Estática y Dinámica

Clase 12

1- Ley de Hooke

2- Roce viscoso

3-Cables flexibles. Fricción

1. Ley de Hooke

A mediados del siglo XVII Robert Hooke descubrió que la elongación de un resorte es proporcional a la fuerza aplicada, tanto para desplazamientos positivos como negativos. La fuerza F_r ejercida por el resorte deformado viene dada por la ley de Hooke,

$$F_r = -k(x - x_0), \tag{1.1}$$

donde k es una constante llamada constante del resorte (o constante de restitución) y x_0 es el largo natural del resorte. La constante k representa la inclinación de la recta $F\ vs.\ (x - x_0)$ y nos da la magnitud de la fuerza requerida para desplazar el lado libre del resorte un desplazamiento $(x - x_0)$. Es siempre positiva pero diferentes resortes tendrán diferentes valores de k dependiendo a como respondan a la compresión o estiramiento. En el sistema internacional de unidades SI la constante elástica se da en N/m.

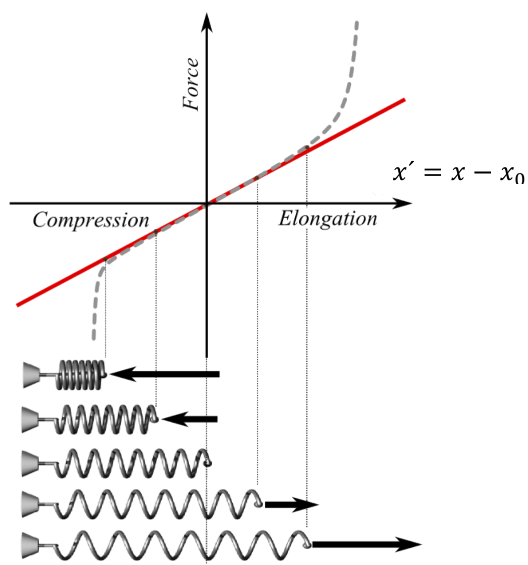
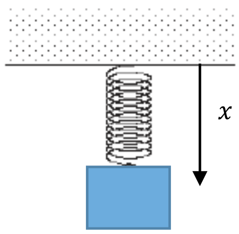


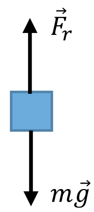
Figura 1[1]

En general la ley de Hooke es válida sólo para pequeños desplazamientos. Como muestra la figura la ley falla si comprimimos o estiramos el resorte más allá de ciertos límites. Aun así la ley de Hooke es de gran utilidad porque, para pequeños desplazamientos, muchos materiales muestran una relación lineal entre fuerza y desplazamiento cuando son comprimidos o estirados.

Ejemplo: Calcular el estiramiento del resorte

[1] By Svjo https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=25795521



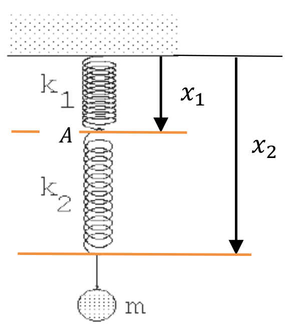


Bloque $$F_r = k(x - x_o) - mg = 0$$

$$x = \frac{mg}{k} + x_o$$

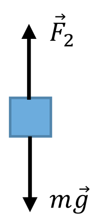
Combinación de resortes (Resortes en serie).

Analicemos las siguientes combinaciones de resortes

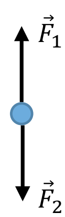


Analicemos los diagramas de fuerza, en el cuerpo y en el punto A de unión entre los resortes.

Cuerpo m



punto A



De la lectura de los diagramas obtenemos

Bloque $$F_2 = k_2[(x_2 - x_1) - x_{02}] = mg \tag{2.1}$$

Punto A $$k_1[x_1 - x_{01}] = k_2[(x_2 - x_1) - x_{02}] \tag{3.1}$$

Despejando x_1 de (3),

$$x_1 = \frac{k_2x_2 - k_2x_{02} + k_1x_{01}}{(k_1 + k_2)}$$

e introduciendo en (2),

$$mg = k_2x_2 - k_2\left(\frac{k_2x_2 - k_2x_{02} + k_1x_{01}}{(k_1 + k_2)}\right) - k_2x_{02}$$

$$mg = x_2\left(k_2 - \frac{k_2^2}{(k_1 + k_2)}\right) + x_{02}\left(-k_2 + \frac{k_2^2}{(k_1 + k_2)}\right) - \frac{k_2k_1}{(k_1 + k_2)}x_{01}$$

$$mg = x_2\frac{k_2k_1}{(k_1 + k_2)} - x_{02}\frac{k_2k_1}{(k_1 + k_2)} - \frac{k_2k_1}{(k_1 + k_2)}x_{01}$$

$$mg = \frac{k_2k_1}{(k_1 + k_2)}[x_2 - (x_{02} + x_{01})] = k_{eq}(x_2 - x_0) \tag{4.1}$$

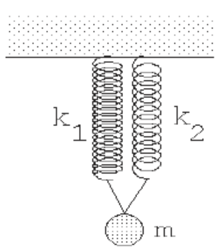
De aquí vemos que el sistema de dos resortes en serie puede ser visto como un resorte de constante elástica equivalente,

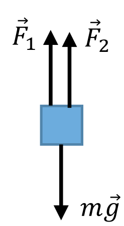
$$k_{eq} = \frac{k_2k_1}{(k_1 + k_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{5.1}$$

Resortes en Serie

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i} \tag{6.1}$$

Combinación de resortes (Resortes en paralelo)





Del diagrama de fuerzas,

Bloque

$$F = F_1 + F_2 = k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0) = mg \tag{7.1}$$

$$F = (k_1 + k_2)[x - x_0] = k_{eq}[x - x_0] \tag{8.1}$$

Resortes en paralelo

$$k_{eq} = \sum_i k_i \tag{9.1}$$

2. Roce viscoso

Cuando un cuerpo se mueve en un líquido o gas el medio ejerce una fuerza de resistencia $\vec{R}$ sobre este. Algunos ejemplos son la resistencia del aire asociada con vehículos en movimiento y la fuerza viscosa que actúa sobre objetos que se mueven en un líquido. La magnitud de $\vec{R}$ depende de factores tales como la velocidad del objeto y su dirección es siempre opuesta a la dirección del objeto relativa al medio. Además, la magnitud de $\vec{R}$ en general aumenta con la velocidad.

La magnitud de la fuerza resistiva puede depender de la velocidad de una forma compleja y aquí consideraremos dos situaciones. En la primera situación asumiremos que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del objeto en movimiento. Esta suposición es válida para objetos que caen lentamente a través de un líquido o para objetos muy pequeños como partículas de polvo que se mueven en el aire. En la segunda situación, asumiremos una fuerza de resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto; objetos de gran tamaño tales como paracaidistas moviéndose en caída libre experimental este tipo de fuerza.

La viscosidad surge debido a que un cuerpo que se mueve en un medio ejerce una fuerza que coloca al fluido que la rodea en movimiento, Por la tercera ley de Newton el fluid ejerce una fuerza de reacción sobre el cuerpo.

2.1 Fuerza viscosa proporcional a la velocidad

Si asumimos que la fuerza de resistencia que actúa sobre un objeto en movimiento a través de un líquido o gas es proporcional a su velocidad, podemos escribir la fuerza como

$$\vec{R} = -b\vec{v}, \qquad (2.1)$$

donde $\vec{v}$es la velocidad del objeto y b es una constante cuyo valor depende de las propiedades del medio y de la forma y dimensiones del objeto. Si el objeto es una esfera de radio r, entonces b es proporcional a este. El signo negativo indica que $\vec{R}$ es en la dirección opuesta a $\vec{v}$.

Consideremos una pequeña esfera de masa m que es liberada del reposo en un líquido

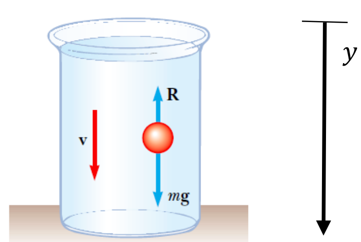


Figura 2

Asumamos que las únicas fuerzas que actuan sobre el cuerpo son la fuerza de resistencia $\vec{R}$ y la fuerza de gravedad, $\vec{F}_g$.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical obtenemos la equacion de movimiento,

$$-bv + mg = ma \tag{2.2}$$

de donde a su vez obtenemos la ecuación diferencial para v

$$\frac{m}{b}\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{b} - v \tag{2.3}$$

Para resolver la ecuación separamos variables,

$$\frac{dv}{\left(\frac{mg}{b} - v\right)} = \frac{b}{m}dt \tag{2.4}$$

e integrando

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(v - \frac{mg}{b}\right)} = -\frac{b}{m}\int_0^t d\tau$$

obtenemos,

$$\ln\left(v - \frac{mg}{b}\right)\Big|_0^v = -\frac{b}{m}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{v - \frac{mg}{b}}{-\frac{mg}{b}}\right) = -\frac{b}{m}t$$

$$\left(1 - \frac{b}{mg}v\right) = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad o \quad v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{2.5}$$

donde la constante de tiempo $\tau = m/b$, es el tiempo para el que la esfera alcanza el 63.2 % de su velocidad terminal. Notemos que cuando $t \gg \tau$ la velocidad es contante $v_T = \frac{mg}{b}$ y es llamada de velocidad terminal.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la velocidad vs. tiempo dada por (2.5):

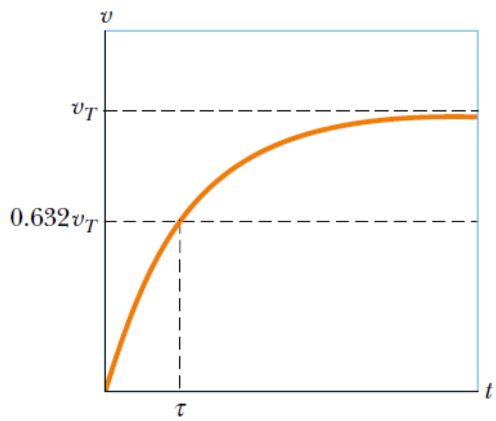


Figura 3

Analicemos otra vía de solución de la ecuación diferencial.

De la segunda ley de Newton escrita en la ecuación (2.2) vemos cuando la velocidad comienza a aumentar partiendo de cero (el cuerpo parte del reposo) el término viscoso $-bv$ se hace negativo y en un tiempo dado se igualará a la fuerza de gravedad. En ese instante el cuerpo estará en equilibrio y por la primera ley de Newton, como no actúa otra fuerza sobre este permanecerá en ese estado, en otras palabras, en este instante el cuerpo alcanza la velocidad terminal y se moverá con velocidad constante.

Entonces, de la ecuación (2), la velocidad terminal se puede calcular fácilmente haciendo $\frac{dv}{dt} = 0$ obteniendo, $v_T = \frac{mg}{b}$.

Esperamos entonces que la velocidad en función del tiempo se pueda escribir como[2]:

$$v(t) = f(t) + \frac{mg}{b} \tag{2.6}$$

donde $f(t) = 0$ cuando $t \to \infty$ y $f(0) = -\frac{mg}{b}$.

Substituyendo en (2.2) obtenemos para $f(t)$ la ecuación,

$$\frac{m}{b}\frac{df(t)}{dt} = -f(t) \tag{2.7}$$

o

$$f(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} \tag{2.8}$$

[2] Si los estudiantes ya han cursado la materia de ecuaciones diferenciales notemos que la solución de la ecuación no homogénea (2.3)

$$\frac{m}{b}\frac{dv}{dt} + v = \frac{mg}{b}$$

se escribe como la suma de una solución particular de la misma, más una solución general de la homogénea.

y de la condición, $f(0) = -\frac{mg}{b}$, $A = -\frac{mg}{b}$ obteniendo la solución (2.5),

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \tag{2.9}$$

2.2 Fuerza viscosa proporcional a la velocidad

Para objetos que se mueven a altas velocidades a través del aire, tales como aviones, paracaidistas y autos, la fuerza de resistencia es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad. En estas situaciones, la magnitud de la fuerza de resistencia puede expresarse como,

$$R = \frac{1}{2}D\rho A v^2, \tag{2.10}$$

donde ρ es la densidad del aire, A es el área de la sección transversal del objeto en movimiento medida en el plano perpendicular al vector velocidad, y D es una cantidad adimensional empírica llamada coeficiente de arrastre "drag coefficient". El coeficiente de arrastre tiene un valor de 0.5 para objetos esféricos pero podría tener valores tan grandes como 2.0 oara objetos de forma irregular.

Analicemos el movimiento de un objeto en caída libre bajo la acción de la fuerza R (ec. 2,10). Supongamos que el objeto de masa m es liberado desde el reposo. Como muestra la figura, el objeto está sometido a dos fuerzas, $\vec{R}$ y $\vec{F}_g$[3].

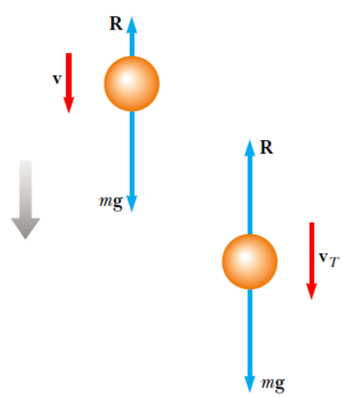


Figura 4

De la segunda ley de Newton

$$mg - \frac{1}{2}D\rho A v^2 = ma \tag{2.11}$$

[3] Estamos despreciando la fuerza de empuje.

de donde obtenemos la ecuación diferencial para la velocidad,

$$\frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right) v^2 \tag{2.12}$$

De esta ecuación podemos calcular la velocidad terminal haciendo $\frac{dv}{dt} = 0$, esto es, cuando $R = mg$. En este caso obtenemos,

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tag{2.13}$$

Para resolver la ecuación diferencial, al igual que hicimos en el punto anterior separamos variables obteniendo,

$$\frac{dv}{\left(\frac{2mg}{D\rho A} - v^2\right)} = \left(\frac{D\rho A}{2m}\right) dt$$

$$\tanh^{-1}\left[\frac{v}{\sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}}\right]_0^v = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}\left(\frac{D\rho A}{2m}\right) t$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tanh\left[\left(\sqrt{\frac{D\rho A g}{2m}}\right) t\right] \quad \Longrightarrow \quad v = (g\tau)\tanh\left[\frac{t}{\tau}\right] \tag{2.14}$$

donde $\tau = \sqrt{\frac{2m}{D\rho A g}}$

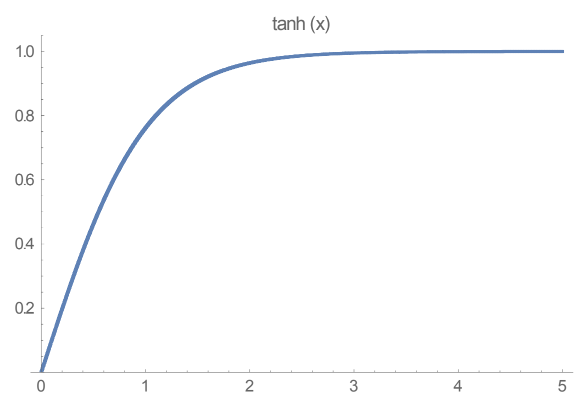


Figura 5

En la figura mostramos el comportamiento de la tangente hiperbólica. Como podemos observar para $t > 3\sqrt{\frac{2m}{D\rho A g}}$ la velocidad alcanza su valor terminal.

3. Cables flexibles, fricción

Supongamos que tenemos una cuerda enrollada alrededor de una superficie curva como muestra la figura. Queremos encontrar una relación entre las fuerzas en los extremos y la longitud de la cuerda en contacto con esta dado el coeficiente de roce estático.

Asumamos entonces que no existe deslizamiento y analicemos el diagrama de fuerzas de un elemento diferencial de cuerda.

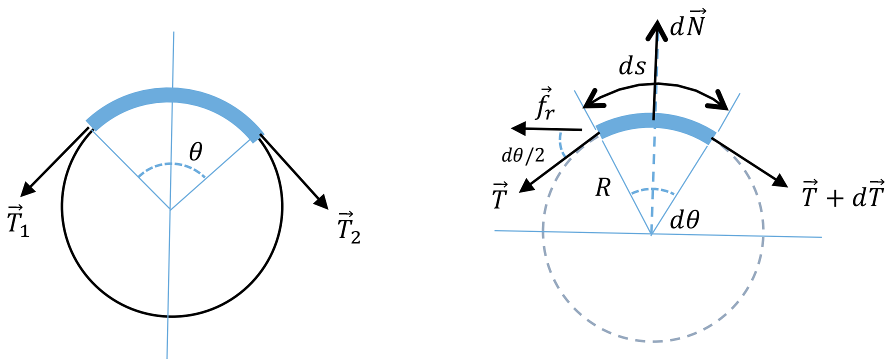


Figura 6

De la condición de equilibrio, $\vec{a} = \vec{0}$ obtenemos,

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \qquad (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \mu dN = 0 \tag{3.1}$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \qquad dN - (T + dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \tag{3.2}$$

Con $d\theta \ll 1$, $dT \ll T$, haciendo $\cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$, $\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ y despreciando términos infinitesimales de segunda orden como $d\theta dT$, etc… obtenemos,

$$dT = \mu dN \tag{3.3}$$

$$dN = T d\theta \tag{3.4}$$

De estas ecuaciones obtenemos entonces la relación entre la tensión y el ángulo θ

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta. \tag{3.5}$$

Integrando de T_1 a T_2 en T y de 0 a β, donde β es el angulo correspondiente a la zona de contacto entre la cuerda y la superficie

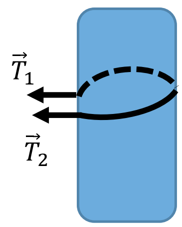
$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\beta} d\theta. \tag{3.6}$$

Obtenemos con $lnT_2 - lnT_1 = \mu\beta$ y $ln(T_2/T_1) = \mu\beta$,

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta}. \tag{3.7}$$

Ejemplo,

Si la cuerda da una vuelta alrededor del poste,



$$T_2 = T_1 e^{\mu 2\pi}.$$

Por ejemplo, con $\mu = 0.4$, $T_1 = \frac{T_2}{12.3}$, muy ventajoso!