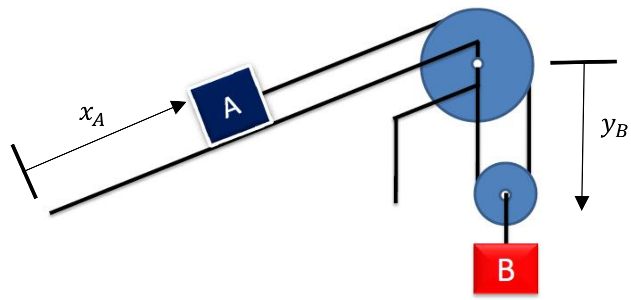
Estática y Dinámica

Ejercicios / Ejemplos relacionadas con Clase 06

Leyes de Newton

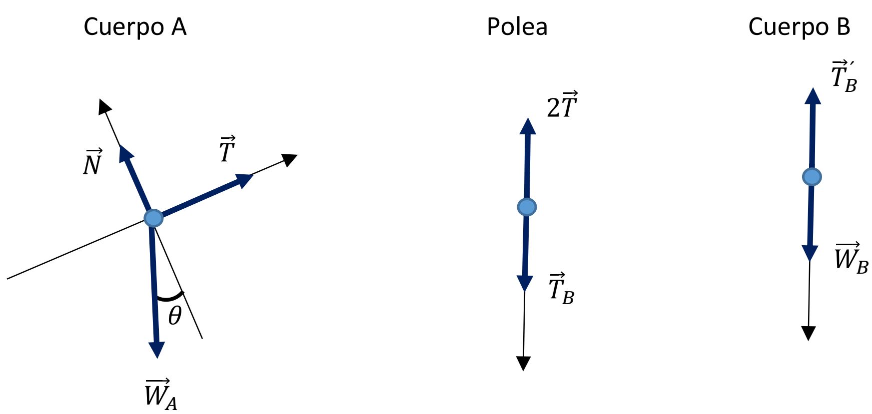
1- Ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1: Encontrar a) la tensión de la cuerda y b) la aceleración de los bloques. Desprecie el roce, la masa de la cuerda y la masa de las poleas.



1) Sistema de referencia

2) Diagrama de fuerzas



3) Ecuaciones:

Cuerpo A,

eje x:

$$-m_A g \sin\theta + T = m_A \ddot{x}_A \tag{1}$$

eje y:

$$-m_A g \cos\theta + N = 0 \tag{2}$$

Polea

$$-2T + T_B = 0 \tag{3}$$

Cuerpo B

$$-T_B + m_B g = m_B \ddot{y}_B \tag{4}$$

Donde por la tercera Ley de Newton hicimos: $T_B = T_B^{\prime}$

Ecuación de ligadura:

$$(L - x_A) + cte + y_B = l$$

Derivando dos veces,

$$-\ddot{x}_A + \ddot{y}_B = 0 \tag{5}$$

De las equaciones (3) y (4) obtenemos:

$$-2T + m_B g = m_B \ddot{y}_B \tag{4b}$$

de (4b) y (1)

$$-g \sin\theta + \frac{T}{m_A} = \ddot{x}_A \tag{1b}$$

$$-\frac{2T}{m_B} + g = \ddot{y}_B \tag{4b}$$

De la ecuación (5) vemos que restando las Ecs. (3b) y (1b) obtenemos:

$$g \sin\theta - \frac{T}{m_A} - \frac{2T}{m_B} + g = 0$$

$$T = (1 + \sin\theta) \frac{m_B m_A}{(2m_A + m_B)} g \tag{6}$$

Substituyendo (6) en (4b),

$$\ddot{y}_B = \frac{(m_B - 2m_A \sin\theta)}{(2m_A + m_B)} g \tag{7}$$

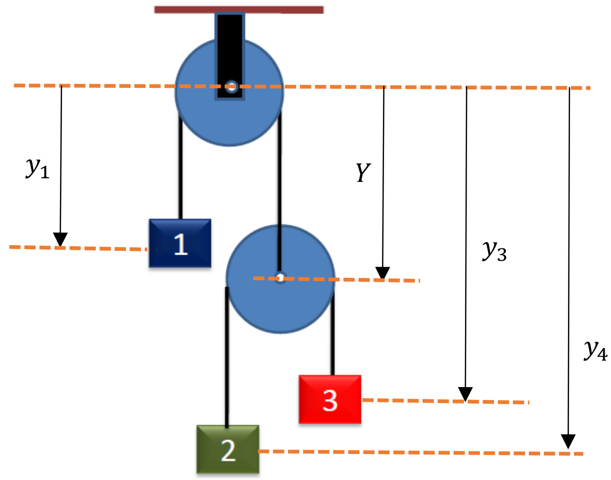
y de (4),

$$\ddot{x}_A = \ddot{y}_B$$

Ejemplo 2:

Calcular las aceleraciones y tensiones en las cuerdas.

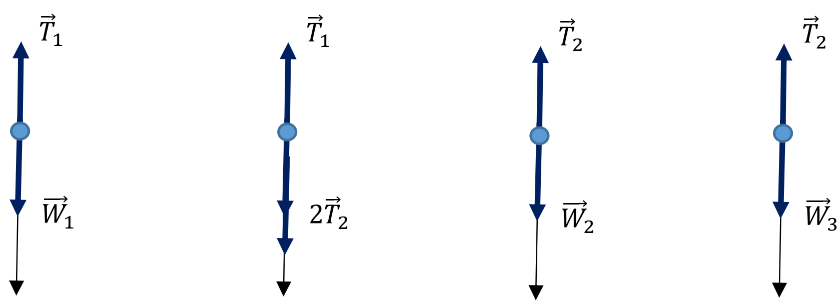
Considere que cerdas y pole as tienen masa despreciable



1) Sistema de coordenadas

2) Diagrama de fuerzas

Cuerpo 1 Polea Y Cuerpo 2 Cuerpo 3



3) Ecuaciones

Cuerpo 1 $$-T_1 + m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \quad (1)$$

Polea Y $$-T_1 + 2T_2 = 0 \quad (2)$$

Cuerpo 2 $$-T_2 + m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \quad (3)$$

Cuerpo 3 $$-T_2 + m_3 g = m_3 \ddot{y}_3 \tag{4}$$

Ecuaciones de ligadura

Cuerda 1 $$y_1 + Y = cte \;\; \Rightarrow \; \ddot{y}_1 + \ddot{Y} = 0 \tag{5}$$

Cuerda 2 $$(y_3 - Y) + (y_4 - Y) = cte \;\; \Rightarrow \;\; \ddot{y}_3 + \ddot{y}_4 - 2\ddot{Y} = 0 \tag{6}$$

De donde obtenemos,

$$\ddot{y}_3 + \ddot{y}_4 + 2\ddot{y}_1 = 0 \tag{6}$$

De las ecuaciones (1)-(4) tenemos:

3) Ecuaciones

$$-\frac{2T_2}{m_1} + g = \ddot{y}_1 \tag{1b}$$

$$-\frac{T_2}{m_2} + g = \ddot{y}_2 \tag{3b}$$

$$-\frac{T_2}{m_3} + g = \ddot{y}_3 \tag{4b}$$

De la ecuación de ligadura vemos que es conveniente multiplicar la primera ecuación por 2 y sumarlas,

$$-\frac{4T_2}{m_1} + 2g = 2\ddot{y}_1$$

$$-\frac{T_2}{m_2} + g = \ddot{y}_2$$

$$-\frac{T_2}{m_3} + g = \ddot{y}_3$$

Sumando tenemos,

$$\frac{4T_2}{m_1} + \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_3} = 4g$$

$$T_2 = \left(\frac{4m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2}\right) g \tag{7}$$

$$T_1 = 2T_2 = \left(\frac{8m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}\right)g \tag{8}$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2T_2}{m_1} + g = -\left(\frac{8m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}\right)g + g$$

$$\ddot{y}_1 = -\left(\frac{-4m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}{4m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}\right)g \tag{9}$$

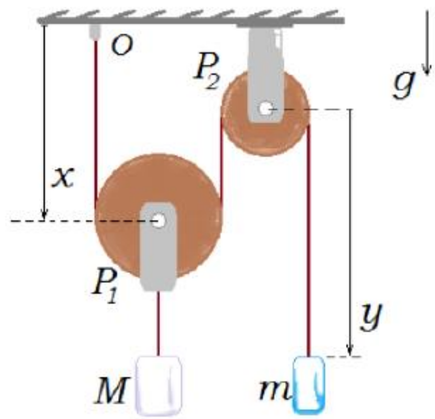
$$\ddot{y}_2 = \left(\frac{4m_2m_3 - 3m_1m_3 + m_1m_2}{4m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}\right)g \tag{10}$$

$$\ddot{y}_3 = \left(\frac{4m_2m_3 + m_1m_3 - 3m_1m_2}{4m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2}\right)g \tag{11}$$

Ejemplo 3: En el sistema mostrado en la figura las poleas son ideales. Si llamamos T a la tensión de la cuerda que parte de O y llega hasta el bloque de masa m, calcule,

a) La tension en la cuerda

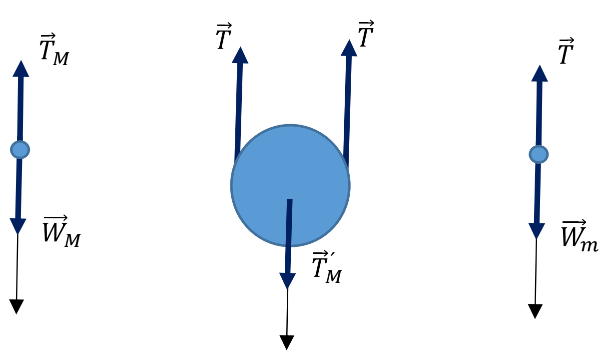
b) la aceleración de los bloques.



1) Sistema de coordenadas

2) Diagrama de fuerzas

Cuerpo M Polea P_1 Cuerpo m



3) Ecuaciones

Cuerpo 1
$$-T_M + Mg = M\ddot{x} \qquad (1)$$

Polea Y
$$T_M - 2T = 0 \qquad (2)$$

Donde hicimos $|\vec{T}_M'| = |\vec{T}_M|$

Cuerpo 2 $$-T + mg = m\ddot{y} \tag{3}$$

Ecuación de ligadura

Cuerda $$2(x-h) + \pi R_1 + \pi R_2 + y = l \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \tag{4}$$

Escribiendo las ecuaciones del movimiento como:

$$-4\frac{T}{M} + 2g = 2\ddot{x} \tag{1b}$$

$$-\frac{T}{m} + g = \ddot{y} \tag{3b}$$

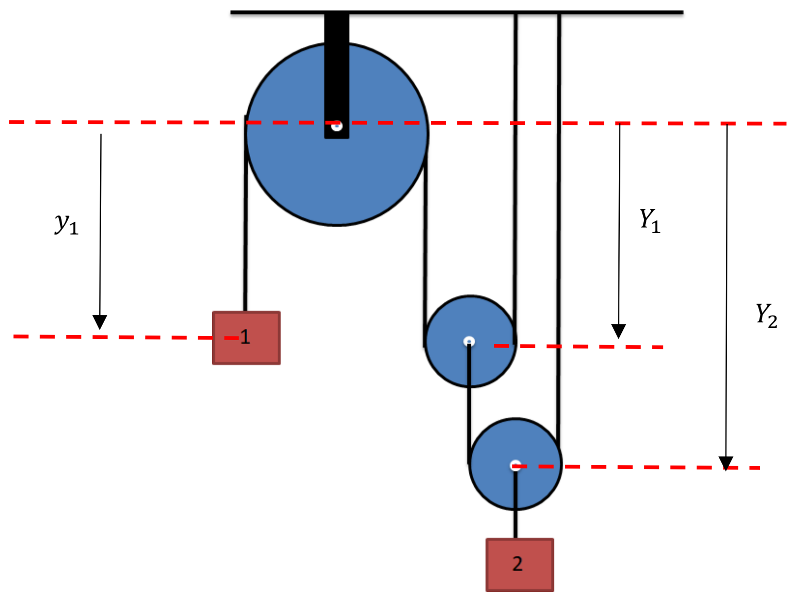
Y sumando, con (4) obtenemos

$$T = \frac{3Mmg}{4m + M}$$

Y substituyendo en (3b)

$$\ddot{y} = \frac{(4m - 2M)g}{4m + M}$$

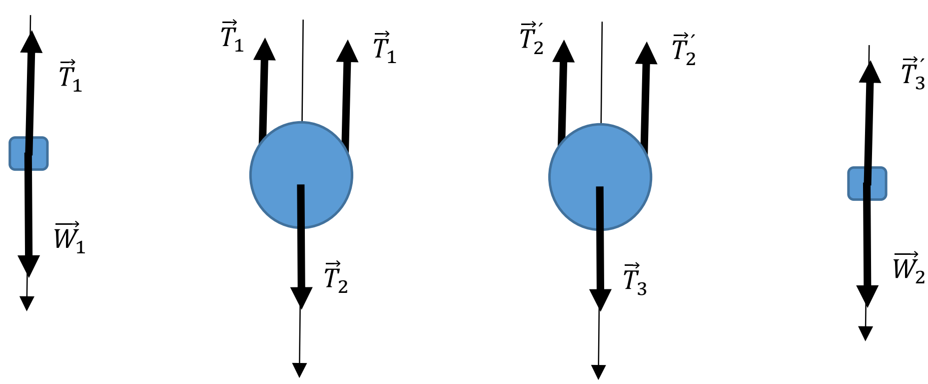
Ejemplo 4: Calcular las aceleraciones de los bloques y tensiones en las cuerdas.



1) Sistema de referencia

2) Diagrama de fuerzas

Cuerpo 1 Polea 1 Polea 2 Cuerpo 2



3) Ecuaciones

Cuerpo 1 $$-T_1 + m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \qquad (1)$$

Polea 1 $$-2T_1 + T_2 = 0 \quad (2)$$

Polea 2
(con $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_2'|$) $$-2T_2 + T_3 = 0 \quad (3)$$

Cuerpo 2
(con $|\vec{T}_3| = |\vec{T}_3'|$) $$-T_3 + m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \quad (4)$$

Ecs. de ligadura

$$y_1 + 2Y_1 = cte \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_1 + 2\ddot{Y}_1 = 0 \quad (5)$$

$$2(Y_2 - Y_1) + Y_1 = cte \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{Y}_2 - \ddot{Y}_1 = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{Y}_2$$

De donde ontenemos;

$$\ddot{y}_1 + 4\ddot{y}_2 = 0 \quad (7)$$

De (1)-(4);

$$-\frac{T_1}{m_1} + g = \ddot{y}_1 \quad (1b)$$

$$-4\frac{T_1}{m_2} + g = \ddot{y}_2 \quad (4b)$$

Y de (7):

$$-16\frac{T_1}{m_2} + 4g - \frac{T_1}{m_1} + g = 0$$

$$T_1 = 5g\frac{m_1 m_2}{(16m_1 + m_2)} \quad (8)$$

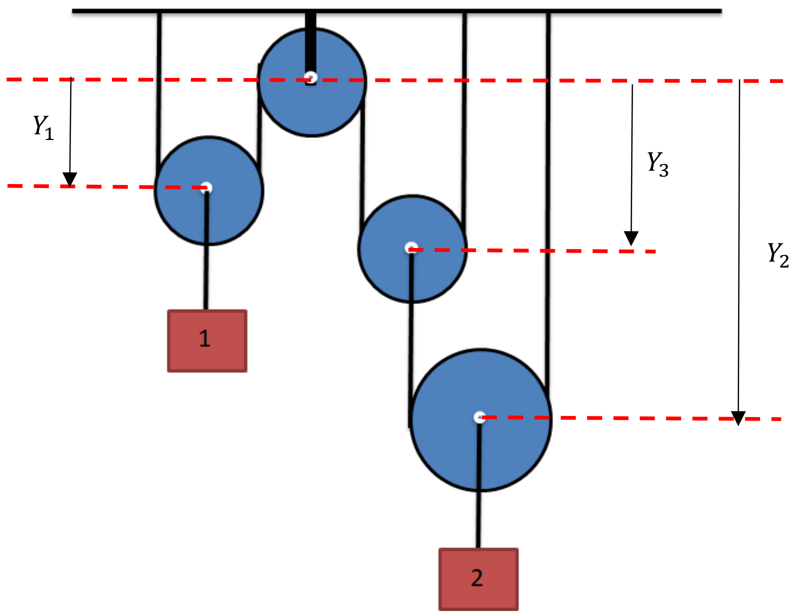
De aquí rapidamente obtenemos las demás incógnitas, substituyendo en (1b):

$$\ddot{y}_1 = -5g\frac{m_2}{(16m_1 + m_2)} + g = \frac{4(4m_1 - m_2)g}{(16m_1 + m_2)} \quad (9)$$

y de (7) obtenemos

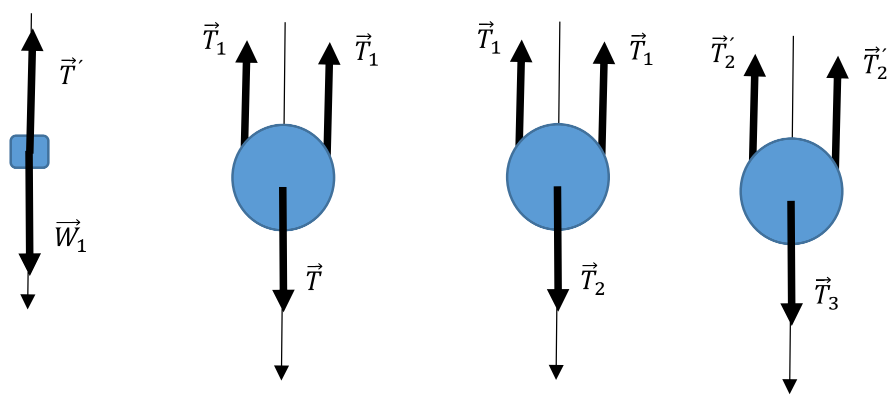
$$\ddot{y}_2 = -\frac{(4m_1 - m_2)g}{(16m_1 + m_2)} \qquad (10)$$

Ejemplo 5: Calcular las tensiones en las cuerdas y aceleraciones de los bloques.

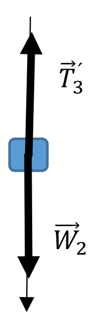


1) Sistema de Referencia
2) Diagrama de fuerzas

Cuerpo 1 Polea 1 Polea 3 Polea 2



Cuerpo 2



3) Ecuaciones

Cuerpo 1 $$-T + m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \quad (1)$$

Polea 1 $$-2T_1 + T = 0 \quad (2)$$

Polea 3 $$-2T_1 + T_2 = 0 \quad (3)$$

Polea 2 $$-2T_2 + T_3 = 0 \quad (4)$$

Cuerpo 2 $$-T_3 + m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \quad (5)$$

Ecs de ligaduras

Cuerda 1 $$2Y_1 + 2Y_3 = cte \quad \Rightarrow \quad \ddot{Y}_1 + \ddot{Y}_3 = 0$$

Cuerda 2 $$2(Y_2 - Y_3) + Y_3 = cte \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{Y}_2 - \ddot{Y}_3 = 0$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{Y}_1 \qquad \ddot{y}_2 = \ddot{Y}_2$$

De donde obtenemos:

$$\ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_2 = 0 \quad (6)$$

De las ecuaciones (1)-(5) obtenemos:

$$-2\frac{T_1}{m_1} + g = \ddot{y}_1 \quad (1b)$$

$$-4\frac{T_1}{m_2} + g = \ddot{y}_2 \quad (5b)$$

Y de (6),

$$-8\frac{T_1}{m_2}+2g+-2\frac{T_1}{m_1}+g=0$$

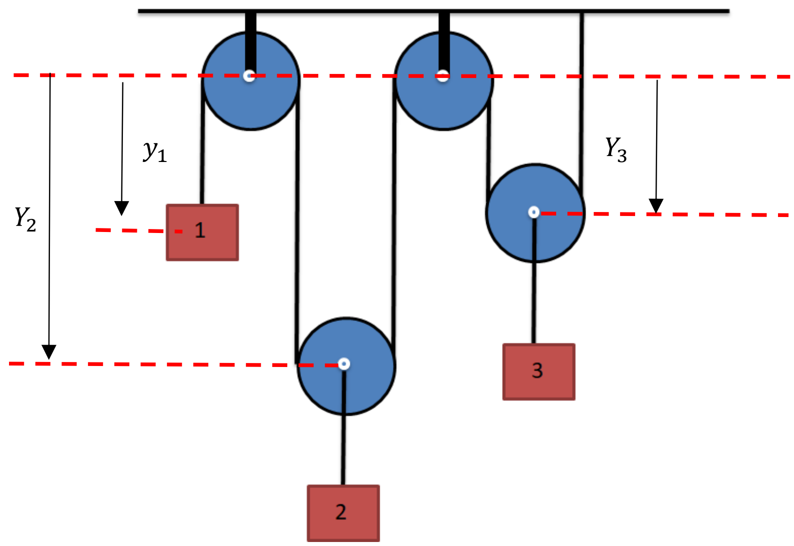
$$T_1=\frac{3}{2}g\frac{m_1m_2}{4m_1+m_2} \tag{7}$$

Y de (1b)

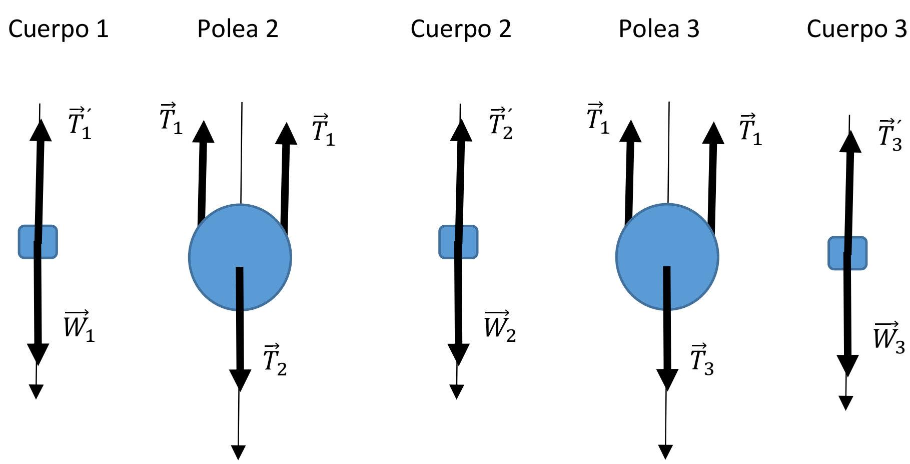
$$\ddot{y}_1=\frac{2(2m_1-m_2)}{4m_1+m_2}g \tag{8}$$

Y de (6), (2) (3) y (4) obtenemos las demás incógnitas.

Ejemplo 6: Calcular las tensiones en las cuerdas y aceleraciones de los bloques.



1) Sistema de referencia
2) Diagrama de fuerzas



3) Ecuaciones

Cuerpo 1 $$-T_1 + m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \qquad (1)$$

Polea 2 $$-2T_1 + T_2 = 0 \qquad (2)$$

Cuerpo 2 $$-T_2 + m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \qquad (3)$$

Polea 3 $$-2T_1 + T_3 = 0 \tag{4}$$

Cuerpo 3 $$-T_3 + m_3 g = m_3 \ddot{y}_3 \tag{5}$$

Ecuaciones de ligadura

$$y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 = cte \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y}_1 + 2\ddot{Y}_2 + 2\ddot{Y}_3 = 0$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{Y}_2$$

$$\ddot{y}_3 = \ddot{Y}_3$$

De donde

$$\ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_2 + 2\ddot{y}_3 = 0 \tag{6}$$

De (2) en (3) y de (4) en (5) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$-\frac{T_1}{m_1} + g = \ddot{y}_1 \tag{1b}$$

$$-2\frac{T_1}{m_2} + g = \ddot{y}_2 \tag{3b}$$

$$-2\frac{T_1}{m_3} + g = \ddot{y}_3 \tag{5b}$$

Y de la ecuación de ligadura nos damos cuenta que sumando Eq.(1b) + 2 x Eq.(3b) + 2 x Eq.(3b) obtenemos:

$$-\frac{T_1}{m_1} + g - 4\frac{T_1}{m_2} + 2g - 4\frac{T_1}{m_3} + 2g = 0$$

$$T_1 = \frac{5m_1 m_2 m_3}{m_2 m_3 + 4m_1 m_3 + 4m_1 m_2} g \tag{7}$$

Y de (1b), (3b) y (5b) obtenemos:

$$\ddot{y}_1 = \frac{4(m_1 m_3 + m_1 m_2 - m_2 m_3)}{m_2 m_3 + 4m_1 m_3 + 4m_1 m_2} g$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{(m_2 m_3 + 4m_1 m_2 - 6m_1 m_3)}{m_2 m_3 + 4m_1 m_3 + 4m_1 m_2} g$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{(m_2 m_3 + 4m_1 m_3 - 6m_1 m_2)}{m_2 m_3 + 4m_1 m_3 + 4m_1 m_2} g$$