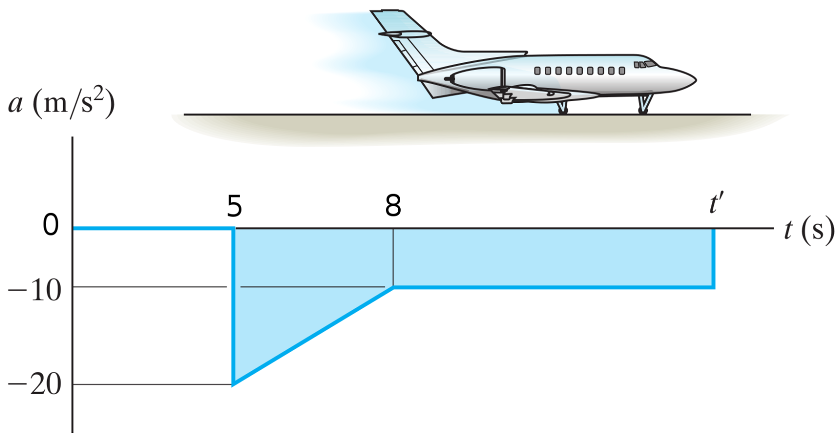
Enunciado para problemas 1-2:

El avión aterriza a 100 m/s sobre una pista recta en $t = 0$ y desacelera como se muestra en el gráfico a continuación.



1. Determine el instante de tiempo t' en el cual el avión de detiene.

   (a) $t' = 13.5$ s

   (b) $t' = 10$ s

   (c) $t' = 12.5$ s

   (d) $t' = 18$ s

   Usando el teorema fundamental del cálculo, la variación de velocidad entre dos instantes corresponde a la integral de la aceleración como función del tiempo entre dichos intervalos

   $$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

   La integral corresponde al área bajo la curva $a(t)$. Para el problema tenemos que:

   $$v(t') - v(0) = \int_0^{t'} a(t)dt$$

   $$0 - 100 = -\frac{1}{2}(20 + 10)(8 - 5) - (t' - 8)(10)$$

   $$\implies t' = 13.5s$$

   La alternativa correcta es la (a)

2. Determine la distancia que recorre el avión sobre la pista 8 segundos después de aterrizar.

   (a) $D = 500$ m

   (b) $D = 725$ m

(c) $D = 815$ m

(d) $D = 1025$ m

Usando el teorema fundamental del cálculo, la variación de velocidad entre dos instantes corresponde a la integral de la aceleración como función del tiempo entre dichos intervalos

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

La integral corresponde al área bajo la curva $a(t)$. Para 5 s $\leq t \leq$ 8 s $a(t) = -20 + \frac{10}{3}(t-5)$

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(\tau)d\tau = \int_0^5 (0d\tau) + \int_5^t (-20 + \frac{10}{3}(\tau - 5))d\tau$$

$$\implies v(t) = -20(t-5) + \frac{5}{3}(t-5)^2 + 100 \quad \text{para 5 s} \leq t \leq 8 \text{ s}$$

Además tenemos que:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

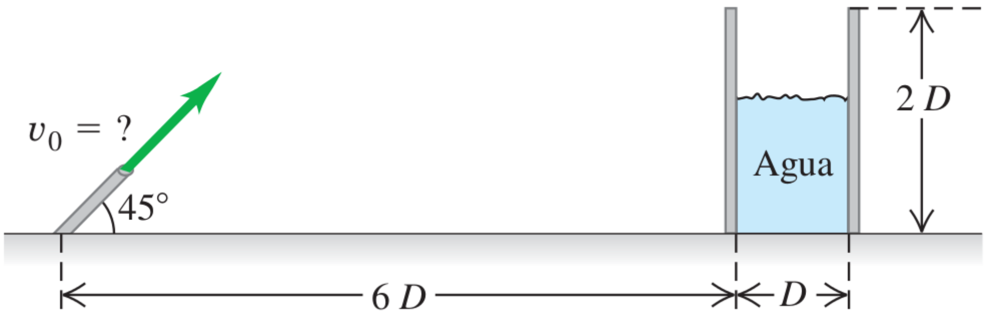
Por lo tanto:

$$s(t) - s(5) = \int_5^t v(\tau)d\tau = \int_5^t (-20(\tau-5) + \frac{5}{3}(\tau-5)^2 + 100)d\tau$$

$$\implies s(t) = -10(t-5)^2 + \frac{5}{9}(t-5)^3 + 100(t-5) + 500 \quad \text{para 5 s} \leq t \leq 8 \text{ s}$$

Para $t = 8$ s, tenemos que $s = 725$ m. La respuesta correcta es la (b).

3. Se utiliza una manguera para llenar de agua un estanque cilíndrico de diametro D y altura $2D$. La manguera lanza el agua a $45°$ sobre la horizontal, desde el mismo nivel que la base del estanque, y está a una distancia de $6D$ de éste. ¿Cuáles son las velocidades iniciales mínima y máxima tales que el agua entra al estanque? Ignore la resistencia el aire.



(a) $v_{o,\text{min}} = 3\sqrt{gD}$ y $v_{o,\text{máx}} = \sqrt{36gD/5}$

(b) $v_{o,\text{min}} = \sqrt{6gD}$ y $v_{o,\text{máx}} = \sqrt{36gD/5}$

(c) $v_{o,\text{min}} = 2\sqrt{gD}$ y $v_{o,\text{máx}} = \sqrt{49gD/5}$

(d) $v_{o,\text{min}} = 3\sqrt{gD}$ y $v_{o,\text{máx}} = \sqrt{49gD/5}$

Usando que $\cos(45°) = \sin(45°) = 1/\sqrt{2}$, para el lanzamiento del proyectil tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = \frac{v_o}{\sqrt{2}}t$$

$$y(t) = \frac{v_o}{\sqrt{2}}t - \frac{g}{2}t^2$$

Combinado ambas ecuaciones tenemos que:

$$y(x) = x - g\frac{x^2}{v_o^2}$$

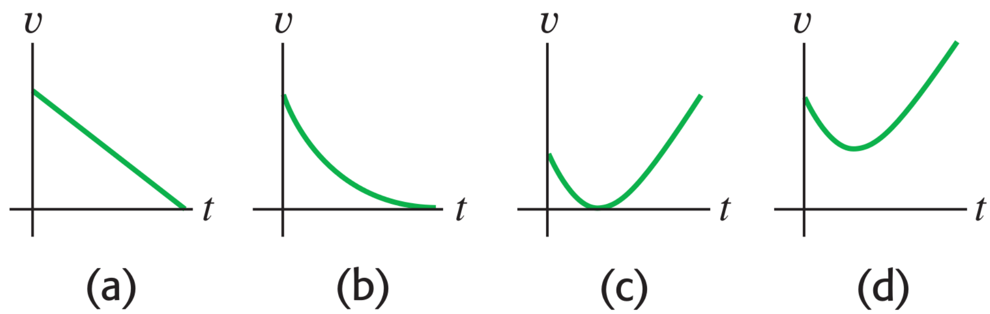
La velocidad $v_{o,\text{min}}$ corresponde cuando el agua llega a $x = 6D, y = 2D$ y $v_{o,\text{max}}$ corresponde cuando el agua llega a $x = 7D, y = 2D$. De esta forma tenemos que:

$$2D = 6D - g\frac{(6D)^2}{v_{o,\text{min}}} \implies v_{o,\text{min}} = 3\sqrt{gD}$$

$$2D = 7D - g\frac{(7D)^2}{v_{o,\text{max}}} \implies v_{o,\text{max}} = \sqrt{49gD/5}$$

La respuesta correcta es la (d).

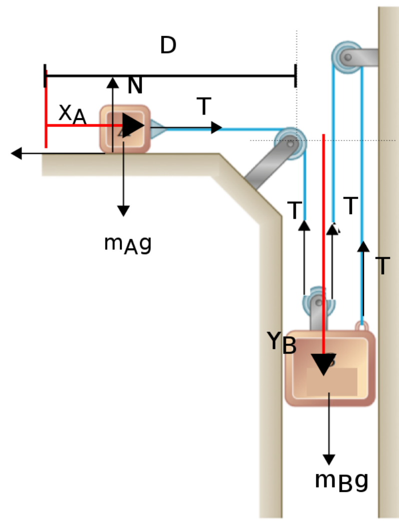
4. Se lanza una piedra hacia el aire con un ángulo por encima de la horizontal, y se desprecia la resistencia del aire. ¿Cuál de las gráficas en la figura describe mejor la rapidez v de la piedra en función del tiempo t mientras está en el aire?



En el lanzamiento del proyectil con ángulo sobre la horizontal, la velocidad en la dirección x es constante y en la dirección y decrece con una aceleración constante de $-g$. Cuando la piedra sube, la rapidez disminuye, ya que la magnitud de la velocidad en la dirección y disminuye, sin embargo, la rapidez nunca es cero, ya que la velocidad en la dirección x es constante. Cuando la piedra comienza a bajar, la rapidez aumenta nuevamente. El gráfico que mejor describe la rapidez de la piedra es el (d).

(I) (Pauta para los problemas 5-7).

Dos bloques A y B de masas $m_A = 10m$ y $m_B = 20m$ respectivamente, se encuentran unidos mediante una cuerda ideal que pasa a través de un sistema de poleas como se indica en la figura. Entre el bloque A y la superficie horizontal existe roce caracterizado por los coeficientes de fricción μ_s y μ_k estático y dinámico respectivamente, mientras que el bloque B puede deslizar libremente entre las paredes. Considere que todas las poleas son ideales.



5 Determine el valor del coeficiente de fricción estático mínimo entre el bloque A y la superficie horizontal para que el sistema se mantenga en reposo.

a) $\mu_e^{\min} = \frac{2}{3}$
b) $\mu_e^{\min} = \frac{1}{2}$
c) $\mu_e^{\min} = \frac{1}{3}$
d) No existe dicho valor

Considerando el sistema de referencia propuesto en la figura, la ecuación de ligadura para los bloques A y B es:

$$(D - x_A) + 3y_B = cte$$
$$\longrightarrow$$
$$\ddot{x}_A = 3\ddot{y}_B$$

Las ecuaciones de equilibrio del sistema considerando los diagramas de fuerzas de la figura son:

$$T - f_s = 0 \quad (1)$$
$$N - m_A g = 0 \quad (2)$$
$$-3T + m_B g = 0 \quad (3)$$
$$(4)$$

La condición para determinar el coeficiente de fricción estático mínimo esta dada cuando $f_s = \mu_s N$. Resolviendo se obtiene que $\mu_s = \frac{2}{3}$

6 Considere ahora que el sistema se encuentra en movimiento y el coeficiente de roce cinético entre la superficie horizontal y el bloque A es $\mu_k = 0{,}5$. Determine la aceleración del bloque A.

a) $\ddot{x}_A = \frac{1}{30}g$
b) $\ddot{x}_A = \frac{1}{18}g$
c) $\ddot{x}_A = \frac{3}{22}g$
d) $\ddot{x}_A = \frac{9}{20}g$

Cuando el sistema no está en reposo, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} T - f_k &= m_A\ddot{x}_A \\ -3T + m_B g &= m_B\ddot{y}_B \end{aligned}$$

Resolviendo con los datos entregados se obtiene que: $\ddot{x}_A = \frac{3}{22}$.

7 Finalmente calcule la tensión en la cuerda suponiendo que no existe roce entre el bloque A y la superficie horizontal.

a) $T = \frac{20}{11}mg$
b) $T = \frac{30}{11}mg$
c) $T = \frac{60}{11}mg$
d) $T = \frac{90}{11}mg$

Si no hay roce en el sistema, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} T &= m_A\ddot{x}_A \\ -3T + m_B g &= m_B\ddot{y}_B \end{aligned}$$

Resolviendo con los datos entregados se obtiene que: $T = \frac{60}{11}mg$.

I1, 1er Sem 2017

Pauta problemas 8 - 11

En este caso el movimiento de la bola A es conveniente describirlo utilizando coordenadas polares, donde:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{l\left[2+\cos(\omega \cdot t)\right]}_{r(t)} \hat{r} \quad ; \quad \dot{\theta} = \omega = \underline{cte}$$

$\boxed{8}$ La magnitud de la velocidad máxima de la bola A es:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \quad ; \quad v_{máx} = \|\vec{v}(t)\|_{máx} = v(t)$$

Pero $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$; donde $\dot{r} = -l\omega\, sen(\omega t)$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{l^2\omega^2 sen^2(\omega t) + \omega^2 l^2 \left[2+\cos(\omega t)\right]^2}$$

$$v(t) = l\omega\left[sen^2(\omega t) + 4 + 4\cos(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]^{1/2}$$

$$v(t) = l\omega\sqrt{5+4\cos(\omega t)}$$

Luego $v_{máx}$ se da cuando $\cos(\omega t) = 1$

$$\therefore \quad v_{máx} = l\omega\sqrt{5+4} \Rightarrow \boxed{v_{máx} = 3l\omega}$$

Forma A
Resp. (a)

9 La aceleración radial de la bola está dado por:

$$\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} \quad ; \text{ donde } \ddot{r} = -l\omega^2\cos(\omega t)$$

Luego $$\vec{a}_r = \left[-l\omega^2\cos(\omega t) - l[2+\cos(\omega t)]\,\omega^2\right]\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = -2l\omega^2\,[1+\cos(\omega t)]\,\hat{r}}$$

Forma A
Resp. (a)

---

10 El módulo de la fuerza máxima que realiza la pared de la ranura sobre la bola A está dado por el máximo valor de la aceleración tangencial.

$$\vec{a}_\theta = (\underbrace{r\ddot{\theta}}_{0} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} \Rightarrow \vec{a}_\theta = 2\,[-l\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)]\,\omega$$

Luego $$a_{\theta_{max}} = 2l\omega^2 \Rightarrow \boxed{F = m\cdot 2l\omega^2}$$

Forma A
Resp. (b)

---

11 El valor mínimo de la constante k se determina conociendo el máximo valor de la aceleración radial, ya que el resorte tiene que ejercer la fuerza necesaria para que la bola describa la trayectoria señalada.

$$\boxed{a_{r_{max}} = -4l\omega^2\,\hat{r}} \Rightarrow \text{lo que ocurre en } \theta = 0,\ 2\pi,\ \dots$$

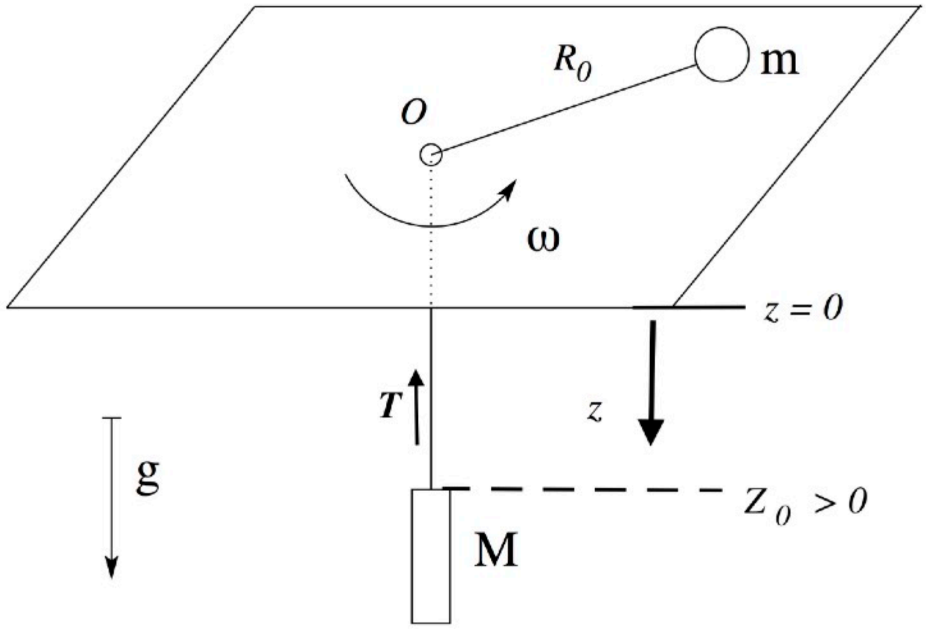
En este punto $k_{mín}(L_{\theta=0} - L_0) = m\,a_{r_{máx}}$ ① ; $L_{\theta=0}$: largo del resorte $\theta=0$; L_0 : largo natural del resorte

Pero $k_{mín}(L_{\theta=\pi} - L_0) = -W$; $W = 2\,N$

① - ② $\Rightarrow k_{mín}(\underbrace{L_{\theta=0} - L_{\theta=\pi}}_{2l}) = -m4l\omega^2 + W$

$$\Rightarrow k_{mín} = \underbrace{-2\underset{0{,}01}{m}\,\underset{400}{\omega^2}}_{-8\ N/m} + \underbrace{\frac{W}{2l}}_{10\ N/m} \Rightarrow \boxed{k_{mín} = 2\ N/m}$$

Forma A
Resp. (c)



Se considere dos cuerpos de masa **m** y **M** (**M = 2 m**), unidos por una cuerda ideal de largo **L**. La cuerda pasa por un pequeño agujero *O* hasta llegar al cuerpo de masa M que cuelga en forma vértical.

Si la masa **m** se desplaza por una mesa horizontal lisa sin roce, girando en torno al agujero *O*.

1- La velocidad angular ω para que el cuerpo de masa M esté en equilibrio a una distancia $\mathbf{z_0}$ del agujero, es:

a) $$\omega = \sqrt{\frac{M}{m}\frac{g}{(L-z_0)}}$$

b) $$\omega = \left(\frac{M}{m}\frac{g}{(L-z_0)}\right)^2$$

c) $$\omega = \sqrt{\frac{M}{g}\frac{m}{(L-z_0)}}$$

d) $$\omega = \sqrt{\frac{m}{M}\frac{g}{(L-z_0)}}$$

Hay dos fuerzas que actuán sobre la masa M que cuelga:

- el peso $P_M=Mg$
- la tensión de la cuerda **T**

Por otra parte, las fuerzas que actuán sobre la masa m que gira:

- el Peso $P_m = mg$
- la reacción de la mesa **N**
- la tensión de la cuerda **T**

Para describir el movimiento del bloque de masa **M** usamos la coordenada vertical z (hacia abajo). Es mas conveniente describir el movimiento del bloque de masa **m** utilizando las coordenadas polares ϱ y θ. Como el bloque de masa **M** está en equilibrio, $\mathbf{R_0}$ y $\mathbf{z_0}$ son constantes y $\mathbf{z_0 + R_0 = L}$ (La cuerda es ideal).

Las ecuación de movimiento de la masa **M** está dada por:

$$M\,g - T = 0 \qquad [1]$$

las ecuaciónes del bloque de masa m están dadas por:

$$N - m\,g = 0 \qquad [2]$$

La aceleración de la masa m es centrípeta. Como $\varrho=R_0$, $\dot{\varrho}=\ddot{\varrho}=0$, $\omega=\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}=0$, tenemos

$$-T = -mR_0\,\omega^2 \qquad [3]$$

llegamos al resultado tomando las ecuaciones [1] y [3], con $R_0 = (L - z_0)$

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{m}\frac{g}{(L - z_0)}}$$

2- Si cambiamos las masas tal que ahora **m = 2 M, (M** no cambia)**.** En el equilibrio, la tensión **T** en la cuerda debe:

En el equilibrio, la ecuación [1] muestra que la tensión no depende de m, solamente de M. cambiando m, la tensión **T** permanece constante.

3- A partir del instante t=0, el cuerpo de masa m, acelera girando con una velocidad angular $\omega=\omega_0 + 0.1t$. De esa aceleración resulta que la velocidad $\dot{z}(t)$ y la aceleración $\ddot{z}(t)$ de la masa **M** son:

En t=0, la tensión aumenta lentamente con el tiempo. La ecuación de movimiento de la masa M está dada por:

$$M g - T(t) = M \ddot{Z}(t) \qquad [1b]$$

La masa **M** ahora tiene una aceleración $\ddot{Z}(t)$ negativa porque $(Mg - T) < 0$ para $t > 0$.

Con una aceleración $\ddot{Z}(t) \neq 0$, la velocidad $\dot{Z}(t)$ de M es variable.

Entonces $\ddot{Z}(t) < 0$ y $\dot{Z}(t)$ es variable.

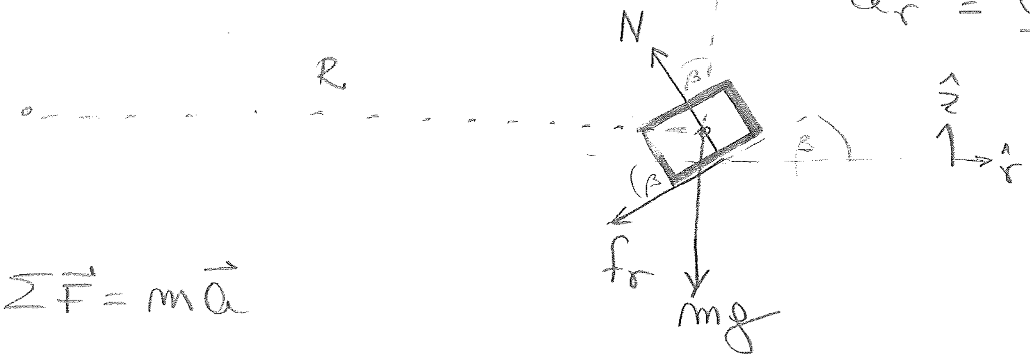
Pauta Problemas 15-16

I1, 1er Sem 2017

El movimiento que describe el automóvil cuando se desplaza por la curva, se puede considerar como movimiento circular uniforme.

15 El máximo valor posible de la rapidez ($v_{máx}$) está determinado por el máximo valor posible que puede tomar la fuerza de roce estática, la cual estaría apuntando en la dirección y sentido mostrados en el D.C.L. siguiente:

$\leftarrow a_r = \dfrac{v_{máx}^2}{R}$



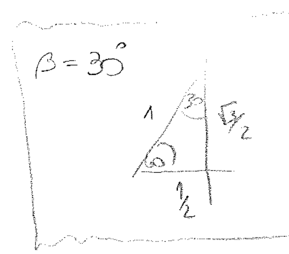
Luego $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\hat{r})$
$$N \,\mathrm{sen}(\beta) + f_r \cos(\beta) = m\frac{v_{max}^2}{R} \quad (1)$$

$\hat{z})$
$$N \cos(\beta) = mg + f_r \,\mathrm{sen}(\beta) \quad (2)$$

; donde $f_r = \mu_e \cdot N$

$(1)/(2) \Rightarrow$
$$\frac{\mathrm{sen}(\beta) + \mu_e \cos(\beta)}{\cos(\beta) - \mu_e \,\mathrm{sen}(\beta)} = \frac{v_{max}^2}{g \cdot R}$$



$$\Rightarrow v_{máx} = \sqrt{g \cdot R}\,\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5}\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\therefore\ v_{max} = \sqrt{g \cdot R}\ \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{5}}}}$$

Forma A, Resp. C

$\boxed{16}$ En este caso $f_r = 0$, por lo tanto las ec. nos quedan:

$$N \cos(\beta) = mg \qquad (1)$$

$$N \operatorname{sen}(\beta) = m \frac{V_T^2}{R} \qquad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow \frac{V_T^2}{g \cdot R} = Tg(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\therefore \quad V = \sqrt{\frac{g \cdot R}{\sqrt{3}}}}$$

Forma A

resp. (a)