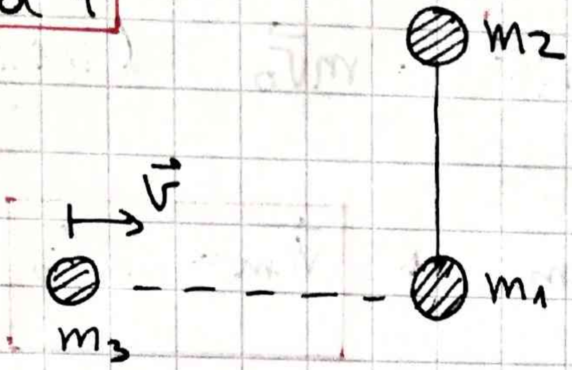
Taller 10 - secciones 7 y 8

Francisco Zamorano

Pauta.

Problema 1



a) Velocidad de m_1 después del choque

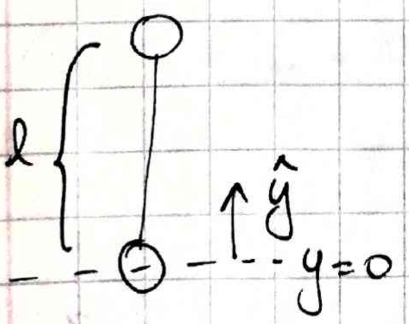
↳ Dado que $m_3 = m_1$, como vimos en los talleres anteriores, cuando el choque es elástico sólo se intercambian las velocidades

∴ Después del choque $\boxed{v_3 = 0}$, $\boxed{v_1 = v_0}$

(También es válido justificar usando cons. de momentum y cons. de energía).

b) La velocidad de CM del sistema varilla

Primero, es necesario saber dónde está el CM:



$$\bar{y} = \frac{(y \cdot m)_1 + (y \cdot m)_2}{m_1 + m_2}$$

* Masas Puntuales.

$$\bar{y} = \frac{0 + l \cdot 2m}{3m} \rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{2l}{3}}$$

Luego, como no hay fuerzas externas, el momentum se conserva (lineal). De modo que

$$\vec{P}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2^{\,\to 0} = m\vec{v}_0 \quad \text{(inicialmente)}$$

$$\vec{V}_{cm} \cdot 3m = \vec{P}_{cm} \rightarrow \boxed{\vec{V}_{cm} = \frac{1}{3}\vec{v}_0}$$

c) Velocidad Angular de la varilla, después del choque

→ la velocidad Angular (ω) la asociamos al momentum angular

Antes del choque → Varilla en reposo.
m_3 se mueve en línea recta hacia m_1.

Si tomamos un punto de referencia O en $y=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Momentum Angular inicial} = 0}$ $\quad L_i = \underbrace{(p \times r)}_{\text{Paralelas} = 0} + I\omega$

y como se conserva $\boxed{L_i = L_f = 0}$

Además, $\vec{L}_f = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{cr/cm}$

$$\vec{L}_{cm} = -\frac{2m}{3}lv\,(\hat{k})$$

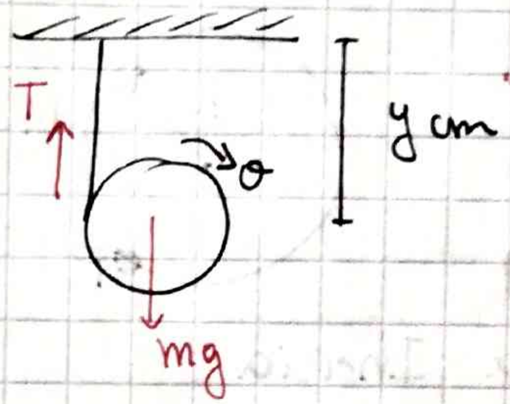
$$\vec{L}_{cr/cm} = I\omega = \underbrace{m_1\left(\frac{2l}{3}\right)^2}_{I_1}\omega\hat{k} + \underbrace{m_2\left(\frac{l}{3}\right)^2}_{I_2}\omega\hat{k}$$

Finalmente, $-\frac{2}{3}\cancel{m}lv = \cancel{m}\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + 2\cancel{m}\left(\frac{l}{3}\right)^2 w$

$$-\frac{2}{3}lv_0 = \left(\frac{4l^2}{9} + \frac{2l^2}{9}\right)w$$

$$\boxed{w = -\frac{v_0}{l}}$$

Problema 2



a) Aceleración del CM : Por ligadura $\rightarrow$ $\boxed{y_{cm} = R\theta}$

$\Sigma F = ma \rightarrow Ma_{cm} = Mg - T \rightarrow \left[a_{cm} = g - \frac{T}{M}\right]$ (1)

$\Sigma \tau = I\cdot\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{T\cdot R}{I}$

Cilindro sólido $\rightarrow I = \frac{MR^2}{2} \rightarrow \left[\ddot{\theta} = \frac{2T}{MR}\right]$ (2)

$\ddot{y}_{cm} = a_{cm} = R\ddot{\theta} \xrightarrow{\text{En (1)}} \left[\ddot{\theta} = \left(g - \frac{T}{M}\right)\cdot\frac{1}{R}\right]$ (3)

igualamos 2 y 3 $\rightarrow \frac{Mg}{3} = T$

Finalmente $\rightarrow$ $\boxed{a_{cm} = g - \frac{T}{M} = \frac{2g}{3}}$

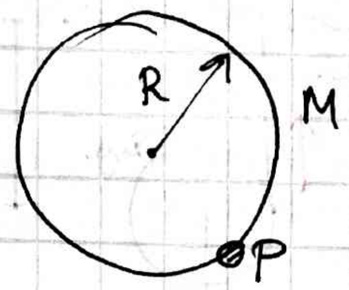
b) Dado que el CM se mantiene en Reposo,

$$\Sigma F = 0 \rightarrow T = Mg$$

$$\Sigma \tau = I\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2g}{R} \qquad a_{cuerda} = R \cdot \ddot{\theta}$$

$$\boxed{a = 2g}$$

Problema 3



$$\underbrace{\frac{M}{A} = \frac{dm}{dA}}_{\text{Proporcional.}}$$

a) Momento de Inercia

$$I_G = \int \rho^2 \, dm \quad , \text{ donde } dm = \frac{M \cdot dA}{\pi R^2}$$

En polares $dA = \rho \, d\phi \, d\rho$

$$I_G = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\phi \, d\rho$$

$$\boxed{I_G = \frac{MR^2}{2}}$$

b) Para el punto P aplicamos teorema de Steiner

$$I = I_G + dM$$

$$\boxed{I = \frac{3}{2} MR^2}$$