PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Segundo Semestre 2017.

Interrogación 01

Duración: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
8. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
9. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo pero pierde el derecho a recorrección.
10. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
    - Cometer fraude en la evaluación
    - Adulterar el acta de asistencia
    - Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas
    - Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica
    - Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

---

1. Preguntas de selección múltiple

1.1. Interpretación de curvas I [1 punto]

Dada la siguiente gráfica de posición x versus tiempo t:

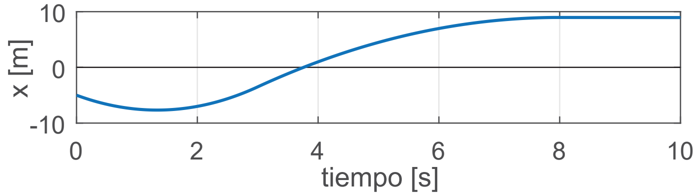
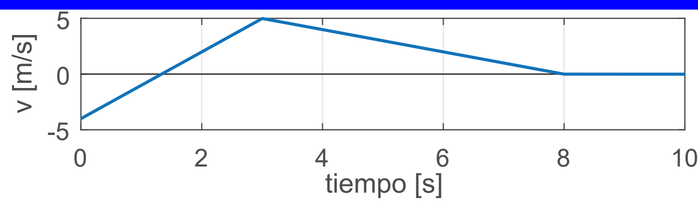


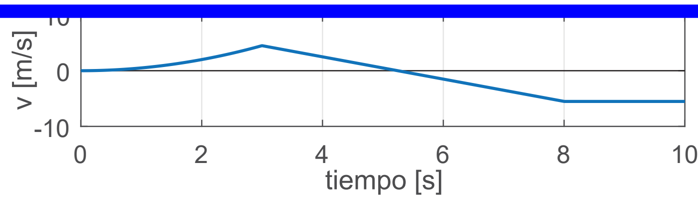
Figura 1: Gráfica x–t.

Indique cuál es la gráfica de velocidad v versus tiempo t asociada a la Figura 1:

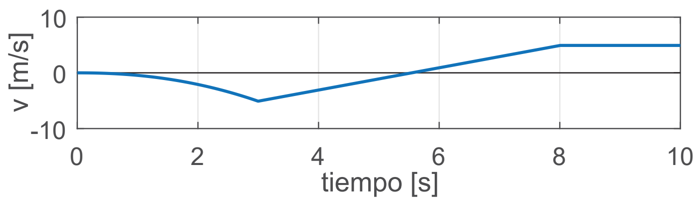
a)



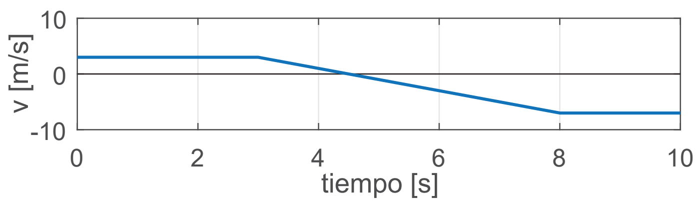
b)



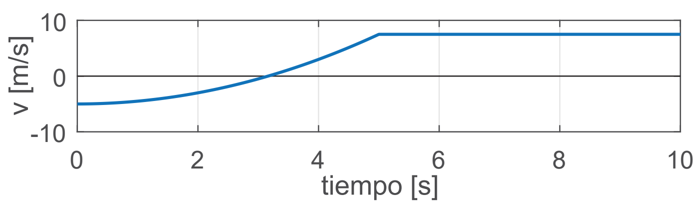
c)



d)



e)



1.2. Interpretación de curvas II [1 punto]

Una partícula se desplaza a lo largo del eje x describiendo la gráfica x-t mostrada en la figura 2. En los puntos A, B, C, D y E se mide la velocidad v de la partícula.

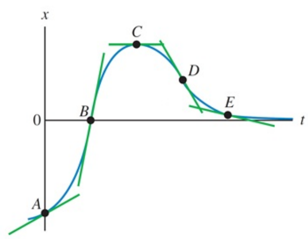


Figura 2: Gráfica x–t.

En la figura 3 elige cuál de los conjuntos de gráficas se corresponde con el diagrama x-t. Cada conjunto de gráficas muestra la posición y velocidad de la partícula (punto negro) en los instantes t_A, t_B, t_C, t_D y t_E. El tamaño del vector es proporcional a la velocidad $\vec{v}$.

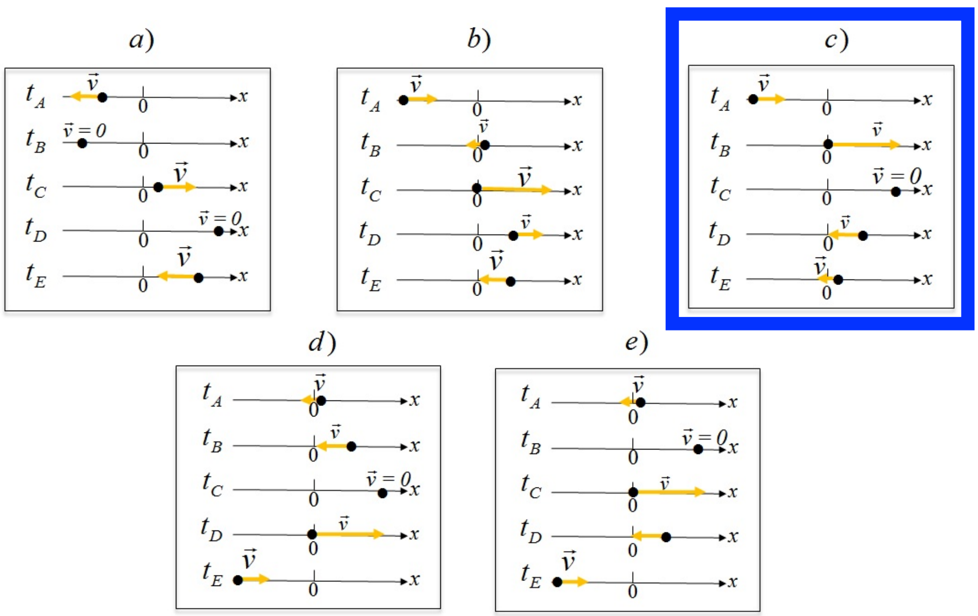
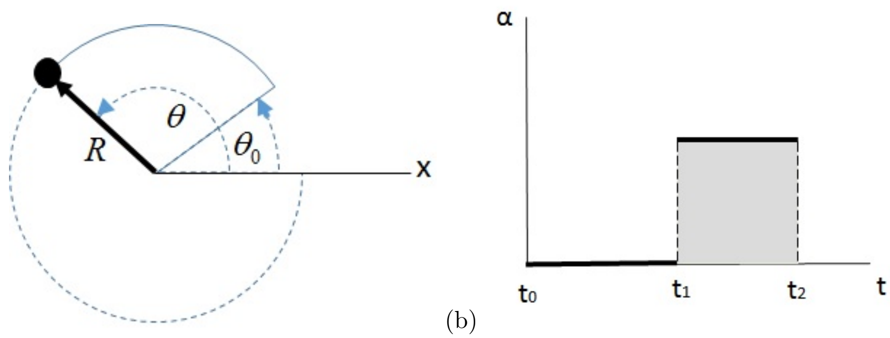


Figura 3: Gráfica de posición y velocidad de la partícula.

1.3. Interpretación de curvas III – movimiento circular [1 punto]

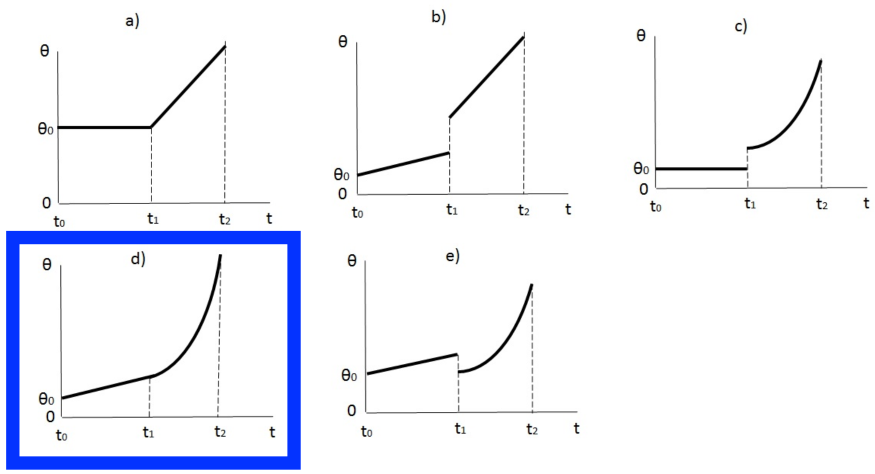
Suponga que una partícula ejecuta un movimiento circular de radio R, partiendo de un ángulo inicial θ_0 con respecto al eje horizontal x, tal como se muestra en la figura 4(a). La gráfica de la aceleración angular, $\alpha = \ddot{\theta}(t)$, vs tiempo de la partícula se muestra en la figura 4(b).



(a) (b)

Figura 4: (a) Gráfica de movimiento circular. (b) Gráfica de aceleración angular vs tiempo t.

De acuerdo con la gráfica α vs t ¿Cuál es la gráfica θ vs t apropiada para este sistema?



1.4. Movimiento rectilíneo – 1D [1 punto]

Una empresa china está diseñando un fuego artificial gigante. El aparato en cuestión genera una aceleración vertical que se ajusta a $a(t) = (24 - 6t)$ m/s^2 hasta que se le acaba el combustible en $t = 4\,s$. Debido al gran peso del aparato, una lanzadera le confiere una velocidad vertical inicial $v_0 \neq 0$. Asuma que el aparato inicia su vuelo desde $z = 0$. Si al término del combustible $(t = 4)$ el aparato se encuentra a $z = 200\,m$ de altura; entonces la velocidad inicial v_0 que le confiere la lanzadera es:

a) $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$

b) $\boxed{v_0 = 18\,\mathrm{m/s}}$

c) $v_0 = 36\,\mathrm{m/s}$

d) $v_0 = 72\,\mathrm{m/s}$

e) $v_0 = 152\,\mathrm{m/s}$

Solución

La velocidad es:

$$v(t) = \int a(t)\ \mathrm{d}t = -3t^2 + 24t + C_1$$

, donde $v(t = 0) = C_1 = v_0$. El desplazamiento es:

$$d(t) = \int v(t)\ \mathrm{d}t = -t^3 + 12t^2 + v_0 t + C_2$$

, donde $d(t = 0) = C_2 = d_0 = 0$. Con lo que:

$$d(t) = -t^3 + 12t^2 + v_0 t$$

Sabemos que $d(t = 4\,s) = 200\,m$, por lo que:

$$\begin{aligned} d(t = 4\,s) &= -(4)^3 + 12(4)^2 + v_0(4) = -64 + 192 + 4v_0 = 200 \\ 72 &= 4v_0 \\ v_0 &= 18\,m/s \end{aligned}$$

1.5. Movimiento relativo I [1 punto]

Un aeropuerto pequeño tiene dos pistas de aterrizaje a 30° una de otra. El avión A acaba de tocar el suelo y comienza su frenado ($v_0 = 80\,\hat{p}$ [m/s] y $a = -4\,\hat{p}\,\left[\text{m/s}^2\right]$), con lo que se le autoriza al avión en B iniciar su carrera de despegue ($v_0 = 0\,m/s$ y $a = 2{,}4\,\hat{q}\,\left[\text{m/s}^2\right]$), donde $\hat{p}$ y $\hat{q}$ son los vectores directores de los aviones A y B respectivamente. Ambos aviones se mueven con aceleración constante. La velocidad relativa (vector) del avión B para un observador en A transcurridos 10 segundos es:

a) $\mathbf{v}_{B/A} = \left(40 + 12\sqrt{3}\right)\hat{\imath} + (12)\,\hat{\jmath}\quad$ [m/s]

b) $\mathbf{v}_{B/A} = \left(-40 - 12\sqrt{3}\right)\hat{\imath} + (-12)\,\hat{\jmath}\quad$ [m/s]

c) $\mathbf{v}_{B/A} = (40 + 12)\,\hat{\imath} + \left(12\sqrt{3}\right)\hat{\jmath}\quad$ [m/s]

d) $\boxed{\mathbf{v}_{B/A} = (-40 - 12)\,\hat{\imath} + \left(-12\sqrt{3}\right)\hat{\jmath}\quad \text{[m/s]}}$

e) $\mathbf{v}_{B/A} = \left(-12\sqrt{3}\right)\hat{\imath} + (-12)\,\hat{\jmath}\quad$ [m/s]

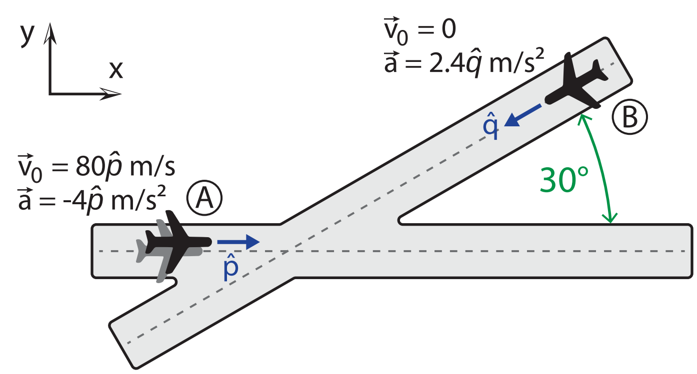


Figura 5: Aterrizaje y despegue de un aeropuerto: el avión A está aterrizando al mismo tiempo que el avión B inicia su despegue.

Solución

Las velocidades de los aviones en función del tiempo son:

$$\mathbf{v}_A(t) = \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 80 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{v}_B(t) = 2{,}4 \begin{Bmatrix} -\cos(30°) \\ -\sin(30°) \end{Bmatrix} t$$

, que evaluados en $t = 10\,s$ resulta:

$$\mathbf{v}_A(t = 10\,s) = \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \end{Bmatrix}(10) + \begin{Bmatrix} 80 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \end{Bmatrix}\ [m/s]$$

$$\mathbf{v}_B(t = 10\,s) = 2{,}4 \begin{Bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{Bmatrix}(10) = \begin{Bmatrix} -12\sqrt{3} \\ -12 \end{Bmatrix}\ [m/s]$$

Se sabe de movimiento relativo que $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, con lo que:

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} -12\sqrt{3} \\ -12 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40 - 12\sqrt{3} \\ -12 \end{Bmatrix}\ [m/s]$$

1.6. Movimiento relativo II [1 punto]

El vehículo A se mueve (acelerando) hacia la izquierda con $v_0 = 15\,\hat{\imath}\,\mathrm{m/s}$ y $a = 1\,\hat{\imath}\,\mathrm{m/s^2}$. El vehículo B se mueve por la rotonda de radio $r = 120\,\mathrm{m}$ con rapidez constante $v_\theta = 12\,\mathrm{m/s}$. Determine la aceleración (vector) que tiene el vehículo B para un observador en A en el instante mostrado en la Figura 6.

Nota: Los ejes coordenados x e y apuntan hacia la izquierda y hacia abajo, respectivamente. Como muestra la Figura 6.

a) $\mathbf{a}_{B/A} = \left(-0{,}6\sqrt{3} - 1\right)\hat{\imath} + (0{,}6)\,\hat{\jmath} \quad \left[\mathrm{m/s^2}\right]$

b) $\boxed{\mathbf{a}_{B/A} = \left(0{,}6\sqrt{3} - 1\right)\hat{\imath} + (-0{,}6)\,\hat{\jmath} \quad \left[\mathrm{m/s^2}\right]}$

c) $\mathbf{a}_{B/A} = \left(-0{,}05\sqrt{3} - 1\right)\hat{\imath} + (0{,}05)\,\hat{\jmath} \quad \left[\mathrm{m/s^2}\right]$

d) $\mathbf{a}_{B/A} = \left(0{,}05\sqrt{3} - 1\right)\hat{\imath} + (-0{,}05)\,\hat{\jmath} \quad \left[\mathrm{m/s^2}\right]$

e) $\mathbf{a}_{B/A} = \left(-0{,}05\sqrt{3}\right)\hat{\imath} + \left(1 + 0{,}05\sqrt{3}\right)\hat{\jmath} \quad \left[\mathrm{m/s^2}\right]$

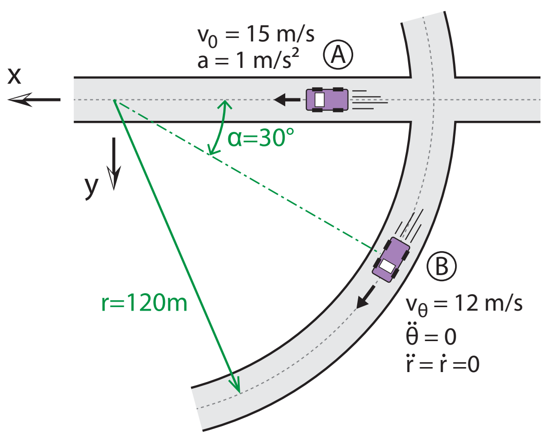


Figura 6: Moviemiento relativo de vehículos: A se mueve en línea recta, mientras que B lo hace en una rotonda.

Solución

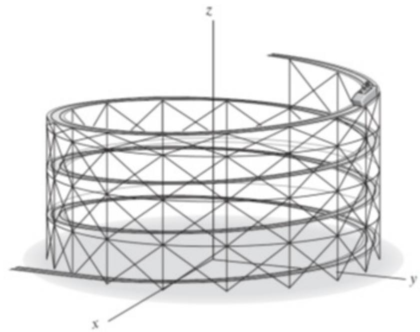
La aceleración del vehículo A es: $\mathbf{a}_A = 1\hat{\imath}\ m/s^2$. El vehículo B sólo tiene aceleración centrípeta: $\mathbf{a}_B = -r\left(\dot{\theta}\right)^2 \hat{e}_r = -\left(v_\theta\right)^2/r = -12^2/120 = -1{,}2\,\hat{e}_r\ m/s^2$. Escribiendo el vector director $\hat{e}_r$ en términos de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, se obtiene:

$$\hat{e}_r = \cos(30°)\,\hat{\imath} - \sin(30°)\,\hat{\jmath} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}$$

, con lo que: $\mathbf{a}_B = (-1{,}2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) = 0{,}6\sqrt{3}\,\hat{\imath} - 0{,}6\,\hat{\jmath}\ [m/s]$. Se sabe de movimiento relativo que $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, con lo que:

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A = \left(0{,}6\sqrt{3} - 1\right)\hat{\imath} - 0{,}6\,\hat{\jmath}\ [m/s^2]$$

1.7. Movimiento helicoidal [1 punto]



El carro de la montaña rusa desciende por la trayectoria helicoidal de modo que las ecuaciones paramétricas que definen su posición son

$$x = c\,\mathrm{sen}(kt), \qquad y = c\,\cos(kt), \qquad z = h - b\,t,$$

donde c, h, k y b son constantes.

Las magnitudes de su velocidad y aceleración son:

a) $v = \sqrt{b^2 + c^2k^2}$ $\quad a = c\,k^2$

b) $v = b + ck$ $\quad a = h\,k^2$

c) $v = -b + ck$ $\quad a = c\,b^2/h^2$

d) $v = b - ck$ $\quad a = c\,k^2 + c\,b^2/h^2$

e) $v = \sqrt{b^2 + h^2k^2}$ $\quad a = h\,k^2$

Solución:

$$\vec{r} = c\sin(kt)\hat{\imath} + c\cos(kt)\hat{\jmath} + (h - bt)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(c\sin(kt)\hat{\imath} + c\cos(kt)\hat{\jmath} + (h - bt)\hat{k}\right)$$

$$\vec{v} = ck\cos(kt)\hat{\imath} - ck\sin(kt)\hat{\jmath} - b\hat{k}$$

$$v = |\vec{v}| = \left|ck\cos(kt)\hat{\imath} - ck\sin(kt)\hat{\jmath} - b\hat{k}\right|$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{c^2k^2\cos^2(kt) - c^2k^2\sin^2(kt) + b^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{c^2k^2 + b^2}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ck\cos(kt)\hat{\imath} - ck\sin(kt)\hat{\jmath} - b\hat{k}\right)$$

$$\vec{a} = -ck^2\sin(kt)\hat{\imath} - ck^2\cos(kt)\hat{\jmath}$$

$$a = |\vec{a}| = \left|-ck^2\sin(kt)\hat{\imath} - ck^2\cos(kt)\hat{\jmath}\right|$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(ck^2)\sin^2(kt) + (ck^2)\cos^2(kt)}$$

$$\boxed{a = |\vec{a}| = ck^2\sqrt{\sin^2(kt) + \cos^2(kt)} = ck^2}$$

1.8. Newton – equilibrio de fuerzas [1 punto]

La caja de 500 kg mostrada en la figura se suspende utilizando las cuerdas AB y AC. Cada cuerda puede resistir una tensión máxima de 10 kN antes de romperse. Si el segmento AB permanece siempre horizontal, determine el mínimo ángulo θ al cual puede suspenderse la caja antes de que la cuerda AC se corte. Asuma que la aceleración de gravedad es $\vec{g} = -10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \hat{j}$.

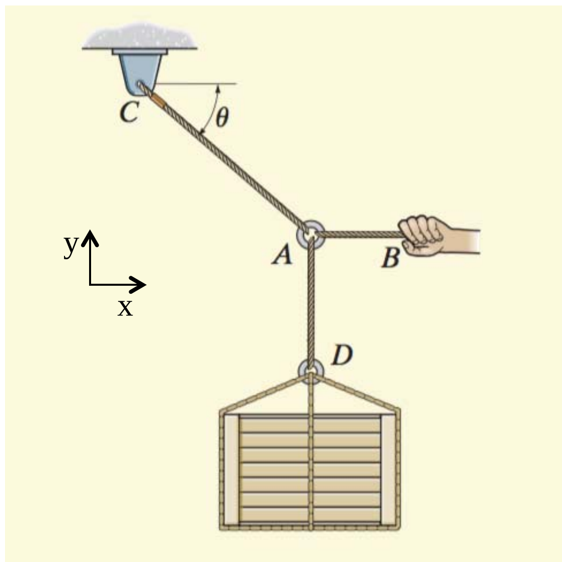
a) 5°

b) $\boxed{30°}$

c) 45°

d) 60°

e) 85°



<u>Solución</u>

Haciendo un diagrama de cuerpo libre de la argolla en A, y usando la 2^a Ley de Newton:

$$n_{ac}\begin{Bmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} + n_{ac}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + mg\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

, donde n_{ac} y n_{ab} son las tensiones de la cuerda en los tramos $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ respectivamente. De la segunda ecuación tenemos que:

$$n_{ac}\sin(\theta) - mg = 0$$

$$n_{ac} = \frac{mg}{\sin(\theta)}$$

Al momento de romperse, la cuerda tiene una tensión $n_{\text{máx}} = 10\,kN$, por lo que:

$$n_{ac} = n_{\text{máx}} = \frac{mg}{\sin(\theta)}$$

$$10\,kN = \frac{(500)\,(10)}{\sin(\theta)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$$

2. Problemas de desarrollo

2.1. Proyectiles [4 puntos]

El patio de deportes de una escuela se encuentra en un segundo piso a h_1 metros sobre la calle (ver figura 1). La pared vertical del edificio sobre el patio de deportes tiene h_2 metros de altura. Una pelota cae a la calle y un peatón que pasaba la lanza de vuelta a un ángulo θ sobre la horizontal desde un punto a una distancia d de la base del edificio.

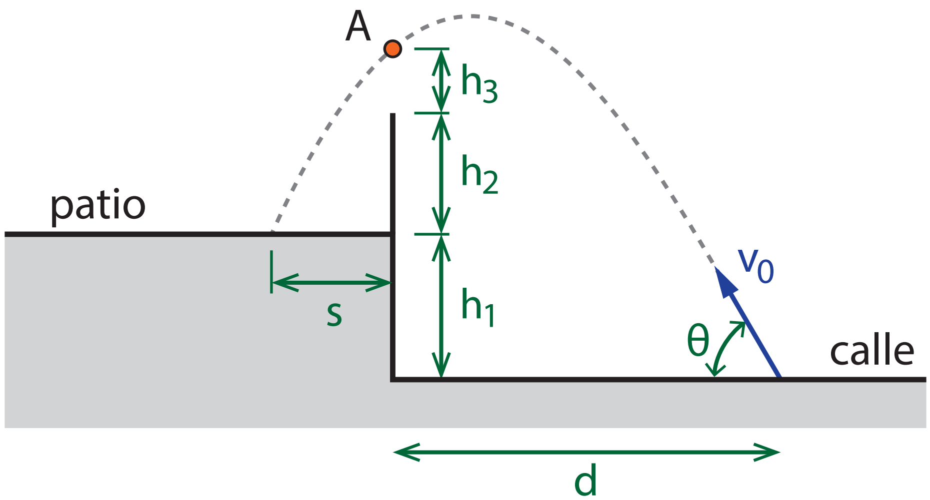


Figura 1: Gráfica de lanzamiento parabólico.

Si la pelota tarda un tiempo t_1 para alcanzar un punto A verticalmente encima de la pared,

a) Encuentre la velocidad a la cual fue lanzada.

b) Encuentre la distancia vertical h_3 a la cual la bola pasa sobre la pared.

c) Encuentre la distancia s desde la pared al punto en que la bola toca el piso.

Nota: Exprese sus respuestas en función de h_1, h_2, t_1, θ, g y d.

Resp/

a)

Escribimos las ecuaciones para el movimiento vertical (en y) y horizontal (en x) de la pelota.

Eje x $$x = v_o \cos\theta\, t$$

(1pt. por escribir la ecuación)

De esta ecuación con θ dado, y t_1 tal que $x = d$, obtenemos

$$v_o = \frac{d}{\cos\theta\, t_1}$$

(1pt. por obtener el resultado)

b) Para encontrar la distancia vertical, de la ecuación para el eje y

Eje y $$y = v_o \sin\theta\, t - \frac{gt^2}{2}$$ ptos (xx)

(0.5 pts. por escribir la ecuación)

del inciso anterior, con d, θ y t_1 dados,

$$y_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d - \frac{gt_1^2}{2}$$ ptos (xx)

Entonces, pasa a una altura sobre la pared de

$$h_3 = y_1 - (h_1 + h_2)$$

$$h_3 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d - \frac{gt_1^2}{2} - (h_1 + h_2)$$ ptos (xx)

(1.5 pts. por escribir la ecuación)

c) Para encontrar la distancia a la que cae de la pared substituyendo (1) en (2) obtenemos la ecuación de la trayectoria.

$$y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} x^2$$ ptos (xx)

(0.5 pts. por escribir la ecuación)

En el punto en que toca la cancha, $y = h_1$ así que debemos resolver

$$h_1 = \tan\theta\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} x^2$$ ptos (xx)

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 - \tan\theta\, x + h_1 = 0$$

ptos (xx)

$$x^2 - \frac{2v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}x + \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}h_1 = 0$$

(1.0 pts. por llegar a esta expresión o compatible con ella)

$$x = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}\right)^2 - \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}h_1}$$

$$x = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2gh_1}{v_0^2(\sin\theta)^2}}\right]$$

y con $v_o = \frac{d}{\cos\theta t_1}$

La distancia a la pared será;

$$S = \frac{d^2\tan\theta}{t_1^2 g}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2gh_1t_1^2}{d^2(\tan\theta)^2}}\right] - d$$

(0.5 pts. por llegar a esta expresión o compatible con ella)

2.2. Cinemática rotacional [4 puntos]

la barra OA de longitud $\frac{1}{2}$ m mostrada en la figura rota en un plano horizontal xy paralelo al piso de tal forma que su ángulo θ respecto al eje x está dado por $\theta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)$ rad. Cuando el anillo B desliza por la barra, su distancia r al punto O está dada por $r = \left(\frac{t^2}{2}\right)$ m. En ambas expresiones t está medido en segundos. Una vez que el anillo llega al final de la barra cae libremente desde $z = 0$ m hasta $z = -\frac{1}{5}$ m bajo la sola acción de la gravedad hasta impactarse con el piso en un punto P.

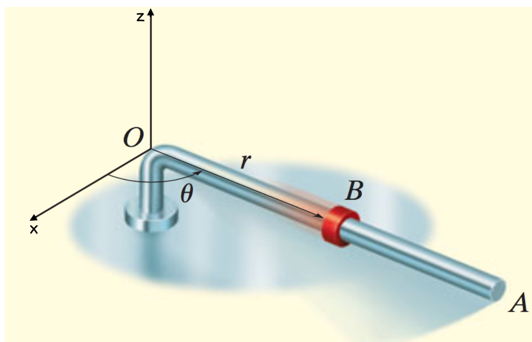
a) Determine la velocidad $\vec{v}_B$ del anillo B en el instante $t = 0{,}5$ s en coordenadas polares.

b) Determine la aceleración $\vec{a}_B$ del anillo B en el instante $t = 0{,}5$ s en coordenadas polares.

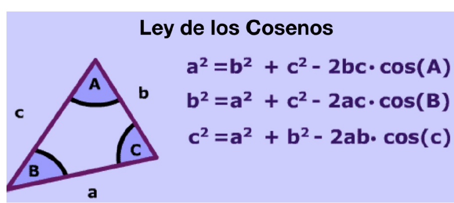
c) Para el instante en que el anillo se encuentra en A (justo antes de comenzar a caer) determine el ángulo que la velocidad $\vec{v}_B$ tiene con la barra OA y su magnitud $|\vec{v}_B|$.

d) Determine el tiempo transcurrido entre que el anillo B se sale de la barra y que llega al punto P ($z = -\frac{1}{5}$ m).

e) Determine la distancia del punto de impacto P al eje z.



Nota: Asuma $\vec{g} = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ \hat{z}$. Simplifique sus resultados lo más posible hasta dejarlos en términos de raíces cuadradas que no necesita evaluar numéricamente. Podría ser útil el recordar la ley de los cosenos:



Pauta: Problema de Desarrollo 2

a) Conocemos $r(t)$ y $\theta(t)$ para cuando B está en la barra. Por ende tenemos que:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^2}{2} \\ \dot{r}(t) &= t \\ \ddot{r}(t) &= 1 \end{aligned}$$

(0.3 pts. por $\dot{r}$ y $\ddot{r}$)

y que:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}}t \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \ddot{\theta}(t) &= 0. \end{aligned}$$

(0.3 pts. por $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$)

Sabemos que en general, para coordenadas polares, tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \text{ (0,3 pts. por usar formula correcta)} \\ \vec{a}(t) &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \end{aligned}$$

Puesto que $r(0{,}5 \text{ s}) = \frac{1}{(2)^2 2} = \frac{1}{8}$ m $< 0{,}5$ m, en $t = 0{,}5$ s el anillo B todavía está en la barra en ese instante. Por ende podemos utilizar las expresiones de arriba, y nos queda:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B(0{,}5) &= \frac{1}{2}\hat{r} + \frac{1}{8}\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{2}\hat{r} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\hat{\theta} \text{ (0,3 pts. por resultado correcto)} \end{aligned}$$

b) De la misma forma, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B(0{,}5) &= \left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\hat{r} + \left(2\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} + 0\right)\hat{\theta} \\ &= \frac{5}{6}\hat{r} + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\theta} \end{aligned}$$

(1.2 pts. por resultado correcto; 0.6 pts. si usa fórmula y procedimiento correcto, pero tiene error de cálculo o de arrastre.)

c) La barra mide $l_{OA} = \frac{1}{2}$ m, por lo que el tiempo t_A que tarda B en llegar a A es:

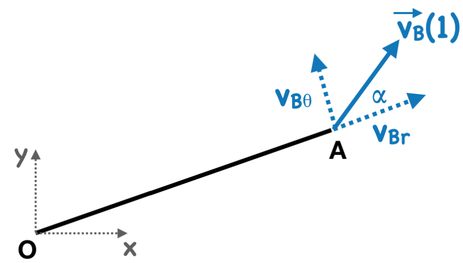
$$\begin{aligned} \frac{t_A^2}{2} &= \frac{1}{2} \\ \rightarrow t_A &= 1 \text{ s } \color{red}{(0{,}3 \text{ pts.})} \end{aligned}$$

Remplazando otenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B(1) &= \hat{r} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\theta} \\ &= \hat{r} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\theta} \end{aligned}$$

(0.3 pts. por resultado correcto; 0.15 pts. si procedimiento correcto pero tiene error de cálculo o arrastre.)

Viendo la barra desde arriba (con una orientación arbitraria) tenemos algo así:



donde α es el ángulo que el vector velocidad hace con la dirección de la barra OA, y v_{Br} y $v_{B\theta}$ son las componentes en $\hat{r}$ y θ respectivamente. Nos queda que:

$$\cos\alpha = \frac{v_{Br}}{\sqrt{v_{Br}^2 + v_{B\theta}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(0.3 pts. por resultado correcto, que puede quedar en términos de seno o tangente también, sin necesidad de simplificarse; 0.15 pts. si procedimiento correcto pero tiene error de cálculo o arrastre.)

por lo que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (o 30°). La magnitud es simplemente $|\vec{v}_B(1)| = \sqrt{v_{Br}^2 + v_{B\theta}^2}$ (0,15 pts.) $= \frac{2}{\sqrt{3}}$. (0.15 pts. por valor correcto)

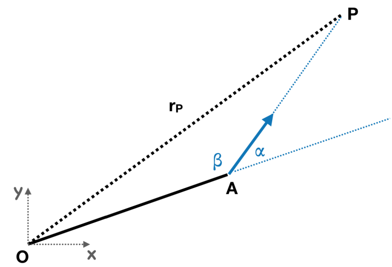
d) El movimiento en z es independiente de lo que pasa en x y en y. Al momento de comenzar a caer, B no tiene velocidad en z, y la aceleración es constante e igual a la de la gravedad. Por ende:

$$z(t') = -\frac{1}{2}gt'^2 \text{ } \color{red}{(0{,}6 \text{ pts.})}$$

donde t' está medido desde que B comienza a caer. Si t'_P es el tiempo que tarda en impactarse con la mesa en P, obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}gt'^2_P &= -\frac{1}{5} \\ \rightarrow t'_P &= \frac{1}{5} \text{ s } \color{red}{(0{,}6 \text{ pts. por valor correcto})} \end{aligned}$$

e) **Solución alternativa #1:** Una vez que B deja la barra, su velocidad no cambia en x y en y ya que no hay aceleración en esas direcciones (0.3 pts.). Viendo la barra desde arriba, significa que B viaja en línea recta y tenemos algo como lo siguiente:



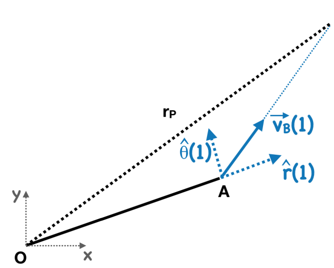
En este dibujo, la barra OA se muestra en la dirección que tenía justo cuando B comenzó a caer, y r_P es la distancia que nos interesa, es decir la distancia entre el punto P y el eje z. Como la velocidad es constante en x y en y, la distancia horizontal AP (proyectada en el plano xy) está dada simplemente por el producto de la velocidad justo antes de caer por el tiempo que tarda en caer, es decir $l_{AP} = |\vec{v}_B(1)|t'_P = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{5} = \frac{2}{5\sqrt{3}}$ m.(0.3 pts. por resultado correcto; 0.15 pts. si procedimiento es correcto pero tiene error de cálculo o arrastre)

La ley de los cosenos nos dice que:

$$
\begin{aligned}
r_P^2 &= l_{OA}^2 + l_{AP}^2 - 2l_{OA}l_{AP}\cos\beta \\
&\quad \text{(0,3 pts. si plantea bien ley de cosenos para obtener distancia)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{4}{75} + \frac{1}{5} \\
&= \frac{151}{300}
\end{aligned}
$$

donde usamos que $\beta = \pi - \alpha = \frac{5\pi}{6}$. Concluimos que $r_P = \sqrt{\frac{151}{300}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{151}{3}}$.(0.3 pts. por resultado correcto.)

Solución alternativa # 2: Viendo la barra desde arriba, tenemos algo como lo siguiente:



Claramente se cumple que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ (0.3 pts. por plantear correctamente la suma vectorial). Considerando el sistema de referencia cilíndrico dado por los vectores $\hat{r}(1)$ y $\hat{\theta}(1)$ en el instante $t = 1$ s, así como el $\hat{z}$ usual, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= \frac{1}{2}\hat{r}(1) \\
\overrightarrow{AP} &= \left(\hat{r}(1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\theta}(1)\right)\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\hat{z} = \frac{1}{5}\hat{r}(1) + \frac{1}{5\sqrt{3}}\hat{\theta}(1) - \frac{1}{5}\hat{z}
\end{aligned}
$$

ya que la velocidad no cambia con el tiempo en $\hat{r}(1)$ y $\hat{\theta}(1)$ ya que no hay aceleración en estas direcciones (0.3 pts. por entender que la velocidad no cambia en las componentes horizontales). Haciendo la suma llegamos a:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{7}{10}\hat{r}(1) + \frac{1}{5\sqrt{3}}\hat{\theta}(1) - \frac{1}{5}\hat{z}$$

(0.3 pts por calcular correctamente las componentes horizontales de $\overrightarrow{AP}$; 0.15 pts. si procedimiento es correcto pero tiene error de cálculo o arrastre). Para calcular la distancia horizontal del punto P al eje z ignoramos la componente en $\hat{z}$ y nos queda que:

$$\begin{aligned}
r_P &= \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{75}} \\
&= \sqrt{\frac{151}{300}} \\
&= \frac{1}{10}\sqrt{\frac{151}{3}}
\end{aligned}$$

(0.3 pts. por resultado correcto.)