PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Segundo Semestre 2017

Interrogación 03

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

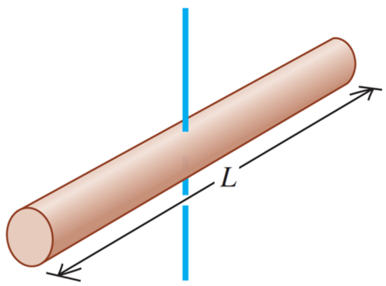
1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   Cometer fraude en la evaluación
   Adulterar el acta de asistencia
   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas
   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

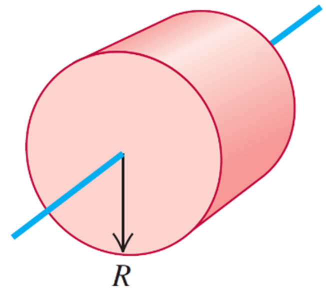
Varilla delgada,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



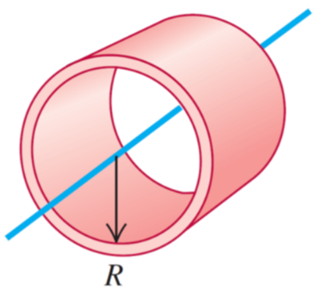
Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



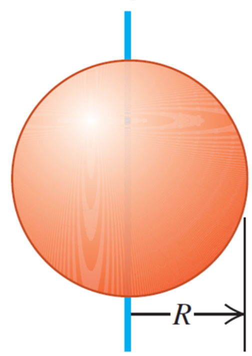
Cilindro hueco de
pared delgada

$$I = MR^2$$



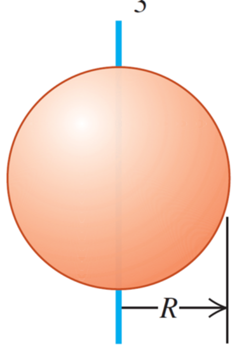
Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



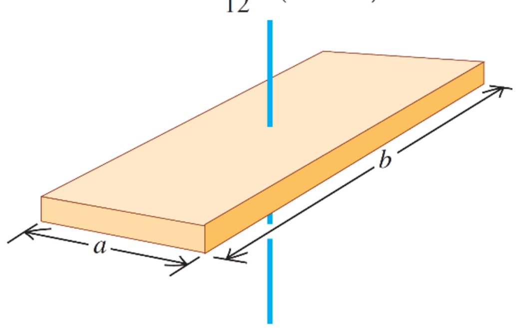
Esfera hueca de
pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



Placa rectangular,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



Problema 1 [1 punto]

Se tienen 3 barras que pueden girar respecto a un eje O–O' como muestra la Figura 1. La densidad de las barras es uniforme e igual a ρ. Determine la relación correcta respecto a los momentos de inercia (másicos) de las barras $I_{OO'}^{(1)}$, $I_{OO'}^{(2)}$, e $I_{OO'}^{(3)}$.

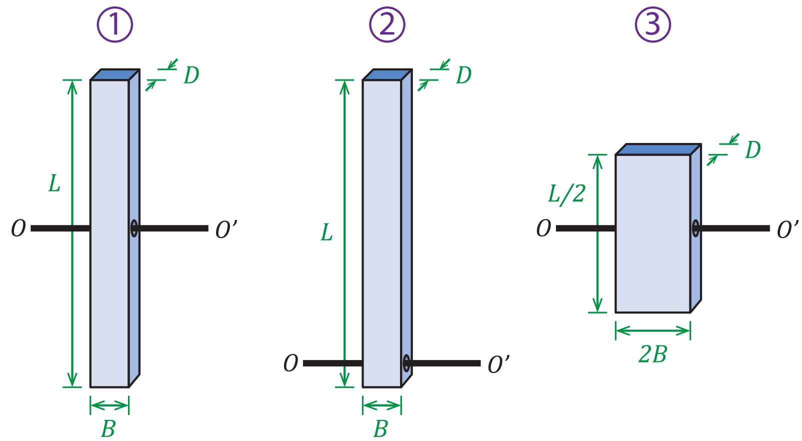


Figura 1: Tres barras que giran respecto a un eje O–O'.

a) $I_{OO'}^{(1)} < I_{OO'}^{(2)} < I_{OO'}^{(3)}$

b) $I_{OO'}^{(1)} < I_{OO'}^{(3)} < I_{OO'}^{(2)}$

c) $I_{OO'}^{(3)} < I_{OO'}^{(1)} < I_{OO'}^{(2)}$

d) $I_{OO'}^{(3)} < I_{OO'}^{(2)} < I_{OO'}^{(1)}$

e) $I_{OO'}^{(2)} < I_{OO'}^{(3)} < I_{OO'}^{(1)}$

Solución

La inercia del primer caso es cuando el cuerpo rota en torno a su centro de masa: $I_{OO'}^{(1)} = I_G$.

La inercia del segundo caso es $I_{OO'}^{(2)} = I_G + m\,d^2 = I_{OO'}^{(1)} + m\,d^2$, donde $m > 0$ y $d^2 > 0$ para cualquier d. Es decir; $I_{OO'}^{(2)} > I_{OO'}^{(1)}$.

El tercer caso tiene la misma masa que $I_{OO'}^{(1)}$, pero con un radio de rotación menor. Es decir; $I_{OO'}^{(3)} < I_{OO'}^{(1)}$.

El orden correcto es: $I_{OO'}^{(3)} < I_{OO'}^{(1)} < I_{OO'}^{(2)}$.

Problema 2 [1 punto]

Se tienen 3 partículas de distinta masa unidas rígidamente por barras de peso despreciable como muestra la Figura 2. El cuerpo (partículas–barras) se suspende de una cuerda en el punto C. La gravedad actúa en la dirección "$-y$", y es igual a $g = 10\,m/s^2$. Si el cuerpo se posiciona en la configuración que indica la Figura 2: determine el momento resultante (torque neto) en el punto C que hace al cuerpo rotar.
Nota: todas las dimensiones están en metros.

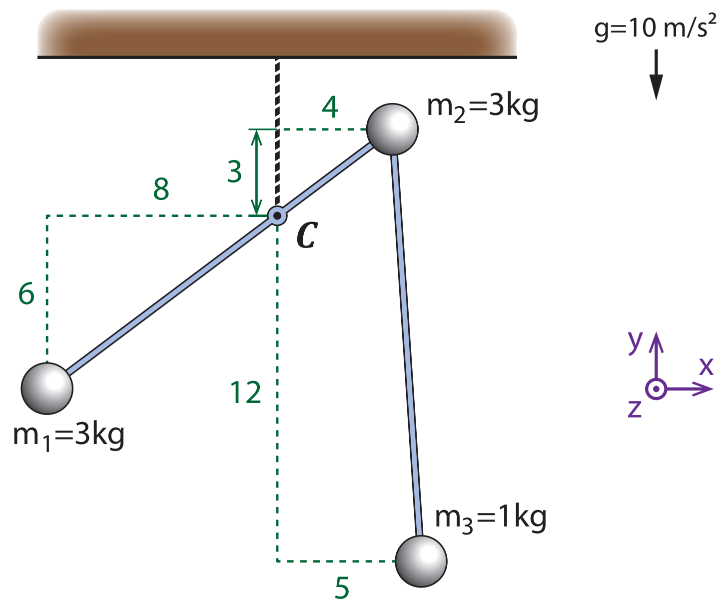


Figura 2: Cuerpo formado por 3 partículas y unido por barras rígidas de peso despreciable.

a) $\tau_z = -20\,N\cdot m$

b) $\tau_z = 20\,N\cdot m$

c) $\tau_z = -30\,N\cdot m$

d) $\tau_z = -70\,N\cdot m$

e) $\tau_z = 70\,N\cdot m$

Solución

Método 1: El momento resultante es igual a la suma de momentos de cada partícula:
$\tau_z = \sum \tau_i = \sum \pm f_i\, d_i = (3\cdot 10)\,(8) - (3\cdot 10)\,(4) - (1\cdot 10)\,(5) = 70\,N\cdot m$
Donde se hizo uso de la "regla de la mano derecha para los signos".

Método 2: La masa total del cuerpo es: $m = \sum m_i = 7\,kg$. La coordenada x del centro de masa es:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i\, m_i}{\sum m_i} = \frac{(-8)\,(3) + (4)\,(3) + (5)\,(1)}{7} = -1\,m$$

Es decir, la masa neta del sistema $m = 7\,kg$ actúa en $\overline{x} = -1\,m$. Con ello $\tau_z = (7\cdot 10)\,(1) = 70\,N\cdot m$, donde se hizo uso de la "regla de la mano derecha para el signo".

Problema 3 [1 punto]

Un gimnasta se desmonta desde la barra horizontal realizando un mortal hacia atrás, como se muestra en la Figura 3. Inmediatamente después de soltarse de la barra (instante A), el gimnasta se encuentra totalmente estirado y se puede modelar como una barra de masa M y largo L. Luego, pasa a la posición ovillada (instante B), y se asemeja entonces a una barra de masa M y largo $L/2$.
Nota: No faltan datos en el problema.

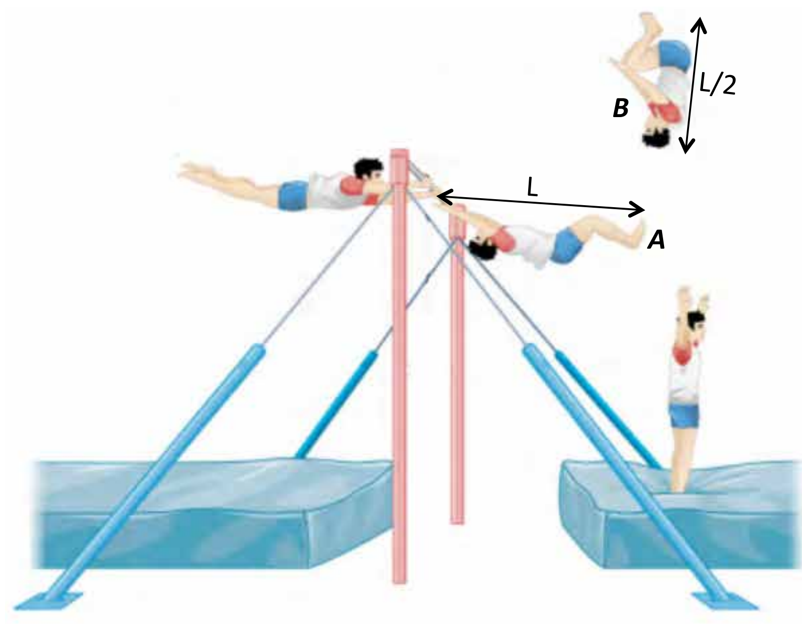


Figura 3: Gimnasta

Si inmediatamente después de soltarse de la barra (posición A), el gimnasta rota con velocidad angular ω_A=3 rad/s en torno a su CM; ¿Cuál será su velocidad de rotación en la posición B?

a) 1.5 rad/s

b) 3 rad/s

c) 6 rad/s

d) 9 rad/s

e) 12 rad/s

Solución

Una vez que el gimnasta se suelta de la barra, la única fuerza que actúa sobre él es el peso, que se aplica en el CM. Por lo tanto, no hay torque respecto al CM, y se conserva entonces el momento angular en torno a este punto. Es decir,

$$L_{CM} = I_{CM}^{A}\omega_A = I_{CM}^{B}\omega_B$$

En el instante A, el gimnasta se modela como una barra de largo L y masa M, por lo tanto su momento de inercia respecto al CM es:

$$I_{CM}^{A} = \frac{ML^2}{12}$$

Y en el instante B, se asemeja a una barra de largo $L/2$ y masa M, por lo tanto:

$$I_{CM}^{B} = \frac{M}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Aplicando conservación de momento angular, obtenemos:

$$\frac{ML^2}{12}\omega_A = \frac{M}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega_B$$

Por lo tanto,

$$\omega_B = 4\omega_B = 12\text{rad/s}$$

Problema 4 [1 punto]

Un auto de carreras del tipo “dragster” funciona en base a la eyección a alta velocidad de gases de combustión de nitrometano. Si el auto tiene inicialmente una masa M, de la cual el 50 % corresponde a combustible, y parte desde el reposo, ¿con qué rapidez relativa al auto deben expulsarse los gases de combustión para alcanzar velocidad máxima de 500 km/h?

Figura 4: Auto de carreras

a) $|v_{\mathrm{rel}}| = 250$ km/h

b) $|v_{\mathrm{rel}}| = 100$ km/h

c) $|v_{\mathrm{rel}}| = 500/\ln(2)$ km/h

d) $|v_{\mathrm{rel}}| = 500\sqrt{2}$ km/h

e) $|v_{\mathrm{rel}}| = 500 \cdot \ln(2)$ km/h

Solución

La velocidad del auto está dada por:

$$v(t) = v_0 - u \ln\left(\frac{M - ct}{M}\right)$$

, donde M es la masa inicial, c la tasa de eyección en kg/s. La velocidad máxima se alcanza cuando $ct = m_{combustible}$, y en este caso $m_{combustible} = M/2$. Además el auto parte del reposo, por lo tanto $v_0 = 0$. Por lo tanto, la velocidad máxima queda:

$$v_{max} = -u \ln\left(\frac{M - M/2}{M}\right) = -u \ln(1/2) = u \ln(2)$$

Si $v_{max} = 500$ km/h, entonces para u obtenemos:

$$u = \frac{v_{max}}{\ln(2)} = \frac{500}{\ln(2)}$$

Problema 5 [1 punto]

Una persona con mochila cae verticalmente desde una altura $h = 2000m$ y debería caer en el suelo sobre un punto P, pero después de 10 segundos la persona arroja su mochila de masa $m = 20kg$ hacia el lado horizontalmente. Si al caer al suelo (que es horizontal), la persona se encuentra a $10m$ del punto P y la mochila a $30m$ del punto P; determine la masa de la persona. Asuma $g = 10m/s^2$ y desprecie el roce con el aire.

Nota: Por favor no salte nunca sin un paracaídas.

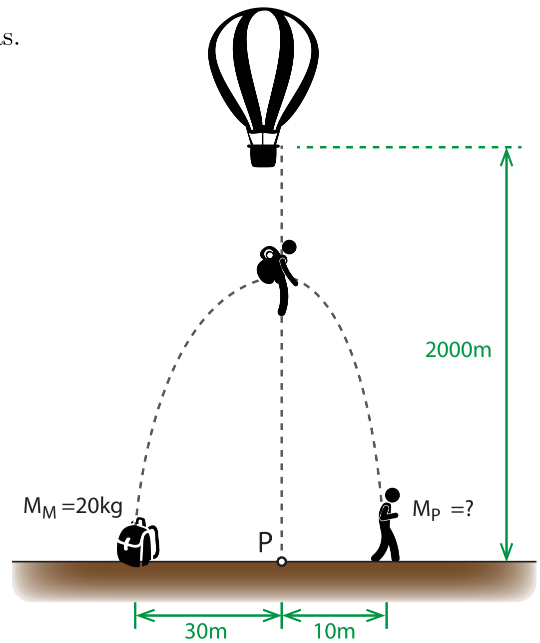
a) $20kg$

b) $40kg$

c) $60kg$

d) $80kg$

e) $120kg$



Solución

Este problema es muy sencillo, pero tiende a confundir por el exceso de datos que entrega!!!

Método 1: Si pensamos que el CM se conserva en la vertical durante todo el tiempo entonces $D_P M_P = D_M M_M$ y resolver $M_P = \frac{20 \cdot 30}{10} = 60kg$.

Método 2: En la caida libre el tiempo en llegar al suelo es:

$$h = 0{,}5gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20s$$

Después de caer por $10s$ se separa y le quedan otros $10s$ más de caída. En la separación, la persona toma una velocidad horizontal V_P, y la mochila una velocidad horizontal V_M; ambas en la misma dirección, pero sentido opuesto por conservación de momentum lineal. Consideremos que la velocidad de la persona tiene signo negativo y la de la mochila positiva. Entonces la distancia horizontal que recorren la persona y la mochila en $t = 10s$ es:

$$D_P = -V_P * t = -10V_P = 10 \quad ; \quad V_P = -1m/s$$
$$D_M = V_M * t = 10V_M = 30 \quad ; \quad V_M = 3m/s$$

Si consideramos que el CM del sistema persona y mochila está en el origen, y si no se hubiesen separado caen en el punto P, entonces por conservación de momentum lineal:

$$\begin{aligned} P_i &= P_f \\ 0 &= M_P V_P + M_M + V_M \\ M_P &= -\frac{M_M V_M}{V_H} = -\frac{20 \cdot 3}{-1} = 60kg \end{aligned}$$

Problema 6 [1 punto]

Una bola uniforme rueda sin deslizar hacia una pendiente con velocidad inicial de su centro de masa v_0, como muestra la Figura 5. ¿En qué situación la bola llega más alto por la pendiente?

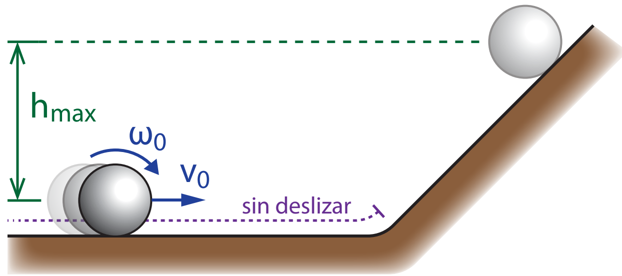


Figura 5: Bola que rueda cerro arriba.

a) Cuando hay suficiente fricción (roce) entre el plano y la bola para que no ocurra deslizamiento a medida que la bola sube.

b) Cuando no hay roce entre el plano inclinado y la bola.

c) La bola llega a la misma altura altura independientemente de la fricción (roce).

d) La altura a la que llega la bola es una función de μ y el ángulo de la pendiente α (una relación entre ambos).

e) Existe un valor óptimo de μ que permite a la bola alcanzar su máxima altura.

Solución

La energía cinética inicial es:

$$T_1 = \frac{1}{2} m \left(v_0\right)^2 + \frac{1}{2} I_G \left(\omega_0\right)^2$$

, donde ω_0 es función de v_0 y del radio de la bola.

Si la bola sube sin deslizar, entonces en el punto más alto $v_f = 0$ y $\omega_f = 0$, con lo que $T_2 = 0$ y luego:

$$T_1 = mgh_{(1)} \qquad \rightarrow \qquad h_{(1)} = \frac{T_1}{mg}$$

Si la bola sube deslizando todo el camino ($\mu = 0$ implica $f_r = 0$, y con ello $U_{\text{roce}} = 0$), entonces la bola llega a la altura máxima girando con ω_0:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_G \left(\omega_0\right)^2 + mgh_{(2)} \qquad \rightarrow \qquad h_{(2)} = \frac{T_1 - 0{,}5 I_G \left(\omega_0\right)^2}{mg} = h_{(1)} - \left[\frac{0{,}5 I_G \left(\omega_0\right)^2}{mg}\right]$$

Si la bola sube deslizando parcialmente, entonces la fuerza de roce hará trabajo $U'_{12} = -U_{\text{roce}} = -f_r \cdot s$, y la velocidad angular será menor a la inicial (i.e. $\omega_f < \omega_0$):

$$T_1 + U'_{12} = \frac{1}{2} I_G \left(\omega_f\right)^2 + mgh_{(3)} \qquad \rightarrow \qquad h_{(3)} = h_{(1)} - \left[\frac{0{,}5 I_G \left(\omega_f\right)^2 - U_{\text{roce}}}{mg}\right]$$

Cuando la bola sube sin deslizar alcanza su altura máxima ya que $h_{(1)} > h_{(2)}$ y $h_{(1)} > h_{(3)}$.

Problema 7 [1 punto]

El automóvil de masa m se encuentra inicialmente en el lado derecho de una barcaza de masa M, como se muestra en la Figura 6. Ambos se encuentran en reposo con respecto al agua. Inicialmente la distancia de separación entre el muelle y la barcaza es cero. El auto se desplaza en la barcaza hacia la izquierda a una rapidez constante de V_0, medida con respecto a la barcaza.

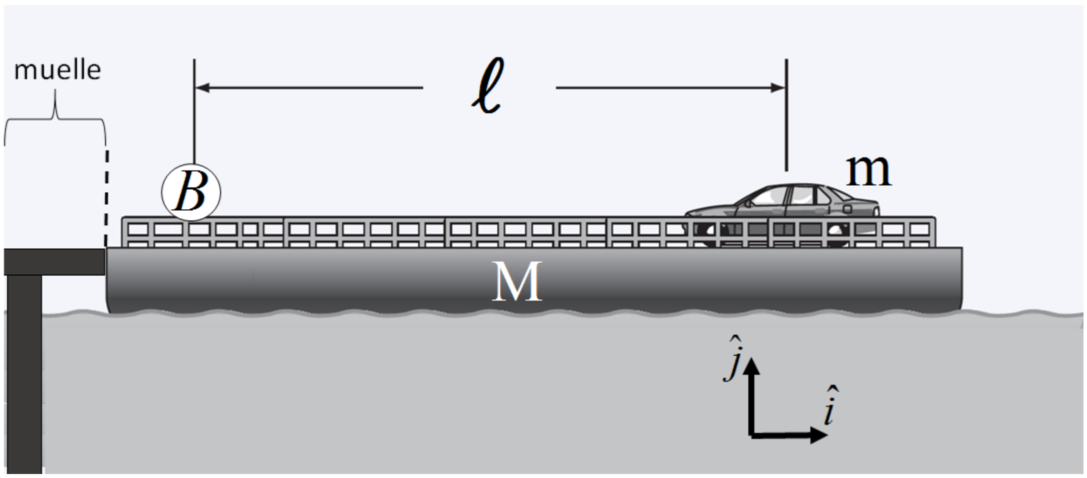


Figura 6: Automóvil en la barcaza

Determine la distancia de separación X_f entre el muelle y la barcaza cuando el automóvil llegue al punto B. Ignore la resistencia del agua.

a) $X_f = \ell \frac{m}{m+M}$

b) $X_f = \ell \frac{M}{m+M}$

c) $X_f = \ell \frac{m}{M}$

d) $X_f = \ell \frac{M}{m}$

e) $X_f = \ell \left(1 + \frac{m}{M}\right)$

Solución

No hay acción de fuerzas externas en el sistema luego el centro de masa de sistema *auto-barcaza* se conserva. La barcaza es un objeto rígido por consiguiente es suficiente con calcular el desplazamiento del centro de masa de esta. Para ello suponemos que inicialmente la posición de la barcaza se encuentra en el origen de un sistema coordenado, i.e. $X_0 = 0$. Si suponemos que la posición inicial del auto es X_A, entonces la posicion final será $X_A + X_f - \ell$, donde X_f es la posición final del centro de masa de la barcaza.

Igualando el centro de masa antes y después del desplazamiento, obtenemos:

$$0 \times M + X_A m = (X_A + X_f - \ell)m + X_f M.$$

Finalmente vemos que:

$$X_f = \frac{m}{m+M}\ell.$$

Problema 8 [1 punto]

La Figura 7 muestra una lámina delgada cortada en forma de T. La lámina tiene un espesor (grosor) uniforme con una densidad de masa de ρ.

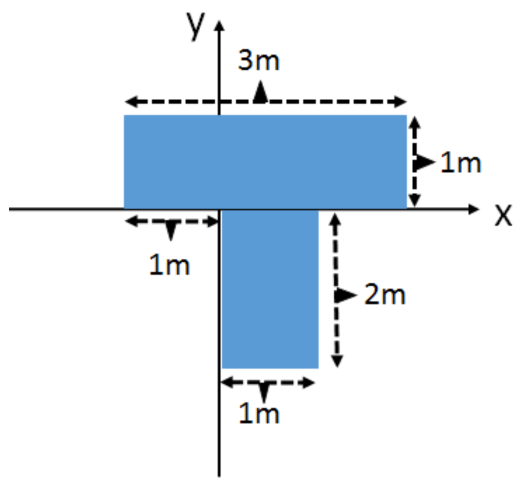


Figura 7: Lámina en forma de T

Despreciando el espesor (grosor) de la lámina, el centro de masa de la lámina respecto al origen del sistema coordenado en la figura es:

a) $(1/2, -1/4)$

b) $(1/2, -1/10)$

c) $(1/2, -2/5)$

d) $(2/5, -1/5)$

e) $(1/2, 0)$

Solución

Podemos considerar dos regiones: a) $y > 0$ y b) $y < 0$.
La masa está distribuida uniformemente, luego basta con calcular el centro geométrico de cada parte.
Para la región $y > 0$, $X_{CM}^{(a)} = (1/2, 1/2)$ y para $y < 0$, $X_{CM}^{(b)} = (1/2, 1)$.
Ambas partes tienen diferente área, por tanto calculamos la masa de cada una de ellas:

$$M_a = 3 \times 1 \times \rho = 3\rho$$
$$M_b = 1 \times 2 \times \rho = 2\rho$$

Finalmente, el centro de masa de todo el sistema está localizado en:

$$X_{CM} = \frac{M_a X_{CM}^{(a)} + M_b X_{CM}^{(b)}}{M_a + M_b}$$
$$X_{CM} = \frac{3\,(1/2, 1/2) + 2\,(1/2, -1)}{3+2} = (1/2, -1/10)$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Segundo Semestre 2017

Nombre: ____

RUT: ____ N lista: __________

Interrogación 03
Preguntas de desarrollo

Duración: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   Cometer fraude en la evaluación
   Adulterar el acta de asistencia
   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas
   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas específicas a las preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.

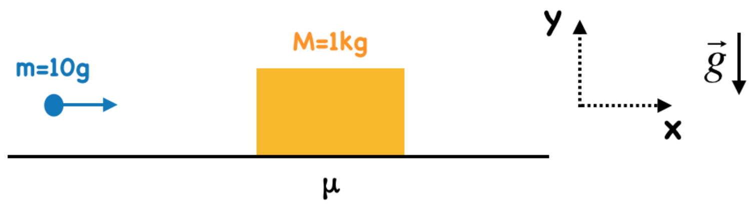
Nombre: ____________________

RUT: ____________________

N lista: ________

Problema 1 [6 puntos]

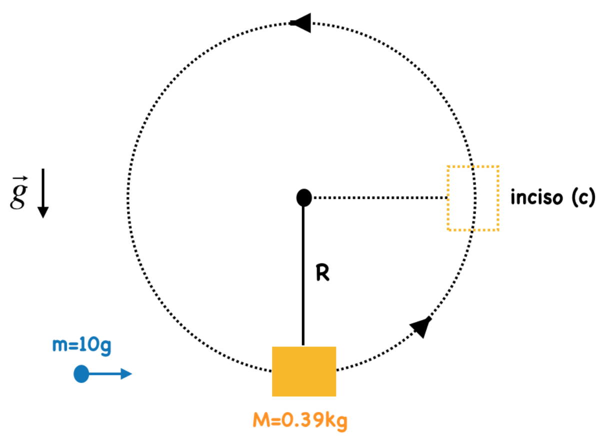
Se dispara una pequeña esfera metálica de masa 10 g con una velocidad de 70 m/s en la dirección $+\hat{x}$, como mostrado en la figura. La esfera se impacta con un bloque de madera de masa 1 kg que inicialmente está en reposo sobre una superficie rugosa. Como resultado de la colisión, la esfera metálica rebota con una velocidad de 10 m/s en la dirección $-\hat{x}$ y el bloque avanza 8 cm hacia la derecha antes de detenerse.



a) Determine el coeficiente de roce cinético μ entre el bloque de madera y la superficie rugosa.

b) Determine el coeficiente de restitución para la colisión entre la esfera metálica y el bloque de madera. Puede dejarlo en términos de una fracción numérica que no necesita evaluar.

Ahora se dispara otra esfera metálica de masa 10 g sobre otro bloque de madera de masa 0.39 kg en reposo que pende de un gancho fijo a través de una cuerda sin masa y de longitud $R = 0.5$ m. Esta vez la esfera queda incrustada en la madera después de la colisión.



c) Determine la velocidad mínima que debe tener la esfera metálica para que el bloque de madera viaje en una trayectoria circular y complete un cuarto de una vuelta (es decir que logre subir hasta una altura de R respecto a su altura inicial, como mostrado en la figura).

d) Determine la velocidad mínima que debe tener la esfera metálica para que el bloque de madera viaje en una trayectoria circular y complete una vuelta entera, pasando por el mismo punto de partida.

Nota: Puede despreciar las dimensiones del bloque de madera. Asuma que la magnitud de la aceleración de la gravedad es $g = 10$ m/s^2. Cuando sea necesario, puede dejar sus resultados en términos de raíces no evaluadas.

Pauta:

(a) Como no hay fuerzas externas en la dirección $\hat{x}$, podemos aplicar conservación de momento lineal en esta dimensión para obtener la velocidad del bloque de madera inmediatamente después de la colisión:

$$\begin{aligned} P_{x1} &= P_{x2} \\ m_b v_{b1} + m_m v_{m1} &= m_b v_{b2} + m_m v_{m2} \end{aligned}$$

(0.5 si plantea bien conservacion de momento)

$$\begin{aligned} 0{,}01(70) + 1(0) &= 0{,}01(-10) + 1(v_{m2}) \\ \rightarrow v_{m2} = 0{,}01(70) &+ 0{,}01(10) = 0{,}8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(0,5 por valor correcto)

Ahora aplicamos conservación de energía al movimiento del bloque entre el instante inmediatamente después de la colisiión y cuando llega al reposo. Tenemos que:

$$\begin{aligned} W_{\text{neto}} &= \Delta K \\ -N\mu d &= \cancelto{0}{K_2} - K_1 \end{aligned}$$ (0,5 si plantea bien conservacion de energia)

donde notamos que el trabajo que hace la fuerza de roce es negativo ya que se opone a la dirección del movimiento. Puesto que $N = m_b g$, nos queda que:

$$\begin{aligned} -m_b g \mu d &= -\frac{1}{2} m_b v_{m2}^2 \\ \rightarrow \mu = \frac{v_{m2}^2}{2gd} &= \frac{0{,}8^2}{2(10)(0{,}08)} = 0{,}4 \end{aligned}$$

(0,5 por valor correcto; si error en valor se debe a error previo en v_{m2}, asignar todo el puntaje si el procedimiento está bien)

(b) Calculamos el coeficiente de restitución e como:

$$\begin{aligned} e &= \frac{v_{b2} - v_{m2}}{v_{m1} - v_{b1}} \\ &= \frac{-10 - 0{,}8}{0 - 70} \\ &= \frac{10{,}8}{70} \end{aligned}$$

(1,0 por resultado correcto; 0,5 si está bien planteado pero hay error de cálculo o arrastre; 0,5 si signo está incorrecto)

(c) El sistema compuesto por el bloque de madera más la bala se comporta como un péndulo. No hay fuerzas no conservativas que hagan trabajo, por lo que la energía mecánica se conserva después de la colisión. Si el instante 2 es inmediatamente después de la colisión, y el instante 3 cuando el péndulo alcanza su altura máxima de R, tenemos que:

$$\begin{aligned} K_2 + \cancelto{0}{U_2} &= \cancelto{0}{K_3} + U_3 \\ \frac{1}{2} m v_2^2 &= mg(R) \end{aligned}$$

(0,5 si plantea bien conservación de energía)

donde m es la masa del bloque de madera más la bala. Concluimos que la velocidad justo después de la colisión debe ser $v_2 = \sqrt{2gR}$ (0,25 por llegar a expresión correcta de v_2).

Ahora aplicamos conservación de momento lineal al mismo sistema. Si el instante 1 es justo antes de la colisión, puesto que no hay fuerzas externas en la dirección x sobre este sistema nos queda que:

$$m_b v_{b1} + m_m \cancelto{0}{v_{m1}} = m v_2$$

(0,5 si plantea bien conservación de momento)

Concluimos que:

$$\begin{aligned} \rightarrow v_{b1} &= \frac{(0{,}01 + 0{,}39)}{0{,}01}\sqrt{2(10)(0{,}5)} \\ &= 40\sqrt{10} \text{ m/s} \end{aligned}$$

(0,25 por valor correcto)

(d) Para que el péndulo complete una vuelta completa es necesario que llegue al punto más alto (de altura $2R$) con una velocidad diferente de 0, o de otra forma caería. Esta velocidad mínima se obtiene igualando la expresión para la fuerza centrípeta al mínimo que esta fuerza puede tomar en ese punto, que es el peso:

$$m\frac{v_3^2}{R} = mg$$

por lo que requerimos que $v_3 = \sqrt{Rg}$ (0.5 si llega a la expresión correcta de v_3). Haciendo el balance de energía tenemos que:

$$\begin{aligned} K_2 + \cancelto{0}{U_2} &= K_3 + U_3 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 &= \frac{1}{2}mv_3^2 + mg(2R) \\ v_2^2 &= gR + 2mg(2R) \\ v_2 &= \sqrt{5gR} \end{aligned}$$

(0.5 si llega a expresión correcta de v_2; si asumió que v_3=0 entonces no asignar puntaje)

Haciendo el balance de momento lineal de la misma forma que en inciso anterior, llegamos a:

$$\begin{aligned} m_b v_{b1} + m_m \cancelto{0}{v_{m1}} &= m v_2 \\ v_{b1} &= \frac{(0{,}01 + 0{,}39)}{0{,}01}\sqrt{5(10)(0{,}5)} \\ v_{b1} &= 200 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(0.5 si llega a valor correcto de v_{b1}; si asumió que v_3=0 entonces no asignar puntaje)

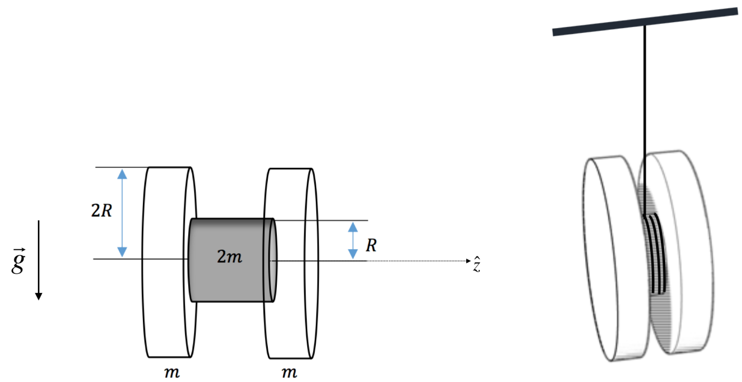
Nombre: ______________________

RUT: ______________________

N lista: ________

Problema 2 [6 puntos]

Una cuerda sin masa está enrollada en un carrete (yo-yo) formado por un cilindro sólido y dos discos con las dimensiones y masas indicadas en la figura.



a) Encuentre el momento de inercia I_{CM} del carrete en relación al eje $\hat{z}$ que pasa por su centro de masa en función de m y R.

Para los incisos b)-d), considere I_{CM} como dato, y exprese sus resultados en función de R, m, g e I_{CM} (y h cuando corresponda).

b) Realice el diagrama de fuerzas y calcule la tensión en la cuerda mientras el carrete baja (cuerda desenrollándose).

c) Considerando que el carrete parte del reposo, encuentre la magnitud y dirección de la aceleración del centro de masa, así como su velocidad cuando ha descendido una altura h.

d) Ahora asuma que el carrete sube (cuerda enrollándose). Repita el desarrollo de los incisos anteriores y determine la tensión en la cuerda, así como la magnitud y dirección de la aceleración del centro de masa del carrete.

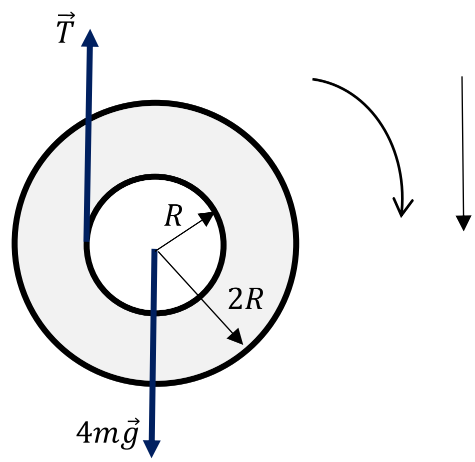
Resp/

a) (**1 pto**) El momento de inercia de la carretilla es la suma de los momentos de inercia de los discos y el cilindro
(0.4) por escribir correctamente el momento de inercia del disco y (0.4) por el del cilindro.
(0.2) por escribir la respuesta final

$$I_{CM} = 2I_{disco} + I_{cilindro} = 2 \times \frac{m(2R)^2}{2} + \frac{(2m)R^2}{2} = 4mR^2 + mR^2 = 5mR^2$$

b) (**2 ptos**)

(0.2) por el diagrama



Ecuaciones:

Tomando el sentido del movimiento natural

Traslación: (0.6 ptos)

Cuerpo M eje x $$-T + 4mg = 4ma_{CM} \quad (1)$$

Rotación: (0.6 ptos)

Midiendo el torque en relación al centro de masa de la carretilla, y tomando el sentido de rotación a favor de las manecillas del reloj,

$$TR = I_{CM}\alpha \qquad (2)$$

Ecuación de ligadura (0.2)

$$\Delta Y_{CM} = \Delta S_M = R\Delta\theta$$

Derivando dos veces,

$$a_{CM} = \alpha R \qquad (3)$$

Álgebra: (0.4) (Si hay error de arrastre y el álgebra está correcta asignar el puntaje)

De (1) y (2)

$$-\frac{T}{4m} + g = a_{CM}$$

$$\frac{T}{I_{CM}/R^2} = R\alpha$$

Y substrayendo,

$$-\frac{T}{4m} + g - \frac{T}{I_{CM}/R^2} = 0$$

De donde,

$$T = \frac{4mg}{1 + \frac{4mR^2}{I_{CM}}}$$

(Hasta aquí tiene puntaje completo)

Tb pueden escribir la respuesta tomando el momento de inercia calculado en a)

$$T = \frac{4mg}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{20}{9}mg$$

---

c) (**1 pto**)

De las ecuaciones de la cinemática,

$$V_{CM} = \sqrt{2a_{CM}h}$$

(0.5) por escribir esta ecuación

De (1)

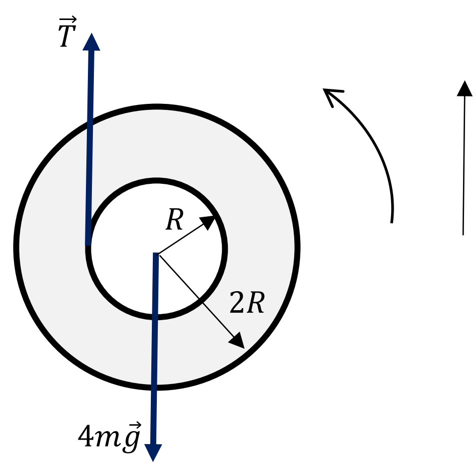
$$a_{CM} = -\frac{g}{1 + \frac{4mR^2}{I_{CM}}} + g$$

$$a_{CM} = g\left(\frac{\frac{4mR^2}{I_{CM}}}{1 + \frac{4mR^2}{I_{CM}}}\right) = g\left(\frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{4mR^2}}\right)$$

(0.5) por este resultado

d) (**2 ptos**)

Tomemos el sentido mostrado en la figura



Ecuaciones:

Tomando el sentido mostrado en la figura

Traslación: (0.6 ptos)

Cuerpo M eje x $\qquad T - 4mg = 4ma_{CM} \qquad (1)$

Rotación: (0.6 ptos)

Midiendo el torque en relación al centro de masa de la carretilla, y tomando el sentido de rotación mostrado, (**Notar que aquí el torque es negativo**)

$$-TR = I_{CM}\alpha \qquad (2)$$

Ecuación de ligadura (0.2)

$$\Delta Y_{CM} = \Delta S_M = R\Delta\theta$$

Derivando dos veces,

$$a_{CM} = \alpha R \qquad (3)$$

Álgebra: (0.4) (Si hay error de arrastre y el álgebra está correcta asignar el puntaje)

De (1) y (2)

$$\frac{T}{4m} - g = a_{CM}$$

$$-\frac{T}{I_{CM}/R^2} = R\alpha$$

Y substrayendo,

$$\frac{T}{4m} - g + \frac{T}{I_{CM}/R^2} = 0$$

De donde,

$$T = \frac{4mg}{1 + \frac{4mR^2}{I_{CM}}}$$

Se obtiene el mismo resultado.

Para la aceleración en cambio de (1);

$$a_{CM} = \frac{T}{4m} - g$$

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{4mR^2}{I_{CM}}} - g = -g\left(\frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{4mR^2}}\right)$$

Se obtiene el mismo resultado que el inciso anterior pero como esperado con signo cambiado.