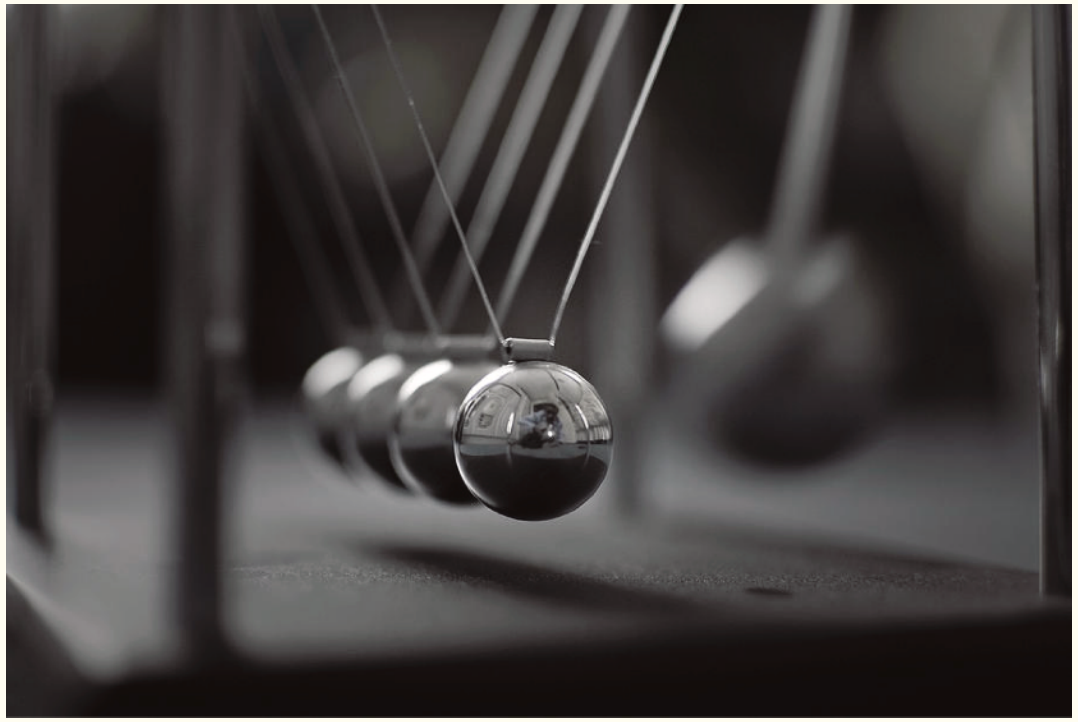
Clase #5

22-08-2018

Cinemática de una Partícula

Anuncios

- La i1 es el jueves 30 de Agosto a las 18.30
  - Tendré horario de consulta el viernes de 13.00 a 14.00 en mi oficina, después del taller (mi oficina está en la Facultad de física, subiendo por las escaleras principales y luego a la derecha)
  - Uno de nuestros ayudantes (Frani Bertín) ofrecerá otro horario de consulta la próxima semana.
- El lunes 27 tendremos clase a las 11.30 en la sala S9 y **también** en horario de ayudantía a las 15.30 en la sala K200
  - El miércoles 29 tendrán ayudantía en horario de clase, un día antes de la I1
- Si alguien no es de esta sección y quiere acceso a las diapositivas, envíeme un correo(jpochoa@uc.cl)



Cinemática de una partícula

Seguimos en Cinemática pero ahora nos cambiamos a otros sistemas de coordenadas

12.7 Curvilinear Motion: Normal and Tangential Components

When the path along which a particle travels is *known*, then it is often convenient to describe the motion using n and t coordinate axes which act normal and tangent to the path, respectively, and at the instant considered have their *origin located at the particle*.

Planar Motion. Consider the particle shown in Fig. 12–24*a*, which moves in a plane along a fixed curve, such that at a given instant it is at position s, measured from point O. We will now consider a coordinate system that has its origin at a *fixed point* on the curve, and at the instant

12.8 Curvilinear Motion: Cylindrical Components

Sometimes the motion of the particle is constrained on a path that is best described using cylindrical coordinates. If motion is restricted to the plane, then polar coordinates are used.

Polar Coordinates. We can specify the location of the particle shown in Fig. 12–30*a* using a *radial coordinate* r, which extends outward from the fixed origin O to the particle, and a *transverse coordinate* θ,

Secciones 12.7-8 del Hibbeler

3.4 Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES

3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.

Sección 3.4 del Young & Freedman

Velocidad y Aceleración en Cilíndricas

La clase pasada demostramos estas relaciones:

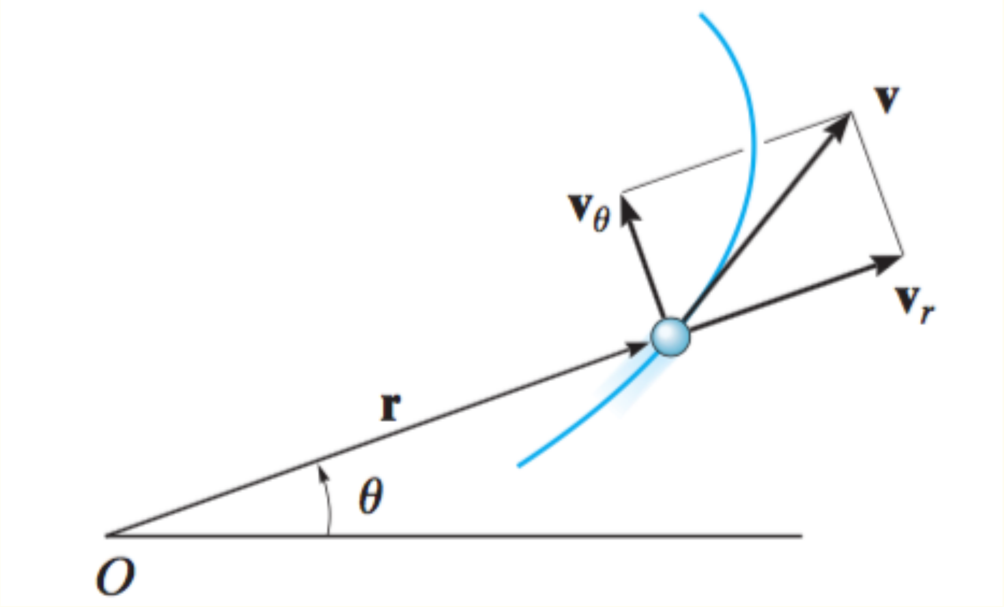
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z$$

(hicimos la extensión a cilíndricas simplemente añadiendo la dimensión z como en cartesianas)

¿Para qué me sirve esto?

Si yo conozco la trayectoria que sigue una partícula como r(t), θ(t) y z(t) puedo calcular la velocidad y la aceleración en cualquier momento utilizando estas relaciones



(Comentario: la velocidad siempre es tangencial a la trayectoria; sin embargo, esto no significa que tenga que estar en θ siempre, lo cual sólo ocurre en movimiento circular).

¿Para qué sirve esto?

Todo esto se ve muy complicado…. ¿para qué usar polares? ¡Mejor quedarse con cartesianas!

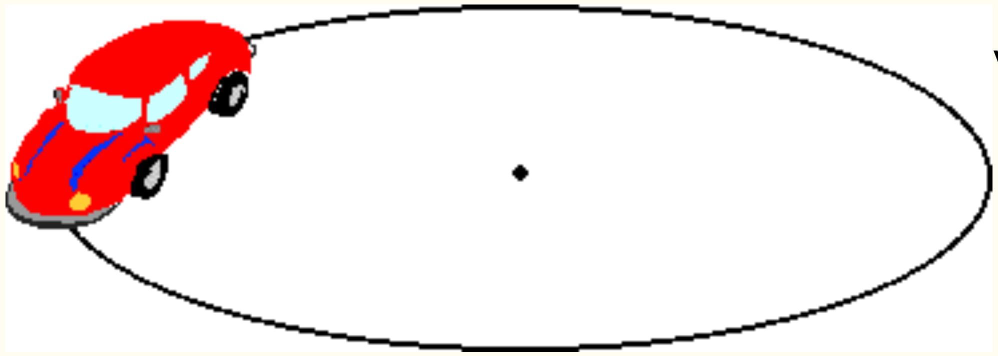
Respuesta: en muchos casos es mejor usar coordenadas cartesianas, pero hay muchos otros (como el del problema anterior) para los que es mejor usar polares

¿El ejemplo típico de movimiento para el cual es mejor usar polares?

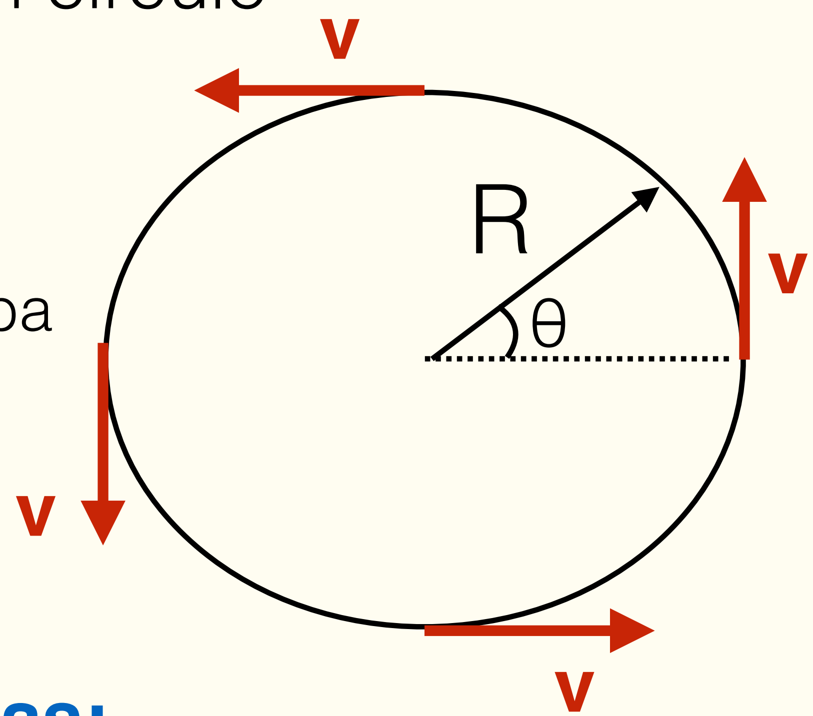
¡movimiento circular!

Movimiento Circular

Consideremos un objeto (el que sea) en movimiento circular, es decir que su trayectoria describe un círculo



visto desde arriba



Algunas preguntas:

1) ¿En qué dirección va la velocidad?

Demostramos que: $\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

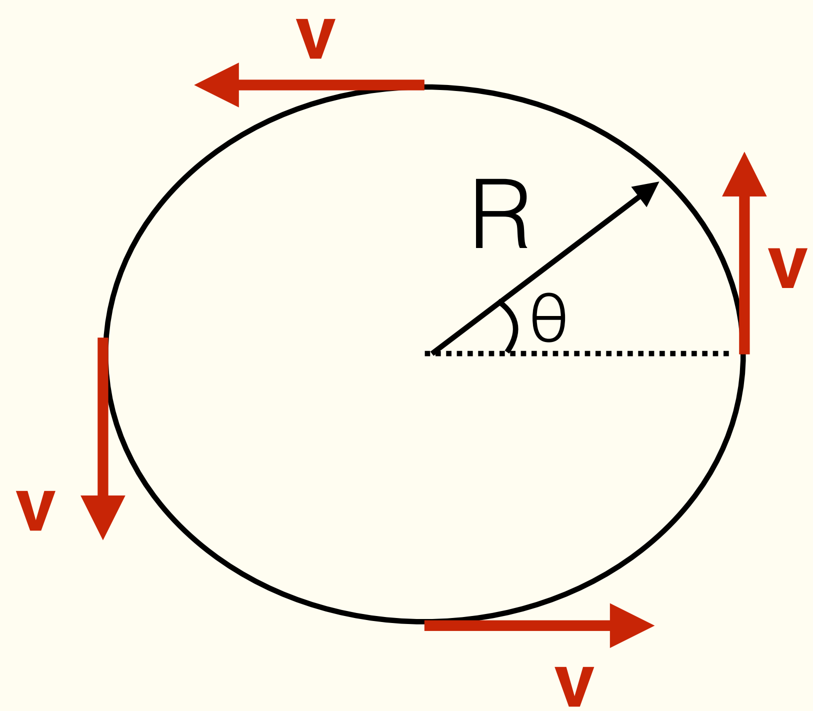
Para movimiento circular $r = R$ (constante) por lo que $\dot{r} = 0$ y

$$\vec{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Conclusión: en movimiento circular la velocidad sólo tiene componente en la dirección transversal (θ) y no en la radial ($v = v_\theta$)

Movimiento Circular

Nota: la velocidad angular $\dot{\theta}$ es el ángulo girado por segundo, y también se le denomina comúnmente "velocidad angular" con la letra "omega" minúscula (ω)



2) ¿Cómo se relaciona el periodo con la velocidad angular ω?

El periodo τ es el tiempo que el objeto tarda en recorrer una vuelta entera, es decir 2π radianes. Por ende:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

3) ¿Cómo se relacionan la velocidad y la velocidad angular ω?

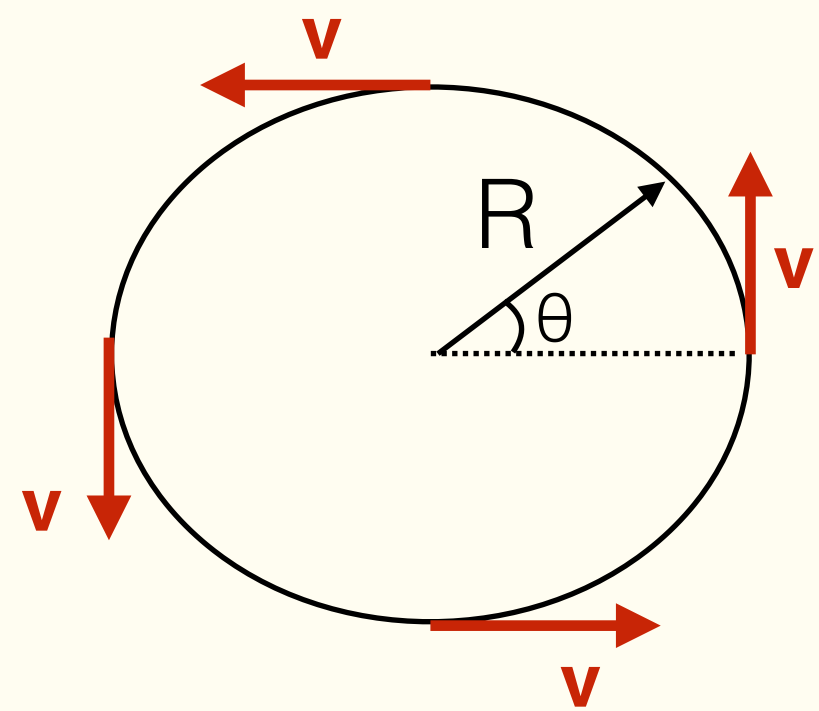
Una vuelta entera (2π) corresponde a una distancia de 2πr, por lo que

$$v_\theta = \frac{2\pi r}{\tau} = \frac{2\pi r\omega}{2\pi} = r\omega$$

v_θ

Nótese que esto también lo vemos en la ecuación general: $\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + \boxed{r\dot{\theta}}\hat{e}_\theta$

Movimiento Circular



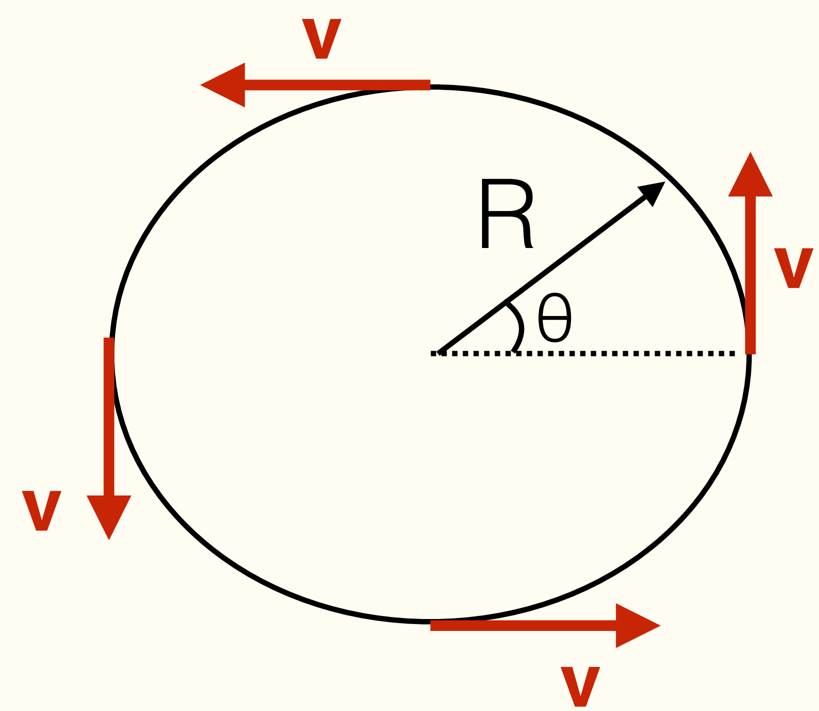
4) ¿Es posible tener movimiento circular sin que haya aceleración?

¡¡No!!

Tiene que haber aceleración, ya que la velocidad está cambiando (de dirección al menos)

Mismo si la rapidez (magnitud de la velocidad) no cambia, aún así la dirección tiene que cambiar para estar en movimiento circular. De otra forma su trayectoria sería una línea recta. **¡Tiene que haber una aceleración!**

Movimiento Circular



5) ¿Cuál es la dirección y magnitud de la aceleración que se necesita para mantener un objeto en movimiento circular uniforme?

Para movimiento circular $r = R$ (constante) por lo que $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$

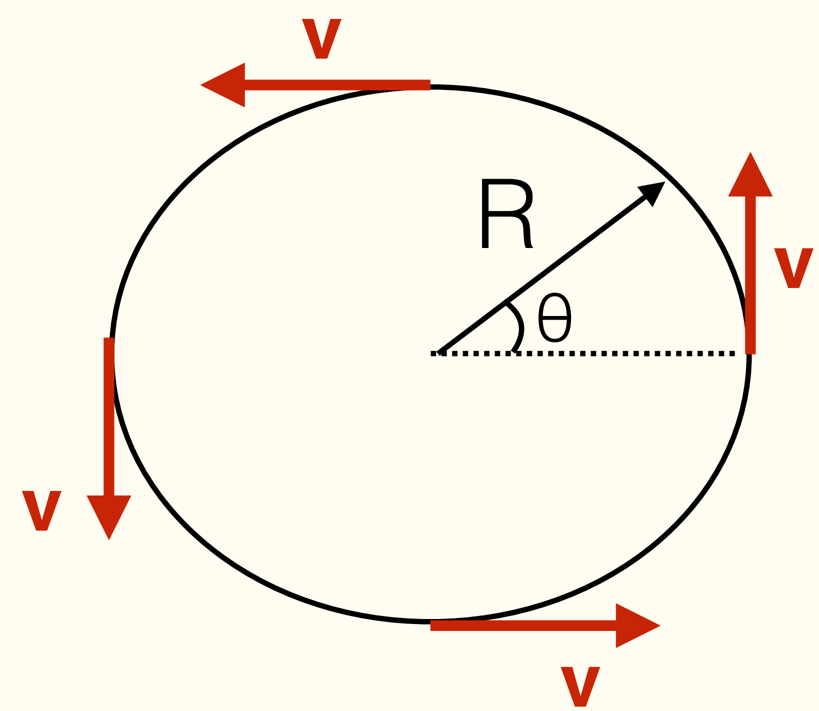
Si aparte consideramos que el movimiento es circular uniforme, es decir con rapidez constante, entonces $\ddot{\theta} = 0$

Utilizando la ecuación "fea" que derivamos:

$$\vec{a}(t) = \left(\cancelto{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\cancelto{0}{2\dot{r}\dot{\theta}} + \cancelto{0}{r\ddot{\theta}}\right)\hat{e}_\theta$$

Nos queda: $\vec{a}_C(t) = -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r = -\dfrac{\upsilon^2}{r}\hat{e}_r$

Movimiento Circular



6) ¿Y si el movimiento no es uniforme (es decir no es a rapidez constante)?

En este caso:

$$\vec{a}(t) = \left(\cancelto{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\cancelto{0}{\dot{r}}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

Aparte de la aceleración centrípeta, se requiere una aceleración <u>tangencial</u>

$$\vec{a}_t(t) = r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Pero $r\ddot{\theta} = r\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) = r\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) = \dot{v}$, lo cual no es sorprendente

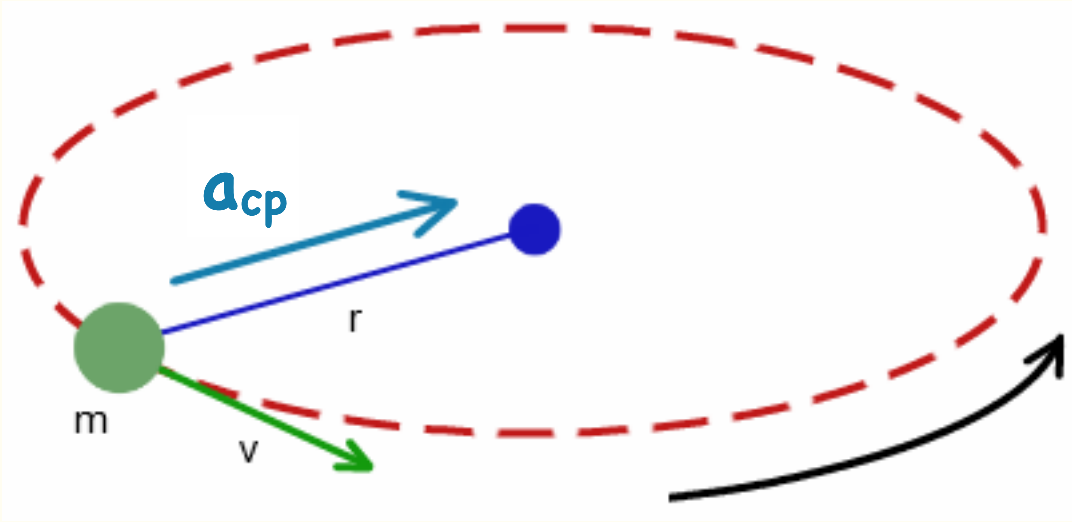
Aceleración y Movimiento Circular

Concluimos que **para que un objeto se encuentre en movimiento circular siempre se requiere al menos una aceleración centrípeta (es decir dirigida hacia el centro del círculo)**:

$$\boxed{a_C = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{r}}$$

Si aparte la rapidez está cambiando, **también se requiere una aceleración tangencial**:

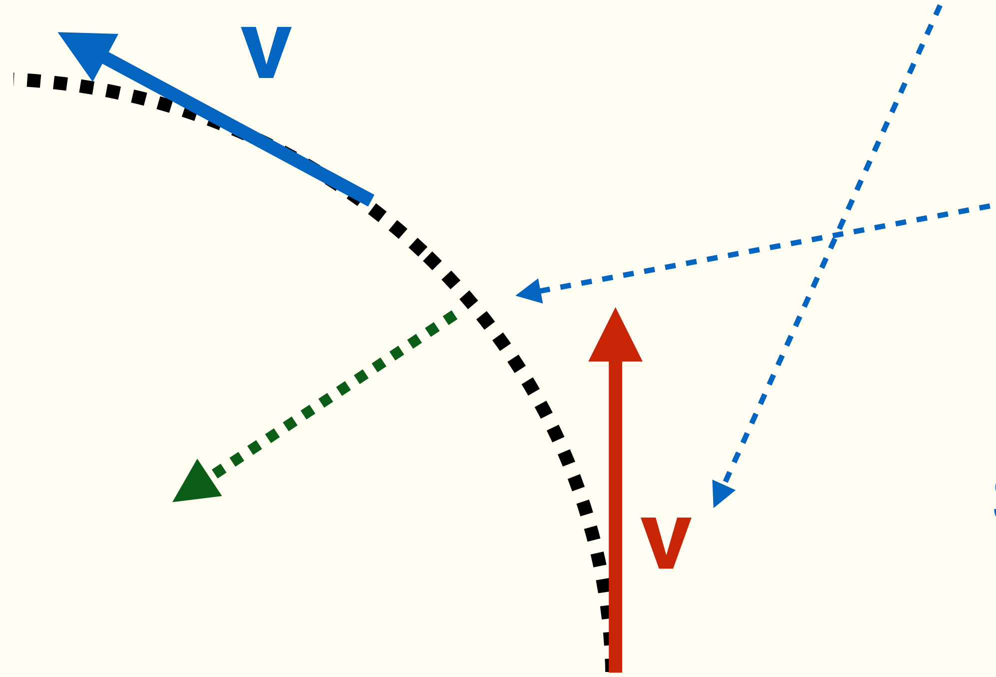
$$\boxed{a_t(t) = r\ddot{\theta} = \dot{v}}$$



Si un objeto está en movimiento circular, forzosamente algo tiene que estar proveyendo la aceleración centrípeta (una cuerda, la gravedad, roce con el suelo…. etc), o de otra forma no estaría en movimiento circular.

¿Suena raro?

Tal vez parezca raro que se requiera una aceleración centrípeta para movimiento circular, pero no lo es

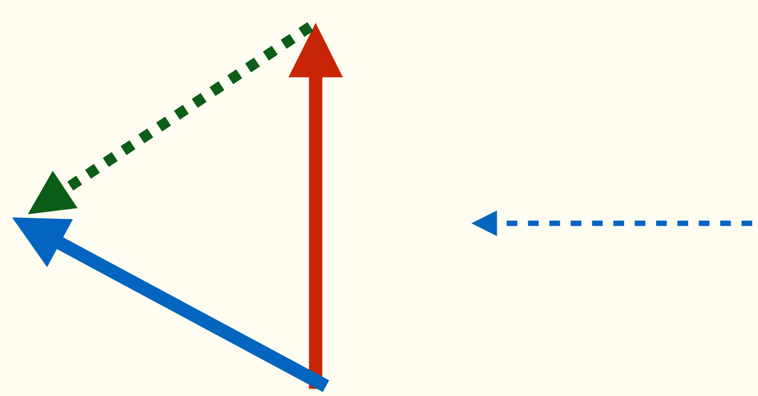


Si le impartimos a un objeto una velocidad hacia arriba, y no hay aceleración, se iría hacia arriba.

Pero si hay una aceleración hacia la izquierda, la trayectoria se va a curvar un poco hacia ese lado.

Si le seguimos aplicando una aceleración perpendicular a la velocidad, se va a seguir curvando indefinidamente.

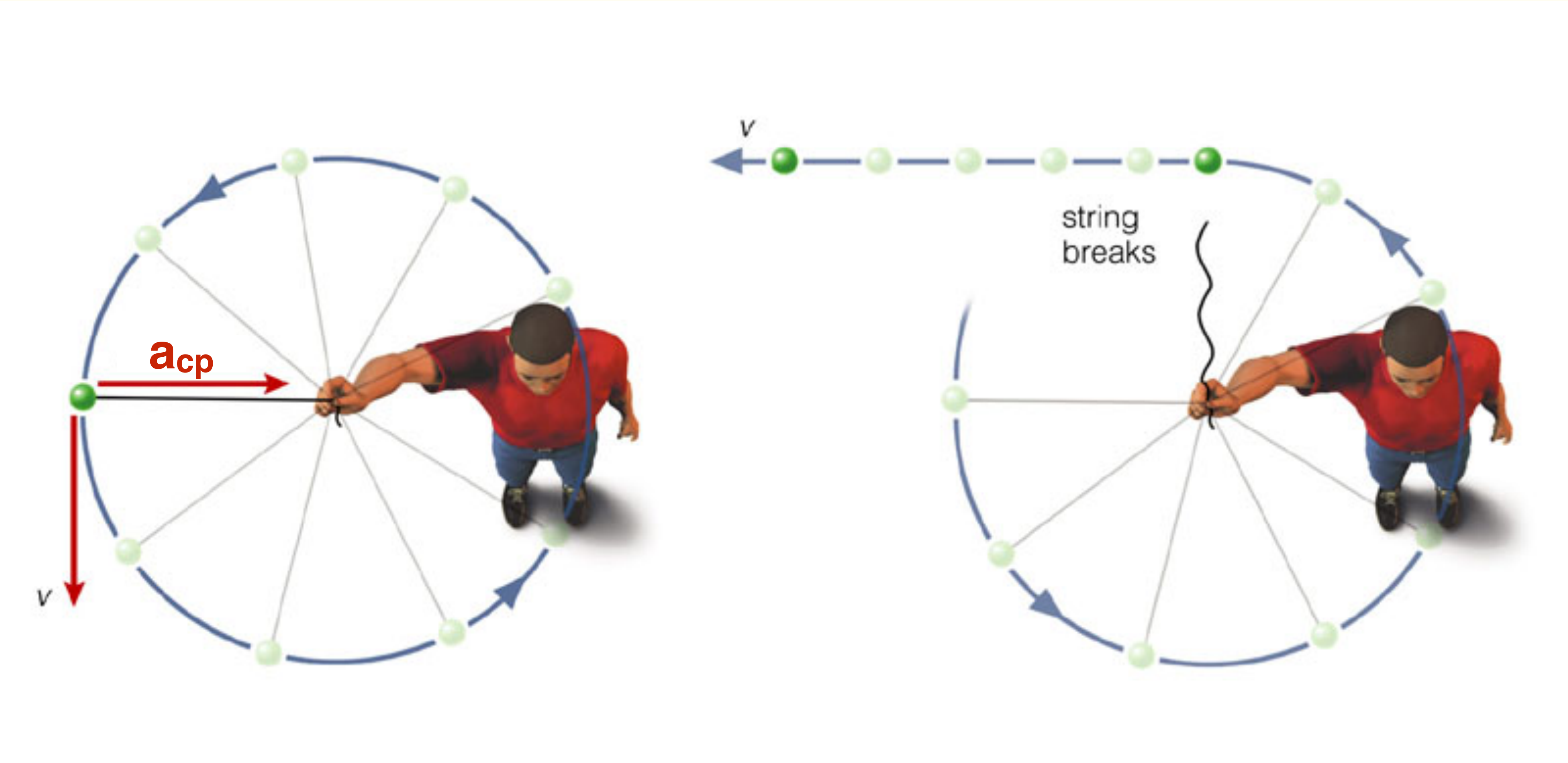
Otra forma de verlo:



La aceleración es el cambio en velocidad por unidad de tiempo. Si se toma la diferencia en la velocidad de los dos instantes mostrados arriba, el resultado es un vector que apunta hacia el centro

Ejemplo Típico

Una de las ilustraciones más claras es el un objeto sostenido por una cuerda:

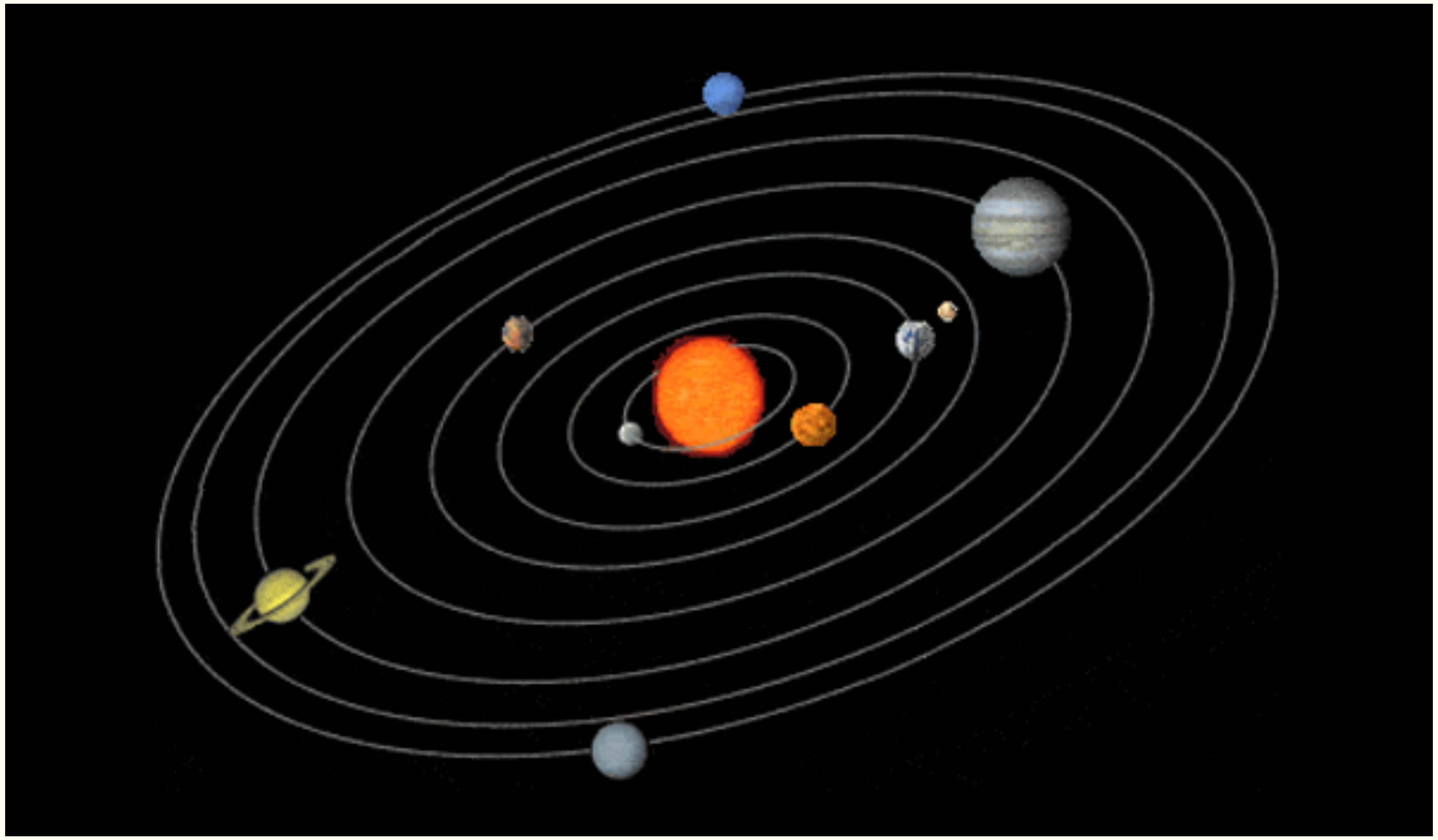


Cuando la cuerda se rompe o se suelta, el movimiento circular cesa y el objeto se va en línea recta.

¡Así funciona el universo!

¿Dónde se ve esto de forma muy clara?

¡En el sistema solar (y en el universo en general)!



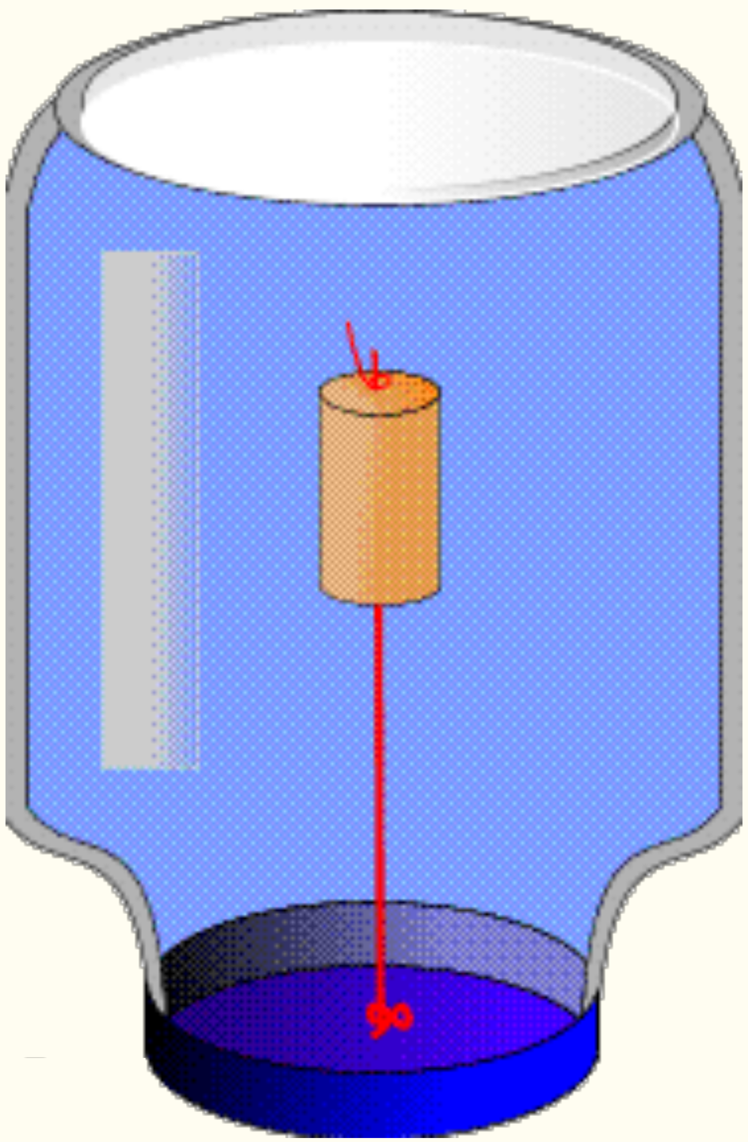
No sólo los planetas del sistema solar orbitan el sol, sino el sol orbita el centro de la galaxia. Incluso, hoyos negros pueden orbitar otros hoyos negros… etc.

¿Qué provee la aceleración centrípeta en este caso?

la gravedad

Experimento

¿En qué dirección se mueve el corcho si ponemos la jarra en movimiento circular?



¡hacia el centro!

Sobre el Experimento

¿Por qué sucede esto? Si uno se sube a la máquina de entrenamiento de los astronautas ("high-G training"), ¿hacia donde se siente la fuerza?

Así se ve en "Los Simpsons":

Así se ve en la vida real:

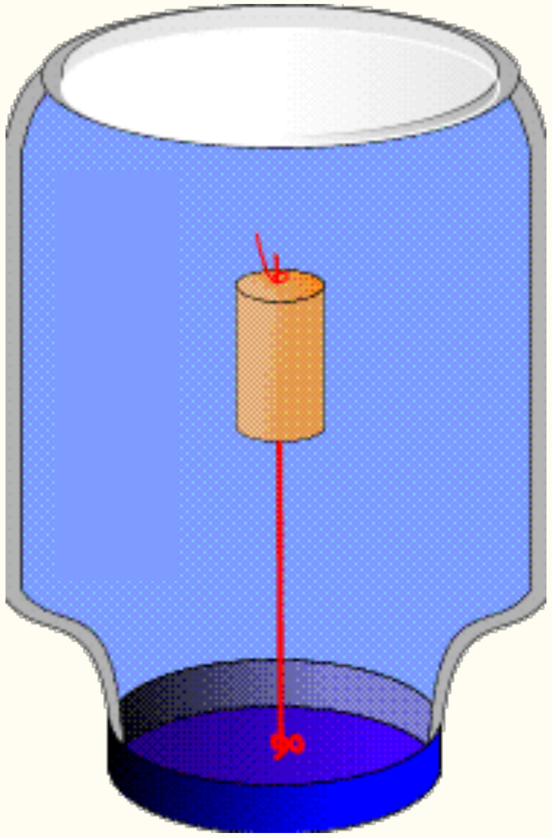
Sobre el Experimento

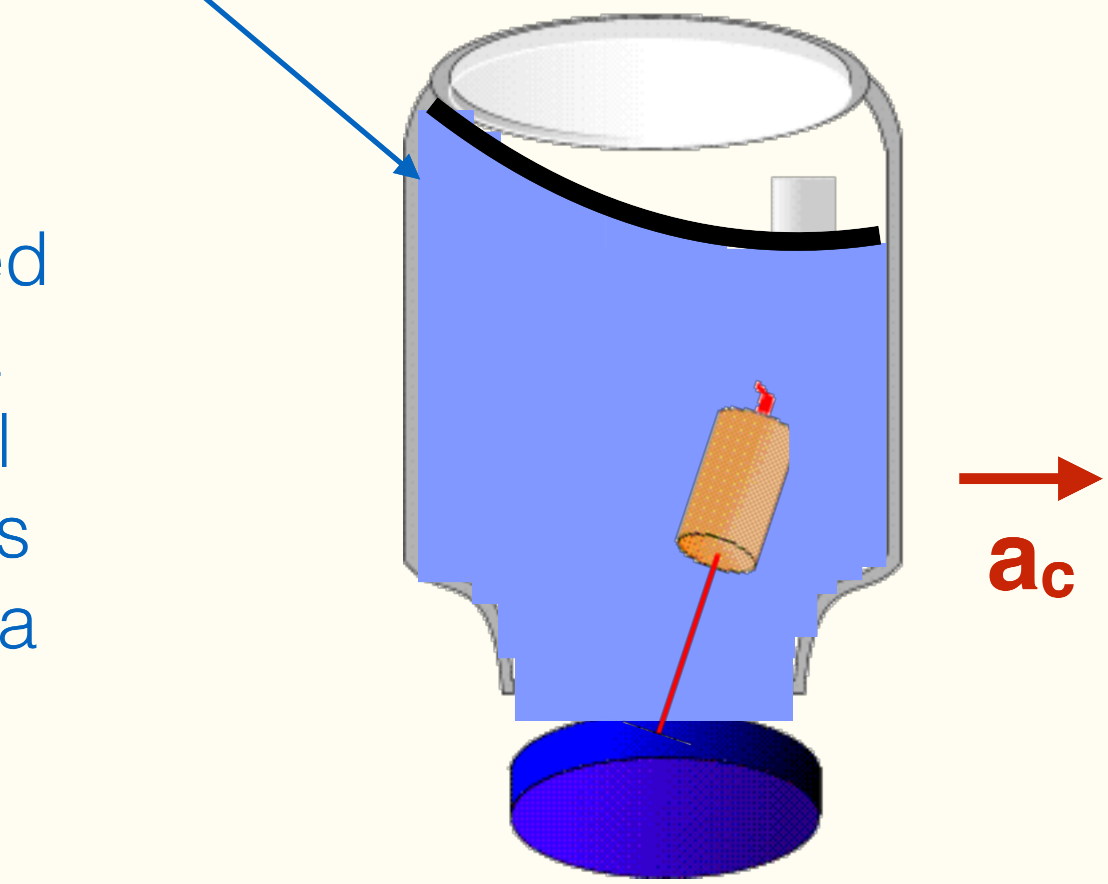
¿Por qué entonces el corcho se mueve hacia adentro?

Lo que pasa es que el corcho está sumergido en agua

El agua hace lo mismo que el astronauta al entrar en movimiento circular, es decir se presiona contra la pared exterior.

Esto es porque para estar en movimiento circular se necesita una aceleración centrípeta, que en este caso provee la pared de la jarra (o la pared de la máquina de la NASA en el caso del astronauta). Desde el punto de vista del agua y del astronauta, es como si una "fuerza invisible" los presionara contra la pared, en dirección opuesta al centro.





Sobre el Experimento

El agua es más densa que el corcho, por lo que tiene más inercia (es decir resiste más el cambio de movimiento).

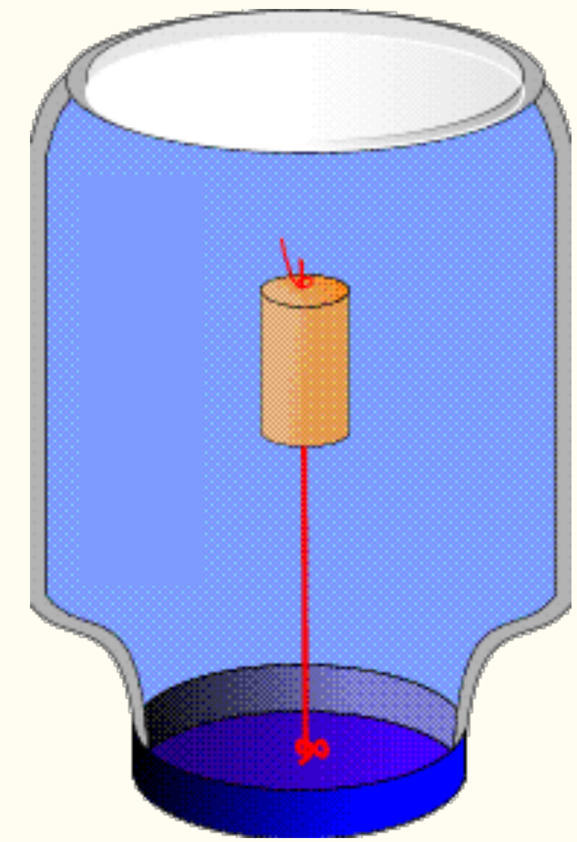
Conforme el agua se mueve hacia la pared externa, el corcho se mueve en la dirección opuesta para dar lugar al desplazamiento del agua

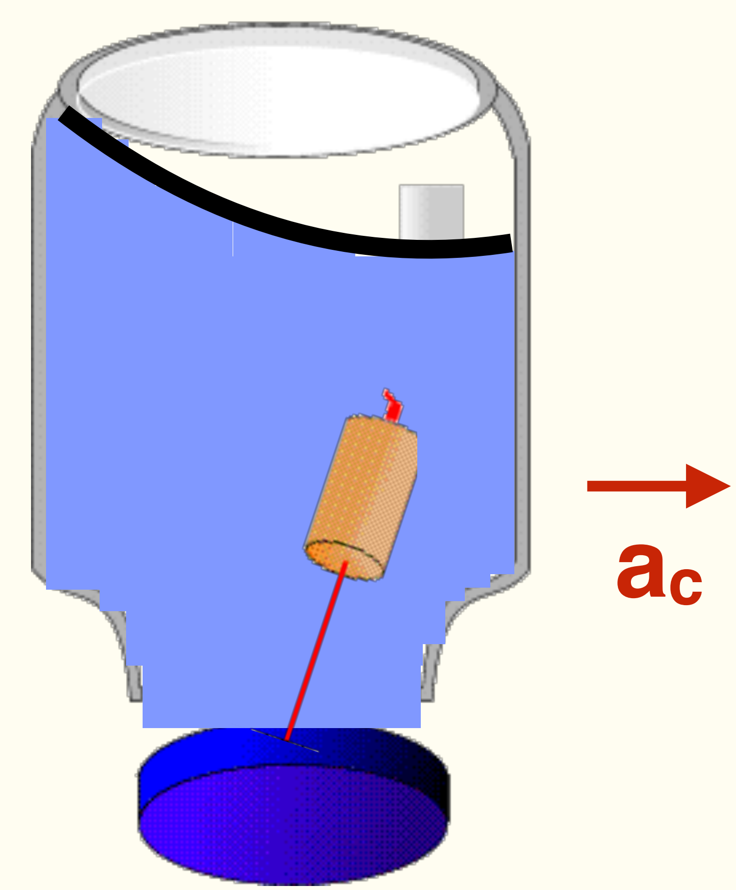
En otras palabras: el corcho siempre apunta en la dirección de la aceleración. Este dispositivo es lo que se llama un "acelerómetro", nomás que uno muy básico

Para mayor información: http://resources.yesican-science.ca/SS_version1/ss/g08/me/unit2_effg08.html

Video de este tipo de acelerómetro en un auto (en francés) https://www.youtube.com/watch?v=_J5zE-LuAzc

Nota: este es el principio bajo el cual opera una centrifugadora





Experimento sugerido

Sugerencia: tomen un globo de Helio, y súbanlo a su auto. ¿Hacia donde se mueve al acelerar, al frenar, y al dar vuelta?

Explicación: http://www.physicscentral.com/experiment/askaphysicist/physics-answer.cfm?uid=20130711030801

Video (en inglés): https://www.youtube.com/watch?v=y8mzDvpKzfY

Otro video (en inglés): https://www.youtube.com/watch?v=XXpURFYgR2E

Aplicaciones de Acelerómetros

Los acelerómetros son extremadamente comunes. Algunos ejemplos:

¡¡El acelerómetro de un iPhone 4 mide aproximadamente 3x3x1 milímetros!!

Así es como el teléfono sabe distinguir "arriba" de "abajo" y cómo puede ajustar la imagen cuando uno lo rota.

Los controles de las consolas como Wii o Play Station tienen "acelerómetros de tres ejes"

Excelente video sobre cómo funciona el acelerómetro de un teléfono en: https://www.youtube.com/watch?v=KZVgKu6v808

Antes de terminar con Cinemática, vamos a ver muy brevemente el movimiento relativo de dos partículas utilizando marcos de referencia en translación.

Movimiento Relativo

12.10 Relative-Motion of Two Particles Using Translating Axes

Throughout this chapter the absolute motion of a particle has been determined using a single fixed reference frame. There are many cases, however, where the path of motion for a particle is complicated, so that it may be easier to analyze the motion in parts by using two or more frames of reference. For example, the motion of a particle located at the tip of an airplane propeller, while the plane is in flight, is more easily described if one observes first the motion of the airplane from a fixed reference and then superimposes (vectorially) the circular motion of the particle measured from a reference attached to the airplane.

Kinematics of a Particle 12

CHAPTER OBJECTIVES

- To introduce the concepts of position, displacement, velocity, and acceleration.
- To study particle motion along a straight line and represent this motion graphically.
- To investigate particle motion along a curved path using different coordinate systems.
- To present an analysis of dependent motion of two particles.
- To examine the principles of relative motion of two particles using translating axes.

Sección 12.10 del Hibbeler

3.5 Velocidad relativa

Sin duda usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación en la que se entiende que la velocidad relativa es muy importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos a un plano.

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES 3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.

Seccion 3.5 del Young & Freedman

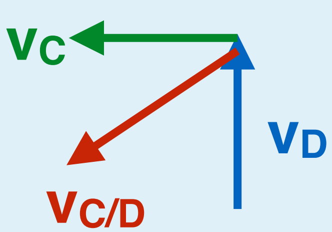
Motivación

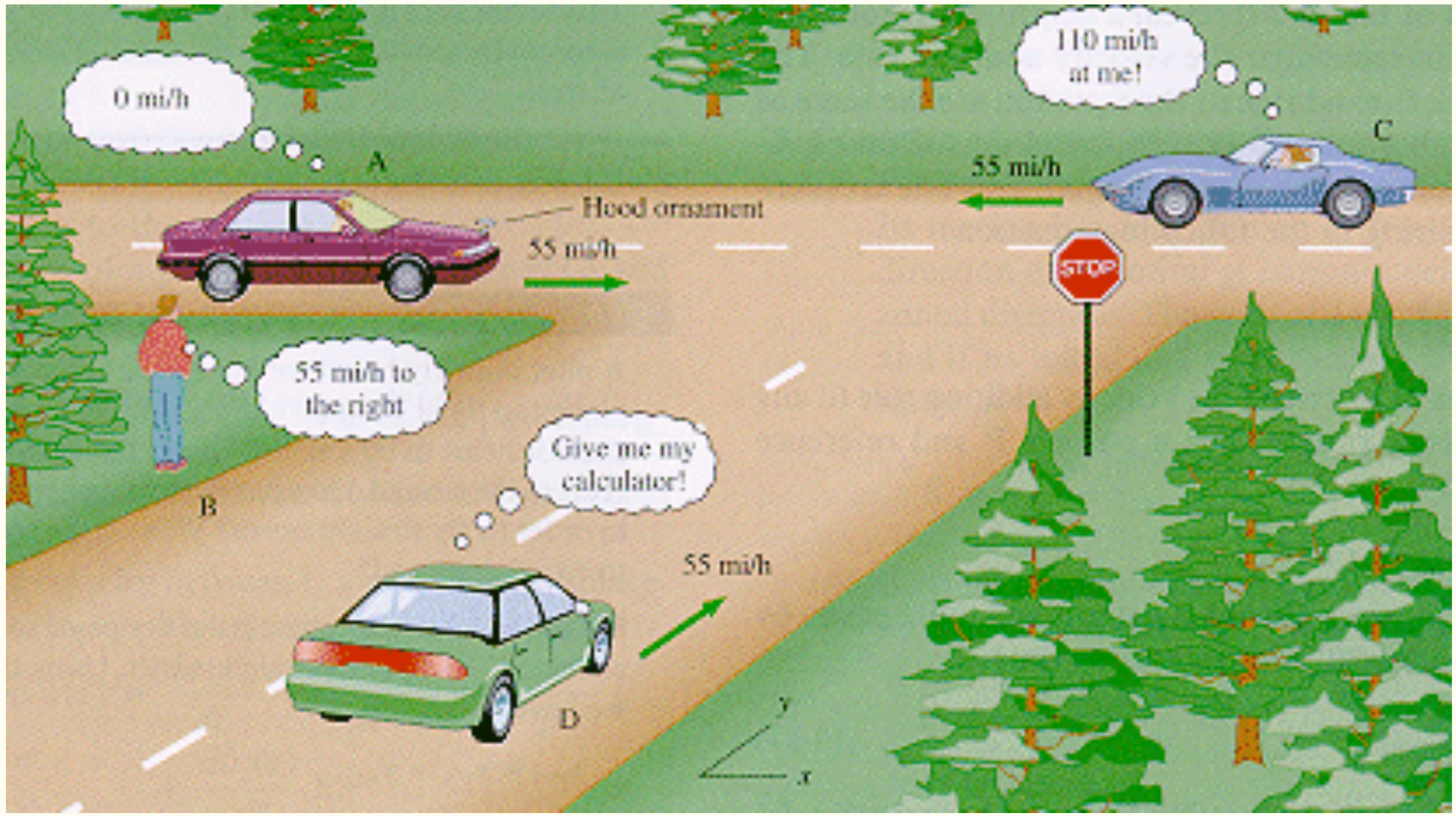
¡El movimiento es relativo!

Ejemplo con velocidades:

- **A** ve que el objeto en el capó no se mueve
- **B** ve que **A** se mueve hacia la derecha con 55 millas/hora.
- **C** ve que **A** viene a 110 m/h hacia él.
- **D** ve a **C** moviéndose con un ángulo:

(vista desde arriba)





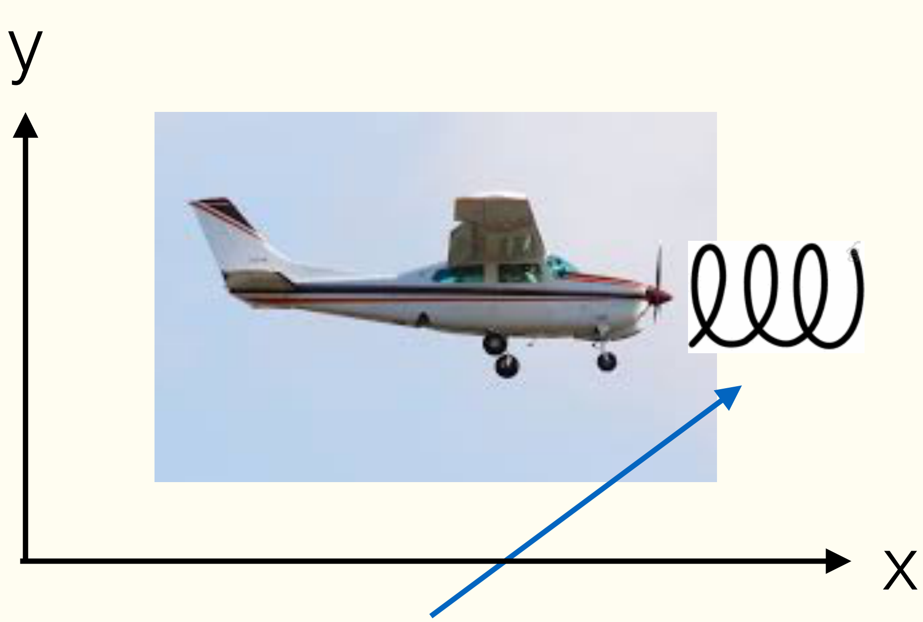
La posición, la velocidad y la aceleración dependen respectivamente de la posición, velocidad y aceleración del observador

Motivación

Hay algunos tipos de movimiento que son más fáciles de estudiar utilizando dos marcos de referencia en lugar de uno solo

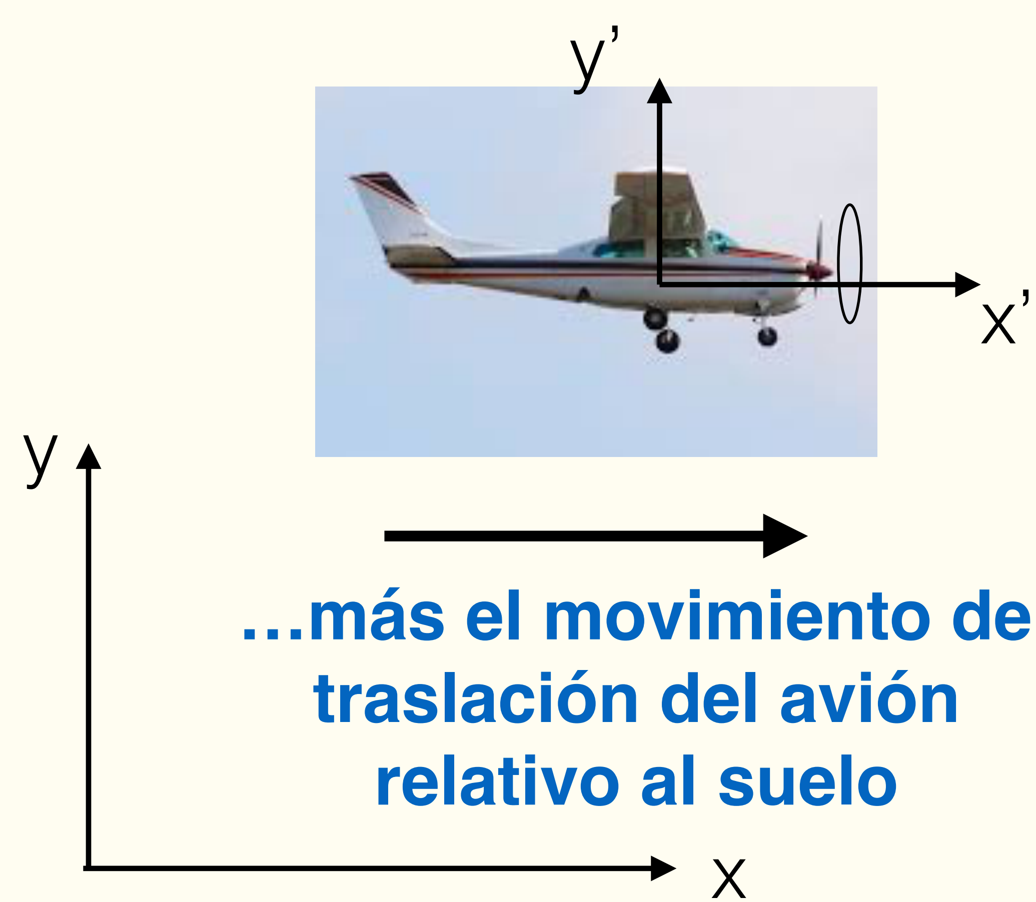
¿Ejemplo?

La punta de la hélice de un avión



Visto desde el suelo el movimiento describe una espiral

Pero puede ser más fácil entenderlo como un movimiento de rotación visto desde el avión…



…más el movimiento de traslación del avión relativo al suelo

Relación entre Posiciones

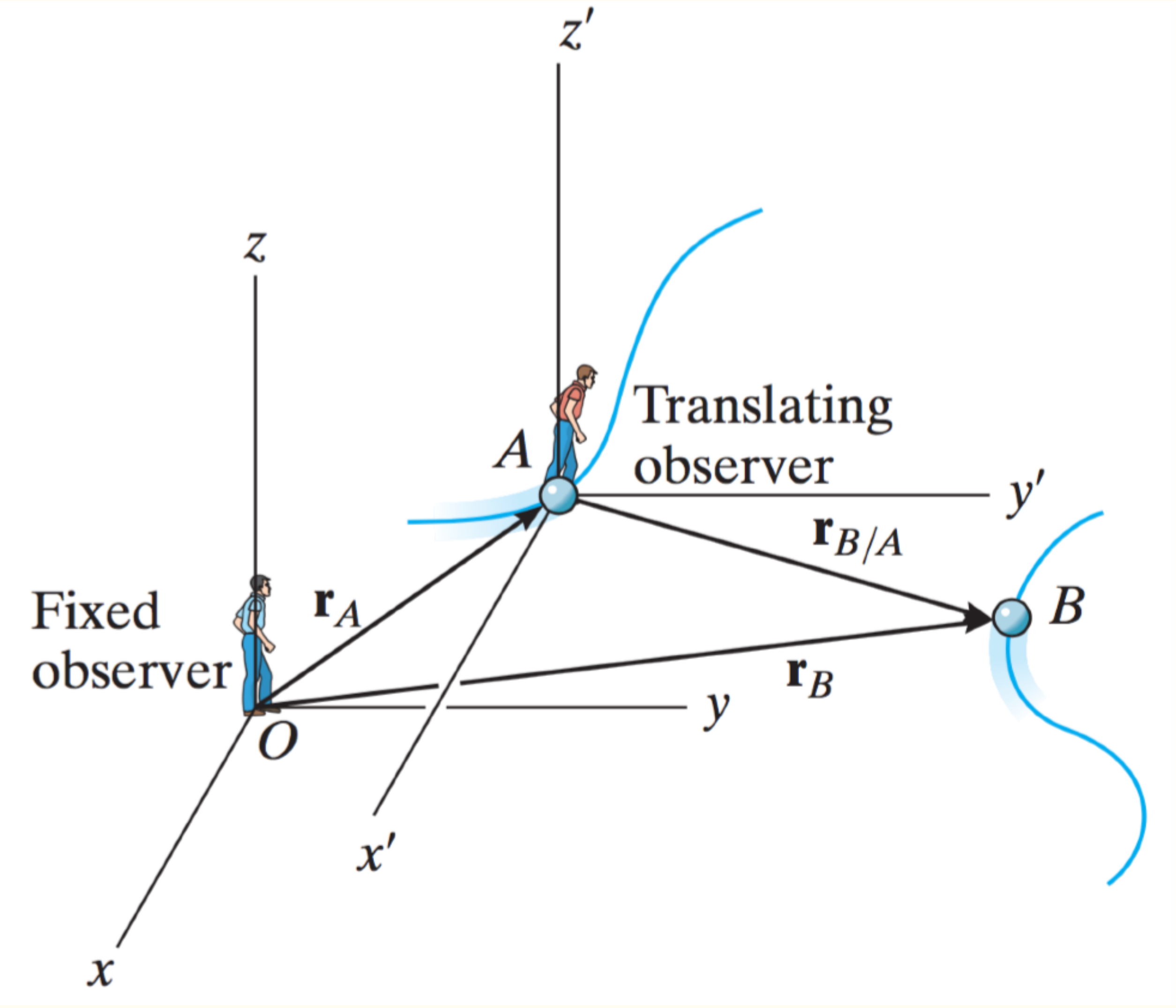
Consideremos el caso general, de un marco de referencia (x',y',z') centrado en A que se traslada respecto a otro marco de referencia fijo (x,y,z) centrado en O.

Si la posición de A desde O es $\mathbf{r}_A$, y la posición de B desde A es $\mathbf{r}_{B/A}$, ¿cuál es la posición $\mathbf{r}_B$ de B desde O?

$$\boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}}$$

(o, como es tal vez más fácil recordarlo,

$$\boxed{\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}$$)



Relación entre Velocidades y Aceleraciones

Podemos derivar la expresión anterior respecto al tiempo para obtener una relación entre las velocidades:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{r}_{B/A})$$

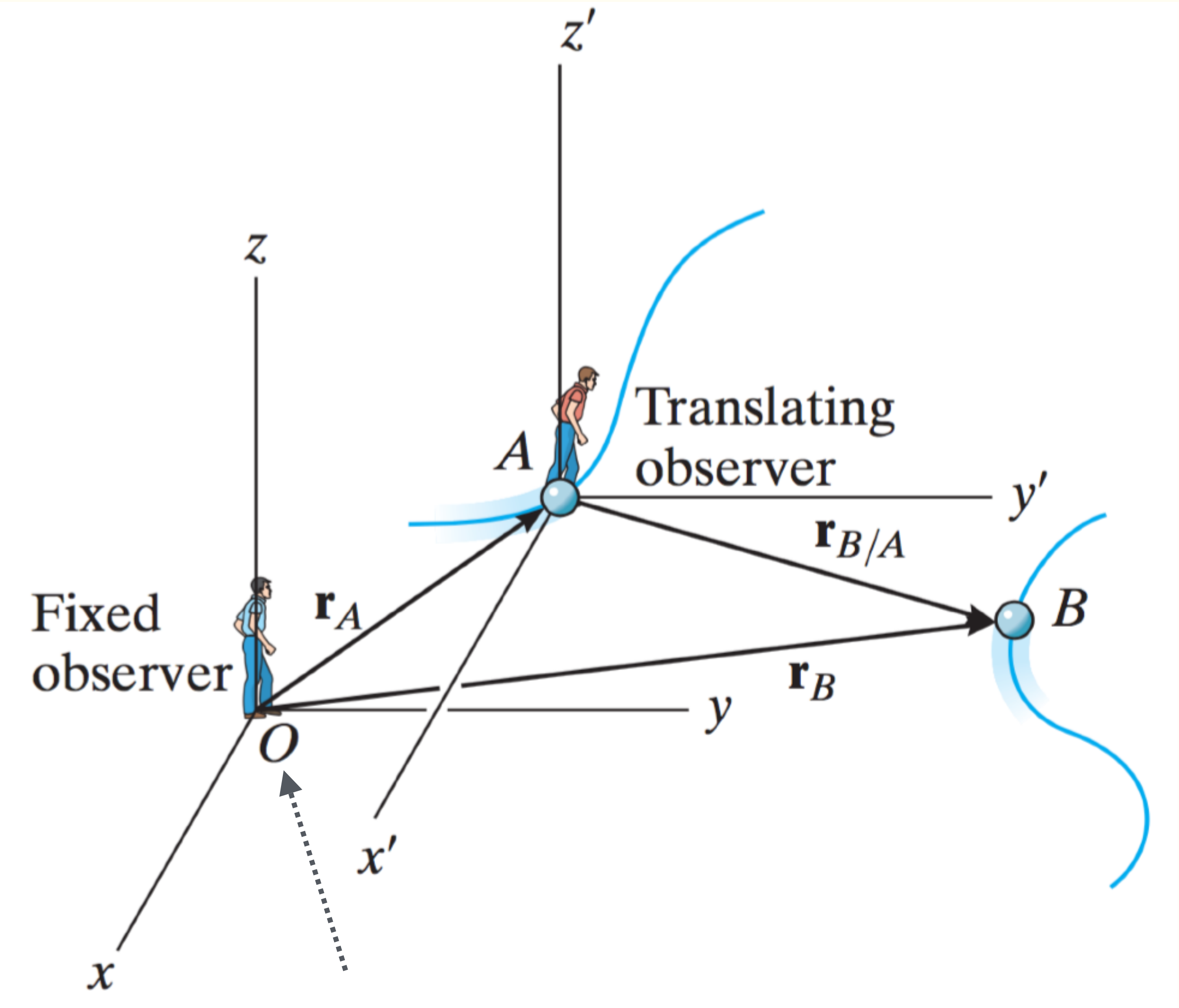
nos queda:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$

velocidad del objeto B respecto al marco fijo O

velocidad del marco de referencia A respecto al marco fijo O

velocidad del objeto B medida en el marco de referencia en movimiento A



Podemos derivar una vez más y nos queda:

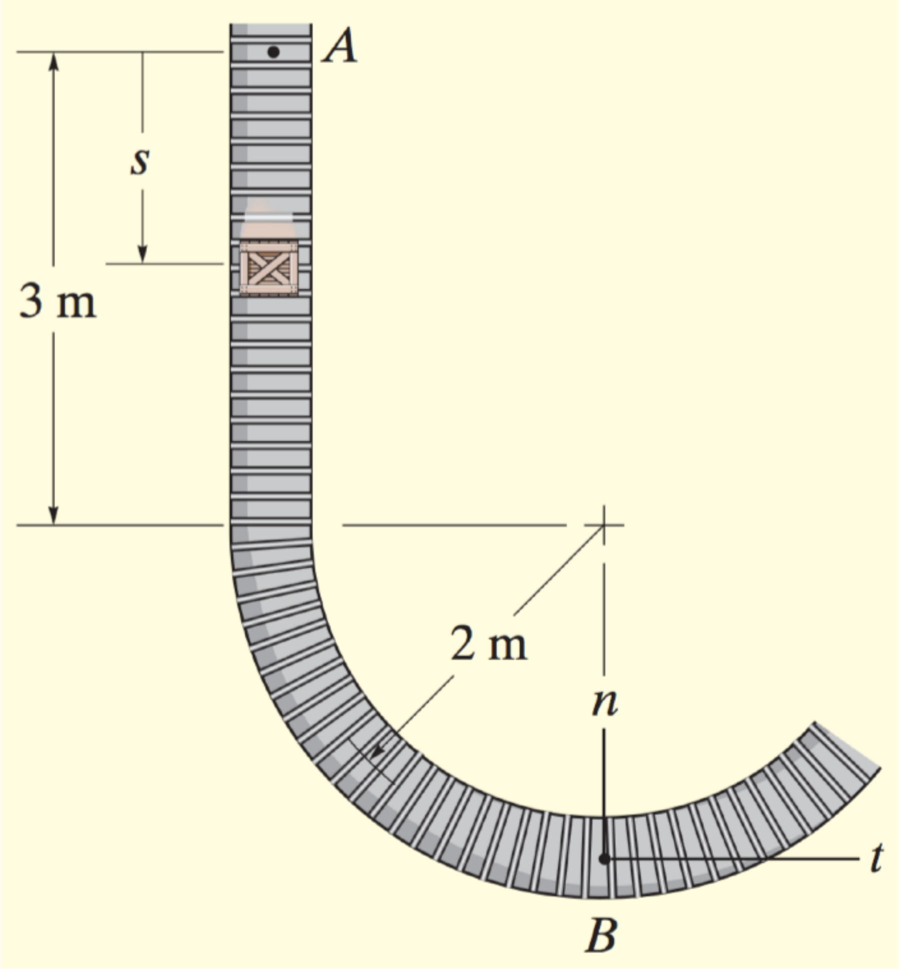
$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}}$$

Nota: en realidad el observador O también podría estar en movimiento y las ecuaciones no cambiarían. Lo importante es saber el movimiento de A respecto a O.

Ejemplo #1

(Ejemplo Resuelto 12.16 en el Hibbeler)

Unas cajas avanzan por una cinta transportadora como se muestra en la figura. Si una caja inicia del reposo en A, e incrementa su rapidez con una aceleración a_t=0.2t m/s^2, donde t está medido en segundos, determine la magnitud de la aceleración cuando llega a B

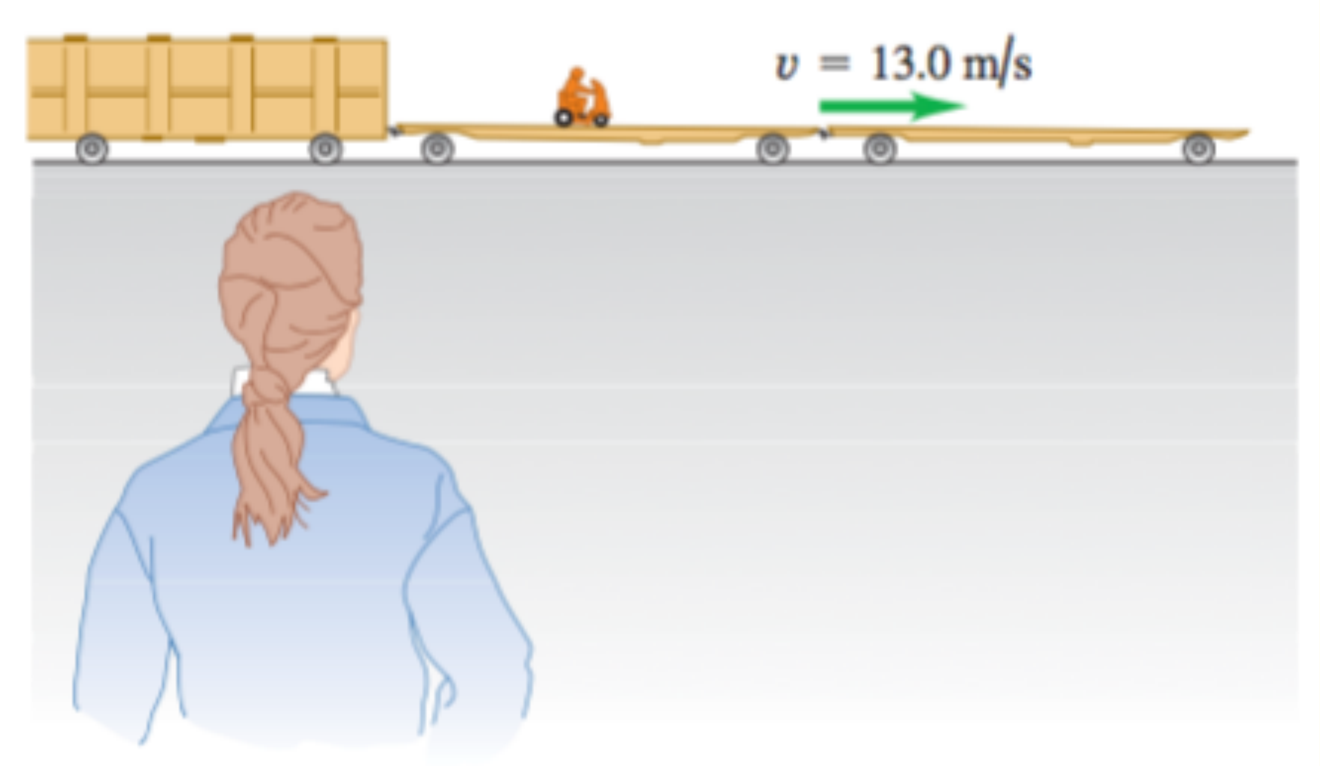


Respuesta: 5.36 m/s^2

Ejemplo #2

(3.36 en el Young&Freedman)

Un vagón abierto de ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0m/s relativa a un observador parado en la tierra. Alguien se mueve en motoneta sobre el vagón abierto, como mostrado en la figura. ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa al vagón abierto si su velocidad relativa al observador en el suelo es (a) 18.0m/s, (b) 3.0m/s a la izquierda, (c) cero?



¡bastante papas!

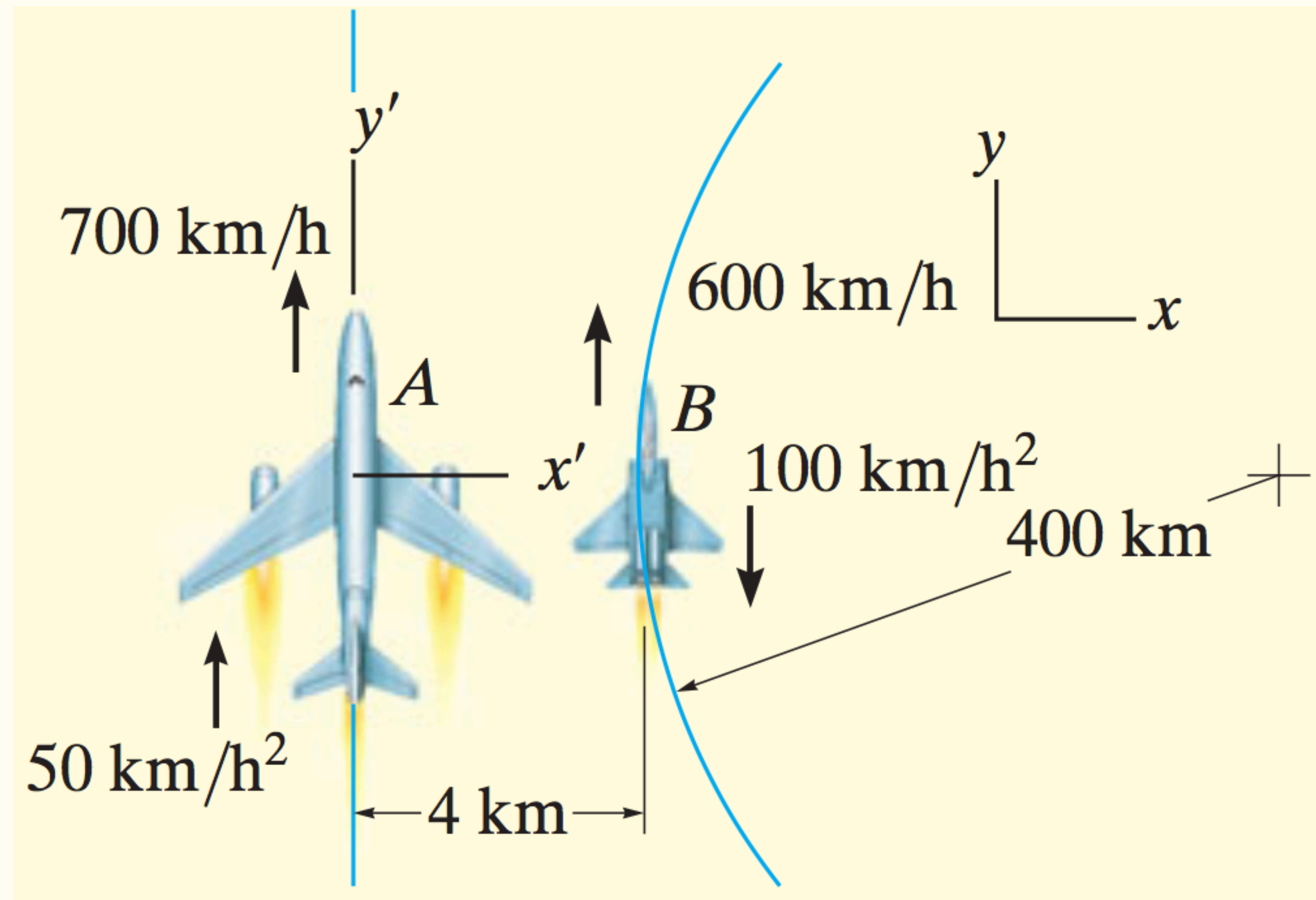
(resolver en pizarra)

Respuestas: (a) 5m/s, (b) -16m/s, (c) 13m/s (a la izquierda)

Ejemplo #3

(Ejemplo resuelto 12.26 en el Hibbeler)

El avión A en la figura vuela en línea recta, mientras que el avión B sigue una trayectoria circular de radio R=400km. Determine (a) la velocidad y (b) la aceleración de B como medida por A en el instante mostrado.



(resolver en pizarra)

Respuestas:

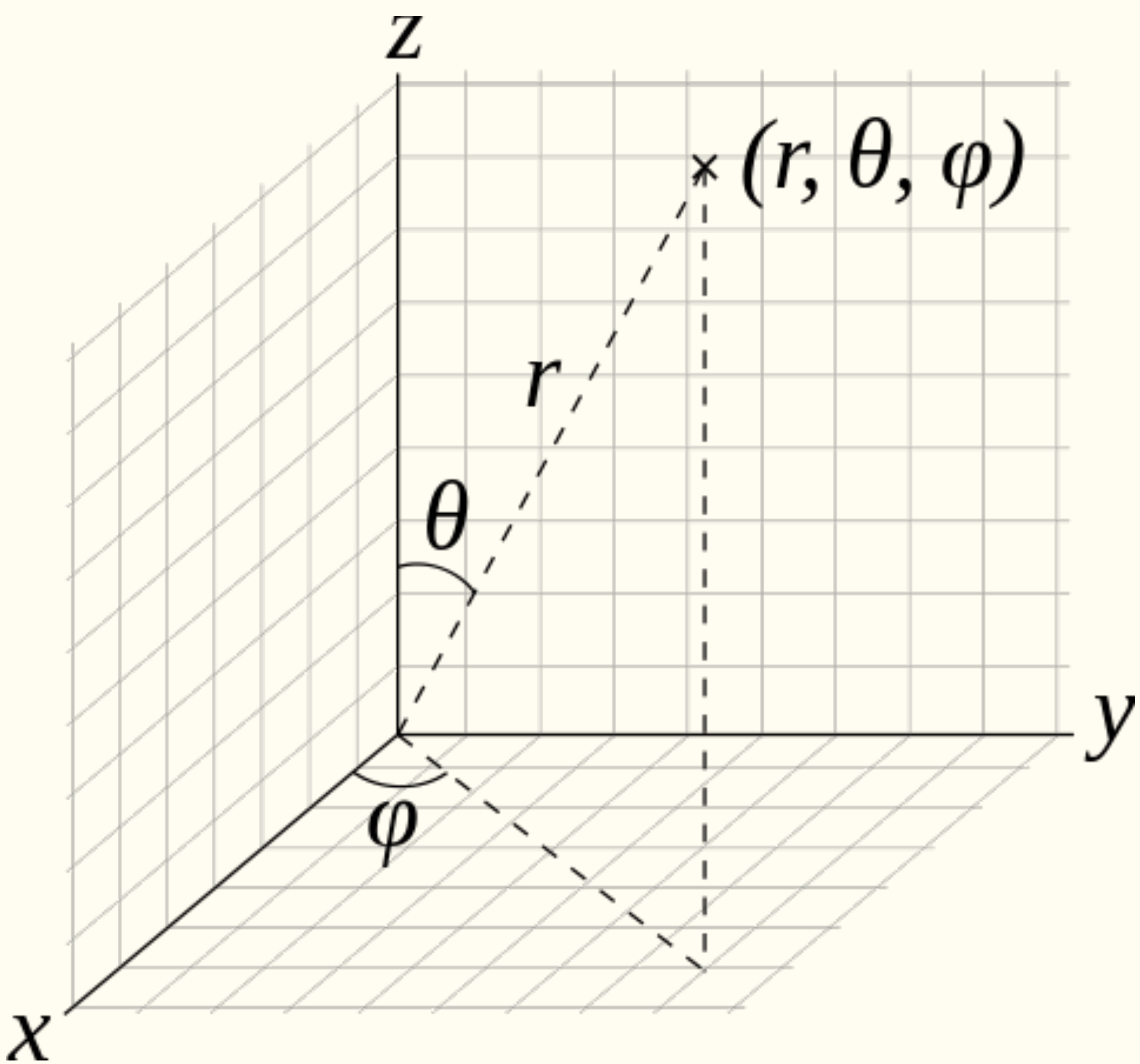
$$(a)\ \vec{v}_{B/A} = -100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,\hat{j}$$

$$(b)\ \vec{a}_{B/A} = 900\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}\,\hat{i} - 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}\,\hat{j}$$

Próxima clase: cinemática de una partícula

Coordenadas Esféricas

El mismo razonamiento que aplicamos a coordenadas polares/cilíndricas lo podemos aplicar a coordenadas esféricas



En este sistema, un punto en el espacio se ubica con tres cantidades: una distancia (r) y dos ángulos (θ, ϕ)

De esféricas a cartesianas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

De cartesianas a esféricas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Nota: esta es la definición más común, aunque algunos libros definen los ángulos de forma diferente.

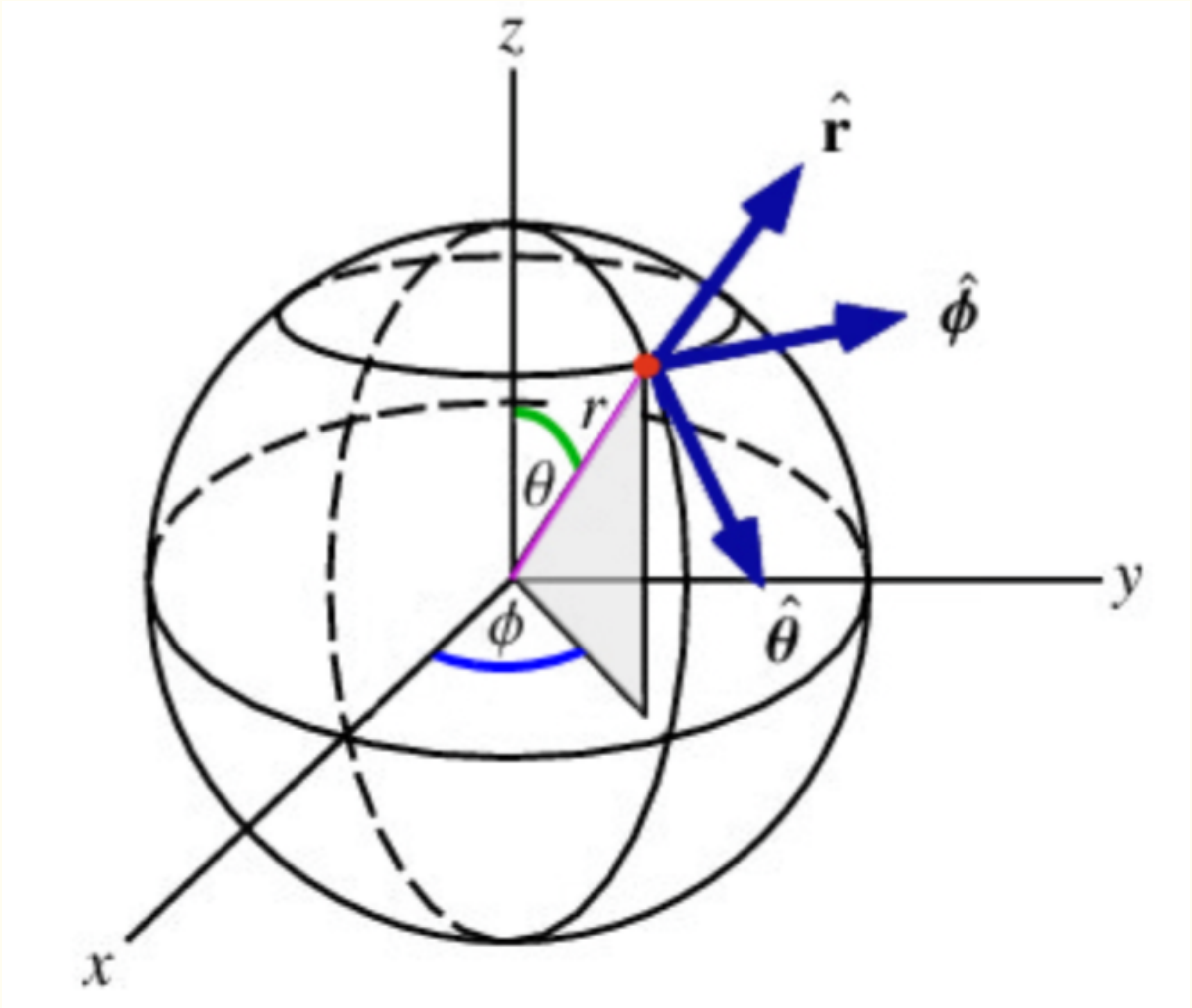
Coordenadas Esféricas

Los vectores unitarios se pueden expresar en función de coordenadas cartesianas como:

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$



(esto no se va a demostrar en clase)

Velocidad y Aceleración en Esféricas

Si uno calcula las derivadas temporales de los vectores unitarios, y utiliza el resultado para calcular expresiones generales para la velocidad y la aceleración de la misma forma que lo hicimos en polares, el resultado es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}$$

$$+\left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{\phi}$$

Esto es demasiado trabajo, por lo que no lo haremos en clase.

No necesitan memorizar esto. Lo importante es que lo sepan usar si fuera necesario

(Se puede encontrar la demostración completa en https://www.ece.nus.edu.sg/stfpage/elehht/Teaching/EE2011%20Part%20A/Lecture%20Notes%5CSupplementary%20Notes%5CSpherical%20coordinate%20system%20-%20grad,%20div,%20curl,%20Laplacian.pdf)

Experimento

Paréntesis: ¿Para qué estamos haciendo todo este trabajo duro con coordenadas polares?

+