Estática y Dinámica

Material Clases Cuerpo Rigido – Rotacion 2

1. Momento angular.

2. Momento Angular. Rotación en relación a un eje fijo

3. Momento angular en relación a un punto arbitrario

4. Dinámica del cuerpo rígido.

1. Momento angular

Consideremos el sistema más simple: la partícula. Como la partícula no tiene tamaño, su orientación en el espacio carece de sentido y podemos así concentrarnos en el movimiento de traslación.

Consideremos entonces una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$, esto es, con momento lineal $\vec{p}$.

El momento angular $\vec{l}$ de la partícula en relación a un sistema de coordenadas dado se define como

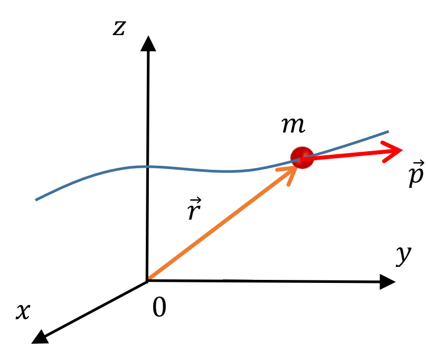
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{1.1}$$

donde:

$\vec{r}$: posición instantánea de la partícula (referida a un origen dado)

$\vec{p}$: momento lineal

$$[l] = \frac{kg\, m^2}{s} = J \cdot s$$



Notemos que:

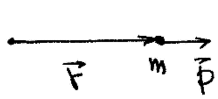
- La magnitud y la dirección de $\vec{l}$ dependen de la elección del origen del sistema de referencia.
- La dirección de $\vec{l}$ es $\perp$ al plano que contiene vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$.
- $\vec{l} = \vec{0}$ si $\vec{r} \parallel \vec{p}$.

Importante, **la elección del sistema de coordenadas es crucial. Debemos escoger el origen de coordenadas antes de calcular el momento angular!!!.**

Ejemplo:

Consideremos la partícula de masa m que se desliza libremente a lo largo del eje x

a) ¿Cuál es su momento angular en relación al origen?

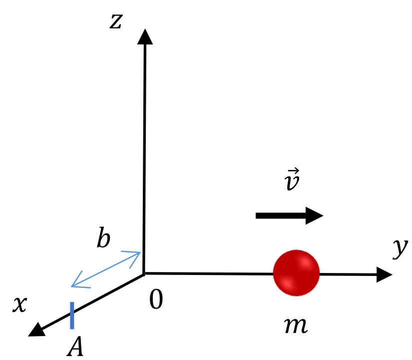


$\vec{r} \parallel \vec{p}$

b) ¿Cuál es su momento angular en relación al punto A?

---

a) De la definición es claro que como $\vec{r} \parallel \vec{p}$, $\vec{l} = \vec{0}$.



b) Calculemos el momento angular por tres métodos:

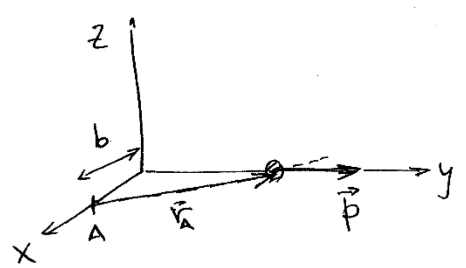
Método 1:

$$\vec{l}_A = \vec{r}_A \times \vec{p} = (\vec{r}_{A\parallel} + \vec{r}_{A\perp}) \times \vec{p} = \vec{r}_{A\parallel} \times \vec{p} + \vec{r}_{A\perp} \times \vec{p}$$

donde $\vec{r}_{A\parallel}$ es la componente del radio vector paralela a $\vec{p}$ y $\vec{r}_{A\perp}$ es la componente del radio vector perpendicular a $\vec{p}$. Pero, $\vec{r}_{A\parallel} \times \vec{p} = \vec{0}$

$$\vec{l}_A = \vec{r}_{A\perp} \times \vec{p} = -mbv\hat{k}$$

Método 2:



También podríamos haber escrito

$$\vec{l}_A = \vec{r}_A \times \vec{p} = \vec{r}_A \times (\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp) = \vec{r}_A \times \vec{p}_\parallel + \vec{r}_A \times \vec{p}_\perp$$

donde $\vec{p}_\parallel$ es la componente del momento paralela a $\vec{r}_A$ y $\vec{p}_\perp$ es la componente del momento perpendicular a $\vec{r}_A$. Pero, $\vec{r}_A \times \vec{p}_\parallel = \vec{0}$

$$\vec{l}_A = \vec{r}_A \times \vec{p}_\perp = -mbv\hat{k}$$

Notemos que el cálculo de $\vec{l}$ depende de la elección del origen de coordenadas.

Método 3:

También podemos abrir el producto vectorial, ($\vec{r}_A = (-b, y, 0)$; $\vec{p} = (0, p, 0)$)

$$\vec{l}_A = \vec{r}_A \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -b & y & 0 \\ 0 & p & 0 \end{vmatrix} = -bmv\hat{k}$$

1.1. Momento angular y fuerzas

Para encontrar la relación entre momento angular y fuerza derivemos la ecuación (1.1) en relación a t.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.2}$$

Pero $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = m\,\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ y por lo tanto

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{1.3}$$

La cantidad $\vec{r} \times \vec{F}$ es llamada de torque,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.4}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición del origen al punto de aplicación de $\vec{F}$.

Finalmente, la ecuación (1.3) se escribe como

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau} \tag{1.5}$$

Esto es, la variación del momento angular de una partícula es igual al torque de las fuerzas aplicadas sobre esta. Notemos que al igual que $\vec{l}$ el $\vec{\tau}$ también depende del origen del sistema de coordenadas.

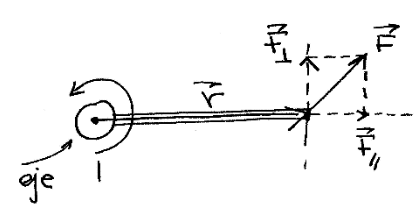
¿Qué significa físicamente el torque?

El torque mide básicamente la capacidad que tiene una fuerza para hacer rotar un cuerpo

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_{\parallel} + \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp} = rF_{\perp}$$

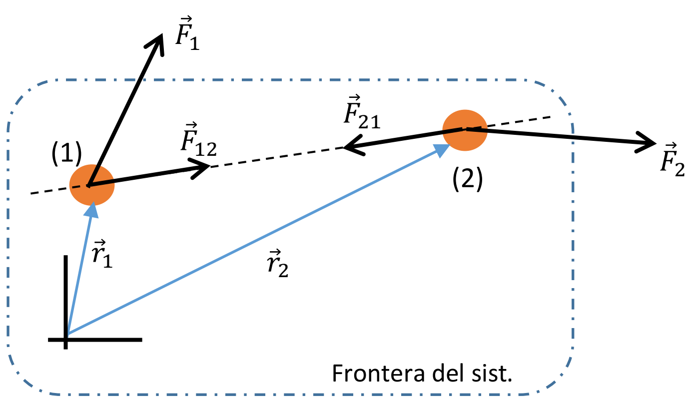
Es la componente $\perp$ a $\vec{F}$ la que realiza torque.



Es importante reconocer que torque y fuerza son dos cantidades completamente diferentes. Por un lado, el torque depende del origen de coordenadas escogido pero la fuerza no. Por otro lado, de la definición $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{\tau}$ y $\vec{F}$ son mutuamente perpendiculares. Puede haber torque en un sistema donde la fuerza neta sea cero y puede haber fuerza neta en un sistema donde el torque es cero. En general habrá fuerza y torque en el sistema.

1.2. Sistema de partículas

Consideremos el caso más simple de dos partículas que interactuan entre ellas y con el medio externo,



Donde :

$\vec{F}_{ij}$: fuerza sobre "i" debido a la interacción con "j"

$\vec{F}_i$: fuerza externa sobre la partícula "i"

Escribamos las ecuaciones de la variación del momento angular para cada una de ellas,

$$\frac{d\vec{l}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \tag{1.6a}$$

$$\frac{d\vec{l}_2}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{1.6b}$$

Sumando las ecuaciones y teniendo en cuenta la tercera ley de Newton, i.e., $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ obtenemos,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{l}_1 + \vec{l}_2\right) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{1.7}$$

Pero $\vec{r}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{12}$ entonces, $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$ y (1.7) queda como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{1.8}$$

Donde definimos el momento angular del sistema como

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \tag{1.9}$$

La ecuación (1.8) nos dice que la **variación del momento angular del sistema es igual a la suma de los torques externos, i.e.,**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \tag{1.10}$$

donde $\vec{\tau}_1$ y $\vec{\tau}_2$ son los torques externos.

Tratemos de generalizar esto para un sistema de muchas partículas. Consideremos un sistema de N partículas. Para una partícula,

$$\frac{d\vec{l}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{1.11}$$

Sumando en "i" la variación del momento angular del sistema la escribimos como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{1.12}$$

Aplicando la tercera ley de Newton,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i,j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Y como $\sum_{i,j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$ obtenemos finamente que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{iext} \tag{1.13}$$

1.2.1 Conservación del momento angular.

Si

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{iext} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = \overrightarrow{cte} \qquad (1.14)$$

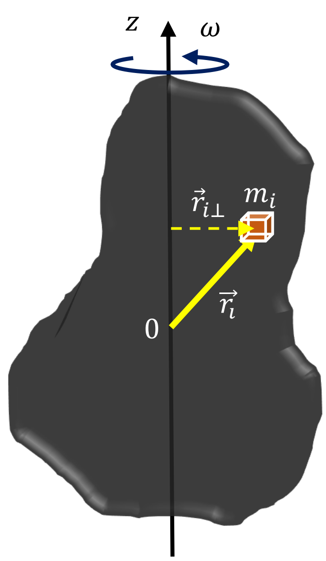
Esto es, para un sistema de partículas, si la suma de los torques externos es igual a cero, el momento angular del sistema se conserva. Entonces, para un sistema aislado, el momento angular se conserva. Notemos que (1.14) es una ecuación vectorial, esto es, si la suma de torques es cero en una dirección, es esta se conserva el momento angular.

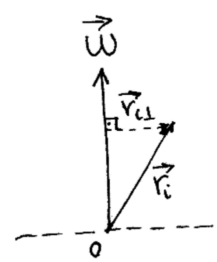
2. Momento angular. Rotación en relación a un eje fijo

La aplicación más importante del momento angular en mecánica es el análisis del movimiento de cuerpos rígidos. Analicemos el caso de la rotación alrededor de un eje fijo.

Por eje fijo entenderemos que la dirección del eje de rotación se encuentra siempre a lo largo de la misma línea a pesar de que el eje se puede trasladar.

Tomemos sin pérdida de generalidad al eje z como eje de rotación y tomemos el origen del sistema de coordenadas en el mismo.





En este caso, la velocidad de la partícula "i" es

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp} \qquad (2.1)$$

donde $\vec{r}_{i\perp}$ es la componente de $\vec{r}_i$ perpendicular a $\vec{\omega}$.

El momento angular de la partícula "i" del cuerpo rígido es:

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad (2.2)$$

entonces,

$$\vec{l}_i = m_i\,\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}) = m_i[\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{i\perp}) - \vec{r}_{i\perp}(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \tag{2.3}$$

$$\vec{l}_i = m_i\left[\vec{\omega}\,r_{i\perp}^2 - \vec{r}_{i\perp}(z_i\omega)\right] = m_i r_{i\perp}^2\vec{\omega} - m_i z_i \omega \vec{r}_{i\perp} \tag{2.4}$$

El momento angular total será la suma de los momentos angulares de cada partícula,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2\right)\vec{\omega} - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \vec{r}_{i\perp}\right)\omega \tag{2.5}$$

que escribimos como:

$$\vec{L} = I_z\omega\hat{k} - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \vec{r}_{i\perp}\right)\omega = L_z\hat{k} - \vec{L}_{\perp z} \tag{2.6}$$

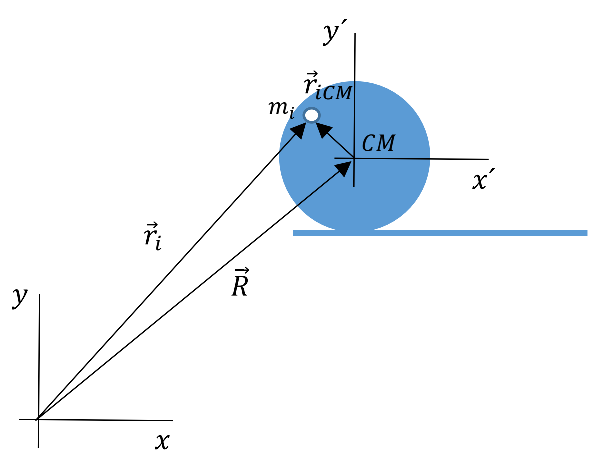
-Cuerpo rígido simétrico rotando alrededor del eje de simetría

Si el cuerpo rígido es simétrico es fácil ver que el segundo término de la ecuación anterior es nulo y

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega} \tag{2.7}$$

3. Momento angular en relación a un punto arbitrario

Supongamos que queremos calcular el momento angular en relación a un punto arbitrario.



Por definición,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \tag{3.1}$$

Pero, $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_{iCM}$ donde, $\vec{r}_{iCM}$: posición relativa de la partícula de masa m_i en relación al CM.

Entonces, la ecuación (2.1) la escribimos como,

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}_{iCM}) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{u}_i) \tag{3.2}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{R} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R} \times \vec{u}_i + \vec{r}_{iCM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{r}_{iCM} \times \vec{u}_i)$$

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \vec{V}_{CM} + \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \vec{u}_i\right) + \left(\sum_i (m_i \vec{r}_{iCM})\right) \times \vec{V}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{iCM} \times (m_i\, \vec{u}_i) \tag{3.3}$$

Pero,

$$\sum_i (m_i \vec{r}_{iCM}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i) - M\vec{R} = \vec{0}$$

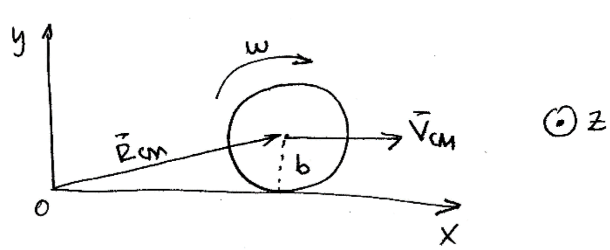
por la propia definición de CM. Por la misma razón, el segundo término también es cero. Entonces, (2.3) queda como,

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{iCM} \times (m_i\, \vec{u}_i) \tag{3.4}$$

El primer término de la ecuación representa el movimiento angular debido al movimiento del CM y el segundo término representa el momento angular debido al movimiento alrededor del CM.

Ejemplo 1:

Para el cuerpo que rota y se traslada como se muestra en la figura. Encontrar el momento angular en relación al origen O.

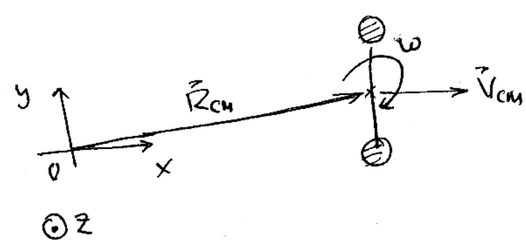


$$\vec{L}_0 = \vec{R} \times M\vec{V}_{CM} - I_z\omega\hat{k}$$

$$\vec{L}_0 = -(MbV_{CM} + I_z\omega)\hat{k}$$

Ejemplo 2:

Calcular el momento de inercia en relación al origen. La barra que une a las bolas (cada una de masa m) tiene masa despreciable.



$$\vec{L}_0 = \vec{R} \times M\vec{V}_{CM} - I_z\omega\hat{k} = -MbV_{CM}\hat{k} - (mr_1^2 + mr_2^2)\omega\hat{k}$$

4. Dinámica del cuerpo rígido

Consideremos un cuerpo rotando con velocidad angular ω alrededor del eje z. De la Ec. (2.7) la componente en z del momento angular es

$$L_z = I_z\omega \tag{4.1}$$

Como, $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, donde $\vec{\tau}$ es la suma de los torques externos,

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt} \tag{4.2}$$

$$\tau_z = I_z\alpha \tag{4.3}$$

donde α es la aceleración angular.

En el curso sólo trataremos con problemas en que la rotación es alrededor de un eje fijo de manera que el prescindiremos del subíndice en (3.3).

$$\tau = I\alpha \tag{4.4}$$

El método de tratar con problemas que envuelven la rotación bajo torques aplicados es una extensión del procedimiento que ya hemos visto para los problemas de traslación aplicando las leyes de Newton como muestran los siguientes ejemplos.

Si el cuerpo rota y se traslada, debemos resolver:

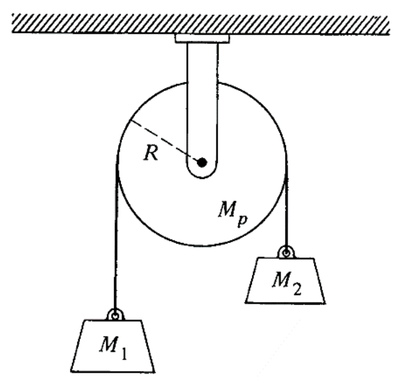
Problema de la traslación $\Longrightarrow$ $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$

Problema de la rotación $\Longrightarrow$ $\vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$

Ecuación de ligadura $\Longrightarrow$ Relación entre α y a_{CM}

Ejemplo 1: Maquina de Atwood

Calculemos la aceleración de las masas y la tensión a ambos lados de la cuerda si la polea tiene masa M_p.

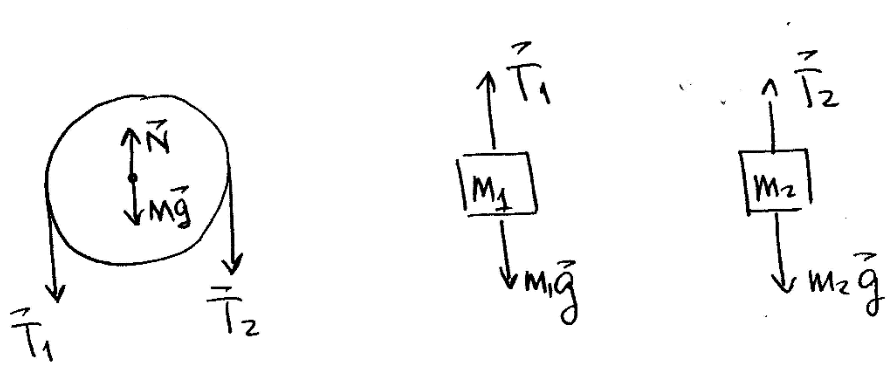


Establezcamos una dinámica para tratar con este tipo de problemas. Los pasos a seguir serán los siguientes,

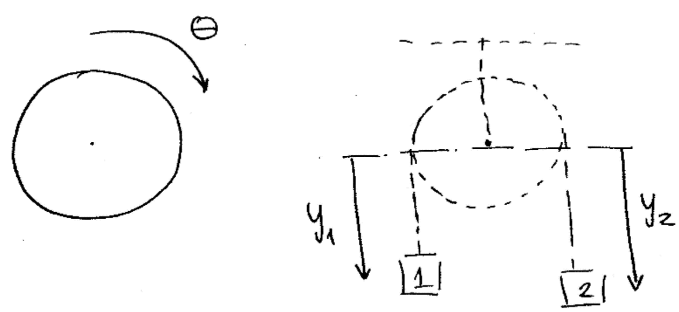
1. Identificar cuerpos

Polea, cuerda, y masas m_1 y m_2

2. Identificar fuerzas y puntos de aplicación (diagrama de fuerzas)



3. Establecer coordenadas y variables



4. Escribir ecuaciones

Traslación:

$$T_1 + T_1 + Mg - N = 0 \quad \text{(Ia)}$$

$$-T_1 + m_1 g = m_1 a_1 \quad \text{(Ib)}$$

$$-T_2 + m_2 g = m_2 a_2 \quad \text{(Ic)}$$

Rotación (en relación al eje de rotación)[1]:

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha \quad \text{(II)}$$

5. Ecuaciones de ligadura

Entre y_1 e y_2

$$y_1 + y_2 = l$$

de donde

$$a_1 = -a_2 \quad \text{(IIIa)}$$

Entre a_1, a_2 y α

$$-\Delta y_1 = \Delta\theta\, R \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\alpha\, R \quad \text{(IIIb)}$$

[1] Notemos que respetamos la convención de signos tomada en el punto 3.

$$\Delta y_2 = \Delta\theta\, R \quad \Rightarrow \quad a_2 = \alpha\, R \qquad \text{(IIIc)}$$

6. Algebra

Escribiendo el sistema,

$$-T_1 + m_1 g = m_1 a_1$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_1$$

$$-T_2 + T_1 = I\,\frac{a_1}{R^2}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$a_1 = \left[\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_1 + I/R^2}\right] g$$

Con a_1 en la primera ecuación encontramos T_1 y de la segunda encontramos a_2