Clase #25

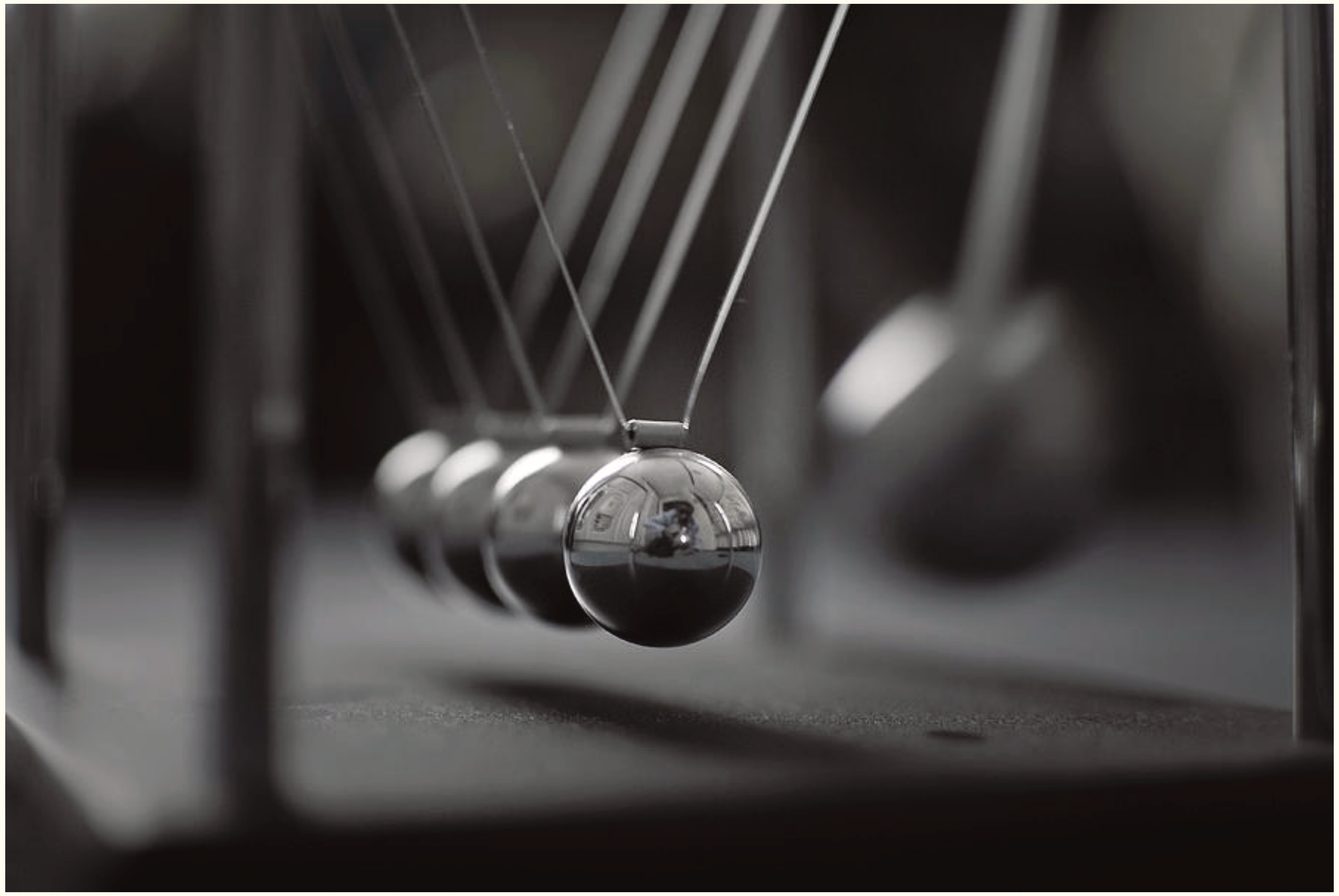
12-11-2018

Cuerpo Rígido

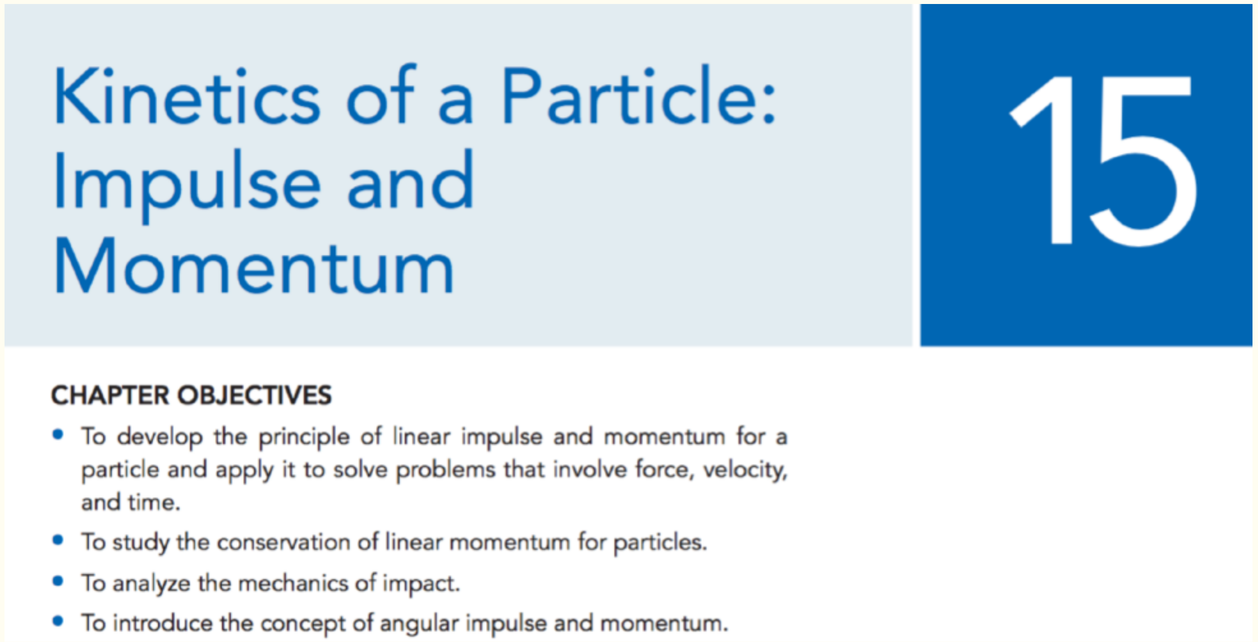
Estática y Dinámica FIS1513

Anuncios

- La pauta de la i3 está disponible en webcursos
- Las notas de la i3 van a tardar un poco más. ¡Lo lamento!
- Nos quedan 4 clases



Cuerpo Rígido: Momento Angular


Kinetics of a Particle: Impulse and Momentum

15

CHAPTER OBJECTIVES

- To develop the principle of linear impulse and momentum for a particle and apply it to solve problems that involve force, velocity, and time.
- To study the conservation of linear momentum for particles.
- To analyze the mechanics of impact.
- To introduce the concept of angular impulse and momentum.


Impulse and momentum principles are required to predict the motion of this golf ball.

Secciones 15.5-15.7 del Hibbeler y 10.5-10.7 del Young-Freedman

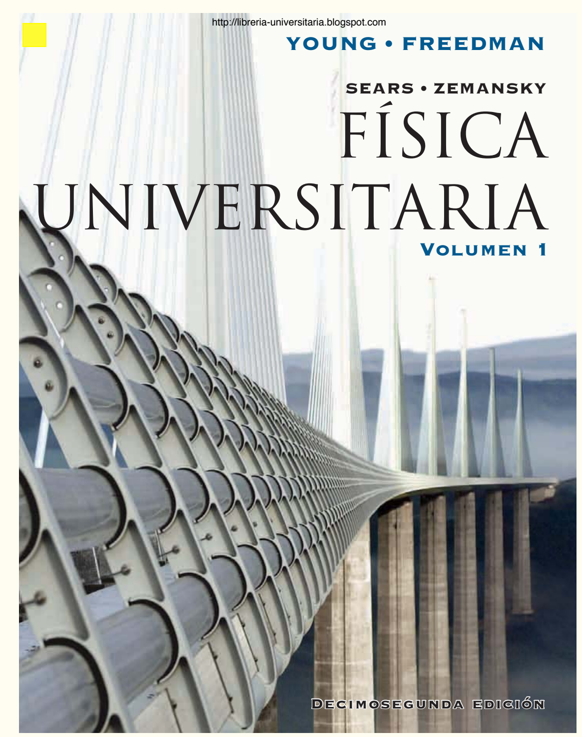

10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.

? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



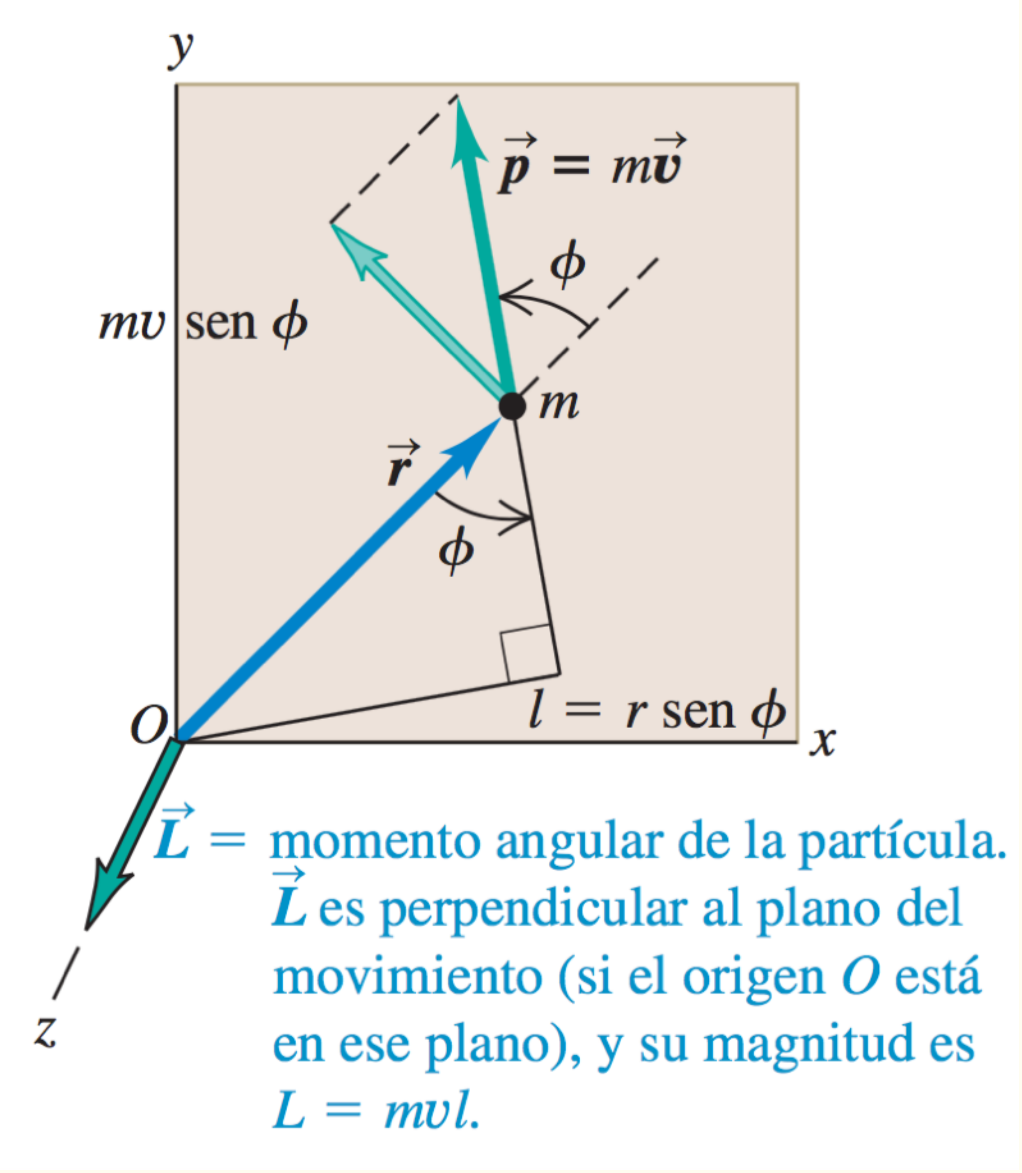
Momento Angular de una Partícula

Comencemos nuestra discusión de momento angular para una sola partícula.

Consideremos una partícula que se mueve con velocidad **v** y momento lineal **p**=m**v**, y cuyo vector de posición es **r** respecto a algún punto de referencia O.

El momento angular de esta partícula se define como:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$



Algunos comentarios sobre esta cantidad:

1) Es un vector

Su dirección es perpendicular al plano de la posición y del momento lineal

2) Tiene unidades de kg m²/s

Paralelo con Torque

La relación entre momento angular y momento lineal es la misma que entre torque y fuerza:

En ambos casos hay que tomar el producto cruz (que a veces se denomina “tomar el momento”)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Al torque se le llama **“momento de una fuerza”**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Al momento angular se le llama **“momento del momento”**

Así como la magnitud del torque es la magnitud de la fuerza por el brazo de palanca, lo mismo con el momento angular:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{p}\right| \sin\phi$$

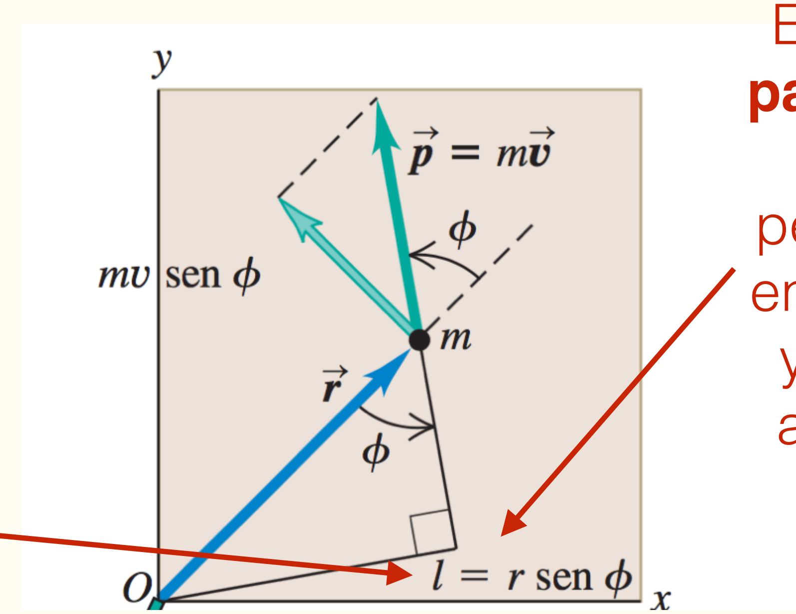
por lo que:

$$L = pl$$

magnitud de momento angular

magnitud de momento lineal

l=rsinϕ es el **“brazo de palanca”**



El **“brazo de palanca”** es la distancia perpendicular entre el origen y la línea de acción de la velocidad

¿Qué es y para qué sirve?

¿Qué es el momento angular (en palabras)?

Se puede ver como **la cantidad de movimiento <u>rotacional</u> de una partícula o un objeto**

¿Para qué sirve?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$= \cancelto{0}{(\vec{v} \times m\vec{v})} + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\vec{r} \times \sum \vec{F}\right) = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

Nota: para que esta relación funcione, el **L** y el **τ** tienen que estar calculados respecto al mismo punto (origen). La elección de este punto es arbitrario, pero debe ser el mismo para ambos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}$$

El momento angular es una **cantidad conservada** en ciertas situaciones (cuando la suma vectorial de los torques es cero)

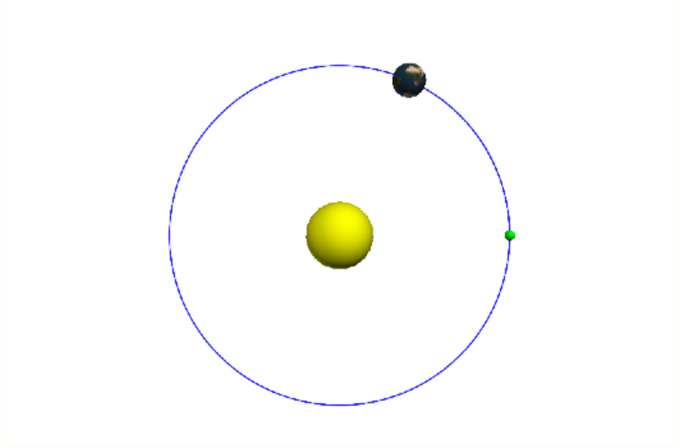
Entonces, una mejor definición para el momento angular es "**una cantidad que se conserva**" en ciertas situaciones

Algunas Preguntas Típicas (FAQ):

¡Creí que una partícula no podía rotar! ¿Cómo es que puede tener momento angular?

No tiene sentido decir que una partícula rota sobre su propio eje, ya que no tiene volumen…¡No hay nada que rote!

Pero una partícula si puede “orbitar” un cierto punto, y por eso puede tener momento angular

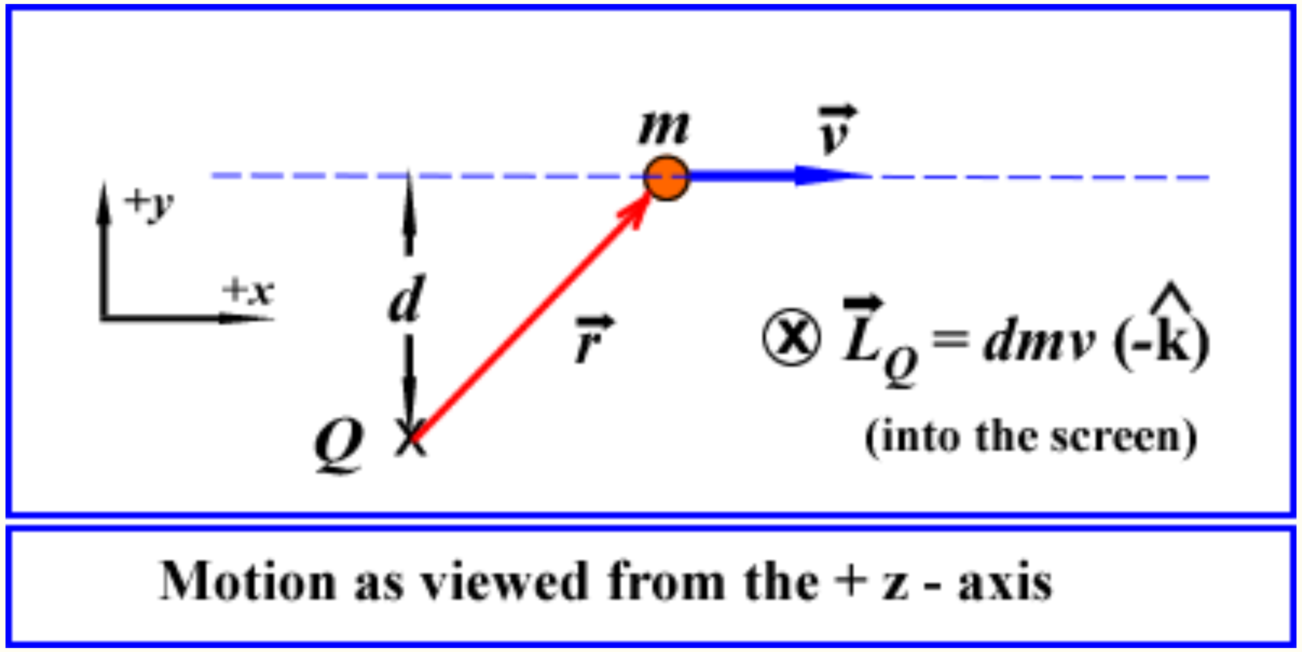


¿Entonces una partícula moviéndose en línea recta no tiene momento angular?

¡Sí tiene!

Es fácil ver que el “brazo de palanca” es una constante d, y que el momento angular es L=mvd

¡Una partícula no necesita estar moviéndose en un círculo para tener momento angular! (aunque es más fácil calcular el momento angular para una trayectoria círcular)



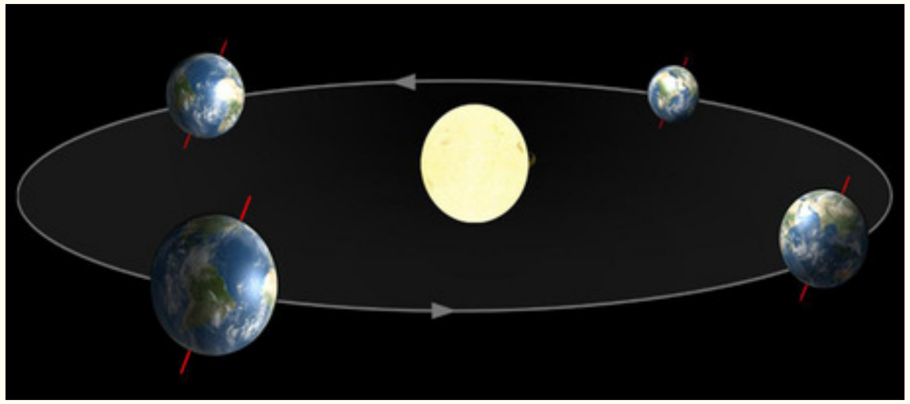
Algunas Preguntas Típicas (FAQ):

¿En qué es diferente entonces el momento angular del momento lineal?

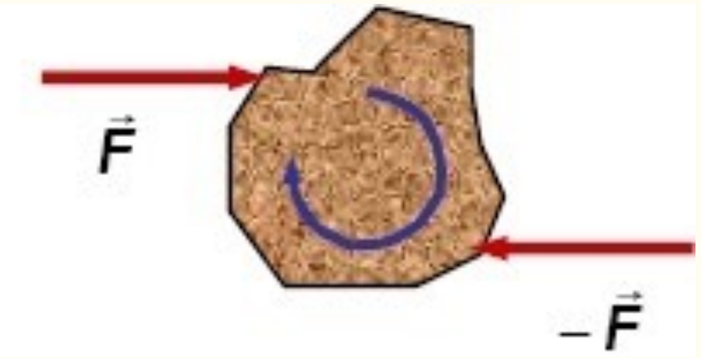
Son cantidades diferentes que se conservan en situaciones diferentes.

De hecho hay casos en que uno se conserva y no el otro

Ejemplos:



El momento angular de la tierra respecto al sol se conserva ya que la fuerza de gravedad no hace torque. El momento lineal de la tierra claramente no se conserva ya que la velocidad cambia de dirección



El momento lineal total del sistema es cero, ya que la suma vectorial de fuerzas es cero. Sin embargo, hay un torque neto, y por ende el momento angular no se conserva.

Momento Angular de un Cuerpo Rígido

Dijimos que el momento angular **L** de una partícula con momento lineal **p** está dado por:

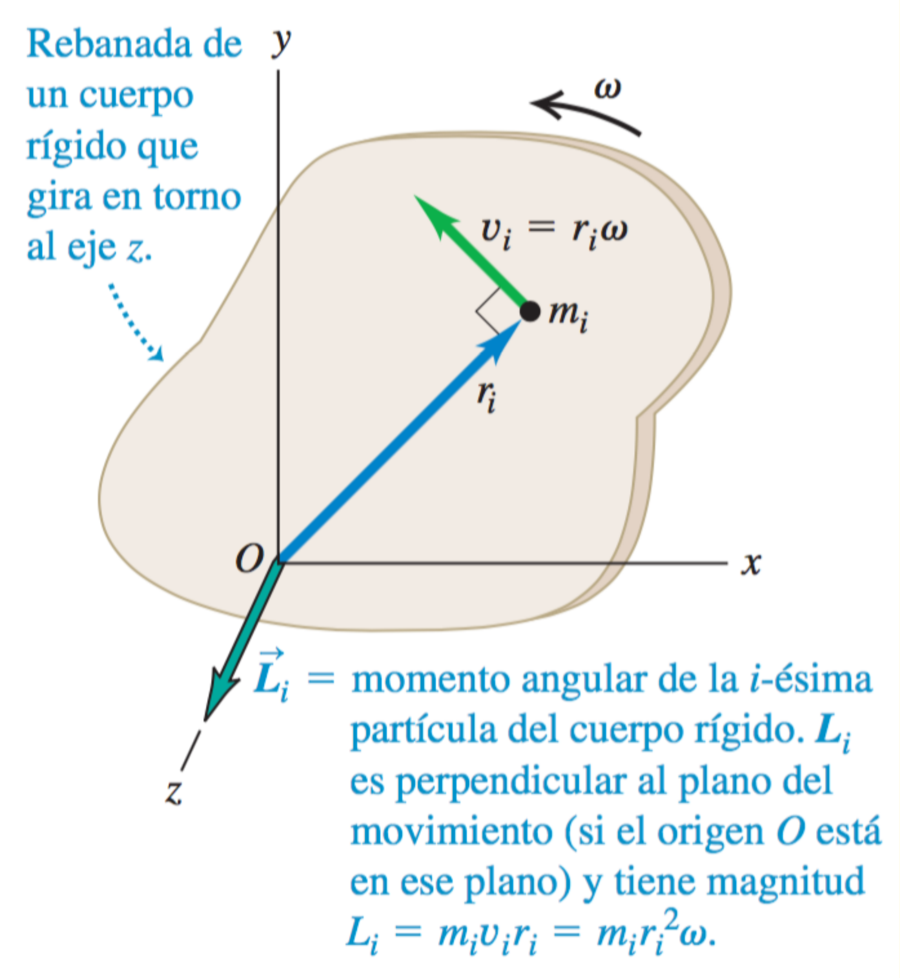
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

¿Pero cómo calculamos el momento angular de un cuerpo rígido que está rotando?

Hay que sumar las contribuciones de todas las partículas

$$L = \sum_{i=1..N} L_i$$

Consideremos un cuerpo rígido rotando con velocidad angular ω. Acomodamos el eje z de tal forma que coincida con el eje de rotación.



Momento Angular de un Cuerpo Rígido

Para una rebanada en el plano x-y, el momento angular de todas las partículas va en la dirección z, por lo que la suma de todos es:

$$L = \sum_{i=1..N} r_i (m v_i) = \sum_{i=1..N} m r_i^2 \omega$$

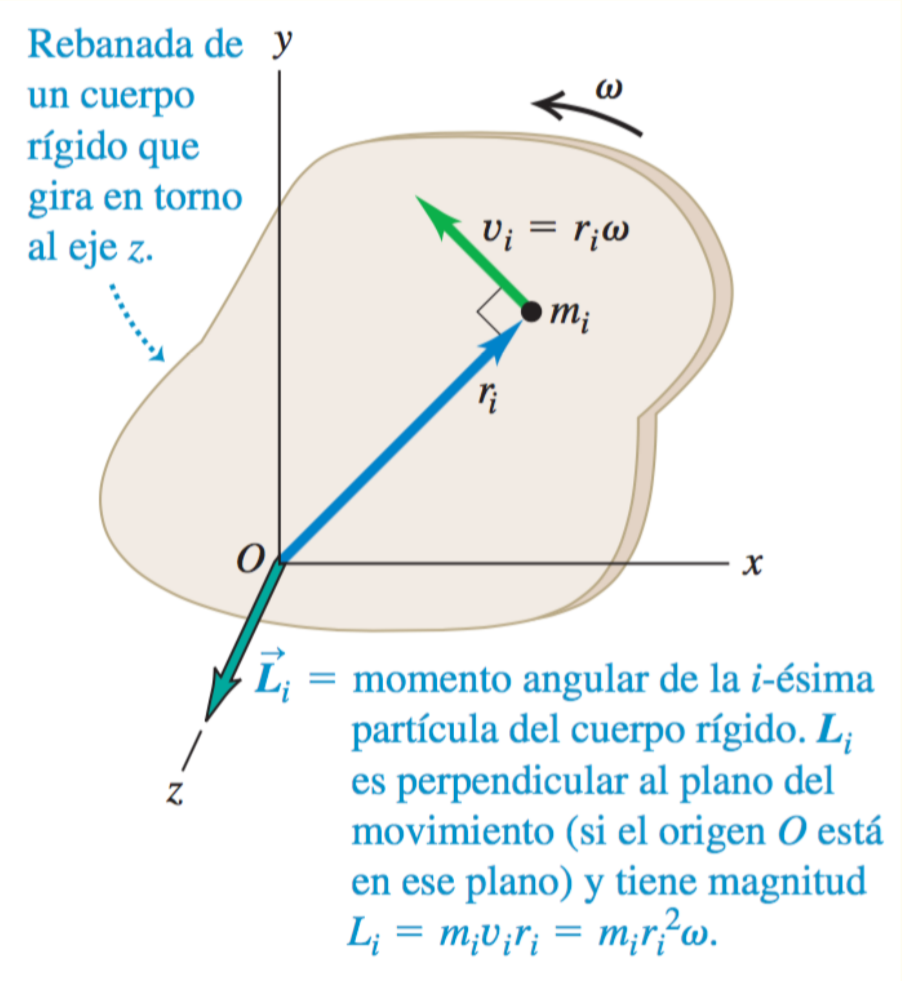
$$(\text{ya que } v_i = r_i \omega)$$

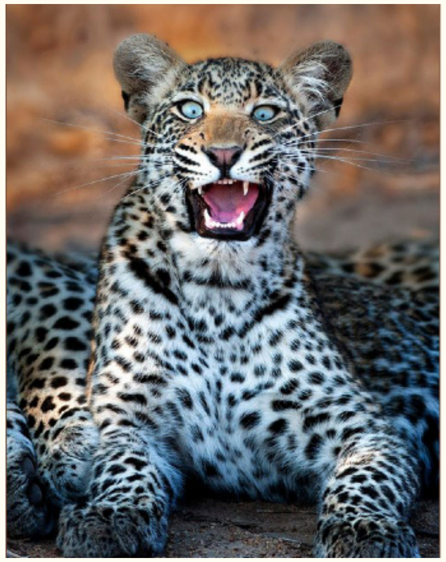
Pero esto no es nada más que:

$$L = \left(\sum_{i=1..N} m r_i^2 \right) \omega = I\omega$$

Si generalizamos a 3 dimensiones nos queda que, para un cuerpo rígido:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$



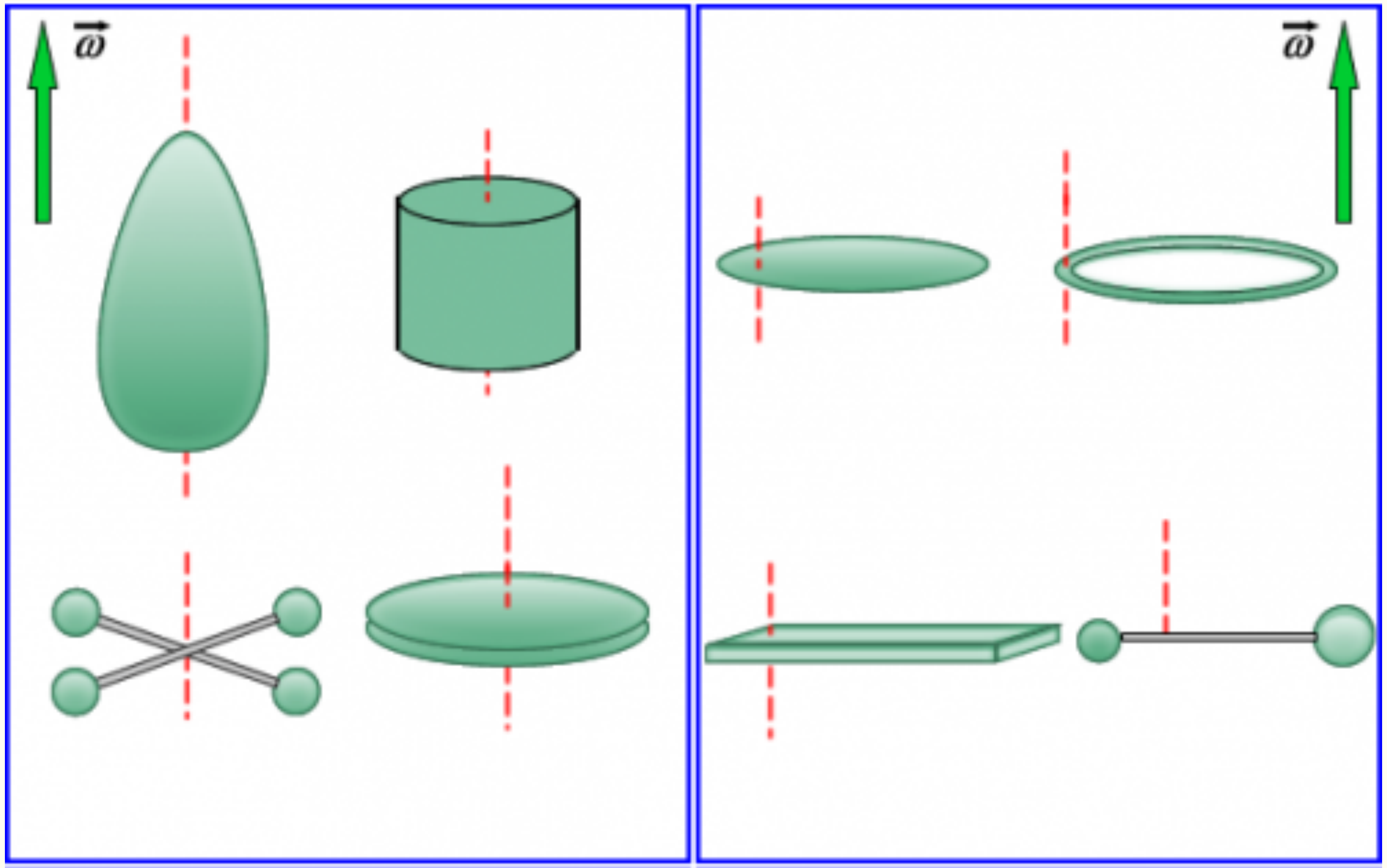


Comentario (Para Su Cultura General)

En realidad la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (así como $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$) sólo aplica a casos en donde se cumple una de las dos condiciones siguientes:

(1) Rotación respecto a un eje de simetría, o (2) rotación de objetos de dos dimensiones respecto a un eje perpendicular al plano en el que se encuentran

(de otra forma, el momento de inercia I no sería sólo un número sino una matriz o un tensor)



1. Symmetric objects rotating about an axis of symmetry

2. Planar objects rotating about an axis perpendicular to the plane on which they are contained.

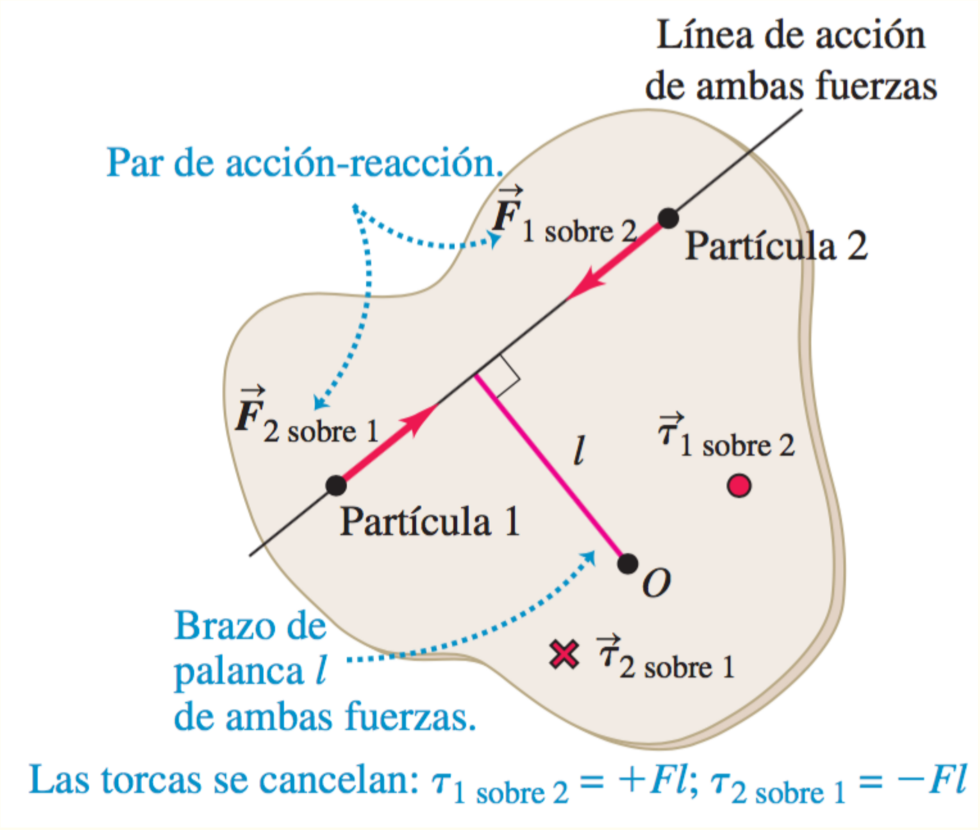
El libro Young & Freedman explica esto brevemente en la sección 10.5. **Sin embargo, en este curso siempre lidiaremos con casos en la categoría (1) o (2)**

http://farside.ph.utexas.edu/teaching/301/lectures/node119.html

Regresando a Momento Angular

Habíamos visto que para una partícula:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}$$



La pregunta es: **¿Esto se cumple también para un cuerpo rígido?**

¡Sí! El momento angular del cuerpo es la suma de los momentos angulares de todas las partículas.

Significa que la Στ resultante es la suma de todos los torques que actúan sobre todas las partículas. Pero, como ya vimos, en un sistema de muchas partículas, **los torques causados por las fuerzas internas** se cancelan (siempre y cuando estas fuerzas actúen sobre la línea que va de una partícula a otra, que es prácticamente todos los casos)

En resumen, **la ecuación es válida para un cuerpo rígido**, y en ese caso hay que preocuparse solamente por los torques externos

Resumiendo: Momento Angular y Torque

Para cualquier sistema de partículas se cumple que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

Si la suma vectorial de los torques externos que actúan sobre cualquier sistema de partículas es cero, el momento angular se conserva

$$\vec{L}_{\text{inicial}} = \vec{L}_{\text{final}}$$

Nota importante: para que esta relación funcione, el **L** y el **τ** tienen que estar calculados respecto al mismo punto (origen). La elección de este punto es arbitrario, pero debe ser el mismo para ambos

Experimento

Sobre el experimento: conservación de L

Un ejemplo típico de conservación de momento angular es lo que vimos en el experimento: una persona sobre un plato rotatorio con una velocidad angular inicial:

Si el plato rotatorio no tiene roce, el sistema plato + persona + mancuernas no tiene torques externos.

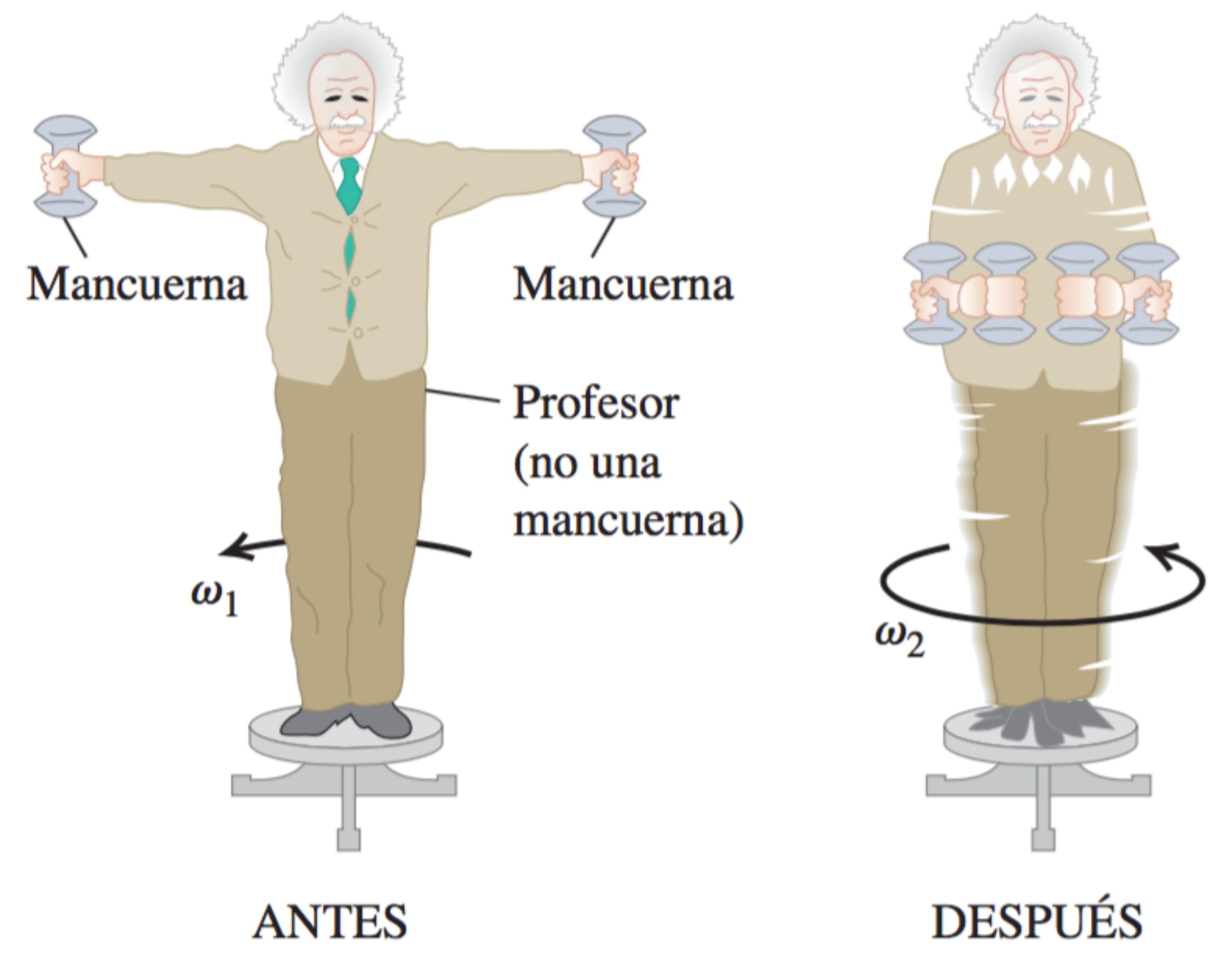
Por ende, el momento angular se debe conservar:

$$L_i = L_f$$

es decir:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Con las manos extendidas, el momento de inercia es mayor(es decir $I_i > I_f$). Por ende, $\omega_i < \omega_f$



Paralelo: Caso lineal vs. Caso angular

Momento Lineal:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Si la suma vectorial de fuerzas es cero, el momento lineal se conserva

Las partículas del sistema se pueden estar moviendo y pueden estar interactuando (chocar entre ellas, atraerse gravitacionalmente, … etc), pero no importa. Al final de cuentas el momento perdido por una partícula lo gana la otra, y así sucesivamente.

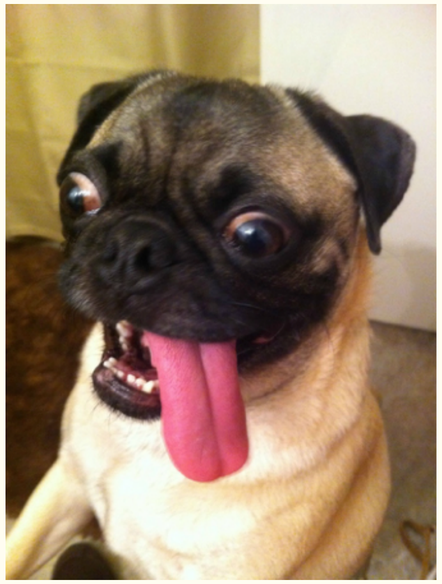
Momento Angular:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}$$

Si la suma vectorial de torques es cero, el momento angular se conserva

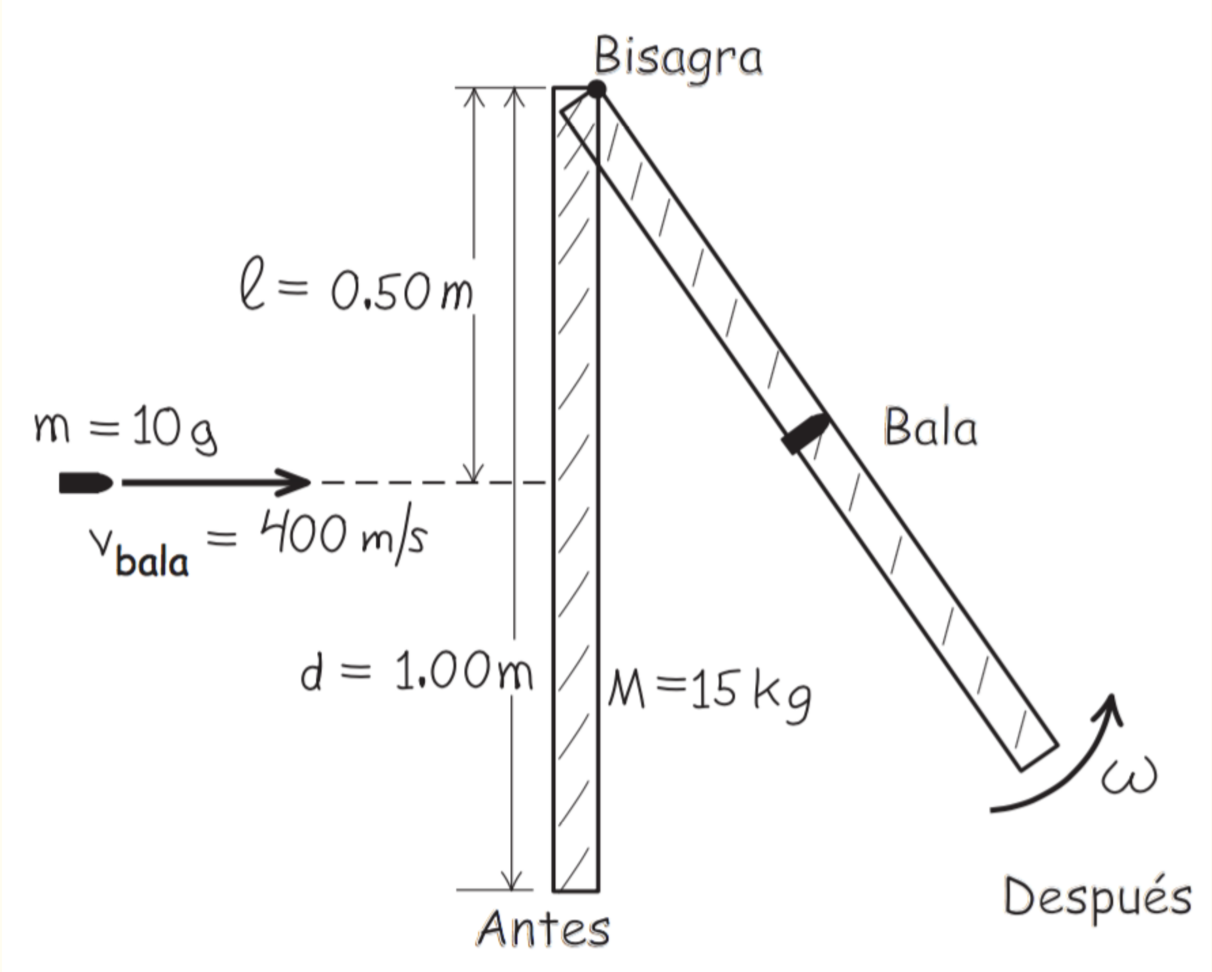
El sistema puede involucrar cuerpos rígidos y/o partículas rotando y golpeándose unos a otros, pero no importa. Si no hay torques externos, el momento angular total se conserva.



Ejemplo

(Young & Freedman 10.14)

Una puerta de 1.0m de ancho y 15kg de masa tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10g de masa con rapidez de 400m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular a su plano. Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta.



(resolver en pizarra; puede usar la tabla de momentos de inercia)

Respuesta: ω=0.40 rad/s

Comentarios importantes:

(i) La bisagra hace una fuerza sobre la puerta, por lo que el sistema bala + puerta no es aislado (no se conserva el momento lineal). Sin embargo, si consideramos el eje que pasa por la bisagra, no hay torques sobre el sistema bala + puerta, por lo que el momento angular sí se conserva.

(ii) El momento angular para el sistema bala + puerta sólo se conserva si se calcula respecto al eje que pasa por la bisagra. De otra forma esto no es el caso.

(iii) Como podría esperarse, la energía no se conserva. Sería fácil verificar esto, pero para ello hay que ver energía rotacional primero.

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido