Clase #22

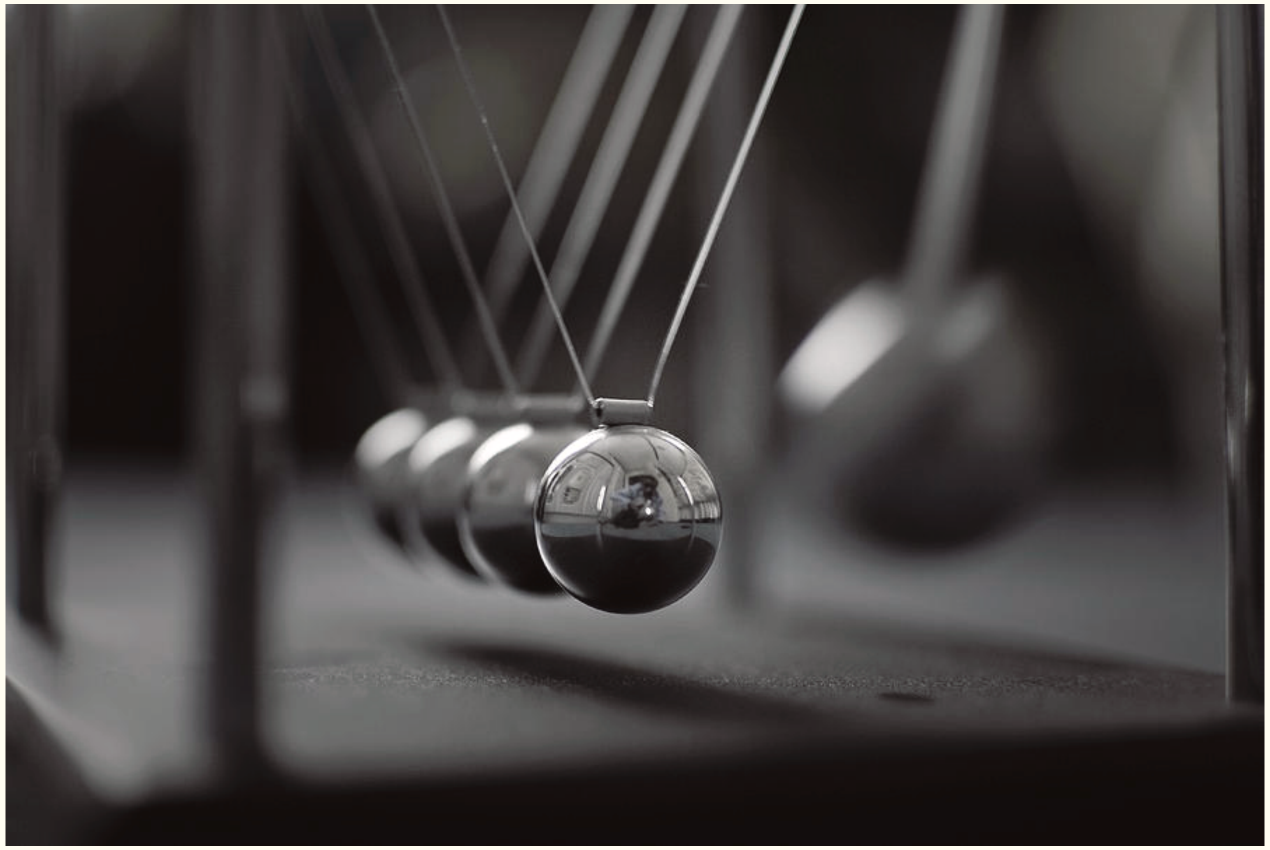
31-10-2018

Cuerpo Rígido

Estática y Dinámica
FIS1513

Anuncios

- ¡Espero les haya ido bien en la I3!
- Hoy es el último día para solicitar recorrecciones de la i2
- ¡Les deseo un muy buen fin de semana largo!



Recordatorio

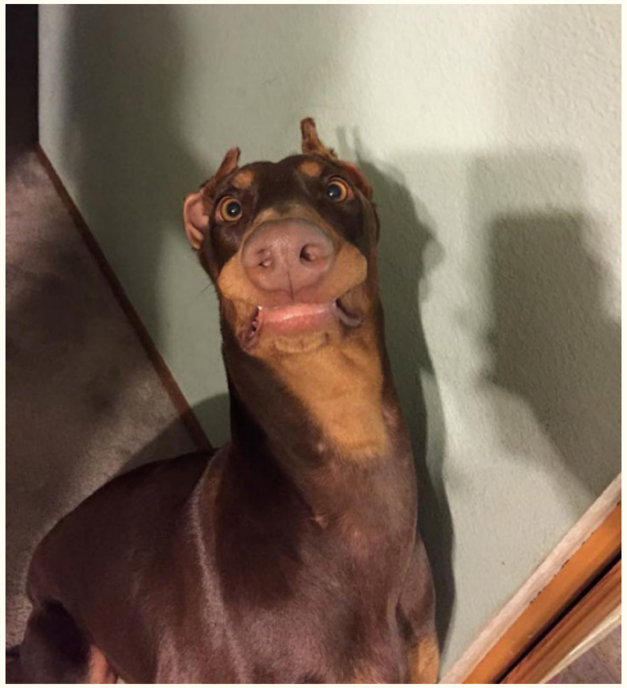
Para cualquier sistema de partículas:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

$$\vec{p}_{\mathrm{total}} = M_{\mathrm{total}}\vec{v}_{\mathrm{CM}}$$

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = M_{\mathrm{total}}\vec{a}_{\mathrm{CM}}$$

(y por ende $\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \dfrac{d\vec{p}_{\mathrm{total}}}{dt}$)



Cuando fuerzas externas actúan sobre un cuerpo o conjunto de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto.

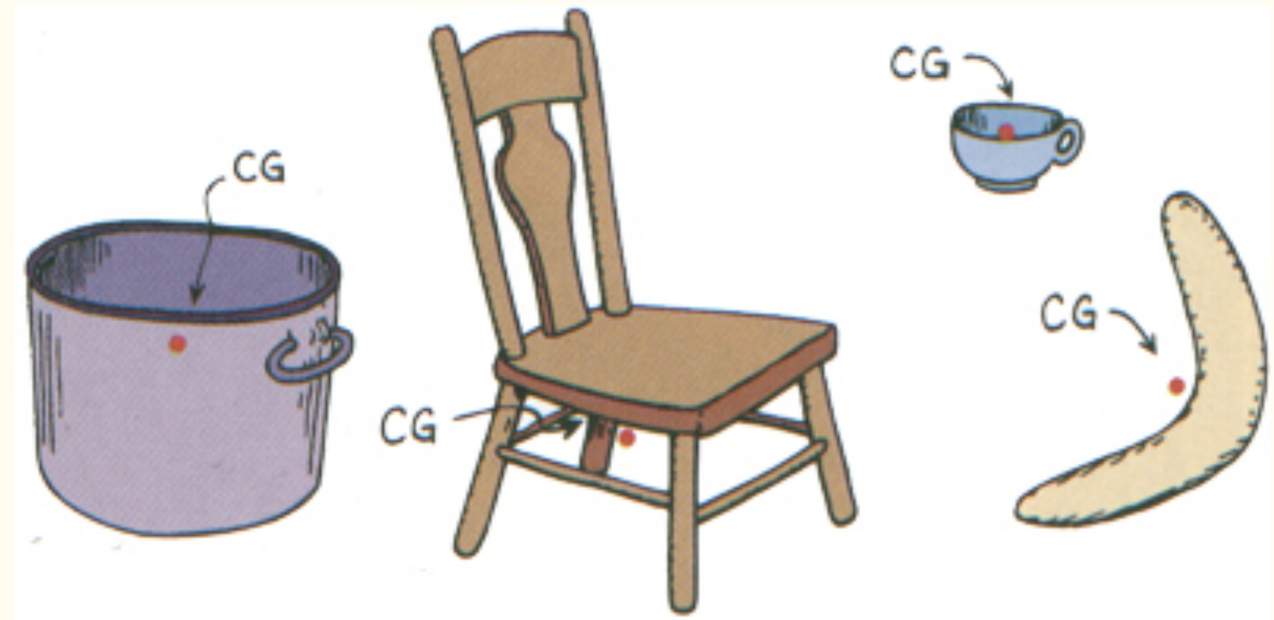
Este resultado puede sonar papas, pero en realidad es la base para todo lo que hemos hecho a lo largo del semestre. Si no fuera por esto no hubiéramos podido considerar el movimiento de cuerpos rígidos (autos, pelotas de tenis…. etc) como partículas.

2 Comentarios

Dos comentarios sobre el centro de masa:

1) **El centro de masa no necesariamente se encuentra <u>dentro</u> de un cuerpo**

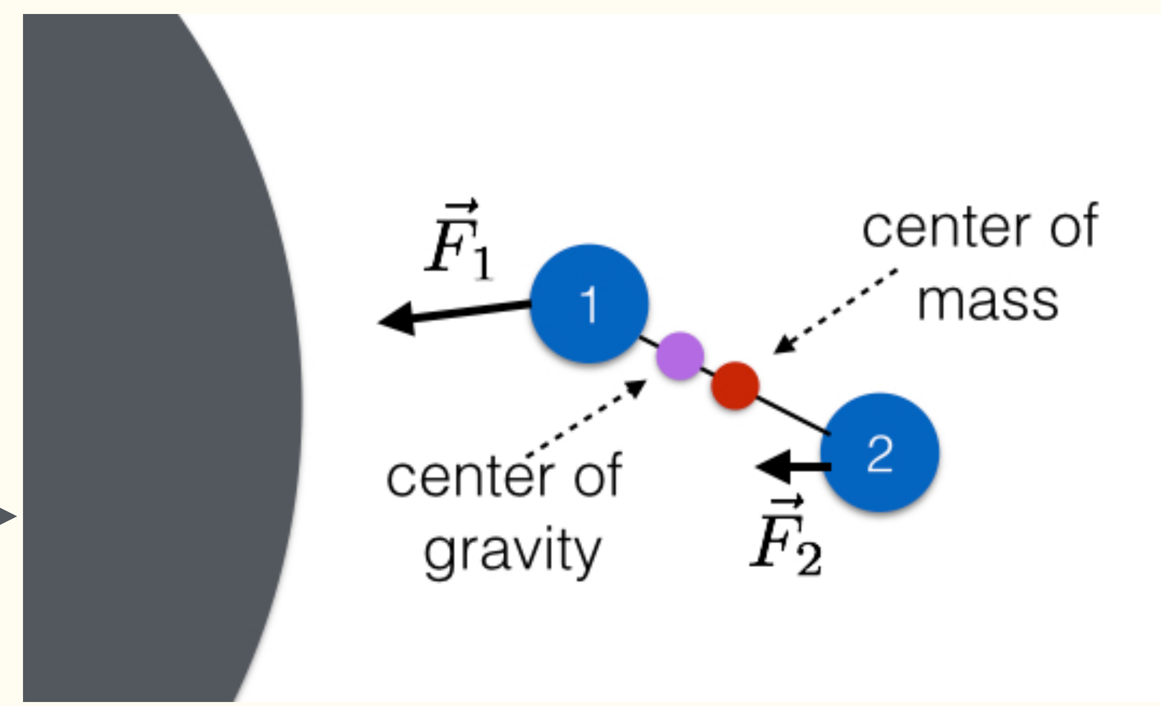
Ejemplos:



2) **A veces se habla de "centro de gravedad" (CG) en lugar de "centro de masa" (CM)**

Estos dos son lo mismo siempre y cuando el campo gravitatorio afecte a todos los puntos del objeto de la misma forma, <u>que será el caso siempre en este curso</u>

Por ejemplo, en un cuerpo compuesto por dos partículas de misma masa, pero una más cerca al planeta tierra que la otra, el CG y el CM no serían iguales



Nota: veremos ejemplos de esto en los experimentos

Ejemplo #1

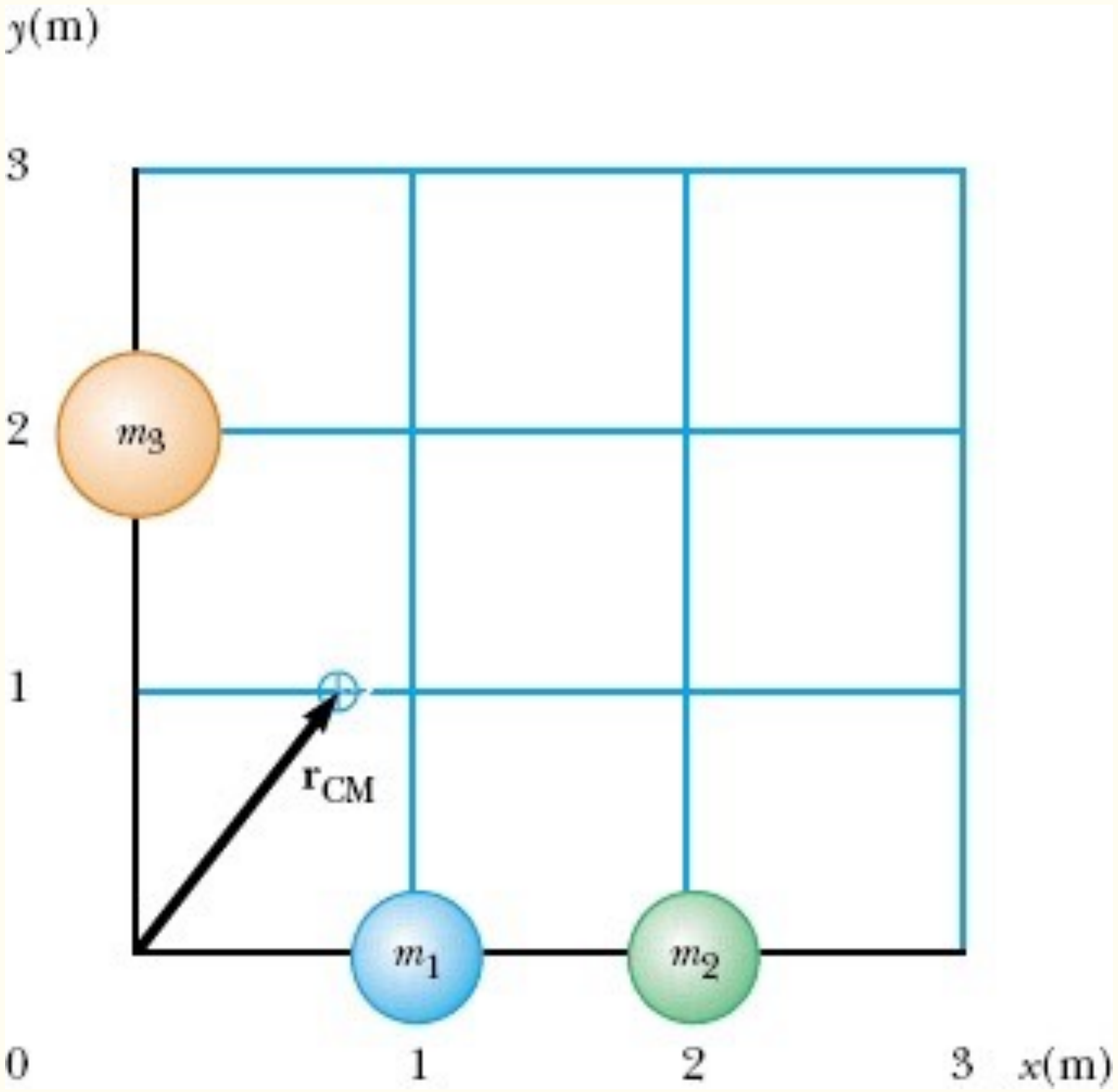
(No en los libros)

Determine la posición del centro de masa del siguiente sistema compuesto por 3 partículas. Asuma que $m_1 = m_2 = m_3/2$

(resolver en pizarra)

Respuesta: $\vec{r}_{CM} = 0.75\hat{i} + 1\hat{j}$

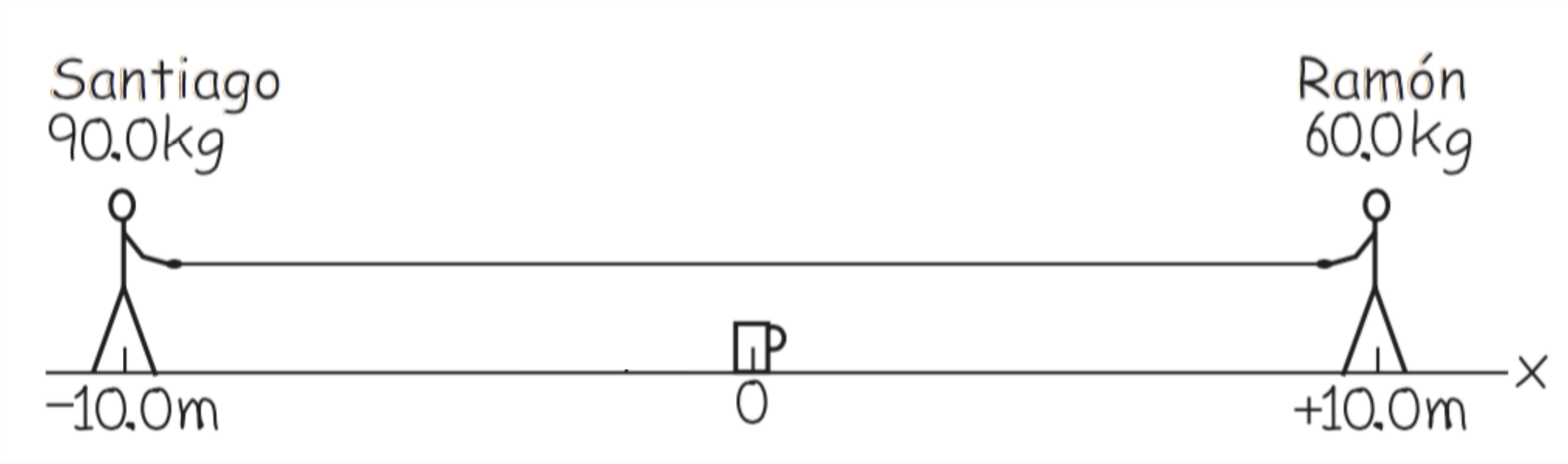
¡super papas!



Ejemplo #2

(8.14 en el Young & Freedman)

Santiago y Ramón están de pie, separados por una distancia de 20m, en una superficie congelada sin roce. Ramón tiene una masa de 90kg, y Ramón de 60kg. A medio camino entre ellos se encuentra un tarro con su bebida favorita. Inicialmente están en reposo, y luego los dos tiran de los extremos de una cuerda ligera que hay entre ellos. Cuando Santiago se ha movido 6.0m hacia el tarro, ¿cuánto se ha movido Ramón?



(resolver en pizarra; este problema salió en una I pasada)

Respuesta: Ramón está a 1.0 m a la derecha del tarro

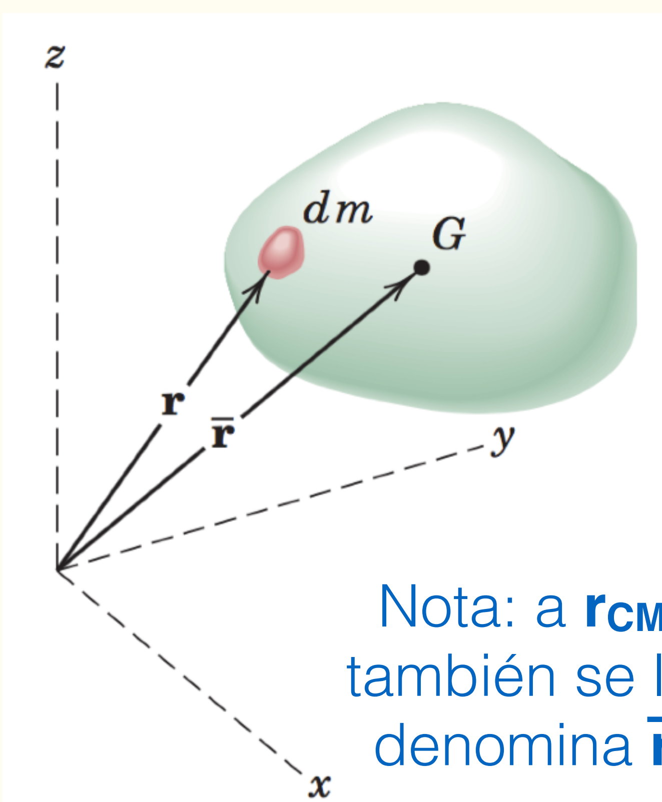
CM para Distribución Contínua

Hasa ahora hemos calculado el CM para N partículas. ¿Qué pasa si tenemos una distribución continua (un disco, anillo, … etc)?

Muy fácil:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M_{\text{total}}} \xrightarrow{\text{se convierte en}} \vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M_{\text{total}}}$$

(es simplemente tomar el caso de un número finito de partículas y llevarlo al límite cuando N es infinito)



Nota: a $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$ también se le denomina $\bar{\mathbf{r}}$

Es decir:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int x\, dm}{M_{\text{total}}}, \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{\int y\, dm}{M_{\text{total}}}, \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{\int z\, dm}{M_{\text{total}}}$$

donde:

$$M_{\text{total}} = \int dm$$

CM para Distribución Continua

Para resolver estas integrales, hay que transformar estas integrales de masa en integrales de volumen, área o línea, utilizando la densidad correspondiente

si es un volumen

$$dm = \rho dV$$

Densidad volumétrica

si es una superficie

$$dm = \sigma dA$$

Densidad superficial

si es una línea

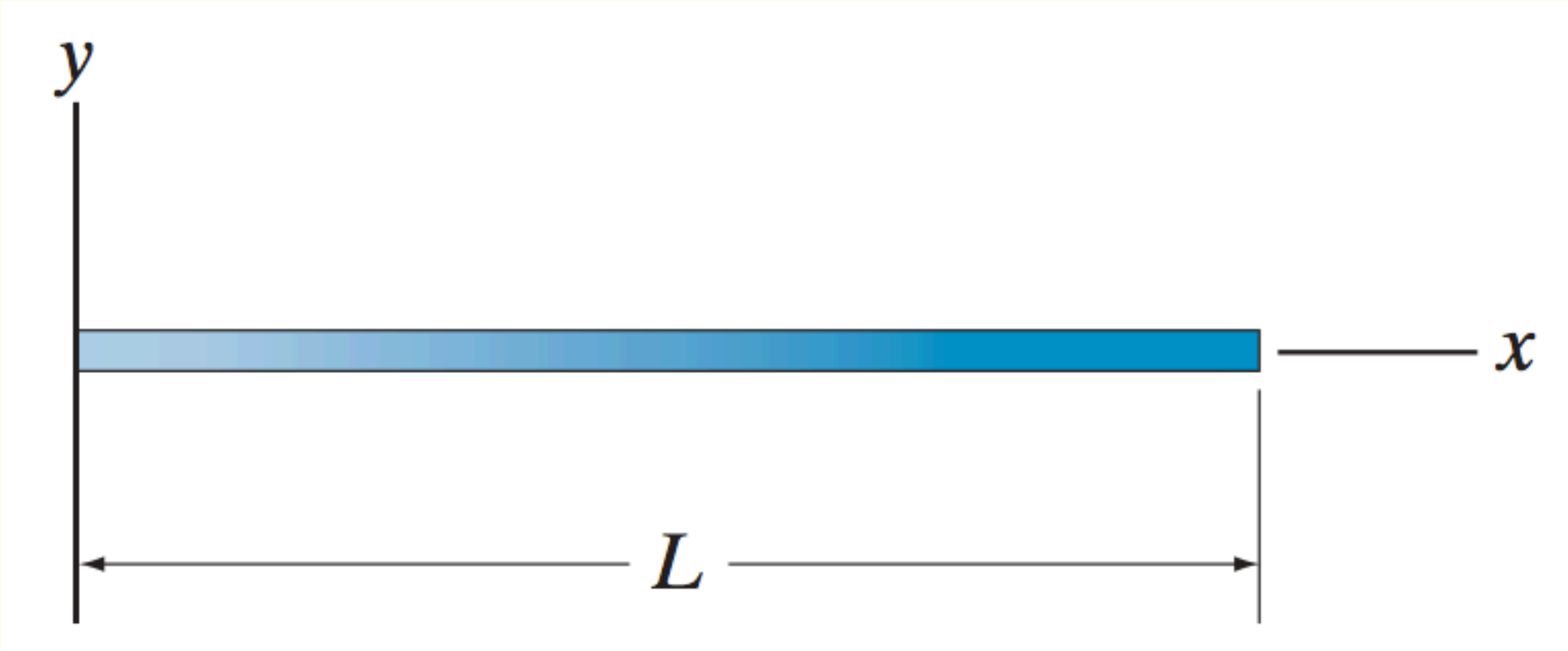
$$dm = \lambda dl$$

Densidad lineal

Si el objeto tiene densidad uniforme, significa que estas densidades son constantes. Pero en general pueden depender de la posición (un objeto puede tener diferente densidad de un punto a otro)

Ejemplo
(Hibbeler 9.5)

Determine la posición del centro de masa para la barra mostrada en la figura asumiendo que (a) la barra es uniforme y que (b) la masa por unidad de longitud está dada por $m_0(1+x/L)$



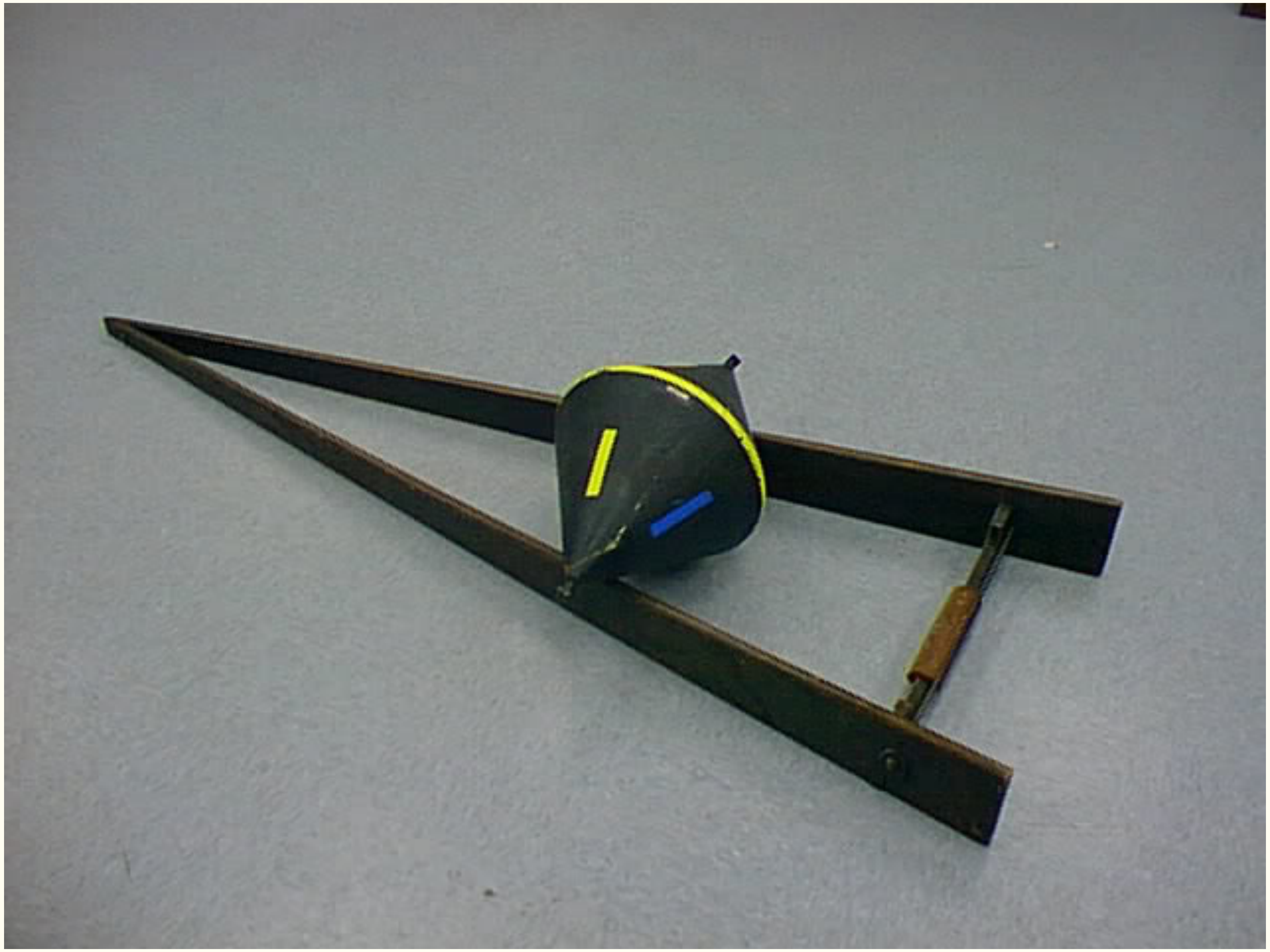
(resolver en pizarra)

Respuesta: (a) $x_{CM}=L/2$, (b) $x_{CM}=5/9\ L$

Nota: en general los problemas del Hibbeler de cálculo de centro de masa están mucho más avanzados que lo que se necesita saber para este curso.

Experimento #1

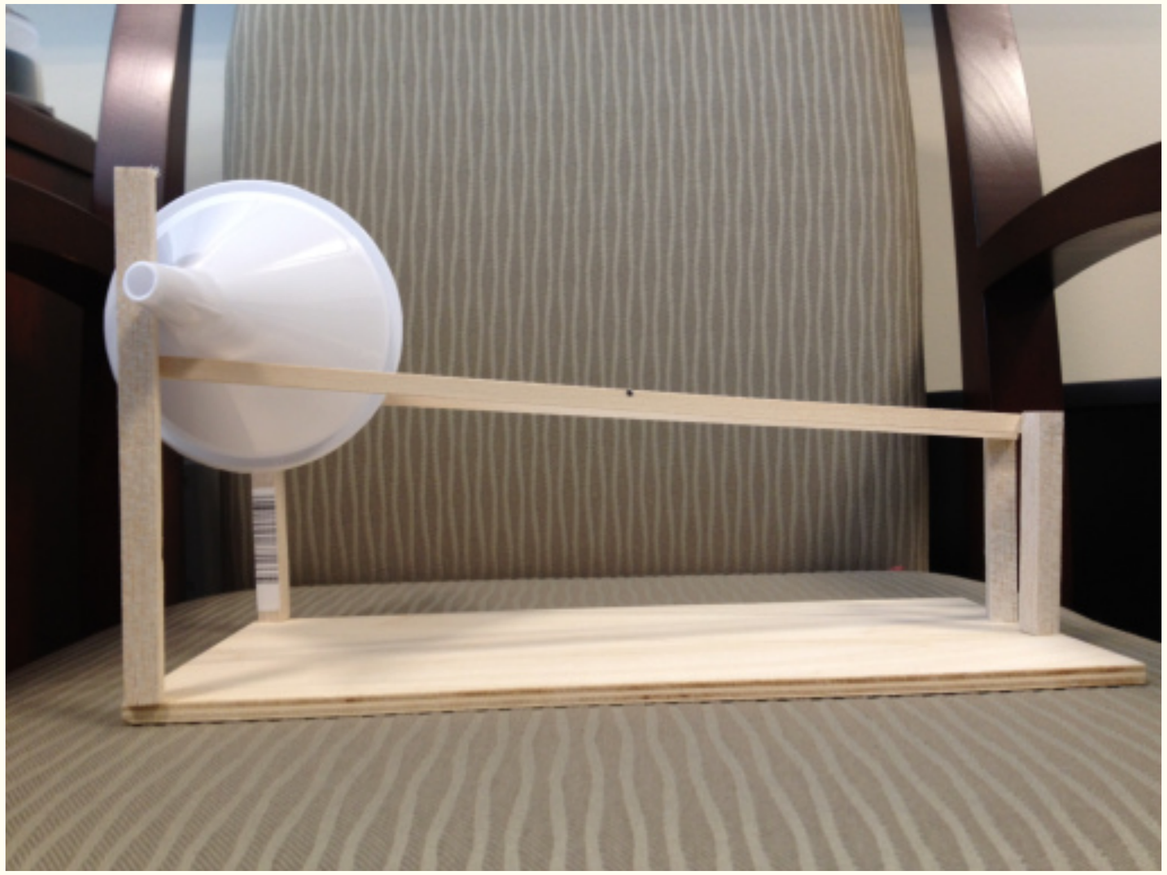
Experimento #2

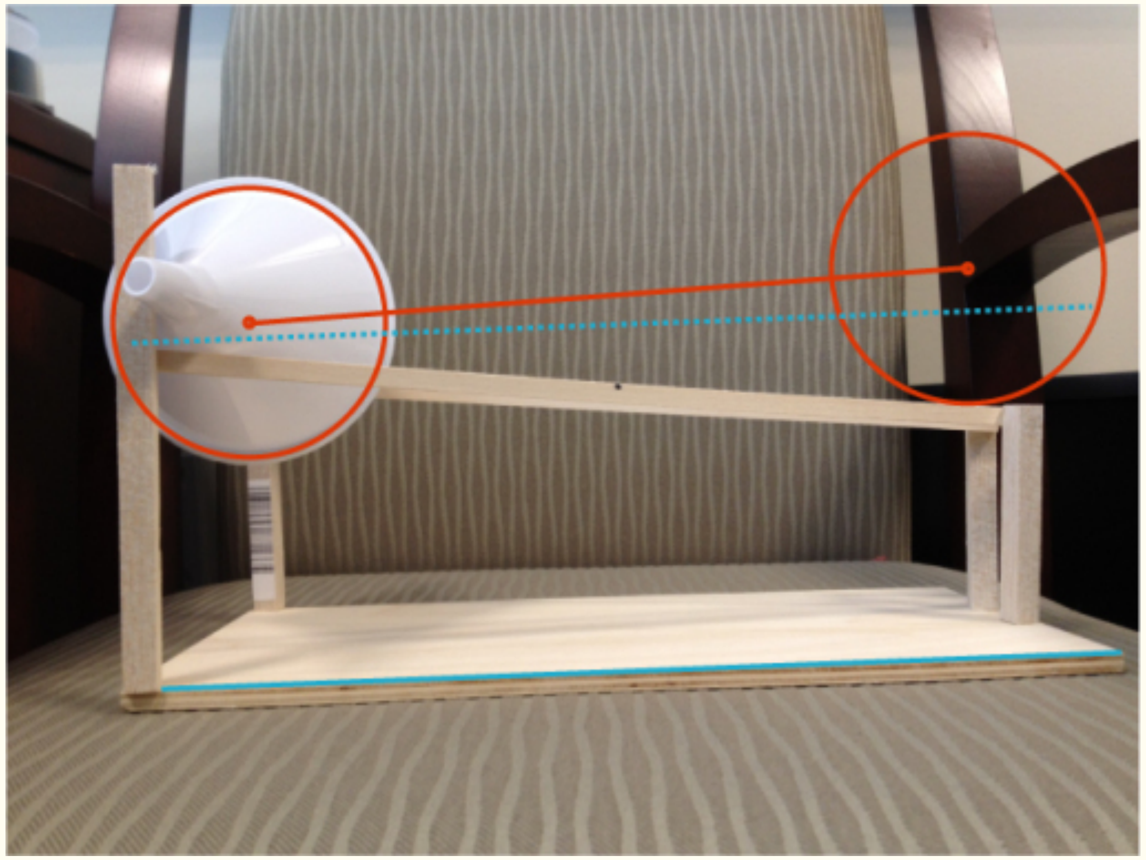


¡Un cono que parece desafiar la gravedad!

Sobre el Experimento #2

En realidad el centro de masa baja, y no hay nada extraño aquí:





Para mayor información: “Rolling Double Cone: What Goes Up Hill”
https://www.youtube.com/watch?v=PeYw46xWZCs

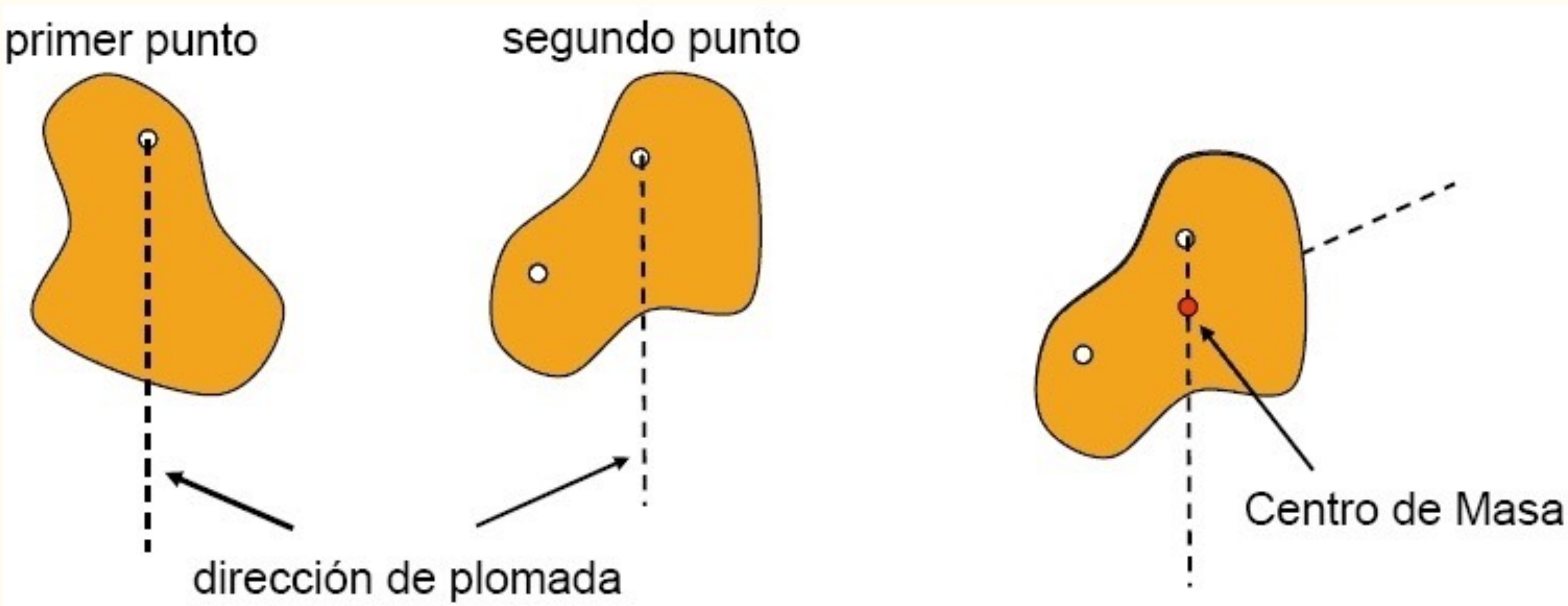
Extra: Determinación Experimental del CM para un Sólido

Existe una técnica muy sencilla que puede ser utilizada para ubicar el CM de cualquier sólido:

1) **Escoja un punto arbitrario del objeto, y suspéndalo de ahí. También suspenda una plomada (una cuerda con un peso en su extremo) del mismo punto**

2) **Marque una línea imaginaria en la dirección de la plomada**

3) **Rote el objeto y repita los pasos 1-2 para otro punto arbitrario**



4) **La intersección de las dos plomadas indica el centro de masa**

Cuerpo Rígido: Cinemática Rotacional, Torque y Momento de inercia

Para toda esta parte es mejor el Young & Freedman, Capítulos 9-10.


ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

9

?Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un


10

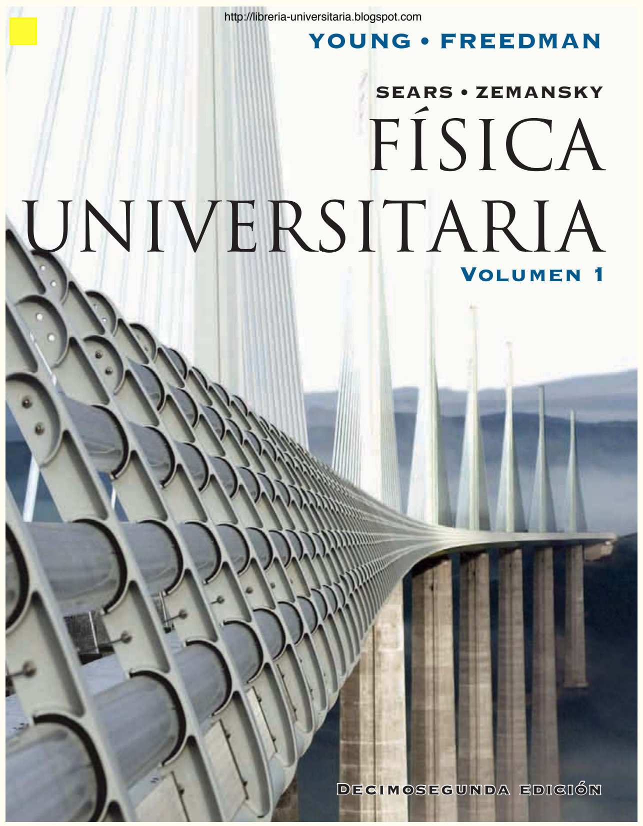
DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.

?Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?



<u>Específicamente:</u>

Cinemática Rotacional: 9.1-9.2
Momento de Inercia: 9.4-9.6
Torque: 10.1 (y/o Hibbeler 4.1-4.3)

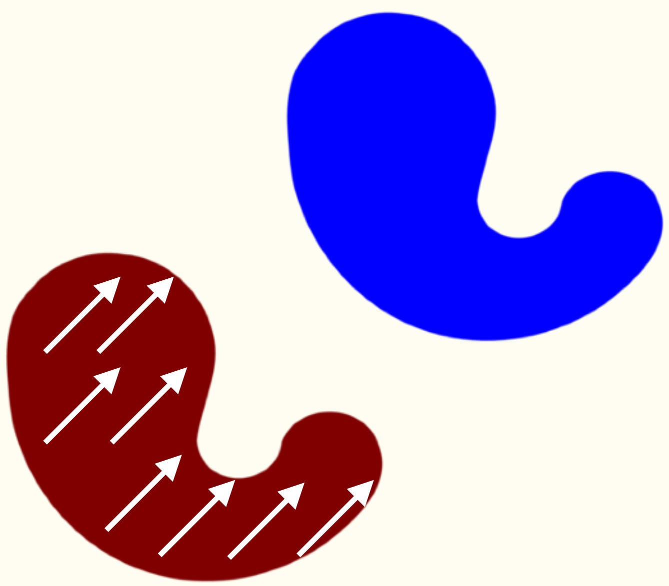
Movimiento de un Cuerpo Rígido

Un cuerpo rígido puede tener dos tipos de movimiento:

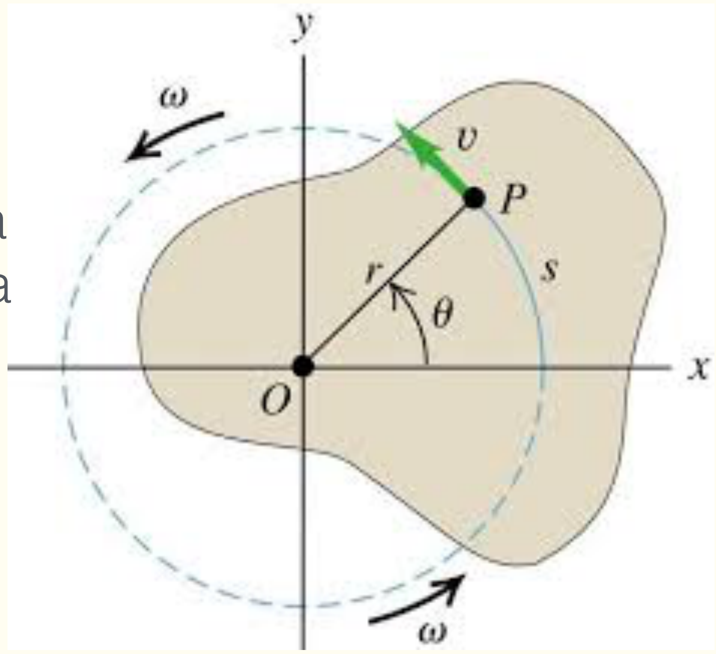
translación y/o **rotación**

Si un cuerpo rígido sólo tiene movimiento de translación, **todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración**

Si un cuerpo rígido sólo tiene movimiento de rotación, **todas las partículas se mueven en un círculo con la misma velocidad y aceleración angulares**



El radio del círculo descrito por cada punto depende de su distancia al eje de rotación, pero la velocidad y aceleración angulares son las mismas para cualquier punto, o si no el cuerpo se deformaría.



Obviamente los movimientos de translación y rotación se pueden combinar. Pero **comenzaremos considerando sólo rotaciones**.

Recordatorio: v y a en movimiento circular

Recordemos lo que aprendimos cuando vimos cinemática en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

Para movimiento circular $r = R$ (constante) por lo que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(-r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

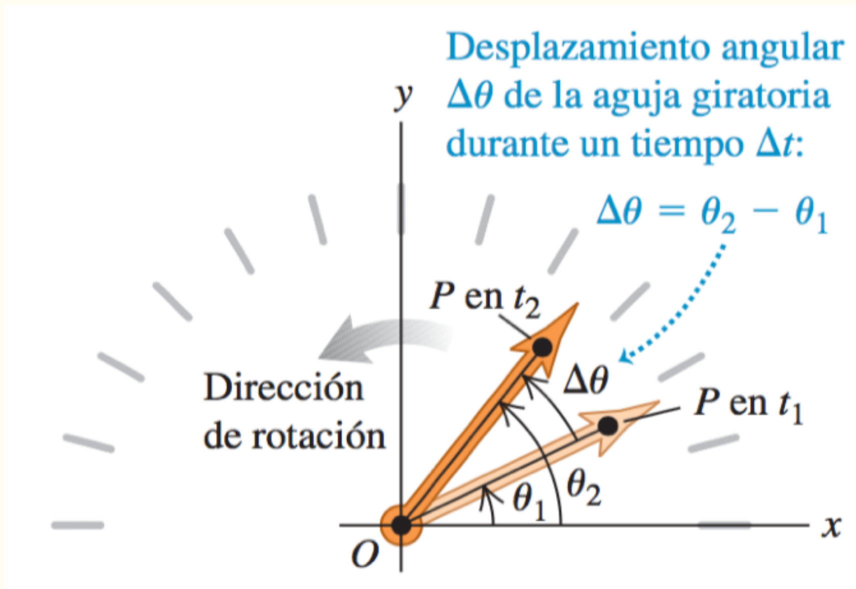
A $\dot{\theta}$ se le llama comúnmente ω, y a $\ddot{\theta}$ se le llama α

Para movimiento circular, la velocidad es toda en la dirección θ, es decir la dirección tangencial ($v_t = v_\theta = r\omega$)

En movimiento circular, hay siempre una aceleración centrípeta $a_r = -r\omega^2$ y a veces una aceleración tangencial $a_t = a_\theta = r\alpha$ (que es diferente de cero si ω está cambiando con el tiempo)

Cinemática Rotacional

La velocidad angular ω es la cantidad de radianes Δθ recorrida en un cierto intervalo de tiempo Δt, cuando Δt→0:

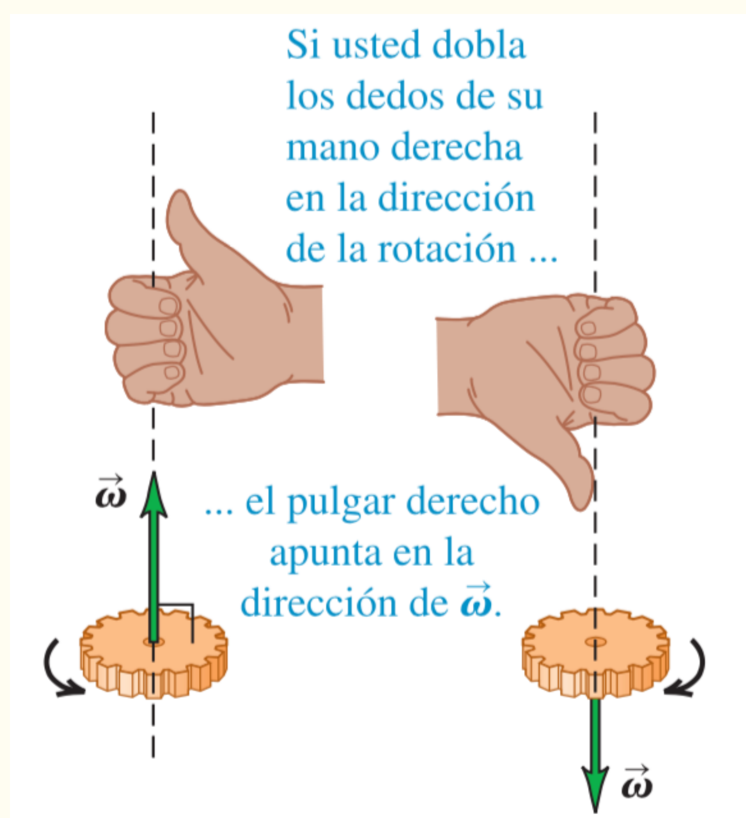


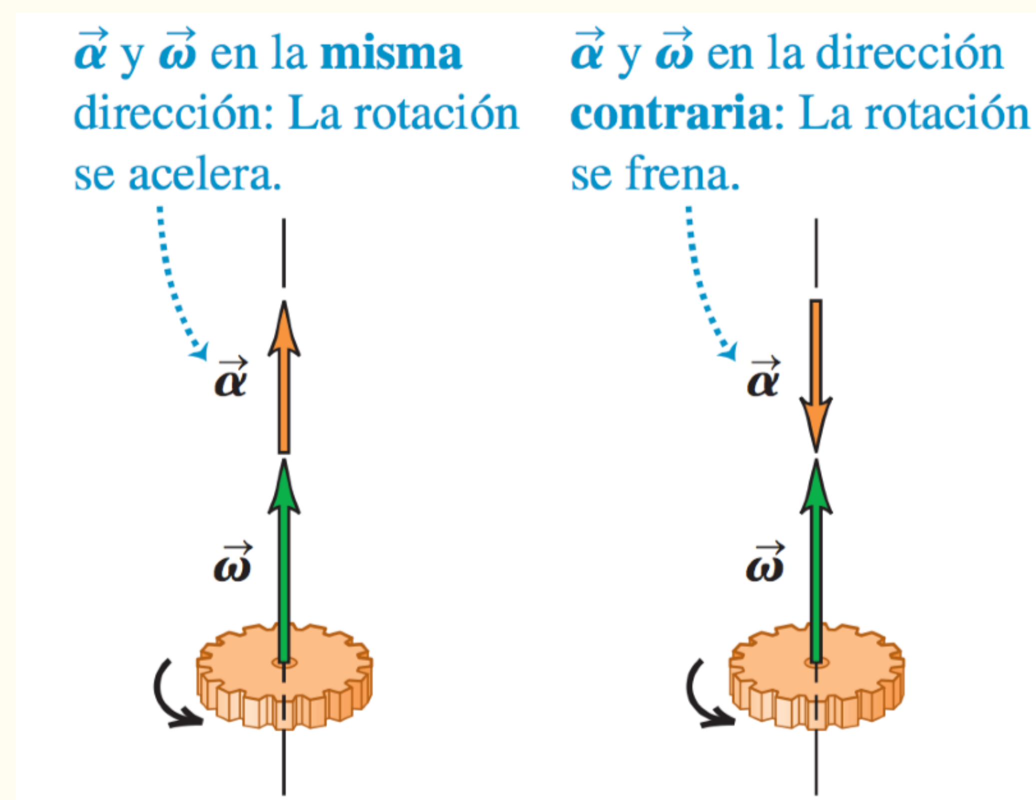
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

De la misma forma, la aceleración angular es la tasa de cambio de la velocidad angular:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Tanto ω como α se pueden ver como **vectores**, cuya dirección es la misma del eje de rotación





Cinemática Rotacional

La relación que hay entre α, ω θ es la misma que hay entre a, v y x. Por ende:

Translación:

Para a constante:

$$v = at + v_0$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Rotación:

Para α constante:

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

Próxima clase: más sobre cuerpo rígido