Estática y Dinámica

Material Clases Cuerpo Rigido – Rotacion 3

1. Energía cinética de rotación. Momento de Inercia

2. Momento de inercia de cuerpos rígidos

3. Momento de inercia. Teorema de ejes paralelos (Teorema de Steiner)

3.1 Teorema de ejes perpendiculares. Figuras planas.

1. Energía cinética de rotación. Figuras planas.

Consideremos el cuerpo rígido como una colección de pequeñas partículas de masa m_i (ver Fig. 1.1)

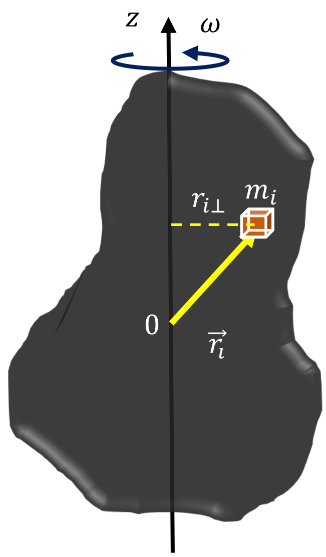


Figura 1.1. Cuerpo rígido formado por partículas pequeñas de masa m_i.

La energía cinética K del cuerpo rígido es por definición la suma de las energías cinéticas de todas las partículas.

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{1.1}$$

Si el cuerpo está rotando alrededor de un eje fijo (eje z) con velocidad angular constante ω cada partícula ejecuta un movimiento circular con velocidad

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{1.2}$$

de modulo,

$$v_i = \omega r_i \sin\theta = \omega r_{i\perp} \tag{1.3}$$

donde, $r_{i\perp}$ es la componente de $\vec{r}_i$ perpendicular a $\vec{\omega}$. Desde el punto de vista geométrico es la distancia al eje de rotación.

Substituyendo (1.3) en (1.1) obtenemos,

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2\right)\omega^2 \qquad (1.4)$$

que escribiremos de como,

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (1.5)$$

donde,

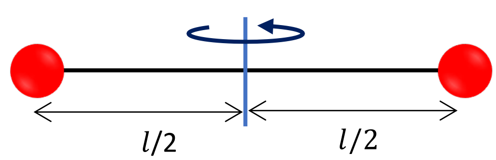
$$I = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2\right) \qquad [kgm^2] \qquad (1.6)$$

es llamado de momento de inercia del cuerpo. Notemos que partículas a mayor distancia del eje poseen mayor velocidad lineal $v_i = \omega r_{i\perp}$ y contribuyen más para la energía cinética.

Como podemos observar de (1.6) el momento de inercia I depende de la distribución de masa en el cuerpo y la localización del eje de rotación.

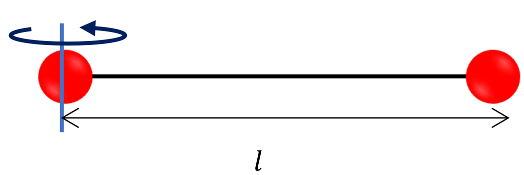
Ejemplo: Barra de masa despreciable uniendo dos partículas de masa m.

Calculemos el momento de inercia en relación a un eje que pasa por el centro de la barra.



$$I = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2\right) = \frac{ml^2}{2}$$

Ejemplo: Supongamos ahora que el eje pasa por una de las masas.



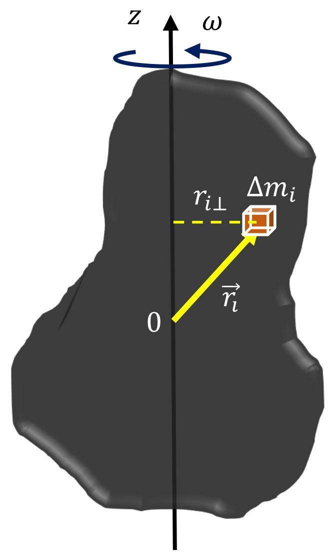
$$I = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2\right) = ml^2$$

De estos ejemplos es claro que el momento de inercia depende de la posición del eje de rotación. Notemos también que cuando la masa está distribuida de manera uniforme en relación al eje de rotación el momento de inercia es menor.

2. Momento de inercia de cuerpos rígidos

Para distribuciones continuas de masa reemplazamos la suma sobre la masa de las partículas por una integral sobre los elementos diferenciales de masa. En este caso

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_{i\perp}^2 = \int r^2 dm \qquad (2.1)$$



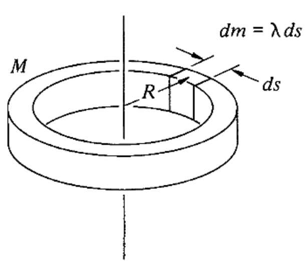
Para un cuerpo en 3D: $dm = \rho dV$

Para un cuerpo en 2D: $dm = \sigma dA$

Para un cuerpo en 1D: $dm = \lambda dl$

Donde, ρ, σ y λ son las distribuciones volumétricas, superficial y longitudinal de mas, respectivamente.

Example **Moments of Inertia of Some Simple Objects**

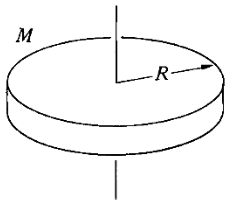


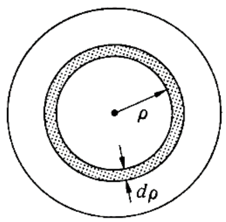
a. UNIFORM THIN HOOP OF MASS M AND RADIUS R, AXIS THROUGH THE CENTER AND PERPENDICULAR TO THE PLANE OF THE HOOP
The moment of inertia about the axis is given by

$$I = \int \rho^2 \, dm.$$

Since the hoop is thin, $dm = \lambda ds$, where $\lambda = M/2\pi R$ is the mass per unit length of the hoop. All points on the hoop are distance R from the axis so that $\rho = R$, and we have

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \, ds \\ &= R^2 \left(\frac{M}{2\pi R}\right) s \Big|_0^{2\pi R} \\ &= MR^2. \end{aligned}$$





b. UNIFORM DISK OF MASS M, RADIUS R, AXIS THROUGH THE CENTER AND PERPENDICULAR TO THE PLANE OF THE DISK

We can subdivide the disk into a series of thin hoops with radius ρ width $d\rho$, and moment of inertia dI. Then $I = \int dI$.

The area of one of the thin hoops is $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, and its mass is

$$dm = M\frac{dA}{A} = \frac{M2\pi\rho\, d\rho}{\pi R^2}$$

$$= \frac{2M\rho\, d\rho}{R^2}.$$

$$dI = \rho^2\, dm = \frac{2M\rho^3\, d\rho}{R^2}$$

$$I = \int_0^R \frac{2M\rho^3\, d\rho}{R^2}$$

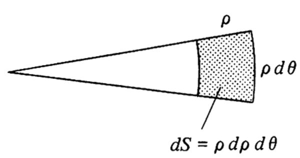
$$= \frac{1}{2}MR^2.$$

Let us also solve this problem by double integration to illustrate the most general approach.

$$I = \int \rho^2\, dm$$

$$= \int \rho^2 \sigma\, dS,$$

where σ is the mass per unit area. For the uniform disk, $\sigma = M/\pi R^2$, Polar coordinates are the obvious choice. In plane polar coordinates,



$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Then

$$I = \int \rho^2\, \sigma dS$$

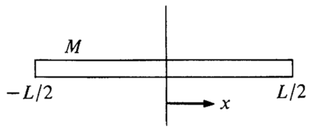
$$= \left(\frac{M}{\pi R^2}\right)\int \rho^2\, dS$$

$$= \left(\frac{M}{\pi R^2}\right)\int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \left(\frac{2M}{R^2}\right)\int_0^R \rho^3\, d\rho$$

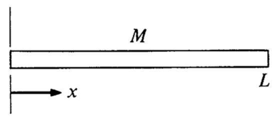
$$= \tfrac{1}{2}MR^2,$$

as before.



c. UNIFORM THIN STICK OF MASS M, LENGTH L, AXIS THROUGH THE MIDPOINT AND PERPENDICULAR TO THE STICK

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/2}^{+L/2} x^2\, dm \\ &= \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\, dx \\ &= \frac{M}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{+L/2} \\ &= \tfrac{1}{12}ML^2 \end{aligned}$$



d. UNIFORM THIN STICK, AXIS AT ONE END AND PERPENDICULAR TO THE STICK

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{L}\int_0^L x^2\, dx \\ &= \tfrac{1}{3}ML^2. \end{aligned}$$

e. UNIFORM SPHERE OF MASS M, RADIUS R, AXIS THROUGH CENTER
We quote this result without proof—perhaps you can derive it for yourself.

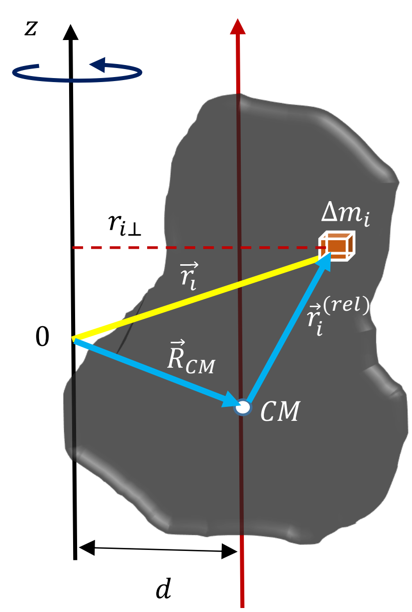
$$I = \tfrac{2}{5}MR^2.$$

3. Momento de inercia. Teorema de ejes paralelos (Teorema de Steiner)

Como vimos, además de cómo está distribuida la masa, el momento de inercia depende de donde está localizado el eje de rotación.

La energía cinética de un cuerpo que rota alrededor de un eje fijo “z” arbitrario es,

$$K_Z = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2 \qquad (3.1)$$



Pero de la figura

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^{(rel)} \qquad (3.2)$$

Derivando esta ecuación en relación al tiempo,

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i \qquad (3.3)$$

Donde $\vec{u}_i$ es la velocidad de la partícula "i" en relación al CM.

Substituyendo (3.3) en (3.1) obtenemos,

$$K_Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{u}_i)^2 \tag{3.4}$$

$$K_Z = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{u}_i\right) \cdot \vec{V}_{CM} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i u_i^2 \tag{3.5}$$

Pero $\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{v}_i - M\vec{V}_{CM}^2 = \vec{P} - \vec{P} = \vec{0}$ y

$$K_Z = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i u_i^2 \tag{3.6}$$

Donde el segundo término es la energía cinética interna.

Consideremos que el eje z alrededor del cual el cuerpo rota se encuentra a una distancia d del CM. Entonces, $V_{CM} = \omega d$ y el primer término en (3.6) lo escribimos como:

$$\frac{1}{2} M V_{CM}^2 = \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 \tag{3.7}$$

Por otro lado, $\vec{u}_i$: la velocidad de m_i en relación al CM es[1]

$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}^{(rel)} \tag{3.8}$$

Y

$$u_i = \omega r_{i\perp}^{(rel)} \tag{3.9}$$

pues $\vec{\omega} \perp \vec{r}_{i\perp}^{(rel)}$.

Con esto, escribimos (3.6) como,

$$K_Z = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \left(r_{i\perp}^{(rel)}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 \tag{3.10}$$

Donde el último término es la energía de rotación en relación a un eje que pasa por el CM. De la ecuación (3.7) escribimos (3.7) como:

$$K_Z = \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 \tag{3.11}$$

---

[1] Notemos que $\vec{r}_i^{(rel)} = r_{i\perp}^{(rel)}\hat{\rho} + z_i\hat{k}$. Derivando en relación a t, se obtiene la ec. (3.6) $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}^{(rel)}$ pues z_i del punto "i" es fijo.

y comparando con (3.1)

$$\frac{1}{2}I_Z\omega^2 = \frac{1}{2}[I_{CM} + Md^2]\omega^2$$

$$I_Z = I_{CM} + Md^2 \qquad (3.12)$$

Donde,

I_{CM}: es el momento de inercia en relación al eje que pasa por el CM

M: Masa el cuerpo

d: distancia perpendicular entre los ejes paralelos.

Ejemplo:

Para una barra uniforme, el momento de inercia en relación al CM es $I_{CM} = \frac{Ml^2}{12}$.

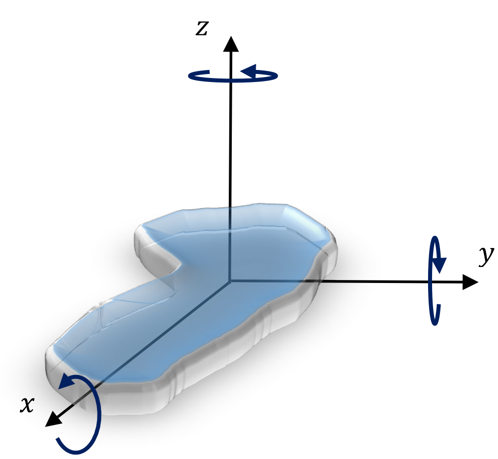
Del teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia en relación a un eje que pasa por un extremo es,

$$I = I_{CM} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

Esta es la expresión matemática del teorema de los ejes paralelos.

3.1 Teorema de ejes perpendiculares (Figuras planas)

Consideremos una placa fina que puede rotar alrededor de cualquier eje x, y, z.



Los momentos de inercia correspondientes son I_x, I_y, I_z.

Supongamos que queremos calcular I_z.

$$I_z = \int r^2 dm$$

donde r es la distancia del origen al punto en el plano x, y; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ así que

$$I_z = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y$$

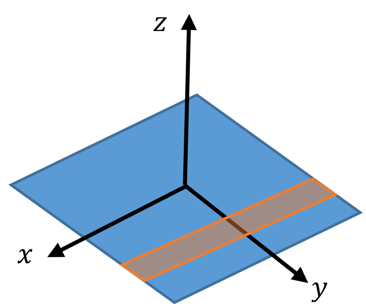
Ejemplo: Disco.

Para el disco vimos que para un eje que pasa por el CM $I_z = \frac{1}{2}MR^2$. Pero, por simetría $I_x = I_y$ así que del resultado anterior,

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{4}MR^2$$

Ejemplo: Placa cuadrada de lado a

Calculemos I_x



$$I_x = \int y^2 dm = \sigma \int y^2 dm = \sigma a \int y^2 dy$$

$$I_x = \sigma a \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-a/2}^{a/2} = \frac{Ma^2}{12}$$

Por simetría,

$$I_z = 2I_x = \frac{1}{6}Ma^2$$