



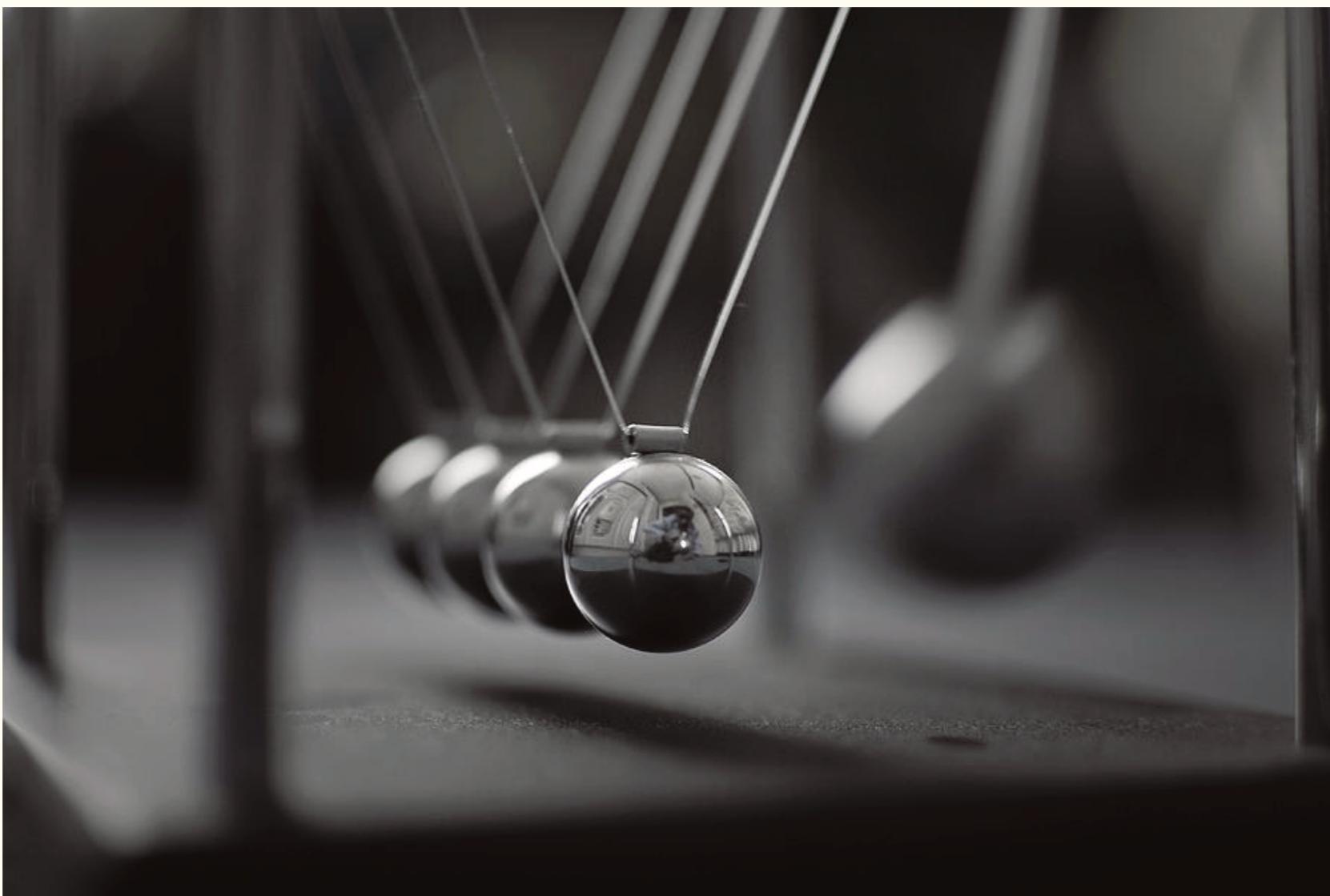
Clase #24
07-11-2018
Cuerpo Rígido

Estática y Dinámica

FIS1513

Anuncios

- No hay anuncios....



Cuerpo Rígido: Cinemática Rotacional, Torque y Momento de inercia

Para toda esta parte es mejor el Young & Freedman, Capítulos 9-10.

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

9



METAS DE APRENDIZAJE
Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un

PREGUNTA: Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

10

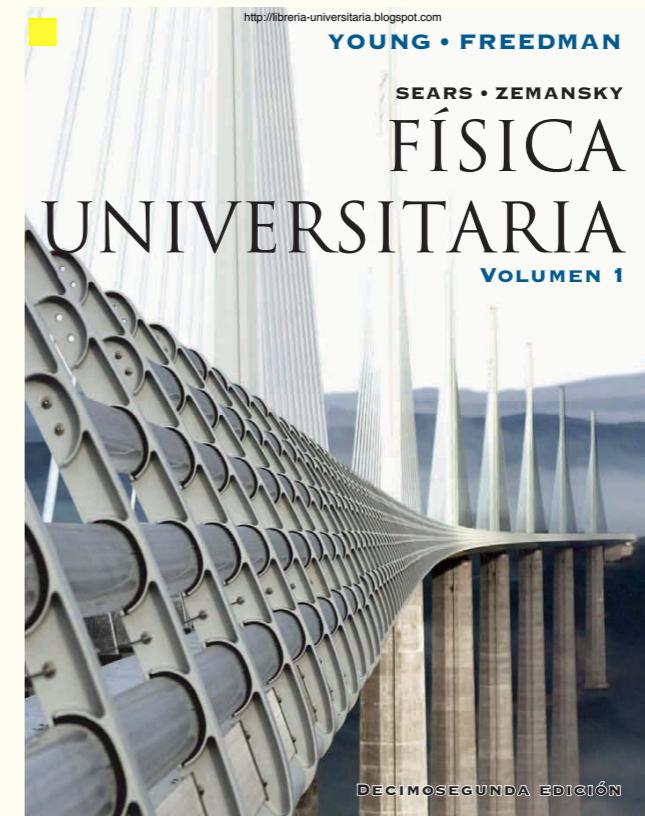
DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.

PREGUNTA: Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



Especificamente:

Cinemática Rotacional: 9.1-9.2
Momento de Inercia: 9.4-9.6
Torque: 10.1 (y/o Hibbeler 4.1-4.3)

¿Qué es el momento de inercia?

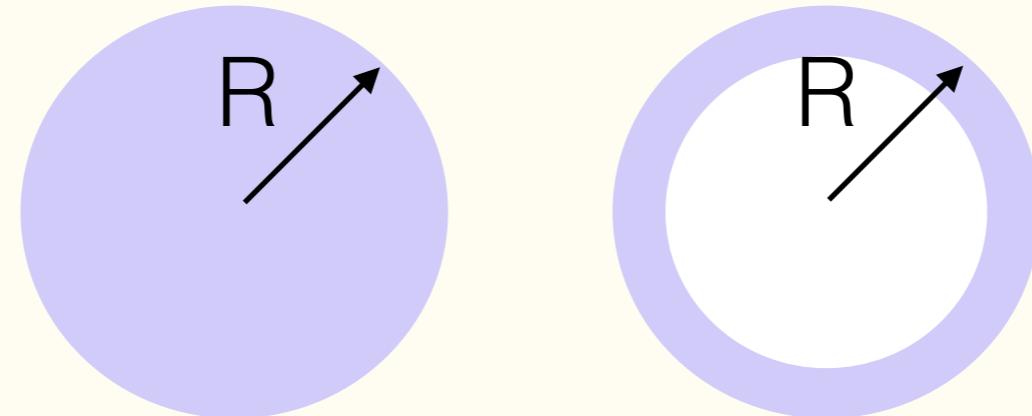
Ya definimos el momento de inercia matemáticamente, pero ¿qué es en palabras?

A mayor momento de inercia,
mayor torque se necesita
para causar una cierta
aceleración angular

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I \vec{\alpha}$$

El momento de inercia se puede ver como la resistencia a la rotación. En otras palabras, es la inercia rotacional.

Por ejemplo:



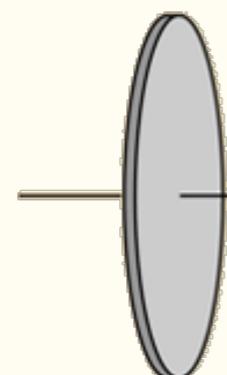
Si este disco y anillo tienen la misma masa, se requerirá mayor torque para poner a rotar el anillo respecto a su centro ya que la masa está concentrada a mayor radio (es decir el anillo tiene mayor momento de inercia)

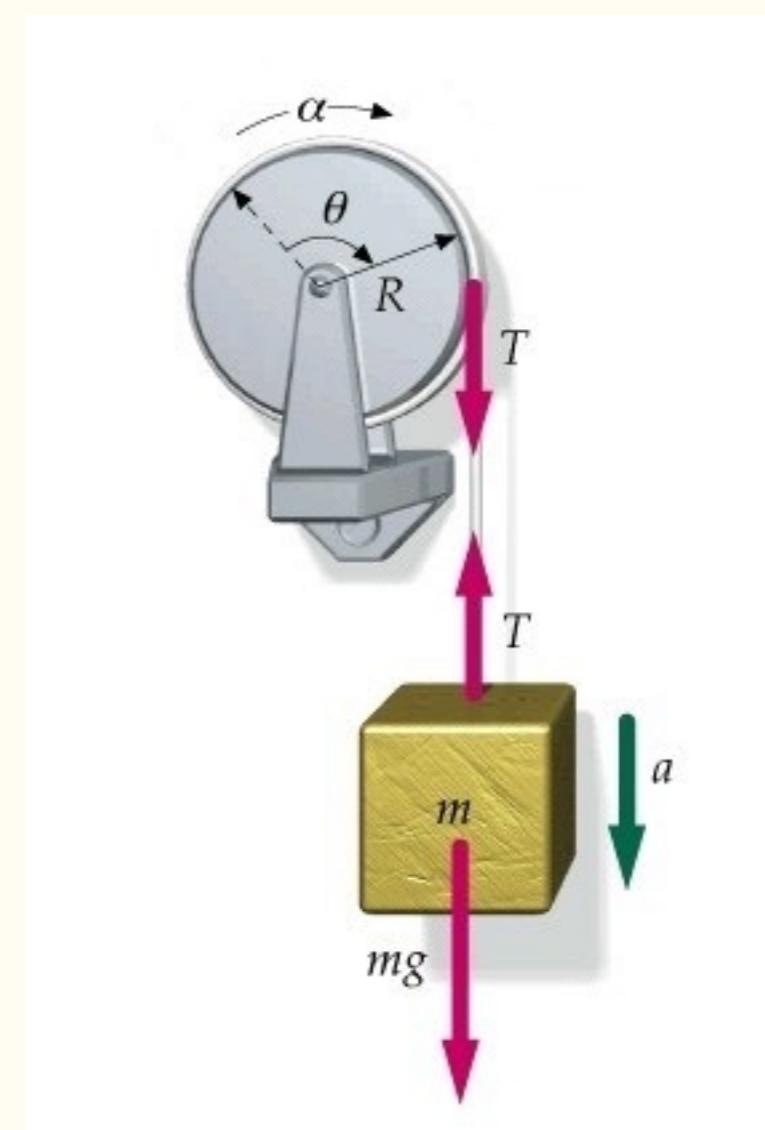
Ejemplo: Torque y Aceleración

(No en libros)

Un objeto de masa m está unido mediante una cuerda a una polea homogénea de masa M y radio R . La cuerda no resbala sobre la polea y ésta gira sobre su eje sin roce. Encuentre la tensión de la cuerda y la aceleración de la masa

Resolver en pizarra; puede utilizar la siguiente información extraída de una tabla:


$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$



Respuestas: $T = \frac{mM}{2m+M}g$ y $a = \frac{2m}{2m+M}g$

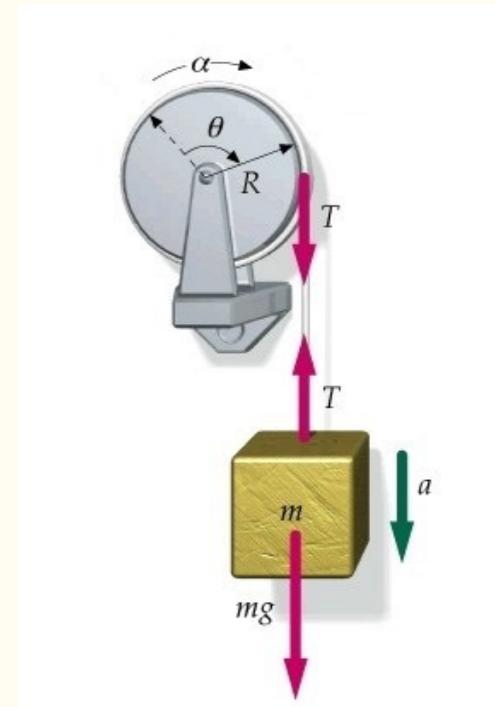
(Nota: si la polea fuera ideal entonces el bloque caería con la aceleración de la gravedad. Pero como no es ideal, tiene una resistencia a la rotación que hace que la aceleración de la masa sea menor).

Rodamiento sin Deslizamiento

En el problema que terminamos vimos que la condición para que la cuerda no resbale respecto a la polea es que la velocidad tangencial de la polea y la velocidad de la cuerda sean iguales:

Condición para rodamiento sin deslizamiento

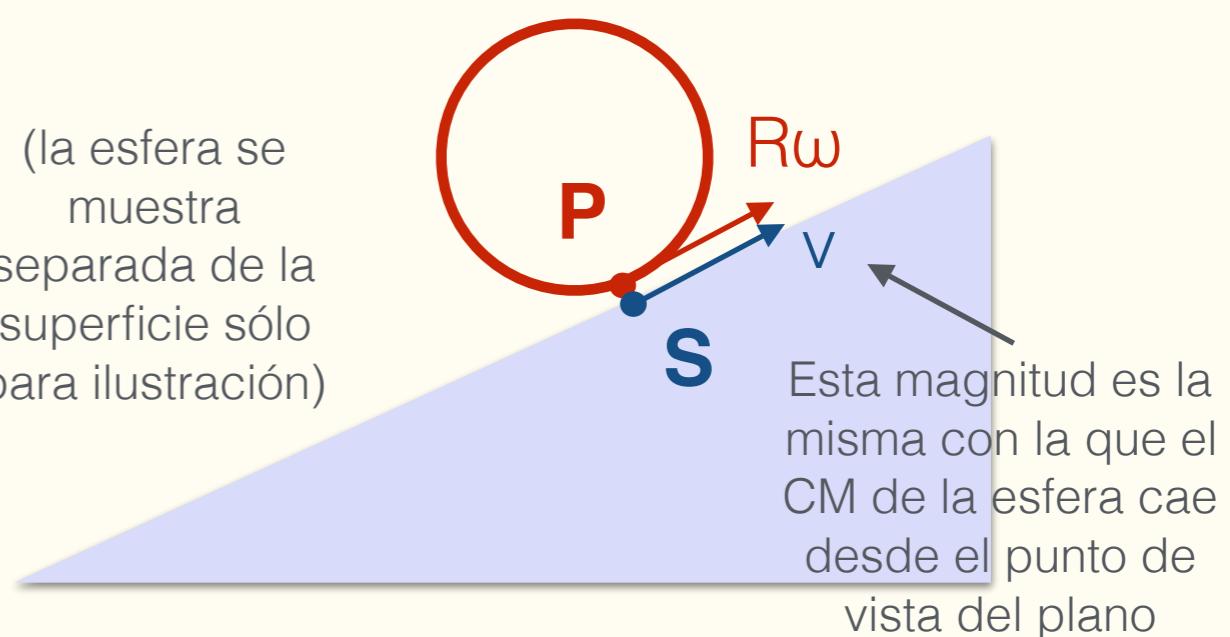
$$v = R\omega \quad (\text{o también } a = R\alpha)$$



Esta condición aplica también a muchos otros casos, como una esfera o un cilindro rodando por un plano inclinado:

Visto desde el punto de vista del eje de rotación, si no hay deslizamiento entonces en cada instante el punto **P** en contacto con la superficie debe tener la misma velocidad que el punto **S** en la superficie

(la esfera se muestra separada de la superficie sólo para ilustración)



Esta magnitud es la misma con la que el CM de la esfera cae desde el punto de vista del plano

¿Cómo se calcula el momento de inercia?

¿Cómo se calcula el momento de inercia entonces?

La definición de momento de inercia es:

$$I = \sum_{i=1..N} m_i r_i^2$$

m_i =masa de la partícula i

r_i =distancia al eje de rotación de la partícula i

Por lo que el momento de inercia de una sola partícula es simplemente mr^2 .

Si tenemos un cuerpo compuesto por N partículas, hay que sumar los momentos de inercia de todas las partículas.

Ejemplo: momento de inercia

(No en libros)

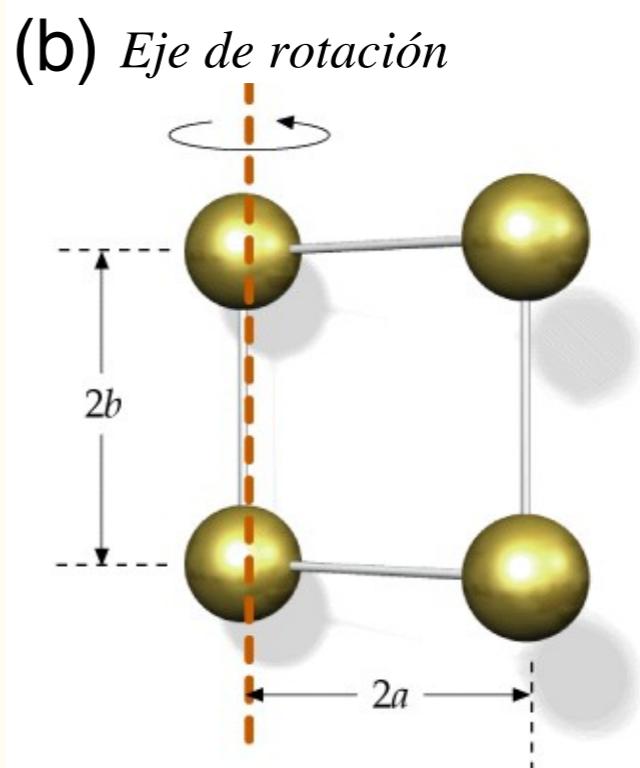
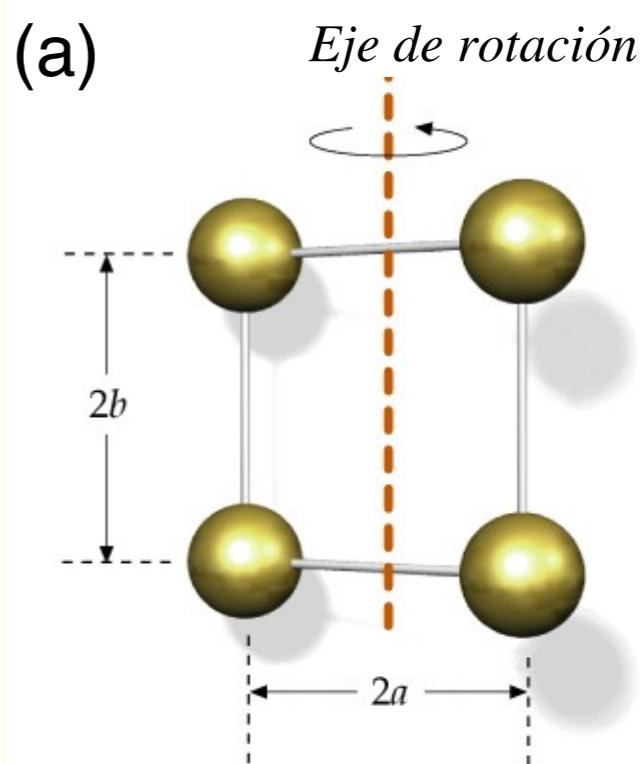
Considere el sistema formado por 4 partículas de masa m unidas por barras sin masa, formando un rectángulo de lados $2a$ y $2b$.

Determine el momento de inercia en las dos situaciones planteadas

(resolver en pizarra)

Respuestas: (a) $I=4ma^2$ y (b) $I= 8ma^2$

Nota: Es importante recordar que mismo si el cuerpo rígido es el mismo, el momento de inercia cambia si se cambia el eje de rotación.



¿Cómo se calcula el momento de inercia?

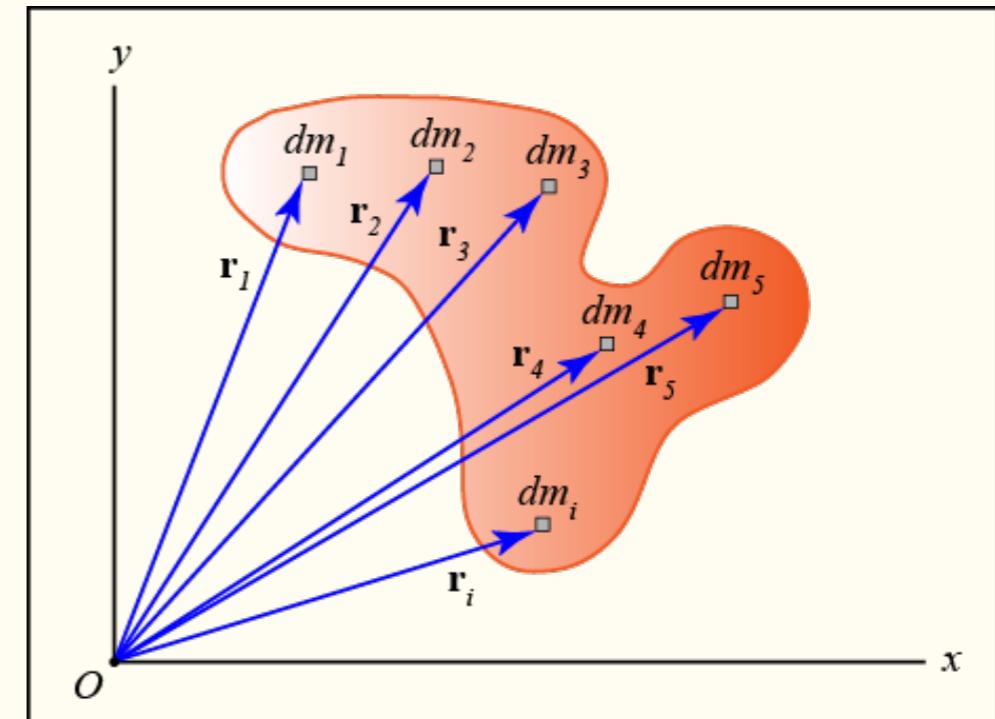
¿Pero qué hacemos si tenemos una distribución continua de masa (como un disco, una placa, un cubo... etc)?

En ese caso hay que dividir el cuerpo en pedacitos infinitesimalmente pequeños de masa dm , y sumar las contribuciones de cada uno:

$$I = \sum_{i=1..N} m r_i^2 \rightarrow I = \int r^2 dm$$

para un número finito de partículas

dividiendo el cuerpo en un número infinito de dm 's



(recordatorio: r es la distancia del dm al eje de rotación)

Podemos expresar dm en función de la densidad, y nos queda una integral de volumen:

$$dm = \rho dV$$

densidad (puede o no ser constante)

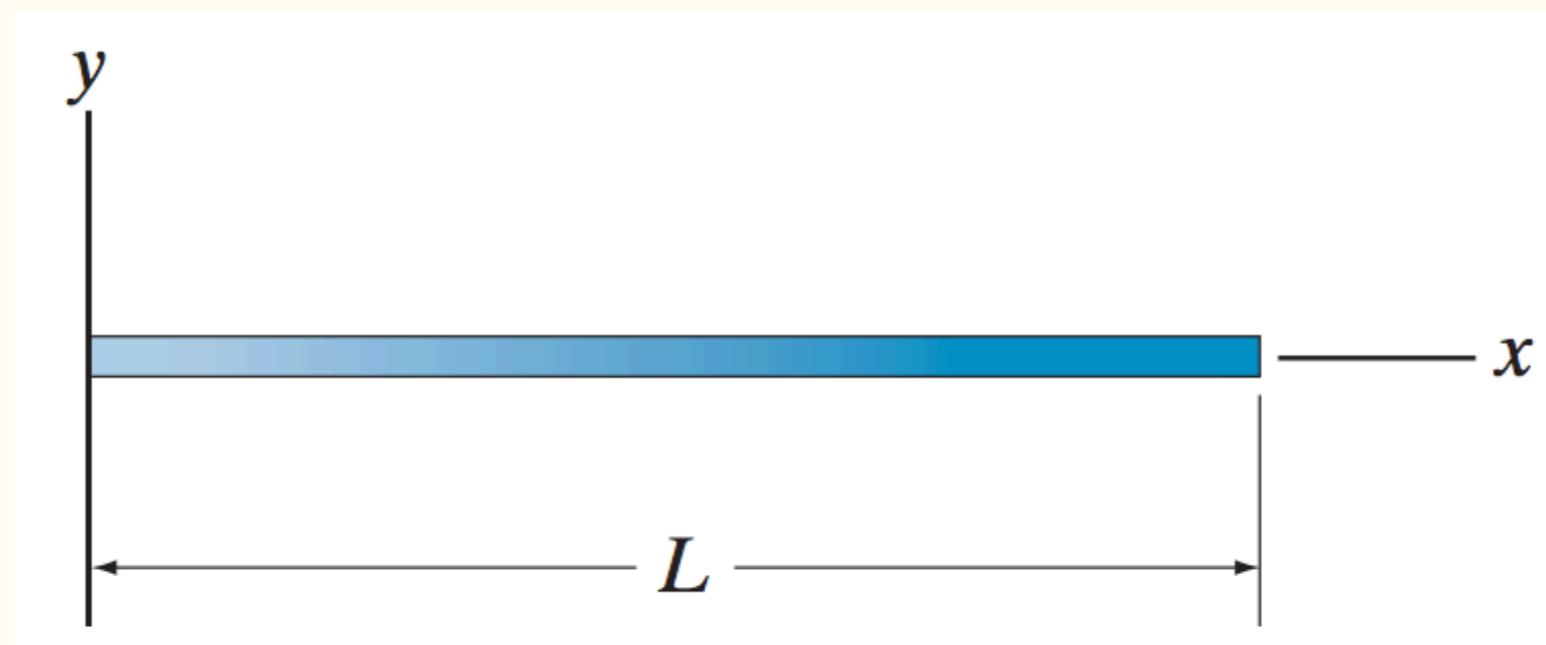
Elemento diferencial de volumen

Si en lugar de volumen tenemos una superficie o línea, entonces el dV se convierte en dA o dl , y la densidad en una densidad superficial o lineal

Nota: para mayor información ver diapositivas sobre cálculo de CM para distribución continua

Ejemplo: momento de inercia de una barra

Determine el momento de inercia para la barra delgada uniforme de longitud L y masa M mostrada en la figura (a) respecto al eje z perpendicular a la hoja y que pasa por su extremo izquierdo y (b) respecto a un eje z' paralelo a z que pasa por el centro de la barra



(resolver en pizarra)

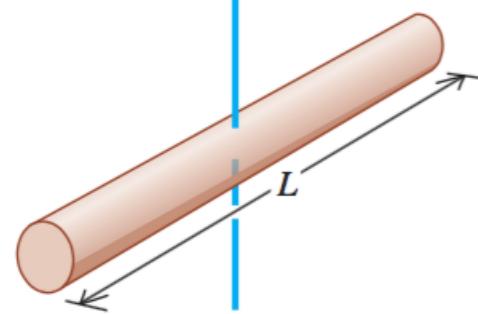
Respuestas: (a) $\frac{1}{3}ML^2$ (b) $\frac{1}{12}ML^2$

¿Cómo se calcula el momento de inercia?

Para este curso, como los momentos de inercia ya han sido calculados para la mayoría de los objetos usuales, simplemente vamos a utilizar la información **disponible en tablas**:

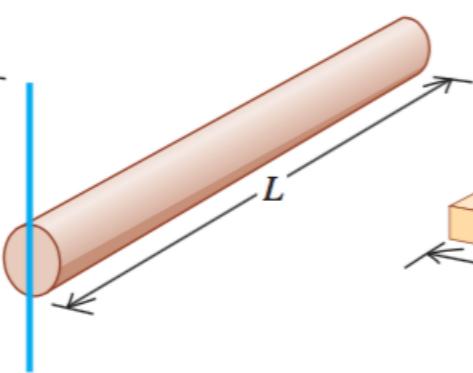
a) Varilla delgada,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



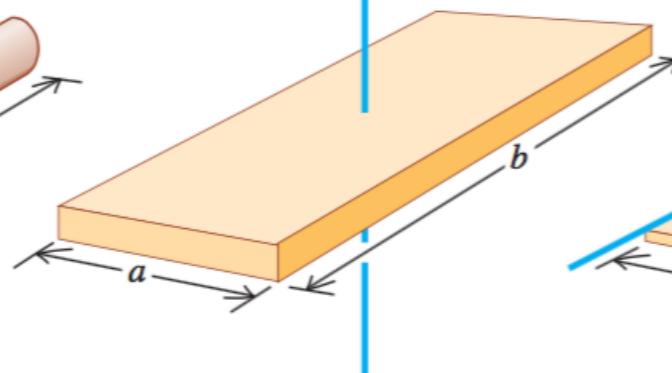
b) Varilla delgada,
eje por un extremo

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



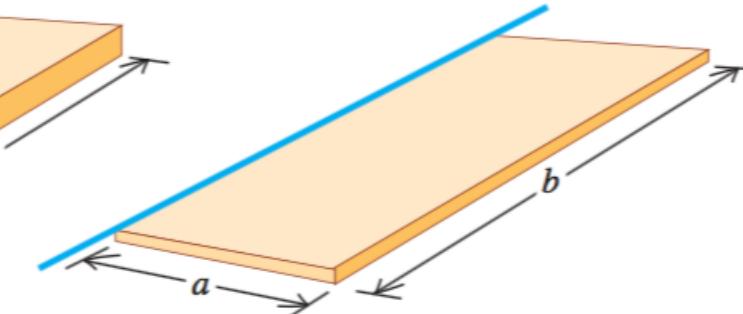
c) Placa rectangular,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



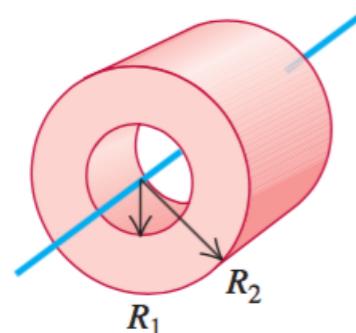
d) Placa rectangular delgada,
eje en un borde

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



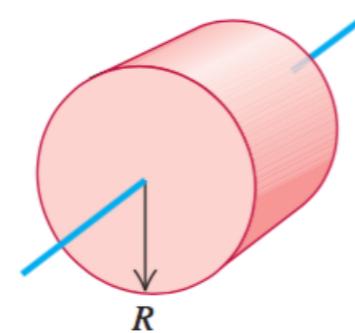
e) Cilindro hueco

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



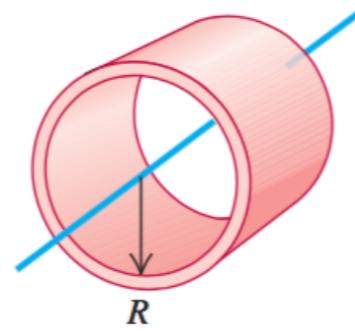
f) Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



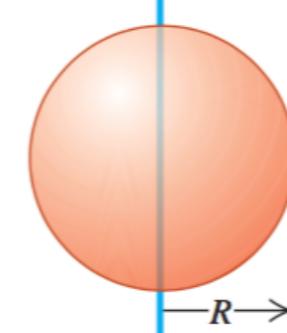
g) Cilindro hueco de
pared delgada

$$I = MR^2$$



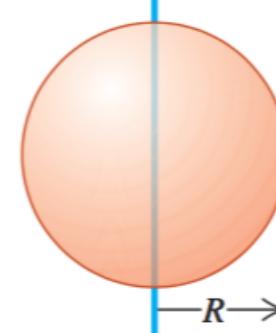
h) Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



i) Esfera hueca de
pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



(Recordatorio: el momento de inercia depende de donde se pone el eje de rotación)

Experimento #1: Objetos que rotan de forma extraña

(= que parecieran romper las leyes de la física)

**¡Si se pone un
huevo a rotar, y
se detiene,
puede reanudar
su movimiento!**



Egg Experiment to Demonstrate Inertia: <https://www.youtube.com/watch?v=7LGi-Dlb8Vs>

Experimento #2: Objetos que rotan de forma extraña

(= que parecieran romper las leyes de la física)

¡Si se pone una celta a rotar en la dirección de las manecillas del reloj, se detiene y luego reanuda su movimiento en la otra dirección!



Rattleback Physics: <https://www.youtube.com/watch?v=69Xm762qE8o>

Sobre el Experimento #2:

Vemos que la energía se conserva en el movimiento de la celta, pero ¿se puede entender por qué la energía se transforma de esta forma?

Sí, pero nos llevaría una clase entera...

On the rotational dynamics of the Rattleback

Lasse Franti
University of Helsinki
Department of Physics
and
Helsinki Institute of Physics
Gustav Hällströmin katu 2a
00560 Helsinki

The Rattleback is a very popular science toy shown to students all over the world to demonstrate the non-triviality of rotational motion. When spun on a horizontal table, this boat-shaped object behaves in a peculiar way. Although the object appears symmetric, the dynamics of its motion seem very asymmetric. When spun in the preferred direction, it spins smoothly, whereas in the other direction it starts to oscillate wildly. The oscillation soon dies out and the rattleback starts to spin in the preferred way. We will construct and go through an analytical model capable of explaining this behaviour in a simple and intelligible way. Although we aim at a semi-pedagogical treatise, we will study the details only when they are necessary to understand the calculation. After presenting the calculations we will discuss the physical validity of our assumptions and take a look at more sophisticated models requiring numerical analysis. We will then improve our model by assuming a simple friction force.

Keywords: Rattleback, celt, celtic stone, unidirectional, asymmetry

1 Background

For centuries the mysterious properties of the rattleback were used to predict the future and bring messages from other worlds. The alternative name "Celt" is thought to come from druids, or Celtic priests, who seem to have used the rattleback in their rites. This was probably a very good way to convince your followers of your powers, as the surprising behaviour looks quite magical even in our times. The priest was also able to adjust the predictions according to his needs by spinning the rock in the right direction. The peculiar motion of the object is still sometimes associated with all kinds of strange fields and ether forces. More conventional wrong explanations including the Coriolis force and the tennis racket theorem are also common, but fail to describe the situation correctly.

The first mathematically satisfactory analysis was written by Sir Gilbert Walker. In his paper "On a dynamical top" (1896) he assumed the celt to roll without slipping and

1

where a is the equilibrium distance from the center of mass to the point of contact. This form can also be taken to represent the form only to second order near the equilibrium, in which case the object does not have to be an ellipsoid. First order terms are absent, as the point of contact is an extremum.

Physical validity limits the choice of the parameter values. The surface has to be concave, which requires

$$p > 0, s > 0 \text{ and } ps > q^2. \quad (7)$$

This corresponds to a maximum of z at the origin.

We must also require the equilibrium position to be stable for the oscillation to take place. This means that the radii of curvature have to be larger than the equilibrium distance a , which is satisfied if

$$1 > p, 1 > s \text{ and } (1-p)(1-s) > q^2. \quad (8)$$

If the second order form is only an approximation, there has to be a safety margin to ensure stability during the peak amplitude. For typical celts both requirements are obviously satisfied. We shall thus assume the parameters to be physical and reasonable.

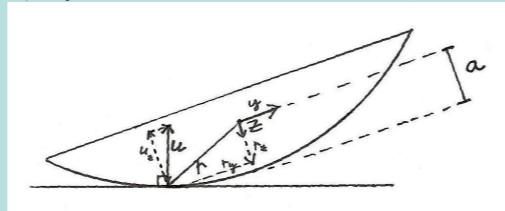
The celt will be analyzed by using a system of coordinates fixed to the celt itself. The contact point is now given by the vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$ where z is obtained from (6). The unit normal vector of the table can be obtained from the definition, as the unit normal of the celt surface at the point of contact has to coincide with the unit normal of the table. Taking the gradient of (6) results in

$$\mathbf{u} = -w \left(\frac{px + qy}{a}, \frac{qx + sy}{a}, 1 \right), \quad (9)$$

where w the normalization factor given by

$$w^{-1} = \sqrt{\left(\frac{px + qy}{a} \right)^2 + \left(\frac{qx + sy}{a} \right)^2 + 1}. \quad (10)$$

The normal vector and the third coordinate axis point at opposite directions at equilibrium, as expected.



4

As \mathbf{u} is constant in inertial coordinates, we can write

$$0 = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} + \omega \times \mathbf{u}, \quad (11)$$

where the dot thus stands for time derivative in the system defined by the inertial axes.

Taking a cross product with \mathbf{u} and using the expansion formula for triple product results in the expression

$$\omega = \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} + n\mathbf{u}, \quad (12)$$

where n is the "spin" or the vertical component of the angular velocity. We can expand the components of the angular momentum assuming x and y to be small enough for higher order terms to be dropped. The spin is assumed to be reasonable but it is not explicitly assumed to be small.

The z -component dominates if it is present, which enables us to write

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{a} [q\dot{x} + s\dot{y} - n(px + qy)] \\ \omega_2 &= \frac{1}{a} [-p\dot{x} - q\dot{y} - n(qx + sy)] \\ \omega_3 &= \frac{1}{a^2} (ps - q^2)(\dot{x}y - \dot{y}x) - n[1 - \frac{1}{2}(\frac{px + qy}{a})^2 - \frac{1}{2}(\frac{qx + sy}{a})^2]. \end{aligned} \quad (13)$$

The coordinate axes are the axes of inertia, which allows us to write

$$h_1 = A\omega_1, h_2 = B\omega_2, \text{ and } h_3 = C\omega_3. \quad (14)$$

From (2) we obtain at first order

$$\begin{aligned} v_1 &= [p\dot{x} + q\dot{y} + n(qx - (1-s)y)] \\ v_2 &= [q\dot{x} + s\dot{y} + n((1-p)x + qy)] \\ v_3 &= \text{second order}. \end{aligned} \quad (15)$$

Here all the terms arise from the zeroth order terms in z and the third component of the angular momentum. By inserting these expressions to (4) and taking into account that $d\mathbf{P}/dt = \dot{\mathbf{P}} + \omega \times \mathbf{P}$ for all vectors \mathbf{P} , we can write the first component of the equation as

$$\begin{aligned} &A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 \\ &= \frac{A}{a} [q\dot{x} + s\dot{y} - n(px + qy) - \dot{n}(px + qy)] - \frac{n}{a} (B - C)[p\dot{x} + q\dot{y} + n(qx + sy)] \\ &= -Ma\{q\ddot{x} + s\ddot{y} + n(1-2p)\dot{x} - 2nq\dot{y} + n[(1-p)x - qy] - n^2[qx - (1-s)y]\} \\ &\quad + Mg[qx - (1-s)y] \end{aligned} \quad (16)$$

Here the first equality comes from expanding the expression to first order. The first term is the derivative of angular momentum and the second term comes again purely from the the third component of angular velocity. Second equality is the equality of equation

5

Aquí hay un artículo de 17 páginas que lo explica: <https://arxiv.org/pdf/1202.6506.pdf>

Sobre el Experimento #2:

¿Los físicos inventaron este objeto?

No.... fueron los arqueólogos que lo descubrieron. ¡No fue hasta los años 80 que los físicos lo explicaron!



Celta antigua, hecha en piedra.



Las Celtas se descubrieron primero en excavaciones en Inglaterra y Egipto

¡Es uno de los juguetes más antiguos en la historia de la humanidad!

Experimento #3: Objetos que rotan de forma extraña

(= que parecieran romper las leyes de la física)

Pongamos a rotar este trompo especial llamado en inglés “tippe top”



¡Se levanta solo!

Bizarre spinning toys: <https://www.youtube.com/watch?v=1Tx7FgZuV3U>

Sobre el Experimento #3

¡Este comportamiento debiera parecer **chocante** y en **flagrante contradicción de las leyes de la física!**



Dos razones para este aparente “shock”:

- El centro de masa de cualquier objeto por lo general va hacia abajo.... ¡pero aquí pareciera que está subiendo por sí solo!
- Como el centro de masa sube, significa que está ganando energía potencial.... ¿pero de dónde salió esa energía?

Sobre el Experimento #3

La explicación no es tan intuitiva, y en los años 50 se debatió bastante (hasta en la literatura científica)

Dos premios Nóbel (Wolfgang Pauli y Niels Bohr), fascinados por el “tippe top”



Scanned at the American Institute of Physics

The Tippe Top (Topsy-Turvy Top)

WILLIAM A. PLISKIN
Poughkeepsie, New York
(Received March 30, 1953)

Two fundamentally different explanations have been given in the literature to explain the "unusual" motion of a specially constructed spherical top in which rotation causes the center of gravity of the top to rise, the top turning 180° and finally spinning on its stem like an ordinary top. This independently derived analysis shows that the force due to sliding friction is in such a direction as to result in a torque which causes the angular velocity components to vary in a way which necessitates the rising of the center of gravity. This analysis, which emphasizes the physical picture behind the phenomenon, agrees with two previously published papers that friction plays the primary role. Some experimental evidence is given to support the present analysis.

A SPECIAL toy top whose behavior seems quite unusual has appeared both abroad and in the U. S. This toy, which is referred to as a "tippe top" or "topsy-turvy top," consists of a spherical body and stem with the center of gravity of the top below the center of curvature of the spherical body, as shown in Fig. 1. If the tippe top is given sufficient spin about its axis of symmetry with $\theta=0$ initially it will turn such that θ increases and finally the top will spin on its stem like an ordinary sleeping top.

Two fundamentally different explanations have been written on the unusual behavior of this top. Synge¹ has maintained that friction seemed to have little effect on the motion of the tippe top and that its motion can be explained on the basis of dynamic instability of the top with no consideration of friction; whereas, both Braams² and Hugenholtz³ maintain that the force of friction gives rise to a torque which tends to raise the center of gravity and thus turn the top over. An explanation given by Jacobs⁴ is that the friction increases the rate of precession and as a consequence causes the center of gravity to rise. This explanation was given in a letter, and since details on it are lacking no further comment can be made. Because of the fact that these different explanations have been made this note is being written, since in May, 1952, the writer had independently come to the same fundamental conclusion as given in the later publications of both Braams and Hugenholtz, and in addition it has come to the attention of the writer that some people are still unaware of the published papers.⁵ The detailed analysis is rather similar to those used by both Braams and Hugenholtz, but it seems to be more direct and, in addition, puts more emphasis on the physical picture behind the phenomenon. Additional experimental evidence is given in support of the view that the unusual motion is due to friction.

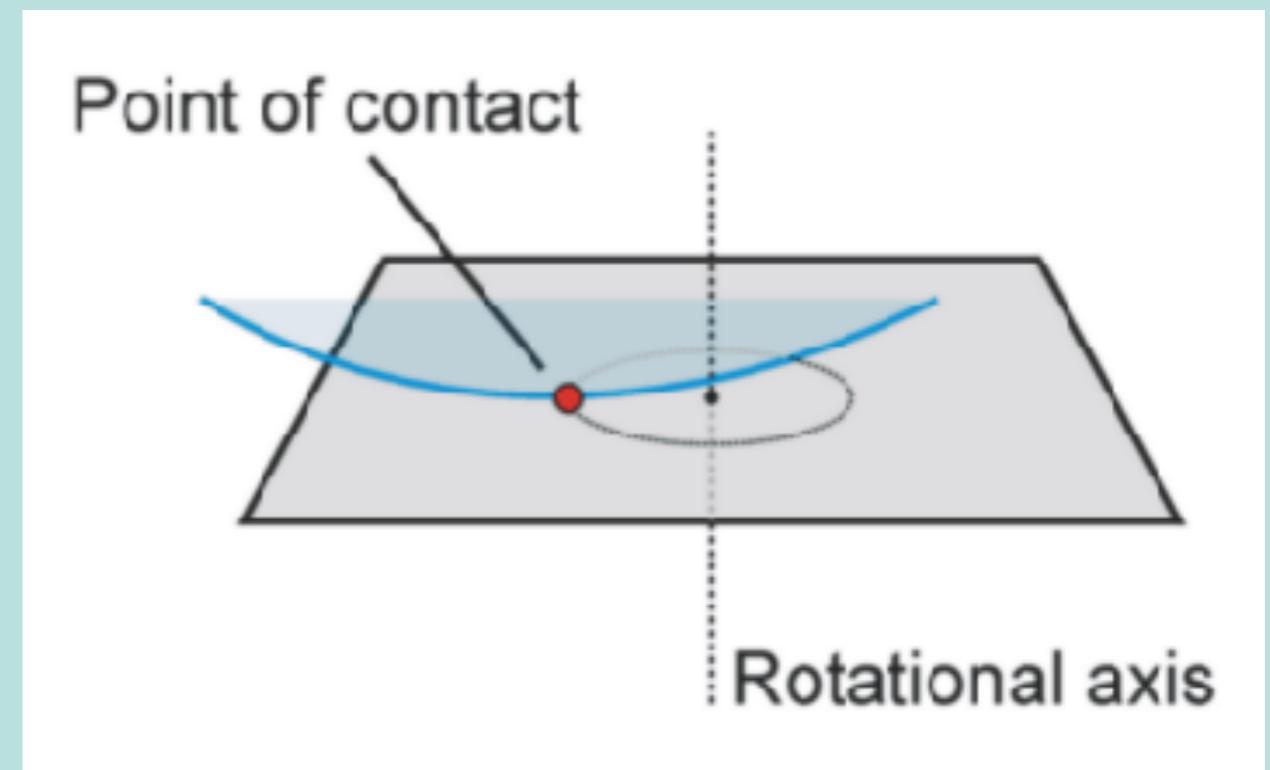
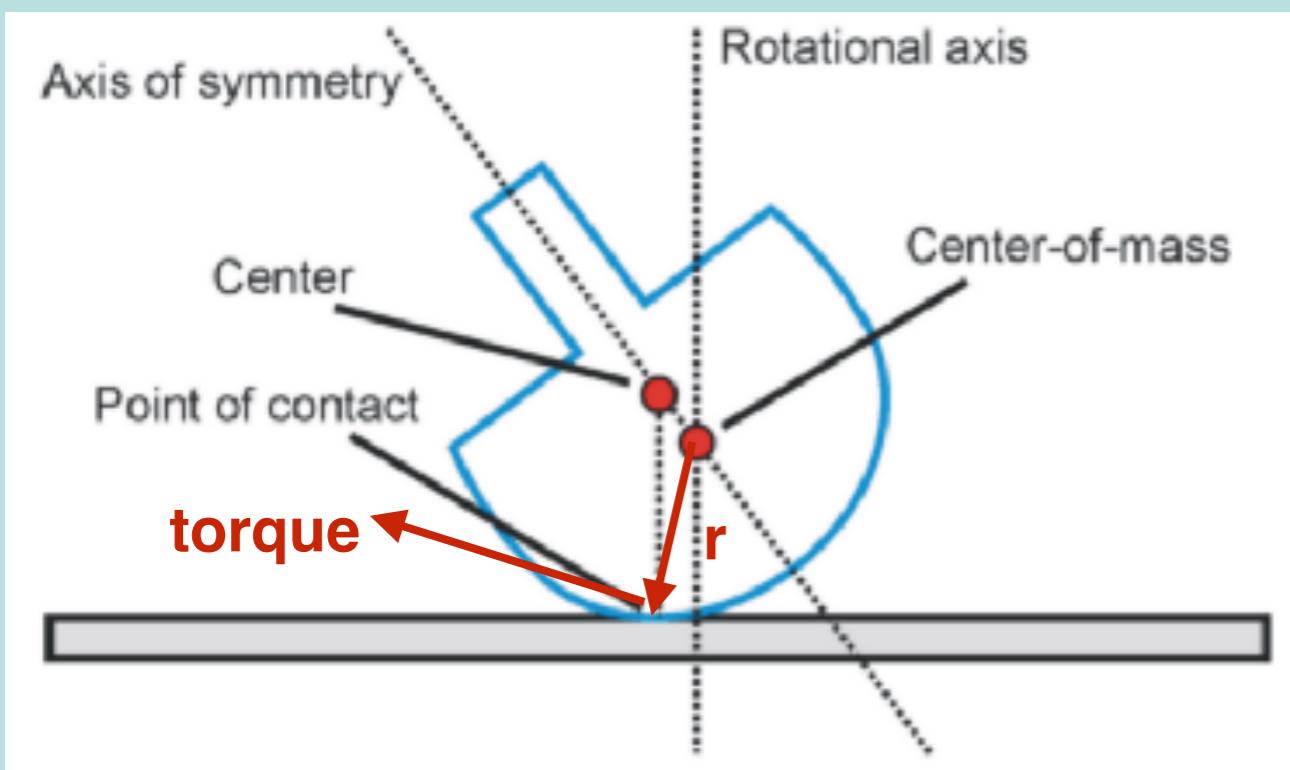
In conjunction with Fig. 1 the following symbols are defined and relationships obtained:

FIG. 1. Diagram of the tippe top.

¹ J. L. Synge, Phil. Mag. 43, 724 (1952).
² C. M. Braams, Physica 18, 503 (1952).
³ N. M. Hugenholtz, Physica 18, 515 (1952).
⁴ J. A. Jacobs, Am. J. Phys. 20, 517 (1952).
⁵ Letters to the Editor, The Johns Hopkins Magazine, February, 1953, p. 3.

Sobre el Experimento #3

La explicación está basada en el hecho que el centro geométrico (el centro del hemisferio que forma la base) no coincide con el centro de masa

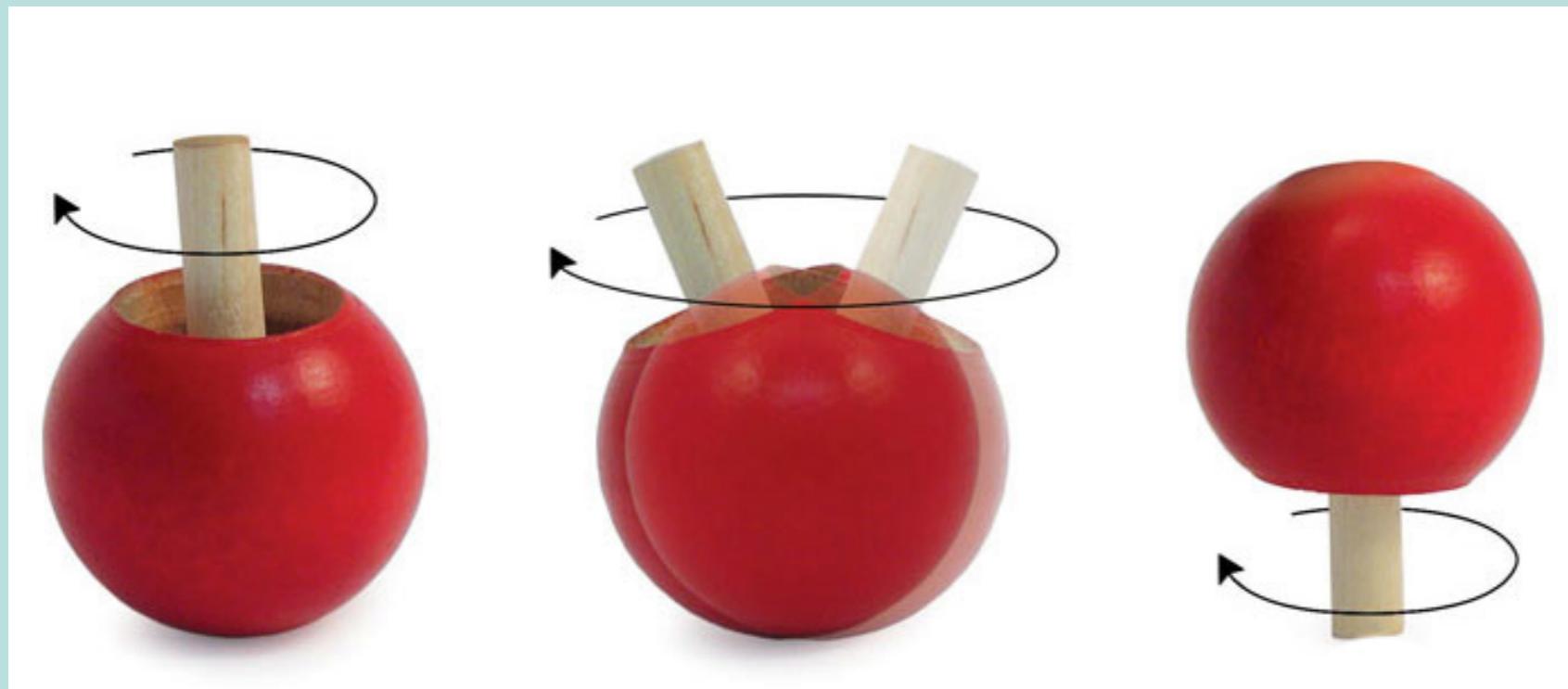


El trompo gira respecto al eje que pasa por su centro de masa, pero el contacto con la superficie se hace siempre justo debajo del centro geométrico. Esto hace que la fuerza de roce haga un torque que tira el eje de simetría hacia abajo

How a tippe top works: <https://www.youtube.com/watch?v=Kwihc4kbNVA>

Sobre el Experimento #3

En realidad el tippe top no rompe ninguna ley de la física.



después de invertirse, tiene menos energía rotacional de la que tuvo al inicio

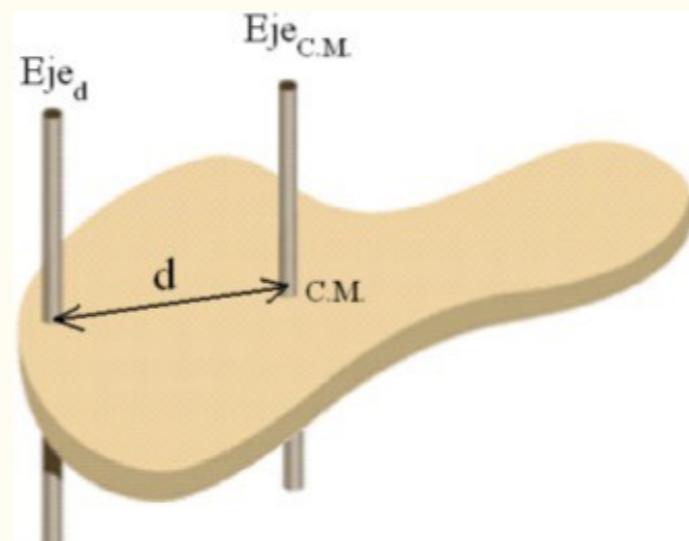
En efecto el centro de masa sube (y por ende la energía potencial también), pero esto se hace a costa de su energía rotacional.

Si no tienen un tippe top en casa, pueden ver este fenómeno con un huevo cocido

Propiedad Importante del Momento de Inercia

Hay una propiedad importante del momento de inercia: **si se conoce respecto a un cierto eje que pasa por el centro de masa, y se quiere conocer respecto a otro eje paralelo a una distancia “d”, sólo hay que utilizar la siguiente relación:**

(para ahorrar tiempo no haremos la demostración, pero está en el Y&F sección 9.5)



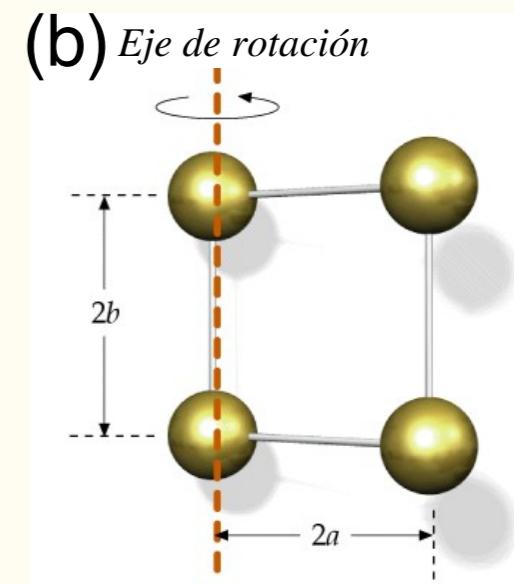
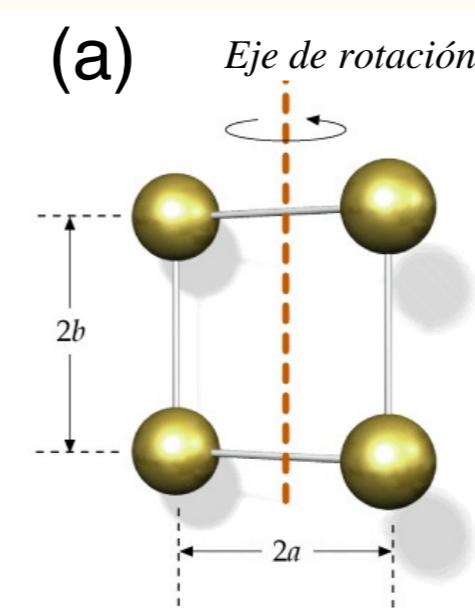
Teorema de Steiner o de los Ejes paralelos:

$$I_d = I_{CM} + Md^2$$

Por ejemplo, funciona en el problema hecho anteriormente:

$$I_{(b)} = I_{(a)} + 4m(a^2) = 8ma^2$$

También funciona con el problema de la barra

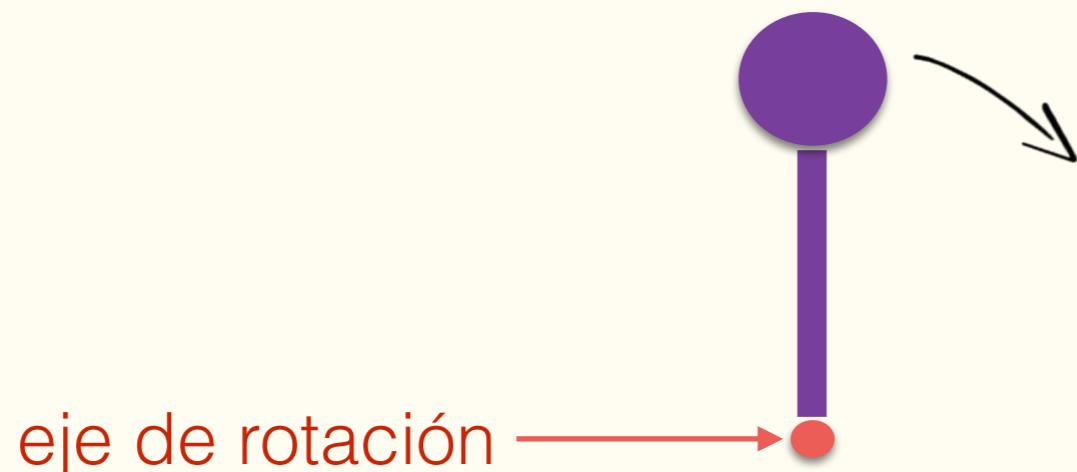


Momento de Inercia para Objeto Compuesto

Por último, ¿qué pasa si tenemos una combinación de objetos (partículas, varillas, esferas, cilindros... etc)?

En este caso hay que **sumar** los momentos de inercia de cada objeto.

Por ejemplo, si tenemos una barra de longitud L y masa m conectada a una esfera de radio R y masa M:



En este caso el momento de inercia total sería:

$$I_{total} = \frac{1}{3}mL^2 + \left(\frac{2}{5}MR^2 + M(R+L)^2 \right)$$

Comentario: es importante que al sumar se considere el mismo eje de rotación para todos los objetos. En este caso para la esfera tuvimos que aplicar el teorema de Steiner

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido

