Estática y Dinámica

Clases Impulso y Momentum 1

1. Sistema
2. Definición de momento lineal
3. Centro de Masa
4. Conservación del momento lineal
5. Impulso y momento

1. Sistema

En las clases precedentes en general analizamos sistemas compuestos por una sola partícula. A partir de ahora en la mayoría de las situaciones tendremos que lidiar con un número de objetos que interactúan entre sí. Para analizar estas situaciones el primer paso en el análisis será separar el objeto u objetos de interés del resto del universo:

Cualquier grupo de objetos que podamos separar, en nuestras mentes, del medio que los rodea es un sistema.

Por ejemplo, cuando consideramos colisiones entre dos carros en un riel con fricción despreciable, podríamos considerar ambos carros como el sistema. Cuando alguien lanza una bola y estamos interesados sólo en el movimiento de la bola, una elección lógica de sistema podría ser la bola en sí. Una vez que hemos escogido la bola como nuestro sistema, todo aquello que esté fuera de este constituye el medio exterior.

Esta separación imaginaria del universo en dos partes (objetos dentro del sistema y todo lo demás en el resto del universo) hace posible desarrollar procedimientos de cálculo simples y al mismo tiempo poderosos.

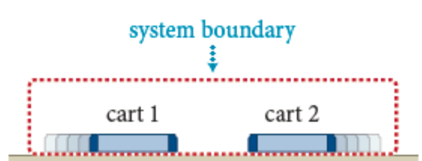
Cuando resolvamos problemas debemos imaginar una frontera encerrando a los objetos de interés. Lo que está dentro de esta frontera bien definida constituye nuestro sistema y lo que está fuera el ambiente. La región del espacio encerrada en la frontera del sistema puede ser extensa y contener en esta una gran cantidad de procesos o acciones o contrariamente podría ser muy pequeña y contener cuerpos que no cambien su estado.

La forma precisa de la frontera del sistema no es importante, lo que cuenta es separar de manera detallada los objetos dentro del sistema de los que están fuera. Para hacer esta separación explicita en general es conveniente útil hacer una separación pictórica de los objetos dentro del sistema. En este esquema debemos diseñar el contorno que separa a estos del medio exterior.

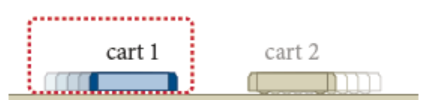
La decisión de que objetos forman parte del sistema dependerá de la información que queramos obtener.

Two choices of system for carts colliding on a track.

(*a*) Choice 1: system consists of both carts



(*b*) Choice 2: system consists of one cart



Definir un sistema no nos dice nada acerca de lo que está sucediendo dentro de este. Es simplemente una herramienta de ayuda para tener un esquema de cálculo. Una vez escogido el sistema podemos estudiar como ciertas cantidades asociadas con este cambian en el tiempo determinando el valor de estas al comienzo y al final de cierto intervalo.

2. Momento lineal. Definición

El momento lineal de una partícula $\vec{p}$ se define como el producto de su masa y su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

De la definición misma podemos entender el momento como una medida de cuanto nos "cuesta" dejar a una partícula que se mueve en reposo. Un camión a la misma velocidad que un mosquito tienen momentos bien diferentes!!!.

La segunda ley de Newton puede ser escrita en términos del momentum de una partícula. Derivando la ecuación (2.1) en relación al tiempo obtenemos,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{2.2}$$

y substityendo el miembro derecho por la fuerza neta tenemos,

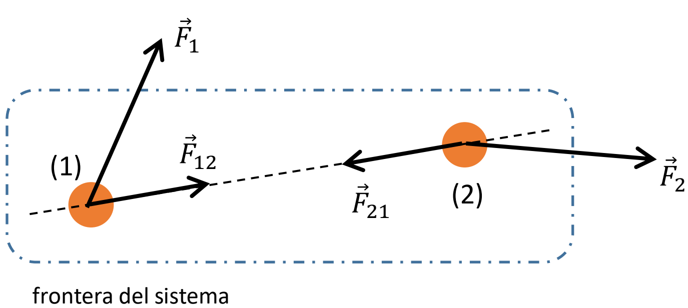
$$\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.3}$$

donde $\vec{F}_{neta}$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

Entonces, si $\vec{F}_{neta} = \vec{0} \quad \longmapsto \quad \vec{p} = \overrightarrow{cte}$; esto es, el momento se conserva.

¿cómo se aplica la conservación del momento lineal a un sistema de partículas?

Consideremos el caso más simple de dos partículas que interactuan entre ellas y con el medio externo,



Donde :

$\vec{F}_{ij}$: fuerza sobre "i" debido a la interacción con "j"

$\vec{F}_i$: fuerza externa sobre la partícula "i"

Escribamos las ecuaciones de movimiento. De (2.3)

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \tag{2.4a}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \tag{2.4b}$$

Sumando las ecuaciones y teniendo en cuenta la tercera ley de Newton, i.e., $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ obtenemos,

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_1 + \vec{p}_2] = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{2.5}$$

Que podemos escribir como,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \tag{2.6}$$

donde

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

y

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Tratemos de generalizar esto para un sistema de muchas partículas. Consideremos un sistema de partículas y escribamos la segunda ley para la partícula "i"

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \tag{2.7}$$

Sumando ahora en "i" para incluir a todas las partículas dentro del sistema,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{2.8}$$

A la primera suma de la derecha la podemos escribir como,

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Pero de la tercera ley de Newton, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, y

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

Entonces, (2.8) queda como:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{2.9}$$

Definamos:

Momento lineal del sistema $$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{2.10}$$

Suma de fuerzas externas $$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{2.11}$$

Entonces, la ecuación de movimiento para el sistema de partículas la escribimos como:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \tag{2.12}$$

Notemos que esta es una ecuación vectotial de manera que tendremos tres ecuaciones, una para cada eje.

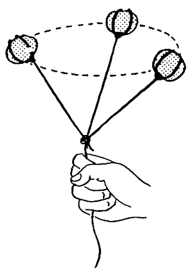
La otra cosa relevante de esta ecuación es que si sobre el sistema no actúan fuerzas externas, esto es,

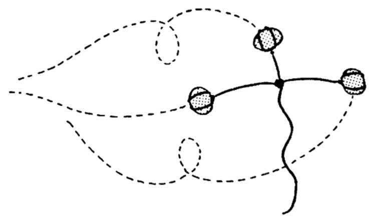
Si el sistema está aislado $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ implica que

Para un sistema aislado $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \overrightarrow{cte} \tag{2.13}$$

Ejemplo: La bola

La bola es un instrumento ("armamento") utilizado por los gauchos para atrapar animales. El artefacto consiste en tres bolas unidas a una misma cuerda.

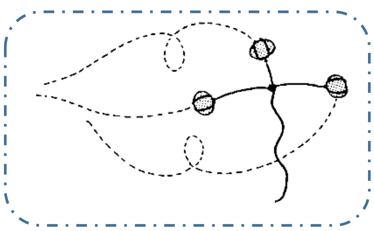




El gaucho hace girar "la bola" y la lanza hacia las patas del animal para que se enreden y este caiga.

Con lo que hemos visto, ¿Qué podemos decir acerca del movimiento?

Consideremos "la bola" con masas m_1, m_2 y m_3.



Las bolas se mueven bajo la acción de la fuerza de gravedad y la tensión en la cuerda que las une.

Describir el movimiento de una sola bola es realmente un problema complicado. Sin embargo, supongamos que al igual que el gaucho, no estamos interesados en la trayectoria de una de las partículas sino en su conjunto.

Veamos que nos dice la ecuación (2.12),

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + m_3\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{g}$$

donde M es la masa total. Esta ecuación representa un primer paso en el camino de ir entendiendo la riqueza física dentro de la ecuación (2.12).

La ecuación de hecho es idéntica a la de una partícula de masa M con momento $\vec{P}$. Esto es lo que de manera indirecta el Gaucho sabe siguiendo la trayectoria de un punto imaginario en el espacio que las bolas acompañan.

Esto nos lleva al concepto de centro de masa

3. Centro de masa

De acuerdo con (2.12),

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{3.1}$$

Donde hemos eliminado el subíndice ext entendiendo que $\vec{F}$ ya es producto de una interacción con el medio exterior.

Lo sorprendente de este resultado es que aunque es idéntico a la ecuación de movimiento de una partícula se refiere al movimiento de un sistema. Estamos tentados entonces a establecer una analogía entre (3.1) y la forma que tiene la ecuación de movimiento de una partícula,

$$\vec{F} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \tag{3.2}$$

donde M es la masa total del sistema y $\vec{R}$ es un vector que aún no hemos definido (el Caucho sabe).

Como $\vec{P} = \sum m_i\dot{\vec{r}}_i$, las ecuaciones (3.1) y (3.2) podemos escribir,

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

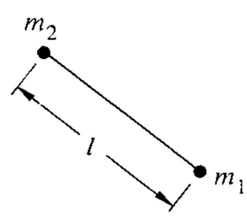
la cual es válida si

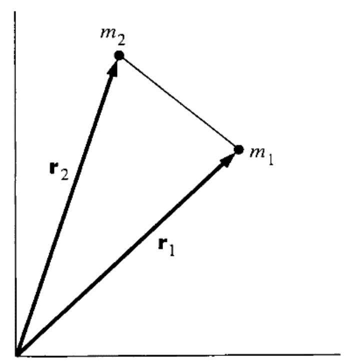
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i \tag{3.3}$$

donde $\vec{R}$ es un vector del origen al punto llamado centro de masas. El sistema se comporta como si toda la masa estuviese concentrada en el centro de masas y todas las fuerzas externas estuvieran siendo ejercidas en este.

Ejemplo. Supongamos que tenemos dos bolas de masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda bien fina de masa despresiable y longitud l. Las colas son lanzadas al aire. El problema consiste en encontrar el centro de masa del sistema y la ecuación de movimiento para este.

Dadas las posiciones de las bolas "1" y "2" por los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, la posición del centro de masas es,

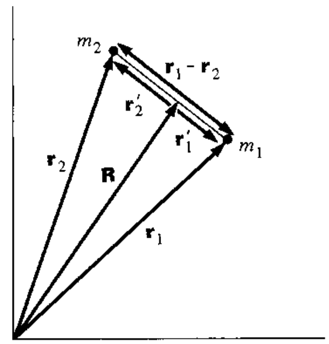




$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Notemos primero que el centro de masa se ubica en algún punto de la línea que une a las masas. Para demostrar esto tomemos el vector $\vec{r}_2^{\,'}$ que va del centro de masa a la masa m_2.



$$\vec{r}_2^{\,'} = \vec{r}_2 - \vec{R}$$

Y de la definición de $\vec{R}$,

$$\vec{r}_2^{\,'} = \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_2^{\,'} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Y lo mismo para el vector $\vec{r}_1^{\,'} = \vec{r}_1 - \vec{R}$

$$\vec{r}_1^{\,'} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Esto es, los vectores están en la línea que une a los puntos y por lo tanto $\vec{R}$ se encuentra en esta.

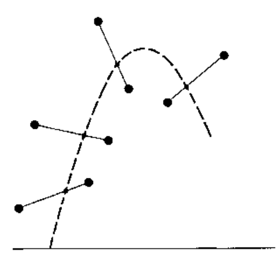
Para encontrar la ecuación de movimiento del CM, asumiendo que el roce es despreciable, la fuerza externa sobre el sistema es,

$$\vec{F}_g = m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$$

La ecuación de movimiento del CM es,

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{g}$$

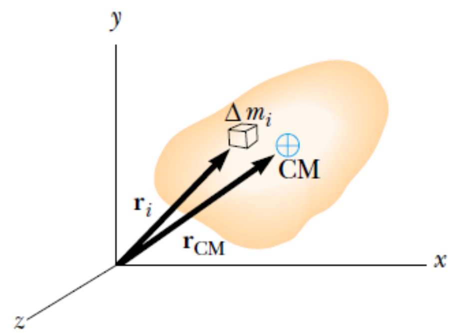
El CM sigue una trayectoria parabólica como si fuera una partícula de masa M.



Para un objeto continuo, si lo dividimos en elementos de masa Δm_i con posición $\vec{r}_i$ la posición del CM será,

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum \Delta m_i\vec{r}_i$$

En el límite, cuando el número de elementos de masa N tiende a infinito el límite define una integral,

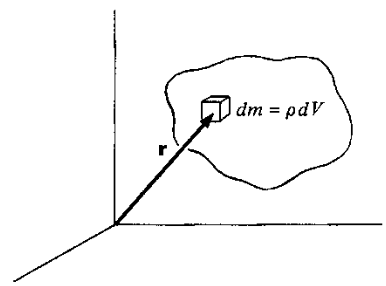


$$\vec{R} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{M}\sum \Delta m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \qquad (3.4)$$

donde dm es un elemento diferencial de masa. Para vizualizar esta integral pensemos en dm como la masa de un elemento de volumen dV localizada en el punto $\vec{r}$.

Si la densidad de masa es ρ entonces $dm = \rho\, dV$ y



$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\rho dV \qquad (3.5)$$

En los casos, unidimensionales y bidimensionales,

$$dm = \lambda\, dl$$

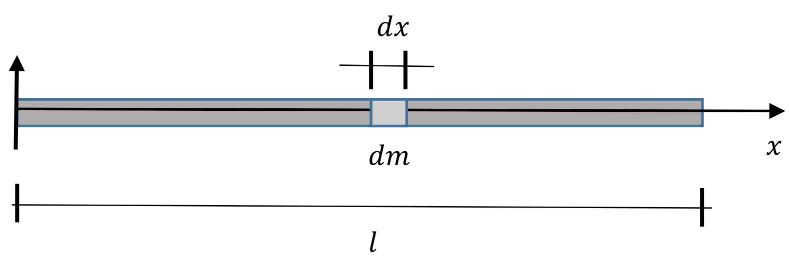
$$dm = \sigma\, dA$$

respectivamente, donde λ y σ son las densidades lineales y superficiales de masa y dl y dA los diferenciales de longitud y superficie, respectivamente.

Notemos que tanto (3.3) como (3.4) son ecuaciones vectoriales, esto es, son tres ecuaciones, una para cada coordenada,

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int x\ dm \qquad Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\ dm \qquad Z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\ dm$$

Ejemplo: CM de una barra homogénea de longitud l y masa m.



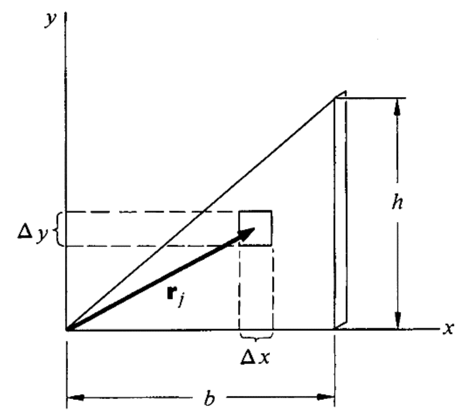
$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int x\ dm$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \, \lambda \, dx = \frac{\lambda}{M} \frac{l^2}{2}$$

Pero como $\lambda = M/l$

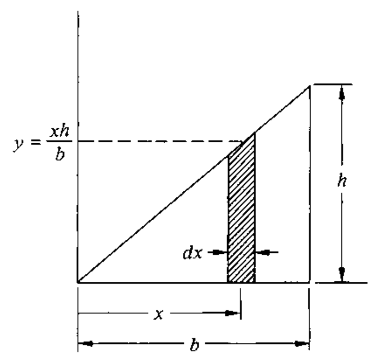
$$X_{CM} = \frac{l}{2}$$

Ejemplo: CM de una hoja triangular del altura h y lado b



$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \; dm$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \; dm$$



Tomemos el elemento de dm de la figura.

El área de este elemento es,

$dA = dx \cdot \frac{xh}{b}$. Entonces

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \; dm = \frac{\sigma}{M} \frac{h}{b} \int x^2 \; dx$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \; dm = \frac{\sigma}{M} \frac{h}{b} \frac{b^3}{3} = \frac{\sigma}{M} \frac{hb^2}{3}$$

Y con, $\sigma = M/A = 2M/hb$

$$X_{CM} = \frac{2}{3} b$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \; dm = \frac{\sigma}{M} \int \left(\frac{xh}{b} \right)^2 dx = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{b^3}{3} = \frac{\sigma}{M} \frac{h^2 b}{3} = \frac{2h}{3}$$

entonces,

$$\vec{R} = \frac{2}{3} b\,\hat{\imath} + \frac{2}{3} h\,\hat{\jmath}$$

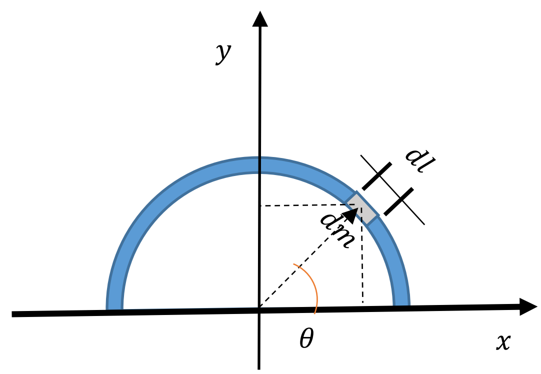
Aunque la coordenada de $\vec{R}$ depende del sistema partículas de coordenadas escogido, la posición del centro de masas con respecto al plato triangular es por supuesto independiente de este.

Ejemplo: Semicírculo de radio R

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \; dm$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \; dm$$

donde,



$$dm = \lambda dl$$

y

$$dl = R d\theta$$

$$x = R\cos\theta\,, \qquad y = R\sin\theta$$

$$X_{CM} = \frac{R^2 \lambda}{M} \int_0^{\pi} \cos\theta \; d\theta = 0$$

$$Y_{CM} = \frac{R^2 \lambda}{M} \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta = \frac{2R^2\lambda}{M} = \frac{2R}{\pi}$$

donde tuvimos hicimos $\lambda = \frac{M}{\pi R}$. De este ejemplo queda claro que el CM no tiene por qué estar contenido en el cuerpo, i.e., puede estar fuera.

4. Conservación del momento lineal

De la definición de centro de masa para un sistema de partículas (3.3) derivando en relación al tiempo obtenemos

$$M\vec{V}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{P} \tag{4.1}$$

esto es, el momento total del sistema es igual al producto de la masa total M por la velocidad del CM.

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$$

derivando nuevamente en relación a t obtenemos la ecuación (3.2) que escribimos como,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext} \tag{4.2}$$

Lo que significa que el CM de un sistema se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ bajo la influencia de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema.

Consideremos las implicaciones de esto para un sistema aislado, esto es, un sistema que no interactúa con el ambiente. En este caso, $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ y $d\vec{P}/dt = 0$. El momento total es constante sin importar cuan fuertes puedan ser las interacciones entre los elementos del sistema y lo complicado del movimiento. Esta es la ley de conservación del momento lineal.

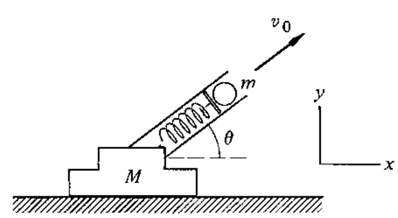
Notemos nuevamente que la ecuación (4.2) es una ecuación vectorial, i.e., tenemos una ecuación para cada coordenada,

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \qquad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \qquad \frac{dP_z}{dt} = F_z \tag{4.2}$$

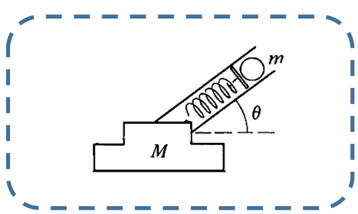
Ejemplo:

Retroceso de un cañón.

Un cañón de retroceso inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin roce dispara una bola a un ángulo θ de lanzamiento. La masa del cañón es M y la de la bola es m y la velocidad con que esta última sale del cañón es $\vec{v}_0$. ¿Cuál es la velocidad final del cañón?



Tomemos como nuestro sistema el cañón y la bola.



Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son la fuerza de gravedad y la fuerza normal en la tabla, ambas verticales. Entonces, como no actúan fuerzas externas en la dirección horizontal

$$\frac{dP_x}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad P_x^{(inicial)} = P_x^{(final)}$$

$$P_x^{(inicial)} = 0$$

$$P_x^{(final)} = -MV_f + mv_0 \cos\theta$$

Así que

$$V_f = \frac{mv_0 \cos\theta}{M}$$

5. Impulso y momento

La relación entre fuerza y momento[1] es:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Como regla general, cualquier ley física que pueda expresarse en términos de derivadas puede también ser expresada en forma integral. La forma integral de la relación fuerza-momento es,

$$\int_0^t \vec{F}_{ext}\ d\tau = \vec{P}(t) - \vec{P}(0) \tag{5.1}$$

El cambio en el momento de un sistema viene dado por la integral de la fuerza en relación al tiempo. Esta forma contiene esencialmente la misma información física que la ecuación (4.2) pero nos provee de una nueva forma de mirar para el efecto de una fuerza: el cambio en el momento es la integral en el tiempo de la fuerza. Para producir un cambio dado en el momento en el intervalo de tiempo t se requiere que $\int_0^t \vec{F}_{ext}\ d\tau$ tenga un valor apreciable, podríamos tener una fuerza pequeña actuando en un largo intervalo de tiempo o una fuerza grande actuando en un intervalo pequeño de tiempo. La integral de la fuerza es llamada de impulso

$$I = \int_0^t \vec{F}_{ext}\ d\tau \tag{5.2}$$

La palabra impulso nos lleva a pensar en una interacción intensa y rápida como el choque de una bola con el piso. Sin embargo, la definición física de impulso puede ser también aplicada a una

[1] Lógicamente, para una partícula sería idéntica.

pequeña fuerza que actúa por un prolongado intervalo de tiempo. El cambio en el momento depende solamente de $\int_0^t \vec{F}_{ext}\, d\tau$ independientemente del detalle de la dependencia temporal de la fuerza.

El impulso tiene dimensiones de momento $[Nm/s]$. Notemos que impulso no es una propiedad de la partícula, más bien es una medida del grado en que una fuerza externa cambia el momento de una partícula. Por lo tanto cuando decimos que se le ha dado un impulso a una partícula significa que el momento es transferido desde un agente externo a la partícula,

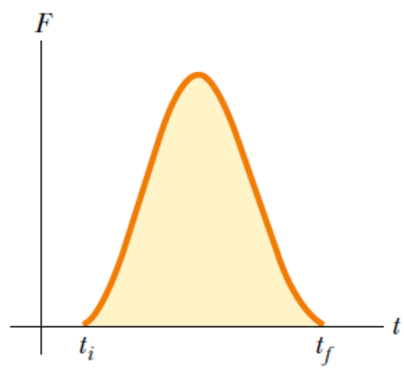
Como la fuerza que imparte el impulso puede variar en el tiempo, es conveniente definir el promedio temporal de la fuerza

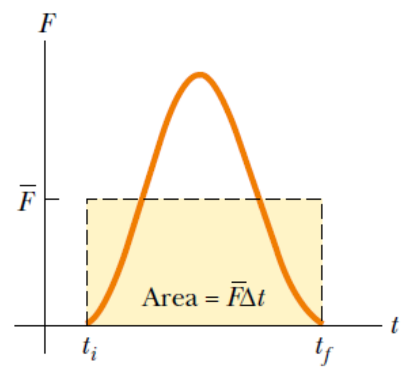
$$\bar{F} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext}\ d\tau \qquad (5.3)$$

donde Δt=$t_f - t_i$.[2]

Por lo tanto, podemos expresar la ecuación (5.3) como,

$$I = \bar{F}\Delta t \qquad (5.4)$$



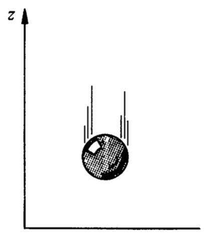


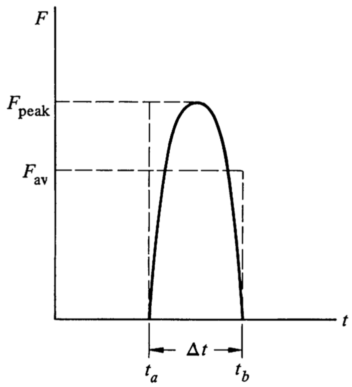
En muchas aplicaciones físicas, utilizamos lo que se llama aproximación del impulso en la cual asumimos que una de las fuerzas ejercidas sobre la partícula actúa por un corto intervalo de tiempo pero es mucho mayor que cualquier fuerza presente. Esta aproximación es especialmente útil cuando tratamos con colisiones en las que la duración de la colisión es muy corta. Por ejemplo, cuando una bola de béisbol es golpeada por un bate, el tiempo de colisión es de cerca de 0.01 s y la fuerza promedio que el bate ejerce durante este intervalo de tiempo es mucho mayor que la magnitud de la fuerza de gravedad. Debido a esto, la aproximación del impulso justifica que ignoremos la fuerza gravitatoria ejercida sobre el bate y la bola. Cuando usamos esta

[2] Esta es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.

aproximación es importante recordar que $\vec{p}_i$ y $\vec{p}_f$ representan el momento inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión respectivamente.

Example 3.9 Rubber Ball Rebound





A rubber ball of mass 0.2 kg falls to the floor. The ball hits with a speed of 8 m/s and rebounds with approximately the same speed. High speed photographs show that the ball is in contact with the floor for 10^{-3} s. What can we say about the force exerted on the ball by the floor?

The momentum of the ball just before it hits the floor is $\mathbf{P}_a = -1.6\hat{\mathbf{k}}$ kg·m/s and its momentum 10^{-3} s later is $\mathbf{P}_b = +1.6\hat{\mathbf{k}}$ kg·m/s. Since $\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{P}_b - \mathbf{P}_a$, $\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}\, dt = 1.6\hat{\mathbf{k}} - (-1.6\hat{\mathbf{k}}) = 3.2\hat{\mathbf{k}}$ kg·m/s. Although the exact variation of $\mathbf{F}$ with time is not known, it is easy to find the average force exerted by the floor on the ball. If the collision time is $\Delta t = t_b - t_a$, the average force $\mathbf{F}_{\text{av}}$ acting during the collision is

$$\mathbf{F}_{\text{av}}\, \Delta t = \int_{t_a}^{t_a+\Delta t} \mathbf{F}\, dt.$$

Since $\Delta t = 10^{-3}$ s,

$$\mathbf{F}_{\text{av}} = \frac{3.2\hat{\mathbf{k}}\ \text{kg·m/s}}{10^{-3}\ \text{s}} = 3{,}200\hat{\mathbf{k}}\ \text{N}.$$

The average force is directed upward, as we expect. In more familiar units, 3,200 N $\approx$ 720 lb—a sizable force. The instantaneous force on the ball is even larger at the peak, as the sketch shows. If the ball hits a resilient surface, the collision time is longer and the peak force is less.

Actually, there is a weakness in our treatment of the rubber ball rebound. In calculating the impulse $\int \mathbf{F}\, dt$, $\mathbf{F}$ is the total force. This includes the gravitational force, which we have neglected. Proceeding more carefully, we write

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{floor}} + \mathbf{F}_{\text{grav}}\\ &= \mathbf{F}_{\text{floor}} - Mg\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

The impulse equation then becomes

$$\int_0^{10^{-3}} \mathbf{F}_{\text{floor}}\, dt - \int_0^{10^{-3}} Mg\hat{\mathbf{k}}\, dt = 3.2\hat{\mathbf{k}}\ \text{kg·m/s}.$$

The impulse due to the gravitational force is

$$\begin{aligned}-\int_0^{10^{-3}} Mg\hat{\mathbf{k}}\, dt = -Mg\hat{\mathbf{k}} \int_0^{10^{-3}} dt &= -(0.2)(9.8)(10^{-3})\hat{\mathbf{k}}\\ &= -1.96 \times 10^{-3}\hat{\mathbf{k}}\ \text{kg·m/s}.\end{aligned}$$

This is less than one-thousandth of the total impulse, and we can neglect it with little error. Over a long period of time, gravity can produce a large change in the ball's momentum (the ball gains speed as it falls, for example). In the short time of contact, however, gravity contributes little momentum change compared with the tremendous force exerted by the floor. Contact forces during a short collision are generally so huge that we can neglect the impulse due to other forces of moderate strength, such as gravity or friction.

The last example reveals why a quick collision is more violent than a slow collision, even when the initial and final velocities are identical. This is the reason that a hammer can produce a force far greater than the carpenter could produce on his own; the hard hammerhead rebounds in a very short time compared with the time of the hammer swing, and the force driving the hammer is correspondingly amplified. Many devices to prevent bodily injury in accidents are based on the same considerations, but applied in reverse—they essentially prolong the time of the collision. This is the rationale for the hockey player's helmet, as well as the automobile seat belt. The following example shows what can happen in even a relatively mild collision, as when you jump to the ground.

Example 3.10 How to Avoid Broken Ankles

Animals, including humans, instinctively reduce the force of impact with the ground by flexing while running or jumping. Consider what happens to someone who hits the ground with his legs rigid.

Suppose a man of mass M jumps to the ground from height h, and that his center of mass moves downward a distance s during the time of collision with the ground. The average force during the collision is

$$F = \frac{Mv_0}{t}, \qquad 1$$

where t is the time of the collision and v_0 is the velocity with which he hits the ground. As a reasonable approximation, we can take his acceleration due to the force of impact to be constant, so that the man comes uniformly to rest. In this case the collision time is given by $v_0 = 2s/t$, or

$$t = \frac{2s}{v_0}.$$

Inserting this in Eq. (1) gives

$$F = \frac{M{v_0}^2}{2s}. \qquad 2$$

For a body in free fall for distance h,

$${v_0}^2 = 2gh.$$

Inserting this in Eq. (2) gives

$$F = Mg\frac{h}{s}.$$

If the man hits the ground rigidly in a vertical position, his center of mass will not move far during the collision. Suppose that his center of mass moves 1 cm, which roughly means that his height momentarily decreases by approximately 2 cm. If he jumps from a height of 2 m, the force is 200 times his weight!

Consider the force on a 90-kg ($\approx$200-lb) man jumping from a height of 2 m. The force is

$$\begin{aligned} F &= 90 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 200 \\ &= 1.8 \times 10^5 \text{ N}. \end{aligned}$$

Where is a bone fracture most likely to occur? The force is a maximum at the feet, since the mass above a horizontal plane through the man decreases with height. Thus his ankles will break, not his neck. If the area of contact of bone at each ankle is 5 cm^2, then the force per unit area is

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= \frac{1.8 \times 10^5 \text{ N}}{10 \text{ cm}^2} \\ &= 1.8 \times 10^4 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

This is approximately the compressive strength of human bone, and so there is a good probability that his ankles will snap.

Of course, no one would be so rash as to jump rigidly. We instinctively cushion the impact when jumping by flexing as we hit the ground, in the extreme case collapsing to the ground. If the man's center of mass drops 50 cm, instead of 1 cm, during the collision, the force is only one-fiftieth as much as we calculated, and there is no danger of compressive fracture.