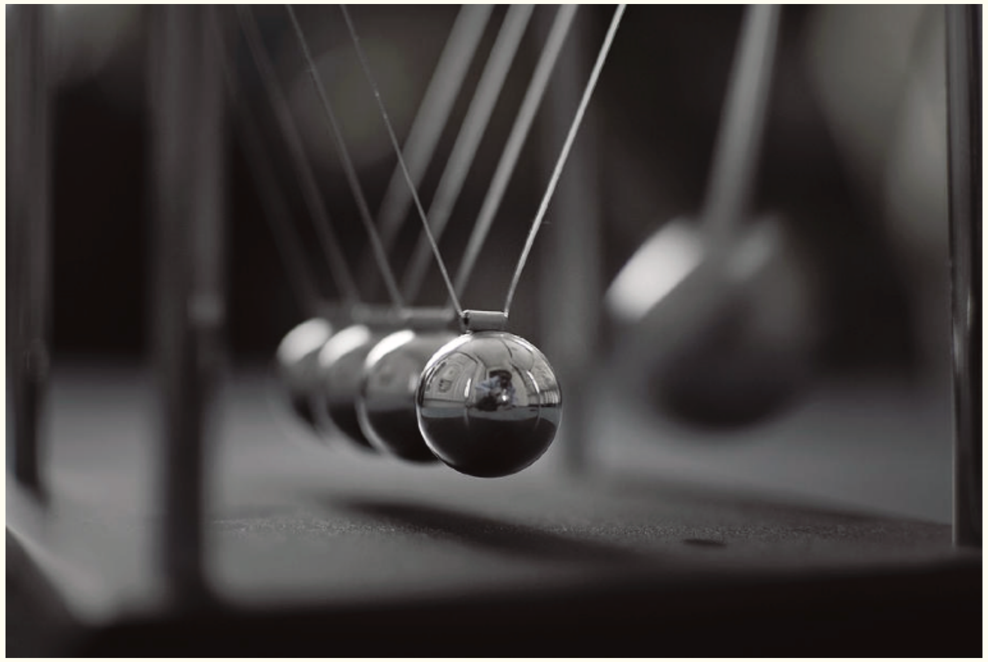
Estática y Dinámica
FIS1513

Clase #20
24-10-2018
Impulso y Momento

Anuncios

- El profe está de viaje debido a su trabajo de investigación
  - Regresa el 28 de Octubre
  - Durante su ausencia todo sigue con normalidad en los horarios usuales.
- La i3 es el martes 30 de Octubre a las 18.30 hrs.
  - Entra “Trabajo y Energía” (con un poco más de énfasis en la materia no evaluada en la i2, que es potencia y movimiento armónico simple), y todo el capítulo de “Impulso y Momento”.



Impulso y Momento: Sistemas de Masa Variable

*15.9 Propulsion with Variable Mass

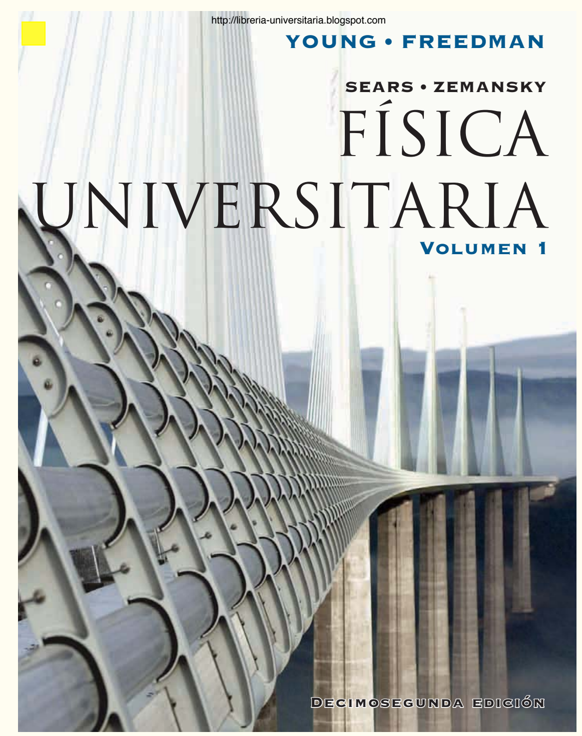
A Control Volume That Loses Mass. Consider a device such as a rocket which at an instant of time has a mass m and is moving forward with a velocity $\mathbf{v}$, Fig. 15–30*a*. At this same instant the amount of mass m_e is expelled from the device with a mass flow velocity $\mathbf{v}_e$. For the analysis, the control volume will include *both the mass m of the device and the expelled mass m_e*. The impulse and momentum diagrams for the control volume are shown in Fig. 15–30*b*. During the time dt, its velocity is

Impulse and momentum principles are required to predict the motion of this golf ball.

Sección 15.9 del Hibbeler y 8.6 del Young-Freedman

*8.6 Propulsión a reacción

Las consideraciones de momento lineal son especialmente útiles para analizar un sistema en el que las masas de partes del sistema cambian con el tiempo. No es posible usar la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ directamente porque m cambia. La propulsión de un cohete es un ejemplo típico e interesante de este tipo de análisis. Un cohete es impulsado hacia delante por la expulsión hacia atrás de combustible quemado que inicialmente estaba en la nave (por esa razón el combustible del cohete también se llama *propelente*). La fuerza hacia delante que actúa sobre el cohete es la reacción a la fuerza hacia atrás que actúa sobre el material expulsado. La masa total del sistema es constante, pero la del cohete disminuye al expulsarse material.



Nota: el Young & Freedman estudia sólo el caso del cohete, mientras que el Hibbeler lo ve más en general.

Sistemas con Masa Variable

Ahora podemos utilizar lo aprendido para modelar sistemas en los que la masa cambia con el tiempo

Ejemplos de sistemas de masa variable:

El cohete pierde masa al quemar combustible

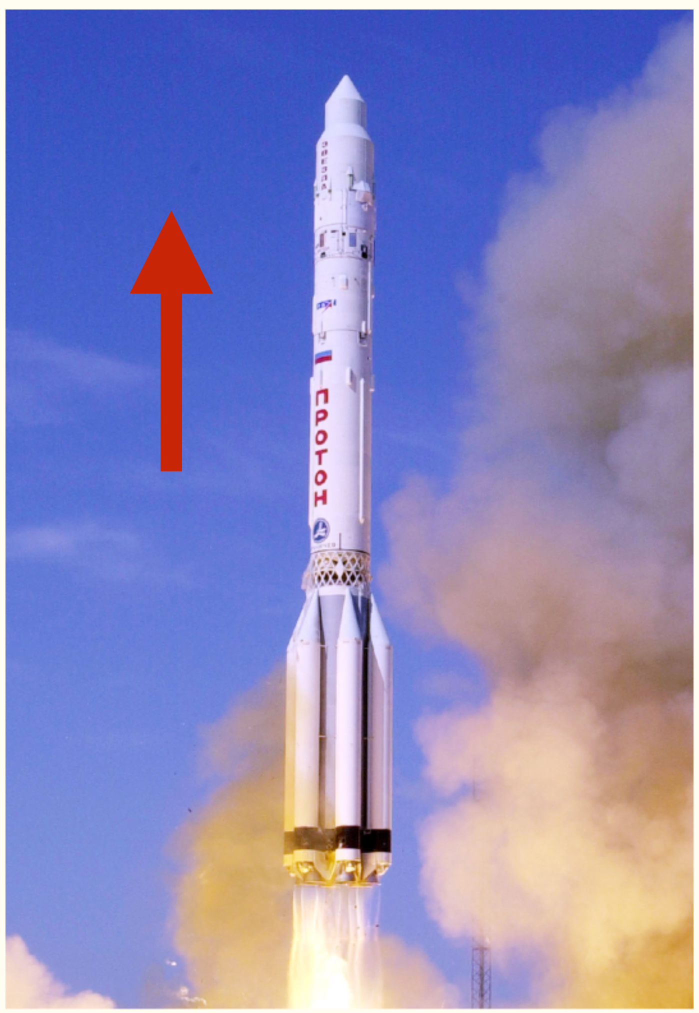
Una cinta transportadora gana masa cuando se le añaden objetos

El peso de una cadena que reposa parcialmente sobre el suelo depende de la altura a la que se levante

Sistemas con Masa Variable: Principio Básico

Antes de ver las ecuaciones, tratemos de entender cuál va a ser la respuesta: ¿cómo le impacta a un sistema el ganar o perder masa?

Principio básico: el perder/ganar masa equivale a tener una fuerza extra en la dirección contraria/igual en la que se pierde/gana esta masa

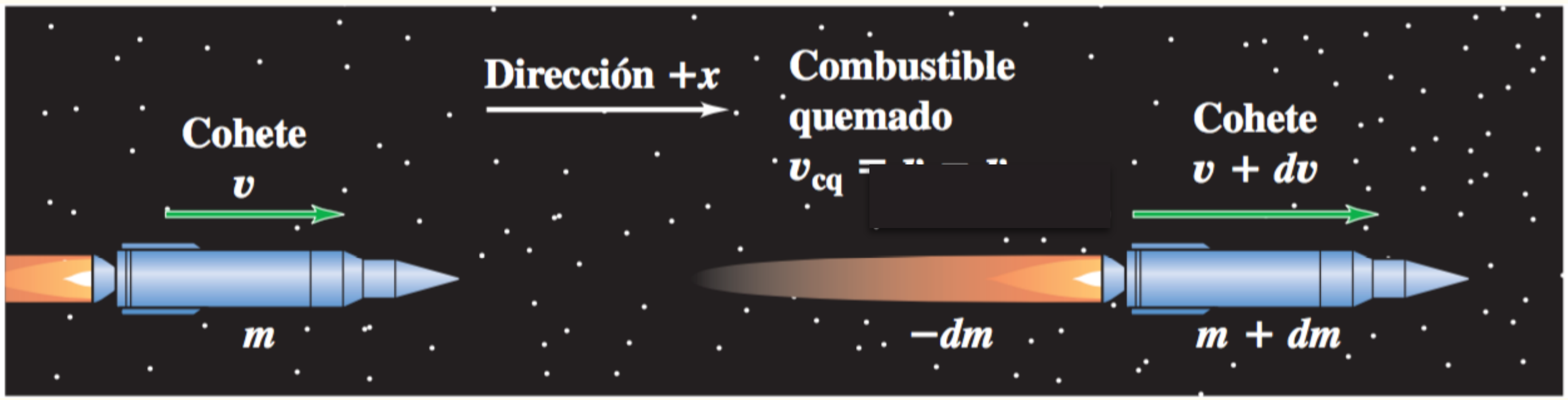


En el caso de un cohete, la expulsión de combustible quemado produce una fuerza de empuje en la dirección contraria (hacia arriba)

Si se tiene un carrito de super sin ningún tipo de roce en los engranes al que se le impartió una velocidad inicial con una persona adentro que recoge un producto de los estantes cada cierto tiempo, se iría frenando poco a poco

Derivación de la Ecuación Principal

Ahora veámoslo con ecuaciones. Para derivar la ecuación principal que nos servirá a modelar estos sistemas, consideremos un cohete quemando combustible:



Consideremos el cohete y su combustible (dentro del cohete) en un cierto tiempo, y un instante dt despues.

Inicialmente, el momento del sistema está dado por

$$p_i = mv$$

m=masa del cohete y de su combustible no quemado

v_m=velocidad de la masa perdida (en este caso combustible quemado) respecto a marco de referencia fijo

Después de un instante de tiempo dt, la masa del cohete cambia una cantidad dm (en este caso negativa) y su velocidad cambia una cantidad dv. El momento total queda:

$$p_f = (m+dm)(v+dv)+(-dm)v_m$$

Nota importante: trabajamos en el eje x por lo que quitamos el sub-índice “x”. Pero las cantidades dv y v_{cq} son componentes, y podrían ser negativas.

Derivación de la Ecuación Principal

Nos queda entonces:

$$p_f = m\upsilon + md\upsilon + \upsilon dm + \cancelto{0}{dmd\upsilon} - dm\upsilon_m$$

$$p_f = m\upsilon + md\upsilon + \upsilon dm - dm(\upsilon_{m/s} + \upsilon)$$

Esta cantidad es la velocidad de la masa ganada/perdida respecto respecto al sistema que la gana/pierde (en el caso del cohete es la velocidad de escape del combustible quemado).

$$\upsilon_{m/s} = (\upsilon_m - \upsilon)$$

Tomando la diferencia entre el momento final e inicial obtenemos dp:

$$dp = p_f - p_i = md\upsilon - dm\upsilon_{m/s}$$

y por ende:

$$\frac{dp}{dt} = \sum F_{ext} = m\frac{d\upsilon}{dt} - \frac{dm}{dt}\upsilon_{m/s}$$

Ley para Sistemas de Masa Variable

Nos queda una ecuación que se parece mucho a la segunda Ley de Newton pero que no es igual:

fuerzas externas sobre el sistema que pierde/gana masa

velocidad del sistema que pierde/gana masa

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{m/s}\frac{dm}{dt}$$

masa del sistema que pierde/gana masa **(¡ya no es una constante!)**

velocidad de la masa perdida/ganada, medida respecto al sistema que la pierde/gana

Nótese que a pesar que hicimos la demostración guiándonos con un cohete que pierde masa, **esta ecuación también sirve si se está ganando masa. $v_{m/s}$ es la velocidad de la masa ganada/perdida respecto al sistema que la pierde o gana**

Para resolver esta ecuación hay que conocer las fuerzas externas que se aplican sobre el sistema, saber algo de la velocidad de escape, y saber algo sobre como cambia la masa con el tiempo.

Ley para Sistemas de Masa Variable

Una forma de recordar esta ecuación es notar que **es idéntica a la segunda Ley de Newton, pero con un término extra**:

$$\sum \vec{F}_{ext} + \boxed{\vec{v}_{m/s}\frac{dm}{dt}} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

fuerza extra de empuje/frenado

Este término tiene unidades de fuerza y se puede ver como una "fuerza de empuje/frenado". **Lo que esto nos dice es que, mismo si no hay fuerzas externas sobre un sistema, aún así se puede estar acelerando o desacelerando si hay pérdida o ganancia de masa**

Esta "fuerza" aparece debido a conservación de momento, ya que cuando un sistema empuja (o es empujado por) otro objeto con masa, se afecta su momento.

Por ejemplo, es como si la persona en la patineta sintiera una fuerza hacia la derecha

(la fuerza de empuje va en dirección contraria a la velocidad de escape si se pierde masa)

Para discusión

Siguiendo con este mismo ejemplo:

¿Qué pasa si la persona en la patineta sólo extiende la mano y deja caer la masa la masa sin empujarla?

En este caso la velocidad $v_{m/s}$ a la que la masa se separa del sistema es cero, y **la fuerza externa es cero.**

Si no lo creen, súbanse a una patineta en reposo y dejen caer una masa verticalmente sin impartirle una velocidad en la dirección horizontal. ¡La patineta no se mueve ni un milímetro!

Ejemplo #1

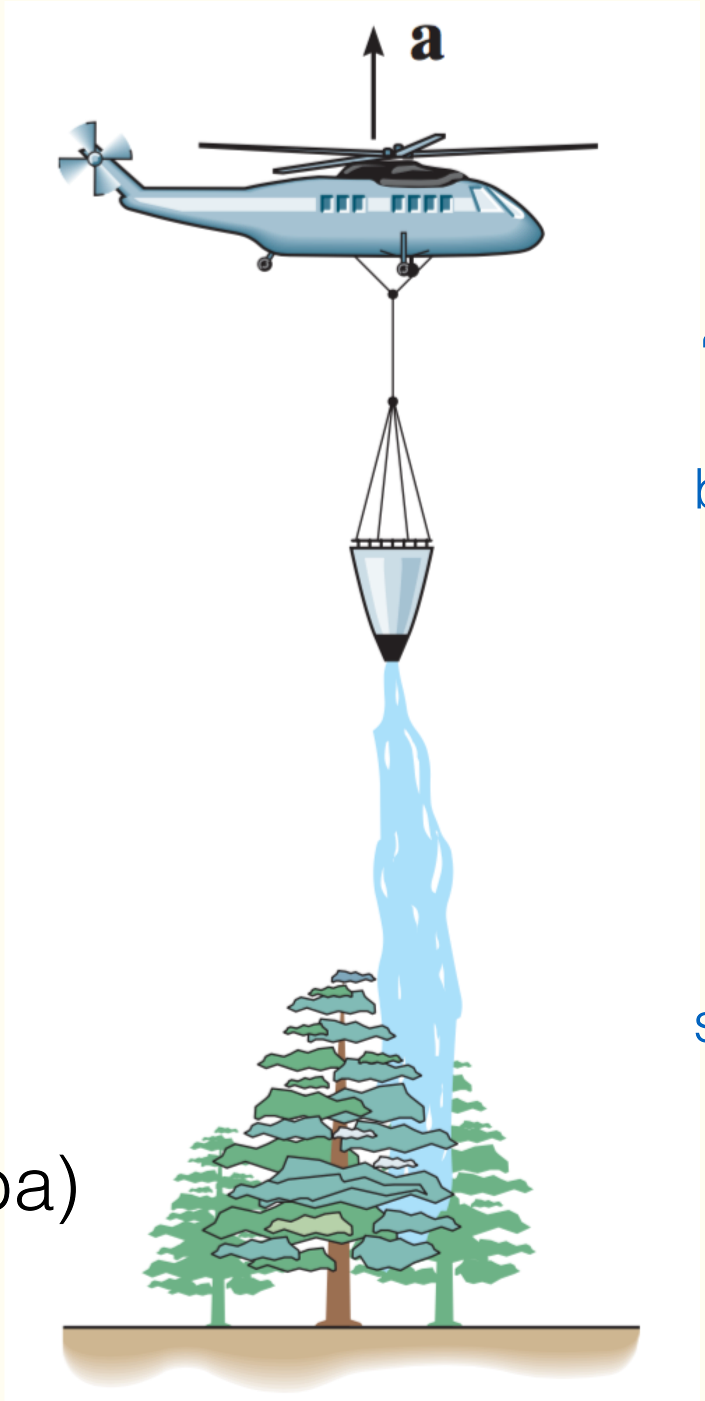
(Hibbeler 15.125)

Regresamos a sistemas de masa variable:

Un helicóptero de $10x10^3$ kg transporta una canasta que contiene 500kg de agua, la cual es usada para combatir incendios. Si sobrevuela en torno a una posición fija y luego descarga 50kg/s de agua a 10m/s, medida respecto al helicóptero, determine la aceleración que siente el helicóptero al inicio del proceso de descarga

(resolver en pizarra)

Respuesta: 0.0476 m/s^2 (hacia arriba)



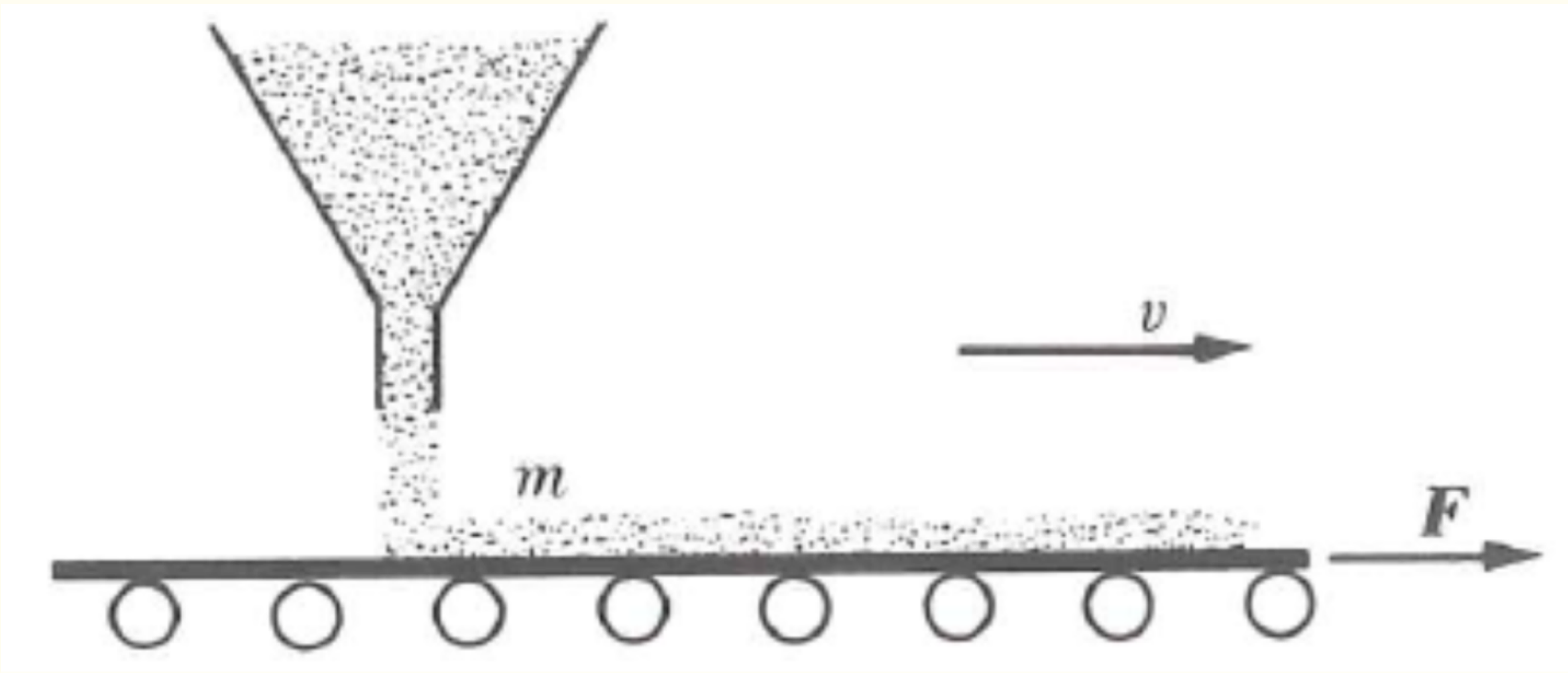
Nota: la razón por la que aparece una fuerza de empuje hacia arriba es porque el agua se descarga a una cierta velocidad respecto al helicóptero (es decir es "empujada" hacia abajo, por medio de una bomba a presión o algún dispositivo). Si el agua sólo se "soltara", este efecto no aparecería ya que la $v_{m/s}$ sería cero.

Nótese también que la fuerza hacia arriba la siente la canasta. Lo que pasa es que esto hace que tire menos del helicóptero y que por ende el helicóptero también sienta la aceleración.

Ejemplo #2

(No en los libros)

Sobre una cinta transportadora cae maíz a una tasa de 20kg/s. La cinta se desplaza a una velocidad constante de 1m/s y se aplica una fuerza F para moverla, como indicado en la figura. Despreciando el roce en los rodamientos, calcule la magnitud de F.



(resolver en pizarra)

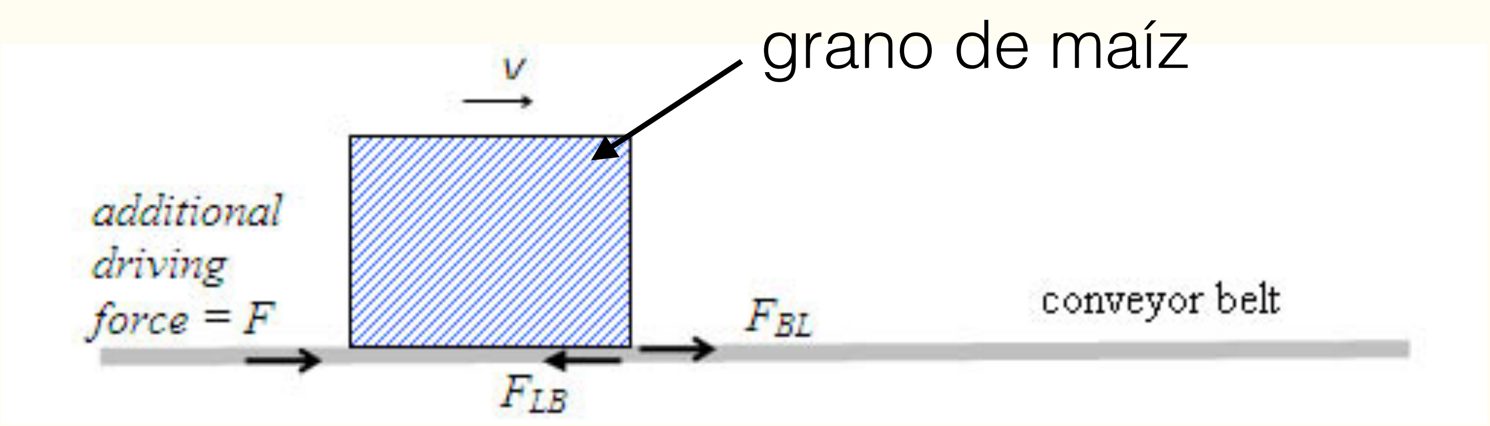
Respuesta: 20N

Sobre el Ejemplo #2

Este problema se puede resolver como lo hicimos, es decir viendo la cinta como ganando masa hacia la izquierda y que por ende necesita una fuerza externa hacia la derecha para poderse seguir moviendo con velocidad constante. **Pero también se puede entender sin ni siquiera utilizar la ecuación de sistemas de masa variable**.

Si el maíz no cayera sobre la cinta, y esta ya estuviera moviéndose a una velocidad v, no habría necesidad de ninguna fuerza extra debido a la primera Ley de Newton.

Pero el maíz cae en la cinta e inicialmente tiene velocidad nula, y es el roce con la cinta lo que hace que se acelere hasta una velocidad v. Debido a la tercera ley de Newton, si la cinta empuja cada grano de maíz hacia la derecha (F_{BL}), el maíz empuja la cinta con una fuerza de igual magnitud hacia la derecha (F_{LB}):



Por ende la fuerza externa debe ser cancelar F_{LB}. Sabemos que $F = \Delta p/\Delta t$ (para F constante). Cada segundo, 20kg de maíz cambian su velocidad de 0 a 1m/s, por lo que $F = 20*1 = 20$N

Ejemplo #3: Cohete en la tierra (Resuelto)

(Hibbeler ejemplo resuelto 15.18)

Considere un cohete moviéndose en la dirección +y cerca de la superficie de la tierra, para el cual:

- La velocidad de escape de los gases es constante $\longrightarrow \vec{\upsilon}_{esc} = -\beta\hat{j}$
- La rapidez con la que se quema el combustible es constante $\longrightarrow \dfrac{dm}{dt} = -\alpha$

(donde α y β son constantes positivas)

Encuentre la velocidad vs. el tiempo.

Tenemos que:

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{\upsilon}_{m/s}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Aplicándola al eje y nos queda:

$$-mg - \beta\frac{dm}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt}$$

Ejemplo #3: Cohete en la tierra (Resuelto)

(Hibbeler ejemplo resuelto 15.18)

Pero $\frac{dm}{dt} = -\alpha$ es decir $m = m_0 - \alpha t$

y nos queda:

$$-(m_0 - \alpha t)g = (m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha\beta$$

Separando las variables llegamos a:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \left(-g + \frac{\alpha\beta}{(m_0 - \alpha t)} \right) dt$$

$$v - v_0 = -gt - \beta \ln(m_0 - \alpha t)\Big|_o^t$$

$$\boxed{v = v_0 - gt + \beta \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right)}$$

Como $m_0 > m$, la velocidad se incrementa con el tiempo, que es lo esperado.

Próxima clase: cuerpo rígido