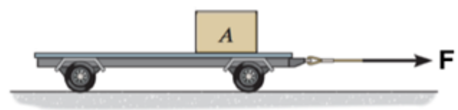
Estática y Dinámica

Leyes de Newton

Ejemplos / Probleas resueltas y enunciados de problemas que pueden aparecer en una Prueba:

Problema 1

Se tiene un bloque A de masa m_A encima de un carro C de masa m_C. El carro se tira con una fuerza horizontal F, tal como se muestra en la figura. Considere que A y C parten del reposo, y que puede despreciar cualquier tipo de roce en los engranes de las ruedas del carro.



a) Determinar el valor mínimo del coeficiente de roce estático μ_s^{min} que se necesita para que A no deslice sobre C.

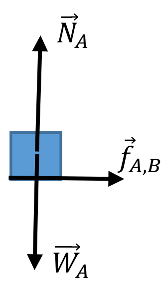
b) Asuma ahora que el coeficiente de roce estático entre A y C es $\mu_s < \mu_s^{min}$, y que el coeficiente de roce cinético (dinámico) es μ_k. Determine el módulo de la aceleración del bloque respecto al carro.

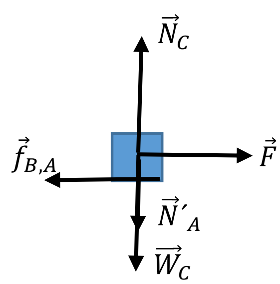
Resp/

I)

Realicemos el diagrama de fuerzas para cada cuerpo

"A" "C"





En la condición en que $\mu = \mu_s^{min}$, el cuerpo A está en reposo en relación a C y la fuerza de roce llega a su valor límite, $f_{A,B} = f_{B,A} = f_s = \mu_s^{min} N_A$.

Notemos que en este caso $a_A = a_B = a$.

II) Escribamos la segunda ley de Newton

A: eje x $$f_s = m_A a \quad (1.a)$$

A: eje y $$N_A = m_A g \quad (1.b)$$

C: $$-f_s + F = m_C a \tag{2}$$

Eliminando la aceleración a de las ecuaciones anteriores,

$$\frac{f_s}{m_A} + \frac{f_s}{m_C} - \frac{F}{m_C} = 0$$

$$\mu_s^{min} g \left[1 + \frac{m_A}{m_C}\right] - \frac{F}{m_C} = 0$$

$$\mu_s^{min} = \frac{F}{(m_A + m_C)g} \tag{3}$$

b)

Ahora el bloque C se desliza y existe movimiento relativo entre los cuerpos. Con esto las ecuaciones (1.a), y (2) se escriben como,

A: eje x $$f_k = m_A a_A \tag{1.a}$$

C: eje x $$-f_k + F = m_C a_C \tag{2}$$

Notemos que $\vec{r}_C + \vec{r}_{CA} = \vec{r}_A$ de manera que derivando dos veces en relación al tiempo,

$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_A - \vec{a}_C$

Entonces con,

$$a_A = \frac{f_k}{m_A} = \mu_k g$$

y

$$a_C = \frac{-f_k + F}{m_C} = \frac{-\mu_k m_A g + F}{m_C}$$

entonces,

$$a_{CA} = \mu_k g - \frac{F - \mu_k m_A g}{m_C}$$

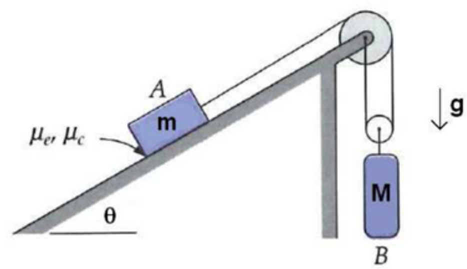
$$a_{CA} = \frac{\mu_k (m_A + m_C) g - F}{m_C}$$

Problema 2

Considere el sistema de masas y poleas mostrado en la figura. Si los coeficientes de rozamiento (roce) esttico y cinético (dinámico) entre el bloque A y la superficie del plano inclinado son μ_e y μ_c respectivamente, determine:

(a) El valor mínimo de μ_e de manera tal que el bloque A no deslice.

(b) La aceleración de cada cuerpo y la tensión de la cuerda, en el caso que el valor de μ_e sea menor que el valor determinado en (a).

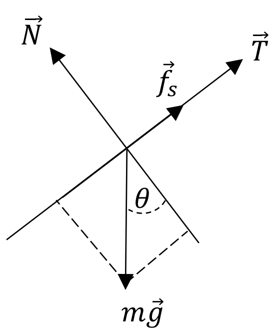


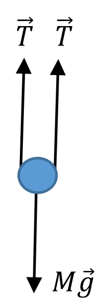
Resp/

a) Supongamos A está en la inminencia de deslizar.

Como en principio no se hacia donde se deslizaría puedo colocar la fuerza de roce en cualquier sentido.

Supongamos (arbitrariamente) que en la inminencia del deslizamiento el sistema se movería a favor de las manecillas del reloj[1] ↶. De esta forma, el diagrama de fuerzas sería,





Leamos los diagramas,

[1] ¿Qué sucede si tomamos el movimiento en el sentido contrario? ↷. Como podrán comprobar de la ec. (3), en ese caso el signo del coeficiente queda con signo cambiado. Pero, ¿qué significa esto?. Pues como μ es definido positivo, el obtener un valor negativo quiere decir que el sistema se moverá en el sentido contrario al tomado arbitrariamente.

Cuerpo de masa m,

m: eje x $$-T - \mu_e^{min} N + mg \sin\theta = 0 \tag{1.a}$$

m: eje y $$N - mg\cos\theta = 0 \tag{1.b}$$

Cuerpo de masa M,

M: $$2T - Mg = 0 \tag{2}$$

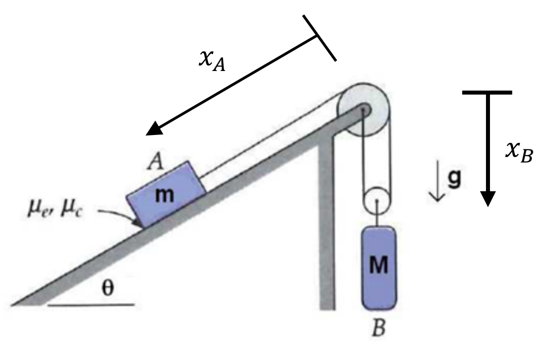
Eliminando T en las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$-\frac{Mg}{2} + mg\sin\theta - \mu_e^{min} mg\cos\theta = 0$$

de donde,

$$\mu_e^{min} = \frac{2m\sin\theta - M}{2m\cos\theta} \tag{3}$$

b) Tomemos el sistema de ejes mostrado en la siguiente figura y supongamos que le sistema se mueve asumimos en el inciso anterior, ↶



Ecuaciones:

m: eje x $$-T - \mu_s N + mg\sin\theta = m\ddot{x}_A \tag{4.a}$$

m: eje y $$N - mg\cos\theta = 0 \tag{4.b}$$

Cuerpo de masa M,

M: $$-2T + Mg = M\ddot{x}_B \tag{5}$$

Ecuación de ligadura:

De la figura es claro que, $x_A + 2x_B = cte$ de donde:

$$\ddot{x}_A + 2\ddot{x}_B = 0 \tag{6}$$

De las ecuaciones (4a.b) y (5)

$$-\frac{T}{m} - \mu_s g \cos\theta + g \sin\theta = \ddot{x}_A \tag{7}$$

$$-\frac{4T}{M} + 2g = 2\ddot{x}_B \tag{8}$$

y de (6) vemos que si sumamos las ecuaciones obtenemos directamente la expresión para T,

$$-\frac{T}{m} - \mu_s g \cos\theta + g \sin\theta - \frac{4T}{M} + 2g = 0$$

$$T = \frac{Mmg}{(4m + M)}[2 + \sin\theta - \mu_s \cos\theta] \tag{9}$$

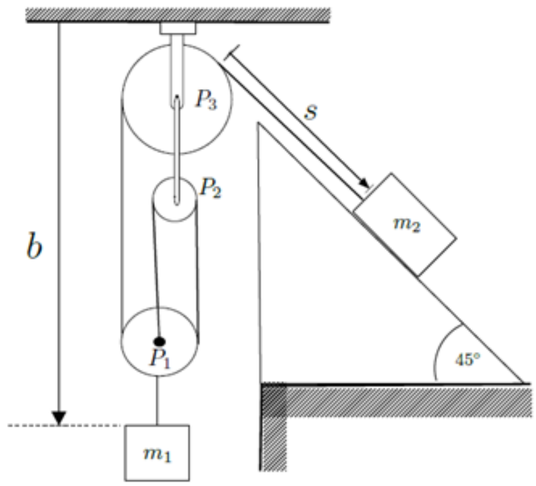
Substituyendo en (8), obtenemos,

$$\ddot{x}_B = g - \frac{2Tmg}{(4m + M)}[2 + \sin\theta - \mu_s \cos\theta] \tag{10}$$

y de (6) obtenemos $\ddot{x}_A$.

Problema 3

Considere el sistema de la Figura 4, en el cual ángulo $\theta = \pi/4$, la razón entre la masa de los bloques es $m_1 = 2m_2$, donde el valor de m_2 se considera como conocido. El sistema de poleas, así como la cuerda inextensible poseen masa despreciable, y el coeficiente de roce para el plano inclinado es μ_c (μ_d). Note que el bloque de masa m_1 es solidario a la polea P_1 mediante una barra ideal y que la polea P_2 es solidaria a P_3 también por una barra ideal. Para sus cáculos considere $a_1 = \ddot{b}$ y $a_2 = \ddot{s}$.



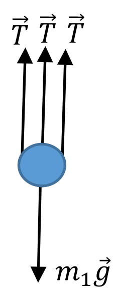
a) Encontrar el valor mínimo del coeficiente de roce estático μ_e, para que el sistema esté en reposo.

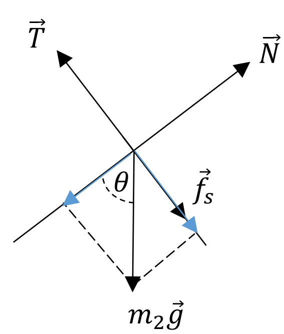
b) Encontrar la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda.

Resp/

a) Supongamos (de manera arbitraria) que en la inminencia de deslizar el sistema lo hace en el sentido ↶.

Realicemos primero los diagramas de fuerzas,





Ecuaciones:

m_2: eje x $$-T + \mu_s N + m_2 g \sin\theta = 0 \tag{1.a}$$

m_2: eje y $$N - m_2 g \cos\theta = 0 \tag{1.b}$$

Cuerpo de masa m_1,

m_1: $$-3T + m_1 g = 0 \tag{2}$$

Eliminando T en las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$-\frac{m_1 g}{3} + m_2 g \sin\theta + \mu_e^{min} m_2 g \cos\theta = 0$$

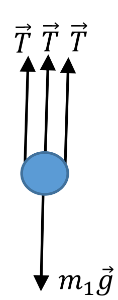
de donde,

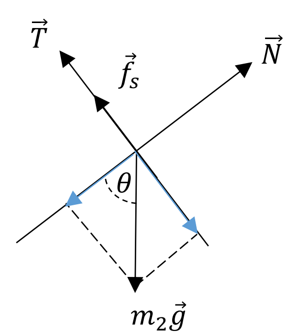
$$\mu_e^{min} = \frac{m_1 - 3m_2 \sin\theta}{3m_2 \cos\theta} \tag{3}$$

Con $m_1 = 2m_2$ y $\theta = \pi/4$,

$$\mu_e^{min} = \left|\frac{2\sqrt{2} - 3}{3}\right| \Rightarrow \ \mu_e^{min} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \tag{4}$$

b) Notemos de la ecuación (4) que el movimiento inminente es en la dirección contraria a la tomada, i.e., ↷ de manera que debemos invertir la fuerza de roce.





Escribamos las ecuaciones para cada cuerpo:

m_2: eje x $$-T - \mu_k N + m_2 g \sin\theta = m_2 \ddot{s} \quad (5.a)$$

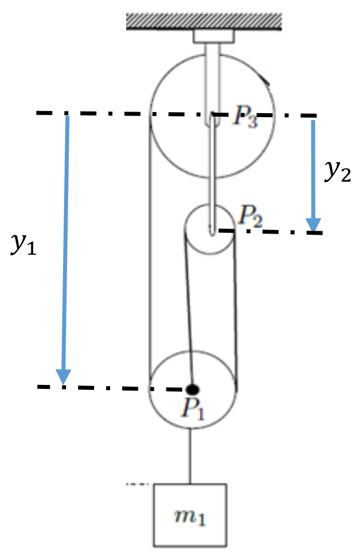
m_2: eje y $$N - m_2 g \cos\theta = 0 \quad (5.b)$$

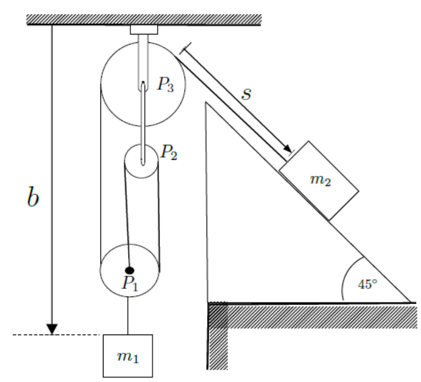
Cuerpo de masa m_1,

m_1: $$-3T + m_1 g = m_1 \ddot{b} \quad (6)$$

Ecuación de ligadura:

Marquemos las poleas de la izquierda como sigue,





Entonces, de la figura nos damos cuenta que:

$$y_1 + 2(y_1 - y_2) + s = cte$$

Derivando dos veces y teniendo en cuenta que $\ddot{b} = \ddot{y}_1$,

$$3\ddot{b} + \ddot{s} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 3a_1 + a_2 = 0 \quad (7)$$

De las ecuaciones (5.a) y (6)

m_2: eje x $$-\frac{T}{m_2} - \mu_k g \cos\theta + g \sin\theta = a_2 \quad (8)$$

m_1: $$-\frac{3T}{m_1} + g = a_1 \quad (9)$$

Teniendo en cuenta (7) obtenemos la ecuación para T,

$$-\frac{9T}{m_1}+3g-\frac{T}{m_2}-\mu_k g\cos\theta+g\sin\theta=0$$

De

$$T=\frac{m_1 m_2 g}{(9m_2+m_1)}(3-\mu_k\cos\theta+\sin\theta) \tag{10}$$

Con $m_1=2m_2$ y $\theta=\pi/4$,

$$T=\frac{m_2 g}{11}\left[3+\sqrt{2}(1-\mu_k)\right]$$

Notemos que como se espera, cuando el coeficiente de roce aumenta, la tensión también aumenta.

Para calcular la aceleración, substituimos (10) en (9) obteniendo,

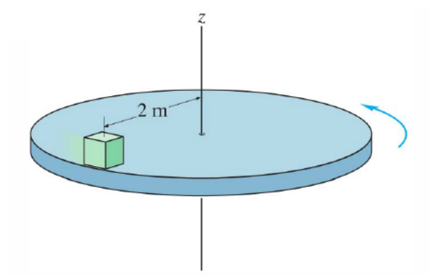
m_1: $$a_1=-\frac{3m_2 g}{(9m_2+m_1)}(3-\mu_k\cos\theta+\sin\theta)+g \tag{11}$$

$$a_1=-\frac{3g}{11}(3-\mu_k\cos\theta+\sin\theta)+g \qquad (11)$$

$$a_1=\frac{g}{11}[2-3(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)]$$

Problema 4

El bloque descansa a 2 m del centro de una plataforma. Si el coeficiente de roce estático entre el bloque y la plataforma es $\mu_k = 0.3$, determine la velocidad máxima que el bloque puede soportar antes de que comience a deslizar. Asuma que el movimiento angular del disco se va estableciendo muy lentamente.



Resp/

Como el movimiento del disco se va estableciendo muy lentamente, podemos considerar que en un instante dado la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$.

Calculemos la aceleración,

En coordenadas polares,

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} \tag{1}$$

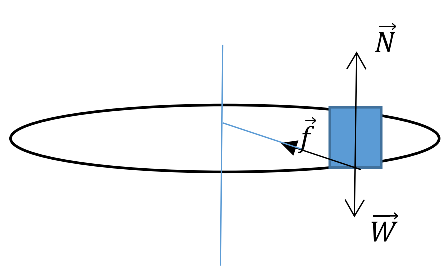
donde $\vec{r}$ marca la posición de la partícula en relación al eje del disco.

Como ρ y $\dot{\theta}$ son constantes, la aceleración es,

$$\vec{a} = -\rho\omega^2\hat{\rho} \tag{2}$$

Realicemos ahora el diagrama de fuerzas.

Notemos que la aceleración es radial y apunta hacia el centro del disco entonces, asociada a esta tendremos la fuerza de roce, y la segunda ley de Newton para el bloque queda como,



$$\vec{f} = m\vec{a} \tag{3}$$

de donde

$$f = m\,\rho\omega^2 \tag{4}$$

Cuando el cuerpo esté en la inminencia de deslizar la fuerza de roce alcanza su valor máximo siendo en ese momento igual a $\mu_e N$. Entonces, la velocidad angular máxima es,+

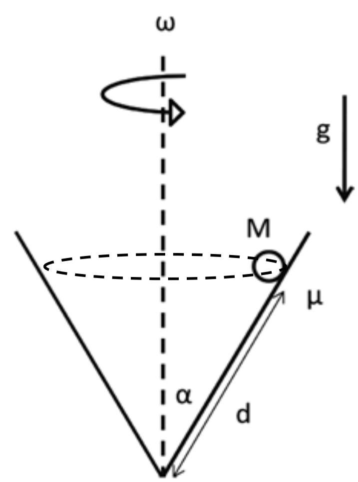
$$\mu_e mg = m\,\rho\omega_{max}^2$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{\mu_e g}{\rho}}$$

Problema 5

Una partícula de masa M se ubica sobre el manto de un cono que gira en torno a su eje con una rapidez angular ω constante de modo que la partícula no desliza, tal como muestra la figura. La partícula se encuentra situada a una distancia d de la cúspide del cono. El manto del cono forma un ángulo α con el eje de rotación y el coeficiente de roce estático entre la partícula y la superficie es igual a μ.

1. Haciendo uso de un sistema de coordenadas apropiado para este problema, determine la aceleración que experimenta la partícula.
2. Utilizando el resultado obtenido en el ítem anterior, determine **la rapidez angular mínima y máxima** para que la partícula se mantenga en reposo. Denomine $\omega_{\text{mín}}$ y $\omega_{\text{máx}}$ a estos valores.
3. Describa que ocurre en el caso que $\alpha = 0$.



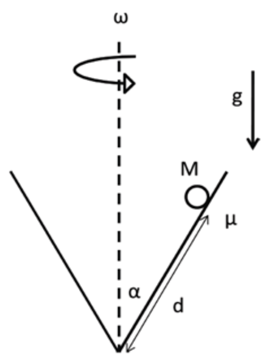
a) Tomemos el origen de coordenadas en el plano perpendicular al eje de rotación que contiene a la partícula,

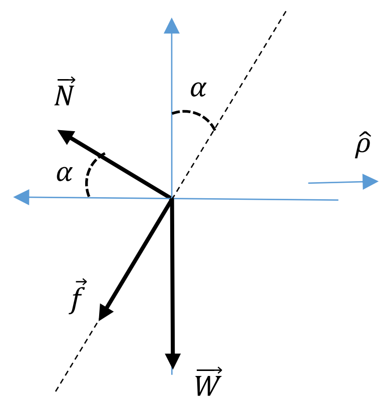
Utilizando coordenadas polares, como la velocidad angular ω y la distancia al eje ρ son contantes, la aceleración como sabemos es,

$$\vec{a} = -\rho\omega^2\hat{\rho} \tag{1}$$

b) Para resolver este problema debemos escribir la ecuación de movimiento para la partícula.

Realicemos el diagrama de fuerzas. Notemos que como la aceleración tiene dirección radial, es conveniente colocar uno de los ejes (el eje x por ejemplo) en la dirección de esta. El otro eje estaría en la dirección normal al primero.





Ecuaciones:

eje x: en la dirección $-\hat{\rho}$

$$N\cos\alpha + f\sin\alpha = m\rho\omega^2 \tag{1}$$

eje y:

$$N\sin\alpha - f\cos\alpha - mg = 0 \tag{2}$$

Notemos que colocamos la dirección de la fuerza de roce ateniendo a la dirección del movimiento en la inminencia de deslizar, cuando $\omega = \omega_{max}$.

Eliminando N de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\left(\frac{mg + f\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha + f\sin\alpha = m\rho\omega^2$$

o,

$$mg\cos\alpha + f = \sin\alpha\, m\rho\omega^2 \tag{3}$$

Para calcular ω_{max}, en la inminencia de deslizar $f = \mu_s N$ así que de (1) y (2) debemos eliminar N. Escribiendo las ecuaciones (1) y (2) como:

$$N(\cos\alpha + \mu_e \sin\alpha) = m\rho\omega_{max}^2 \quad (1b)$$

eje y: $$N(\sin\alpha - \mu_e \cos\alpha) = mg \quad (2b)$$

Obtenemos,

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g(\cos\alpha + \mu_e \sin\alpha)}{\rho(\sin\alpha - \mu_e \cos\alpha)}} \quad (4)$$

Para entender por qué hay una velocidad mínima escribamos la ecuación (3) de la siguiente forma,

$$f = \sin\alpha\, m\rho\omega^2 - mg\cos\alpha \quad (5)$$

De aquí notamos que partiendo de ω_{max}, cuando esta comienza a disminuir el término de la derecha también lo hace. En un momento determinado la fuerza de roce es cero e inmediatamente se invierte en dirección. De esta manera, la velocidad angular mínima se obtiene invirtiendo el signo de f en las ecuaciones anteriores o simplemente, escribiendo (4) como,

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g(\cos\alpha - \mu_e \sin\alpha)}{\rho(\sin\alpha + \mu_e \cos\alpha)}} \quad (6)$$

c) Cuando α disminuye, notamos que hay un valor de este en el cual sólo existe un valor de ω posible y donde la ec. (4) no tiene solución real. Cuando $\alpha = 0$ el valor de la velocidad angular es,

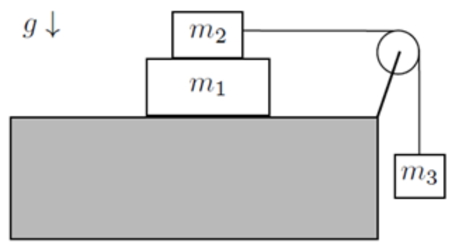
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho\mu_e}}$$

el necesario para contrarrestar la fuerza de gravedad.

Ejemplos de poblemas o enunciados "tipicos":

Problema 1

Un sistema de tres bloques con masas m_1, m_2 y m_3 esta conectado mediante una polea y cuerda ideales, tal como se muestra en la figura. Los coeficientes de roce estático y cinético entre los bloques m_1 y m_2 son μ_e y μ_c respectivamente. El coeficiente de roce cinético entre el bloque de masa m_1 y el suelo es μ.



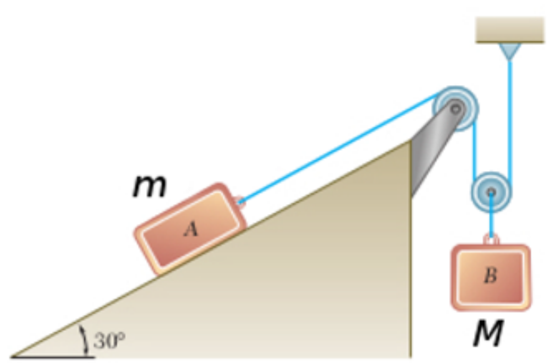
a) Determine la tensión T en la cuerda asumiendo que los cuerpos de masa m_1 y m_2 se mueven juntos, esto es, no hay deslizamiento relativo entre ellos.

b) Para el caso descrito en a), determine el módulo de la aceleración del bloque m_3.

c) Determine el valor mínimo del coeficiente de roce estático (μ_e) entre los bloques m_1 y m_2 necesario para que la cituación descrita en a) pueda ocurrir.

Problema 2

Dos bloques están en reposo dispuestos como muestra la figura abajo.



a) Despreciando las masas de las poleas y el efecto del roce en las poleas y entre el bloque A y el plano inclinado, determinar la aceleración del bloque B.

b) En la situación del inciso anterior, determinar la tensión en el cable.

Problema 3

Una pequeña moneda de masa M se encuentra sobre la superficie horizontal de un disco giratorio, a una distancia r del centro de éste, tal como se muestra la figura. Si el disco comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante encuentre la dirección y el sentido de la aceleración y la velocidad antes de que el mismo resbale sobre la superficie.