Resumen Sistemas de Coordenadas (Cartesiano y Polar)
Ayudantía 2001 de Roberto Muñoz

La Cinemática corresponde al estudio del movimiento de los cuerpos. Como movimiento se entiende a la trayectoria, velocidad y aceleración del cuerpo.

En una primera aproximación, un cuerpo físico puede ser representado por una partícula o masa puntual, con el objetivo de facilitar el estudio de su movimiento.

Para este estudio es necesario introducir herramientas matemáticas. La masa puntual se transforma en un punto que habita en un espacio dado. En este curso se trabajará generalmente con espacios 2-Dimensionales, es decir, planos.

Con el objetivo de diferenciar un punto de otro en el espacio, se utilizan ~~coordenadas~~ sistemas de coordenadas. De esta manera, cada punto en el espacio posee coordenadas que lo identifican.
El sistema de coordenadas más usual corresponde al CARTESIANO (Coordenadas cartesianas) que se construye a partir de dos rectas perpendiculares. El punto de intersección de estas dos rectas es llamado "origen" y las rectas en cuestión se llaman ejes.

Ver Figura 1

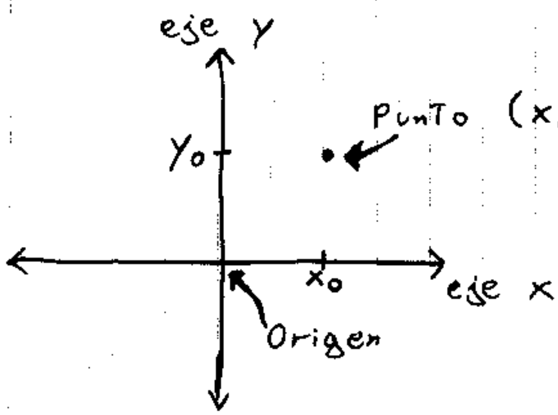


Figura 1. Plano Cartesiano

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ corresponden a vectores unitarios

La notación a utilizar es:

$$\text{POSICIÓN: } \quad (x, y) = \underset{\sim}{x} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$\text{VELOCIDAD: } \quad (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{\underset{\sim}{x}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$$

$$\text{ASCELERACIÓN: } \quad (\ddot{x}, \ddot{y}) = \ddot{\underset{\sim}{x}} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}$$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$

Sin embargo, en ciertas ocasiones (ciertos problemas) es conveniente utilizar coordenadas POLARES en vez de las archiconocidas CARTESIANAS. para representar un punto en el plano. En las coordenadas polares un punto se identifica por la distancia de éste al origen (esta distancia es designada comunmente por ρ) y el ángulo subtendido con respecto a algun eje (este ángulo se designa por θ). Ver Figura 2.

ρ := coordenada radial
θ := coordenada angular

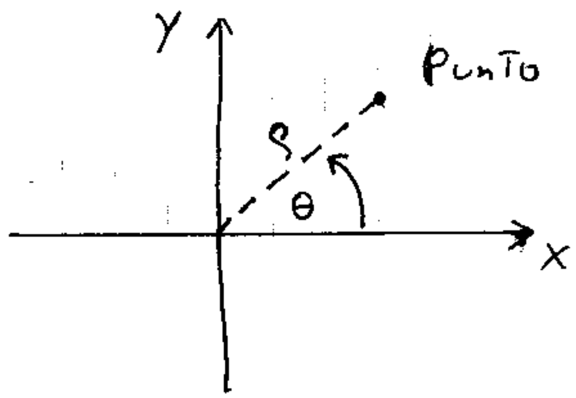


Figura 2. Representación en coordenadas Polares

La Posición de un Punto en las coordenadas Polares se designa por el par ordenado (ρ, θ). Su posición de forma vectorial es pepresentado por $\underset{\sim}{r}$.

POSICIÓN : $(\rho, \theta) = \underset{\sim}{r} = \rho\,\hat{\rho}$

donde $\hat{\rho}$ corresponde al vector unitario de ρ (eje de la distancia) y $\hat{\theta}$ corresponde al vector unitario de θ (del ángulo). Ver Figura 3

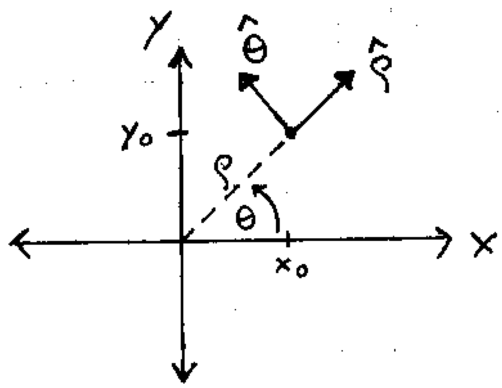


Figura 3. Vectores unitarios

De acuerdo a la Figura 3 vemos que existe una relación entre las coordenadas polares y las cartesianas. Esta relación está dada mediante las fórmulas

$$x = \rho \cdot \cos(\theta)$$
$$y = \rho \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

donde usualmente
$$\rho \geq 0$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Los vectores unitarios polares están relacionados con los vectores unitarios cartesianos mediante

$$\hat{\rho} = \cos(\theta)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Son vectores unitarios pues se cumple

$$\left.\begin{array}{l}\|\hat{\rho}\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1 \\ \|\hat{\theta}\| = \sqrt{(-\operatorname{sen}(\theta))^2 + \cos^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son unitarios}$$

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = -\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = 0$$

$$\Downarrow$$

Son ortogonales

La velocidad, como sabemos, corresponde a la derivada de la posición en función del tiempo.
Sea la posición $\underset{\sim}{r}$ de una particula con

$$\underset{\sim}{r} = \rho\cos(\theta)\,\hat{\imath} + \rho\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath} = \rho\,\hat{\rho}$$

Derivando $\underset{\sim}{r}$ en función del tiempo

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\hat{\rho} + \theta\,\hat{\theta}\right) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\hat{\rho}} \qquad \dot{\underset{\sim}{r}} := \text{Velocidad}$$

¿Cómo obtener $\dot{\hat{\rho}}$?

Bueno, sabemos que

$$\hat{\rho} = \cos(\theta)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath}$$

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\rho}\right) = \frac{d}{dt}\left(\cos(\theta)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath}\right)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\operatorname{sen}(\theta)\,\dot{\theta}\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

Sustituyendo lo anterior en $\dot{\underset{\sim}{r}}$

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

VELOCIDAD : $\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

La aceleración, como **sabemos**, corresponde a la derivada de la velocidad en función del tiempo. La aceleración se denota por $\ddot{\underset{\sim}{r}}$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underset{\sim}{r}}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\underset{\sim}{r}\right)$$

Los dos puntos sobre $\underset{\sim}{r}$ indican segunda derivada

Sabemos que la velocidad $\dot{\underset{\sim}{r}}$ es

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underset{\sim}{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underset{\sim}{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)$$

$$= \ddot{\rho}\,\hat{\rho} + \dot{\rho}\,\dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\left(\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}\right)$$

$$= \ddot{\rho}\,\hat{\rho} + \dot{\rho}\,\dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}$$

Sabemos que $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$, pero ¿cómo obtener $\dot{\hat{\theta}}$?

Bueno, sabemos que

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}\right)$$

$$= -\cos(\theta)\,\dot{\theta}\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}(\theta)\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath} = \dot{\theta}\left[-\cos(\theta)\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath}\right]$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{\rho}$$

Sustituyendo $\dot{\hat{\rho}}$ y $\dot{\hat{\theta}}$ en $\underset{\sim}{\ddot{r}}$ obtenemos

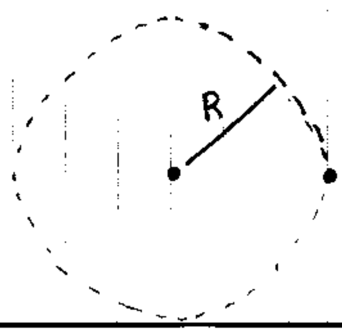
$$\underset{\sim}{\ddot{r}} = \ddot{\rho}\,\hat{\rho} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - \rho\,\dot{\theta}^{2}\,\hat{\rho}$$

$$\underset{\sim}{\ddot{r}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^{2}\right)\hat{\rho} + \left(\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

ACELERACIÓN : $\underset{\sim}{\ddot{r}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^{2}\right)\hat{\rho} + \left(\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$

EJERCICIOS

1.- El planeta Tierra gira alrededor del Sol demorando aproximadamente 365 días en completar una revolución. Suponiendo que la órbita es circular y tenga un radio de $1,5 \times 10^{8}$ Km, calcule la rapidez y aceleración centrípeta de la Tierra. Aproxime la Tierra a una masa puntual.



$R = 1,5 \times 10^{8}$ Km

$T = 365$ días

$= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s

$= 31536 \times 10^{3}$ s

Solución

Primero, vemos que corresponde a un movimiento circular uniforme. En este problema es más conveniente utilizar coordenadas polares en vez de las cartesianas

Para encontrar la rapidez de la Tierra utilizamos la fórmula de velocidad en coordenadas polares.

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

Como la órbita de la Tierra es circular (aproximadamente) el radio ρ es constante e igual a $1,5 \times 10^8$ Km.
Por lo tanto, $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = 0$ Derivada de una constante es cero

$$\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{r}} = \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad (1)$$

donde $\rho = 1,5 \times 10^8$ Km y $\dot{\theta}$ se calcula por los datos pues ($\dot{\theta}$ se conoce como velocidad angular

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta \measuredangle \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{31536 \times 10^3} \left[\text{rad}/\text{s} \right]$$

Sustituyendo los valores de ρ y $\dot{\theta}$ en (1)

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_{\text{Tierra}} = 1,5 \times 10^8 \cdot \frac{2\pi}{31536 \times 10^3} \left[\text{Km}/\text{s} \right] \hat{\theta}$$

La rapidez corresponde al módulo de la velocidad

$$\text{rapidez Tierra} = \frac{3 \times 10^5\,\pi}{31536} \left[\text{Km}/\text{s} \right] \approx 29,8 \left[\text{Km}/\text{s} \right]$$

- La aceleración centripeta corresponde a la aceleración radial de una partícula. La aceleración centrípeta está dirigida hacia el centro del círculo.

Para calcular la aceleración centrípeta utilizamos la expresión de aceleración en coordenadas polares.

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

Pero como vimos, la aceleración centrípeta corresponde a la aceleración radial

$$\Rightarrow \text{Aceleración centrípeta} := a_{\text{CENTRIPETA}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho}$$

Como corresponde a un movimiento circular,

$\rho = \text{constante} \Rightarrow \dot{\rho} = 0 = \ddot{\rho}$

$$\Rightarrow a_{\text{CENTRIPETA}} = (-\rho\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho}$$

Sabemos que $\rho = 1{,}5 \times 10^8$ Km y $\dot{\theta} = \dfrac{2\pi}{31536 \times 10^3}\left[\dfrac{rad}{s}\right]$

$$\Rightarrow a_{\substack{\text{CENTRIPETA}\\\text{TIERRA}}} = -1{,}5 \times 10^8 \cdot \left(\frac{2\pi}{31536 \times 10^3}\right)^2 \left[\frac{Km}{s^2}\right]\hat{\rho}$$

$$\approx -5{,}9 \times 10^{-6}\left[\frac{Km}{s^2}\right]\hat{\rho}$$