Estática y Dinámica

Material Clases Cuerpo Rigido - Rotacion 6

Conservación del momento angular y energía. Ejemplos

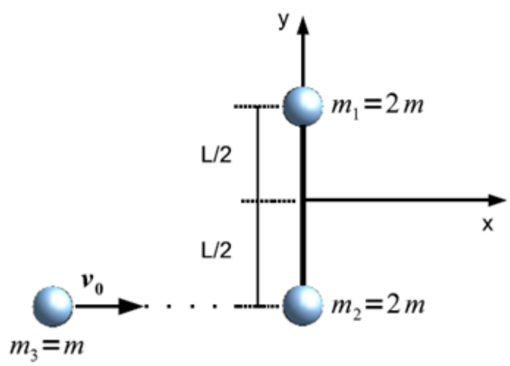
Ejemplo 1:

Dos partículas idénticas de masas $m_1 = m_2 = 2\,m$ unidas por una barra de masa despreciable descansan sobre una superficie horizontal. Contra una de las partculas (m_2) se dispara una tercera partícula de masa m_3 (ver figura). Si el choque entre las partículas es elástico:

a) Despreciando el roce con la superficie horizontal, calcule las velocidades de m_2 y m_3 inmediatamente después del choque. [2 puntos].

b) Calcule la velocidad del CM del sistema compuesto por las partculas m_1 y m_2 luego después del choque. [2 puntos].

c) ¿Cuál es la velocidad angular del sistema (m_1–m_2), después del choque? [2 puntos].



Resp/

a) En este inciso debemos resolver la colisión.

Cómo la colisión es elástica la velocidad relativa se conserva, i.e.,

Cons. de la velocidad relativa. $$v_{3,2i} = v_{2,3f} \qquad (1)$$

Cons. del momento lineal. $$P_i = P_f \qquad (2)$$

De (1),

$$v_{3i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{3f} \quad \twoheadrightarrow \quad v_0 = v_{2f} - v_{3f} \qquad (3)$$

De (2)

$$m_3 v_{3i} = m_3 v_{3f} + m_2 v_{2f} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = v_{3f} + 2v_{2f} \qquad (4)$$

Sumando y restando obtenemos,

$$v_{2f} = \frac{2}{3} v_0 \tag{5}$$

$$v_{2f} = -\frac{1}{3} v_0 \tag{6}$$

b) Para calcular la velocidad del CM del sistema después del choque notemos que la colisión fue entre las bolas 3 y 2 y en esta es sólo la bola dos la que cambia el momento lineal justo después del choque. Entonces, justo después del choque la velocidad de las bolas 1 y 2 es, $v_1 = 0$ y $\vec{v}_2 = 0\,\hat{\jmath}$.

Como en la mesa no hay roce, en la superficie horizontal no hay fuerzas externas y el momento del sistema se conserva. Esto es,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \Longrightarrow \quad \vec{V}_{CM} = cte \tag{7}$$

Calculemos entonces la velocidad del CM inmediatamente después del choque.

$$\vec{V}_{CMi} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{8}$$

$$\vec{V}_{CMi} = \frac{\vec{v}_2}{2} \tag{9}$$

Y como $\vec{V}_{CM} = cte$, esta viene dada por la ecuación (9).

c) Para calcular la velocidad angular después del choque, como en la colisión se conserva el momento **angular del sistema**[1] escribimos

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Notemos entonces que luego de la colisión el CM de 1-2 se mueve a velocidad constante en la dirección y mientras que las partículas rotan unidas por la barra alrededor de este.

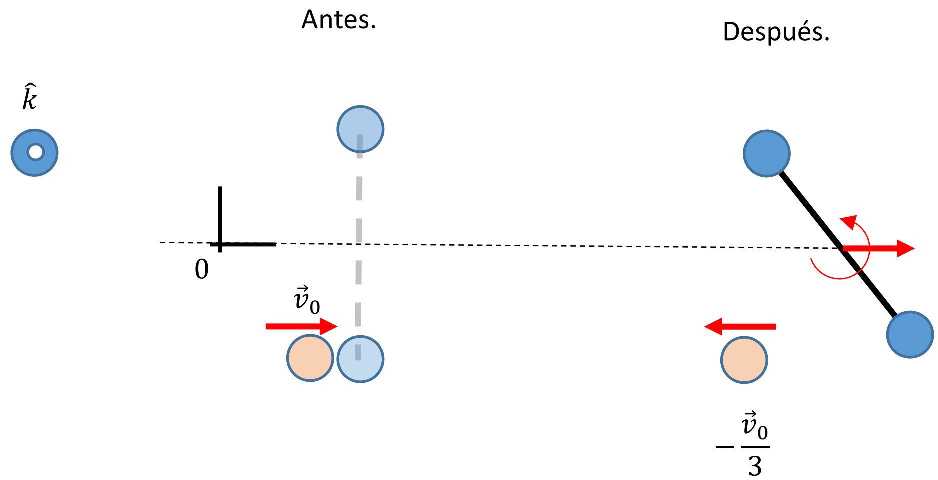
Notemos que para calcular el momento angular debemos tener un sistema de referencia desde donde midamos.

Tomemos el origen en el la línea que describe el CM.

[1] Estamos considerando al sistema compuesto por los (3) y (1-2)

El momento de angular inmediatamente después del choque es

$$\vec{L}_i = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 \tag{10}$$



$$\vec{L}_i = \vec{r}_3 \times m\vec{v}_{3i} = m\frac{l}{2}v_0 \ \hat{k} \tag{11}$$

Para calcular el momento angular final notemos que la barra con las bolas rotan y se trasladan. Entonces,

$$\vec{L} = \vec{r}_3 \times m\vec{v}_{3f} + \vec{R} \times M\vec{V}_{CM} + I\vec{\omega} \tag{12}$$

Pero, $\vec{R} \times M\vec{V}_{CM} = \vec{0}$ y con $I = m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2$.

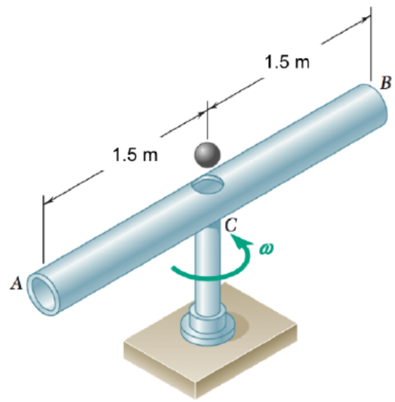
$$\vec{L} = \vec{r}_3 \times m\vec{v}_{3f} + I\vec{\omega} = \frac{l}{2}m\frac{v_0}{3}(-\hat{k}) + I\omega\,\hat{k} \tag{12}$$

Así que,

$$m\frac{l}{2}v_0 + \frac{l}{2}m\frac{v_0}{3} = ml^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{2}{3l}v_0$$

Ejemplo 2:

Dos bolas de 0,8 kg se introducen en forma sucesiva por el centro C del tubo ligero AB de 4 kg de masa y 3 m de longitud, de modo tal que cuando la segunda bola entra al tubo la primera ya se encuentra fuera. Si se sabe que cuando la primera bola se introduce en el tubo la velocidad angular de éste es de 8 rad/s. (Para el cálculo del momento de inercia considere el tubo como una barra homogénea).



a) ¿Cuál es la velocidad angular del sistema justo cuando la primera bola cae en el centro C?

b) ¿Cuál es la velocidad angular de la segunda bola justo antes de salir del tubo?

c) Suponga ahora que bajo las mismas condiciones iniciales ambas bolas se introducen al mismo tiempo por el centro del tubo y una se desplaza hacia la derecha mientras otra lo hace hacia la izquierda de forma simultánea. ¿Cuál es la velocidad tangencial v de ambas bolas justo antes de salir del tubo?

____

a) Como no hay fuerzas externas que realicen torque el momento angular se conserva.

$$L_i = L_f$$

Donde he obviado los vectores porque apuntan siempre en la dirección de $\vec{\omega}$.

Como la bola cae al centro el momento de inercia antes y después es el mismo y por lo tanto la velocidad angular no cambia, $\omega = 8\, rad/s$.

b) Cuando la segunda bola entra en el tubo, la primera bola ya ha salido. Debemos calcular si el hecho de que la primera bola haya entrado y salido ha cambiado la velocidad angular.

Veamos:

Cuando la bola 1 está a punto de salir, de la conservación del momento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Una vez que la bola sale, tb se conserva el momento angular, pero el momento angular final será el de la barra y la bola que sale. Como esta última recorre una trayectoria recta ya en el aire la componente de su momento angular en z es cero, entonces, en este eje.

$$I_f\omega_f = I_i\omega_{barra}$$

Esto es, cuando la primera bola ya está fuera, la velocidad de la barra es $\omega_{barra} = \omega_i$.

Para calcular la velocidad de la segunda bola justo antes de salir, nuevamente de la conservación de momento angular,

$$I_i\omega_i = I_f\omega_{2f}$$

donde,

$$I_i = \frac{ML^2}{12}, \qquad I_f = \frac{ML^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\omega_{2f} = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{\omega_i}{\left(1+\frac{3m}{M}\right)} = 5\,rad/seg$$

c) Al igual que en los incisos anteriores, de la conservación del momento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

donde ahora

$$I_f = \frac{ML^2}{12} + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Y

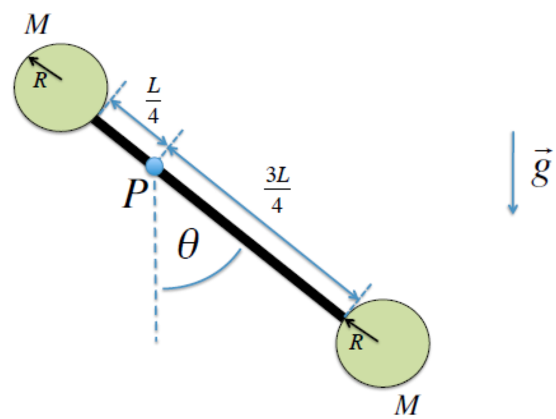
$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{\omega_i}{\left(1+\frac{6m}{M}\right)}$$

La velocidad tangencial de las bolas es,

$$v = \omega_f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{8}{\left(1+\frac{6\times\ 0.8\times 10}{40}\right)}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12\times 40}{(40+48)} = \frac{12\times 40}{88} = \frac{120}{22} = \frac{60}{11}\ m/s$$

Ejemplo 3:

Considere el péndulo mostrado en la figura, contenido en un plano vertical y pivotado en el punto P respecto al cual puede girar libremente. El péndulo está compuesto de una barra de largo L, masa M y dos discos de radio R y masa M.



a) Determine el momento de inercia (I_p) del péndulo respecto a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto P.

b) Determine el módulo de la velocidad angular (ω) que adquiere el péndulo cuando pasa por la posición vertical ($\theta = 0^0$), si este se deja evolucionar libremente desde el reposo de la posición mostrada en la figura.

c) Determine el módulo de la fuerza ejercida en el pivote cuando el péndulo pasa por la posición vertical ($\theta = 0^0$), si éste se deja evolucionar libremente desde el reposo de la posición mostrada en la figura, en la que $\theta = 30^0$.

d) Determine el periodo de oscilación T del péndulo para oscilaciones de pequeña amplitud.

Resp/ a)

$$I_p = I_{barra} + I_{disco,sup} + I_{disco,inf}$$

$$I_{barra} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 \qquad I_{disco,inf} = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{3L}{4} + R\right)^2,$$

$$I_{disco,sup} = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{L}{4} + R\right)^2$$

b) Para calcular el módulo de la velocidad angular que adquiere el péndulo cuando pasa por la posición vertical podemos utilizar la conservación de la energía pues sólo fuerzas conservativas actúan sobre el sistema y la tensión en la barra no realiza trabajo.

$$E_i = E_f$$

Tomando el cero de energía potencial en la línea horizontal que pasa por el punto P,

$$E_i = 0$$

$$E_f = U_f + K_f$$

Donde

$$U_i = U_{disco,sup} + U_{disco,inf} + U_{barra}$$

$$U_i = Mg\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{L}{4} + R\right) - Mg\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3L}{4} + R\right) - Mg\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{L}{4}\right)$$

$$U_i = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{MLg}{4}$$

$$U_f = U_{disco,sup} + U_{disco,inf} + U_{barra,sup} + U_{barra,inf}$$

$$U_f = Mg\left(\frac{L}{4} + R\right) - Mg\left(\frac{3L}{4} + R\right) - Mg\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{3MLg}{4}$$

Notemos que podríamos escribir directamente $U = M_{Total}\ g\ Z_{CM}$ y calcular la posición del CM. De aquí es claro el signo negativo obtenido en los resultados anteriores (el CM queda debajo del punto P).

Para la energía cinética[2],

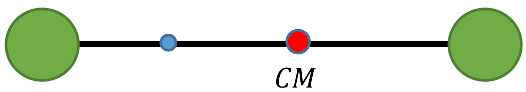
[2] También podríamos haber escrito K_f como la suma de las energías cinéticas de rotación de cada cuerpo. $K_f = \frac{1}{2}I_{dicso,sup}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{dicso,inf}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{barra,sup}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{barra,inf}\omega^2$.

$$K_f = K_{rot} = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

Entonces,

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{3MLg}{4} = -\frac{3MLg}{4} + \frac{2}{4} I_P \omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2I}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{MLg}{I_P}}$$

c) Para calcular la fuerza debemos primero encontrar el CM del sistema que se encontrará en el eje de simetría del mismo.



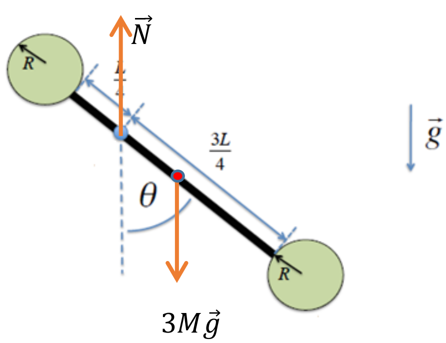
El CM en el eje del sistema se encuentra situado en,

$$(3M)R_{CM} = -M\left(\frac{L}{4} + R\right) + M\left(\frac{L}{4}\right) + M\left(\frac{3L}{4} + R\right)$$

$$(3M)R_{CM} = M\left(\frac{3L}{4}\right)$$

$$R_{CM} = \frac{L}{4}$$

A la derecha del punto P[3].



[3] Este cálculo no lo tendríamos que haber hecho. De la figura es evidente.

El movimiento sería como el de una partícula de masa 3M en el punto P. De la segunda ley de Newton, cuando $\theta = 0^0$,

$$N - 3Mg = 3M\left(\frac{v^2}{L/4}\right)$$

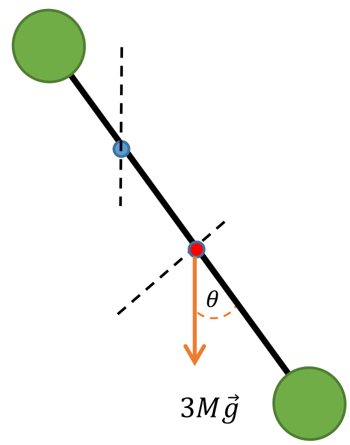
donde el término entre paréntesis es la aceleración centrípeta. Pero $v = \omega\, L/4$ así que

$$N - 3Mg = 3M\omega^2\left(\frac{L}{4}\right)$$

$$N = 3Mg\left[1 + \left(\frac{\omega^2 L}{4g}\right)\right]$$

donde ω^2 fue calculado en el inciso anterior. La fuerza ejercida en el pivote tiene el mismo módulo pero sentido contrario.

d) De la ecuación para la dinámica de la rotación en relación al punto P,



$$\tau = I_P\alpha$$

$$3Mg\sin\theta\,\frac{L}{4} = I_P\ddot{\theta}$$

Para oscilaciones pequeñas,

$$\sin\theta \approx \theta$$

y

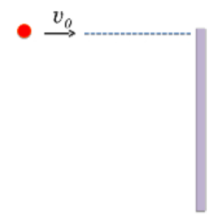
$$\ddot{\theta} - \left(\frac{3MgL}{4I_P}\right)\theta$$

El término entre paréntesis es el cuadrado de la frecuencia angular así que el periodo de oscilaciones es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4I_P}{3MgL}}$$

Ejemplo 4

Un proyectil de masa m con velocidad v_0 se incrusta en el extremo de una barra homogénea de masa M y largo L, que se puede mover libremente, como se muestra en la figura abajo.



a) Inmediatamente después del choque, ¿Cuál es la posición del centro de masa del sistema respecto de la posición del centro de masa de la barra?

b) Calcule el momento de inercia del sistema barra+proyectil respecto de un eje perpendicular al plano de la hoja que pasa por el centro de masa después de la colisión.

c) Asumiendo que I_{CM} es el momento de inercia del sistema barra+proyectil respecto a un eje perpendicular al plano de la hoja y pasando por el centro de masa después de la colisión, ¿cuál es la rapidez angular del sistema después del impacto?

Resp/

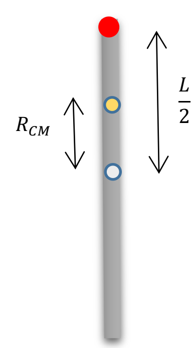
a) Inmediatamente después del choque el CM del sistema en relación al CM de la barra será,

$$(M+m)R_{CM} = m\frac{L}{2}$$

$$R_{CM} = \frac{m}{(M+m)}\frac{L}{2}$$

hacia arriba de este.

b)



$$I = \frac{ML^2}{12} + MR_{CM}^2 + m\left(\frac{L}{2} - R_{CM}\right)^2$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + MR_{CM}^2 + m\frac{L^2}{4} - mLR_{CM} + mR_{CM}^2$$

$$I=\frac{ML^2}{12}+M\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\frac{L^2}{4}+m\frac{L^2}{4}-\frac{m^2}{(M+m)}\frac{L^2}{2}+m\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\frac{L^2}{4}$$

$$I=\frac{ML^2}{12}+\frac{3Mm^2}{(M+m)^2}\frac{L^2}{12}+3m\frac{L^2}{12}-\frac{6m^2}{(M+m)}\frac{L^2}{12}+\frac{3mm^2}{(M+m)^2}\frac{L^2}{12}$$

$$I=[M(M+m)^2+3Mm^2+3m(M+m)^2-(M+m)6m^2+3mm^2]\frac{L^2}{12(M+m)^2}$$

$$I=[M(M+m)^2+3m^2(M+m)+3m(M+m)^2-(M+m)6m^2]\frac{L^2}{12(M+m)^2}$$

$$I=[M(M+m)^2-3m^2(M+m)+3m(M+m)^2]\frac{L^2}{12(M+m)^2}$$

$$I=[M(M+m)^2+3mM(M+m)]\frac{L^2}{12(M+m)^2}$$

$$I=M[M+4m]\frac{L^2}{12(M+m)}$$

c) Lo primero que tenemos que hacer es resolver la colisión para saber la velocidad del CM inmediatamente después del choque.

Como la bola queda pegada, la colisión es completamente inelástica y de la conservación del momento lineal,

$$P_i=P_f$$

$$mv_0=(M+m)V_{CM}$$

$$V_{CM}=\frac{mv_0}{(M+m)}$$

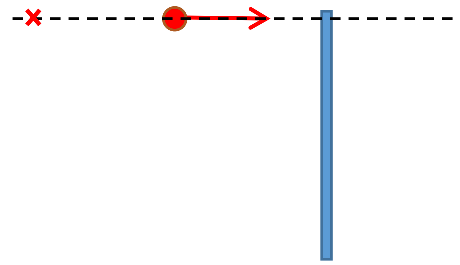
Como no actúan fuerzas externas luego del choque en la dirección horizontal el momento lineal del sistema se conserva, i.e., $V_{CM}=cte.$

El sistema entonces se mueve con el CM trasladándose a velocidad constante y rotando alrededor de este.

Como no hay torque externos, el momento angular se conserva.

$$L_i = L_f$$

Midiéndolo en relación al punto marcado en la figura



$$L_i = 0$$

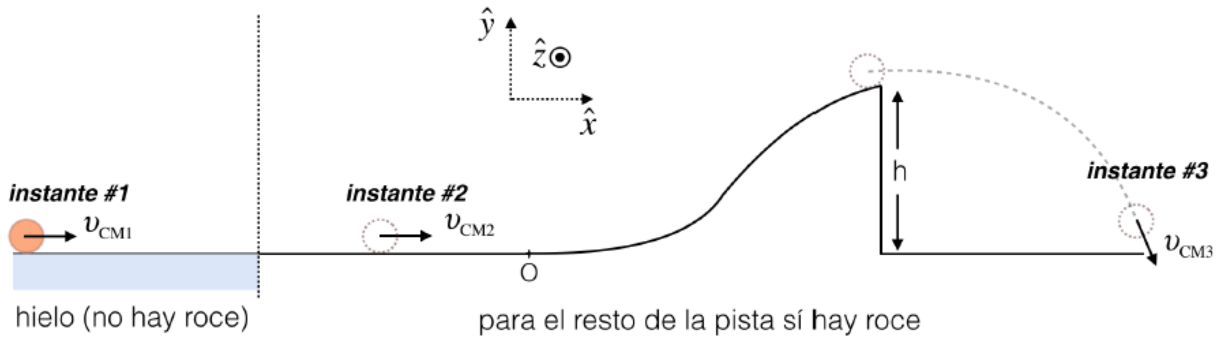
$$L_f = I_{cm}\omega - (M+m)(\frac{L}{2} - R_{CM})V_{CM}$$

$$I_{cm}\omega = (M+m)\left(\frac{L}{2} - \frac{m}{(M+m)}\frac{L}{2}\right)V_{CM}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{LMmv_0}{(M+m)I_{cm}}$$

Ejemplo 5

Se tiene una esfera sólida de masa m y radio R que avanza inicialmente sin rodar por una superficie plana de hielo sin roce, con una rapidez de su centro de masa igual a v_{CM1} (*instante #1*). A continuación ingresa a una región en la que hay roce entre la esfera y la pista y en donde, después de un breve periodo de transición, se estabiliza en un movimiento de rodamiento sin deslizamiento (*instante #2*). Por último, la esfera rueda sin deslizar por una colina de altura máxima h y cae por el abismo hasta una altura igual a la inicial (*instante #3*). Puede asumir que en todo momento el roce viscoso con el aire es despreciable.



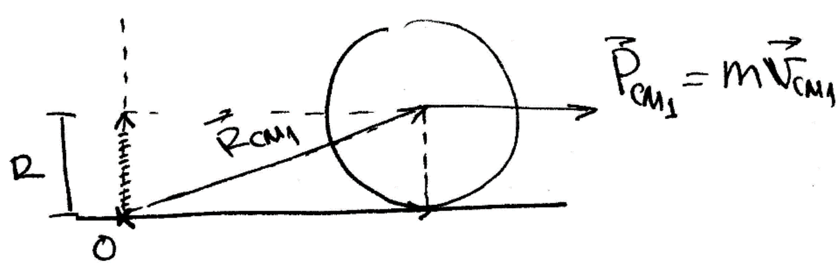
a) Determine el momento angular $\vec{L}_{1/0}$ de la esfera en el instante # 1 respecto a un punto O sobre la superficie, en función de $\vec{v}_{CM1}$

b) Determine la rapidez del CM de la esfera, v_{CM2} durante el instante # 2 en función de la magnitud del momento angular del instante #1, $L_{1/0}$.

c) Determine la rapidez del CM de la esfera v_{CM3} durante el instante #3, justo antes de que impacte con el suelo.

Resp/

a)



El momento angular para la esfera en el instante #1 en que solo se traslada es,

$$\vec{L}_{1/0} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM1} = \vec{R}_{\parallel} \times \vec{P}_{CM1} + \vec{R}_{\perp} \times \vec{P}_{CM1}$$

donde $\vec{R}_{\parallel}$ y $\vec{R}_{\perp}$ son las componentes de $\vec{R}_{CM1}$ paralela y perpendicular a $\vec{P}_{CM1}$.

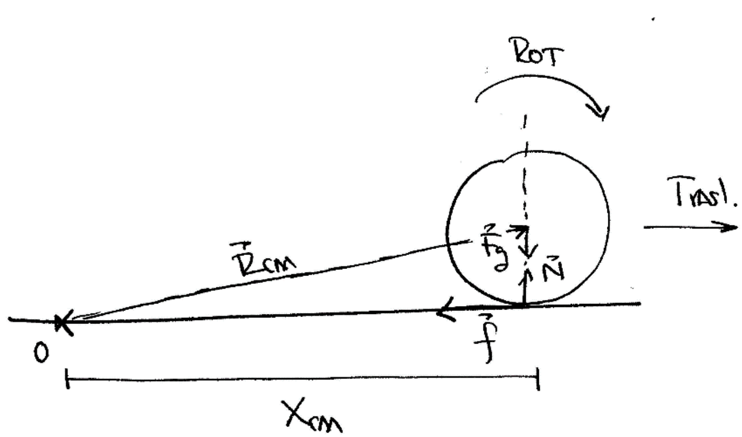
De esta descomposición es fácil ver que,

$$\vec{L}_{1/0} = \vec{R}_{\perp} \times \vec{P}_{CM1} = mRv_{CM1}(-\hat{\mathrm{k}})$$

b) Notemos que como en un instante determinado, mientras se estabilizaba el movimiento, la esfera se trasladaba resbalando sobre la superficie. En este caso la fuerza de roce disipa energía y por lo tanto la energía cinética no se conserva.

¿Será que se conserva el momento angular?

Calculemos el torque en relación al punto O.



$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{Fg} + \vec{\tau}_N$$

Pues la fuerza de roce en relación a O punto no hace torque,

El torque de la fuerza de gravedad en relación al punto O es

$$\vec{\tau}_{Fg} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_g = \vec{R}_{\parallel} \times \vec{F}_g + \vec{R}_{\perp} \times \vec{F}_g = -X_{CM}F_g\hat{\mathrm{k}}$$

Y para la fuerza normal,

$$\vec{\tau}_N = X_{CM} N \hat{\mathrm{k}}$$

Entonces,

$$\vec{\tau}_O = X_{CM}(-F_g + N)\hat{\mathrm{k}}$$

Y como $F_g = N$

$$\vec{\tau}_O = 0\hat{\mathrm{k}}$$

Esto quiere decir que el momento angular en relación al punto O se conserva!!!!!

i.e,

$$\vec{L}_{1/0} = \vec{L}_{2/0}$$

Donde como el cuerpo rota y se traslada,

$$\vec{L}_{2/0} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM2} + I\vec{\omega} = -mRv_{CM2}\hat{k} - I\omega\hat{k}$$

Entonces,

$$mRv_{CM1}(-\hat{\mathrm{k}}) = mRv_{CM2}(-\hat{k}) + I\omega(-\hat{k})$$

$$mRv_{CM1} = mRv_{CM2} + I\omega$$

Como la esfera rota sin deslizar $v_{CM2} = \omega R$

$$mRv_{CM1} = mRv_{CM2} + \frac{2}{5}mRv_{CM2} = \frac{7}{5}mRv_{CM2}$$

$$v_{CM2} = \frac{5}{7}v_{CM1}$$

En la práctica lo que sucede es que la esfera resbalará sobre el piso hasta que su velocidad v_{CM2} sea $\frac{5}{7}v_{CM1}$.

c) En el último instante la esfera rueda sin deslizar. Como la fuerza de roce en este caso no hace trabajo y la única que lo hace es la fuerza de gravedad que es conservativa, la energía mecánica se conserva y escribimos,

$$E_i = E_f$$

donde tomando el cero de energía potencial en la base,

$$E_i = K_{trasl} + K_{rot} + mgR = \frac{1}{2}mv_{CM2}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgR = \frac{1}{2}mv_{CM2}^2 + \frac{1}{5}mv_{CM2}^2$$
$$= \frac{7}{10}mv_{CM2}^2 + mgR$$

donde utilizamos la condición de rodadura pura, $v_{CM2} = \omega R$.

$$E_f = K_{trasl} + K_{rot} + mg(h + R) = \frac{1}{2}mv_{CMh}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(h + R)$$

$$E_{fh} = \frac{7}{10}mv_{CMh}^2 + mg(h + R)$$

e igualando

$$\frac{7}{10}mv_{CM2}^2 + mgR = \frac{7}{10}mv_{CMh}^2 + mg(h + R)$$

$$v_{CMh}^2 = v_{CM2}^2 - \frac{10}{7}gh$$

Con la velocidad del CM en la altura de la colina, para calcular la velocidad con la que impacta el suelo, nuevamente de la conservación de la energía,

$$E_{fh} = \frac{1}{2}mv_{CM3}^2 + K_{roth} + mgR$$

Donde K_{roth} es la energía cinética de rotación que es igual a la energía cinética de rotación en la altura h

$$\frac{7}{10}mv_{CM2}^2 + mgR = \frac{1}{2}mv_{CM3}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgR$$

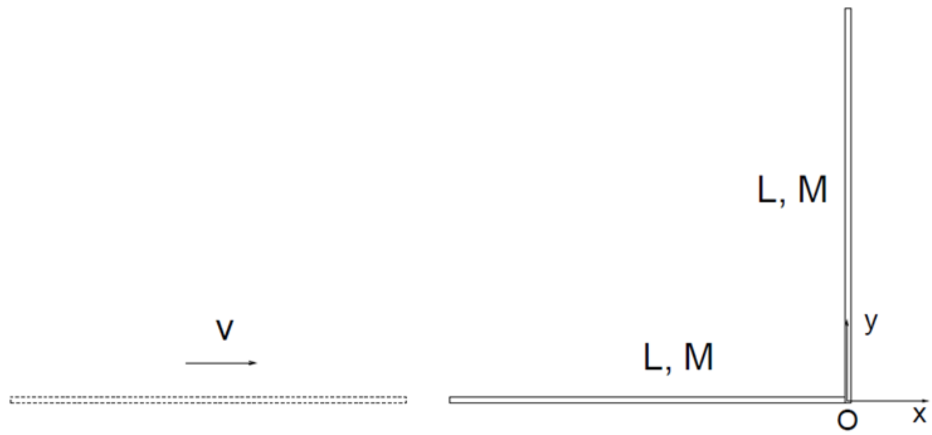
$$\frac{7}{10}v_{CM2}^2 = \frac{1}{2}v_{CM3}^2 + \frac{1}{5}v_{CMh}^2$$

$$\frac{7}{10}v_{CM2}^2 - \frac{1}{5}v_{CM2}^2 + \frac{2}{7}gh = \frac{1}{2}v_{CM3}^2$$

$$v_{CM3} = \sqrt{v_{CM2}^2 + \frac{4}{7}gh}$$

Ejemplo 6

Una barra muy delgada de masa M y largo L descanza sobre una superficie horizontal sin roce. Otra barra idéntica se aproxima perpendicular a la primera desplazándose con una velocidad $v\hat{x}$ (sin rotar) como se muestra en la figura abajo. Gracias a un super pegamento, al chocar las barras quedan instantaneamente unidas en sus extremos en forma rígida, formando un ángulo recto.



a) Determine la velocidad del centro de masa del sistema después de la colisión.

b) Encuentre la posición del CM del sistema en el instante de la colisión, respecto al sistema de coordenadas que se muestra en la figura.

c) Calcule el momento de inercia I_0 del sistema resultante, en torno a un eje perpendicular al plano y que pasa por el punto de unión entre las barras.

d) Obtenga la velocidad angular de rotación ω del sistema después de la colisión. (d es la distancia entre "O" y el centro de masa del sistema al momento de la colisión)

Resp/

a)

Como el momento se conserva en una colisión,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

con

$$\vec{P}_i = Mv\,\hat{\imath}$$

$$Mv\,\hat{\imath} = (2M)\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{v}{2}\,\hat{\imath}$$

Esto es , el CM del sistema se mueve en línea recta en la dirección del eje x con velocidad $\frac{v}{2}$

b) Para encontrar el CM notemos que de la definición,

$$(M_1 + M_2)\vec{R}_{CM} = M_1\vec{R}_{CM1} + M_2\vec{R}_{CM2}$$

donde (1) y (2) denotan las barras.

$$\vec{R}_{CM2} = \left(\frac{L}{2}\right)\hat{\jmath}, \quad \vec{R}_{CM1} = -\left(\frac{L}{2}\right)\hat{\imath}$$

Y

$$\vec{R}_{CM} = -\left(\frac{L}{4}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{L}{4}\right)\hat{\jmath}$$

c)

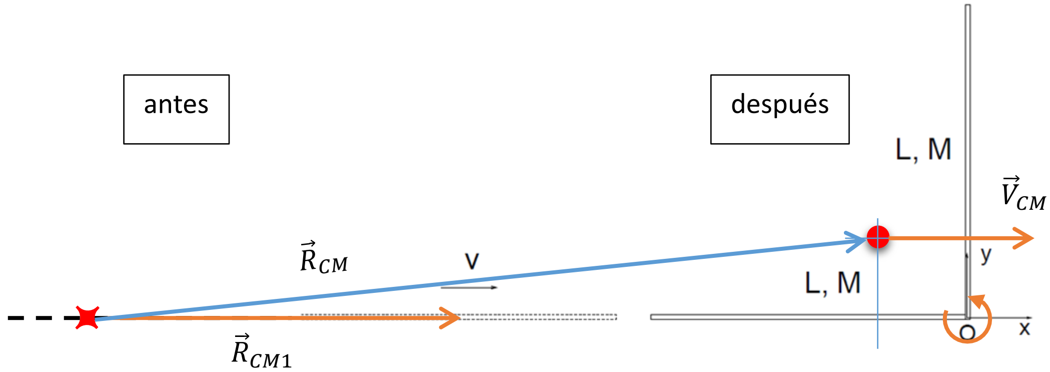
El momento de inercia sería la suma de los momentos de inercia respectivos de las barras,

$$I_O = I_1 + I_2$$

$$I_O = \frac{2}{3}ML^2$$

d) Del inciso a) vimos que el CM del sistema se mueve en línea recta en la dirección positiva del eje x. Esto viene del hecho que en la colisión, sólo las fuerzas de interacción son relevantes y como son internas no cambian el momento. Así mismo, los torques internos tampoco cambian el momento angular y el mismo se conserva.

Midamos el momento angular en relación a un punto ubicado en la línea que pasa por la línea de choque como se indica en la figura siguiente.



De la conservación del momento angular,

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

donde

$$\vec{L}_i = \vec{R}_{CM1} \times M\vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_f = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_{CM}\vec{\omega}$$

$$\vec{0} = \frac{L}{4}MV(-\hat{k}) + I_{CM}\omega\hat{k}$$

Donde el momento de inercia es en relación al CM. Para dejar la respuesta en relación al momento de inercia del punto O aplicamos el teorema de los ejes paralelos, $I_0 = I_{CM} + 2Md^2$

Entonces,

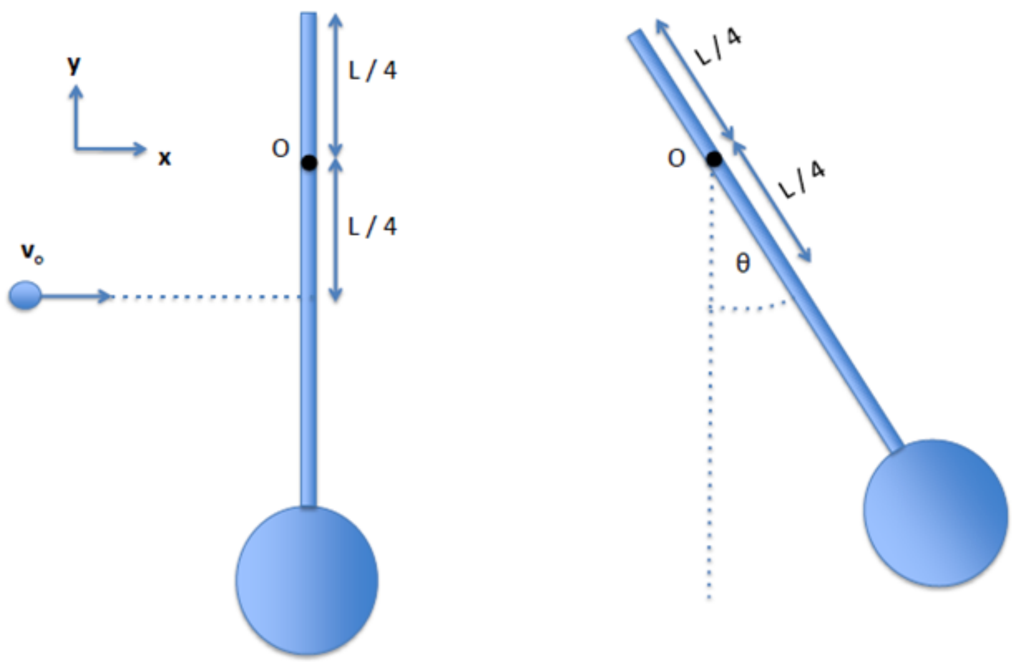
$$\omega = \frac{L}{4}\frac{MV}{I_{CM}} = \frac{L}{8}\frac{Mv}{(I_0 - 2Md^2)}$$

en función de d, de la figura, $d = L\sqrt{2}/8$.

$$\omega = \frac{Mvd}{\sqrt{2}(I_0 - 2Md^2)}$$

Ejemplo 7

El sistema representado en la figura está compuesto por una barra delgada homogénea de masa M y largo L, en cuyo extremo inferior está pegado un disco homogéneo de radio R y masa M. La barra está pivoteada en el punto O, a una distancia $L/4$ del extremo superior. Inicialmente el sistema cuelga en la posición vertical mostrada en la figura, mientras se aproxima una bala de masa m con una velocidad $\vec{v} = v_0\hat{x}$, a una altura $L/2$ del extremo superior.



a) Encuentre la expresión para el momento de inercia del sistema en relación al punto O.

b) Suponga que luego de chocar la bala rebota en la dirección opuesta, a la mitad de la rapidez inicial. Por tanto, su velocidad después del choque es $-\left(\frac{v_0}{2}\right)\hat{\imath}$. En esta condición, calcule la velocidad angular $\vec{\omega}_D$ que adquiere la barra justo después del choque.

c) La velocidad del CM del disco justo después del choque.

d) Calcule la magnitud de la velocidad angular mínima después del choque, ω_{Dmin} para que el sistema de una vuelta completa alrededor del punto =

═══════════════════════════════════════

Resp/

a) Para encontrar el momento de inercia en relación al punto O debemos aplicar el teorema de los ejes paralelos.

El momento de la barra es,

$$I = I_{barra} + I_{disco}$$

$$I_0^{(barra)} = I_{CM}^{(barra)} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

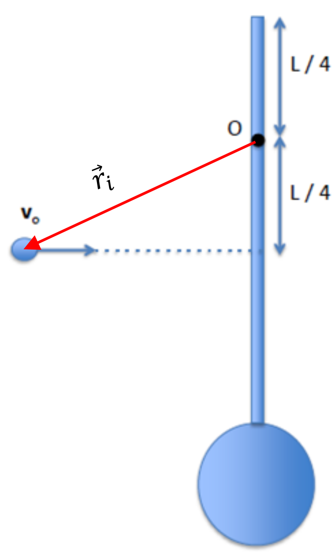
$$I_0^{(disco)} = \frac{MR^2}{2} + M\left(3\frac{L}{4} + R\right)^2$$

$$I = \frac{7ML^2}{48} + \frac{MR^2}{2} + M\left(3\frac{L}{4} + R\right)^2$$

b)

Para calcular la velocidad angular después del choque utilizamos la conservación del momento angular en la colisión.

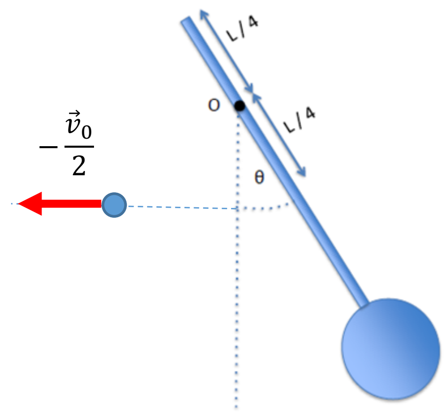
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$



Midamos el momento angular en relación al punto O. En este caso,

$$\vec{L}_i = \frac{L}{4} m v_0 \,\hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{L}_i = \frac{L}{4} m v_0 \, \hat{\mathrm{k}}$$



$$\vec{L}_f = -\frac{L}{4} m \frac{v_0}{2} \, \hat{\mathrm{k}} + I_0 \omega \, \hat{\mathrm{k}}$$

$$\omega = \frac{3L}{8} \frac{m v_0}{I_0}$$

c) Inmediatamente después del choque la velocidad del CM del disco tiene la dirección del eje x y de módulo,

$$V_{CM} = \omega R_{CM}$$

Encontremos entonces la posición del CM en relación al punto O.

$$2MR_{CM} = M\frac{L}{4} + M\left(\frac{3L}{4} + R\right)$$

$$R_{CM} = \frac{1}{2}(L + R)$$

$$\vec{V}_{CM} = \omega \frac{1}{2}(L + R) \, \hat{\mathrm{\imath}}$$

d) Para responder a esta pregunta debemos responder otra. ¿Cuál es la condición para que el sistema de una vuelta completa?

Notemos que la condición está relacionada con la fuerza normal en el eje.

Cuando el cilindro está en la posición vertical, las fuerzas que actúan sobre el sistema son,

$\vec{N}$: fuerza normal ejecutada por el eje sobre el cuerpo

$\vec{F}_g$: fuerza de gravedad sobre el CM

De la segunda ley de Newton,

$$N + F_g = 2Ma_c = 2M\frac{v^2}{R_{Cm}}$$

$$N + F_g = 2Ma_c = 2M\omega^2 R_{CM}$$

De aquí es claro que la condición mínima para la velocidad angular para que llegue a la posición vertical es que la fuerza normal N sea igual a F_g pero de sentido contrario, i.e.,

$$\omega_f = 0$$

Como queremos calcular la velocidad mínima después inmediatamente después del choque, de la conservación de la energía tomando el cero de energía potencial en el plano horizontal que pasa por el punto O,

$$K_i + U_i = U_f$$

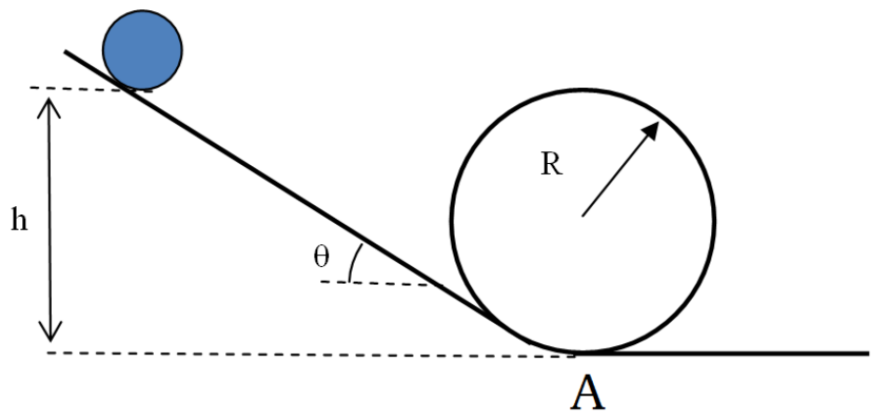
$$\frac{1}{2}I_O\omega_{min}^2 - 2MgR_{CM} = 2MgR_{CM}$$

$$\omega_{min}^2 = \frac{8MgR_{CM}}{I_0} = \frac{4Mg(L+R)}{I_0}$$

$$\omega_{min} = 2\sqrt{\frac{Mg(L+R)}{I_0}}$$

Ejemplo 8

Una esfera sólida homogénea de radio r rueda sin deslizarse a lo largo de una vía que posee una vuelta circular de radio R (figura abajo). La esfera inicia su movimiento partiendo desde el reposo desde una altura h.



a) ¿Cuál es la rapidez del centro de masa de la esfera al llegar a la base del plano (punto A)?

b) ¿Cuál es la mínima altura h requerida para que la esfera no deje la vía?

c) ¿Cuál sería la altura *h* si la bola en lugar de rodar se desliza?

Resp/

a) Como la esfera baja sin deslizar, la fuerza de roce es estática y no hace trabajo, esto es, no disipa energía. Como la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza de gravedad (la fuerza normal no realiza trabajo) entonces la energía mecánica se conserva,

$$E_i = E_f$$

Tomando el cero de energía potencial en la base del plano,

$$E_i = Mg(h+r)$$

$$E_f = Mgr + \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{5}MV_{CM}^2$$

donde $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

$$gh = \frac{7}{10}V_{CM}^2 \qquad \Rightarrow \qquad V_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

b) La condición para que la esfera no deje la vía una vez que ingrese en el lazo es que a normal no sea cero. Para calcular entonces la altura mínima desde la que se debe soltar la esfera para que no abandone nunca la vía la condición es, que la normal en el punto alto del rizo sea cero.

De la segunda lay de Newton con la fuerza normal cero en este punto,

$$Mg = M\frac{V_{CM}^2}{(R-r)} \quad \Longrightarrow \quad V_{CM} = \sqrt{g(R-r)}$$

Entonces, de la conservación de la energía con

$$E_i = Mg(h_{min} + r)$$

y

$$E_f = Mg(2R-r) + \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = Mg(2R-r) + \frac{7}{10}MV_{CM}^2$$

$$(h_{min} + r) = (R-r) + \frac{7}{10}\,(R-r)$$

$$h_{min} = 2(R-r) + \frac{7}{10}\,(R-r)$$

$$h_{min} = \frac{27(R-r)}{10}$$

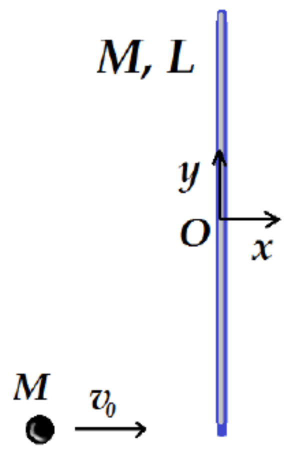
b) En este caso la energía cinética de rotación es cero y de la conservación de la energía,

$$h_{min} = \frac{5}{2}(R-r)$$

Notemos que como esperado es menor que la altura mínima del inciso anterior pues en este caso no hay energía "invertida" en la rotación, recordemos que **los físicos hemos descubierto que un número inicial relacionado con la configuración del sistema es igual al número final**. Esto quiere decir que el número inicial asociado con la energía potencial gravitatoria se debe compartir con cualquier otro uso energético.

Ejemplo 9:

Una barra homogénea de masa M y largo L se encuentra estática sobre un plano horizontal sin roce (figura abajo mostrando la vista superior del sistema). Una pelota de masa M que se desliza con rapidez v_0 sobre el plano, colisiona con un extremo de la barra como se muestra. Después de la colisión ambos cuerpos permanecen pegados.



a) Determine la velocidad $\vec{v}_f$ del centro de masa del sistema después de la colisión.

b) Determine la velocidad angular con la que rota la barra con la masa adosada después de la colisión.

c) Obtenga la energía que se pierde en el choque.

Resp/

a) Resolvamos la colisión. Sabemos que en una colisión el momento lineal se conserva, i.e.,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

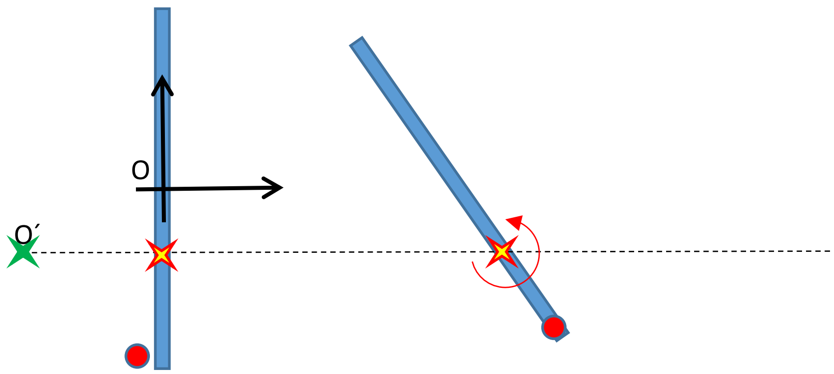
$$Mv_0\hat{\imath} = 2MV_{CM}\hat{\imath}$$

i.e.,

La velocidad del centro de masas inmediatamente después del choque es

$$\vec{V}_{CM} = \frac{v_0}{2}\hat{\imath}$$

Como en el plano horizontal no hay fuerzas externas el momento del sistema se conserva. Esto implica que la velocidad del centro de masa es constante y la barra con la pelota pegada a ella se trasladará rotando alrededor del CM.



b)

Alternativa 1 (midiendo el momento angular en relación al punto O´)

Cómo en la colisión se conserva el momento angular,

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Donde,

$\vec{L}_i$: Es el momento angular del sistema barra-pelota inmediatamente antes de la colisión.

$\vec{L}_f$: Es el momento angular del sistema barra-pelota después de la colisión.

Para medir el momento angular lo debemos fijar primeramente el punto desde donde se mide. Escojamos por conveniencia el punto O´ situado en la recta que pasa por el CM del sistema barra-pelota.

Debemos saber primero la posición del CM.

En relación al punto O de la figura,

$$2M\, Y_{CM} = M\frac{L}{2}$$

$$Y_{CM} = \frac{L}{4}$$

Calculemos entonces el momento angular en relación al punto O´

$$\vec{L}_i = \vec{r}_{pelota} \times M\vec{v}_0 = \frac{L}{4} M v_0\, \hat{k}$$

Para calcular el momento angular final, notemos que el cuerpo (barra-pelota) rota y se traslada. En este caso el momento angular es,

$$\vec{L}_f = \vec{R}_{CM} \times 2M\vec{V}_{CM} + I\vec{\omega}$$

De la figura podemos ver que el primer término es cero[4] y

$$\vec{L}_f = I\vec{\omega}$$

Donde, I es el momento de inercia en relación al eje que pasa por el CM del sistema barra-pelota que debemos calcular.

$$I = I_{barra} + I_{pelota} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

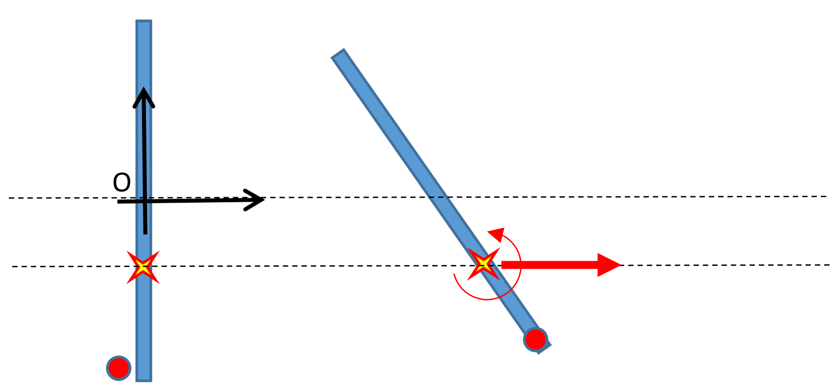
$$I = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{8} ML^2 = \frac{1}{4\times 3} ML^2 + \frac{1}{4\times 2} ML^2 = \frac{5}{24} ML^2$$

Finalmente,

$$\frac{L}{4} M v_0 = \frac{5}{24} ML^2 \omega$$

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v_0}{L}$$

Alternativa 2 (medir el momento angular en relación al punto O)



[4] De aquí la conveniencia de escoger el punto desde donde se mide L en la línea que pasa por el CM.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_{pelota} \times M\vec{v}_0 = \frac{L}{2} M v_0 \, \hat{k}$$

$$\vec{L}_f = \vec{R}_{CM} \times 2M\vec{V}_{CM} + I\vec{\omega} = \frac{L}{4} M V_{CM} \hat{k} + I\omega \hat{k}$$

donde,

$$I = I_{barra} + I_{pelota} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{5}{24} ML^2$$

$$\frac{L}{2} M v_0 = \frac{L}{4} 2MV_{CM} + \frac{5}{24} ML^2 \omega$$

$$\frac{1}{2} v_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right) + \frac{5}{24} L\omega$$

$$\frac{v_0}{4} = \frac{5}{24} L\omega$$

$$\omega = \frac{6}{5} \frac{v_0}{L}$$

c) Para calcular la energía que se pierde en el choque sólo debemos calcular la diferencia entre las energías cinéticas inicial y final.

$$\Delta K = K_i - K_f = \frac{1}{2} M v_0^2 - \left(\frac{1}{2} 2MV_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega_f^2\right)$$

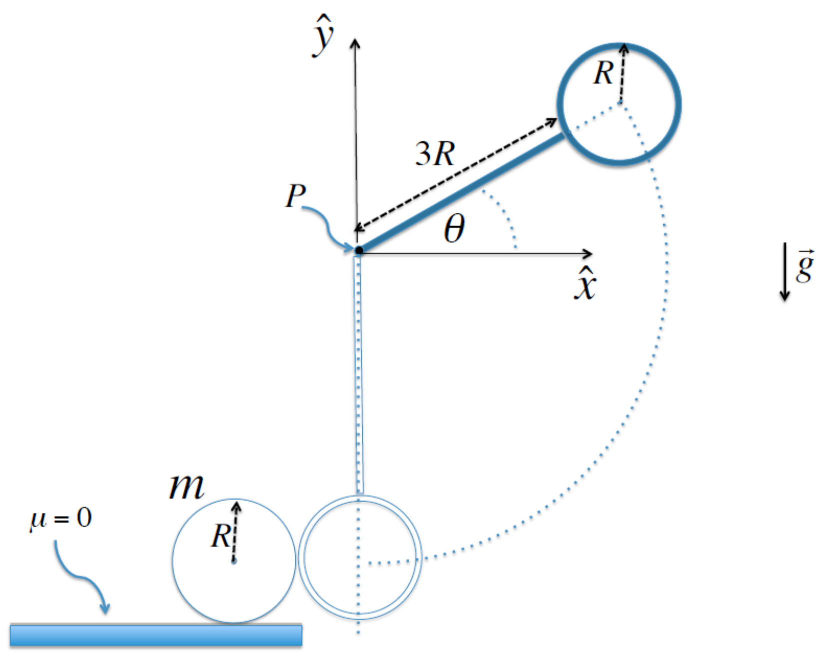
Con $V_{CM} = v_0/2$ e $I = \frac{5}{24} ML^2$

$$\Delta K = \frac{1}{2} M v_0^2 - \left(M \frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{24}\right) ML^2 \omega_f^2\right)$$

$$\Delta K = \frac{1}{4} M v_0^2 - \frac{5}{48} ML^2 \omega_f^2$$

Ejemplo 10

Considere el sistema mostrado en la figura abajo, en el cual un péndulo rígido formado por un anillo de masa M y radio R unido a una barra de masa M y largo $3R$, puede girar libremente respecto al pivote en P. El péndulo inicialmente en reposo, se deja evolucionar libremente desde la posición mostrada en la figura, en la cual $\theta = 30^o$, de manera tal que impacta al disco, de masa m y radio R, justo cuando la barra del péndulo pasa por la vertical (tal como se representa en la figura). Esta colisión es tal, que el péndulo queda en reposo y el disco adquiere una velocidad v_m. Considere que el disco está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal libre de roce.



a) Encuentre la expresión para la posición del CM del péndulo cuando este se encuentra en el estado inicial?

b) Encuentre la expresión para el momento de inercia del péndulo en relación al punto P.

c) Encuentre la velocidad angular ω del péndulo justo antes de chocar con el disco de masa m.

d) Encuentre la expresión para el módulo de la fuerza que ejerce el pivote en P sobre el péndulo justo antes de la colisión.

e) Calcule el módulo de la velocidad del disco después de la colisión.

Resp/

a)

$$2M\vec{r}_{CM} = M\frac{L}{2}\hat{r} + M(L+R)\hat{r}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{3R}{4}\hat{r} + \left(\frac{3R+R}{2}\right)\hat{r} = \frac{3R}{4}\hat{r} + \left(\frac{8R}{4}\right)\hat{r} = \frac{11R}{4}[\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}]$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{11R}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right]$$

b)

$$I = I_{barra} + I_{anillo}$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + I_{CM}^{(anillo)} + M(L+R)^2$$

$$I = 3MR^2 + MR^2 + M16R^2 = (3+1+16)MR^2 = 20MR^2$$

c) De la conservación de la energía,

$$E_i = E_f$$

Tomando el cero de energía potencial en la línea que pasa por el punto P

$$E_i = 2Mgy_{i,CM} = 2Mg\left(\frac{11R}{8}\right) = \frac{11}{4}MgR$$

$$E_f = 2Mgy_{f,CM} + \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

donde, $y_{f,CM}$ es,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{11R}{4}\hat{r}$$

$$\vec{r}_{CM} = -\frac{11R}{4}\hat{\jmath}$$

y

$$E_f = -2Mg\frac{11R}{4} + \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

$$\frac{11}{4}MgR = -2Mg\frac{11R}{4} + \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{33MgR}{2I_P}}$$

d)

De la segunda ley de Newton,

$$N - 2Mg = 2Ma_c$$

$$N = 2Mg + 2M\frac{v^2}{y_{CM}} = 2M(g + \omega^2 y_{CM})$$

$$N = 2M\left(g + \frac{33MgR}{2I_P}\frac{11R}{4}\right) = 2Mg\left(1 + \frac{363}{8}\frac{MR^2}{I_P}\right)$$

e)

De la conservación del momento lineal,

$$P_i = P_f$$

$$P_i = 2MV_{CM} = 2M\omega y_{CM}$$

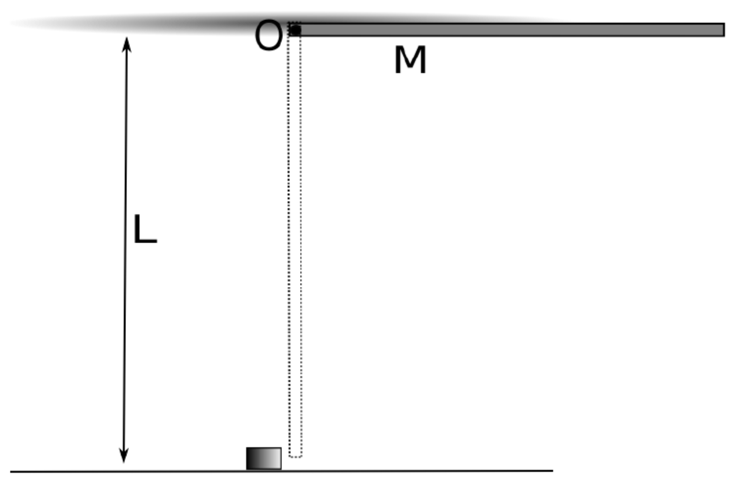
$$P_f = mv$$

$$v = \frac{2M\omega y_{CM}}{m}$$

Ejemplo 11

Una barra homogénea de masa M y largo L que está pivoteada (fija) en un punto O del techo puede girar libremente. La barra es soltada desde el reposo en posición horizontal. En reposo sobre el suelo (sin roce) hay un pequeño bloque de masa m. Al llegar a su posición más baja, la barra colisiona de forma perfectamente elástica con el bloque.

Asuma que conoce el momento de inercia I_{cm} con respecto al centro de masa, y el momento I_O con respecto al pivote O.



a) Calcule la velocidad angular ω_1 con que gira la barra justo antes del choque con el bloque.

b) Calcule la velocidad del bloque v después del choque y la velocidad angular de la barra ω_2 inmediatamente después del choque.

c) ¿Qué condición debe cumplirse para que la barra se "devuelva" ?

Resp/

a) De la conservación de la energía, tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el suelo,

$$MgL = Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Donde $I_0 = \frac{ML^2}{3}$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_0}}$$

b) Como el choque ocurre en un intervalo de tiempo muy corto, el cambio en el momento angular debido a torques externos es despreciable y $\vec{L}_0$ es conservado.

$$\vec{L}_{0i} = \vec{L}_{0f}$$

$$\vec{L}_{0i} = I_0\omega\ (\hat{k})$$

donde hemos tomado $\hat{k}$ entrando a la página.

$$\vec{L}_{0f} = I_0\omega_2\left(\hat{k}\right) + Lmv\left(\hat{k}\right)$$

Entonces,

$$I_0\omega = I_0\omega_2\ + Lmv \qquad (1)$$

Como el choque es elástico, de la conservación de la energía,

$$\frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{I_0\omega_2^2}{2}\ + \frac{mv^2}{2}$$

$$I_0\omega^2 = I_0\omega_2^2\ + mv^2 \qquad (2)$$

De (1), y (2)

$$I_0(\omega - \omega_2\ ) = Lmv$$

$$I_0(\omega - \omega_2\ )(\omega + \omega_2)\ = mv^2$$

Y dividiendo obtenemos,

$$(\omega + \omega_2)\ = v/L \qquad (3)$$

Insertando el resultado en (1),

$$I_0\omega = I_0\left(\frac{v}{L} - \omega\right)\ + Lmv$$

$$v = \frac{2I_0\omega}{mL\left(1 + \frac{I_0}{mL^2}\right)}$$

$$\omega_2 = \frac{v}{L} - \omega = \left(\frac{2I_0}{mL^2\left(1 + \frac{I_0}{mL^2}\right)} - 1\right)\omega$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2I_0}{(mL^2 + I_0)} - 1\right)\omega = \left(\frac{I_0 - mL^2}{(mL^2 + I_0)}\right)\omega$$

c) Para que la barra salga en la dirección contraria a la masa justo después del choque ($\omega_2 < 0$) de la ecuación anterior notamos que claramente, $I_0 < mL^2$. Para la barra homogénea con $I_0 = ML^2/3$ la condición es que $M < 3m$.