Fis1513: Estática y Dinámica

Examen

Profesores: Rafael Benguria, Roberto Rodríguez, Ignacio Reyes

Fecha: 5 de Julio de 2013

Nombre: ______________________________________

P1	
P2	
P3	

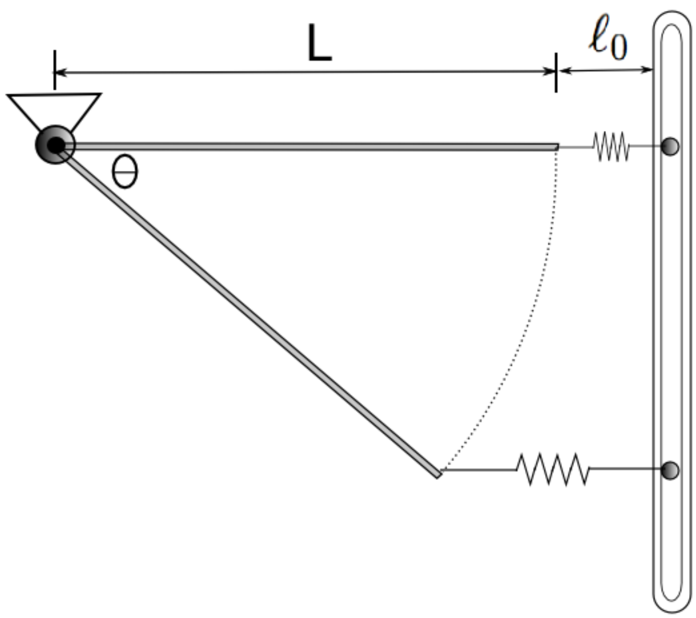
Pregunta 1) En la figura, la barra de masa homogénea de masa M y largo L está pivoteada en un punto fijo y unida en su extremo a un resorte de constante k. El otro extremo del resorte desliza por un riel sin roce, de modo que el resorte siempre se encuentra en posición horizontal. La barra se suelta del reposo en $\theta = 0$, donde el resorte está en su largo natural ℓ_0 .

a) Calcule el estiramiento del resorte $\Delta\ell$ es función de θ.

b) Escriba la energía total del sistema como función de θ.

c) Calculando la derivada de la energía respecto del tiempo, encuentre $\ddot{\theta}$ como función de θ.

d) Utilizando la ecuación de torque, encuentre la ecuación de movimiento y verifique que $\ddot{\theta}$ es igual a lo encontrado en c).



Solución

a) Claramente de la geometría del dibujo se tiene que $\Delta\ell = L - L\cos\theta$. [1,0]

b) Si tomamos $V_{grav} = 0$ en el eje $\theta = 0$, la energía total es:

$$E = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}kL^2(1-\cos\theta)^2 \tag{1}$$

donde $I_0 = \frac{ML^2}{3}$ con respecto al pivote en el extremo. [1,0]

c) Claramente la energía es constante ya que todas las fuerzas son conservativas, de modo que

$$\frac{dE}{dt} = I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} - Mg\frac{L}{2}\cos(\theta)\dot{\theta} + kL^2(1-\cos\theta)\sin(\theta)\dot{\theta} = 0 \quad [1,0] \tag{2}$$

y exceptuando el caso en que $\dot{\theta} = 0$ podemos dividir la ecuación por $\dot{\theta}$, obteniendo

$$I_0\ddot{\theta} - Mg\frac{L}{2}\cos(\theta) + kL^2(1-\cos\theta)\sin(\theta) = 0 \quad [0,5] \tag{3}$$

es decir

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_0}\left(Mg\frac{L}{2}\cos(\theta) - kL^2(1-\cos\theta)\sin(\theta)\right) \quad [0,5] \tag{4}$$

d) La ecuación de torque con respecto al pivote fijo nos dice que

$$\sum \tau^{ext} = I_0\ddot{\theta} \quad [0,5] \tag{5}$$

y reemplazando el torque producido por el peso y el resorte tenemos:

$$\sum \tau^{ext} = -\frac{L}{2}Mg\cos\theta + LF_k\sin\theta \quad [0,5] \tag{6}$$

donde $F_k = k\Delta\ell = kL(1-\cos\theta)$ entonces tenemos

$$-\frac{L}{2}Mg\cos\theta + kL^2(1-\cos\theta)k\sin\theta = I_0\ddot{\theta} \quad [1,0] \tag{7}$$

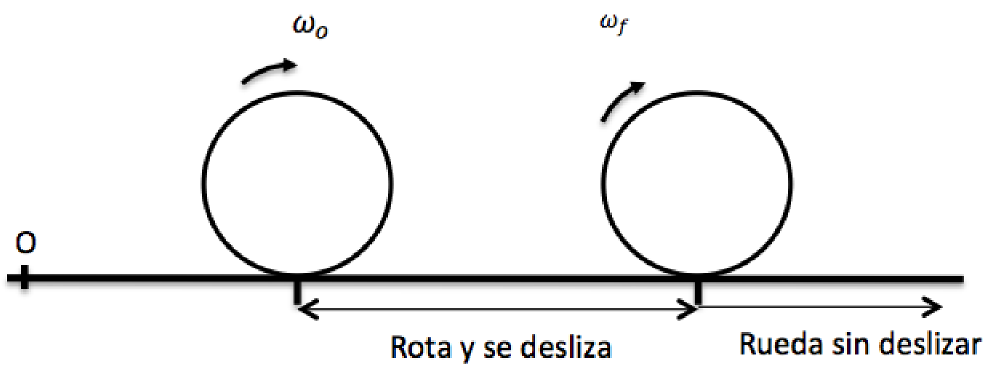
que es exactamente la misma ecuación encontrada antes.

Pregunta 2) Un cilindro homogéneo macizo de masa m y radio R se hace girar alrededor del eje que pasa por su centro a una velocidad angular ω_0. Luego se coloca sobre un plano horizontal e inmediatamente se libera. Al realizar esto, el cilindro inicialmente se traslada deslizándose para luego rodar sin deslizar. El coeficiente de roce cinético entre el cilindro y el plano es μ_k.

a) Verifique que el momento angular del sistema se conserva en relación al punto O mostrado en la figura.

b) Calcule la velocidad angular ω_f en el momento en que rueda sin deslizar.

c) Calcule el tiempo que transcurre desde el momento en que se libera el cilindro y el instante en que comienza a rodar sin deslizar.



Solución

a) Sobre el cilindro se aplican tres fuerzas: el peso, la normal y el roce. Debido a que el plano es horizontal, el peso y la normal tienen igual magnitud y sentido contrario, pero el peso se aplica sobre el CM del disco, mientras que la normal se aplica en el punto de contacto con el suelo. Como $\sum \tau = \frac{dL}{dt}$, si el torque es nulo con respecto a O, el momentum angular del disco con respecto a O se conservará. Calculando el torque:

$$\sum \vec{\tau}_O = \cancel{\vec{r}_f \times \vec{f}} + \vec{r}_N \times \vec{N} + \vec{r}_P \times m\vec{g} = 0 \tag{8}$$

porque el roce $\vec{f}_r$ es paralelo a su posición, y además el torque que hace el peso viene dado sólo por su componente perpendicular a su posición, de modo que ese torque se anula con el que hace la normal. [1,0]

b) Sabiendo de a) que el momentum angular total del disco se conserva con respecto a O, el momentum angular inicial es simplemente:

$$L_i = -I_{cm}\omega_0 = -\frac{1}{2}MR^2\omega_0 \quad [1,0] \tag{9}$$

Por otro lado, el momentum angular en cualquier instante posterior tiene dos contribuciones, la del CM y la con respecto al CM. Llamando v a la velocidad del CM y $\dot{\theta}$ a la velocidad angular (medida horario), tenemos que

$$L = -Rmv - I_{cm}\dot{\theta} \quad [1,0] \tag{10}$$

Ahora en el instante en que empieza a rodar sin deslizar $\dot{\theta} = \omega_f$ y se cumple que $v = R\dot{\theta} = R\omega_f$ y entonces el momentum angular final es

$$L_f = -R^2 m\omega_f - I_{cm}\omega_f = -\frac{3}{2}MR^2\omega_f \quad [0,5] \tag{11}$$

Igualando $L_i = L_f$ encontramos

$$\omega_f = \frac{1}{3}\omega_0 \quad [0,5] \tag{12}$$

c) Para calcular el tiempo, basta considerar las ecuaciones de fuerza de Newton, por ejemplo, sabemos que para el CM se tiene que

$$f = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v_0 + \frac{f}{m}t = \frac{f}{m}t \quad [1,0] \tag{13}$$

pues $v_0 = 0$ (el CM parte del reposo). Entonces queremos saber en qué tiempo t la velocidad $\dot{x} = v$ es la que cumple rodar sin deslizar, es decir

$$v_f = R\omega_f \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{m}t = R\omega_f = R\frac{\omega_0}{3} \quad [0,5] \tag{14}$$

entonces como $f = \mu_k mg$

$$t = \frac{mR\omega_0}{3f} = \frac{mR\omega_0}{3\mu_k mg} = \frac{R\omega_0}{3\mu_k g} \quad [0,5] \tag{15}$$

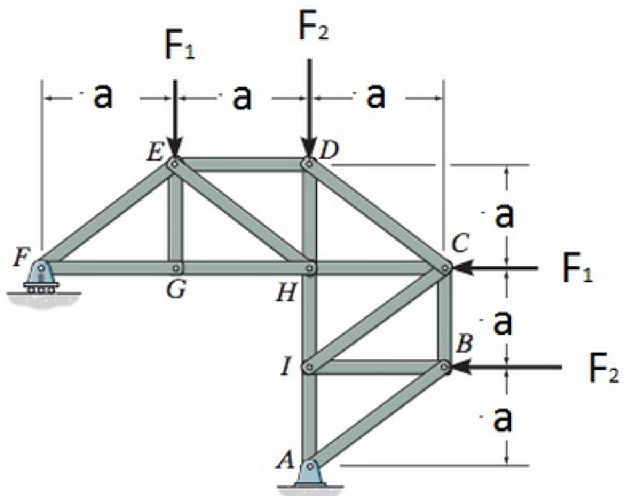
El mismo resultado se obtiene por cualquier otro método.

Pregunta 3) Para el reticulado de la figura, calcule:

a) Las reacciones externas en A y F.

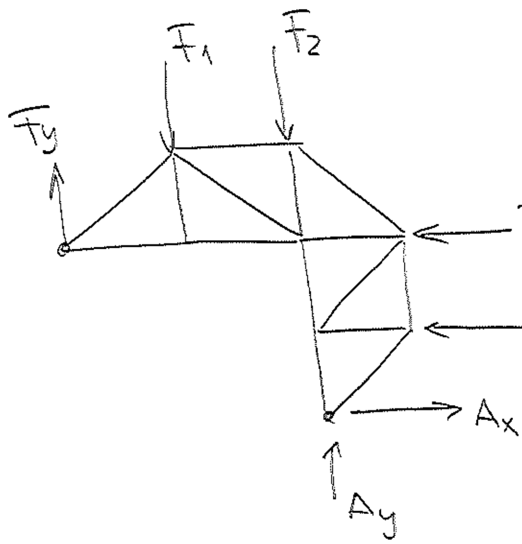
b) Las fuerzas en los miembros ED, EH, GH.

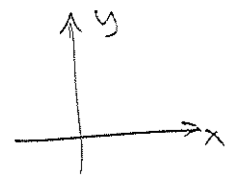
c) Indique claramente si estos miembros se hallan en tracción (tensión) o en compresión.



Solución

a)





$$\sum_i \vec{C}_A = \vec{0}.$$

$$2aF_1 + F_2 a + F_1 a = F_y 2a$$

$$\boxed{F_y = \frac{3F_1 + F_2}{2}}$$

0.5 pkt

$$\sum_i \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\boxed{A_x = F_1 + F_2}$$

0.5 pkt

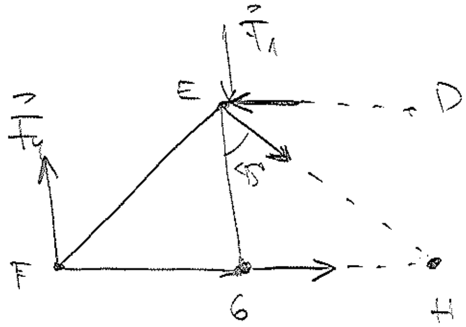
$$\sum_i \vec{F}_y = \vec{0}$$

$$F_y + A_y - F_1 - F_2 = 0$$

$$\boxed{A_y = F_1 + F_2 - \frac{3F_1}{2} - \frac{F_2}{2} = \frac{F_2 - F_1}{2}}$$

0.5 pkt.

b) . Aplico Método de las secciones



De $\vec{C}_E = \vec{0}$

$$F_y a - GH a = 0 \longrightarrow \boxed{GH = F_y}$$ (1 pto)

De $\vec{C}_H = \vec{0}$

$$F_y \cdot 2a - ED \cdot a - F_1 a = 0$$

$$ED = 2F_y - F_1 = 3F_1 + F_2 - F_1$$

$$\boxed{ED = 2F_1 - F_2}$$ (1 pto).

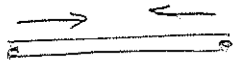
De $\sum \vec{F}_y = \vec{0}$

$$F_y - F_1 - EH \cos 45^\circ = 0$$

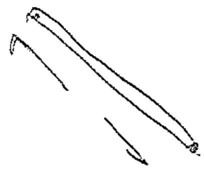
$$EH = \frac{F_y - F_1}{\cos 45^\circ} \qquad F_y - F_1 = \frac{3F_1}{2} + \frac{F_2}{2} - F_1 = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

$$\boxed{EH = (F_1 + F_2)/\sqrt{2}}$$ (1 pto)

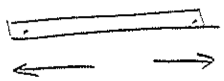
c)



ED bajo compresión



EH bajo tracción



GH bajo tracción