|

1. Si una fuerza efectúa un trabajo W, entonces la potencia (Instantánea) con que se realiza este trabajo es

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Conceptualmente, efectuar trabajo más rápido implica una mayor potencia. Dos procesos pueden requerir la misma cantidad de trabajo, pero dependiendo de la potencia pueden realizarse en tiempos distintos

Para encontrar la potencia, primero determinaremos el trabajo en función del tiempo y luego lo derivaremos.

Como sabemos, $\Delta E = W_{NC}$

Veamos las fuerzas que actúan sobre el bloque

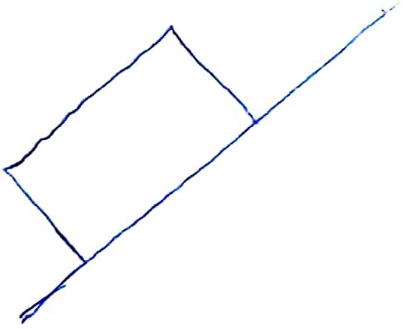
-> Peso, conservativa

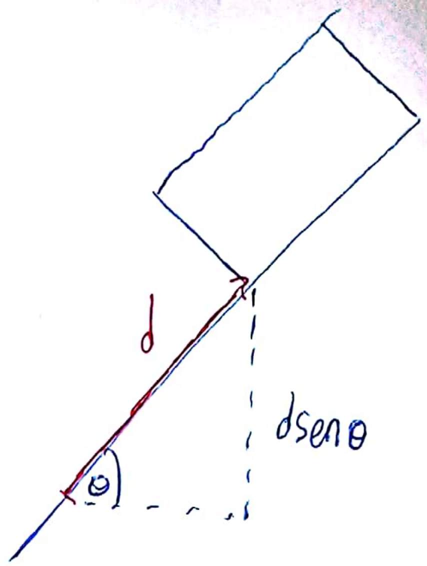
-> Roce, hace trabajo

-> Normal, no hace trabajo

-> Tensión, hace trabajo

Vamos a comparar energías entre el instante inicial, y un instante final en que el bloque ha recorrido una distancia "d" arbitraria





$$E_i = E_{c,i} + U_{g,i}$$

$$= \frac{1}{2} m v_0$$ → Suponemos que comienza con esta rapidez. No influirá en la potencia

$$E_f = E_{c,f} + U_{g,f}$$

$$= \frac{1}{2} m v_0 + mgd\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\Delta E = mgd\,\mathrm{sen}\theta = W_{NC} = W_T + W_R$$

Ahora calculamos el trabajo del roce. Como el bloque está en movimiento, tenemos roce cinético opuesto a la dirección del movimiento.

$$\vec{F}_R = -N\mu\,\hat{x} = -mg\cos\theta\,\mu\,\hat{x}$$

$$\vec{F}_R \cdot d\vec{x} = -mg\mu\cos\theta\,dx = -mga\cos\theta\,x\,dx$$

$$W_R = \int_0^d \vec{F}_R \cdot d\vec{x} = -mga\cos\theta\int_0^d x\,dx = -\frac{mga\cos\theta\,d^2}{2}$$

Con esto $W_T = mgd\,sen\theta + \frac{1}{2} mg d^2 a \cos\theta = mgd\left(sen\theta + \frac{1}{2} ad\cos\theta\right)$

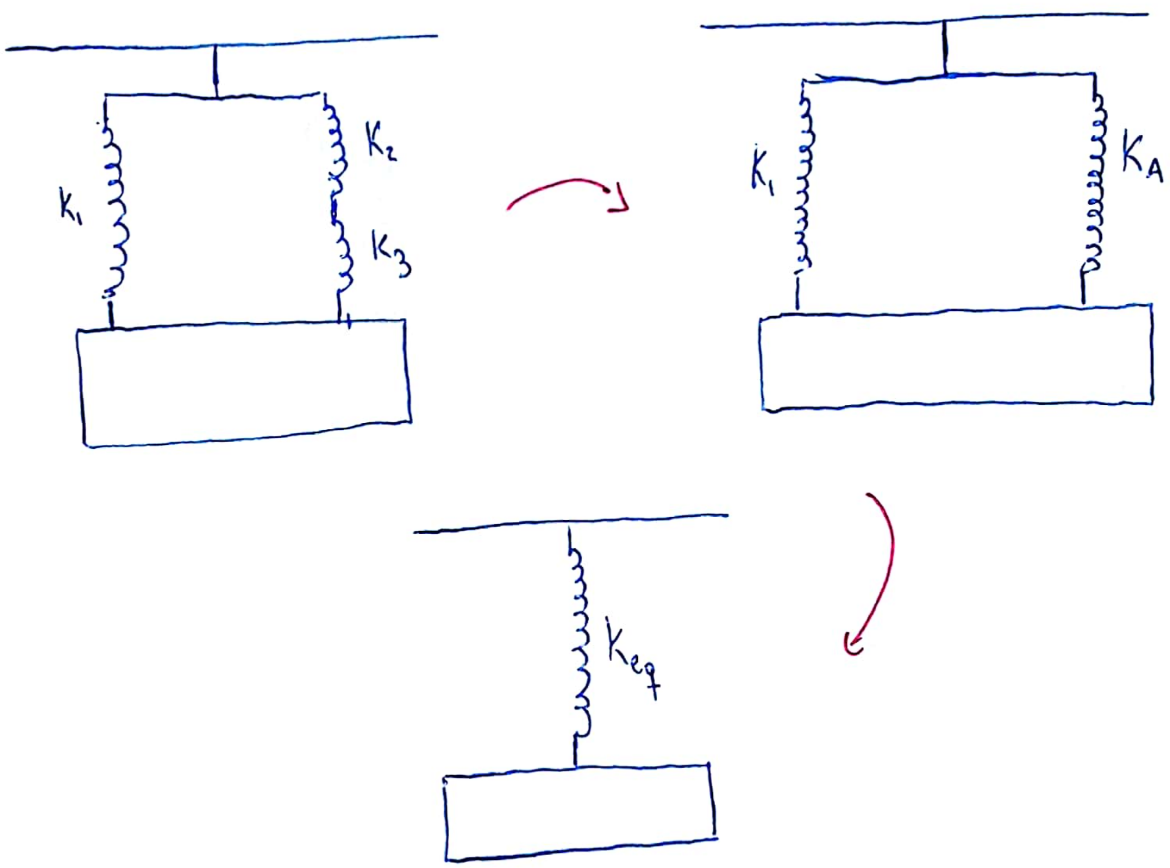
Queremos W_T en función del tiempo, para poder derivar y obtener la potencia. El parámetro que varía en nuestra expresión es "d", y dado que la caja sube por el plano inclinado con rapidez constante v_0, sabemos que $d = v_0 t$

$$W_T(t) = mgv_0 sen\theta\, t + \frac{1}{2} mgav_0^2 \cos\theta\, t^2$$

$$P_T(t) = mgv_0 sen\theta + mgav_0^2 \cos\theta\, t$$ → Crece linealmente

2. Para abordar el problema de manera más sencilla será útil reducir el problema al de una masa conectada a un resorte, de constante elástica K_{ef} y largo natural l_0.

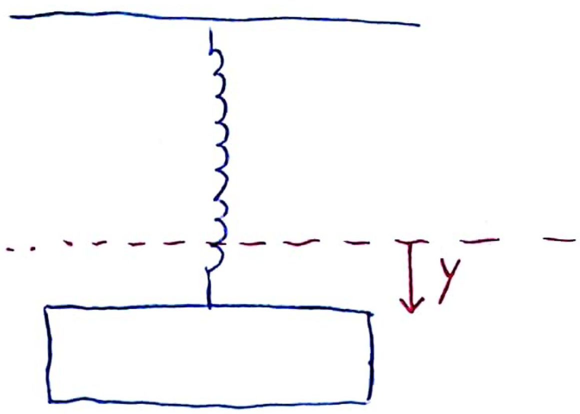
Idea



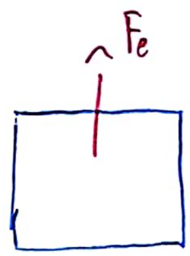
K_2 y K_3 están en serie, entonces $\frac{1}{K_A} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \Rightarrow K_A = \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}$

K_1 y K_A están en paralelo, entonces $K_{eq} = K_1 + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3} = \frac{K_1 K_2 + K_2 K_3 + K_3 K_1}{K_2 + K_3}$

Parametricemos la posición de la caja desde el equilibrio



La única fuerza actuando es la elástica,



Como la coordenada "y" se mide desde la posición de equilibrio,

$$F_e = K_{eq}(y)$$

Luego, $\quad -K_{eq}\, y = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\dfrac{K_{eq}}{m}\, y$

Llamaremos a $\sqrt{\dfrac{K_{eq}}{m}} = \omega$ la frecuencia angular de oscilación, por razones que serán evidentes a continuación.

Las soluciones a la ecuación diferencial $\ddot{y} = -\omega^2 y$ pueden escribirse como:

(I) $A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$

(II) $A'\cos(\omega t - \phi_0)$ / $A'\,\mathrm{sen}(\omega t - \phi_0)$

con A, B, A', ϕ_0 constantes arbitrarias (Dependen de condiciones iniciales)

La forma (II) deja en evidencia el carácter oscilatorio de la solución, sin embargo matemáticamente es más fácil trabajar con la forma (I)

Trabajaremos primero con (I).

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$$

Para pillar A y B usamos condiciones iniciales de posición y velocidad.

Por enunciado, $y(0) = d$ $\qquad \dot{y}(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

$\dot{y}(0) = 0$ (se suelta)

$$\therefore \quad d = A\cos(0) + B\,\text{sen}(0) = A$$

$$0 = -A\omega\,\text{sen}(0) + B\omega\cos(0) = B\omega$$

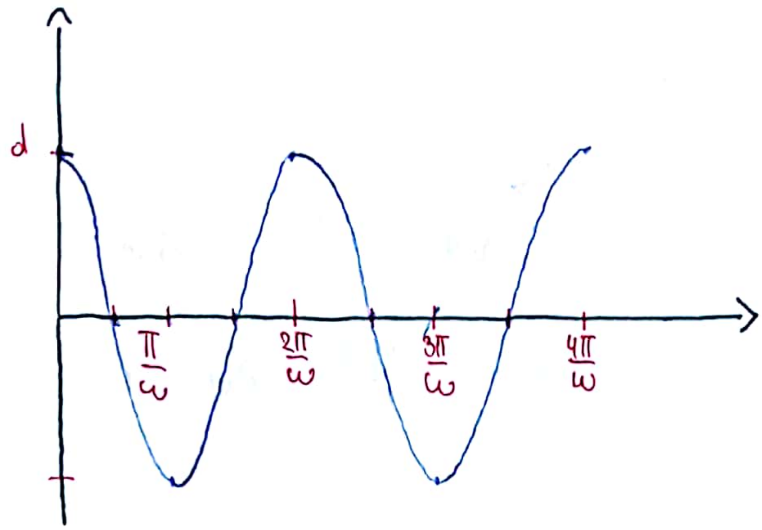
$$\Rightarrow \quad A = d, \quad B = 0$$

Por tanto, $y(t) = d\cos\left(\sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}\,t\right)$

$$\dot{y}(t) = -d\sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}\,t\right)$$

$$\ddot{y}(t) = -d\,\frac{K_{eq}}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}\,t\right)$$

$y(t)$ representa un movimiento oscilatorio con amplitud d y frecuencia angular $\sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}$, por tanto, frecuencia $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}$, período $2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}}$

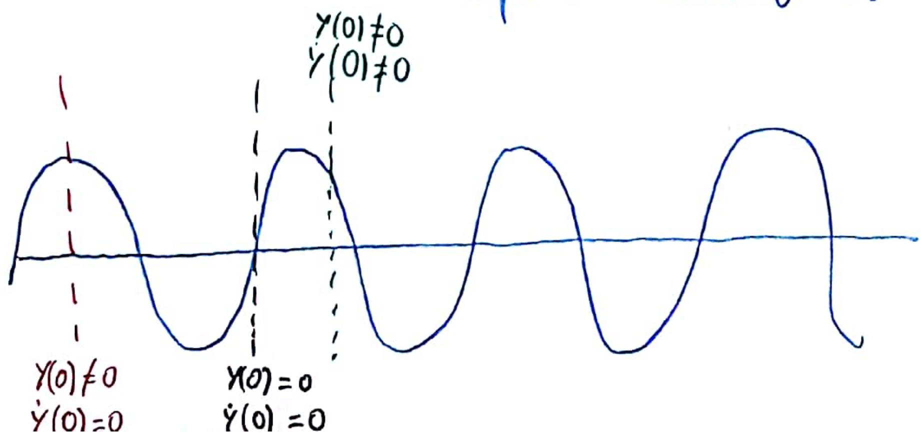


(Partimos en d, pues tenemos coseno)

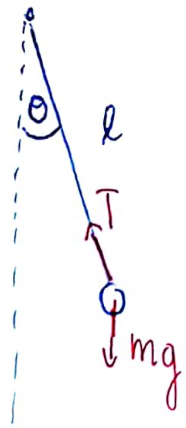
Generalidades → Si tengo desplazamiento inicial, pero velocidad inicial nula, mi función es un coseno

→ Si tengo velocidad inicial, pero desplazamiento inicial nulo, mi función es un seno (Coseno desfasado en $\frac{\pi}{2}$)

→ Si tengo velocidad y desplazamiento inicial, el coseno tendrá un desfase distinto de 0 o $\frac{\pi}{2}$



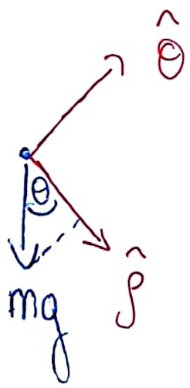
3. Tendremos que encontrar las ecuaciones de movimiento que gobiernan el movimiento del péndulo



Lo más adecuado será utilizar coordenadas polares

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta} = -l\dot{\theta}^2\hat{\rho} + l\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

Tenemos que descomponer el peso



$$\vec{W} = mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\theta}$$
$$\vec{T} = -T\hat{\rho}$$

Entonces, usando la 2da ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Scanned by CamScanner

$\hat{\rho}: \quad mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$

$\hat{\theta}: \quad -mg\,\text{sen}\,\theta = ml\ddot{\theta}$

La ecuación en $\hat{\rho}$ tiene la tensión metida, que aún no conocemos, por lo que no nos servirá para describir el movimiento del péndulo. Usaremos la ecuación en $\hat{\theta}$.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta$$

Podemos expandir el senθ en serie de Maclaurin:

$$\text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

Si θ es pequeño $(\theta \ll 1)$ $\quad \text{sen}\,\theta \approx \theta$

Luego, $\quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$

Sea $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Tenemos una ecuación del mismo estilo que para el resorte

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

Vamos a comenzar por la solución tipo (I)

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + B\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

$$\dot\theta(t) = -\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

$$\theta(0) = \theta_0 = A$$

$$\dot\theta(0) = \frac{v_0}{\ell} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,B \Rightarrow B = \frac{v_0}{\sqrt{g\ell}}$$

Luego,
$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{g\ell}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

Veamos cómo convertir esto a la solución propuesta (II). En general, buscamos c y ϕ_0 tales que

$$A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t) = C\cos(\omega t - \phi_0)$$

$$\underline{A}\cos(\omega t) + \underline{B}\,\text{sen}(\omega t) = \underline{C\cos(\phi_0)}\cos(\omega t) + \underline{C\,\text{sen}(\phi_0)}\,\text{sen}(\omega t)$$

Igualando los términos que acompañan al seno y coseno respectivamente,

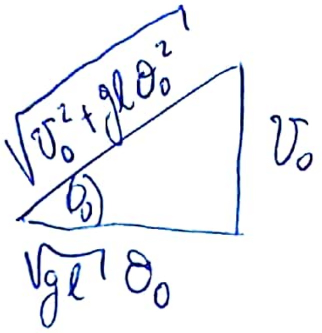
- $A = C\cos(\phi_0)$
- $B = C\,\text{sen}(\phi_0)$

$$\Rightarrow \text{tg}(\phi_0) = \frac{B}{A}$$

→ De aquí reemplazo en • o • y obtengo C

En este caso, $\quad tg(\phi_0) = \dfrac{v_0}{\sqrt{gl}\,\theta_0} \Rightarrow \phi_0 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{v_0}{\sqrt{gl}\,\theta_0}\right)$

Además, $\quad \theta_0 = C\cos(\phi_0)$



$$\theta_0 = C\frac{\sqrt{gl}\,\theta_0}{\sqrt{v_0^2+gl\theta_0^2}}$$

$$C = \frac{\sqrt{v_0^2+gl\theta_0^2}}{\sqrt{gl}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{gl}+\theta_0^2}$$

Con esto, $\quad \theta(t) = \underbrace{\sqrt{\dfrac{v_0^2}{gl}+\theta_0^2}}_{\text{Amplitud}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t - \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{v_0}{\sqrt{gl}\,\theta_0}\right)}_{\text{fase}}\right)$