5.3 Teorema de Momento Rotatorio / Angular (≡ Momento Cinético):

→ En este capítulo: se formularán las leyes de la Mecánica de tal modo, que los movimientos rotatorios – sobre todo los órbitas – se podrán describir y calcular en forma óptima.

→ Nos daremos cuenta que:

(i) El impulso / momento angular $\vec{L}$ toma el rol del impulso / momento lineal $\vec{p}$.

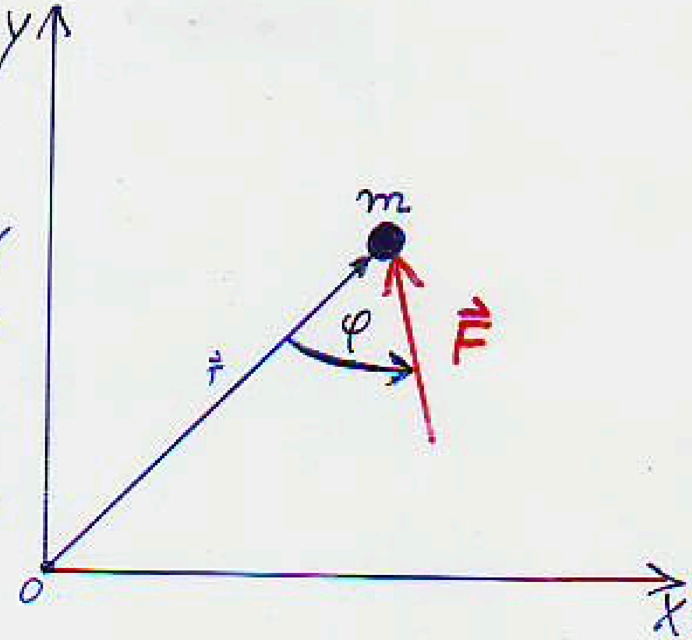
(ii) El momento de torque $\vec{M}$ toma el rol de la fuerza $\vec{F}$.

Para simplificar nos limitaremos inicialmente a <u>un punto de masa</u> particular.

Los sistemas de N-partículas se tratarán al final de este capítulo.

Primero vamos a reflexionar, cual es la dimensión física, la cual en los movimientos rotatorias toma el rol de la Fuerza:

Consideramos una barra sin masa, que puede rotar libre de roce en el plano x, y al rededor del origen "O", y a la cual esta sujeta una masa de punto / partícula puntual m (ver figura).



Sobre la masa m actúa una Fuerza $\vec{F}$ bajo el ángulo φ. Sólo la componente de Fuerza $\perp$ a la barra $F_\perp = F \cdot \sin\varphi$ acelera la rotación.

Según la "ley de palanca" el efecto acelerador de la Fuerza es proporcional a:

$$F_\perp \cdot r = F \sin\varphi \, r = |\vec{r} \times \vec{F}| \qquad (5.3-1)$$

con $\vec{r}$ = vector local en el punto donde actua la Fuerza.

Definimos ahora el "Momento de Torque"

$$\boxed{\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F} \qquad [M] = Nm} \qquad (5.3\text{-}2)$$

y suponemos, que esa dimensión asume el rol de la Fuerza en las rotaciones.

$\vec{M}$ esta perpendicular al vector local $\vec{r}$ (el cual indica desde el origen al punto donde actúa la Fuerza) y perpendicular a $\vec{F}$: $\vec{M} \perp \vec{r}$ y $\vec{F}$.

El origen "O" del sistema de coordinados se puede elegir libremente. Favorable es llevando el origen al punto de la rotación (centro) o sobre el eje de rotación.

Nota: El "Momento de Torque" tiene la misma unidad [Nm] como el Trabajo. Sin embargo ambos dimensiones son totalmente distintas:

→ Trabajo es un escalar, pero

→ Momento de Torque es un vector.

Esto se refleja en los Unidades: que se usan:

Trabajo: [Joule] y rara vez [Nm].
Momento de Torque: [Nm] y NUNCA [Joule].

Como segunda dimensión física para movimientos de rotación definimos el "Momento angular":

$$\boxed{\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} \qquad [L] = Nm\,s} \qquad (5.3\text{-}3)$$

Es el producto vectorial del vector local $\vec{r}$ de la partícula/masa y el impulso (= momento lineal) de la partícula/masa.

Para una órbita (= movimiento circular) el vector del momento angular $\vec{L}$ es $\parallel$ al eje de rotación, solo si el origen del sistema de coordenadas y con eso también el vector local $\vec{r}$ se encuentran en el plano definido por la órbita.

Para cálculos es favorable – pero no obligatorio – si se coloca el origen del sistema de coordenadas en el centro de la órbita.

Tenemos que formular la ecuación de movimiento para la rotación, que corresponde al segundo axioma de Newton $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$.

Ya que el momento angular $\vec{L}$ aparentemente toma el rol del impulso / momento lineal $\vec{p}$, se recomienda el cálculo de la derivada del tiempo de $\vec{L}$.

Con la regla del producto tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} =$$

$$= \cancel{\vec{v} \times (m\vec{v})} + \vec{r} \times \vec{F}$$

El primer término $\vec{v} \times (m\vec{v})$ se anula, porque el producto vectorial de dos vectores $\parallel$ es '0':

$\Rightarrow$ inmediatamente la ecuación de movimiento para rotación:

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} \qquad (5.3\text{-}4)$$

La derivada del tiempo del momento angular $\vec{L}$ de un punto de masa sobre el cual actúa una fuerza $\vec{F}$ es igual al momento de torque $\vec{M}$ de esta fuerza.

Importante: $\vec{L} = \underset{\sim}{\vec{r}} \times \vec{p}$ y $\vec{M} = \underset{\sim}{\vec{r}} \times \vec{F}$

tienen que contener el mismo vector local $\underset{\sim}{\vec{r}}$.

Es decir, $\vec{L}$ y $\vec{M}$ tienen que relacionarse con el mismo origen del sistema de coordenadas. El origen es de libre elección. Durante una translación del origen cambian $\vec{r}$ y por eso también los vectores $\vec{L}$ y $\vec{M}$, pero la ecu. (5.3-4) es válido sin embargo.

Ejemplo (5.3-1):

Caída libre y dimensiones de rotación:

La masa m cae libre de roce en el campo homogeneo de gravitación. Los condiciónes iniciales son

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aunque este problema no está diseñado para el momento angular y el momento de torque, la ecu. $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ tiene que ser válida. Lo demostramos:

Solución:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$$

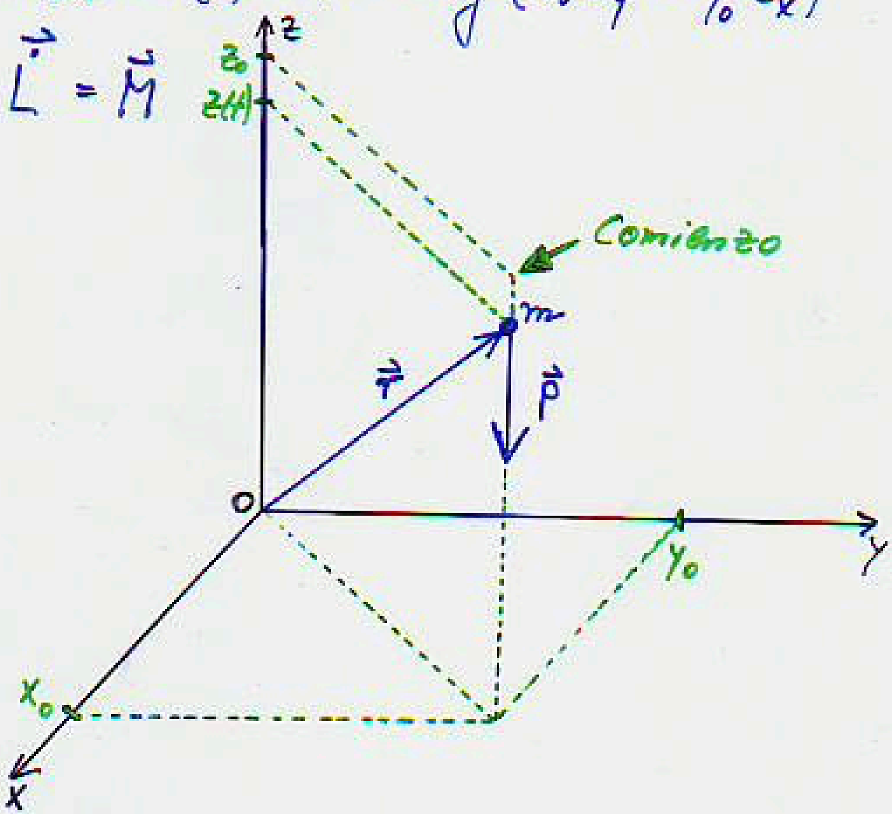
$$\Rightarrow \quad \vec{p}(t) = -mgt\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r}(t) = x_0\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = mgt\,(x_0\,\vec{e}_y - y_0\,\vec{e}_x)$$

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F} = mg\,(x_0\,\vec{e}_y - y_0\,e_x)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M}$$



Nota: $\vec{L}$ y $\vec{M}$ dependen ambos a través x_0, y_0 de la elección del origen del sistema de coordenadas: Con otro origen se obtienen otro $\vec{L}$ y otro $\vec{M}$. La ecu. $\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}}$ está siempre válida y eso es lo importante.