ESTÁTICA Y DINÁMICA

1. Sistema
2. Definición de momento lineal
3. Centro de Masa
4. Conservación del momento lineal
5. Impulso y momento

Sistema

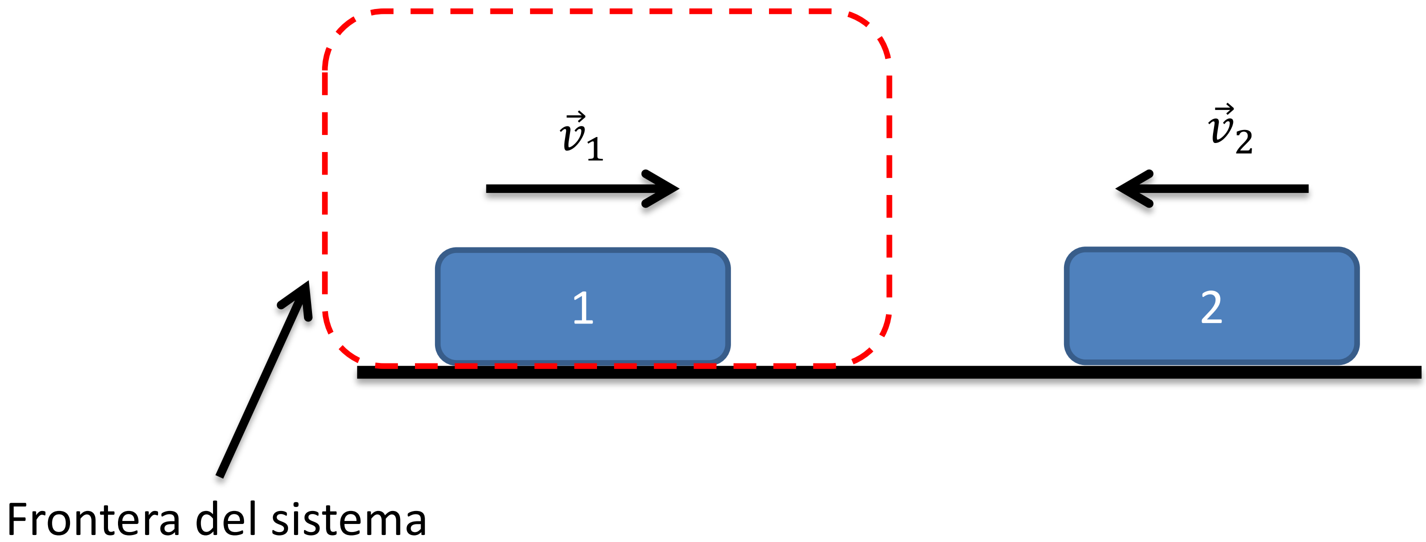
- Cualquier objeto o grupo de objetos que podamos separar (mentalmente) del medio externo es un sistema

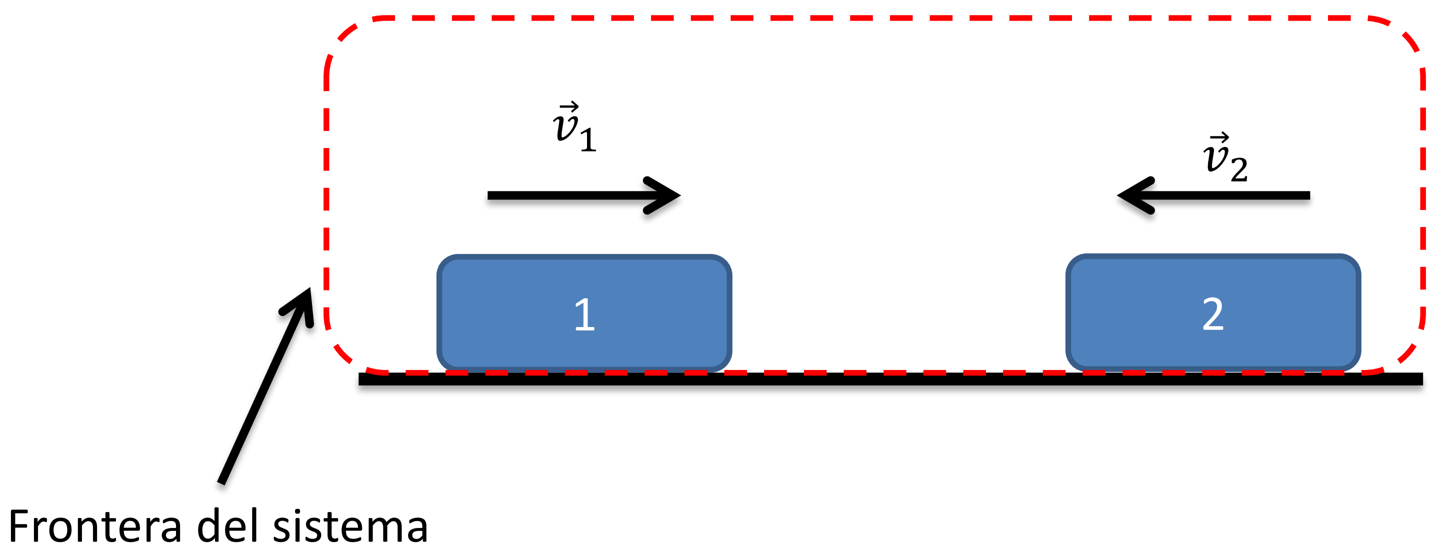
Esta separación imaginaria del universo en dos partes (objetos dentro del sistema y todo lo demás en el resto del universo) hace posible desarrollar procedimientos de cálculo simples y al mismo tiempo poderosos.

Definir “el sistema” no nos dice nada en absoluto acerca de lo que sucede dentro de este.

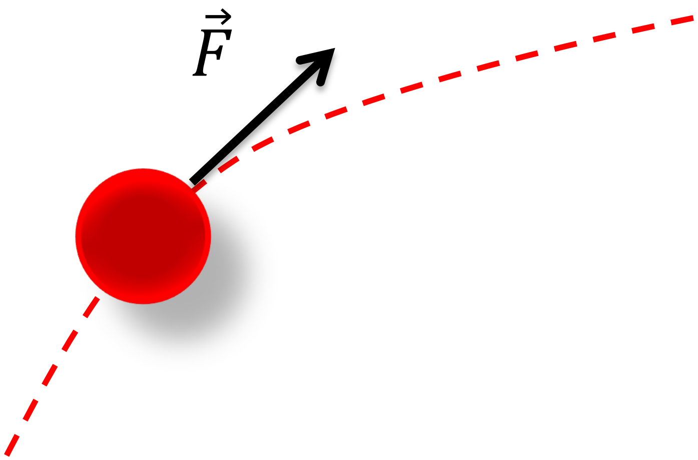
Es simplemente una herramienta para establecer un esquema de contabilidad.

Una vez escogido el sistema, podemos estudiar como ciertas cantidades asociadas con él cambian en el tiempo determinando el valor de estas cantidades antes y después de un intervalo de tiempo.


$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
1
2
Frontera del sistema


$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
1
2
Frontera del sistema

Segunda Ley de Newton



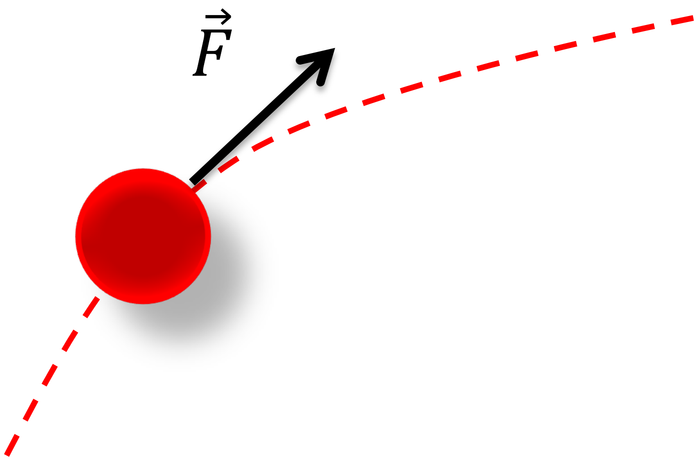
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{p} = m\vec{v}$:Momento lineal

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

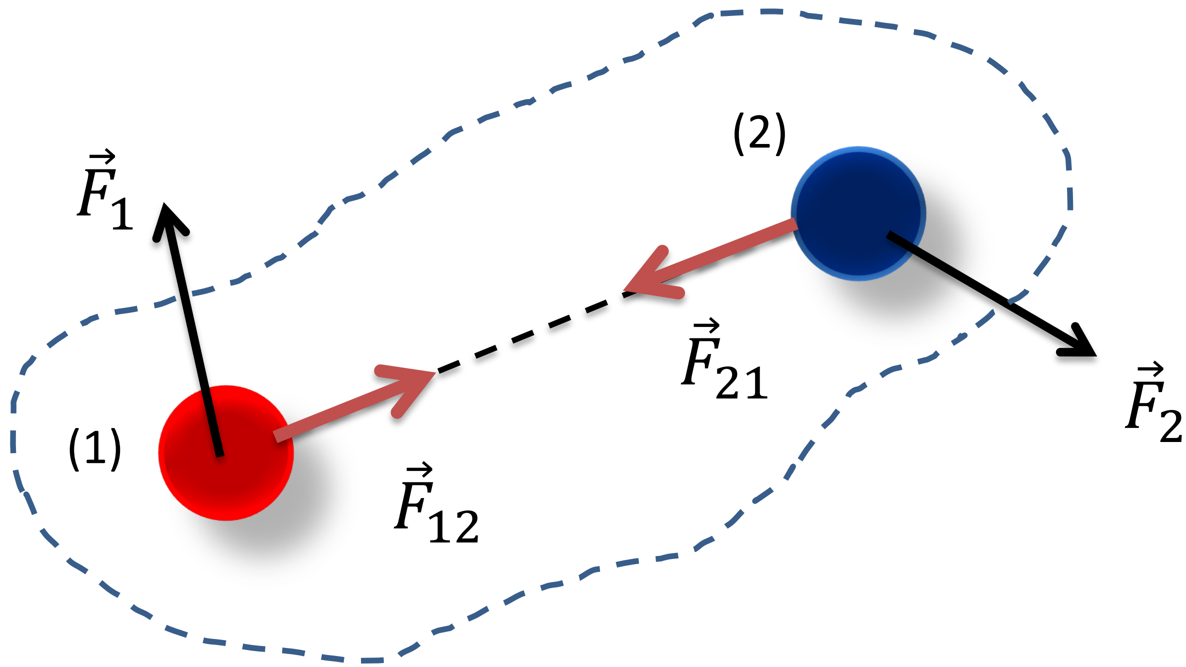
Segunda Ley de Newton



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

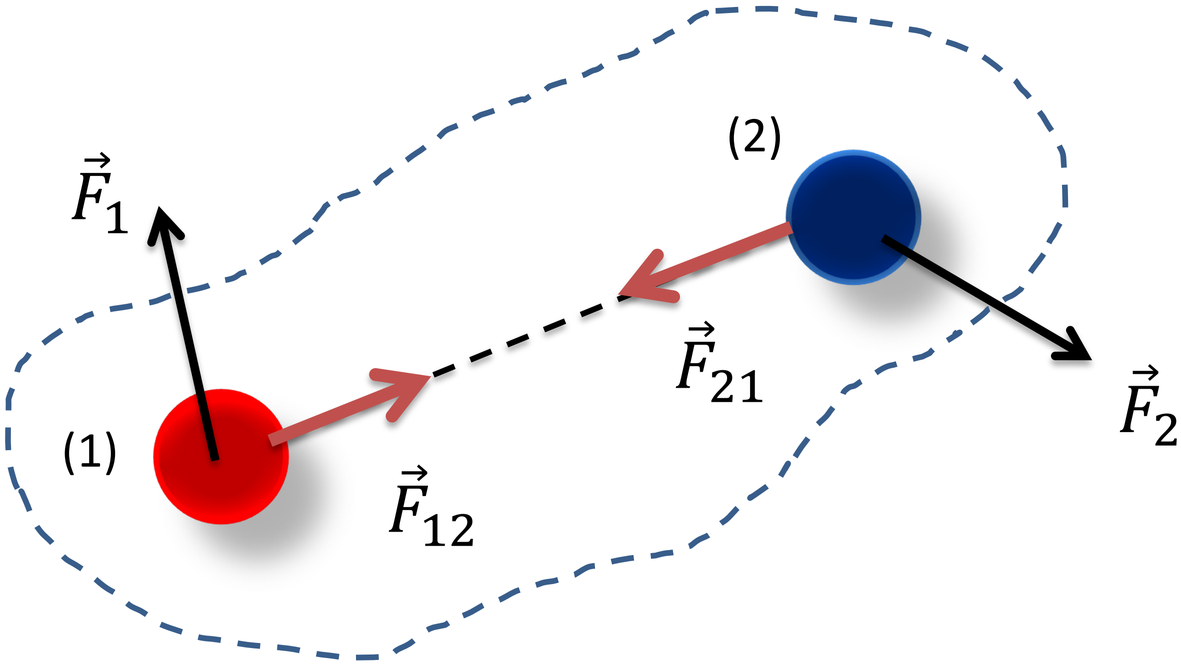
$$\underbrace{\text{Si} \quad \vec{F}_{neta} = \vec{0} \quad \longmapsto \quad \vec{p} = \overrightarrow{cte}.}_{\text{conservación del momento lineal}}$$

¿Cómo se aplica la conservación del momento lineal a un sistema de partículas?



$\vec{F}_{ij}$: fuerza sobre "i" debido a la interacción con "j"

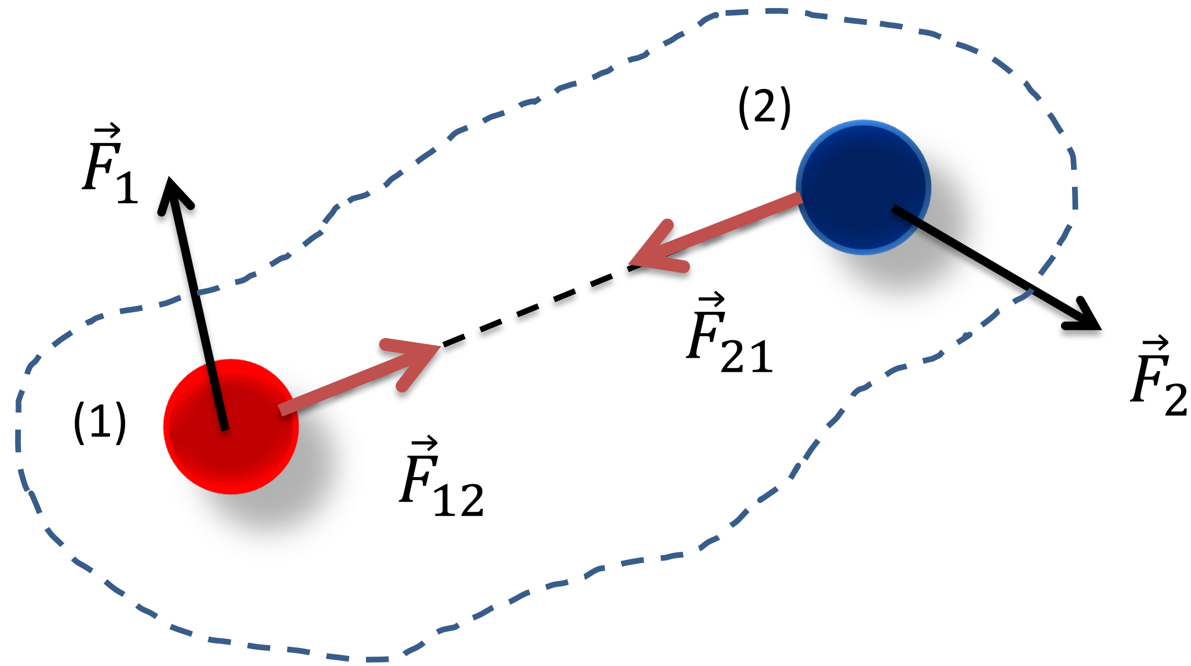
$\vec{F}_i$: fuerza externa sobre la partícula "i"



Segunda Ley de Newton

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1$$

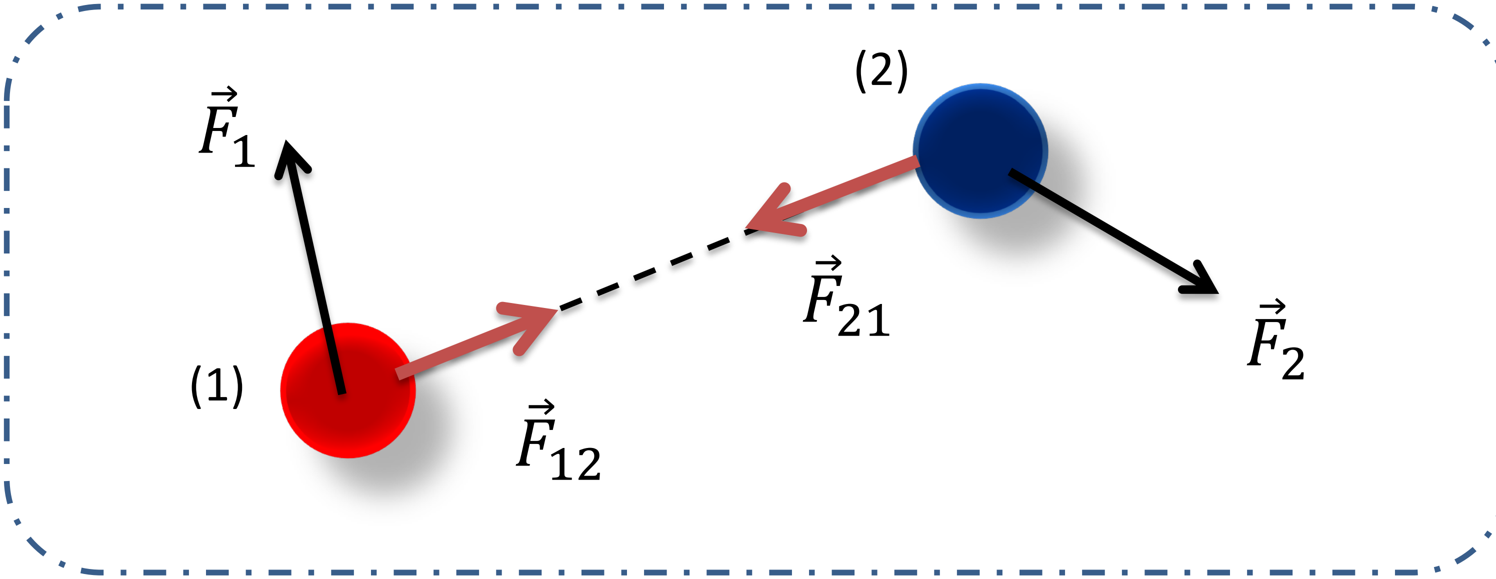
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2$$



$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_1 + \vec{p}_2] = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}$$

De la tercera ley de Newton, i.e.,
$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

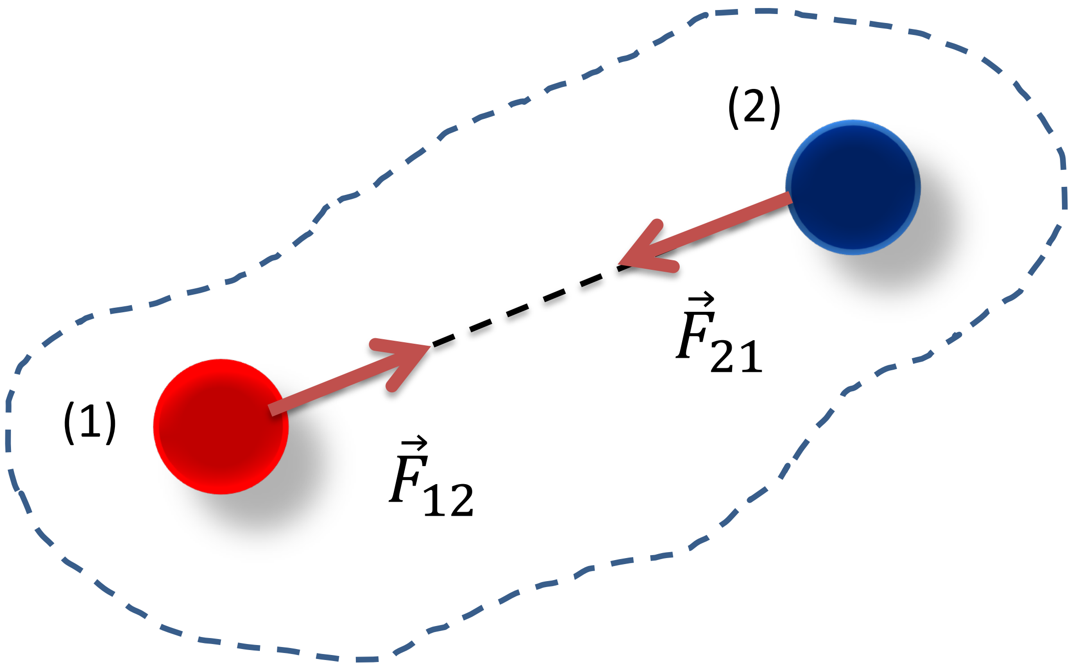
$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_1 + \vec{p}_2] = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$:Momento Lineal del sistema

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



Para un sistema aislado

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

conservación del momento lineal

Sistema de tres partículas

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3] = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \cancel{\vec{F}_{31}} + \cancel{\vec{F}_{32}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (externas)$$

Sistema de muchas partículas

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$$

Partícula "i"

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j > i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^{N} \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (3ra ley)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}}_{\vec{0}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

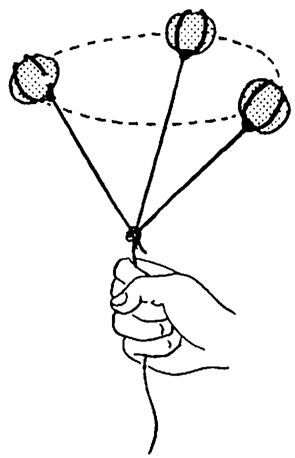
Si $\quad \vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0}$

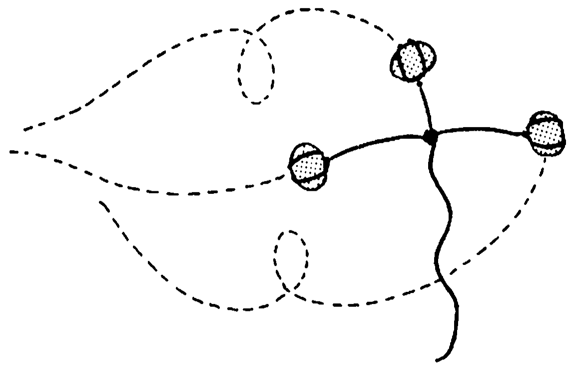
$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

Para un sistema aislado

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

Ejemplo: La bola

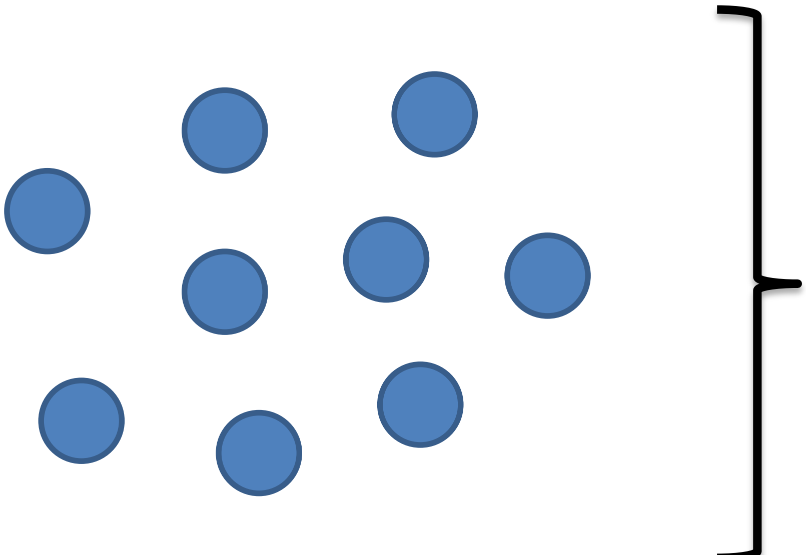




$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + m_3\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{g}$$

Centro de Masa



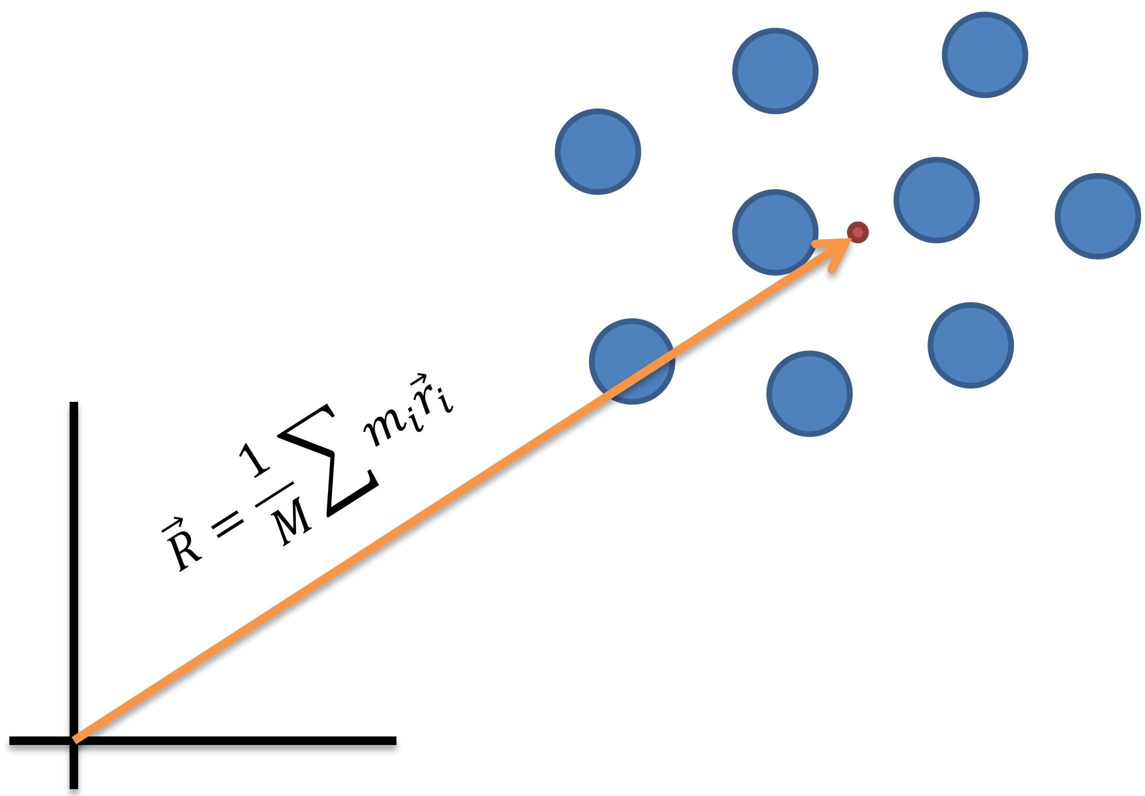
Considero toda la masa concentrada en un punto

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{F} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

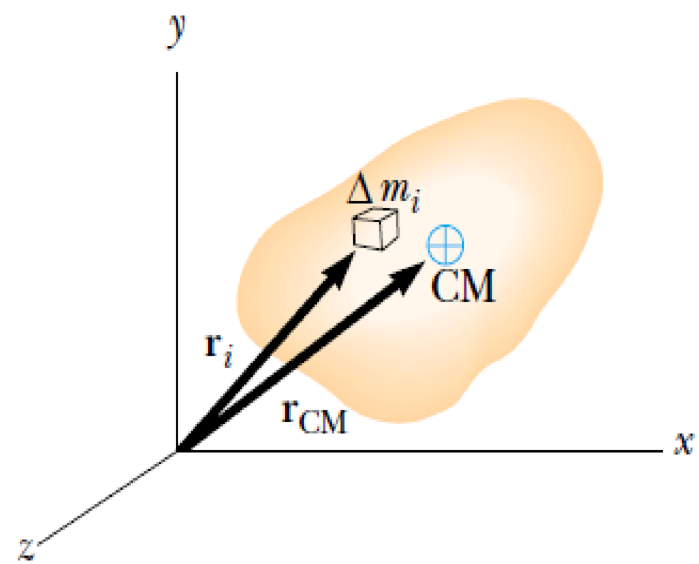
$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$


$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$

Para un objeto continuo, si lo dividimos en elementos de masa Δm_i con posición $\vec{r}_i$ la posición del CM será

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum \Delta m_i \vec{r}_i$$



$$\vec{R} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{M}\sum \Delta m_i \vec{r}_i$$

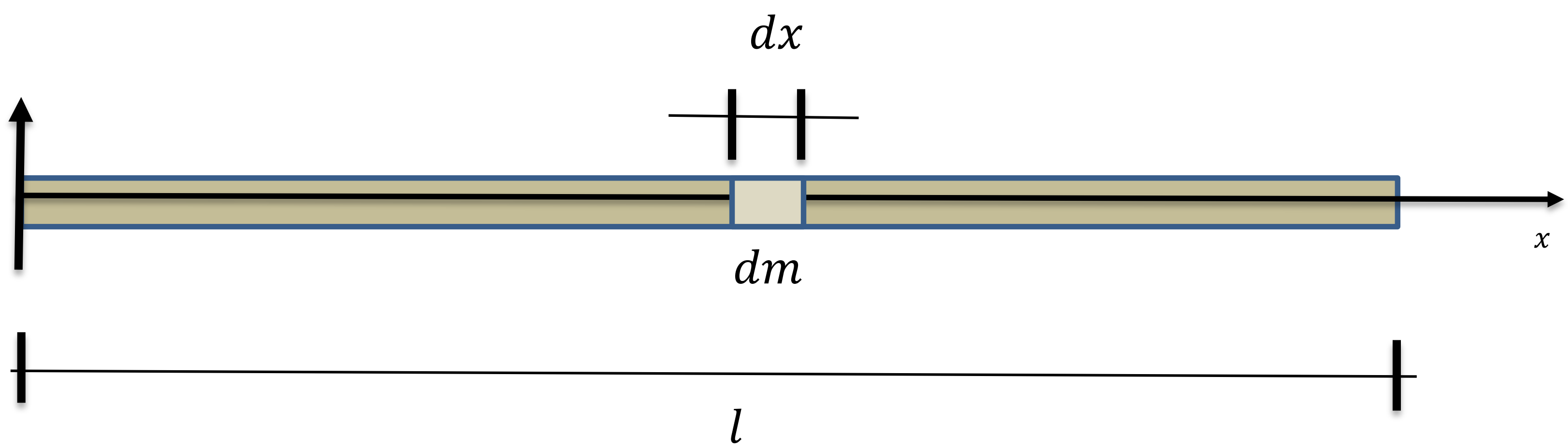
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

$dm = \rho\, dV$: 3-dim

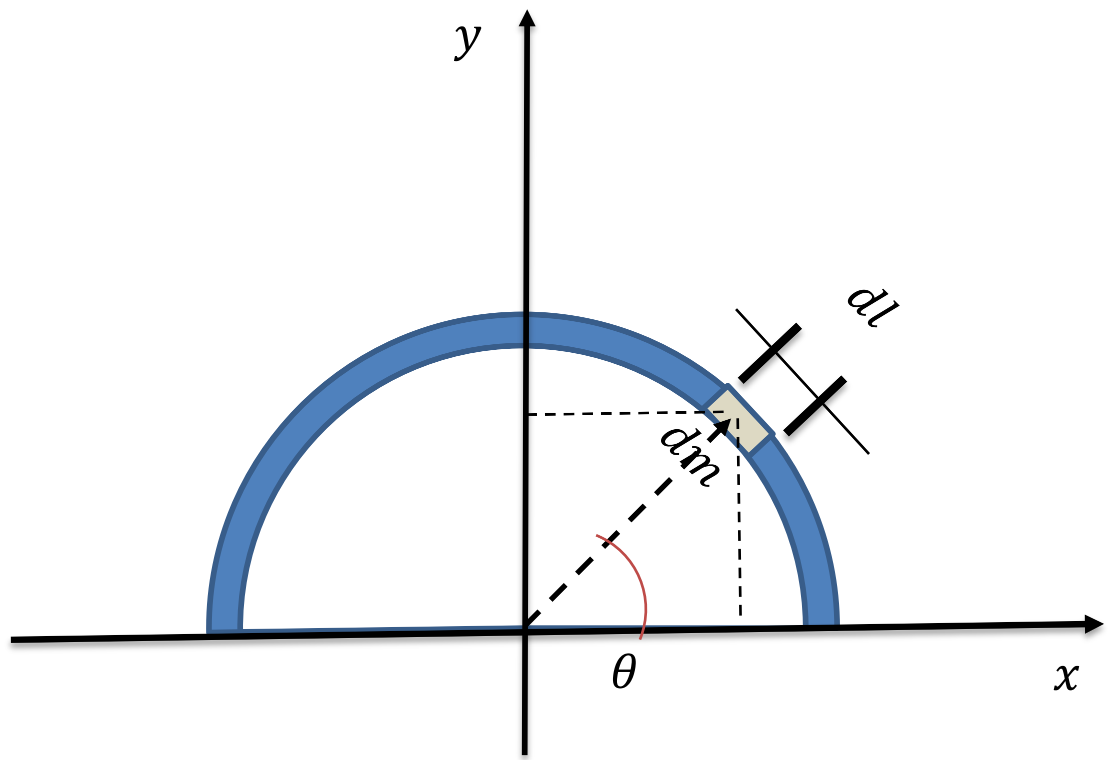
$dm = \sigma\, dA$: 2-dim

$dm = \lambda\, dl$: 1-dim

Ejemplo: CM de una barra homogénea de longitud l y masa m



Ejemplo: Semicírculo de radio R



Movimiento del CM

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

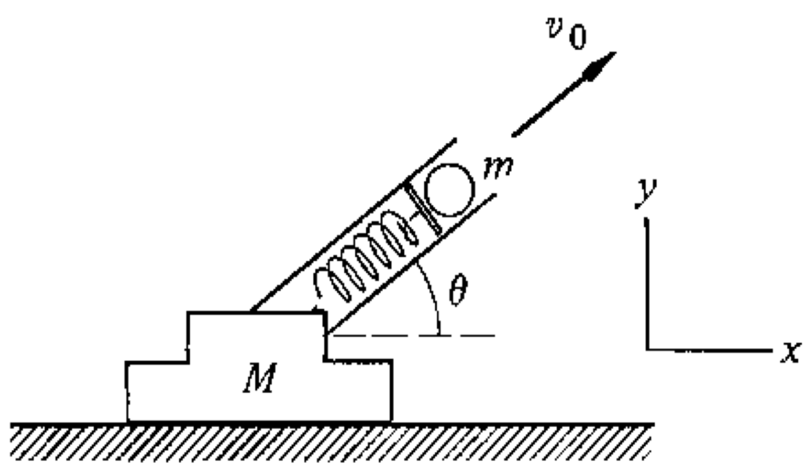
$$\Downarrow$$

$$M\vec{V}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{V}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext}$$

El CM de un sistema se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ bajo la influencia de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema.

Ejemplo

Un cañón de retroceso inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin roce dispara una bola a un ángulo θ de lanzamiento. La masa del cañón es M y la de la bola es m y la velocidad con que esta última sale del cañón es $\vec{v}_0$. ¿Cuál es la velocidad final del cañón?



Impulso y momento

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

$$\int_0^t \vec{F}_{ext}\ d\tau = \vec{P}(t) - \vec{P}(0)$$

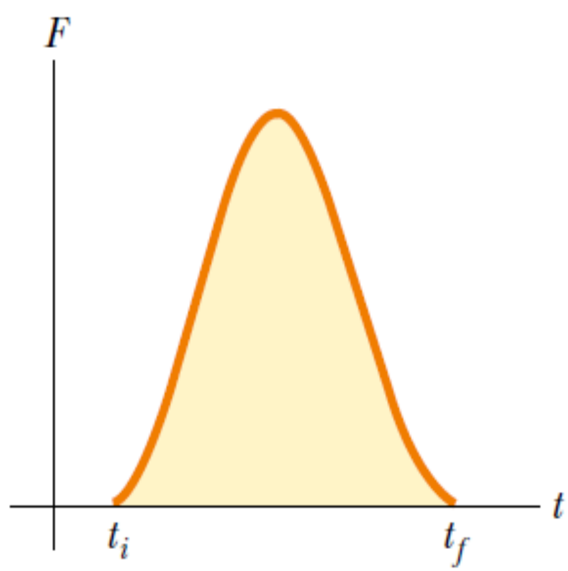
$$I = \int_0^t \vec{F}_{ext}\ d\tau$$

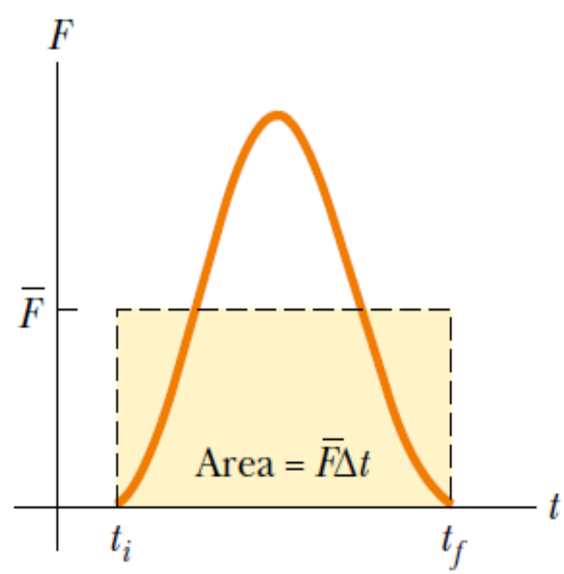
Impulso de la fuerza F

Como la fuerza que imparte el impulso puede variar en el tiempo, es conveniente definir el promedio temporal de la fuerza

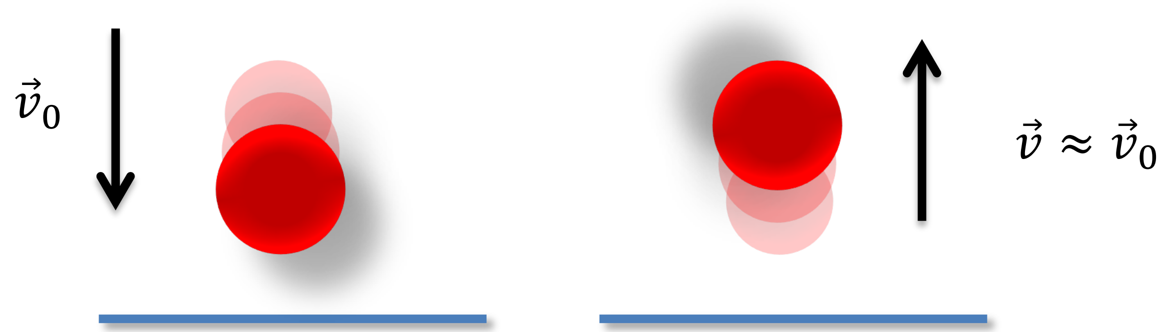
$$\bar{\vec{F}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext}\ d\tau$$

$$I = \bar{F}\Delta t$$





Ejemplo: Rebote de una pelota de goma



$$\vec{P}(t) - \vec{P}(0) = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{ext}\ d\tau$$

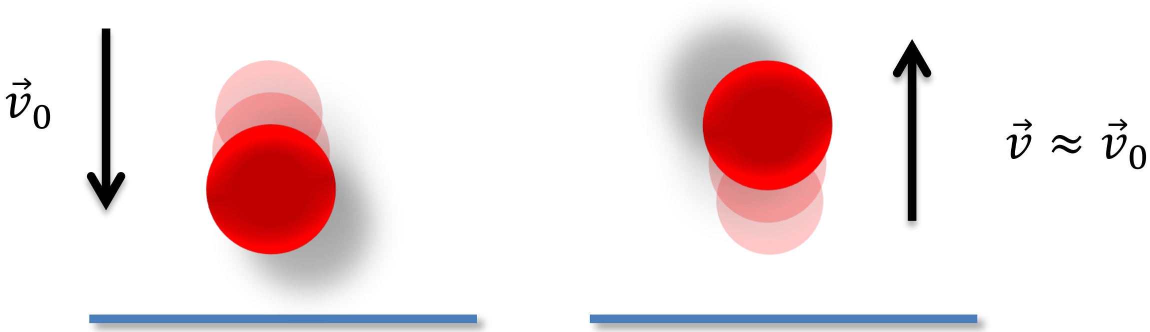
$$\vec{I} = \int_0^{t} \vec{F}_{ext}\ d\tau$$

$$2mv_0 = \bar{F}\Delta t$$

$$\vec{I} = \bar{\vec{F}}\Delta t$$

$$\bar{F} = \frac{2mv_0}{\Delta t}$$

Ejemplo: Rebote de una pelota de goma



$m = 0{,}2\ kg$ $\qquad$ $v_0 = 8\ m/s$

$\Delta t = 10^{-3}\ s$

$$\bar{F} = \frac{2mv_0}{\Delta t} = 3200\ N$$

Energía cinética de un sistema de partículas

Energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas

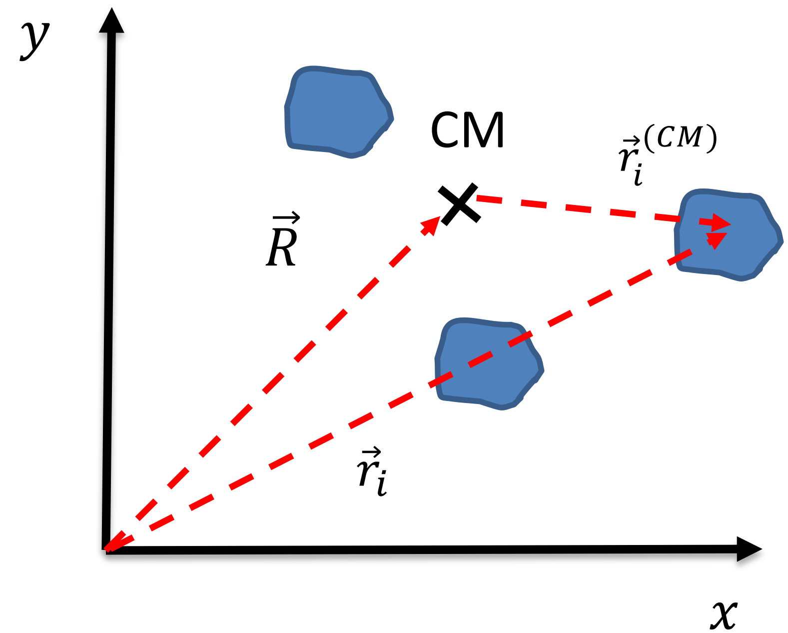
Si la fuerza neta que actúa sobre un sistema de partículas es cero el momento total del sistema es constante.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \qquad \text{Si} \qquad \vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad (\text{cte})$$

¿Qué pasa con la energía cinética del sistema?

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$



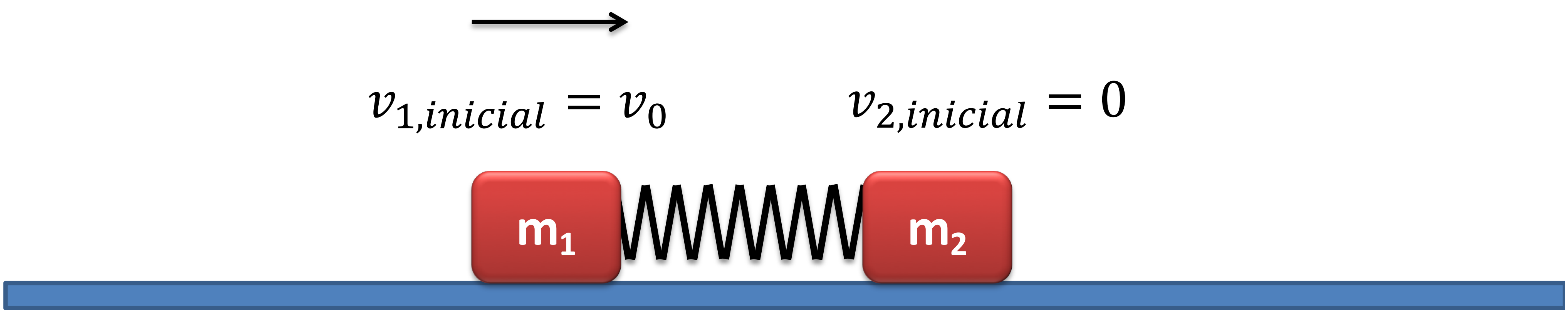
$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2$$

$$K = K_{CM} + K_{rel}$$

$$K = K_{CM} + K_{rel}$$

Cuando no existen fuerzas $\vec{P} = \overrightarrow{cte} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{CM} = \overrightarrow{cte}$ y la energía cinética asociada con el movimiento del bulk $\frac{1}{2}MV_{CM}^2$ no cambia, sólo la energía cinética relativa puede cambiar en un sistema aislado.

Desconsiderando el roce con la superficie



¿Cuál es la velocidad del CM del sistema en un instante posterior de tiempo?

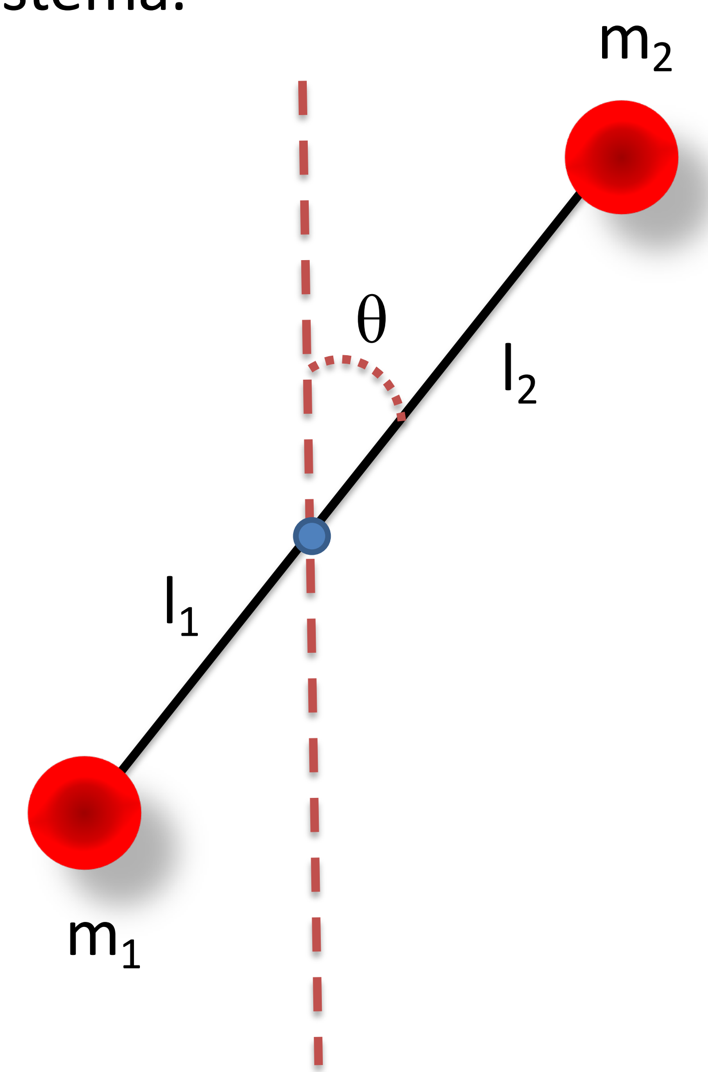
Energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec{r}_i) = -\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{g} \cdot \vec{r}_i$$

$$U(\vec{r}) = -\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) \cdot \vec{g} = -M\ \vec{g} \cdot \vec{R}$$

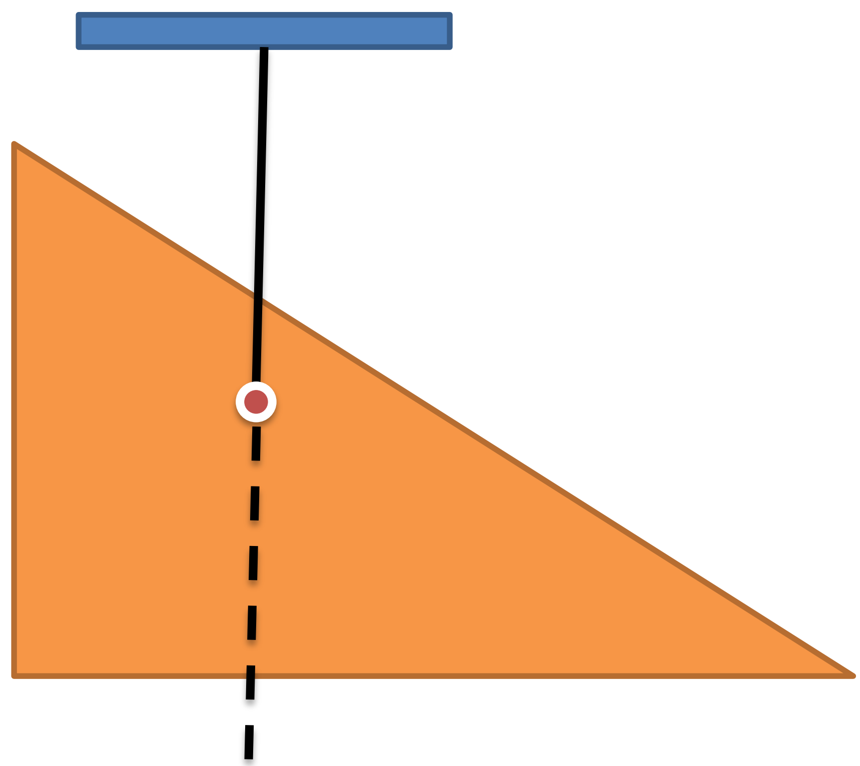
Ejemplo: Ley de la Palanca

Escribir la Energía potencial del sistema.
Calcular el ángulo de equilibrio.



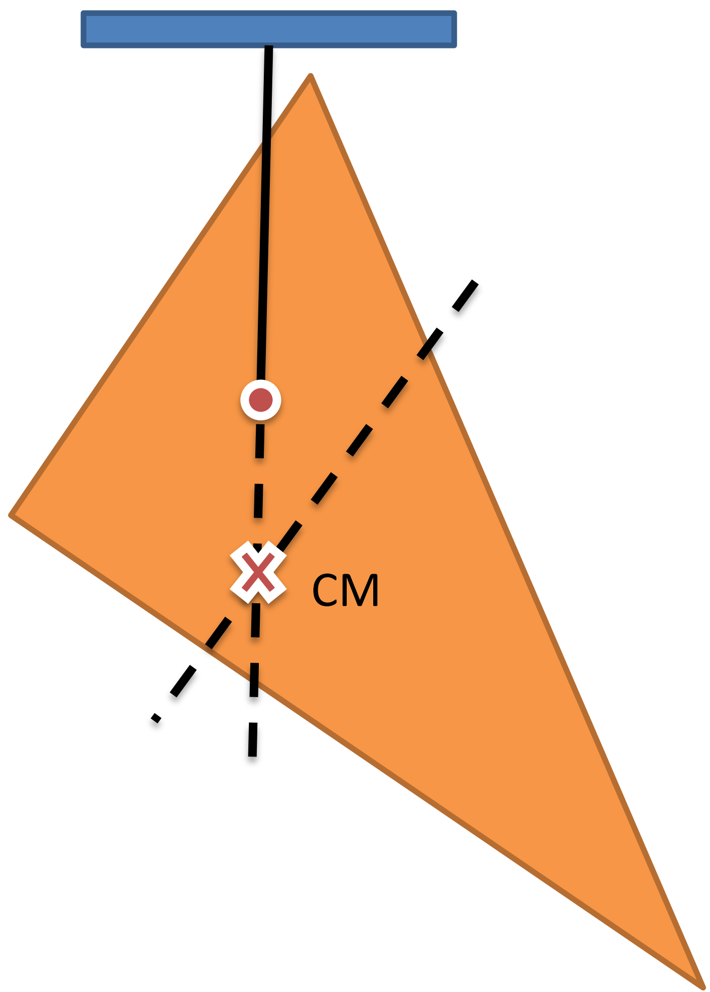
Como determinar a priori el CM de cuerpos irregulares

1- Colgar el cuerpo. El CM estará ubicado en algún punto en la línea vertical dibujada directamente desde el pivot.



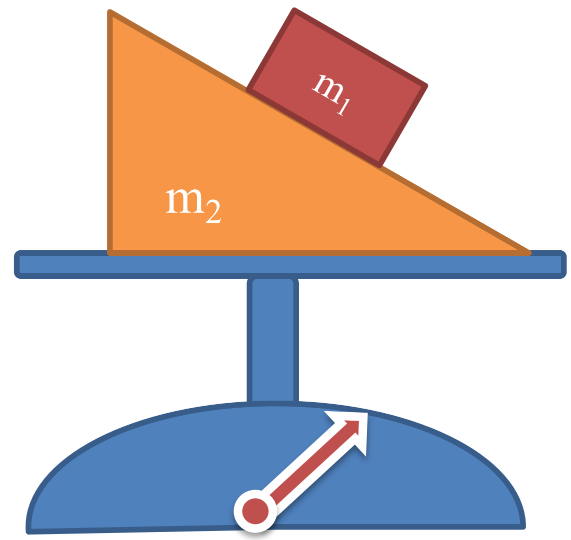
Como determinar a priori el CM de cuerpos irregulares

2- Suspendemos ahora el cuerpo desde otro punto y trazamos otra línea vertical. Cómo el CM estará en esta línea (debajo del pivot) su ubicación será el punto de intersección entre las líneas.



Ejemplo 2

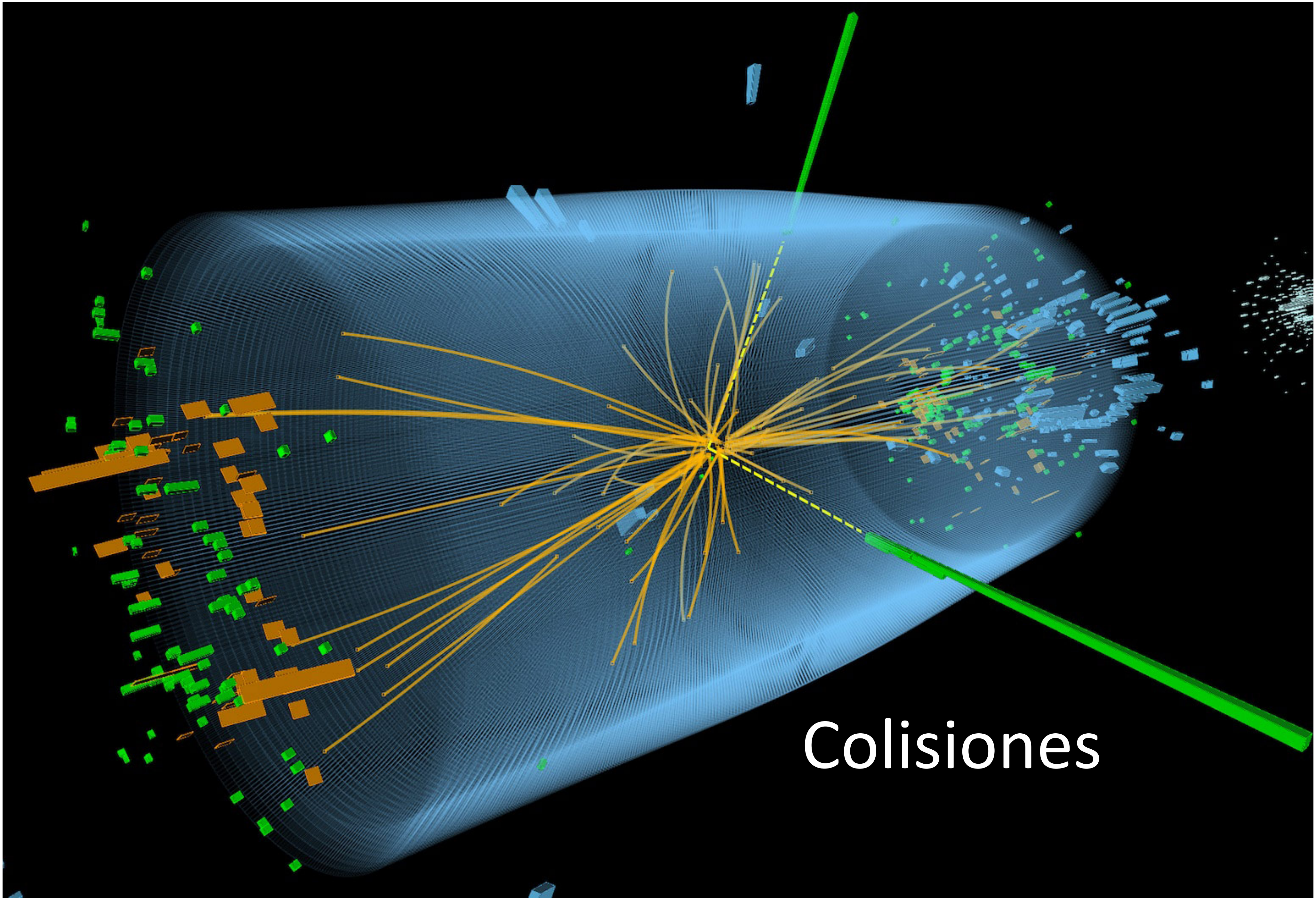
Si el cuerpo de masa m_1 se desliza sobre m_2 (que queda fijo al plato) ¿qué sucede con la lectura de la balanza



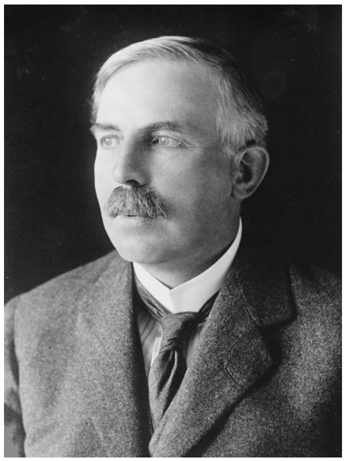
a. Marca más peso

b. Marca menos peso

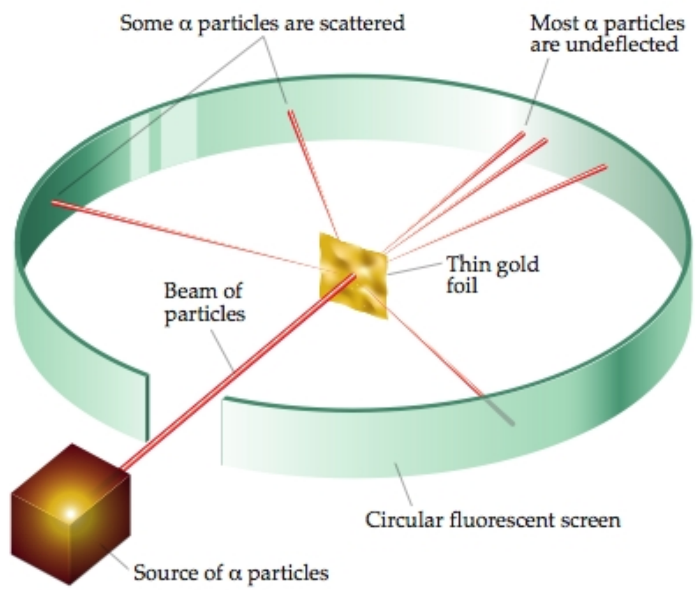
c. No detecta diferencia alguna

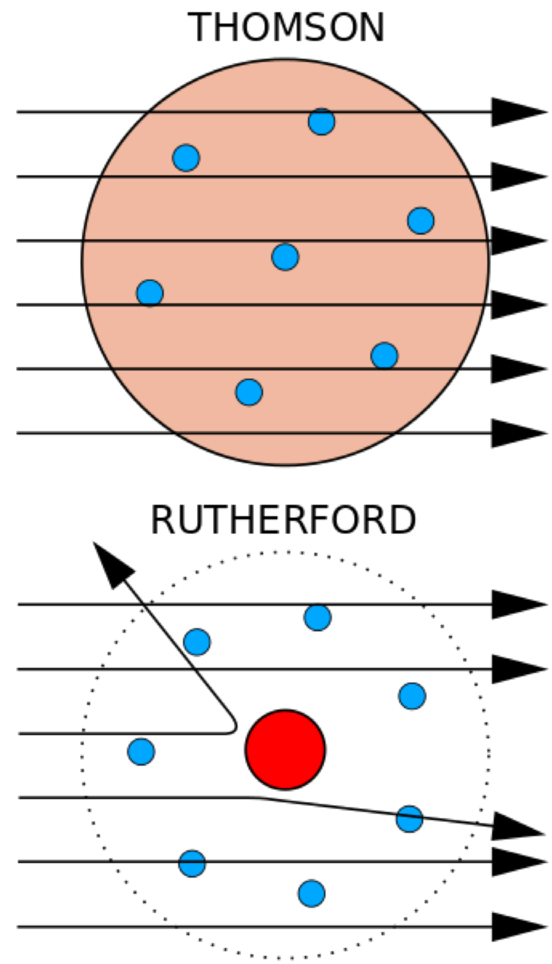

Colisiones

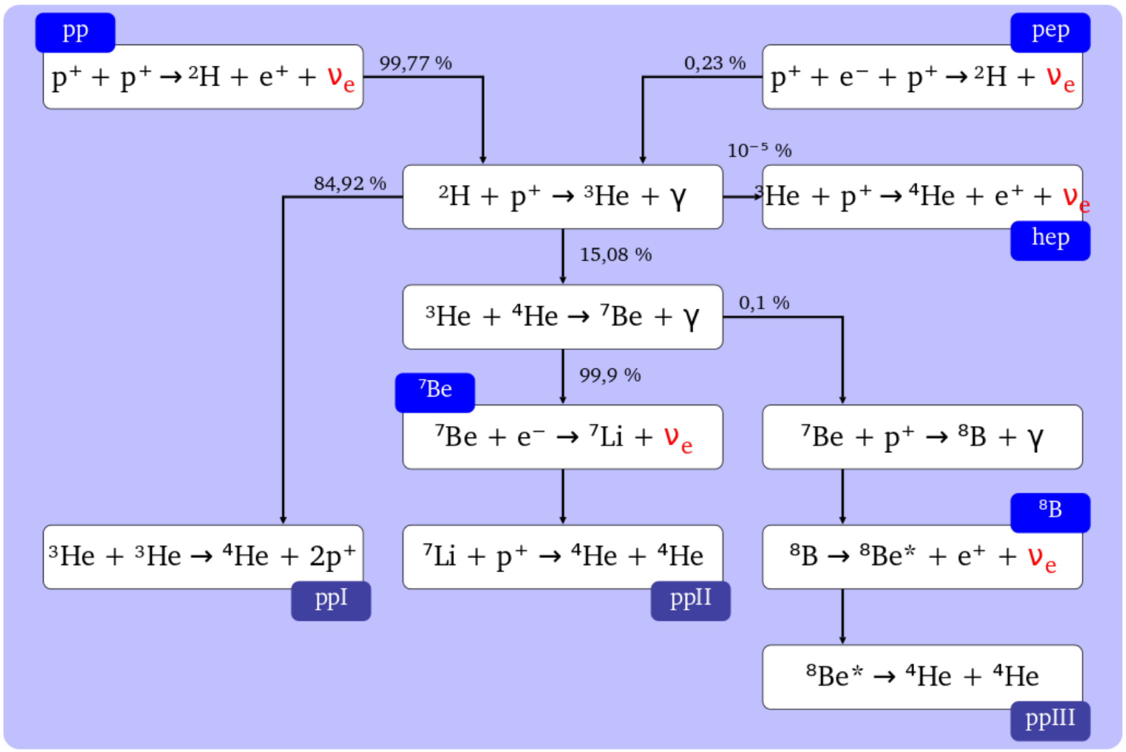
Colisiones

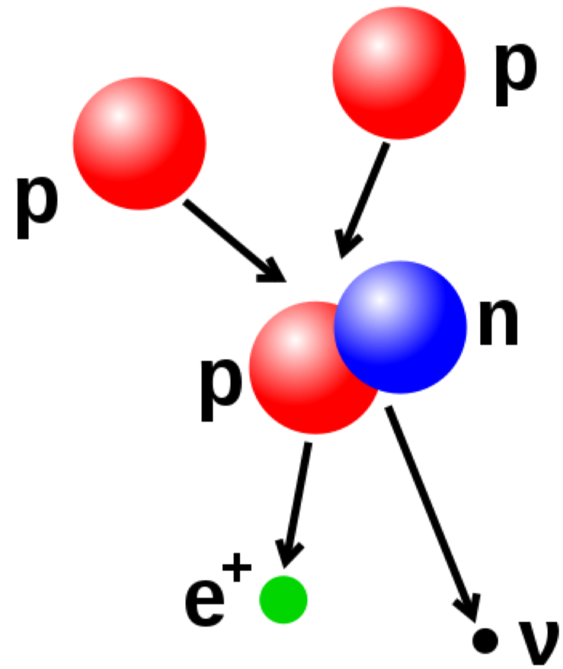


Rutherford (1871-1937)



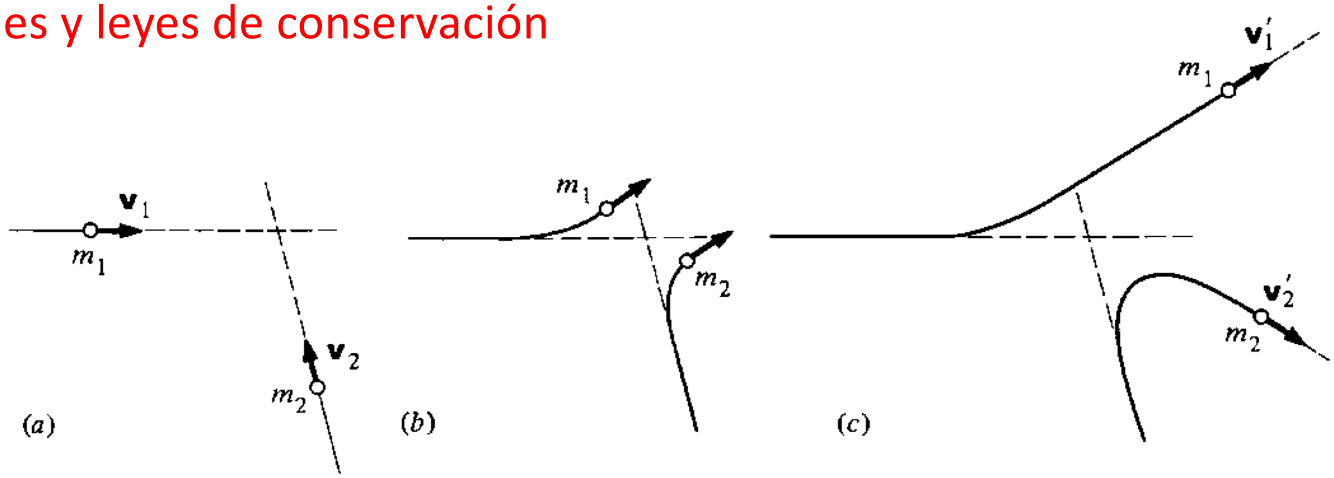






Proton–proton and electron-capture chain reactions in a star

Colisiones y leyes de conservación

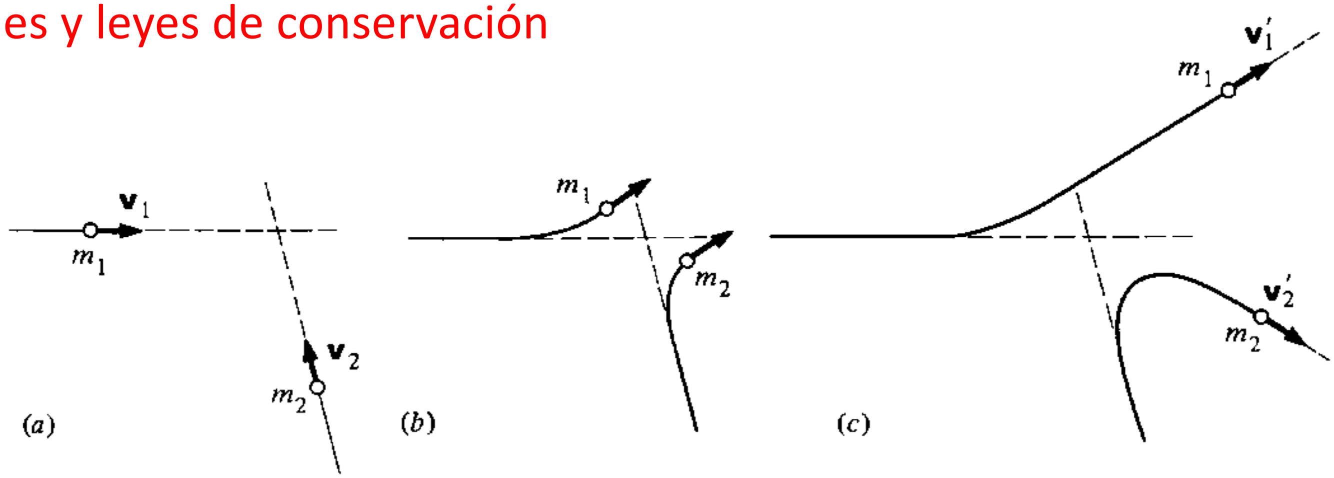


Las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo de una forma complicada. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza de interacción esta fuerza es interna al sistema de las dos partículas.

Durante el instante de la colisión, cualquier fuerza externa es mucho menor que las fuerzas de interacción de manera que las únicas fuerzas relevantes son las fuerzas internas.

Así, las dos partículas forman un sistema aislado y el momento del sistema debe ser conservado.

Colisiones y leyes de conservación



El momento del sistema se conserva.

Sin embargo, la energía cinética del sistema de partículas, $K = K_{CM} + K_{rel}$ (K del CM + K relativa al CM) puede ser o no conservada dependiendo del tipo de colisión.

Colisiones

$$P_i = P_f$$

Elásticas

$$K_i = K_f$$

Inelásticas

$$K_i = K_f + \Delta E_{int}$$

$$K_i \neq K_f$$

Revisión

- ¿Qué es un sistema?

Un objeto o grupo de objetos que podemos separar mentalmente del medio exterior.

- Para un sistema dado. ¿cuál es la distinción entre interacciones externas e internas?

Interacciones internas son entre objetos en el sistema, mientras que interacciones externas son entre un objeto dentro del sistema y un objeto fuera del sistema.

Esta distinción es muy importante porque las interacciones externas pueden cambiar el momento de un sistema mientras que las internas no.

- ¿Qué es un sistema aislado y para que sirve?

Un sistema aislado es aquel para el cual no hay interacciones externas.

Como el momento de un sistema aislado no cambia con el tiempo podemos utilizar esta información en cualquier instante posterior.

¿Cómo escoger un sistema aislado?

1- Separar todos los objetos que entran en el problema.

2- Identificar todas las posibles interacciones entre estos objetos y en ambiente (tierra, aire…).

3- Considerar cada interacción individualmente y determinar si estas provocan que los objetos se aceleren.

¿Cómo escoger un sistema aislado?

3- Considerar cada interacción individualmente y determinar si estas provocan que los objetos se aceleren. Eliminar toda interacción que no afecta (o que tiene un efecto despreciable) en la aceleración de los objetos durante el intervalo de interés.

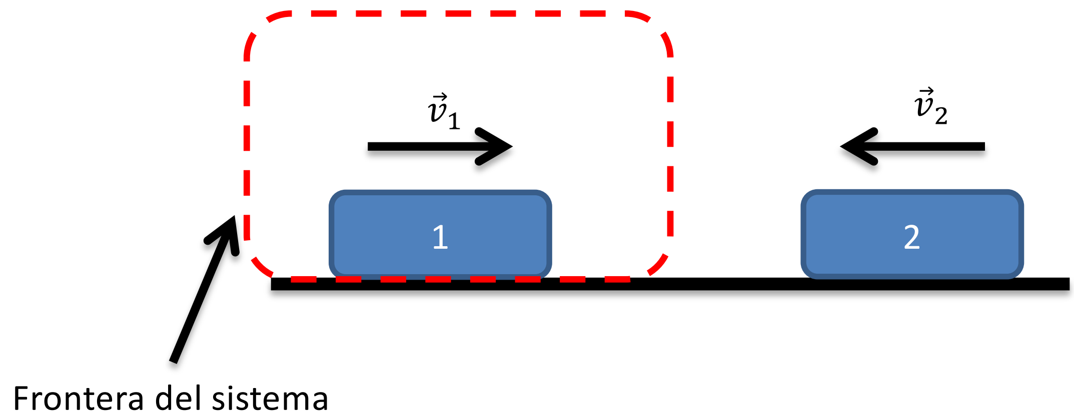
¿Cómo escoger un sistema aislado?

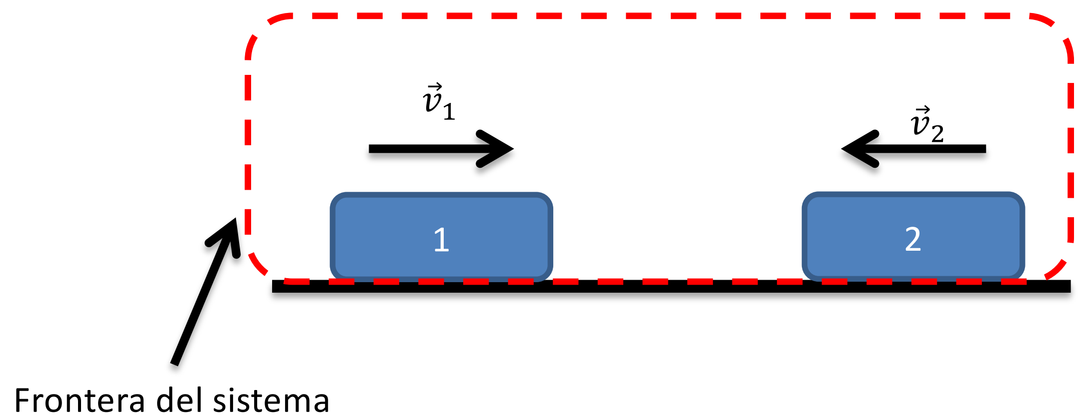
4- Escoger un sistema que incluya el objeto o los objetos que están relacionados con el problema (por ejemplo, el carro en cuyo momento estamos interesados) de manera tal que ninguna de las interacciones restantes cruce la frontera del sistema.

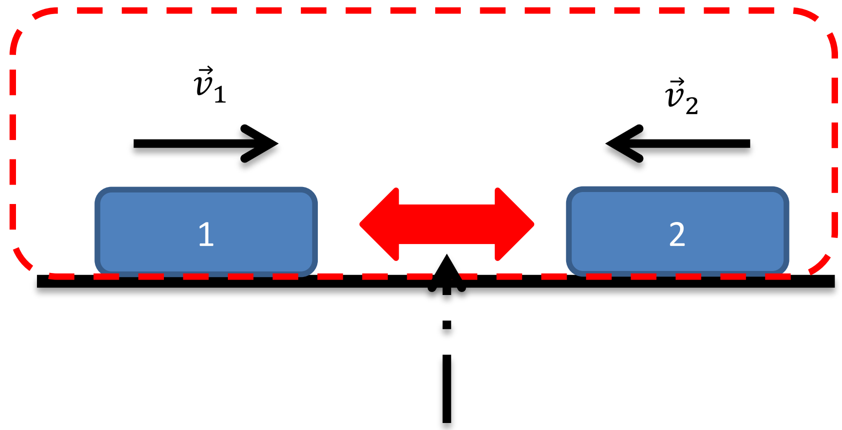
Dibuje una línea delimitando la frontera del sistema.

¿Cómo escoger un sistema aislado?

5- Realice un diagrama mostrando los estados inicial y final del sistema y del ambiente.


$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
1
2
Frontera del sistema

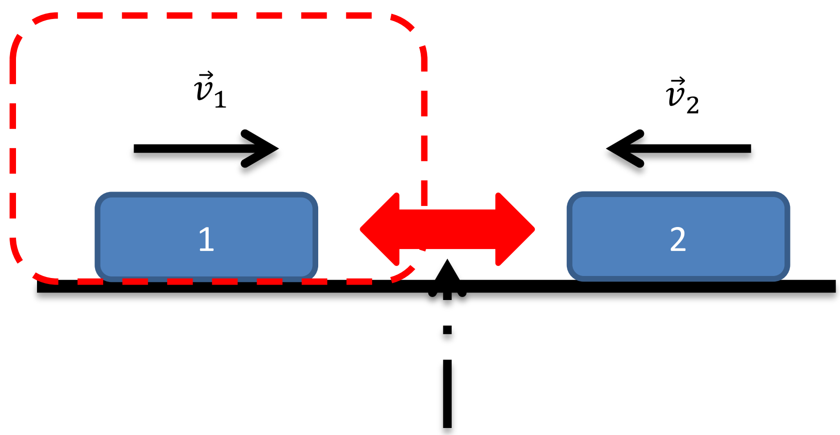

$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
1
2
Frontera del sistema



La interacción es interna al sistema

El sistema está aislado

$$\Delta\vec{P} = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$$

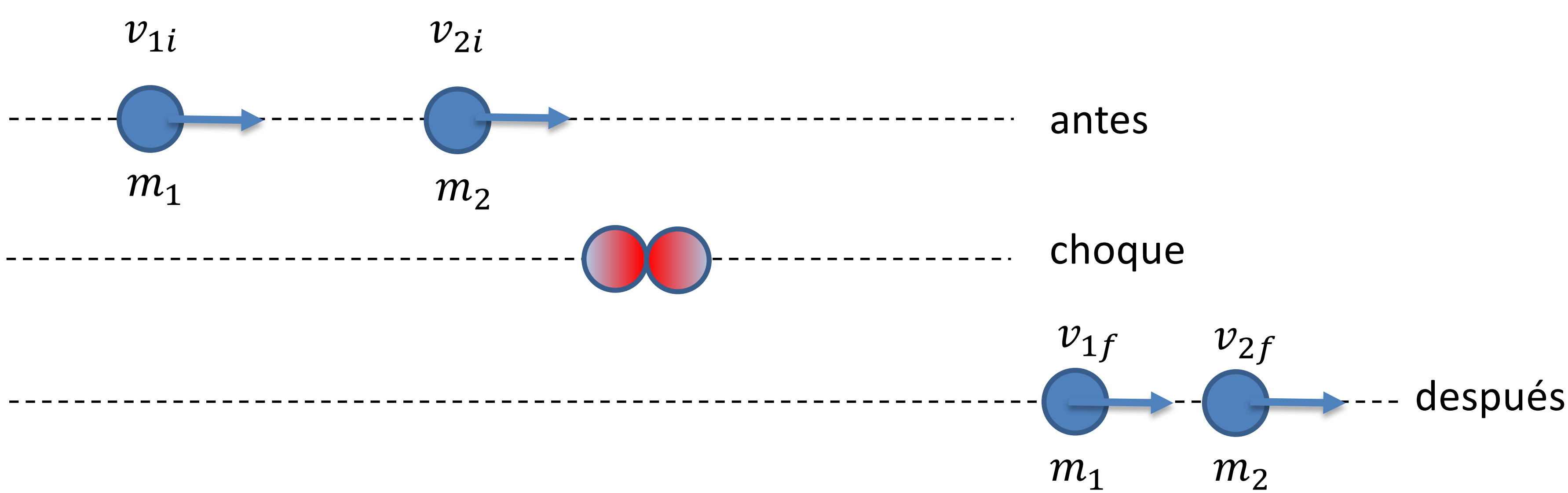


La interacción es externa (cruza la frontera) al sistema

El sistema NO está aislado

$$\Delta\vec{p}_1 \neq \vec{0}$$

Colisiones en 1D



Incógnitas, v_{1f} y v_{2f}

Colisiones

$$P_i = P_f$$

Elásticas

$$K_i = K_f$$

Inelásticas

$$K_i = K_f + \Delta E_{int}$$

$$K_i \neq K_f$$

Colisiones $P_i = P_f$

Inelásticas

$$K_i = K_f + Q$$

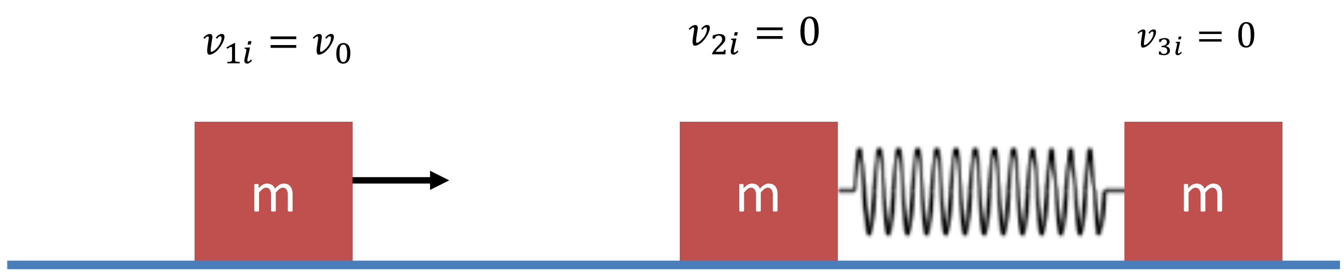
$$K_i \neq K_f$$

Ejemplo:

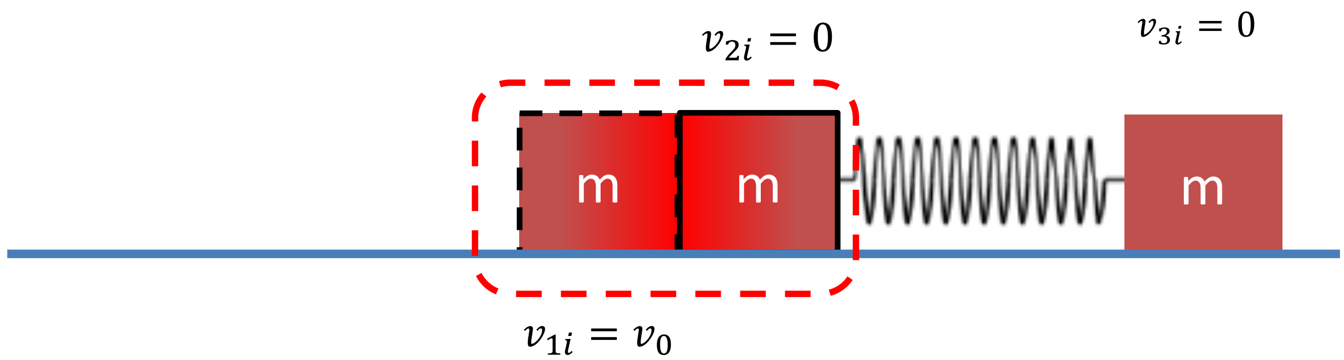
Con los datos dados en la siguiente figura:

Calcular la deformación máxima del resorte si la colisión entre los cuerpos 1 y 2 es elástica.

Considere la superficie lisa.



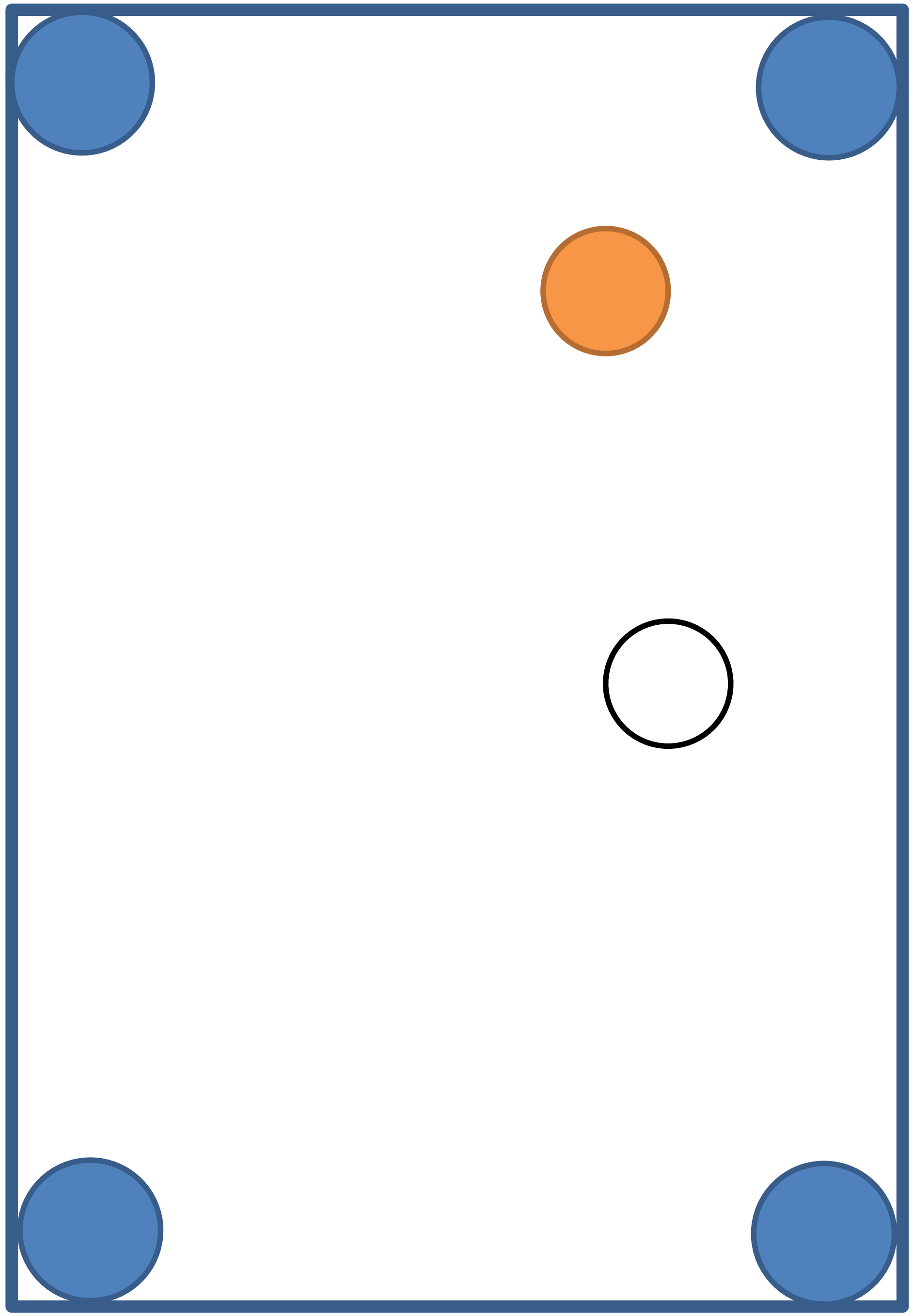
Importante: Primero hay que resolver la colisión

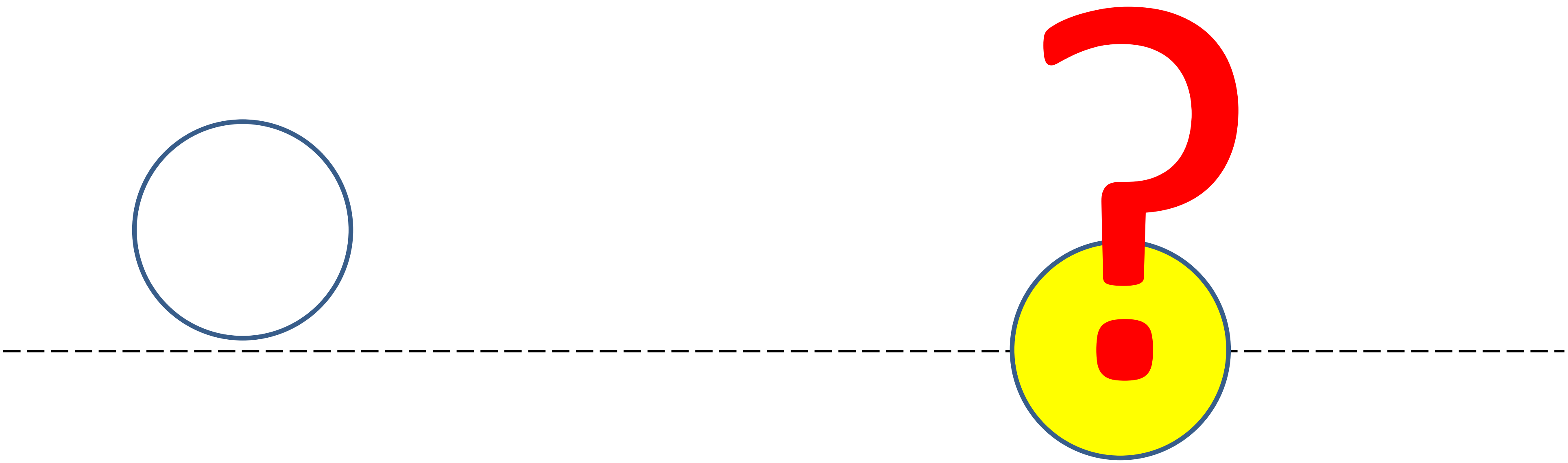


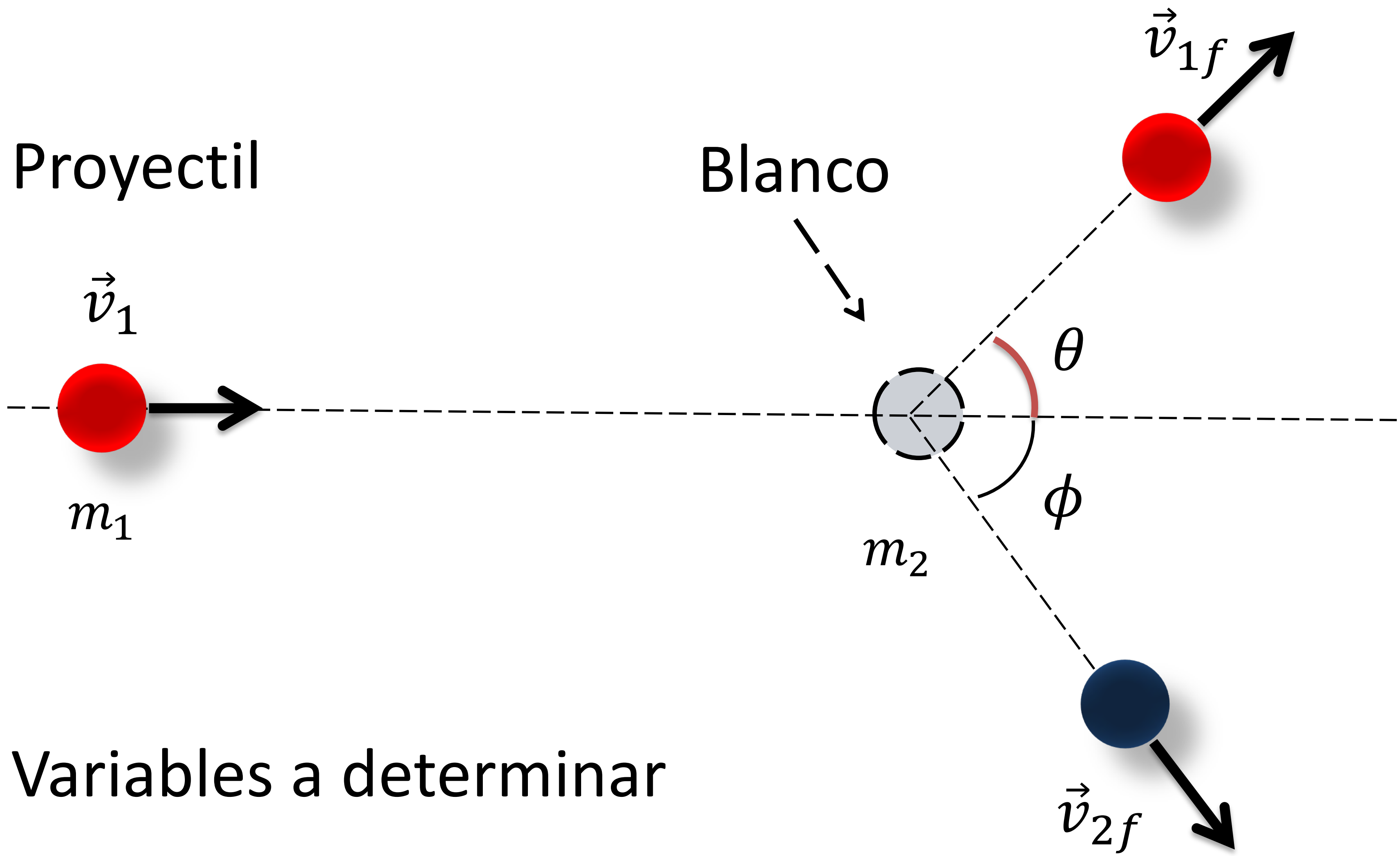
Colisiones

Choque elástico en dos dimensiones

Choque de esferas rígidas

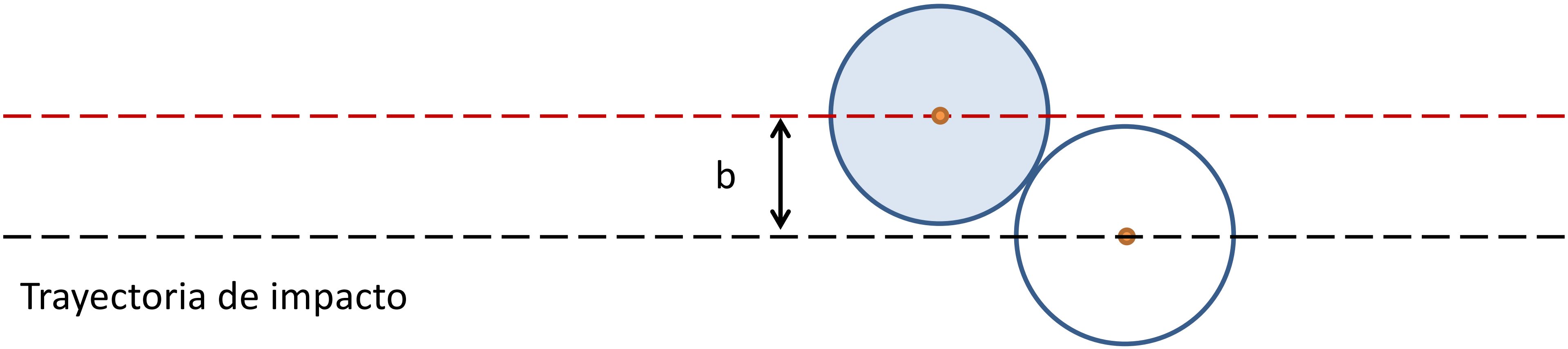




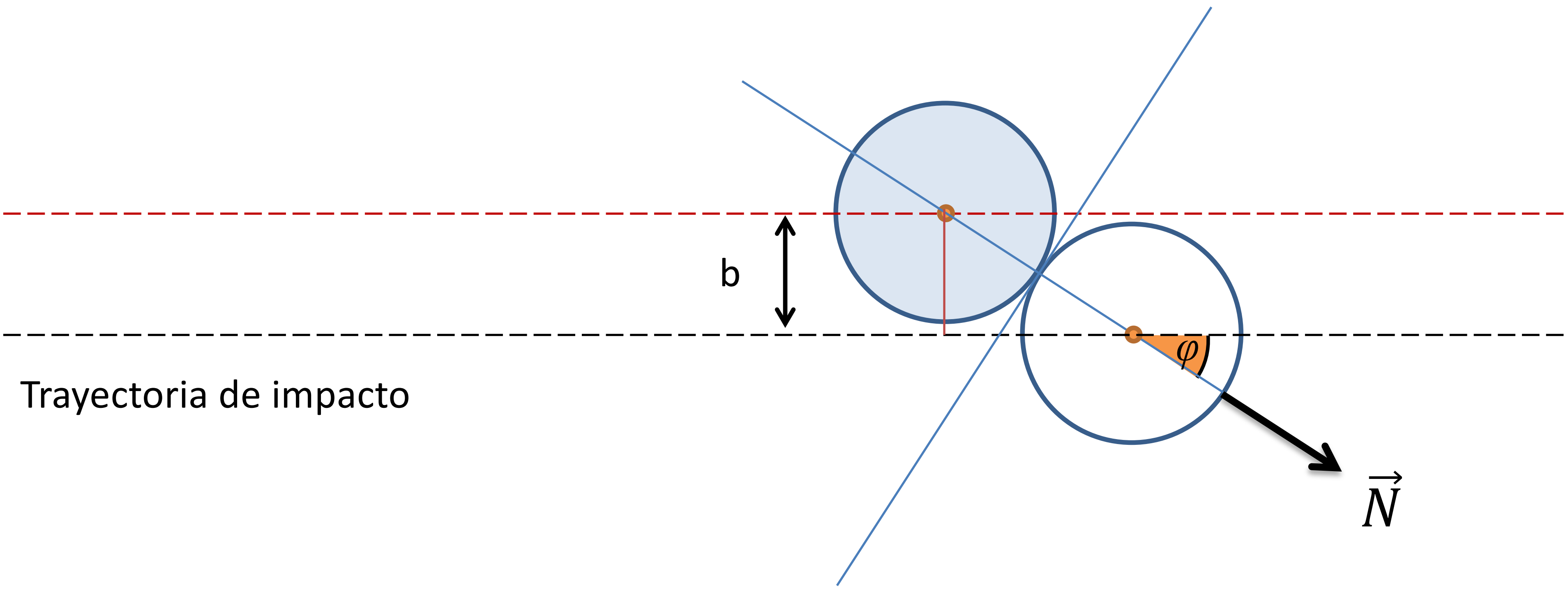


Variables a determinar

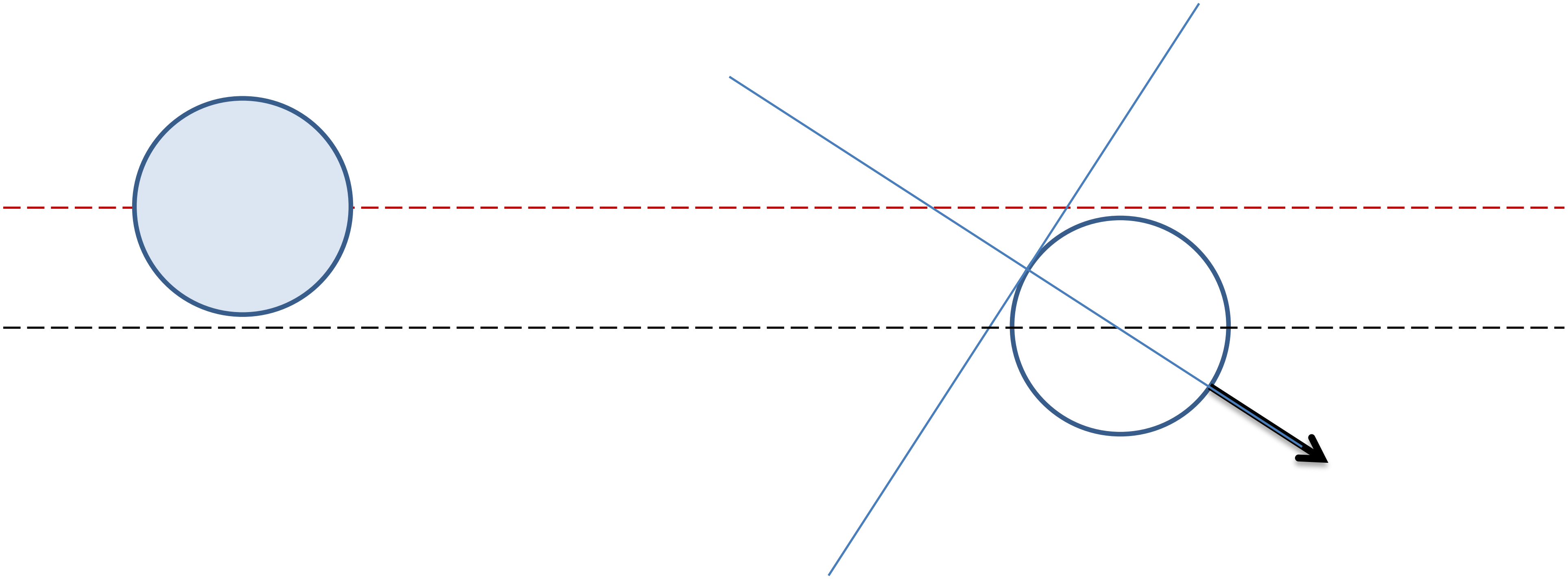
$\theta \quad \phi \quad \vec{v}_{1f} \quad \vec{v}_{2f}$

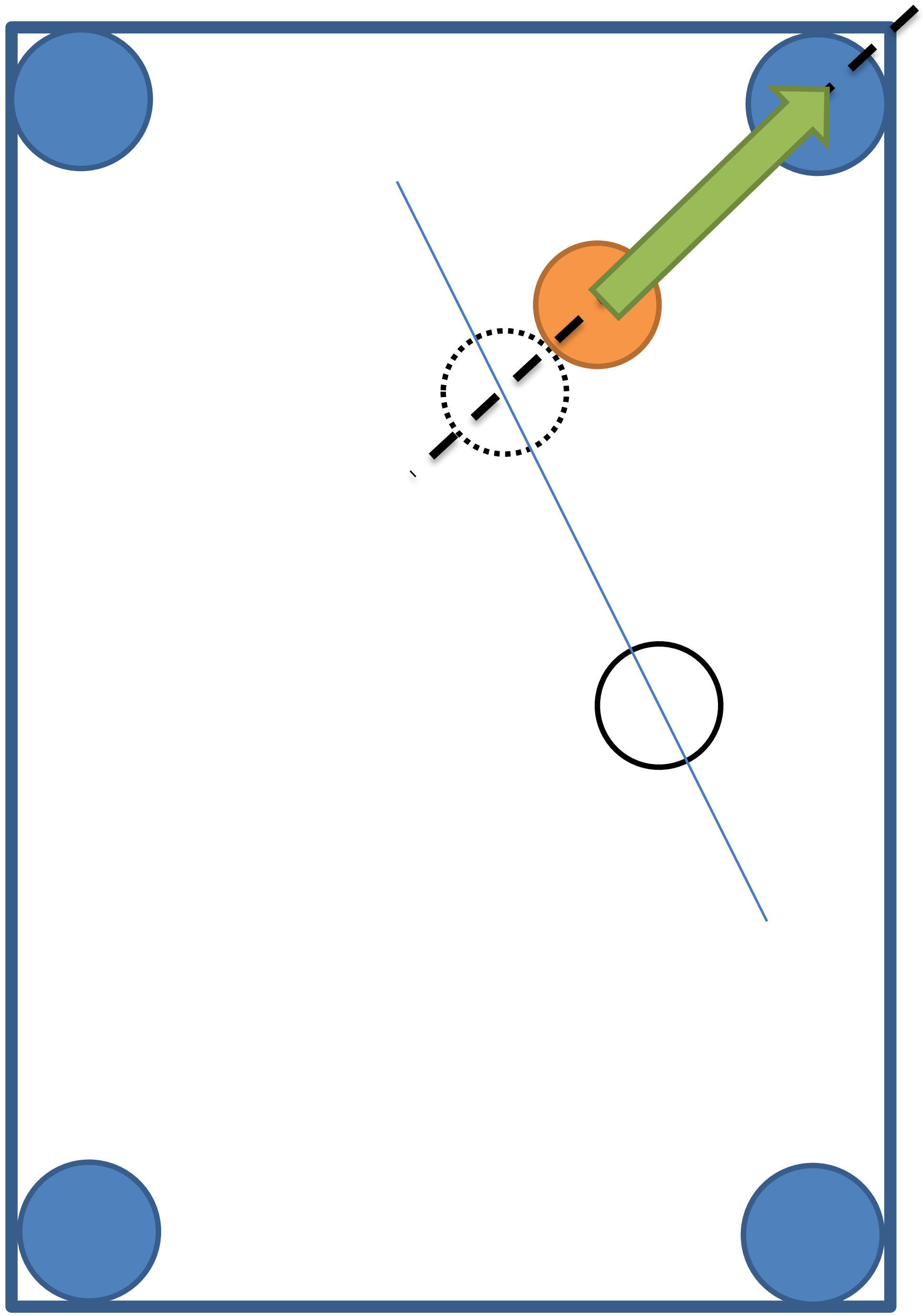


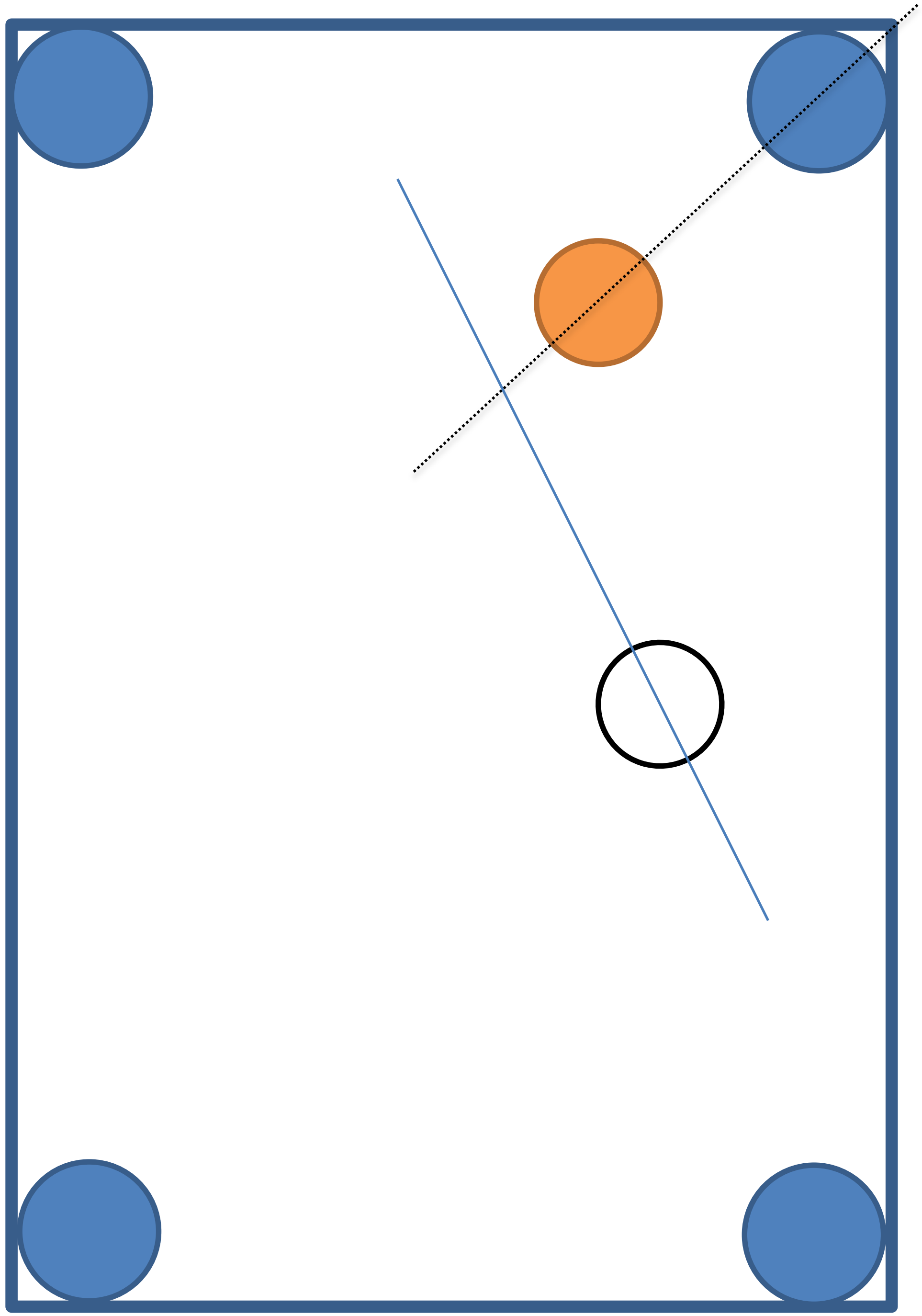
b: parámetro de impacto



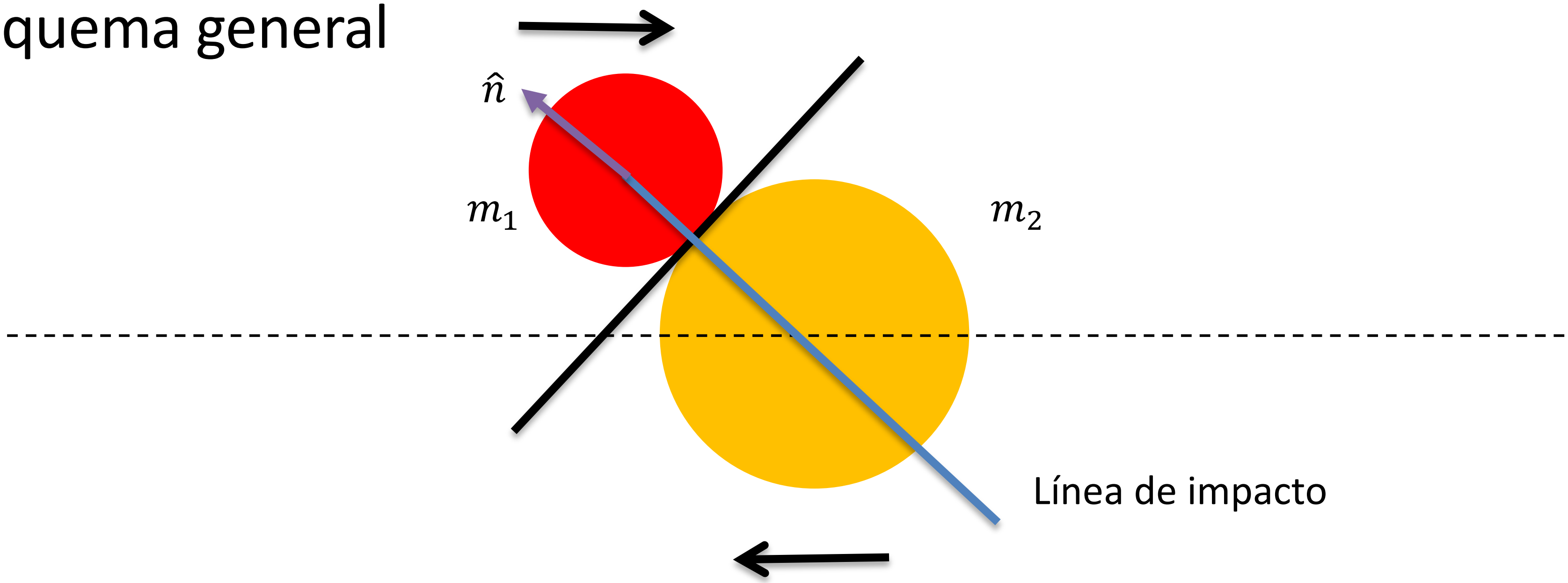
b: parámetro de impacto

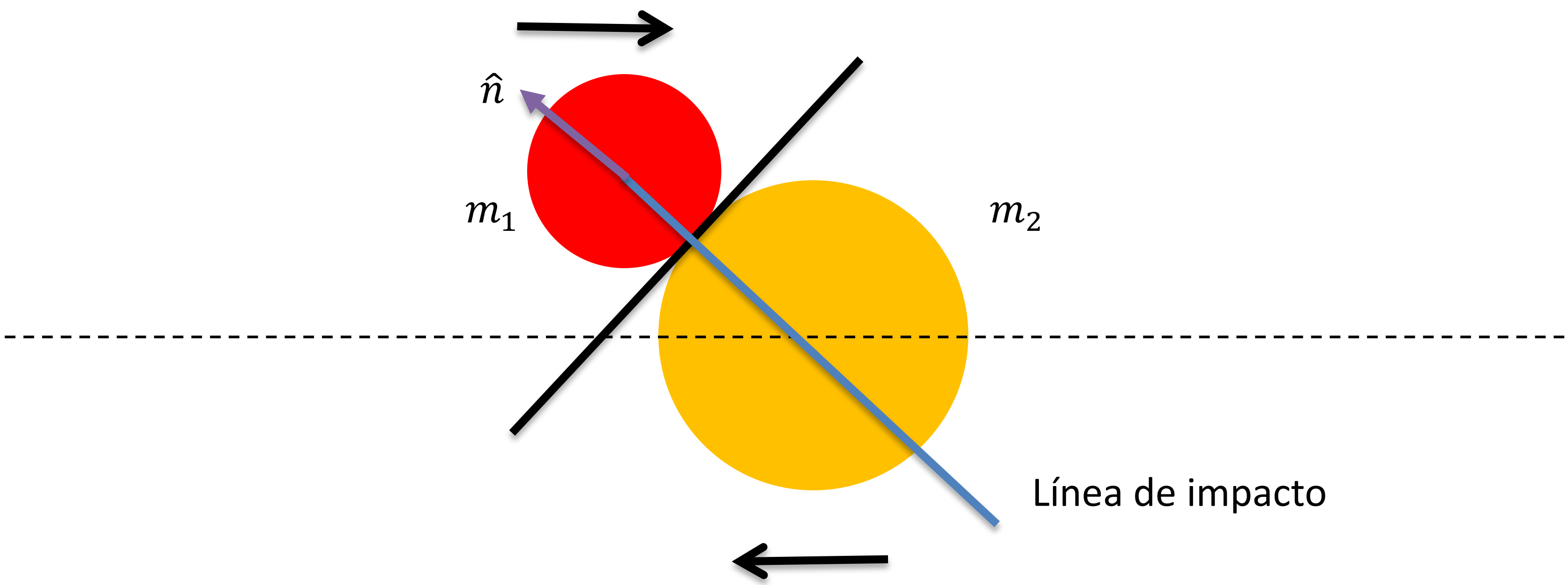






Esquema general





1- Trazamos la línea de impacto (denotémosla por eje x) y escribimos la conservación del momento lineal en esta dirección.

La variación del momento para cada partícula es

$$\Delta\vec{p}_1 = \int \vec{N}_1\,dt = \left[\int N_1\,dt\right]\hat{n}, \qquad \hat{n} = \frac{\vec{N}_1}{N_1} \qquad \Delta\vec{p}_2 = \int \vec{N}_2\,dt = -\left[\int N_1\,dt\right]\hat{n},$$

1- Trazamos la línea de impacto (denotémosla por eje x) y escribimos la conservación del momento lineal en esta dirección.

$$\Delta\vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_1 = \vec{0},$$

aplicamos la conservación del momento lineal a lo largo de la línea de impacto.

2- El coeficiente de restitución relaciona las componentes de las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto (eje x)

$$e = \frac{v_{2fx} - v_{1fx}}{v_{1ix} + v_{2ix}}$$

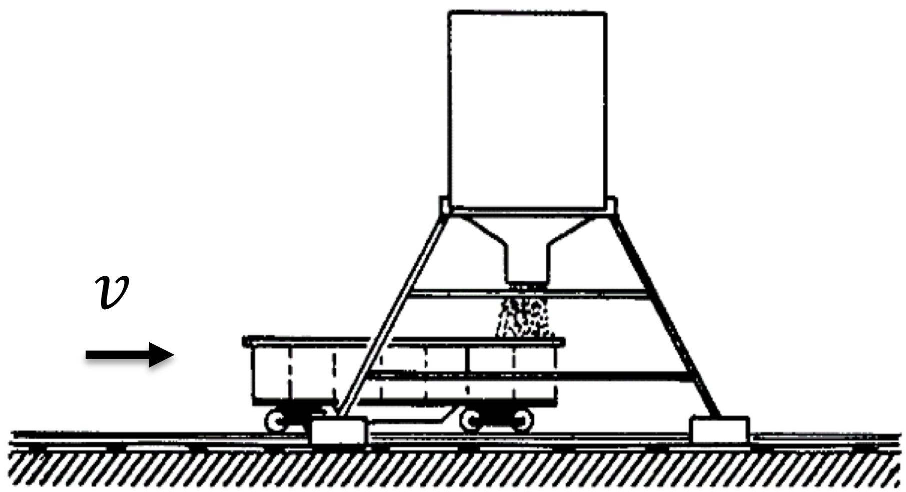
De estas dos ecuaciones obtenemos v_{2fx} y v_{1fx}.

3- Los momentos de las partículas 1 y 2 se conservan en la línea perpendicular a la línea de impacto (eje y)

$$\Delta p_{1y} = 0, \qquad \Delta p_{2y} = 0$$

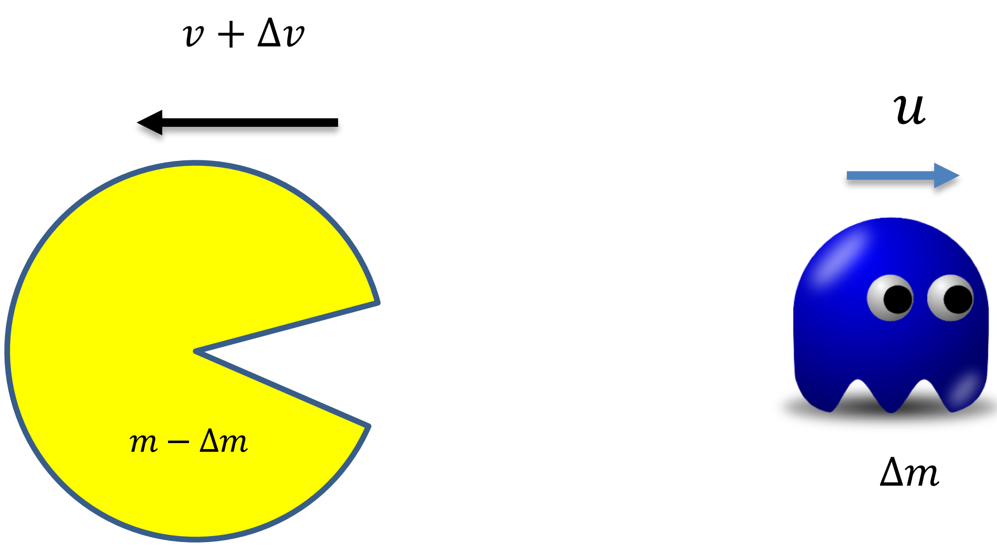
Sistemas de masa variable

Transferencia de material hacia un objeto sin transferencia de momento

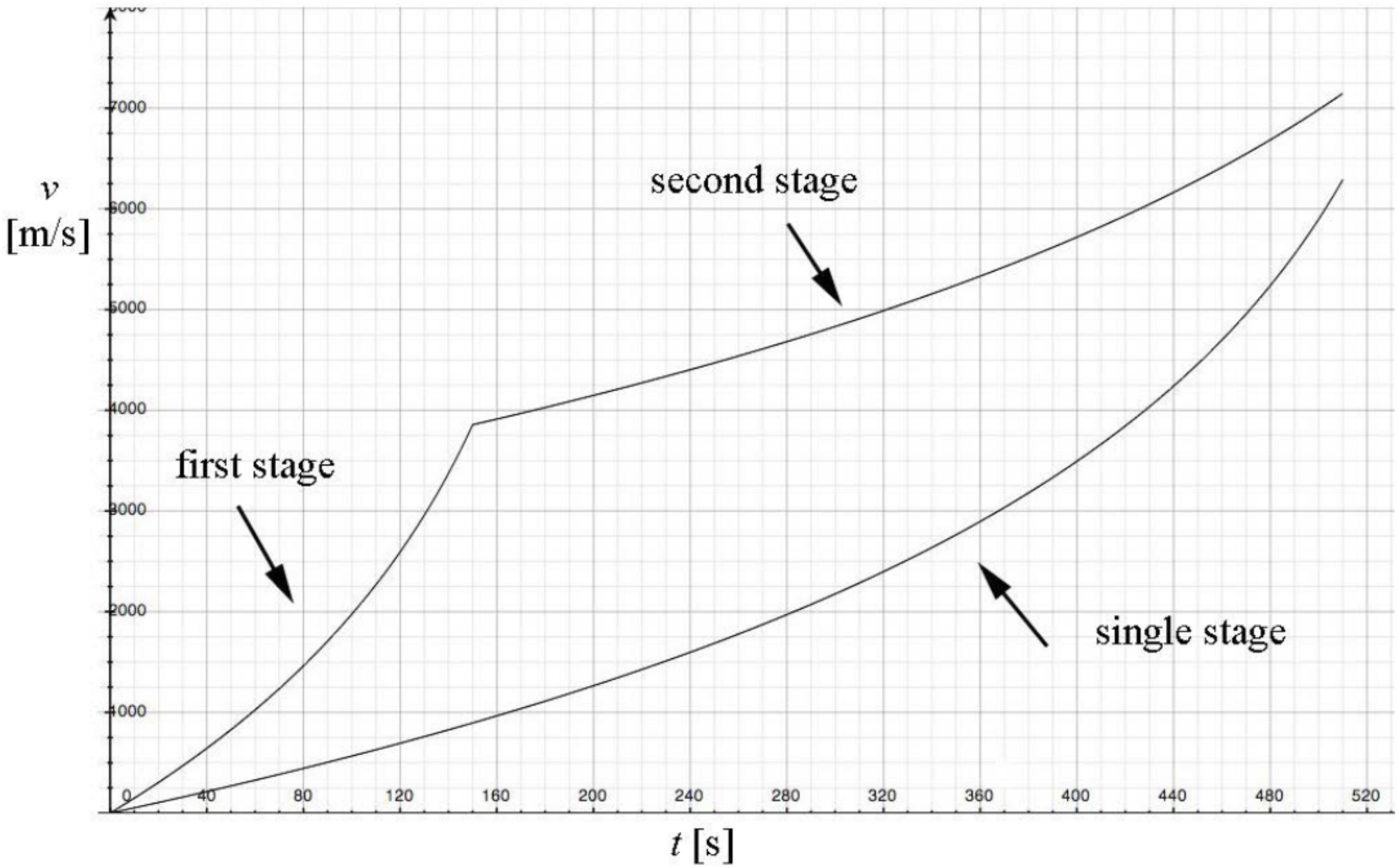


Transferencia de material hacia fuera de un objeto sin transferencia de momento

3. Material siendo expelido continuamente por el objeto



Instante $t + \Delta t$



v [m/s]
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
40
80
120
160
200
240
280
320
360
400
440
480
520
t [s]
second stage
first stage
single stage