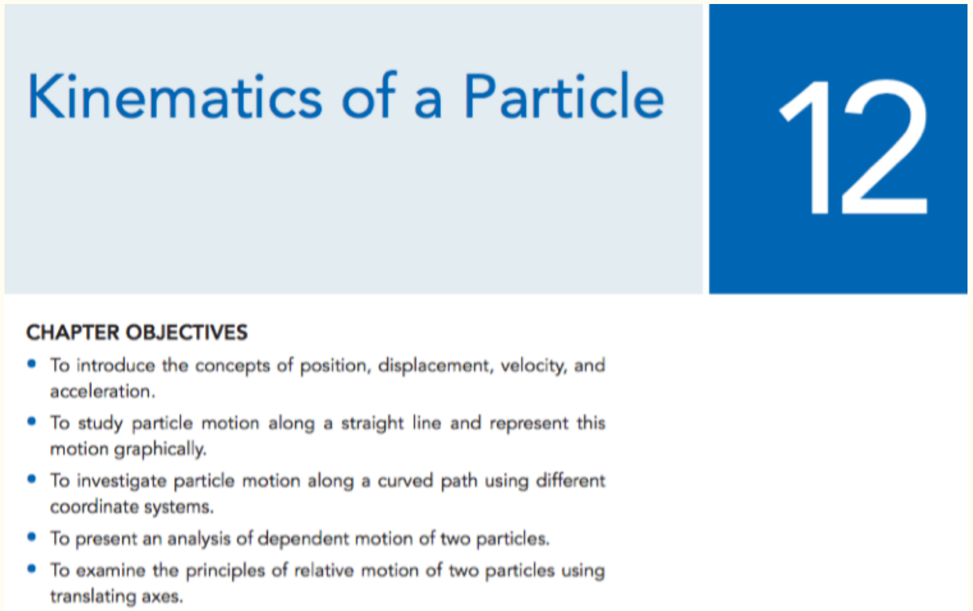
Estática y Dinámica FIS1513

Tema #1

Cinemática de una Partícula

Cinemática de una partícula



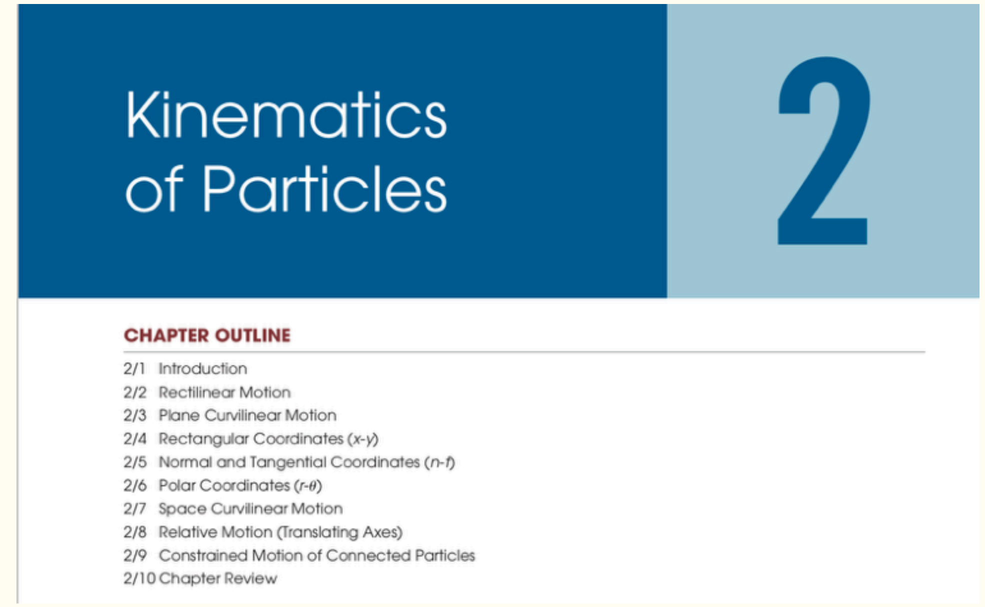
Kinematics of a Particle

12

CHAPTER OBJECTIVES

- To introduce the concepts of position, displacement, velocity, and acceleration.
- To study particle motion along a straight line and represent this motion graphically.
- To investigate particle motion along a curved path using different coordinate systems.
- To present an analysis of dependent motion of two particles.
- To examine the principles of relative motion of two particles using translating axes.

Capítulo 12 del Hibbeler



Kinematics of Particles

2

CHAPTER OUTLINE

2/1 Introduction
2/2 Rectilinear Motion
2/3 Plane Curvilinear Motion
2/4 Rectangular Coordinates (x-y)
2/5 Normal and Tangential Coordinates (n-t)
2/6 Polar Coordinates (r-θ)
2/7 Space Curvilinear Motion
2/8 Relative Motion (Translating Axes)
2/9 Constrained Motion of Connected Particles
2/10 Chapter Review

Capítulo 2 del Meriam

2

MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir el movimiento en línea recta en términos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea.
- Cómo interpretar gráficas de posición contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo para el movimiento en línea recta.

? Un velocista común acelera durante el primer tercio de la carrera y desacelera gradualmente en el resto de la competencia. ¿Es correcto decir que un corredor está *acelerando* conforme desacelera durante los dos tercios finales de la carrera?

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES

3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

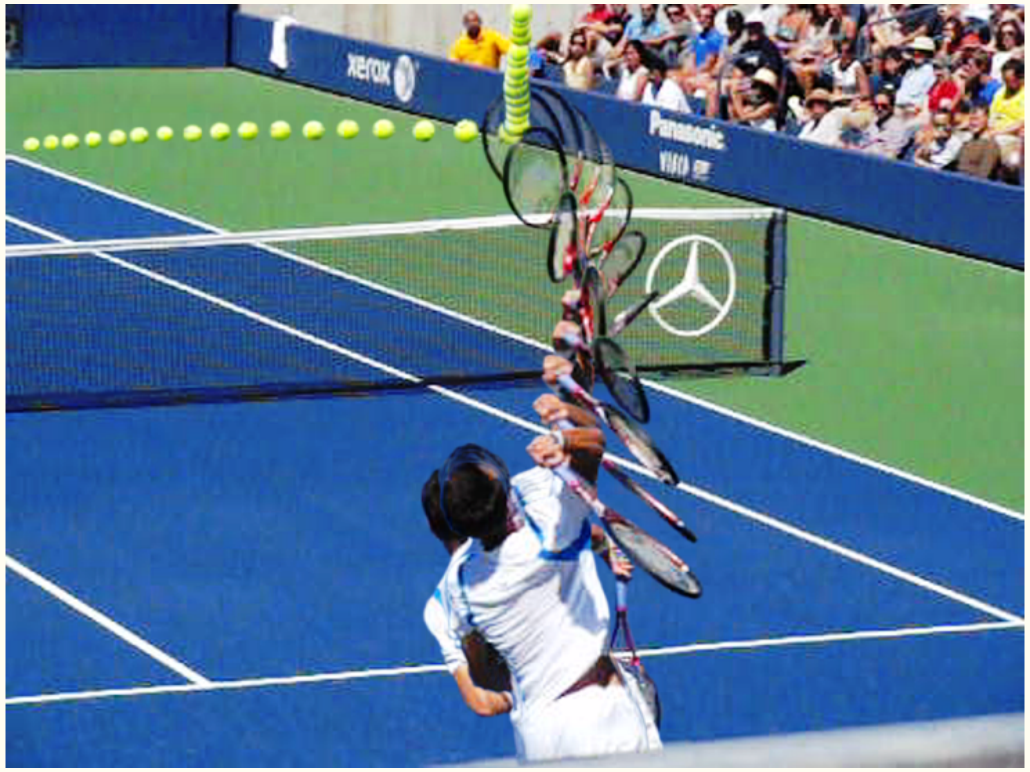
- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.

Capítulos 2 y 3 del Young & Freedman

¿Qué es la cinemática?

La **cinemática** es la rama de la **dinámica** que estudia el movimiento pero sin preocuparse por las causas que lo originan.

En esta sección del curso estudiaremos el movimiento de **una sola partícula**.

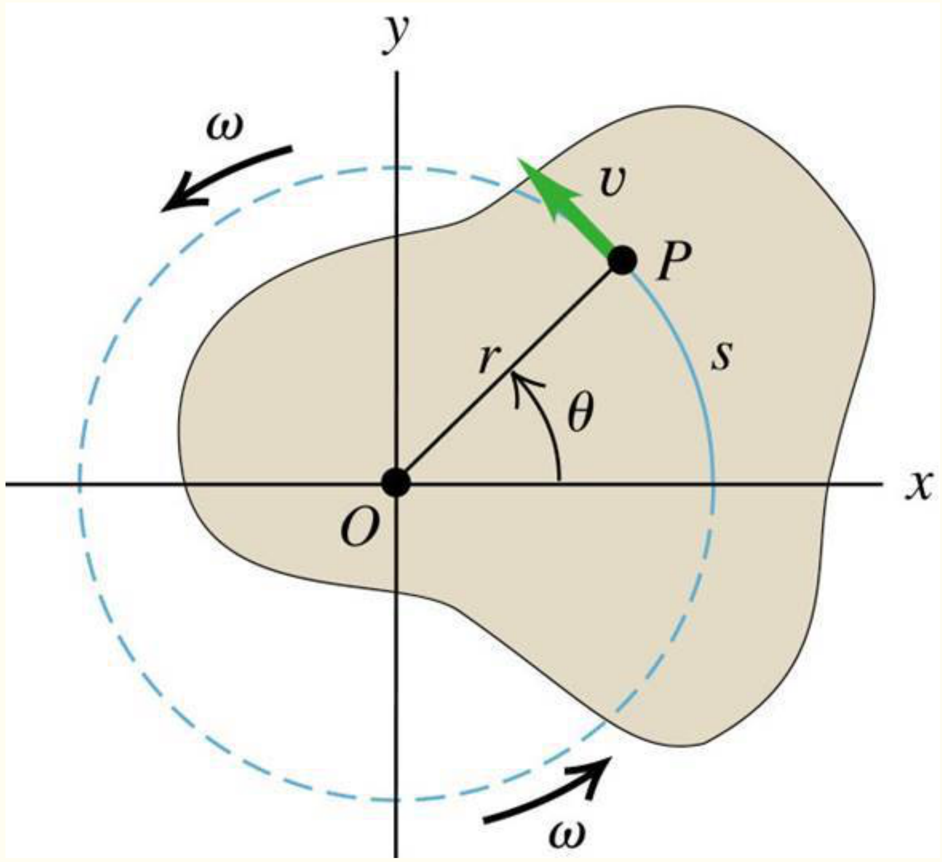


A pesar de que por lo general nos interesa considerar objetos con un cierto volumen (autos, proyectiles, bolas… etc), en muchas situaciones estos objetos pueden modelar como si fueran partículas.

¿Por qué una partícula?

¿Por qué modelar objetos como si fueran partículas?

Una partícula tiene posición pero no volumen. Por ende, no puede hacer algo que sí puede hacer un cuerpo rígido: **rotar**



En otras palabras, estamos diciendo que para la primera parte del curso vamos a ignorar rotaciones, y a considerar sólo translaciones

(aunque sí veremos movimiento circular, pero para partículas trasladándose en movimiento circular)

Definiciones en Cinemática

Es necesario hacer algunas definiciones:

Posición: es el **vector** que va del origen a la posición instantánea de la partícula en un instante dado

$\vec{x}$ o $\vec{r}$

Desplazamiento: es el cambio en posición entre dos instantes de tiempo. Es una resta de vectores, por lo que también es un **vector**.

$\Delta\vec{x}$ o $\Delta\vec{r}$

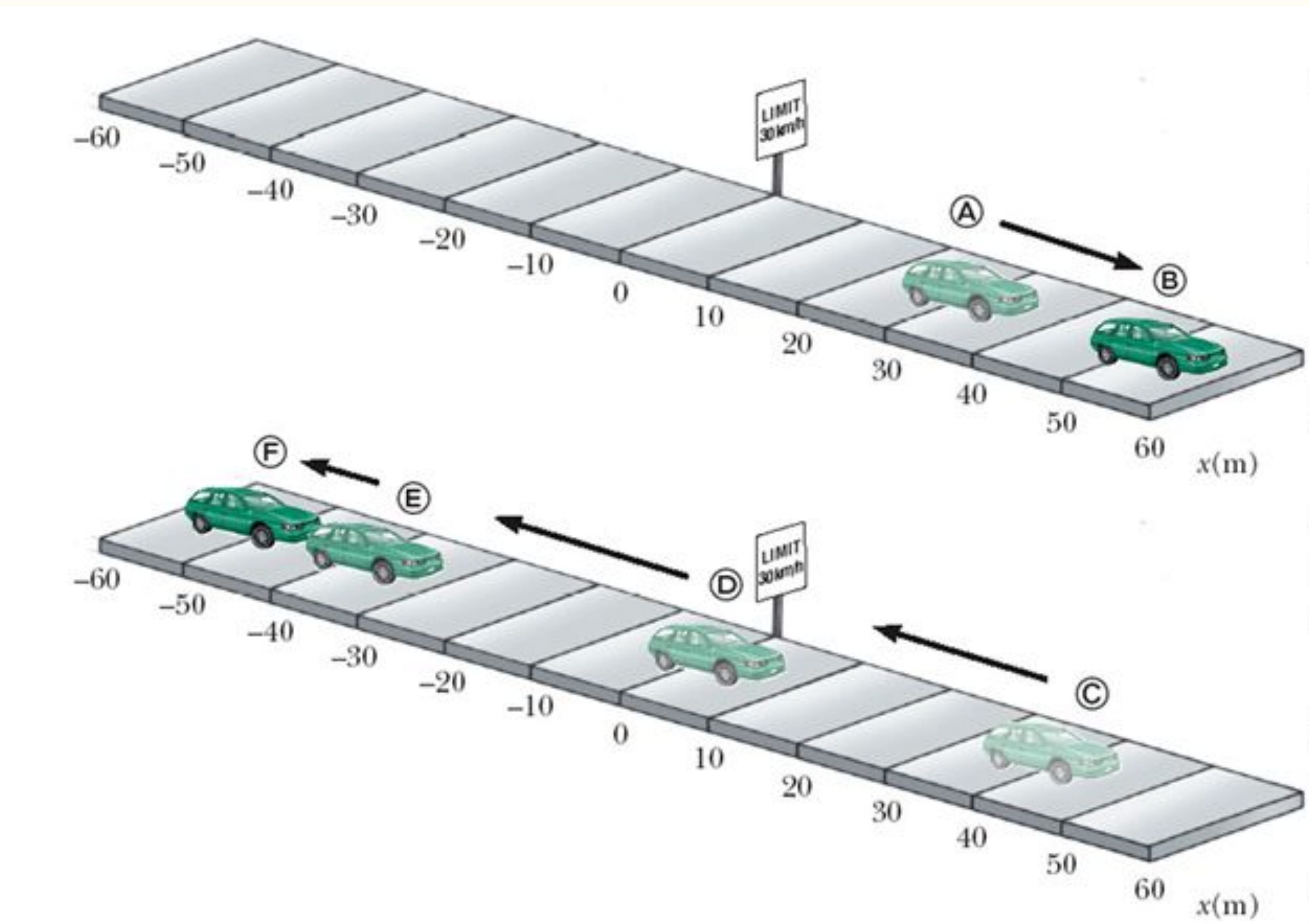
Distancia recorrida: es la longitud recorrida entre dos instantes de tiempo. Es un **escalar, siempre positivo.**

d o l

Nota: en el caso de movimiento unidimensional, los vectores posición y desplazamiento tienen sólo una coordenada, por lo que son esencialmente cantidades escalares.

Ejemplo

Por ejemplo, consideremos un auto moviéndose a lo largo del eje x en el orden A-B-C-D-E-F



Posiciones:

$x_A=30$, $x_B=50$, $x_C=40$, $x_D=0$, $x_E=-35$, $x_F=-55$

Desplazamientos:
(algunos ejemplos)

$\Delta x_{AB}=x_B-x_A=20$,

$\Delta x_{AD}=x_D-x_A=-30$,

$\Delta x_{AF}=x_D-x_A=-85$

Distancias:
(algunos ejemplos)

$d_{AB}=20$,

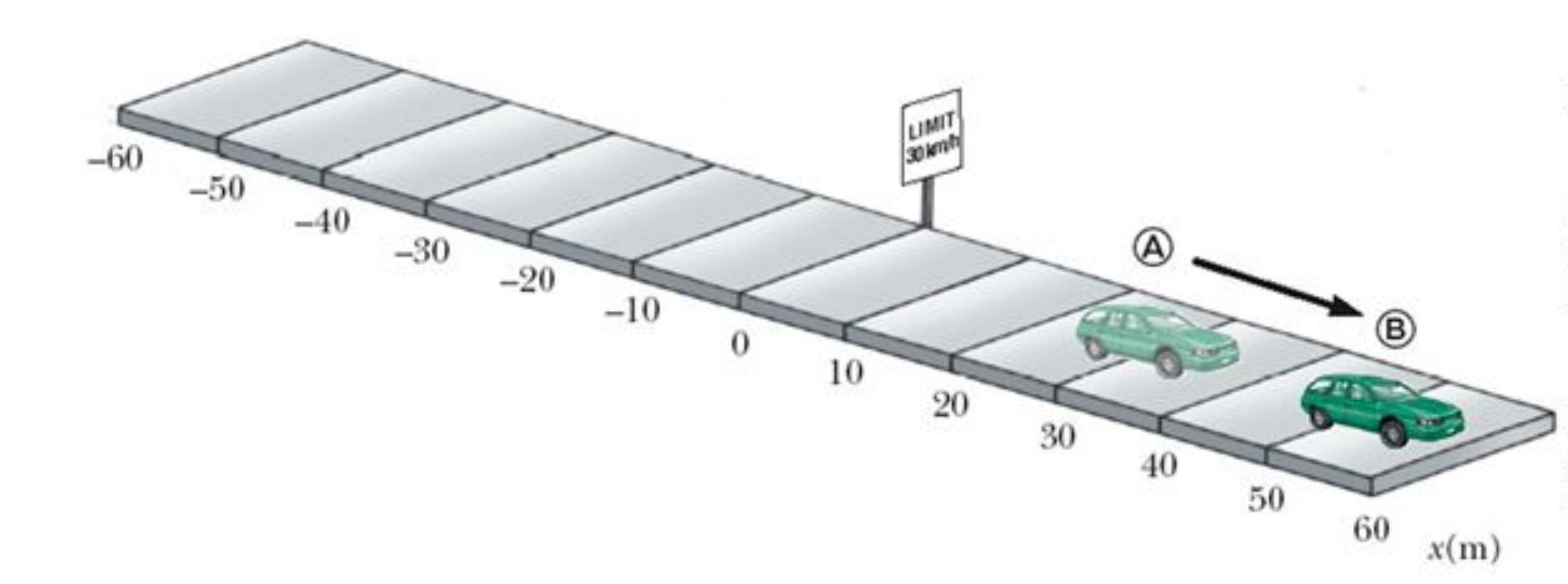
$d_{AD}=70$,

$d_{AF}=125$

Más Definiciones: velocidad

La **velocidad** es la cantidad que indica qué tan rápido se mueve un objeto. Se mide en base a la distancia recorrida por unidad de tiempo.

Supongamos ahora que el auto se mueve de A a B en 4 segundos:



¿Cuál es la velocidad del auto al desplazarse de A a B?

La tentación es decir $\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}}$, que en este caso equivale a 5m/s.

Pero el problema es que 5m/s es sólo la <u>velocidad promedio</u>. En realidad el auto hubiera podido avanzar a 10m/s el primer segundo, y a 3.3m/s los otros 3 segundos, etc…. ¡la pregunta está mal planteada, porque la velocidad puede cambiar cada instante!

Más Definiciones: velocidad

Por esto, para definir velocidad necesitamos considerar intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

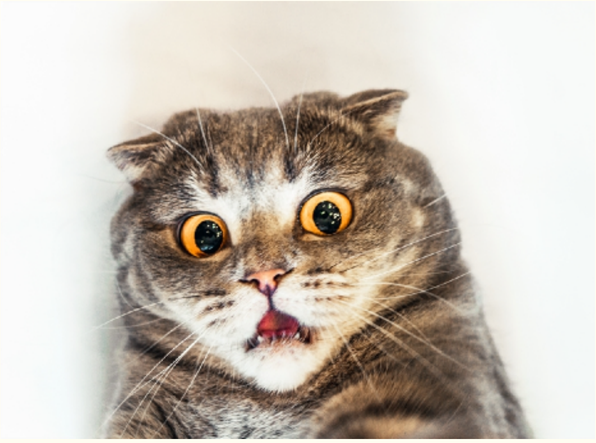
Pero esto no es nada más que la definición de una derivada, por lo que:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}}$$

Note que es un vector, aunque en el caso unidimensional se reduce a un escalar.

En palabras: la velocidad es la tasa de cambio de la posición respecto al tiempo. *Por ejemplo, una velocidad de 7m/s en la dirección x nos dice que en ese instante la posición en x aumenta de 7m cada segundo.*

Unidades: longitud/tiempo
(SI: m/s)



(significa que es esto es importante)

Más Definiciones: velocidad promedio

Si consideramos un intervalo de tiempo finito (es decir, no infinitesimalmente pequeño), obtenemos la velocidad promedio:

La velocidad promedio es también la velocidad que se obtiene al asumir que se va de un punto a otro en un cierto tiempo a velocidad constante

$$\vec{v}_{prom}(t) = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

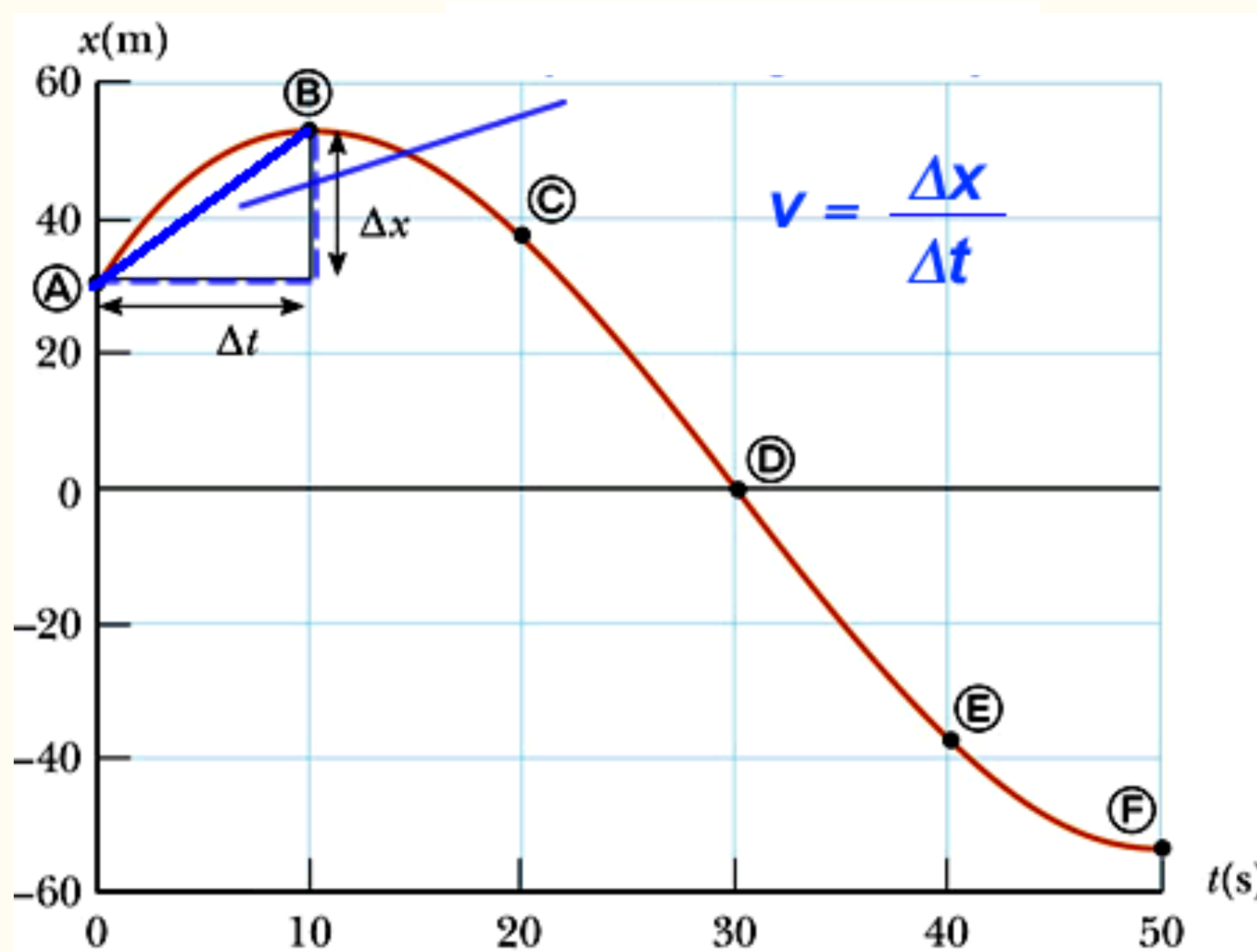
Mientras menor sea Δt, más se acerca esta cantidad a la velocidad instantánea. Si la velocidad es constante, la velocidad promedio es igual a la instantánea

Regresando al ejemplo del auto:

A cada instante, la velocidad es la **pendiente de la tangente de la curva x(t)**

La velocidad es mayor cuando el auto inicia el recorrido en A, y decrece hasta que se hace igual a 0 en B

La velocidad promedio entre A y B es Δx/Δt, que gráficamente corresponde a la pendiente de la recta que une A y B



Más Definiciones: aceleración

Así como se puede estudiar como cambia la posición respecto al tiempo, se puede estudiar el cambio de la velocidad respecto al tiempo. Esto es la **aceleración**:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

por lo que nos queda:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}}$$

En palabras, la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad.

Por ejemplo, una aceleración de 3m/s^2 en la dirección x nos dice que en ese instante la velocidad en x se incrementa de 3m/s cada segundo.

Unidades: longitud/tiempo^2
(SI: m/s^2)

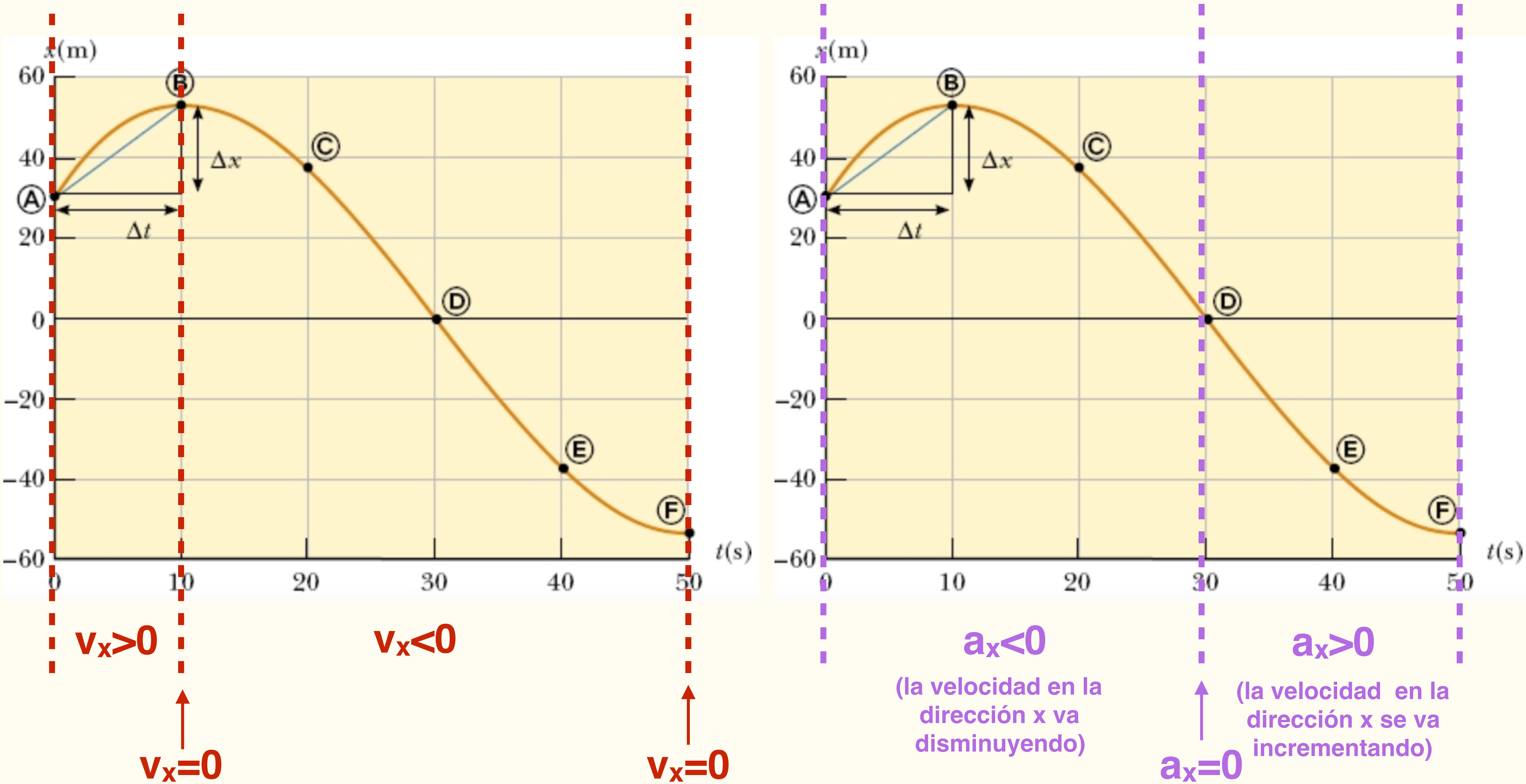
Preguntas con cliqueras

Ejemplo #1

Considere la representación estroboscópica de un auto moviéndose en una dimensión (x). Represente cualitativamente la **velocidad (en rojo)** y la **aceleración (en morado)** a cada instante:

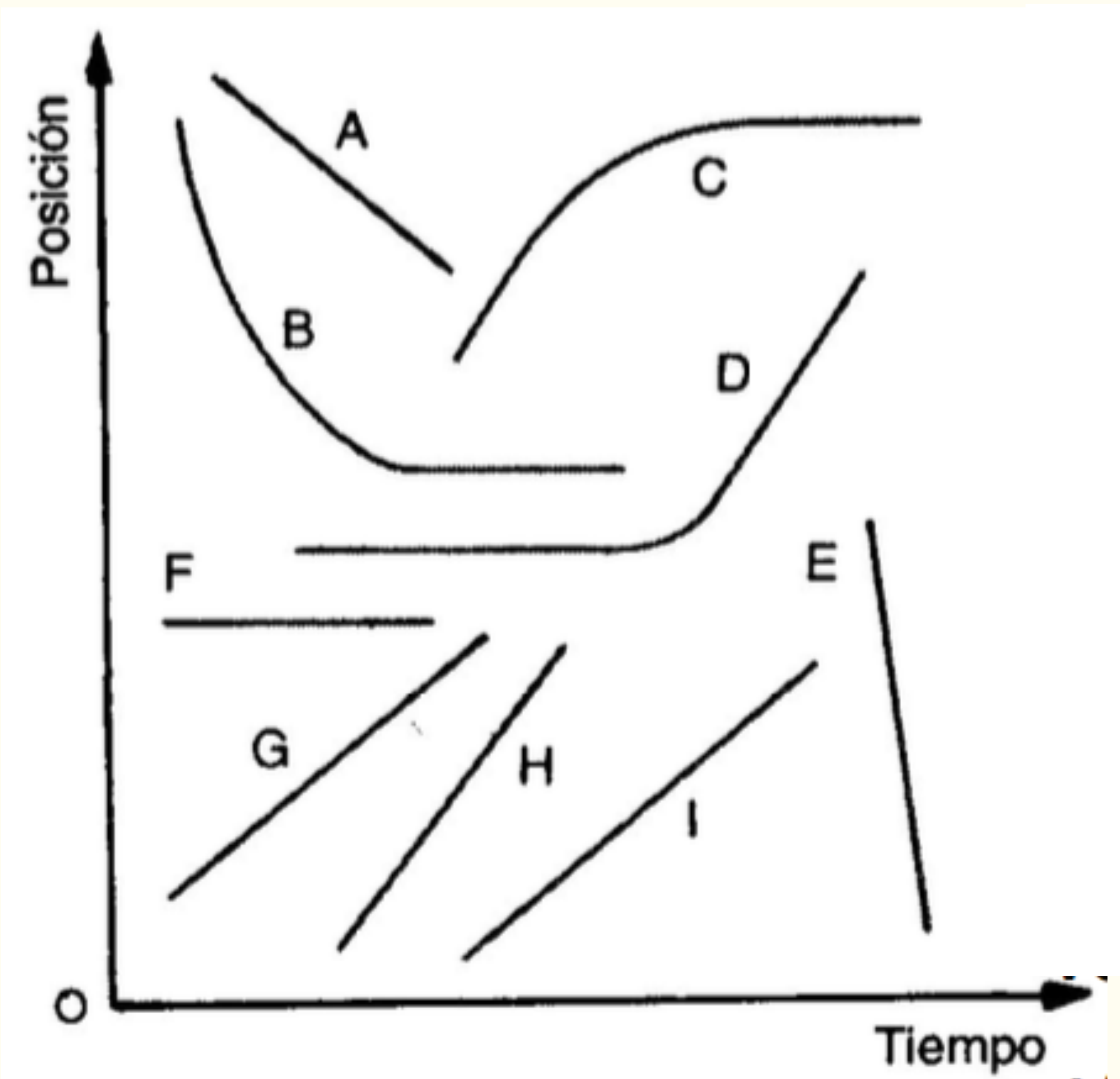
Ejemplo #2

Considere el ejemplo del auto que se mueve en el eje x como mostrado, e indique cuándo la velocidad es positiva, negativa, o cero. Haga lo mismo para la aceleración.



Tip: la velocidad es la pendiente de la tangente a la curva en cada punto. La aceleración es la concavidad en cada punto de la curva.

Ejemplo #3



¿Qué auto se aleja siempre del inicio de la carretera? **G, H, I**

¿Qué auto tiene una velocidad constante de mayor magnitud? **E**

¿Qué auto fue acelerado, partiendo del reposo, y alcanzó una velocidad constante? **D**

¿Qué dos autos se mueven siempre con la misma velocidad? **G, I**

¿Qué auto permanece detenido? **F**

Posición, Velocidad y Aceleración

Hasta ahora hemos hablando de aceleración, velocidad, posición, y tiempo. Estas cuatro cantidades están conectadas por estas ecuaciones:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Es importante recordar que estas son ecuaciones vectoriales. Como vivimos en 3 dimensiones, en realidad corresponden a **6** ecuaciones independientes:

$$a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{k} \qquad \upsilon_x\hat{i} + \upsilon_y\hat{j} + \upsilon_z\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

es decir
$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{d\upsilon_x}{dt} \\ a_y &= \frac{d\upsilon_y}{dt} \\ a_z &= \frac{d\upsilon_z}{dt} \end{aligned}}$$

es decir
$$\boxed{\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} \\ \upsilon_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}}$$

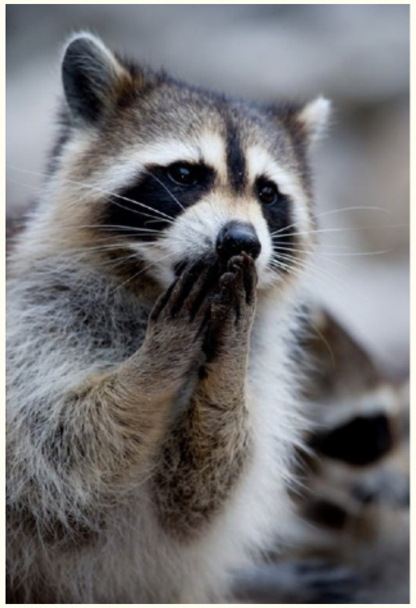
Principio: Posición, Velocidad y Aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Debido a esta interconexión, ocurre algo muy útil:

Si en una cierta dimensión se conoce la relación entre dos de estas variables, se pueden encontrar las otras dos (en esa misma dimensión) utilizando cálculo diferencial e integral

Lo más fácil es cuando se conoce la posición en función del tiempo, en cuyo caso sólo hay que derivar para encontrar v(t) y a(t).



Pero también se puede ir en la otra dirección, integrando. ***En ese caso la clave es separar las variables*** *(poner una variable de un lado de la ecuación, la otra del otro, e integrar).*

Primero aplicaremos esto al caso más fácil, en el que se conoce la relación entre aceleración y tiempo y que ésta es constante. Más adelante haremos un ejemplo cuando lo que se conoce es la relación entre velocidad y aceleración.

Aceleración constante, una dimensión

Una situación que se encuentra muy comúnmente en física es la de movimiento bajo aceleración constante.

Supongamos que un objeto se mueve en una sola dimensión x, y que la aceleración "a" es una constante. Tenemos que:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \longrightarrow d\upsilon = a\,dt \longrightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon' = \int_0^t a\,dt' \longrightarrow \upsilon = \int_0^t a\,dt' + \upsilon_0$$

por lo que: $\upsilon(t) = \int_0^t a\,dt' + \upsilon_0 = \underline{at + \upsilon_0}$

De igual forma:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = \upsilon\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t \upsilon\,dt' \longrightarrow x = \int_0^t \upsilon\,dt' + x_0$$

por lo que: $x(t) = \int_0^t \upsilon\,dt + x_0 = \int_0^t (at' + \upsilon_0)\,dt' + x_0 = \underline{\frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t + x_0}$

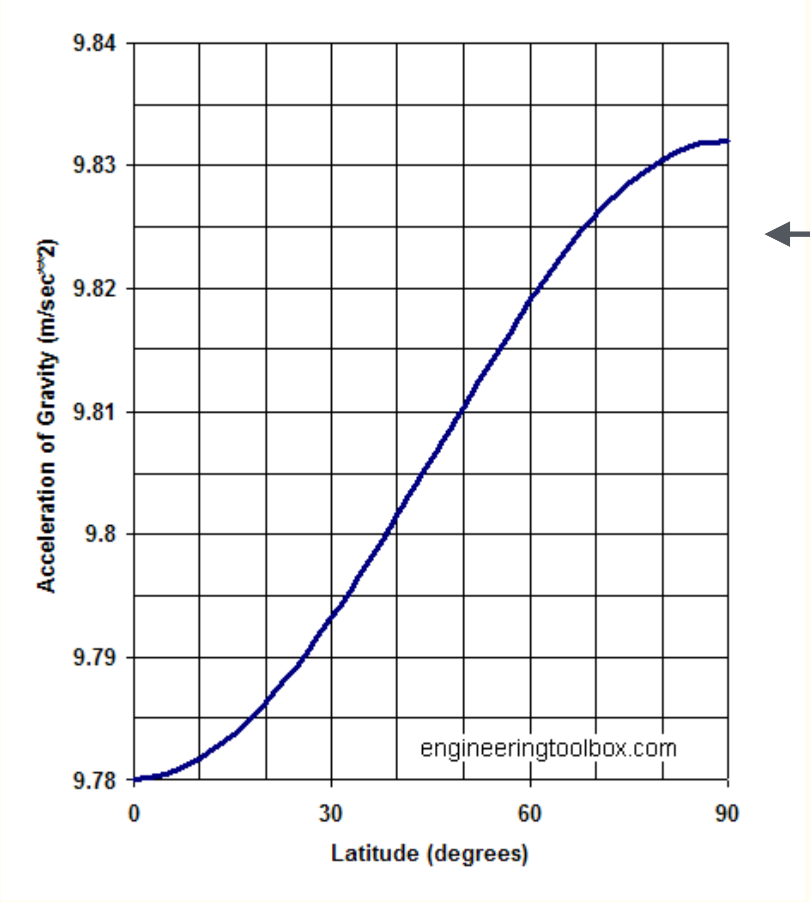
Paréntesis: Aceleración de la Gravedad

Estas ecuaciones son muy utilizadas en física debido a lo siguiente:

la gravedad acelera a *todos* los objetos en la superficie de la tierra con la misma aceleración, igual a $g = -9.8 m/s^2$

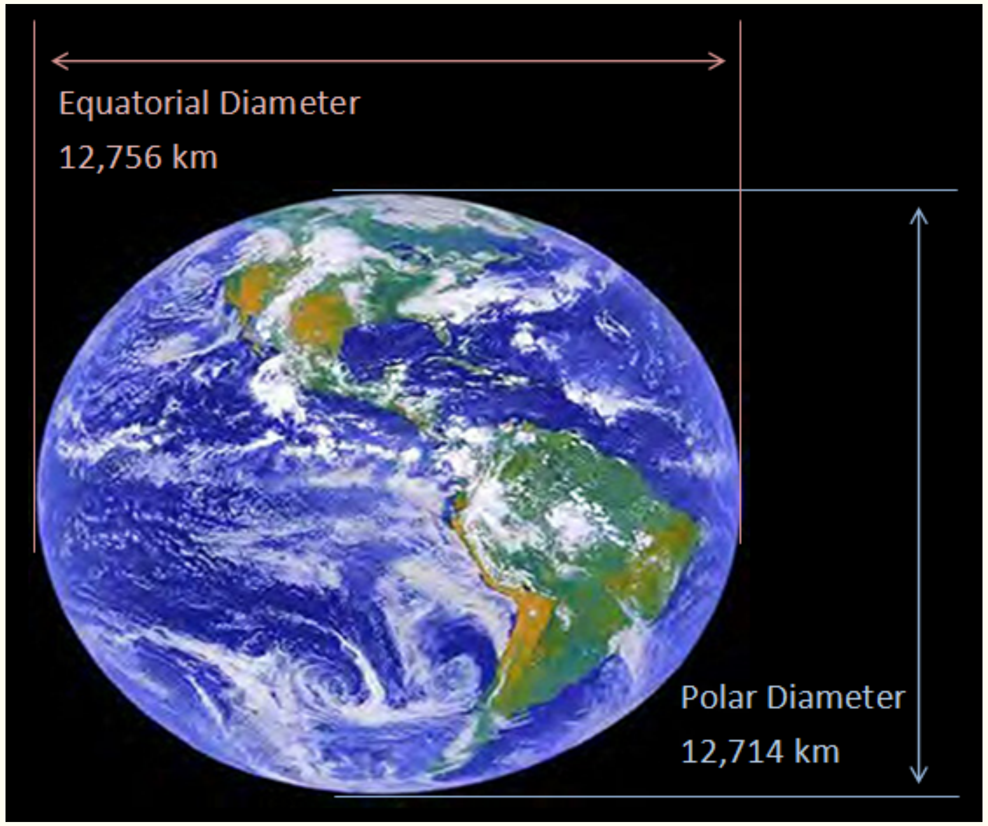
(obviamente la dirección de esta aceleración es hacia el centro de la tierra, es decir verticalmente hacia abajo)

En realidad esto no es 100% cierto, aunque es una muy buena aproximación:



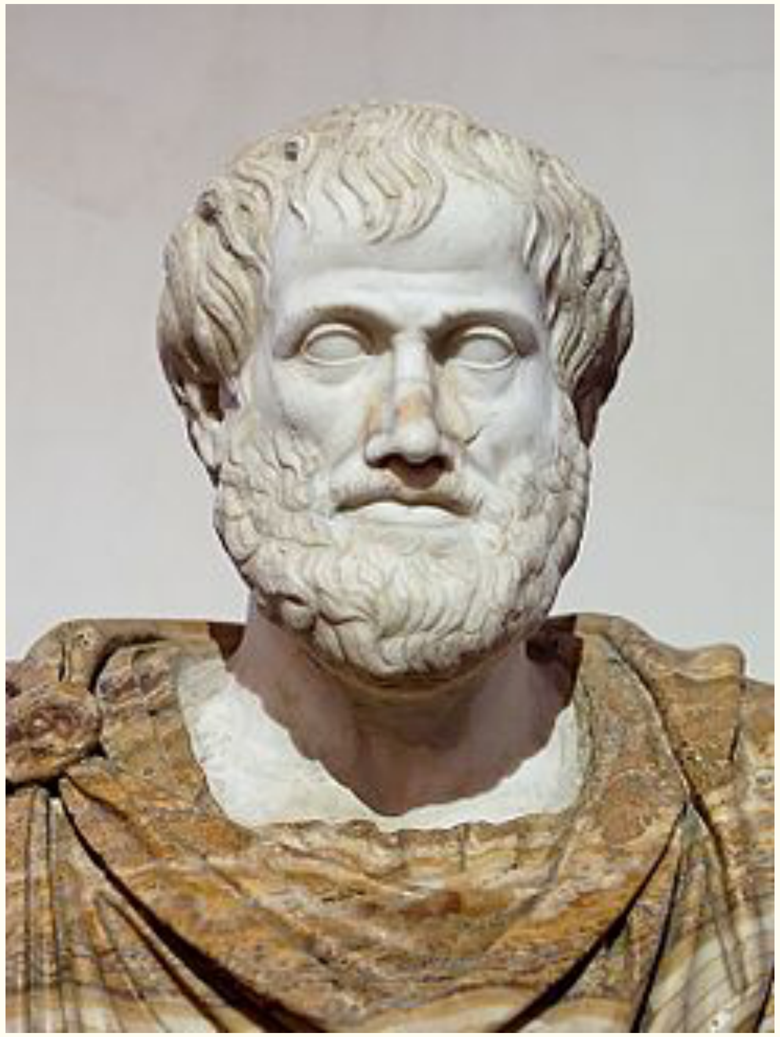
En realidad, la aceleración varía ligeramente con la latitud

Esto es porque, debido a su rotación, la tierra no es una esfera perfecta



Cápsula Informativa: ¿Por qué es esto?

¿Cómo puede ser que la gravedad afecte a todos los objetos por igual?



Aristóteles (~350 años antes de Cristo) decía que todo está compuesto por 4 elementos: tierra, viento, agua, fuego.

Objetos hechos de viento (como el humo) quieren ir hacia el viento, objetos hechos de tierra (como piedras) quieren ir hacia la tierra… etc.

Aristóteles también decía que los **objetos más pesados caen más rápido**.

¿Tenía razón Aristóteles?

¡No!

Un experimento muy sencillo muestra lo equivocado que estaba….

Experimento #1

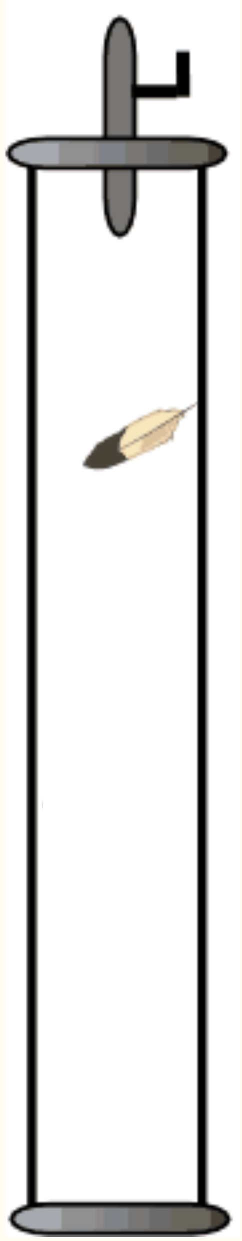
Si soltamos dos objetos de igual tamaño pero diferente masa de la misma altura y al mismo tiempo, ¿cuál cae primero?

La leyenda dice que Galileo soltó dos esferas con diferente masa desde la torre de Pisa en Italia para ver cuál caía primero. En realidad hizo otros experimentos utilizando planos inclinados.

¿Pero qué pasa si uno de los objetos es algo muy ligero como una pluma o un pedazo de papel? En este caso hay un factor extra a considerar que es la resistencia del aire

Experimento #2

Galileo dijo que si se ignora la resistencia del aire, cualquier objeto cae con una aceleración de $9.81 m/s^2$. Probemos esto con una pluma en un vacío parcial:



¡¡La pluma cae mucho más rápido cuando hay un vacío parcial!!

Ejemplo

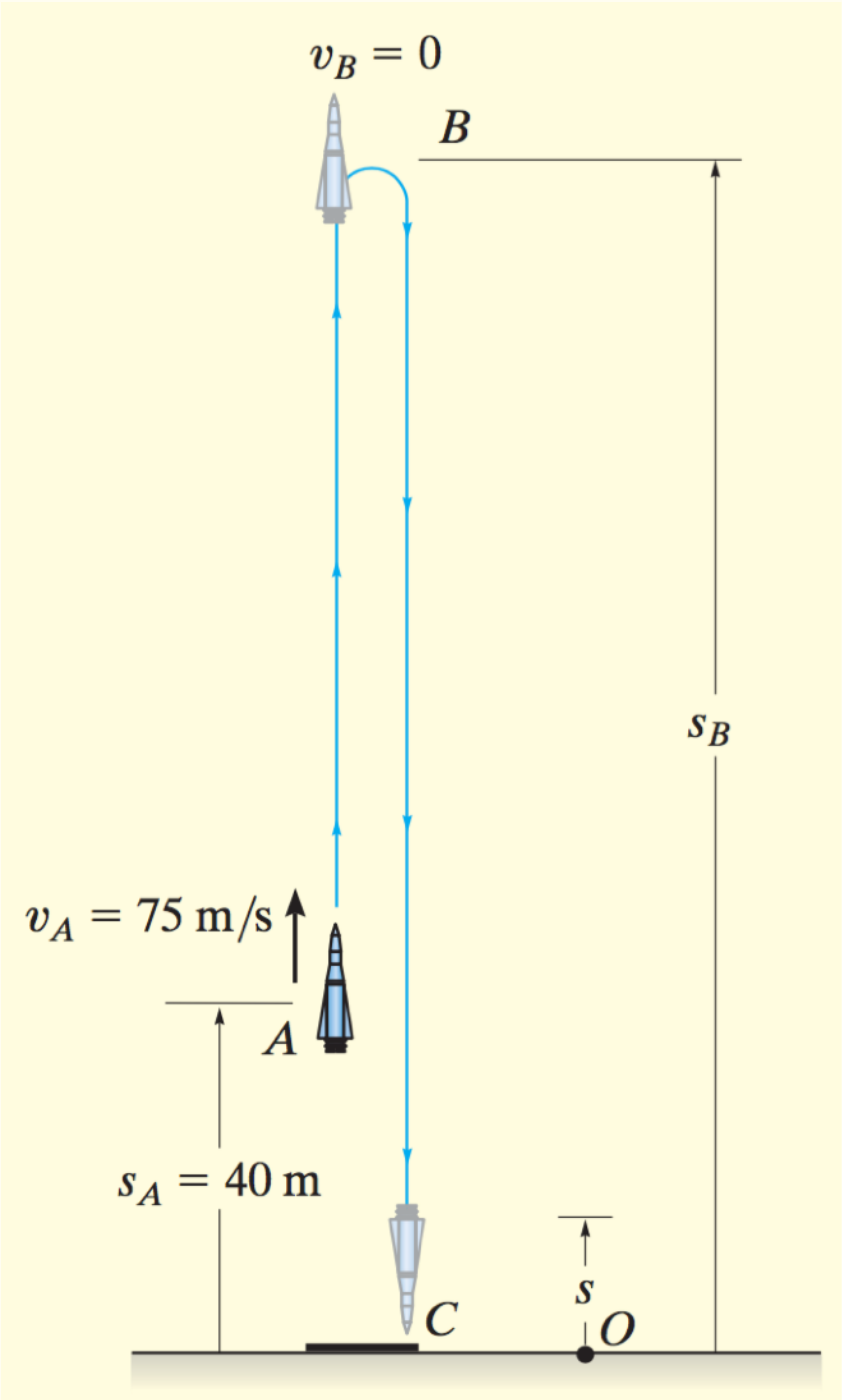
(Ejemplo Resuelto 12.3 en Hibbeler)

Un cohete en la superficie de la tierra parte con una velocidad initial v_A hacia arriba, a una altura s_A. ¿Cúal es la altura máxima s_B a la que llega el cohete, y la velocidad con la que se impacta en el suelo? Ignore la resistencia del aire.

(resolver en pizarra)

Respuestas: $s_B = \dfrac{v_A^2}{2g} + s_A$

$$|v_C| = \sqrt{v_A^2 + 2gs_A}$$



Comentario sobre el Problema Anterior

Utilizando el mismo razonamiento que usamos en el problema podemos derivar una relación que a veces es útil:

$$v = at + v_0 \longrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right)}$$

Esta relación es útil cuando se quiere relacionar posición y velocidad.
El problema anterior se puede resolver muy fácilmente con esta ecuación (ver solución del Hibbeler)

Regresando a las ecuaciones

Mencionamos que si se conoce la relación entre 2 de las 4 variables (aceleración, velocidad, posición, o tiempo) se pueden extraer las otras dos aplicando las reglas del cálculo.

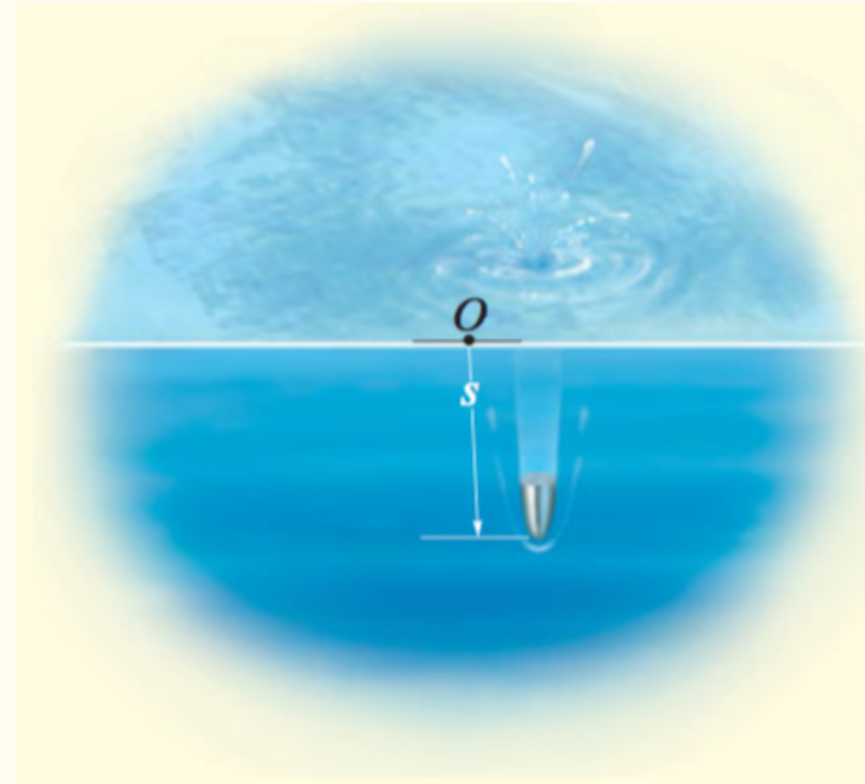
Ahora ejemplificaremos este principio cuando lo que se conoce es la relación entre la aceleración y la velocidad (ver problema siguiente)

Una situación típica en la que se conoce la relación entre aceleración y velocidad es para un proyectil en un fluido

Ejemplo

(Ejemplo Resuelto 12.2 en Hibbeler)

Una bala entra en t=0 a un estanque de agua con una velocidad inicial v_0. Debido al roce, la bala experimenta una deceleración de magnitud kv^3, donde k es una constante positiva y v es la velocidad. Determine la velocidad y la profundidad "s" que penetra la bala en función del tiempo.



(resolver en pizarra)

Respuestas:

$$v(t) = \left(2kt + \frac{1}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{v_0}{\sqrt{2ktv_0^2 + 1}}$$

$$s(t) = \frac{1}{k}\left[\left(2kt + \frac{1}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{v_0}\right] = \frac{\sqrt{1 + 2ktv_0^2} - 1}{kv_0}$$

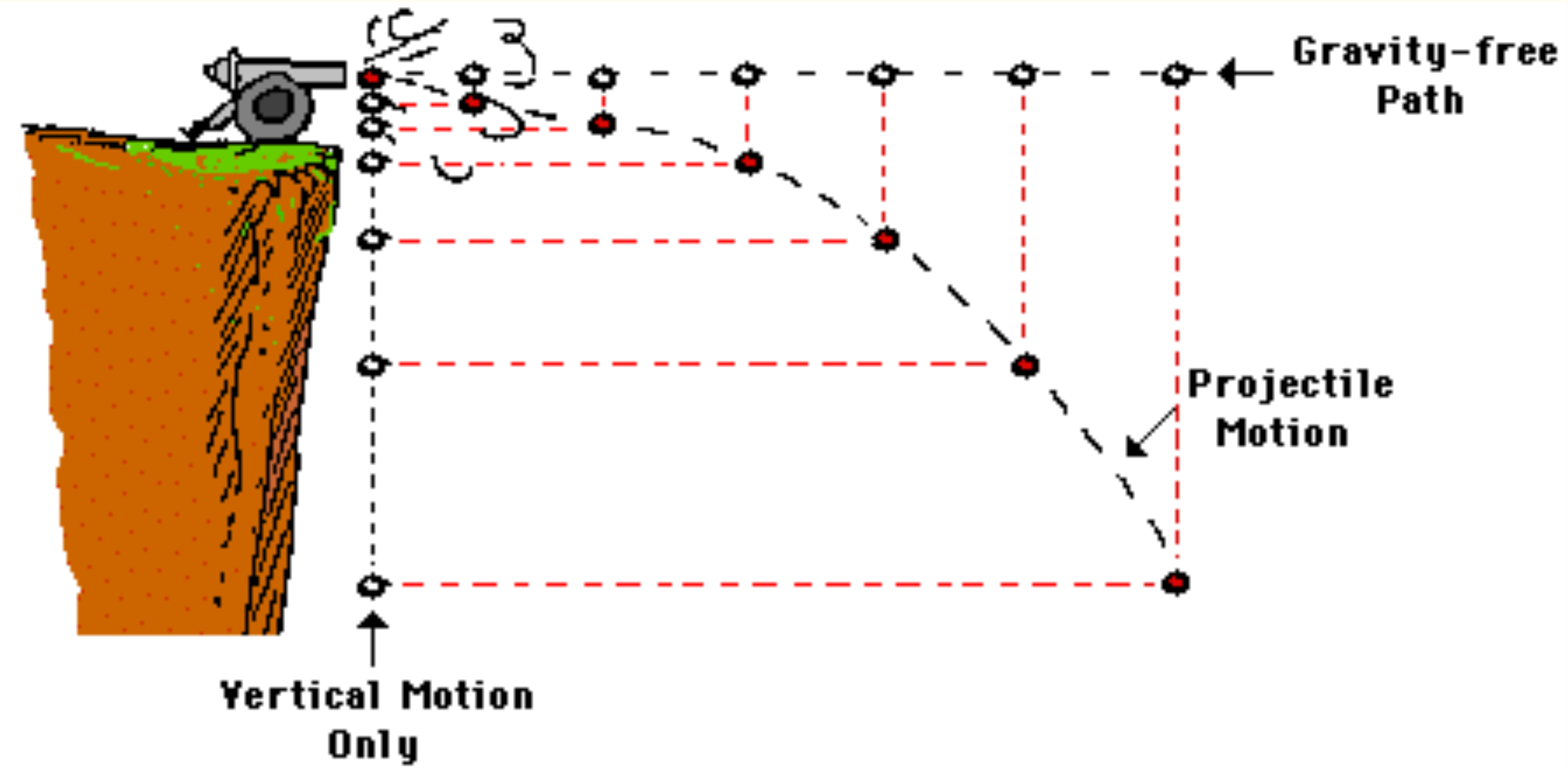
Solución detallada al final de estas diapositivas

Experimento #1

Para el experimento recordemos una lección importante de la clase anterior

Experimento #2

¿Qué pasa si un proyectil se dispara al mismo tiempo que otro igual se deja caer? ¿Cuál de los dos cae primero?



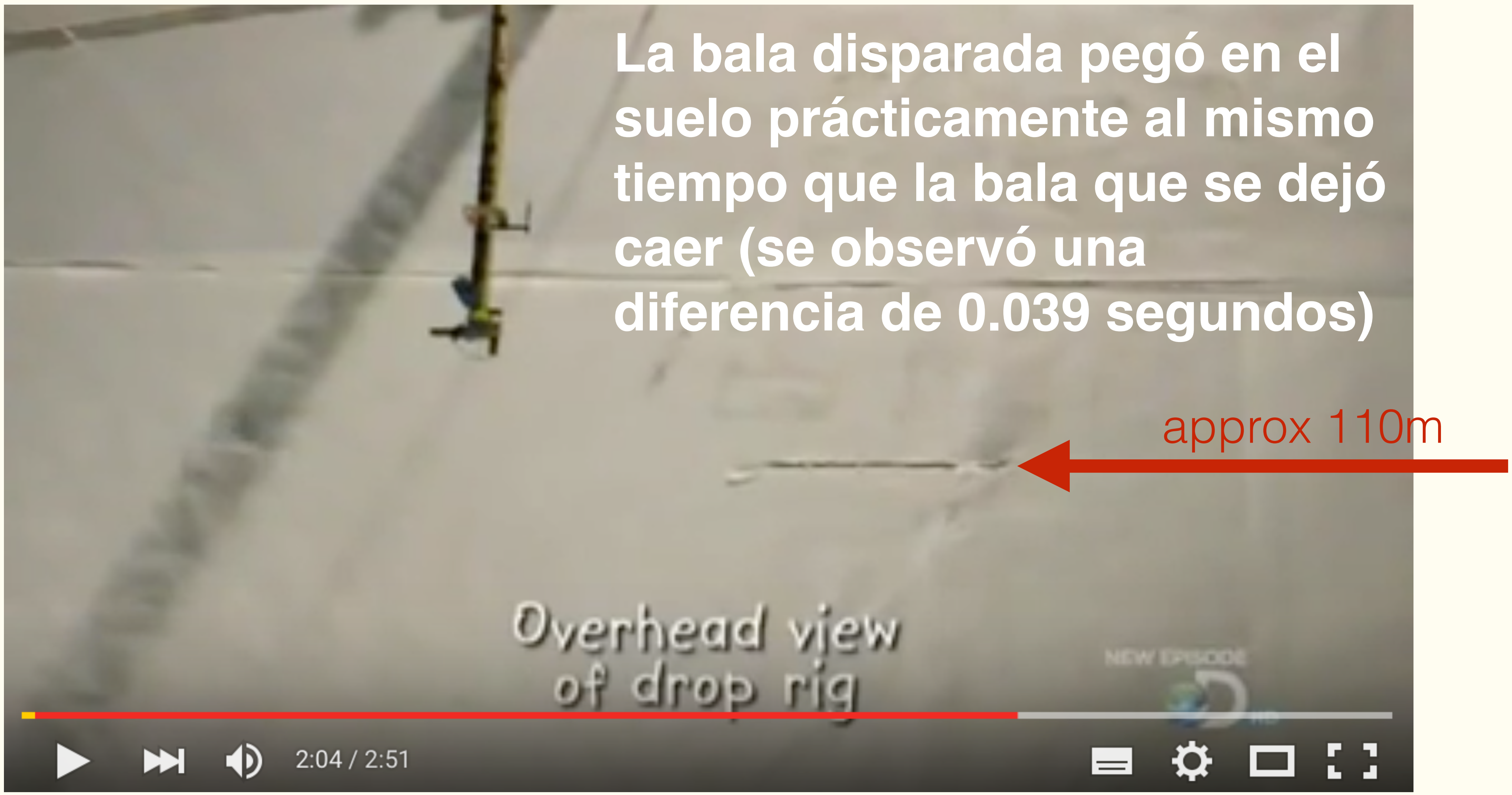
Los dos caen exactamente al mismo tiempo. **El hecho de que haya una velocidad en x no afecta el movimiento en y**. Como vimos la clase pasada, el movimiento en y es independiente del movimiento en x.

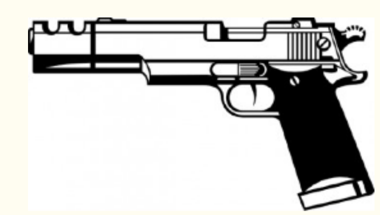
Es importante recordar esto cuando vayamos a más de una dimensión. Veremos que la ecuación del movimiento en y es exactamente igual para ambos proyectiles

Sobre el Experimento #2

¿Y qué pasaría si fuera una bala?

Los “Mythbusters” hicieron el experimento en el Discovery Channel

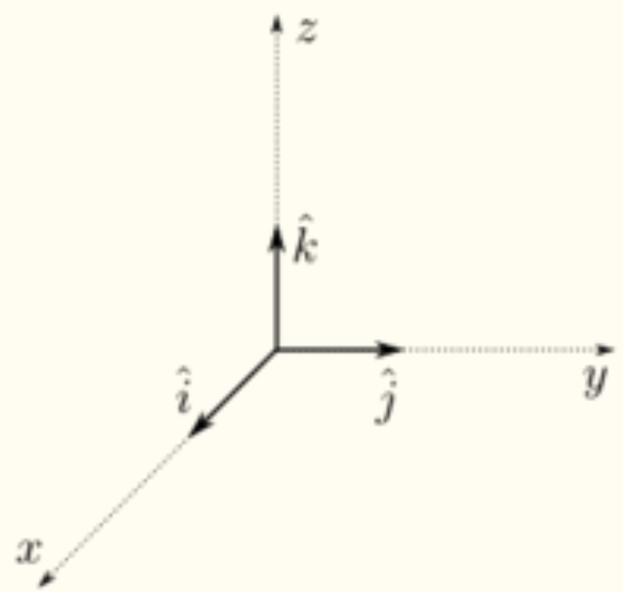




Ver video “Mythbusters: Bullet fired vs. Bullet dropped”
https://www.youtube.com/watch?v=D9wQVIEdKh8

Recordatorio: Coordenadas Cartesianas

Ahora queremos extender nuestro tratamiento de aceleración constante a más dimensiones. Antes de hacerlo, recordemos brevemente el sistema de coordenadas cartesianas en 3 dimensiones:



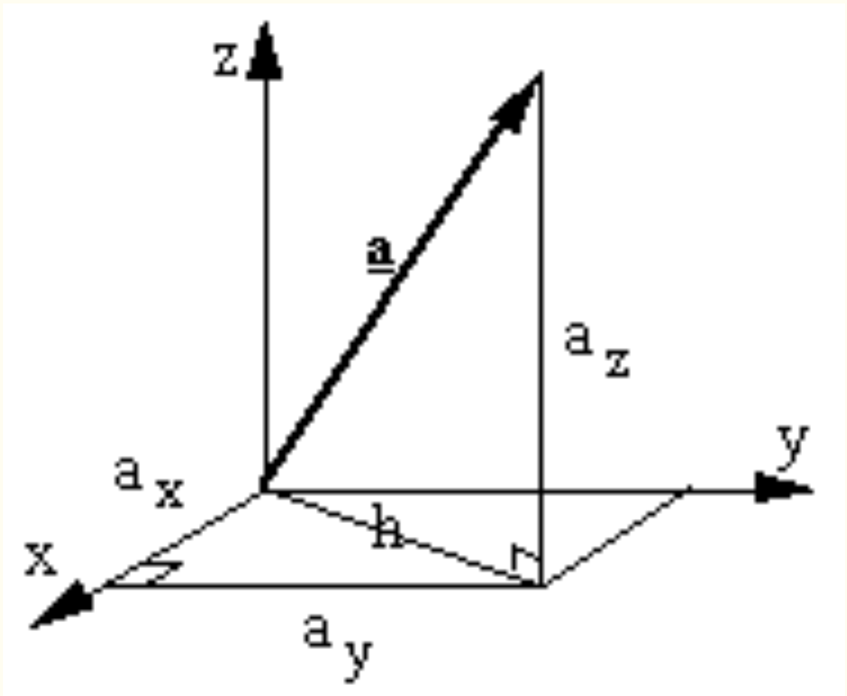
Los vectores unitarios para x, y, z se denominan

$$\hat{i}\,,\hat{j},\hat{k}$$

respectivamente. También se denotan a veces como

$$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$$

Estos vectores unitarios son mutuamente ortogonales, y son constantes en todo el espacio



Cada vector se puede descomponer en estas tres direcciones.

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Aceleración constante, caso general

Podemos generalizar el razonamiento de una dimensión a tres dimensiones. Supongamos que la aceleración está dada por:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$ (donde a_x, a_y y a_z son constantes)

Puesto que $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ entonces $\displaystyle\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}\,'(t) = \int_0^t \vec{a}\,dt\,'$ lo cual equivale a

$$(v_x - v_{0x})\hat{i} + \left(v_y - v_{0y}\right)\hat{j} + \left(v_z - v_{0z}\right)\hat{k} = \left(a_x t\right)\hat{i} + \left(a_y t\right)\hat{j} + \left(a_z t\right)\hat{k}$$

que se puede reescribir de forma más compacta como:

$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0}$ donde $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}$ es la velocidad inicial

De la misma forma, la posición queda:

$\boxed{\vec{x}(t) = \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0}$ donde $\vec{x}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ es la posición inicial

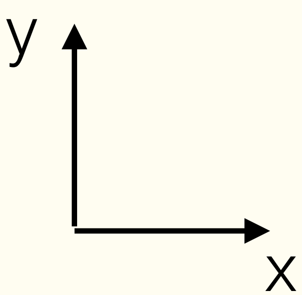
Nota: como son ecuaciones vectoriales, en realidad cada una de las ecuaciones en rojo representa 3 ecuaciones

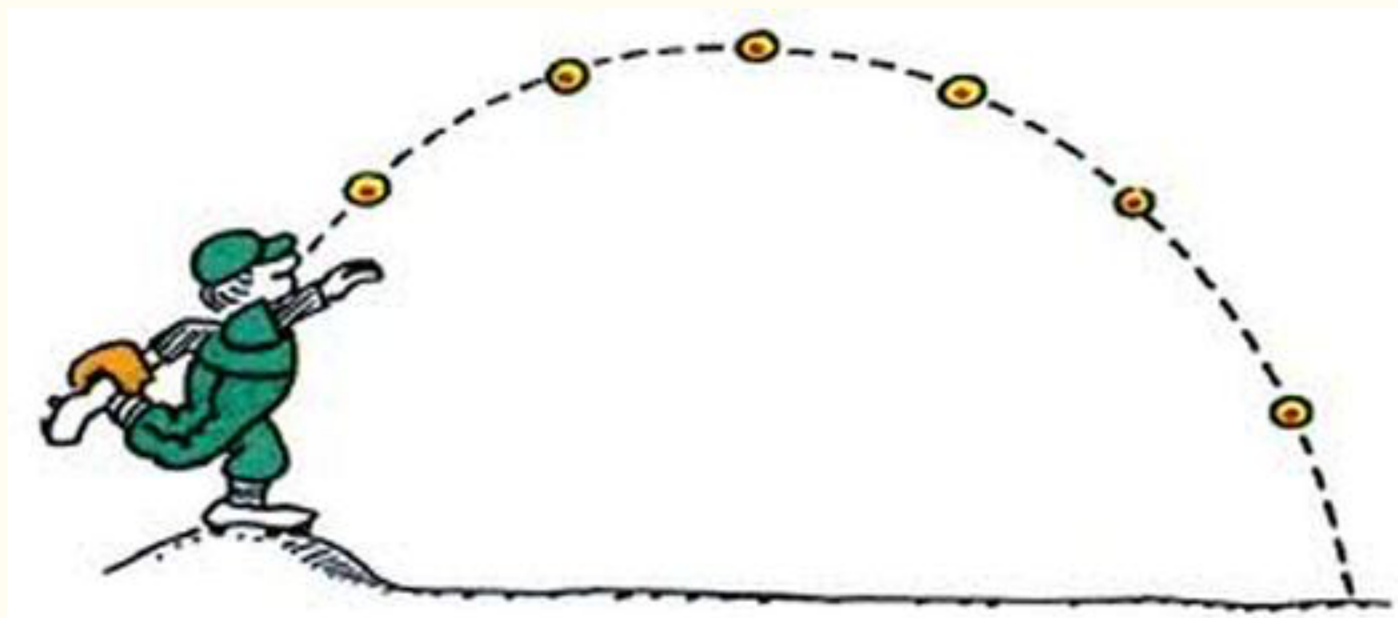
Aplicación: Tiro Parabólico

La aplicación más común de estas ecuaciones es el llamado “tiro parabólico”, es decir el movimiento de objetos bajo la sola acción de la gravedad.

Si orientamos el sistema de coordenadas de tal forma que la velocidad inicial esté en el plano x-y, no hay velocidad inicial en z ni aceleración en z, por lo que todo ocurre en el plano x-y y no es necesario preocuparse por z.

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$





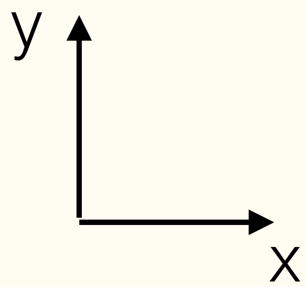
Como vimos, las ecuaciones vectoriales generales son:

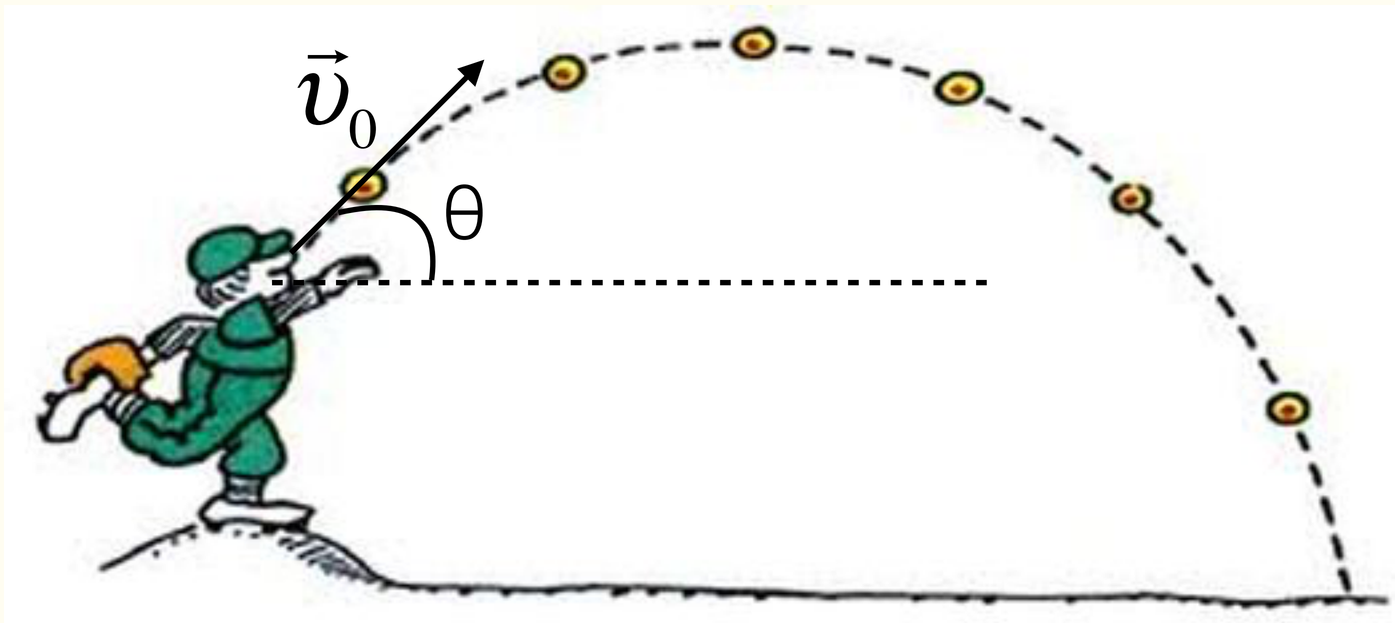
$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0 \qquad \vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

(donde $\vec{x}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$ y $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$, ya que nos olvidamos de z)

Aplicación: Tiro Parabólico

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$





$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Como estamos en un plano (es decir, dos dimensiones), las ecuaciones vectoriales se reducen a 4 ecuaciones independientes:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \qquad v_x(t) = v_{0x}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \qquad v_y(t) = -gt + v_{0y}$$

Cosas que notar:

- Como no hay aceleración en x, la velocidad es constante en esa dimensión
- En ambas dimensiones, si se deriva la posición en función del tiempo, se encuentra la velocidad (¡como debe ser!)

¿Por qué "parabólico"?

¿Por qué se le llama "tiro parabólico"?

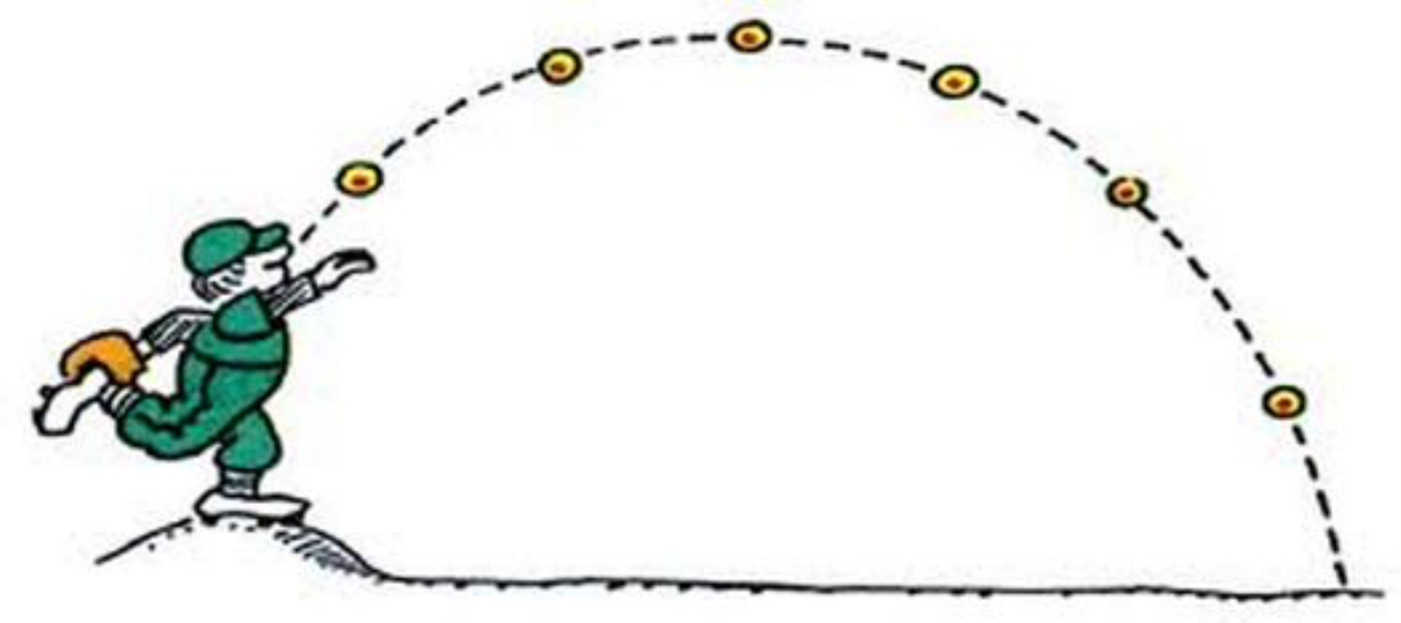
Si se despeja t de la primera ecuación:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

y se introduce en la segunda:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right) + y_0$$

Vemos que la relación y(x) es la ecuación de una parábola

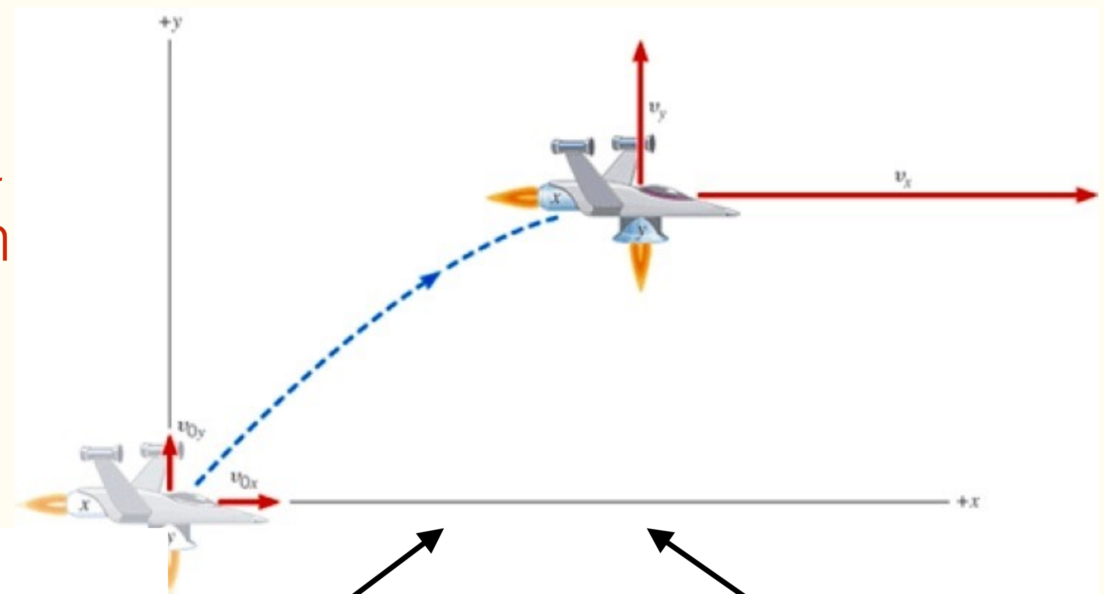


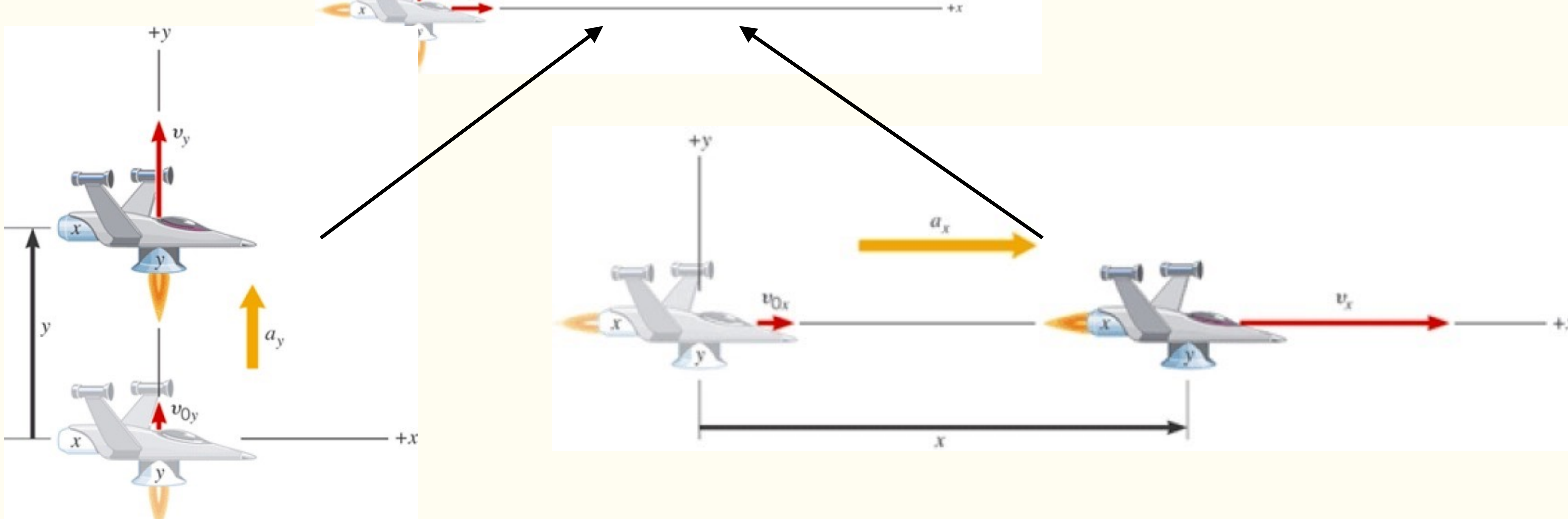
Sobre el Tiro Parabólico

Otra forma de ver esto: como las componentes ortogonales del movimiento son independientes, se puede estudiar el movimiento en cada dimensión por separado.

Por ejemplo, el movimiento en 2D del avión se puede entender como un movimiento hacia arriba y otro hacia la derecha.

Lo que pasa es que los movimientos hacia arriba y a la derecha no ocurren uno después del otro, sino simultaneamente.

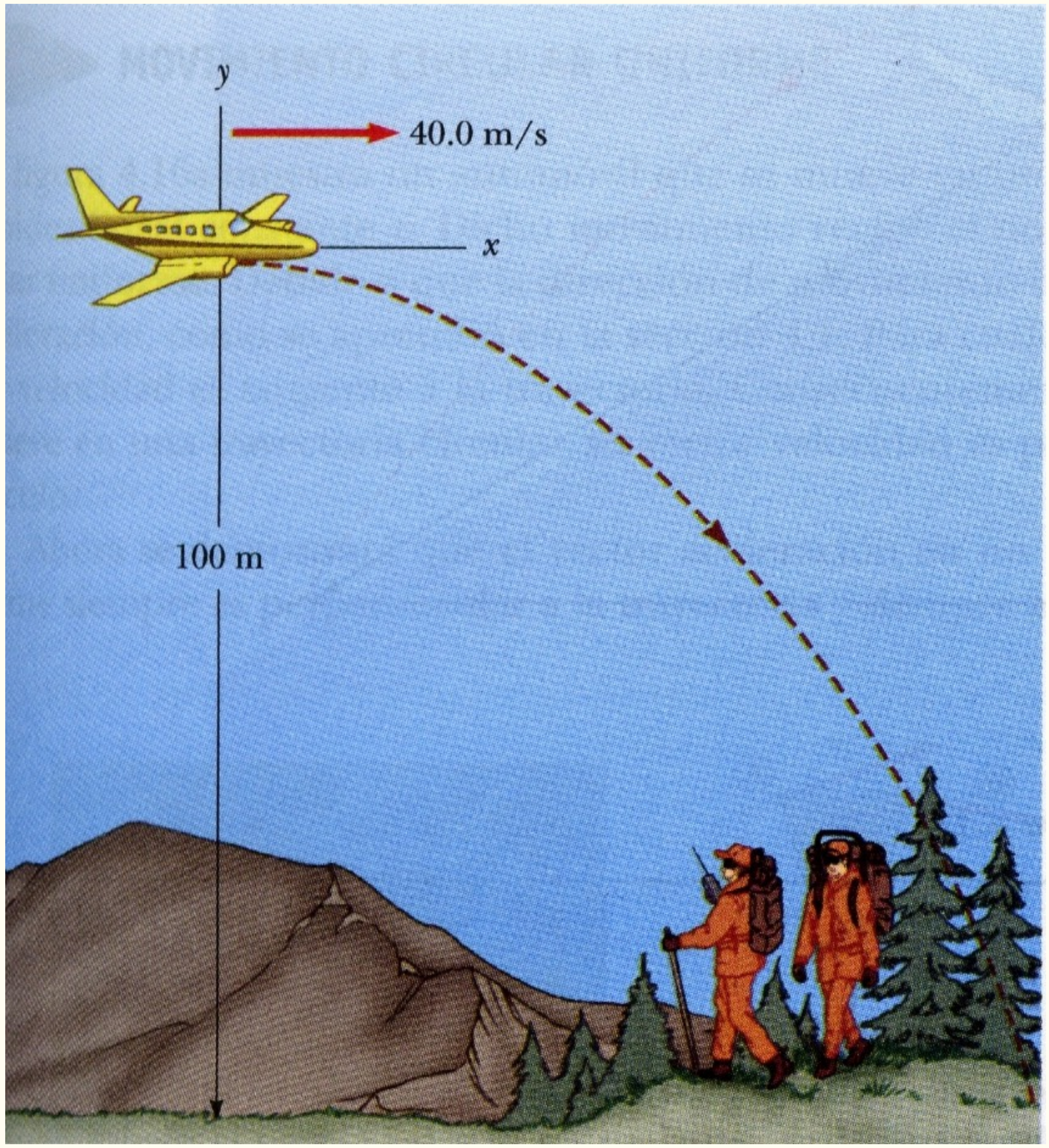




Ejemplo

(no en el libro de texto)

Un avión de rescate deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores extraviados, como se muestra en la figura. Si el avión viaja a 40m/s y a una altura de 100m sobre el suelo, ¿a qué distancia horizontal cae el paquete en relación con el punto en que se soltó?



(este problema no se alcanzó a hacer en clase, pero está muy sencillo y se recomienda que verifiquen en casa que lo pueden resolver; en el taller y en la ayudantía se realizarán otros)

Respuesta: 180.7m

Cinemática de una partícula

Seguimos en Cinemática pero ahora nos cambiamos a otros sistemas de coordenadas

12.7 Curvilinear Motion: Normal and Tangential Components

When the path along which a particle travels is *known*, then it is often convenient to describe the motion using n and t coordinate axes which act normal and tangent to the path, respectively, and at the instant considered have their *origin located at the particle*.

Planar Motion. Consider the particle shown in Fig. 12–24*a*, which moves in a plane along a fixed curve, such that at a given instant it is at position s, measured from point O. We will now consider a coordinate system that has its origin at a *fixed point* on the curve, and at the instant

12.8 Curvilinear Motion: Cylindrical Components

Sometimes the motion of the particle is constrained on a path that is best described using cylindrical coordinates. If motion is restricted to the plane, then polar coordinates are used.

Polar Coordinates. We can specify the location of the particle shown in Fig. 12–30*a* using a *radial coordinate* r, which extends outward from the fixed origin O to the particle, and a *transverse coordinate* θ,

Secciones 12.7-8 del Hibbeler

3.4 Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES

3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

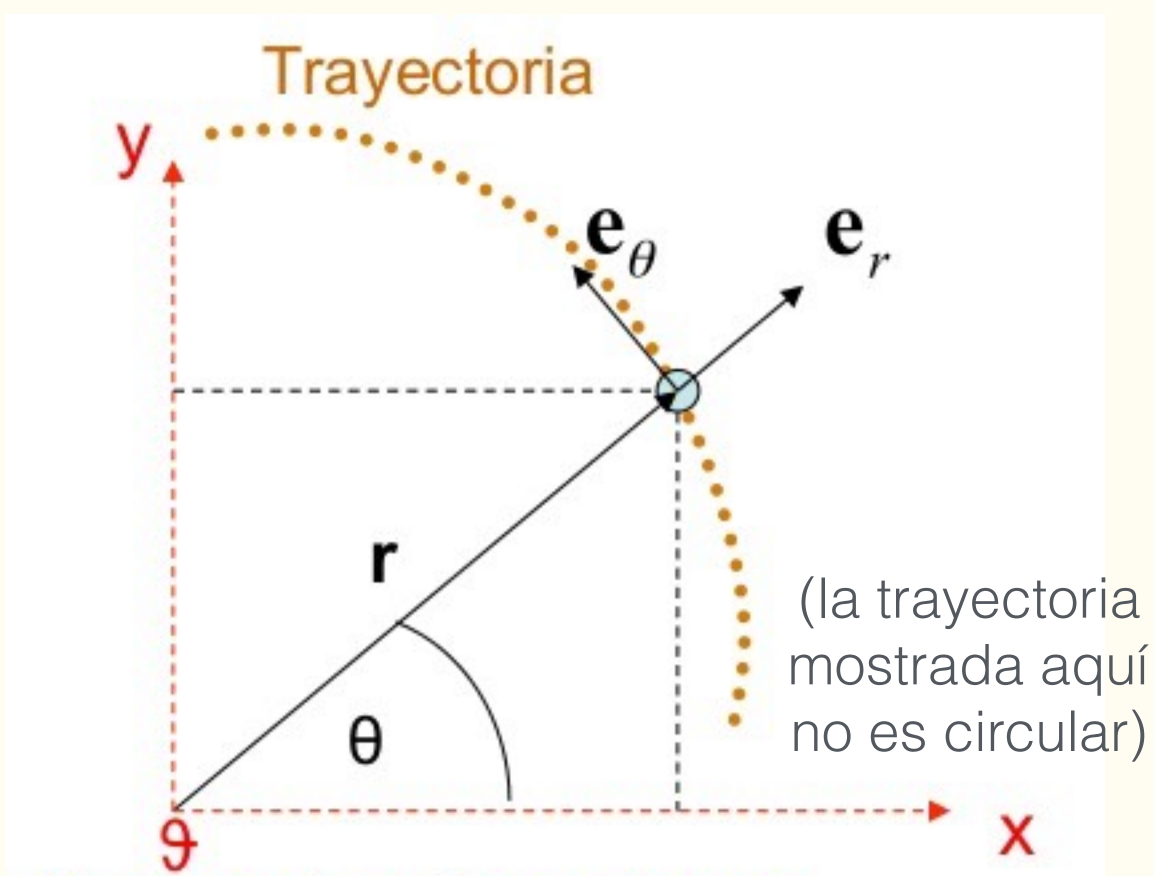
- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.

Sección 3.4 del Young & Freedman

Coordenadas Polares

Ahora vamos a considerar el movimiento de una partícula en coordenadas polares y cilíndricas

Comencemos con polares: cualquier punto en un plano se puede ubicar con dos cantidades, r y θ



Le llamamos a los vectores unitarios correspondientes $\mathbf{e_r}$ y $\mathbf{e_\theta}$

Le llamamos a los vectores unitarios correspondientes $\mathbf{e_r}$ y $\mathbf{e_\theta}$

$\hat{e}_r \rightarrow$ dirección radial, r
$\hat{e}_\theta \rightarrow$ dirección tangencial, θ

(también se pueden llamar $\hat{r}, \hat{\theta}$)

El vector posición x(t) (o r(t)) en coordenadas cartesianas es:

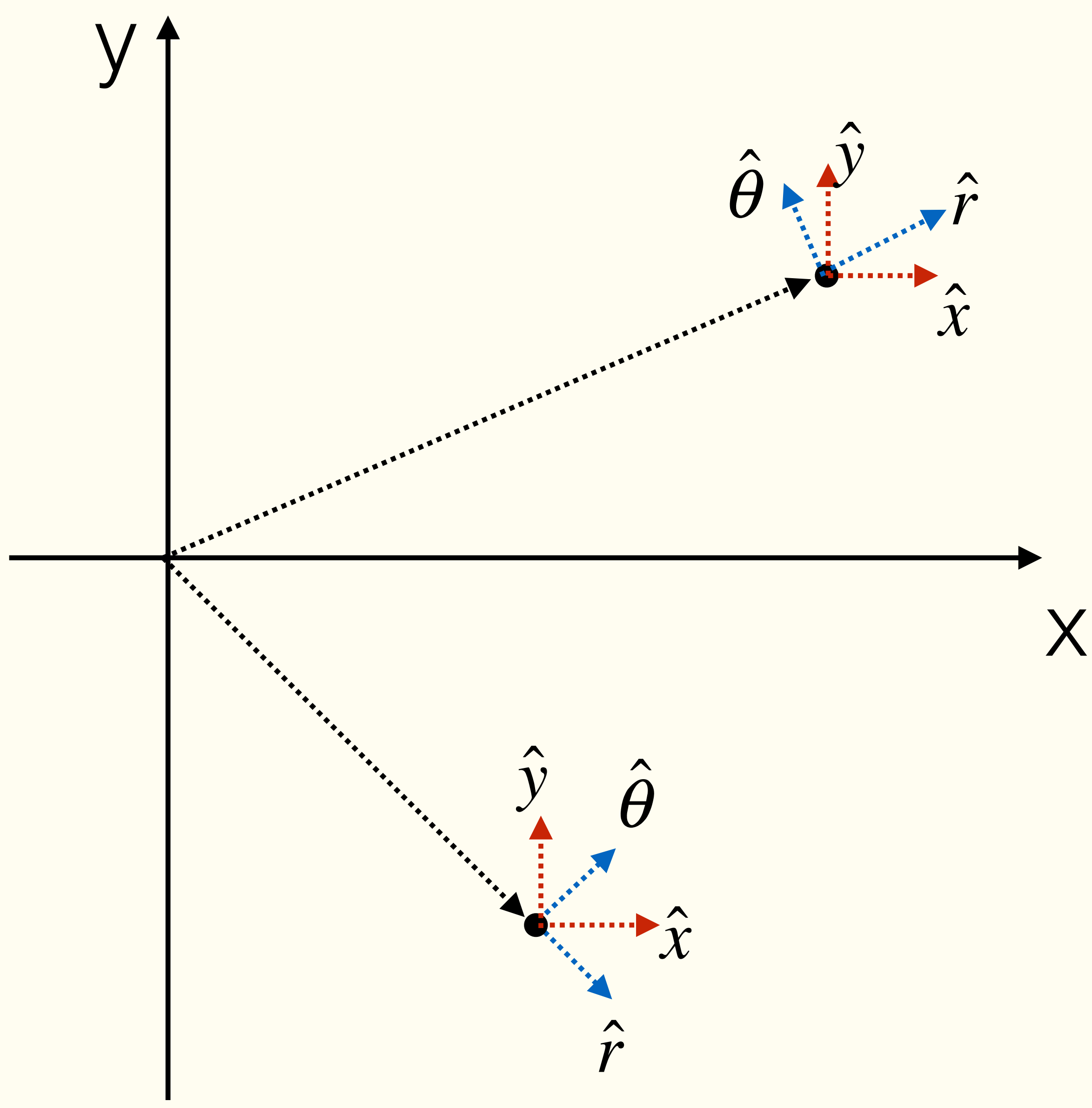
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Mientras que en coordenadas polares es simplemente:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r$$

Sobre los vectores unitarios

Hay una **gran** diferencia entre los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas y los de polares:

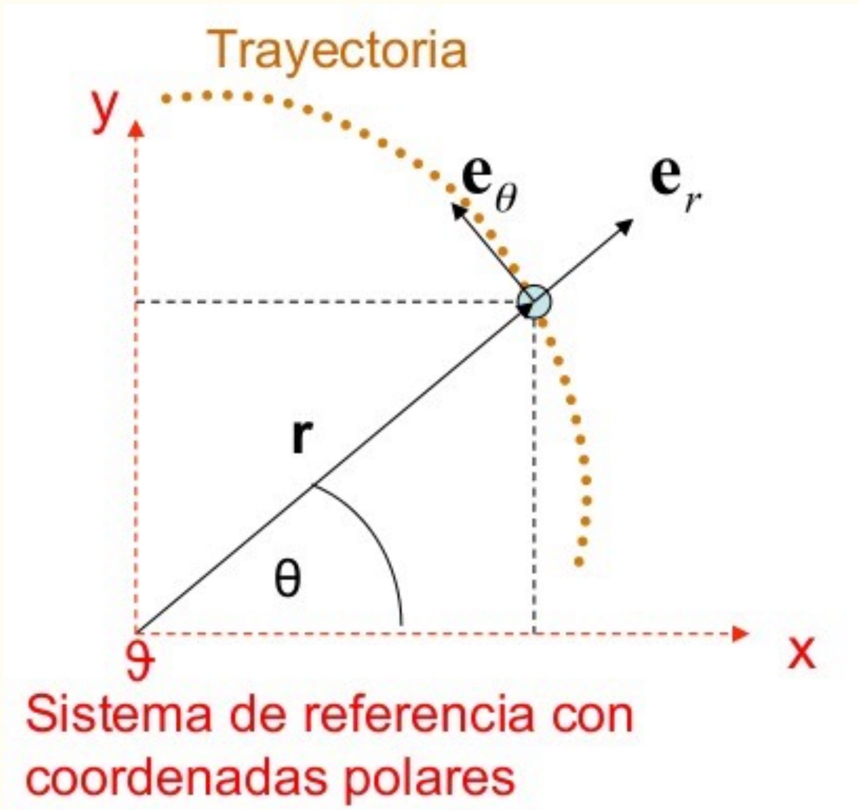


Los vectores unitarios cartesianos son constantes (los mismos) en todo el espacio.

¡Los de polares no, ya que **cambian con la posición**!

Relación entre Polares, Cartesianas y Cilíndricas

Ir de coordenadas polares a cartesianas es muy fácil:



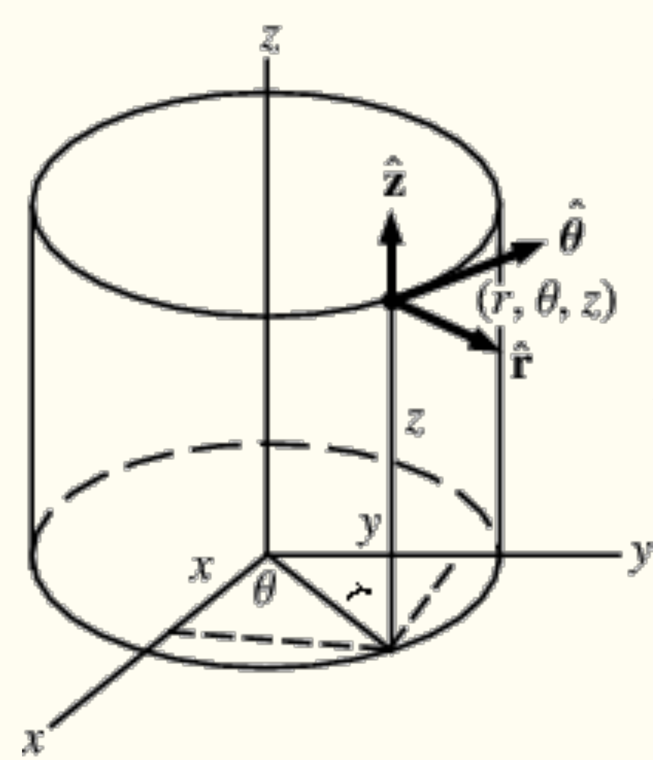
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Las relaciones para ir de cartesianas a cilíndricas se obtienen de las mismas ecuaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

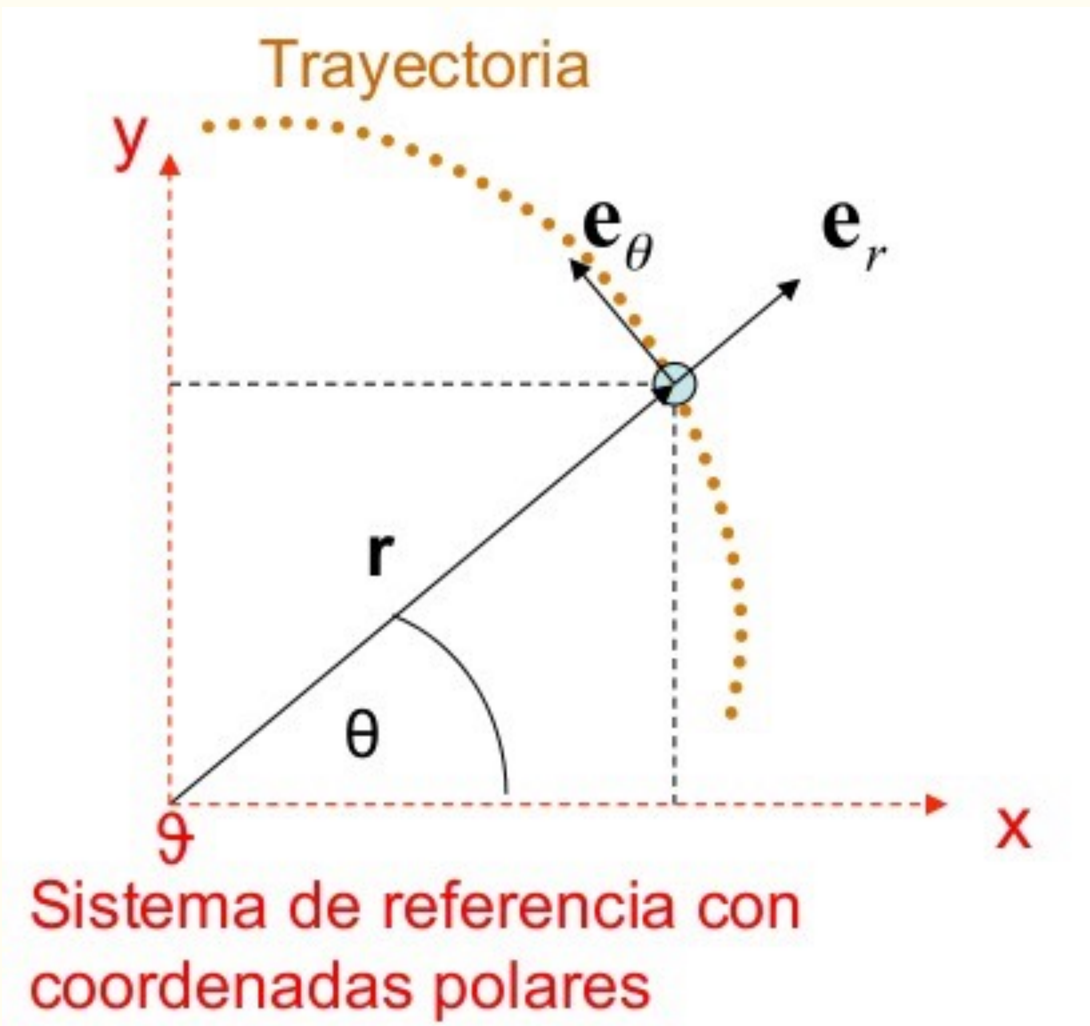


(podemos extender esto añadiendo z, la misma coordenada que en cartesianas; en este caso tendremos **coordenadas cilíndricas**)

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r + z(t)\hat{e}_z$$

Coordenadas Polares: Vectores Unitarios

¿Cómo expresar $\mathbf{e_r}$ y $\mathbf{e_\theta}$ en función de los vectores unitarios en cartesianas (**i**, **j**)?



$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_z \times \hat{e}_r = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

Como ya mencionamos, aquí los vectores unitarios dependen de la posición (de θ específicamente)

Nótese que **en z el vector unitario es el mismo que en Cartesianas**.

Es fácil verificar que, como esperado, estos vectores son unitarios

Velocidad y Aceleración en Cartesianas

Si uno conoce la trayectoria seguida por una partícula en función del tiempo en coordenadas cartesianas (i.e. x(t), y(t) y z(t)), se puede determinar la velocidad y la aceleración de forma muy fácil:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \longrightarrow \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \longrightarrow \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

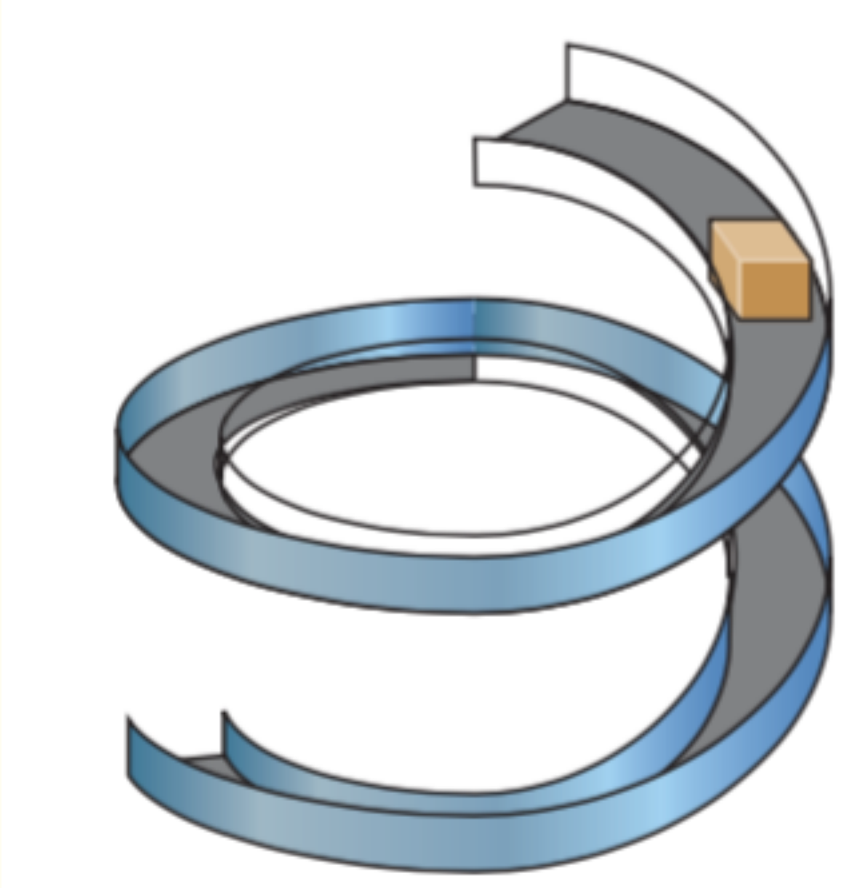
donde $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ y $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ (notación para simplificar las ecuaciones)

Ejemplo

(F12-20 en Hibbeler)

La posición de una caja que se desliza por una espiral está dada por

$$\vec{r} = 2\sin(2t)\hat{i} + 2\cos(t)\hat{j} - 2t^2\hat{k}$$



donde r está en metros, t está en segundos, y los argumentos de los senos y cosenos en radianes.

Determine la velocidad y la aceleración de la caja para cualquier tiempo.

(resolver en pizarra)

¡super papas!

Respuestas:

$$\vec{v} = 4\cos(2t)\hat{i} - 2\sin(t)\hat{j} - 4t\hat{k}$$

$$\vec{a} = -8\sin(2t)\hat{i} - 2\cos(t)\hat{j} - 4\hat{k}$$

Velocidad y Aceleración en Cartesianas

¿Qué pasa si ahora tenemos una trayectoria expresada en cilíndricas?
¿Cómo obtenemos la velocidad y la aceleración?

Recordemos que:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r + z(t)\hat{e}_z$$

por lo que:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{e}_r + \dot{z}(t)\hat{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}(t)\hat{e}_r + \ddot{z}(t)\hat{e}_z$$

¡Esto es incorrecto! Los vectores unitarios en polares no son constantes, y hay que derivarlos también

Derivando los Vectores Unitarios

¿Cómo derivar los vectores unitarios en polares?

Recordemos que:

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

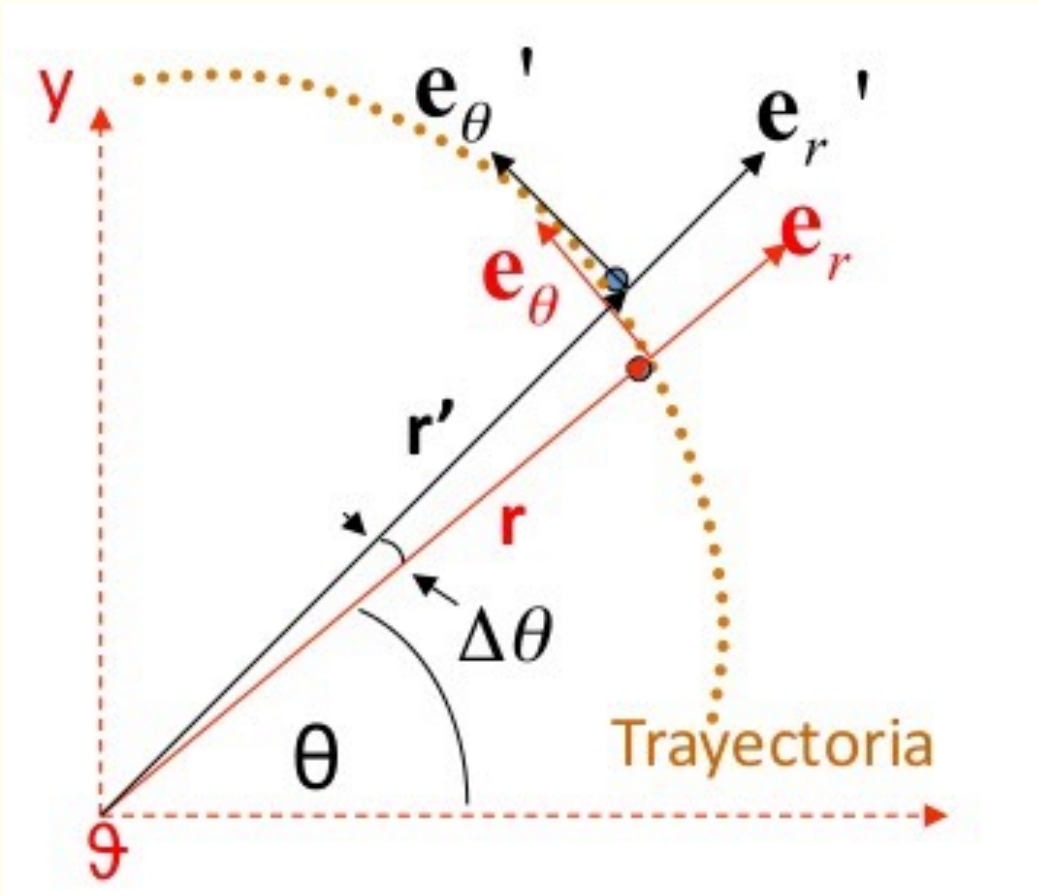
Por lo que, aplicando la regla de la cadena (recordando que θ también es una función del tiempo):

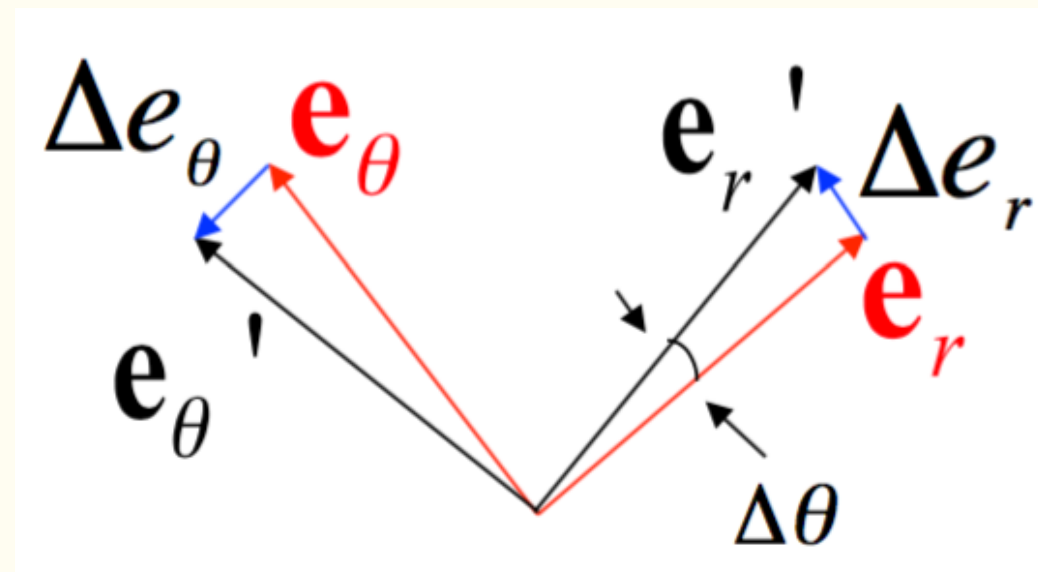
$$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

Paréntesis: viendo las derivadas graficamente

Las relaciones de la diapositiva pasada podrían parecer extrañas, pero se pueden entender gráficamente:

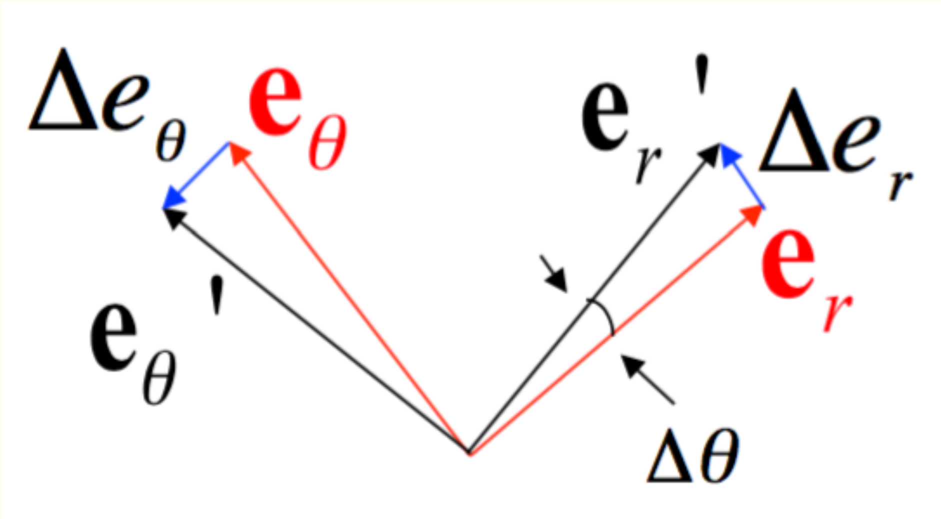


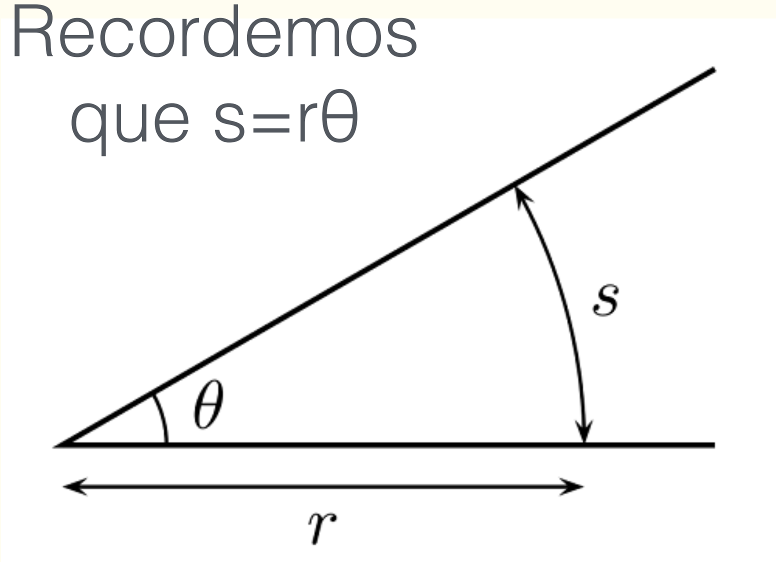


Supongamos que r cambia a r', y θ a θ', como mostrado en la figura. Esto hace que $\mathbf{e}_r$ cambie a $\mathbf{e}_r$', y $\mathbf{e}_\theta$ a $\mathbf{e}_\theta$'.

Es fácil ver que $\Delta\mathbf{e}_r$ va en la dirección $\mathbf{e}_\theta$, y $\Delta\mathbf{e}_\theta$ en la dirección $-\mathbf{e}_r$ (ver imagen de la derecha)

Paréntesis: viendo las derivadas graficamente





En base a las figuras de arriba, ¿cuáles son las magnitudes de $\mathbf{\Delta e_r}$ y $\mathbf{\Delta e_\theta}$?

$$\left|\Delta\hat{e}_r\right| \cong \Delta\theta\left|\hat{e}_r\right| \qquad \left|\Delta\hat{e}_\theta\right| \cong \Delta\theta\left|\hat{e}_\theta\right|$$

Concluimos que:

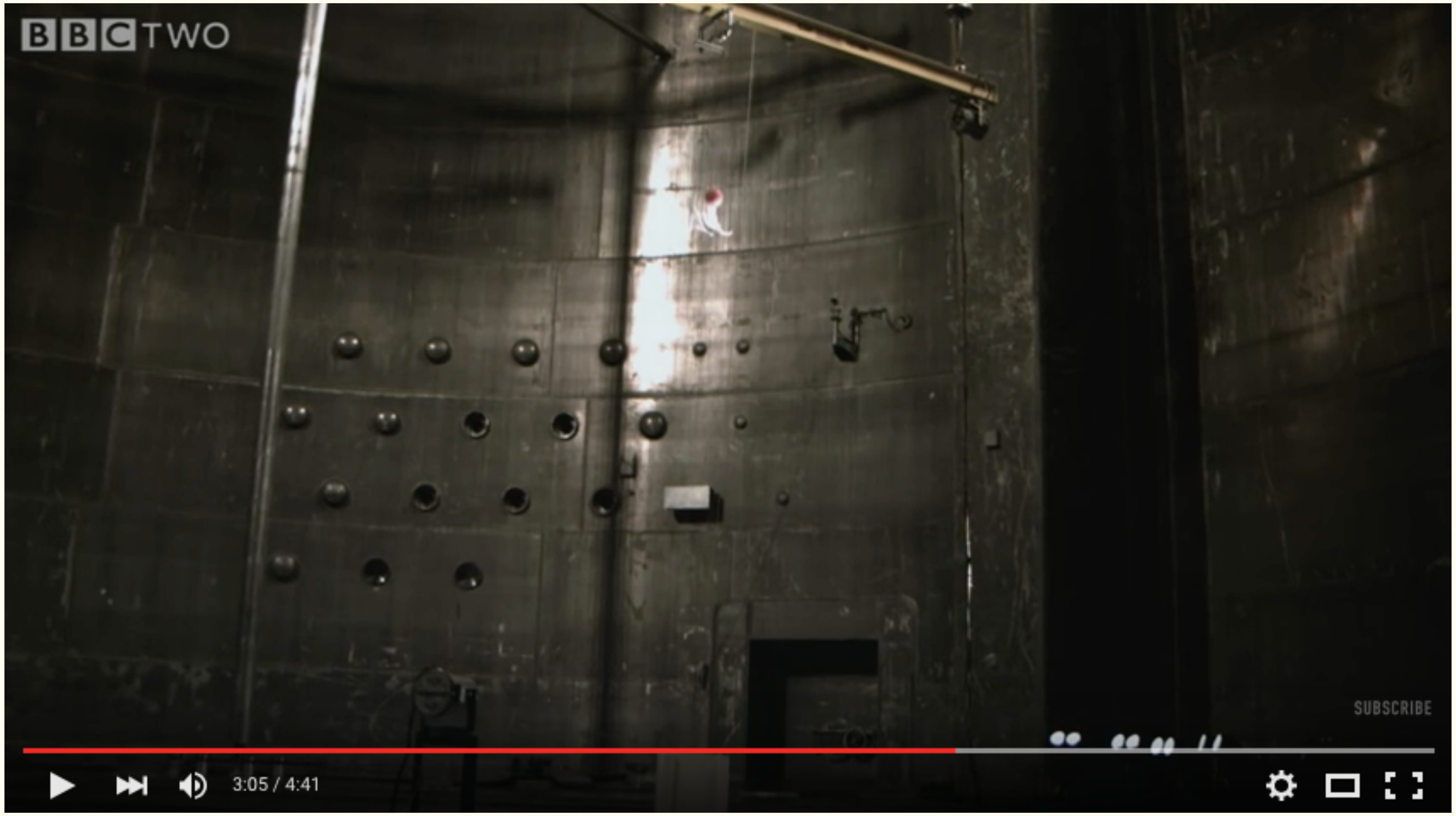
$$\Delta\hat{e}_r \cong \Delta\theta\hat{e}_\theta \qquad \Delta\hat{e}_\theta \cong -\Delta\theta\hat{e}_r$$

Dividiendo por Δt y tomando el límite a 0, confirmamos que:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

Experimento #1 (virtual)

El experimento que hicimos en la clase anterior con la pluma se hizo en una instalación de la NASA, que es la cámara de vacío más grande en el mundo



Ver "Brian Cox visits the world's biggest vacuum chamber"
https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

Experimento #2

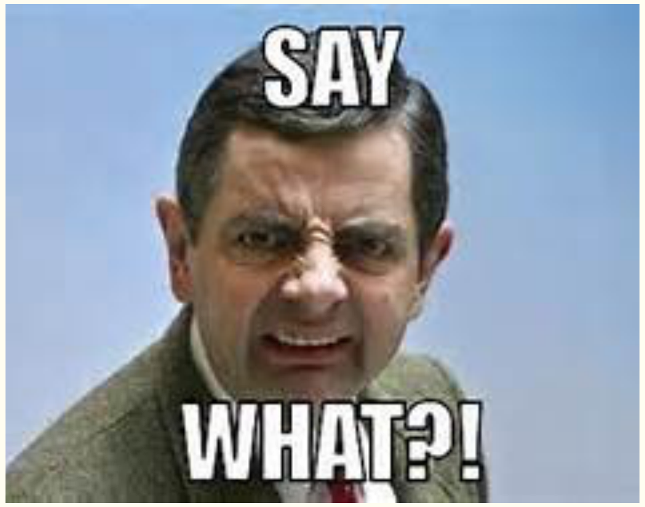
¿Hay alguna manera de disminuir (o quitar) la resistencia del aire sin tener que hacer un vacío?

¡Sí!

¡Esto se puede lograr si dejamos caer un libro por abajo de la pluma!

Comentario Histórico

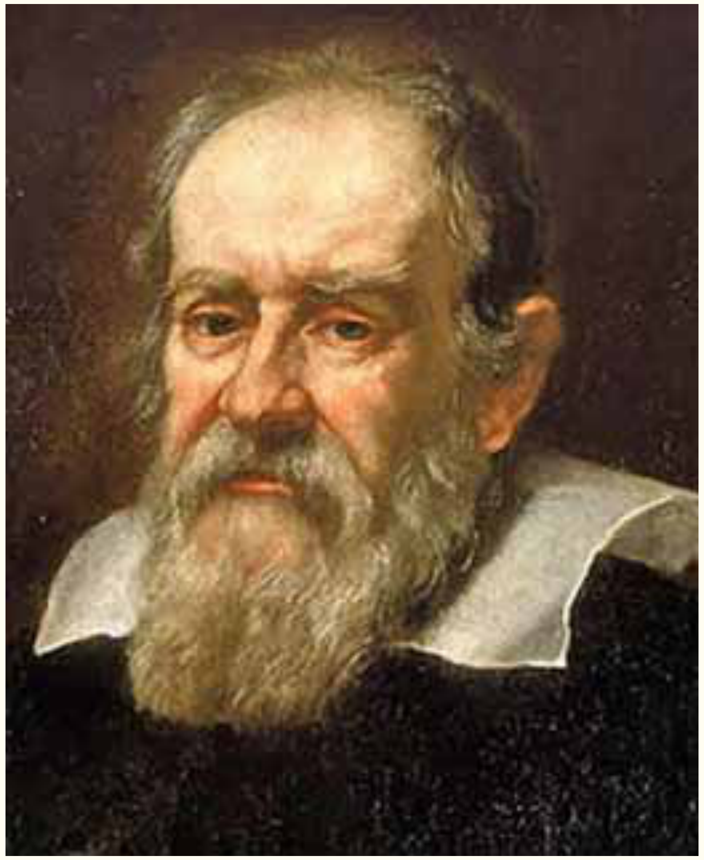
Es sorprendente es que **las ideas de Aristóteles fueron aceptadas por milenios**, hasta Galileo (~1600 después de Cristo).



¿Cómo puede ser que no se hayan dado cuenta antes?

Aristóteles (y los que vinieron después) no fueron buenos experimentadores. ¡Nunca probaron sus ideas de forma rigurosa!

De hecho Aristóteles también dijo que los hombres tienen más dientes que las mujeres. ¡Un simple experimento con su señora debiera haber matado esa teoría!



Incluso en nuestros dias, mucha gente todavía piensa que un objeto más pesado cae más rápido: https://www.youtube.com/watch?v=aRhkQTQxm4w

Velocidad y Aceleración en Polares

Regresando al cálculo de la velocidad en polares:

$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\dot{r}\hat{e}_r+\underset{\substack{\| \\ r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}}{r\dot{\hat{e}}_r}$$

$$\boxed{\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

Y también:

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{r}\hat{e}_r+\underset{\substack{\| \\ \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta}}{\dot{r}\dot{\hat{e}}_r}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta+\underset{\substack{\| \\ -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r}}{r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta}$$

Y nos queda que:

$$\boxed{\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta}$$

Nota: esto tiene sentido. Es fácil ver gráficamente que tanto la velocidad como la aceleración tienen que tener componente en otras direcciones aparte de la radial

Velocidad y Aceleración en Cilíndricas

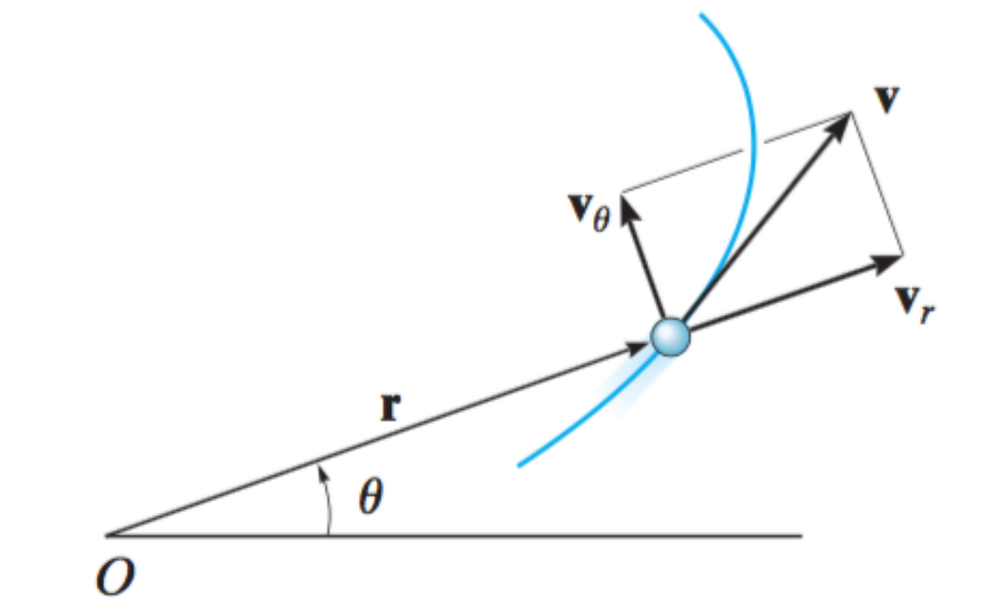
Resumiendo, y extendiendo a coordenadas cilíndricas, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}}$$

(hicimos la extensión a cilíndricas simplemente añadiendo la dimensión z como en cartesianas)

¿Para qué me sirve esto?

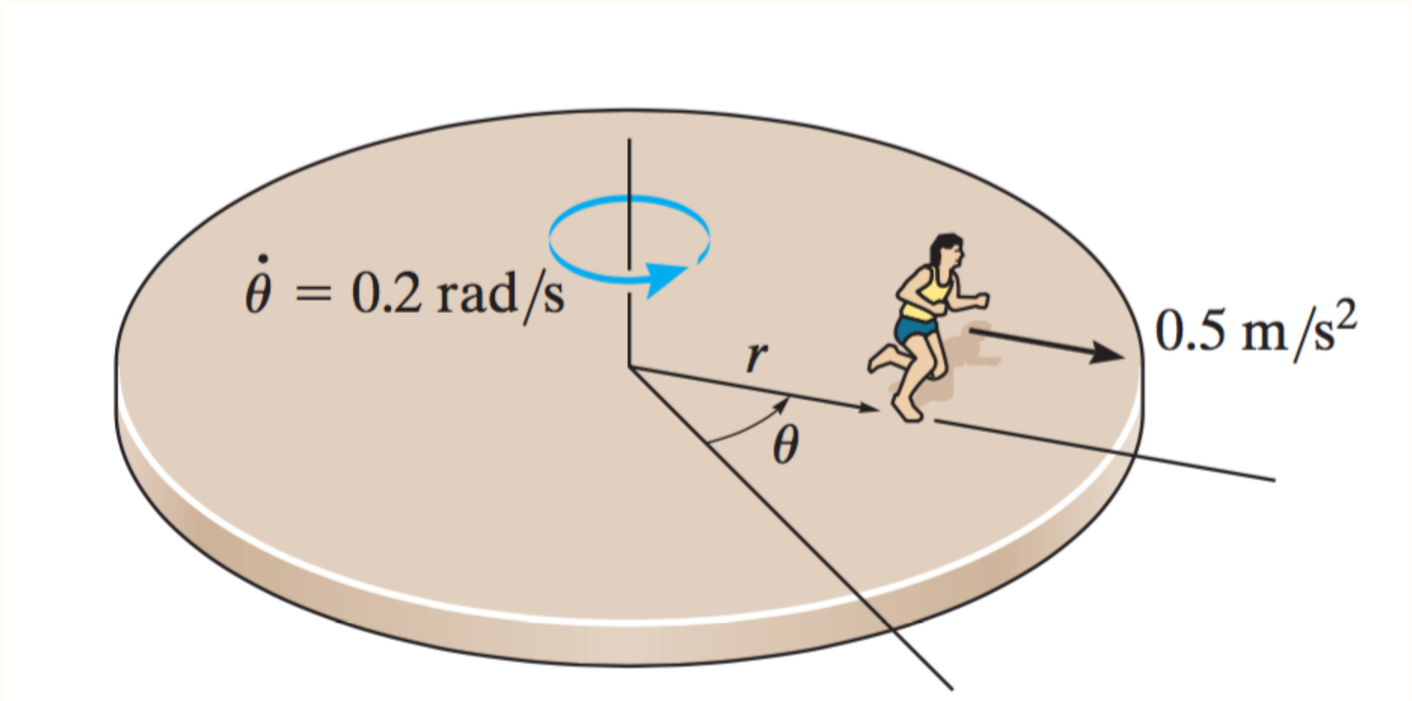
Si yo conozco la trayectoria que sigue una partícula como r(t), θ(t) y z(t) puedo calcular la velocidad y la aceleración en cualquier momento utilizando estas relaciones



(Comentario: en general la velocidad en θ no tiene por qué ser tangencial a la trayectoria. Esto es cierto sólo en movimiento circular).

Ejemplo

(12.170 en el Hibbeler)



Un joven en reposo y en el centro de una plataforma circular comienza a correr con una aceleración constante de 0.5m/s^2 hacia afuera en la dirección radial desde el reposo. La plataforma está rotando a una velocidad angular de 0.2 rad/s. Determine las componentes radiales y transversales de la velocidad y de la aceleración del joven en t=3s. Puede considerarlo como si fuera una partícula (es decir, puede ignorar su tamaño).

(resolver en pizarra)

Respuestas:

v_r = 1.5 m/s; v_θ=0.450 m/s

a_r = 0.410 m/s^2; a_θ=0.6 m/s^2

Velocidad y Aceleración en Cilíndricas

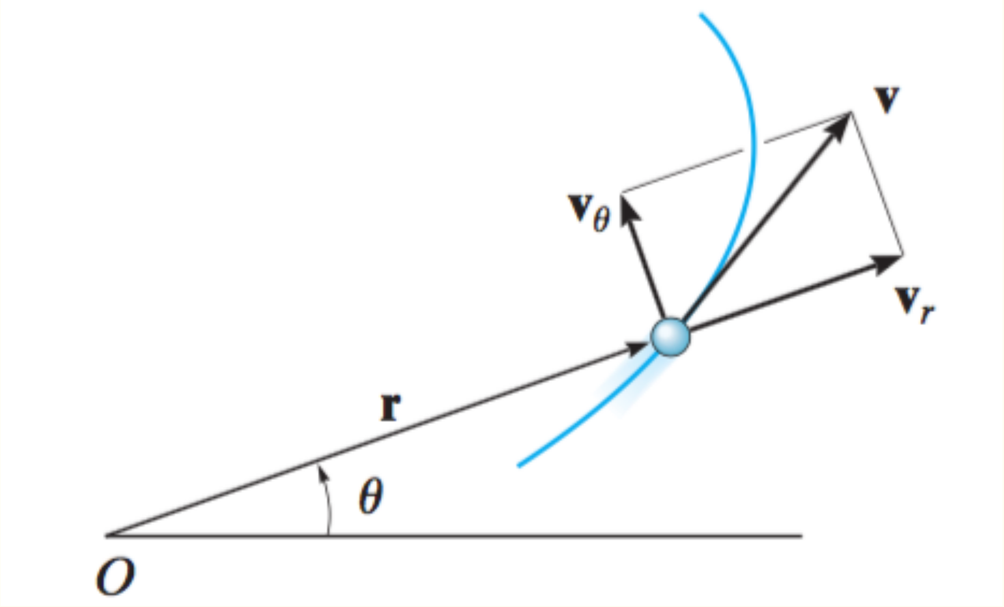
La clase pasada demostramos estas relaciones:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}}$$

(hicimos la extensión a cilíndricas simplemente añadiendo la dimensión z como en cartesianas)

¿Para qué me sirve esto?

Si yo conozco la trayectoria que sigue una partícula como r(t), θ(t) y z(t) puedo calcular la velocidad y la aceleración en cualquier momento utilizando estas relaciones



(Comentario: la velocidad <u>siempre</u> es tangencial a la trayectoria; sin embargo, esto no significa que tenga que estar en θ siempre, lo cual sólo ocurre en movimiento circular).

¿Para qué sirve esto?

Todo esto se ve muy complicado…. ¿para qué usar polares? ¡Mejor quedarse con cartesianas!

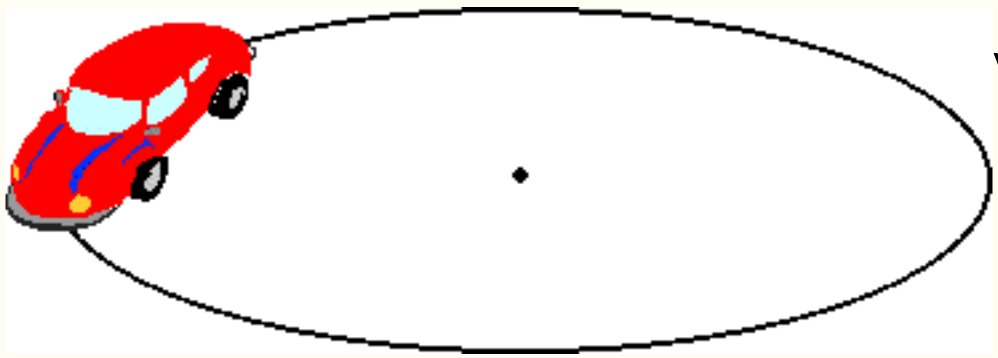
Respuesta: en muchos casos es mejor usar coordenadas cartesianas, pero hay muchos otros (como el del problema anterior) para los que es mejor usar polares

¿El ejemplo típico de movimiento para el cual es mejor usar polares?

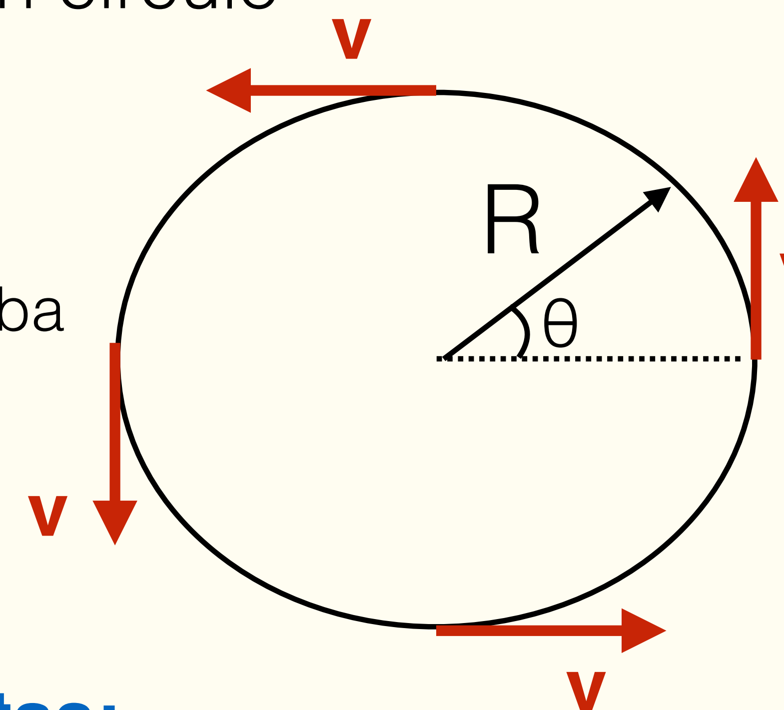
¡movimiento circular!

Movimiento Circular

Consideremos un objeto (el que sea) en movimiento circular, es decir que su trayectoria describe un círculo



visto desde arriba



Algunas preguntas:

1) ¿En qué dirección va la velocidad?

Demostramos que: $\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

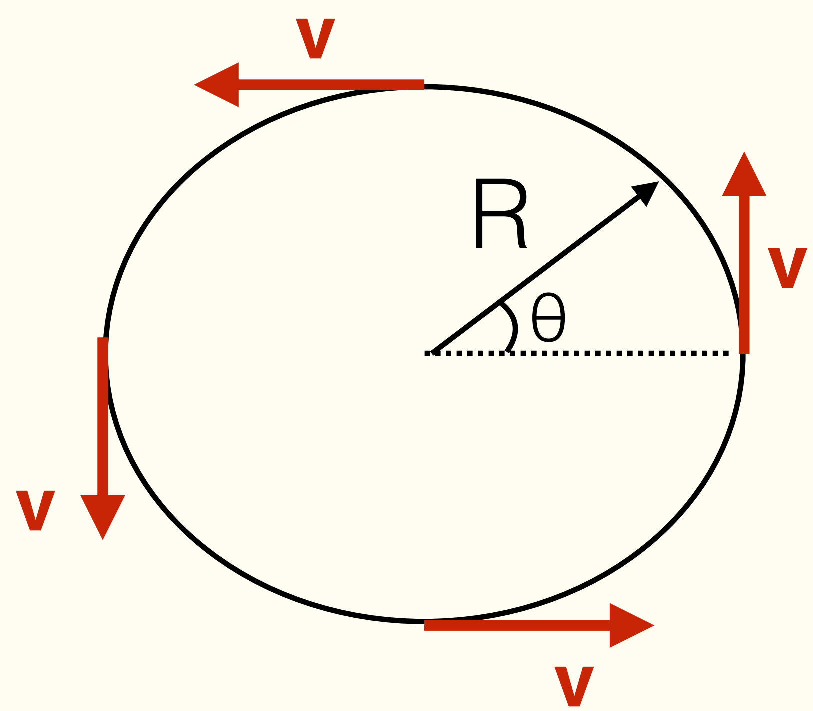
Para movimiento circular $r = R$ (constante) por lo que $\dot{r} = 0$ y

$$\vec{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Conclusión: en movimiento circular la velocidad sólo tiene componente en la dirección transversal (θ) y no en la radial ($v = v_\theta$)

Movimiento Circular

Nota: la velocidad angular $\dot{\theta}$ es el ángulo girado por segundo, y también se le denomina comúnmente "velocidad angular" con la letra "omega" minúscula (ω)



2) ¿Cómo se relaciona el periodo con la velocidad angular ω?

El periodo τ es el tiempo que el objeto tarda en recorrer una vuelta entera, es decir 2π radianes. Por ende:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

3) ¿Cómo se relacionan la velocidad y la velocidad angular ω?

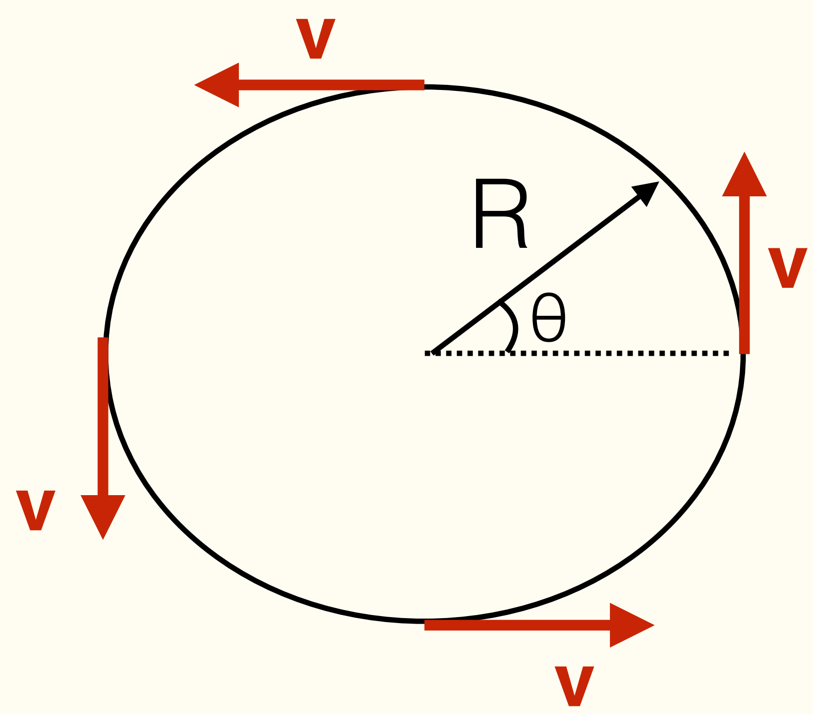
Una vuelta entera (2π) corresponde a una distancia de 2πr, por lo que

$$\upsilon_\theta = \frac{2\pi r}{\tau} = \frac{2\pi r\omega}{2\pi} = r\omega$$

Nótese que esto también lo vemos en la ecuación general: $\vec{\upsilon}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + \boxed{r\dot{\theta}}\hat{e}_\theta$

υ_θ

Movimiento Circular



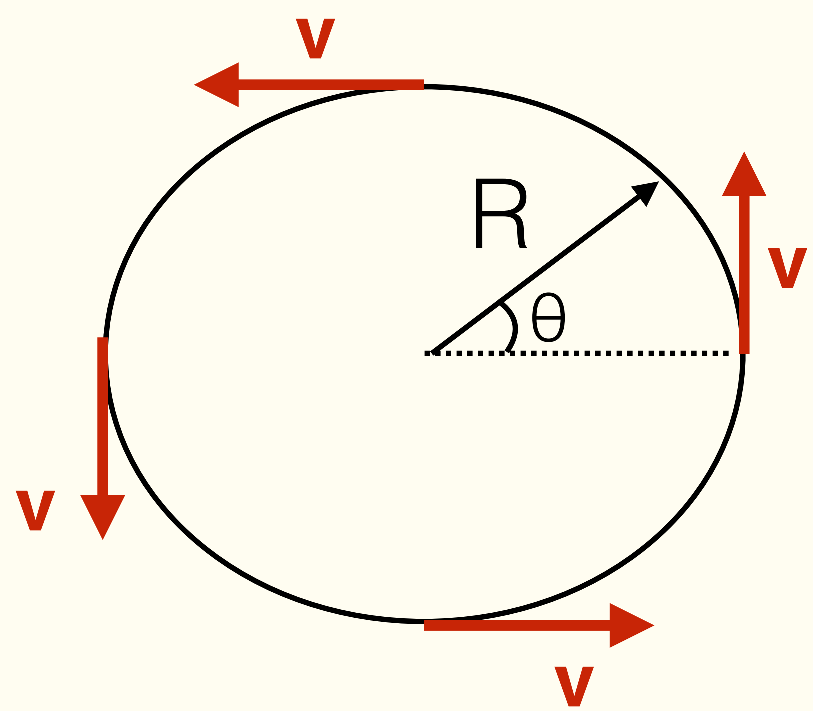
4) ¿Es posible tener movimiento circular sin que haya aceleración?

¡¡No!!

Tiene que haber aceleración, ya que la velocidad está cambiando (de dirección al menos)

Mismo si la rapidez (magnitud de la velocidad) no cambia, aún así la dirección tiene que cambiar para estar en movimiento circular. De otra forma su trayectoria sería una línea recta. **¡Tiene que haber una aceleración!**

Movimiento Circular



5) ¿Cuál es la dirección y magnitud de la aceleración que se necesita para mantener un objeto en movimiento circular uniforme?

Para movimiento circular $r = R$ (constante) por lo que $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$

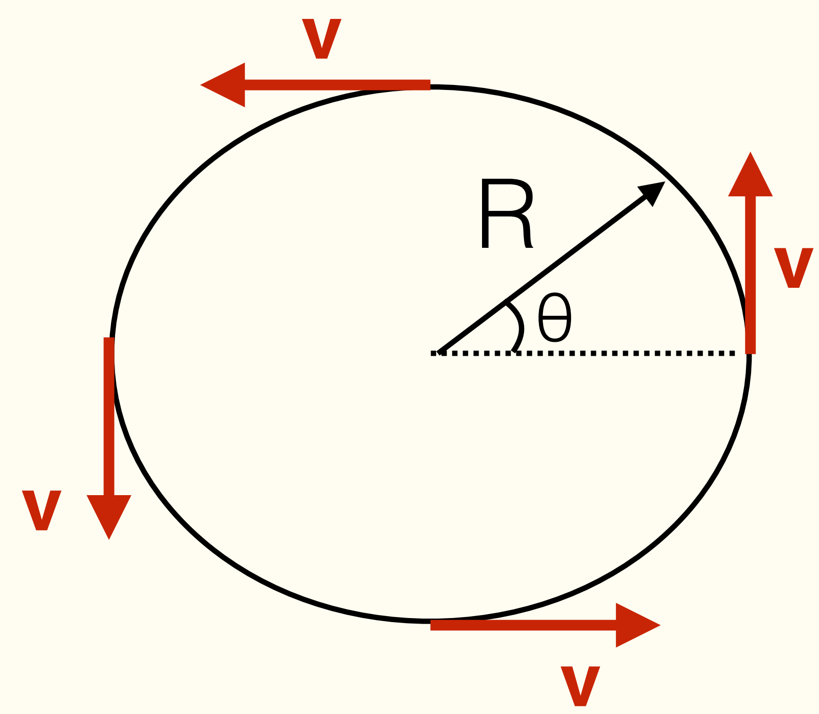
Si aparte consideramos que el movimiento es circular uniforme, es decir con rapidez constante, entonces $\ddot{\theta} = 0$

Utilizando la ecuación “fea” que derivamos:

$$\vec{a}(t) = \left(\cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\cancel{2\dot{r}\dot{\theta}}^{\,0} + \cancel{r\ddot{\theta}}^{\,0}\right)\hat{e}_\theta$$

Nos queda: $\vec{a}_C(t) = -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r = -\dfrac{\upsilon^2}{r}\hat{e}_r$

Movimiento Circular



6) ¿Y si el movimiento no es uniforme (es decir no es a rapidez constante)?

En este caso:

$$\vec{a}(t) = \left(\cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\cancel{2\dot{r}}^{\,0}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

Aparte de la aceleración centrípeta, se requiere una aceleración <u>tangencial</u>

$$\vec{a}_t(t) = r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Pero $r\ddot{\theta} = r\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) = r\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) = \dot{v}$, lo cual no es sorprendente

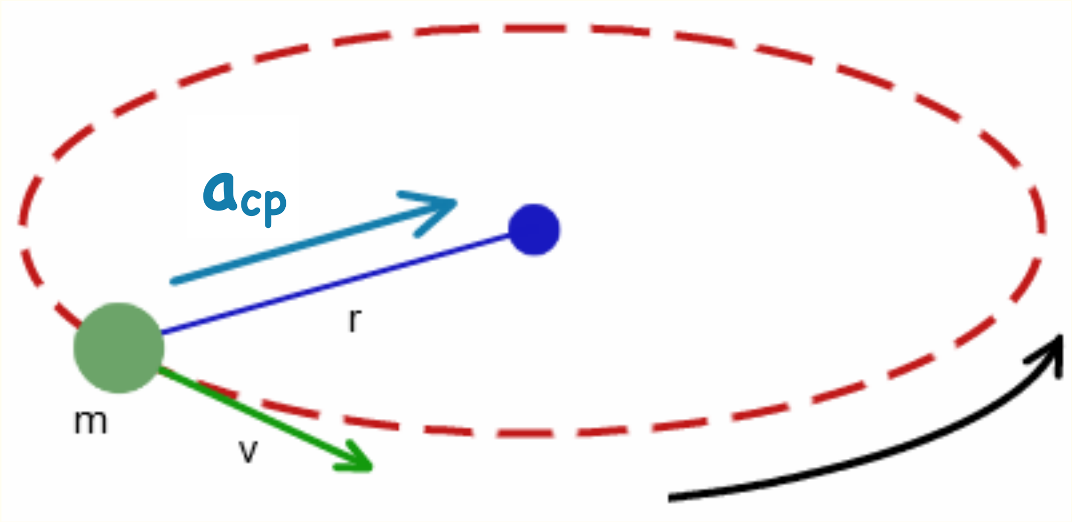
Aceleración y Movimiento Circular

Concluimos que **para que un objeto se encuentre en movimiento circular <u>siempre</u> se requiere al menos una aceleración centrípeta (es decir dirigida hacia el centro del círculo)**:

$$\boxed{a_C = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{r}}$$

Si aparte la rapidez está cambiando, **también se requiere una aceleración tangencial**:

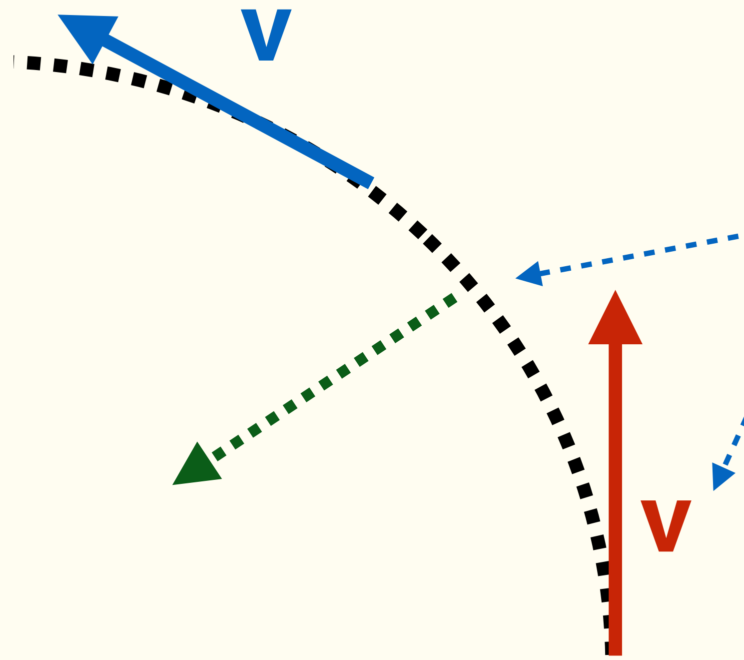
$$\boxed{a_t(t) = r\ddot{\theta} = \dot{v}}$$



Si un objeto está en movimiento circular, forzosamente algo tiene que estar proveyendo la aceleración centrípeta (una cuerda, la gravedad, roce con el suelo…. etc), o de otra forma no estaría en movimiento circular.

¿Suena raro?

Tal vez parezca raro que se requiera una aceleración centrípeta para movimiento circular, pero no lo es

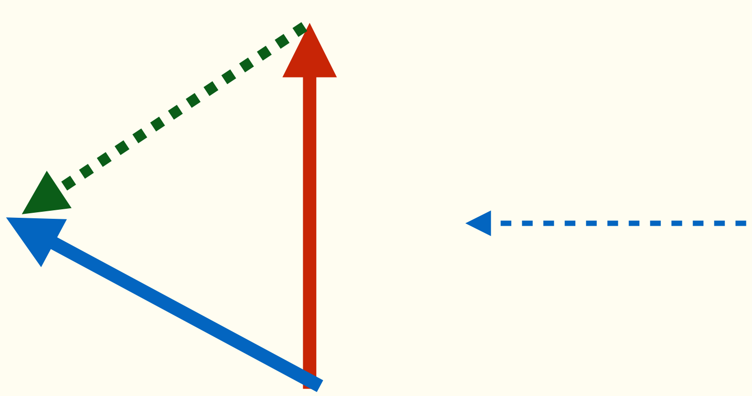


Si le impartimos a un objeto una velocidad hacia arriba, y no hay aceleración, se iría hacia arriba.

Pero si hay una aceleración hacia la izquierda, la trayectoria se va a curvar un poco hacia ese lado.

Si le seguimos aplicando una aceleración perpendicular a la velocidad, se va a seguir curvando indefinidamente.

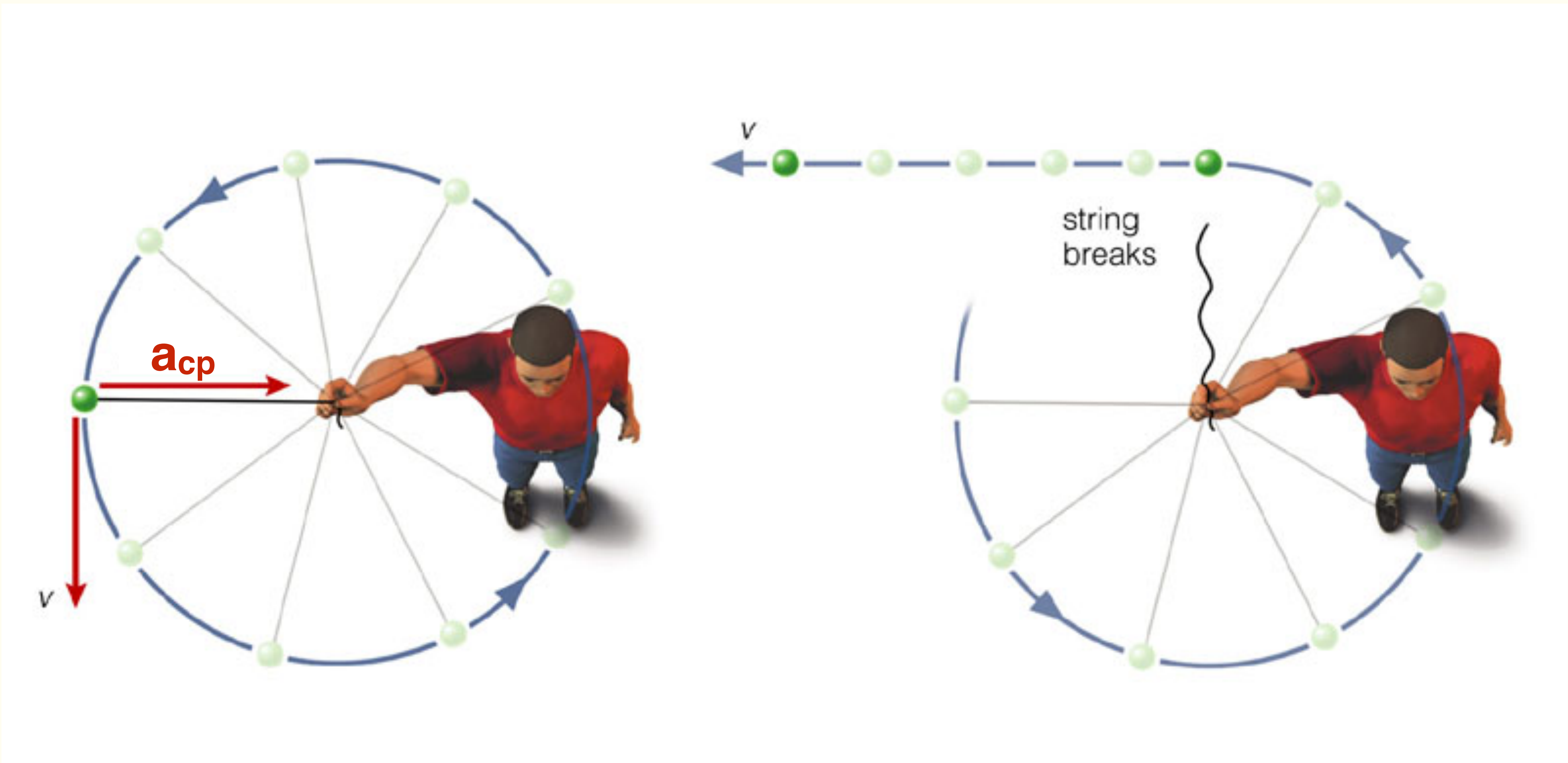
Otra forma de verlo:



La aceleración es el cambio en velocidad por unidad de tiempo. Si se toma la diferencia en la velocidad de los dos instantes mostrados arriba, el resultado es un vector que apunta hacia el centro

Ejemplo Típico

Una de las ilustraciones más claras es el un objeto sostenido por una cuerda:

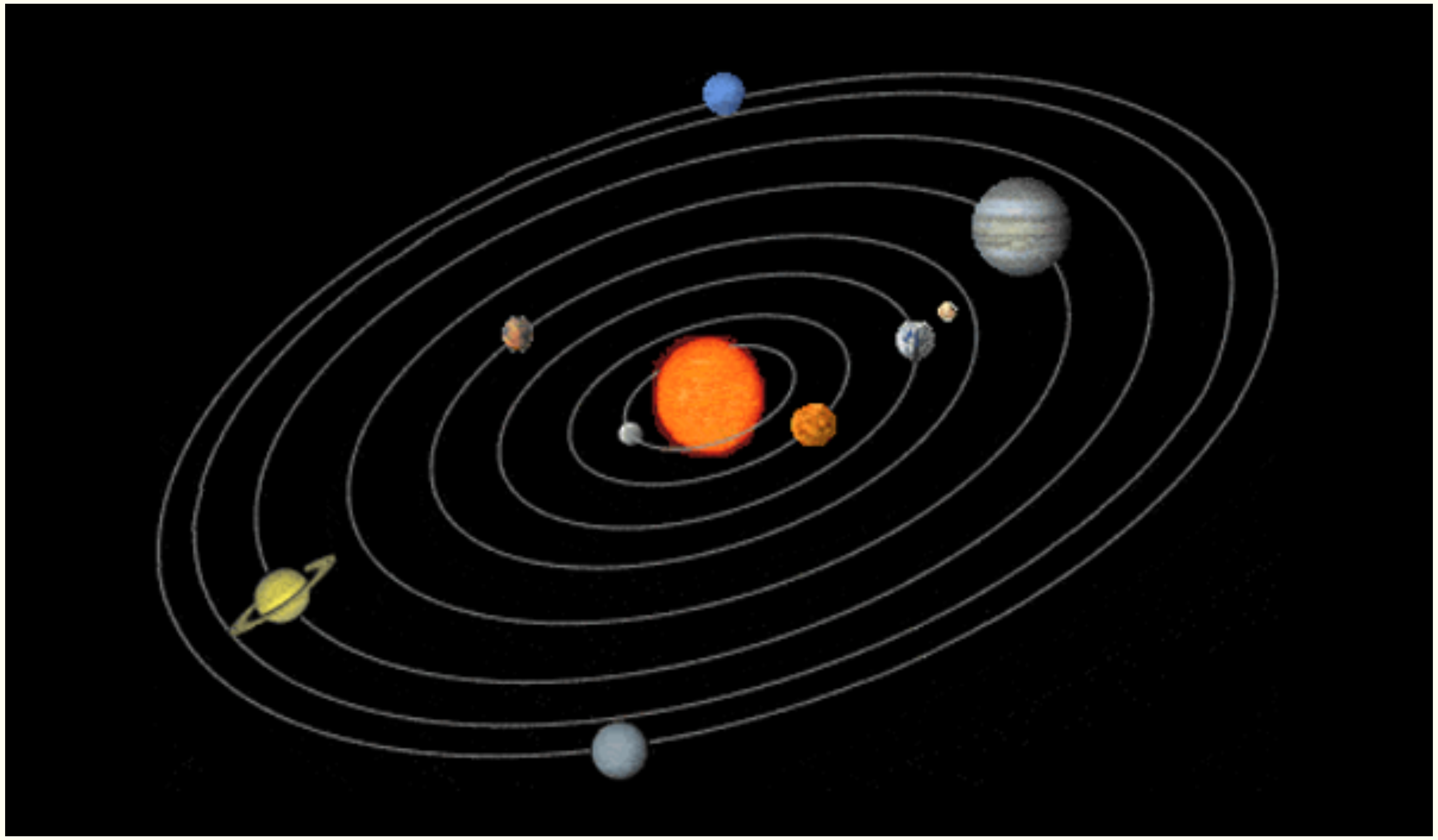


Cuando la cuerda se rompe o se suelta, el movimiento circular cesa y el objeto se va en línea recta.

¡Así funciona el universo!

¿Dónde se ve esto de forma muy clara?

¡En el sistema solar (y en el universo en general)!



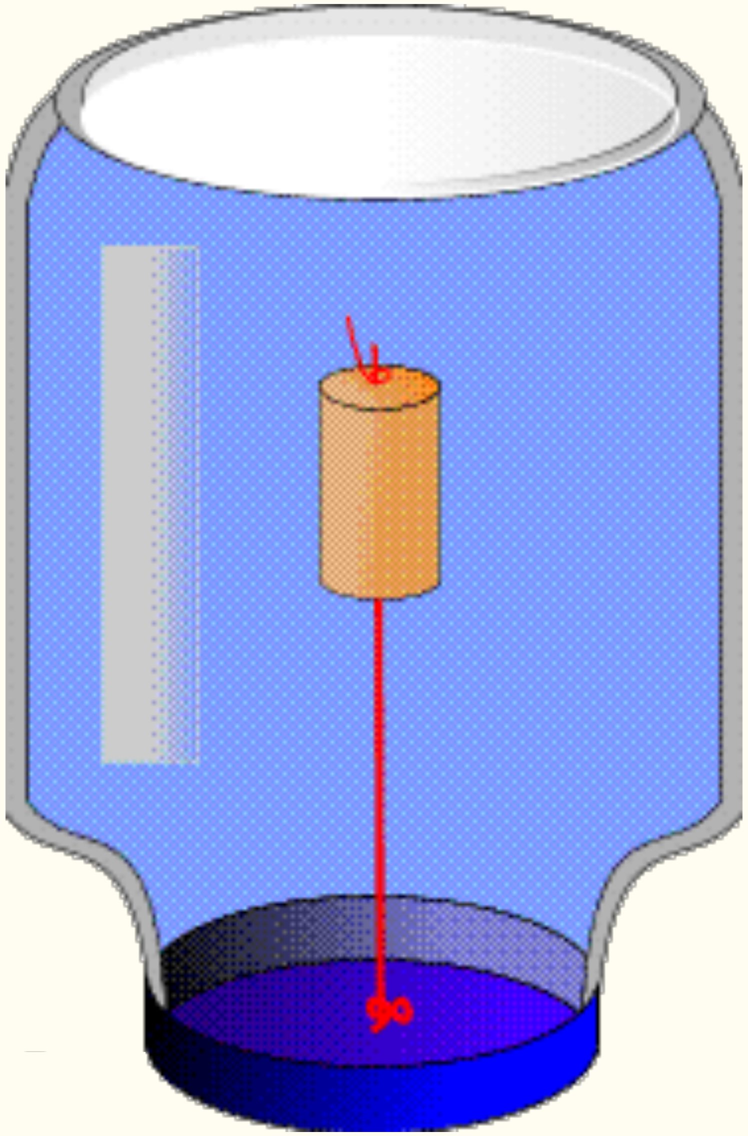
No sólo los planetas del sistema solar orbitan el sol, sino el sol orbita el centro de la galaxia. Incluso, hoyos negros pueden orbitar otros hoyos negros… etc.

¿Qué provee la aceleración centrípeta en este caso?

la gravedad

Experimento

¿En qué dirección se mueve el corcho si ponemos la jarra en movimiento circular?



¡hacia el centro!

Sobre el Experimento

¿Por qué sucede esto? Si uno se sube a la máquina de entrenamiento de los astronautas (“high-G training”), ¿hacia donde se siente la fuerza?

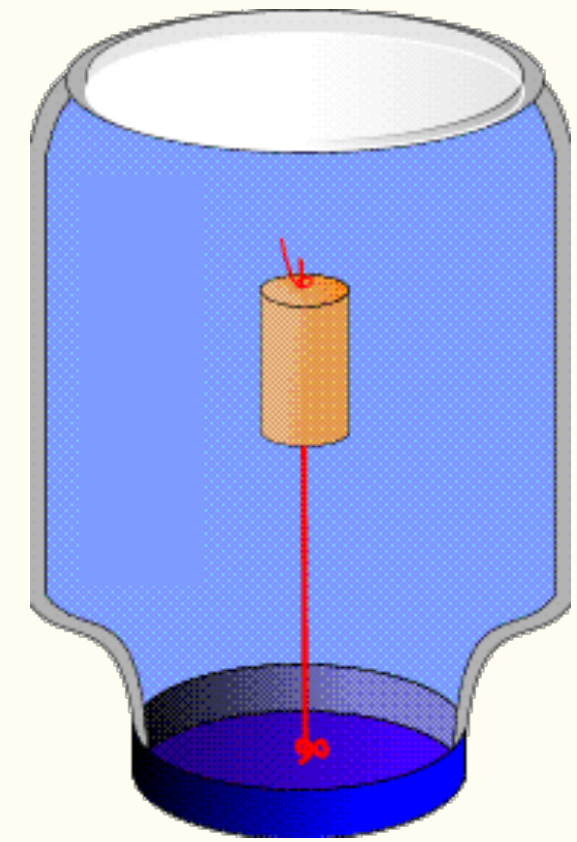
¡hacia afuera!

Así se ve en “Los Simpsons”:

Así se ve en la vida real:

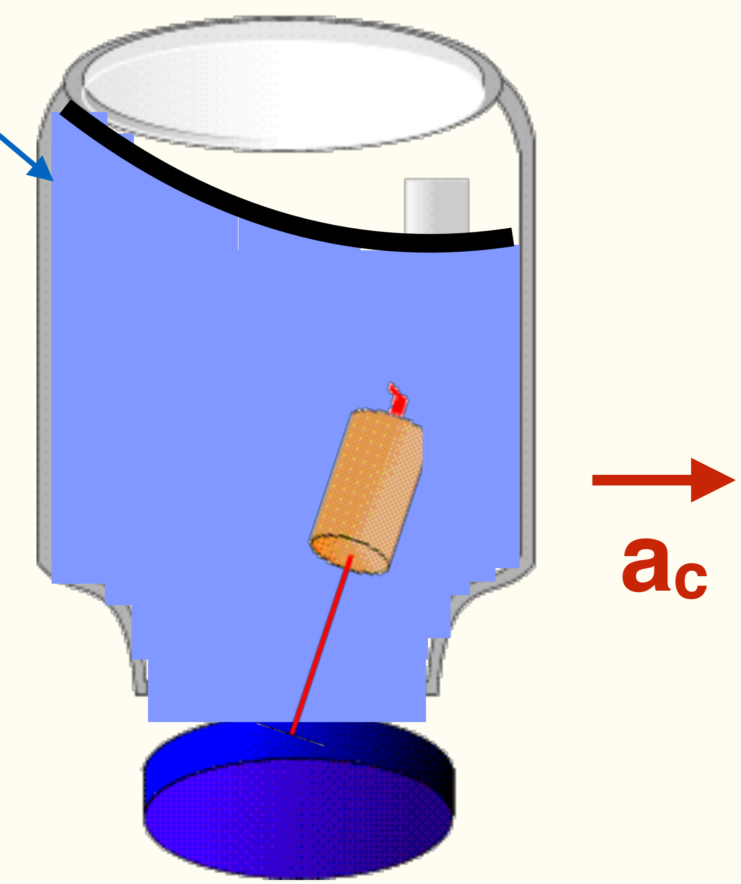
Sobre el Experimento

¿Por qué entonces el corcho se mueve hacia adentro?



Lo que pasa es que el corcho está sumergido en agua

El agua hace lo mismo que el astronauta al entrar en movimiento circular, es decir se presiona contra la pared exterior.



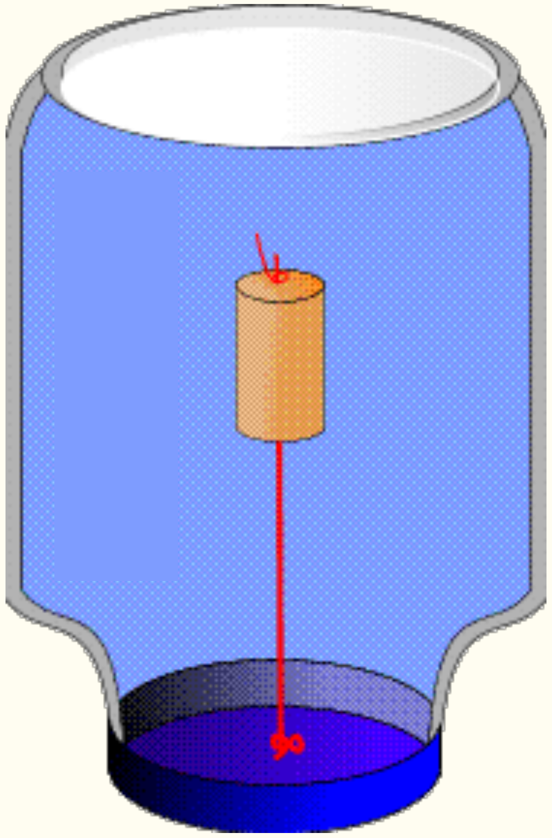
Esto es porque para estar en movimiento circular se necesita una aceleración centrípeta, que en este caso provee la pared de la jarra (o la pared de la máquina de la NASA en el caso del astronauta). Desde el punto de vista del agua y del astronauta, es como si una "fuerza invisible" los presionara contra la pared, en dirección opuesta al centro.

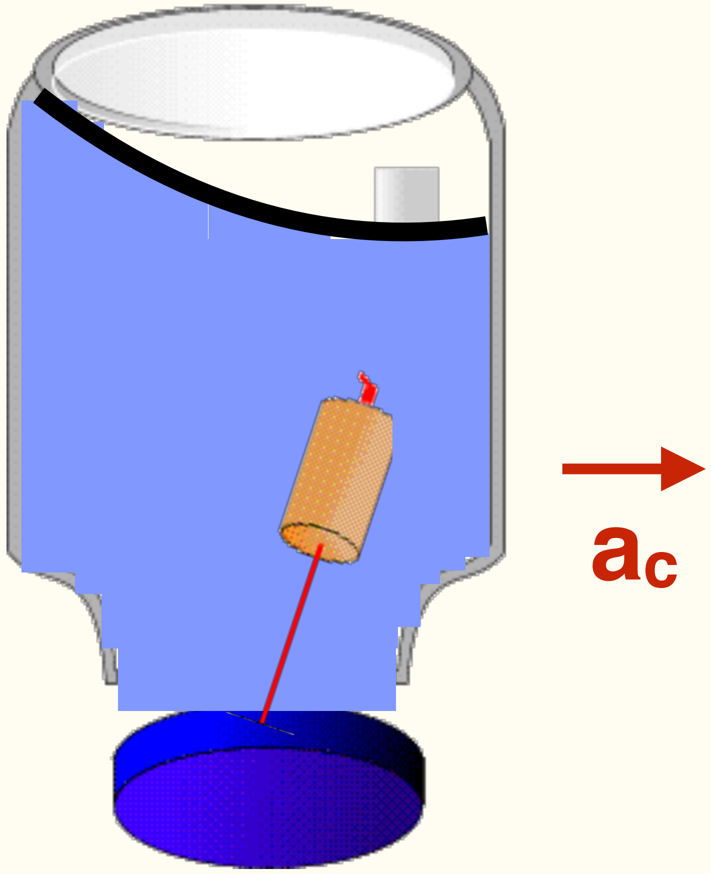
Sobre el Experimento

El agua es más densa que el corcho, por lo que tiene más inercia (es decir resiste más el cambio de movimiento).

Conforme el agua se mueve hacia la pared externa, el corcho se mueve en la dirección opuesta para dar lugar al desplazamiento del agua

En otras palabras: el corcho siempre apunta en la dirección de la aceleración. Este dispositivo es lo que se llama un "acelerómetro", nomás que uno muy básico





Para mayor información: http://resources.yesican-science.ca/SS_version1/ss/g08/me/unit2_effg08.html

Video de este tipo de acelerómetro en un auto (en francés) https://www.youtube.com/watch?v=_J5zE-LuAzc

Nota: este es el principio bajo el cual opera una centrifugadora

Experimento sugerido

Sugerencia: tomen un globo de Helio, y súbanlo a su auto. ¿Hacia donde se mueve al acelerar, al frenar, y al dar vuelta?

Explicación: http://www.physicscentral.com/experiment/askaphysicist/physics-answer.cfm?uid=20130711030801

Video (en inglés): https://www.youtube.com/watch?v=y8mzDvpKzfY

Otro video (en inglés): https://www.youtube.com/watch?v=XXpURFYgR2E

Aplicaciones de Acelerómetros

Los acelerómetros son extremadamente comunes. Algunos ejemplos:

¡¡El acelerómetro de un iPhone 4 mide aproximadamente 3x3x1 milímetros!!

Así es como el teléfono sabe distinguir "arriba" de "abajo" y cómo puede ajustar la imagen cuando uno lo rota.

Los controles de las consolas como Wii o Play Station tienen "acelerómetros de tres ejes"

Excelente video sobre cómo funciona el acelerómetro de un teléfono en: https://www.youtube.com/watch?v=KZVgKu6v808

Antes de terminar con Cinemática, vamos a ver muy brevemente el movimiento relativo de dos partículas utilizando marcos de referencia en translación.

Movimiento Relativo

12.10 Relative-Motion of Two Particles Using Translating Axes

Throughout this chapter the absolute motion of a particle has been determined using a single fixed reference frame. There are many cases, however, where the path of motion for a particle is complicated, so that it may be easier to analyze the motion in parts by using two or more frames of reference. For example, the motion of a particle located at the tip of an airplane propeller, while the plane is in flight, is more easily described if one observes first the motion of the airplane from a fixed reference and then superimposes (vectorially) the circular motion of the particle measured from a reference attached to the airplane.

Kinematics of a Particle 12

CHAPTER OBJECTIVES

- To introduce the concepts of position, displacement, velocity, and acceleration.
- To study particle motion along a straight line and represent this motion graphically.
- To investigate particle motion along a curved path using different coordinate systems.
- To present an analysis of dependent motion of two particles.
- To examine the principles of relative motion of two particles using translating axes.

Sección 12.10 del Hibbeler

3.5 Velocidad relativa

Sin duda usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación en la que se entiende que la velocidad relativa es muy importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos a un plano.

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES 3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.

Seccion 3.5 del Young & Freedman

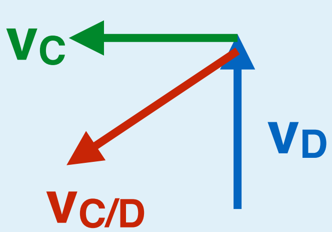
Motivación

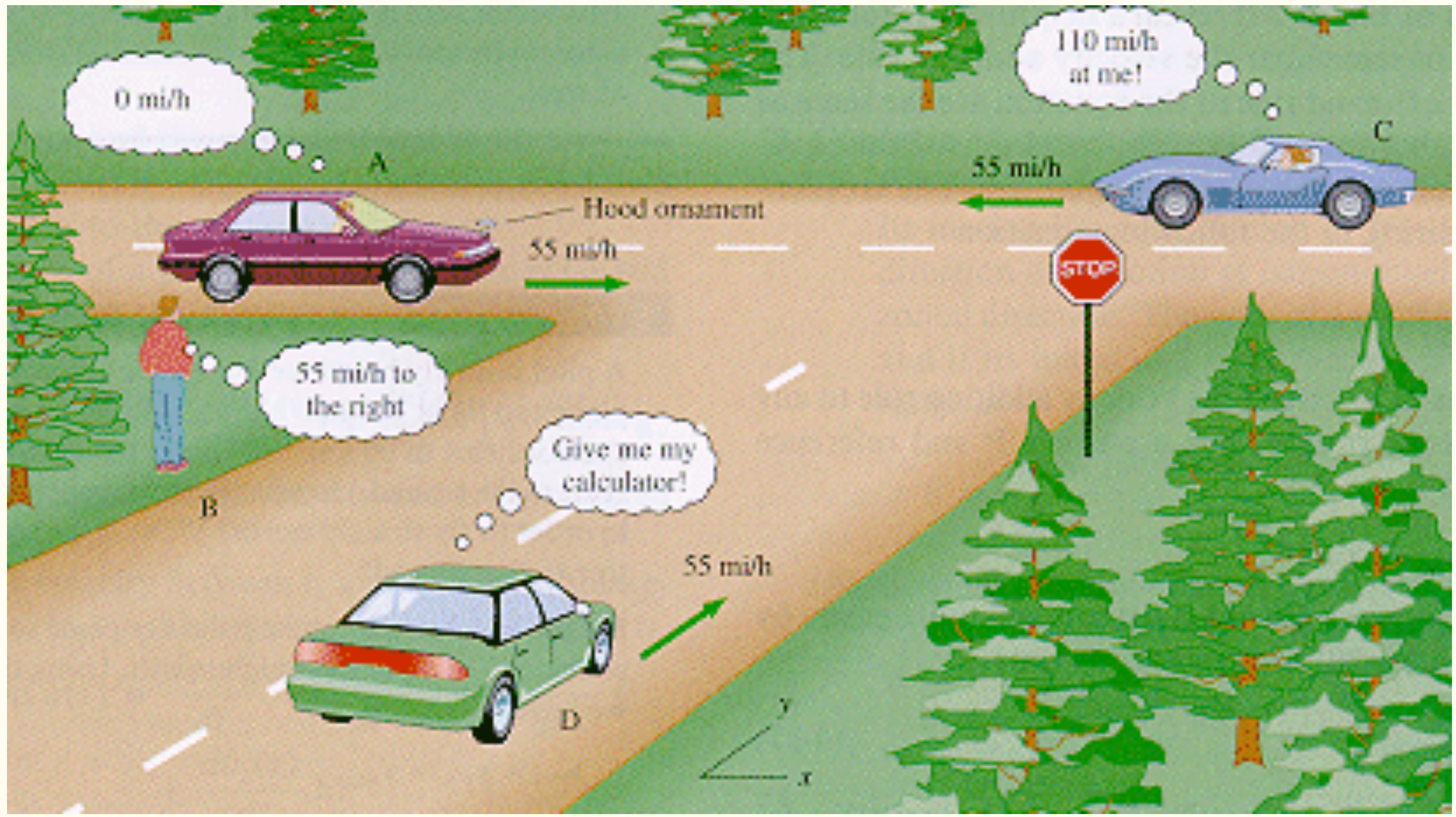
¡El movimiento es relativo!

Ejemplo con velocidades:

- **A** ve que el objeto en el capó no se mueve
- **B** ve que **A** se mueve hacia la derecha con 55 millas/hora.
- **C** ve que **A** viene a 110 m/h hacia él.
- **D** ve a **C** moviéndose con un ángulo:

(vista desde arriba)





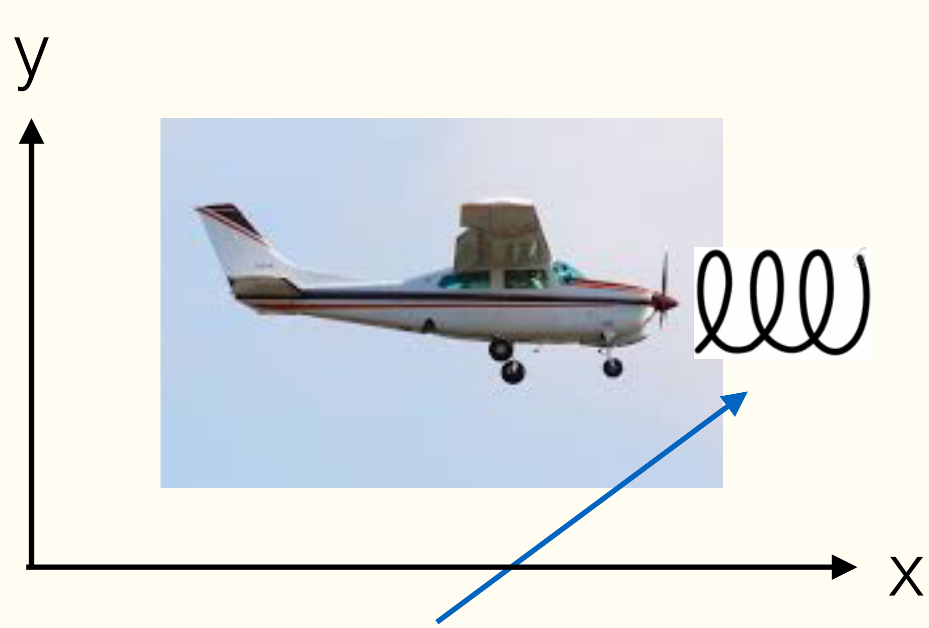
La posición, la velocidad y la aceleración dependen respectivamente de la posición, velocidad y aceleración del observador

Motivación

Hay algunos tipos de movimiento que son más fáciles de estudiar utilizando dos marcos de referencia en lugar de uno solo

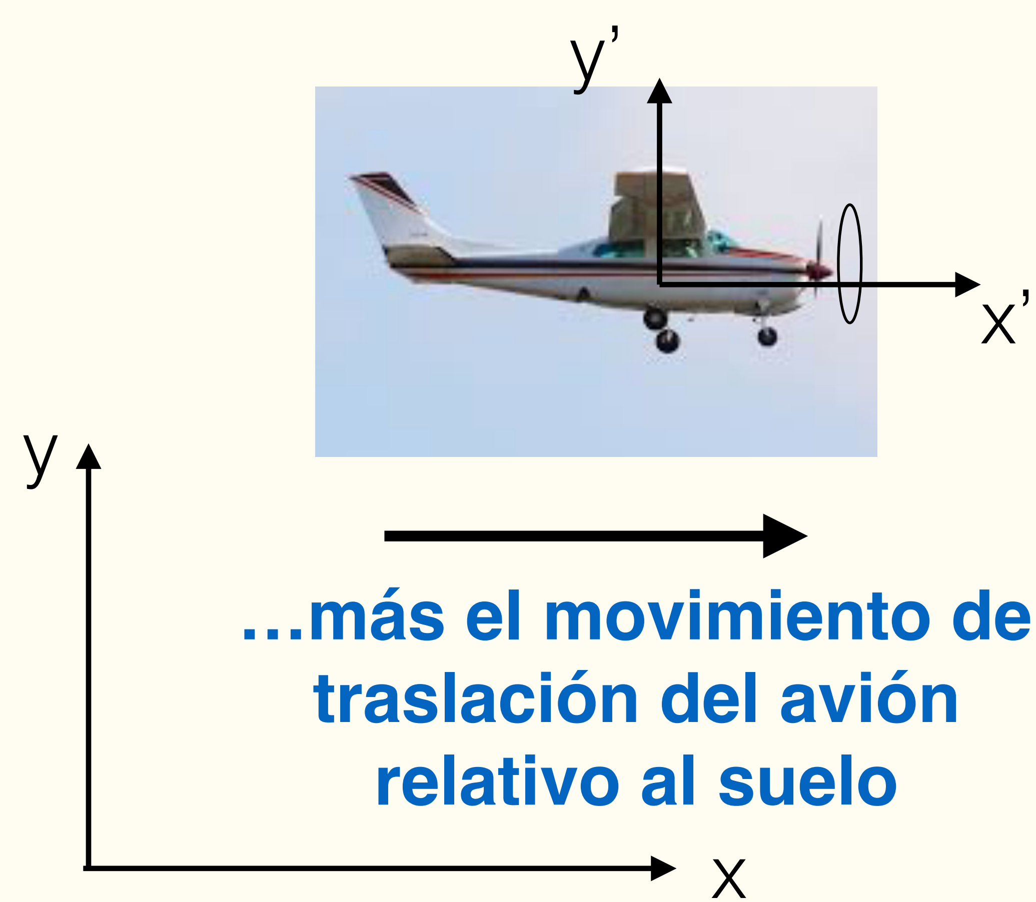
¿Ejemplo?

La punta de la hélice de un avión



Visto desde el suelo el movimiento describe una espiral

Pero puede ser más fácil entenderlo como un movimiento de rotación visto desde el avión…



…más el movimiento de traslación del avión relativo al suelo

Relación entre Posiciones

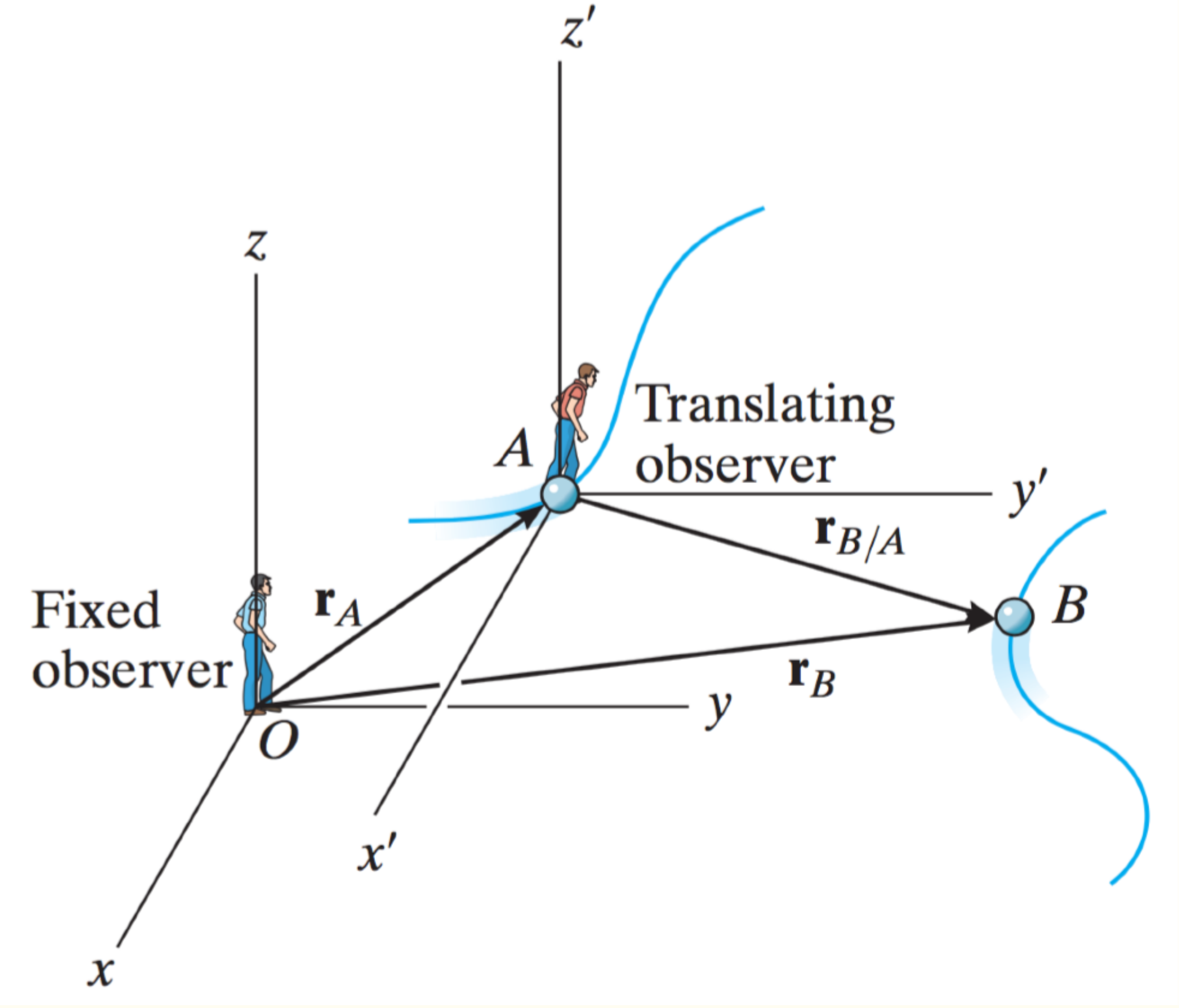
Consideremos el caso general, de un marco de referencia (x',y',z') centrado en A que se traslada respecto a otro marco de referencia fijo (x,y,z) centrado en O.

Si la posición de A desde O es **r_A**, y la posición de B desde A es **$r_{B/A}$**, ¿cuál es la posición **r_B** de B desde O?

$$\boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}}$$

(o, como es tal vez más fácil recordarlo,

$$\boxed{\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}\ )$$



Relación entre Velocidades y Aceleraciones

Podemos derivar la expresión anterior respecto al tiempo para obtener una relación entre las velocidades:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_B\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}\right)$$

nos queda:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$

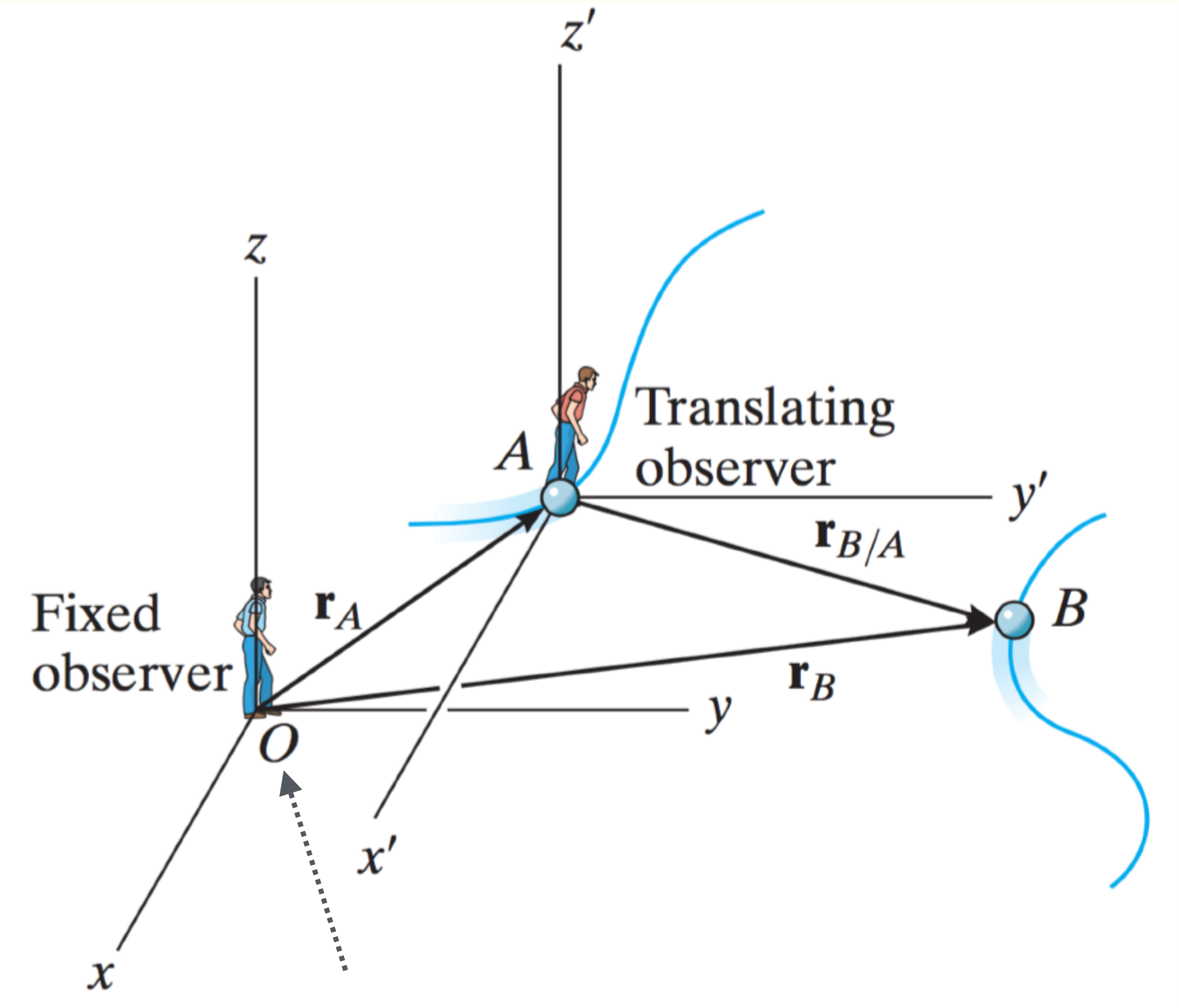
velocidad del objeto B respecto al marco fijo O

velocidad del marco de referencia A respecto al marco fijo O

velocidad del objeto B medida en el marco de referencia en movimiento A

Podemos derivar una vez más y nos queda:

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}}$$

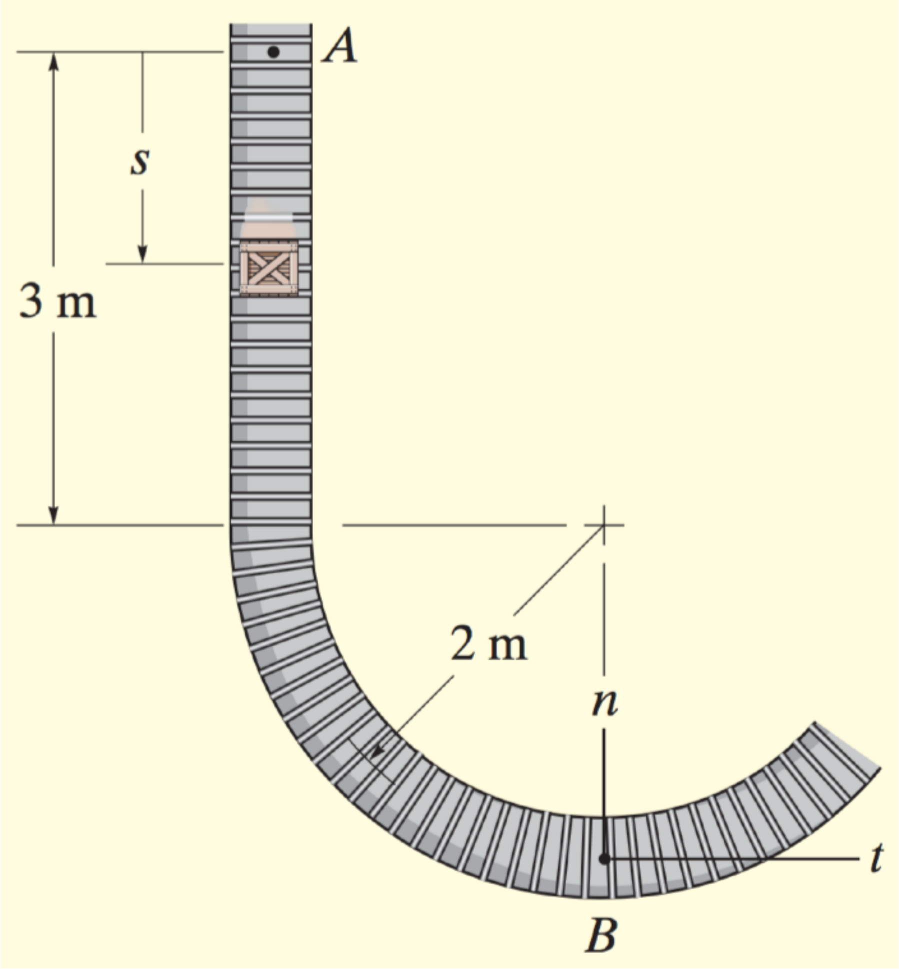


Nota: en realidad el observador O también podría estar en movimiento y las ecuaciones no cambiarían. Lo importante es saber el movimiento de A respecto a O.

Ejemplo

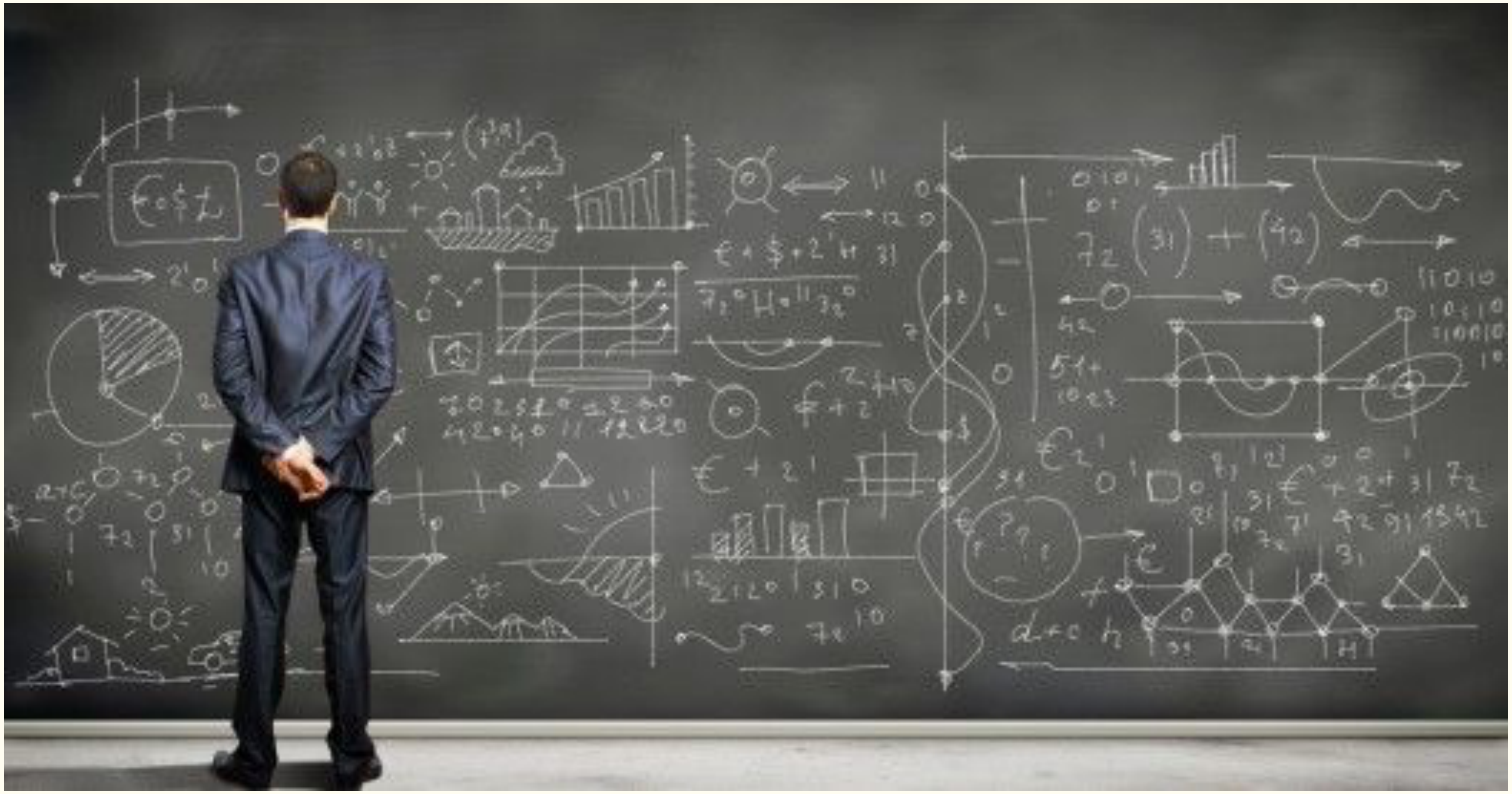
(Ejemplo Resuelto 12.16 en el Hibbeler)

Unas cajas avanzan por una cinta transportadora como se muestra en la figura. Si una caja inicia del reposo en A, e incrementa su rapidez con una aceleración a_t=0.2t m/s^2, donde t está medido en segundos, determine la magnitud de la aceleración cuando llega a B



Respuesta: 5.36 m/s^2

¡Terminamos con Cinemática!

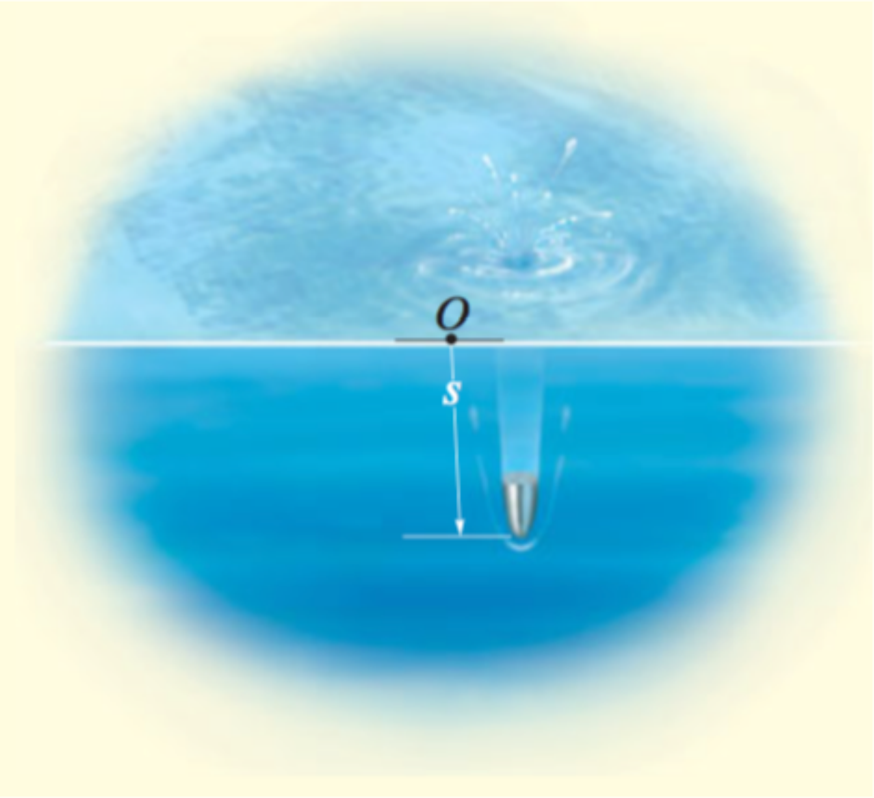


A continuación se incluyen algunos problemas extra con respuesta, así como material extra sobre coordenadas esféricas. Espero les sirvan para estudiar.

Problema #1

(Ejemplo Resuelto 12.2 en Hibbeler)

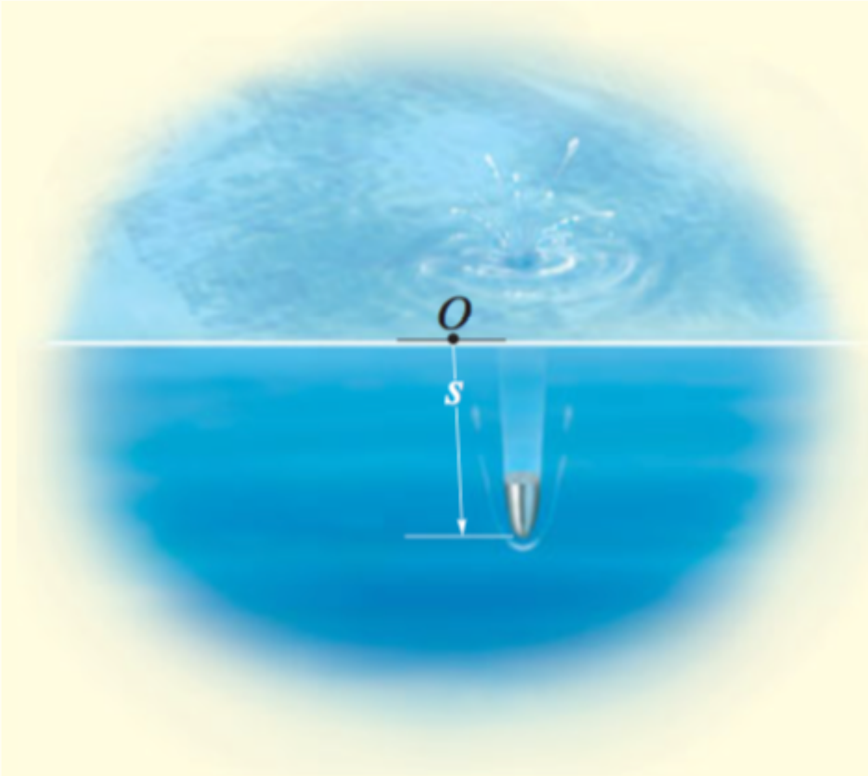
Una bala entra en t=0 a un estanque de agua con una velocidad inicial v_0. Debido al roce, la bala experimenta una deceleración de magnitud kv^3, donde k es una constante positiva y v es la velocidad. Determine la velocidad y la profundidad "s" que penetra la bala en función del tiempo.



(solución detallada a continuación)

Solución Completa del Ejemplo de la Bala

(Ejemplo Resuelto 12.2 en Hibbeler)



El sistema de coordenadas lo consideraremos postivo hacia abajo, con origen ubicado en O.

La variable de posición la llamaremos *s*, como indica la figura.

$$a = f(v) \longrightarrow v(t) \neq v_o + a\,t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -k\,v^3 \Longrightarrow \frac{dv}{v^3} = -k\,dt \Longrightarrow \int_{v_o}^{v} v^{-3}\,dv = -k\int_0^t dt$$

$$\left.\frac{v^{-2}}{-2}\right|_{v_o}^{v} = -k\,t\Big|_0^t \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_o^2}\right) = k\,t$$

Solución Completa del Ejemplo de la Bala

(12.2 en Hibbeler)

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_o^2} + 2\,k\,t \implies v(t) = \frac{v_o}{\sqrt{1 + 2\,k\,v_o^2\,t}}$$

Conociendo $v(t)$ podemos obtener la ecuación para $s(t)$ usando la definición de velocidad y las condiciones iniciales indicadas en el enunciado.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \implies \int_0^s ds = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \left(\frac{v_o}{\sqrt{1 + 2\,k\,v_o^2\,t}}\right)\,dt$$

Por simplicidad haremos un cambio de variable, $u = 1 + 2\,k\,v_o^2\,t$ y $du = 2\,k\,v_o^2\,dt$

$$s(u) = \frac{v_o}{2\,k\,v_o^2}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2\,k\,v_o}\,\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_0^u = \frac{1}{k\,v_o}\,(\sqrt{u} - 1)$$

Solución Completa del Ejemplo de la Bala

(12.2 en Hibbeler)

Revertimos el cambio de variable para obtener la expresión que buscamos,

$$s(t) = \frac{\sqrt{1 + 2\,k\,v_o^2\,t} - 1}{k\,v_o}$$

Verifiquemos los resultados ...

Las expresiones obtenidas para $s(t)$ y $v(t)$

- ¿Son dimensionalmente son correctas?
- ¿Cumplen las condiciones iniciales del problema?
- ¿Describen la “física” del fenómeno planteado?

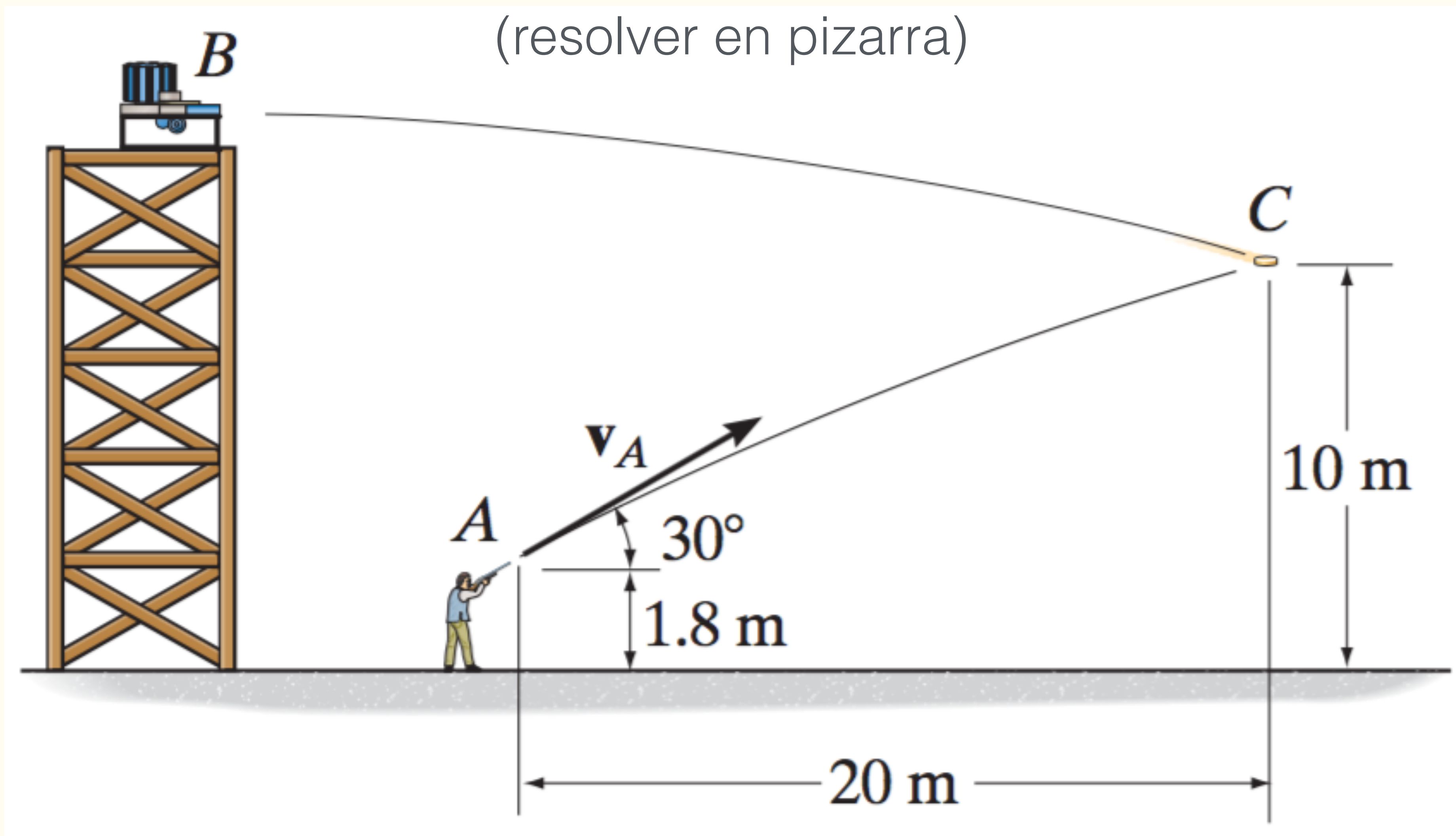
Es importante verificar que la solución tenga sentido físico. En este caso, como esperado, la velocidad es una función que decrece con el tiempo y que tiende a cero cuando t —> infinito.

Problema #2

(12.101 en Hibbeler)

Un proyectil se dispara desde el punto B. Una persona dispara su pistola desde el punto A a un ángulo de 30 grados. Determine la velocidad con la que la bala sale de la pistola si se impacta con el proyectil en el punto C

(resolver en pizarra)

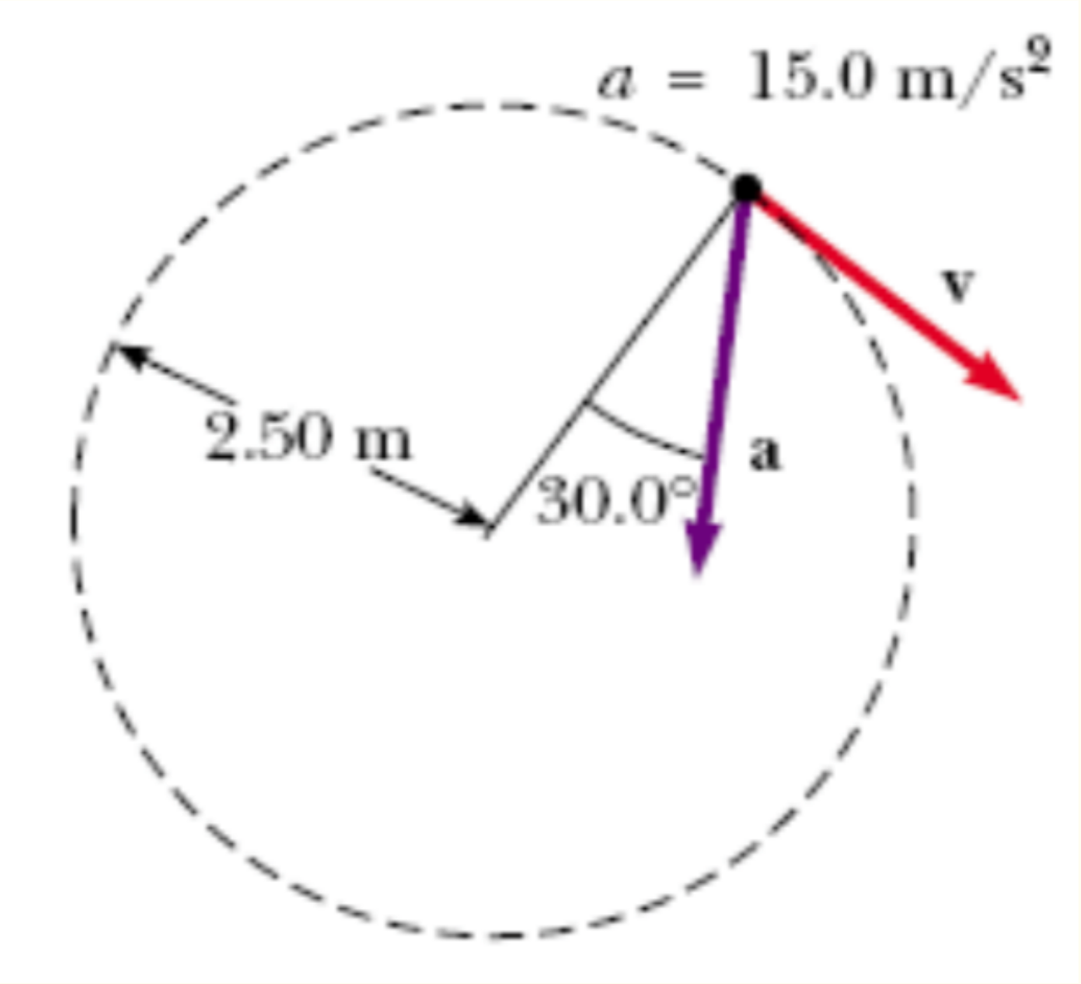


Respuesta: 28 m/s

Problema #3

(no en los libros de texto)

La figura representa la aceleración total de una partícula que se mueve en el sentido de giro de las agujas de un reloj, en un círculo de radio 2.5 m en un cierto instante. Para ese instante, encuentre la aceleración radial, la rapidez de la partícula y su aceleración tangencial.

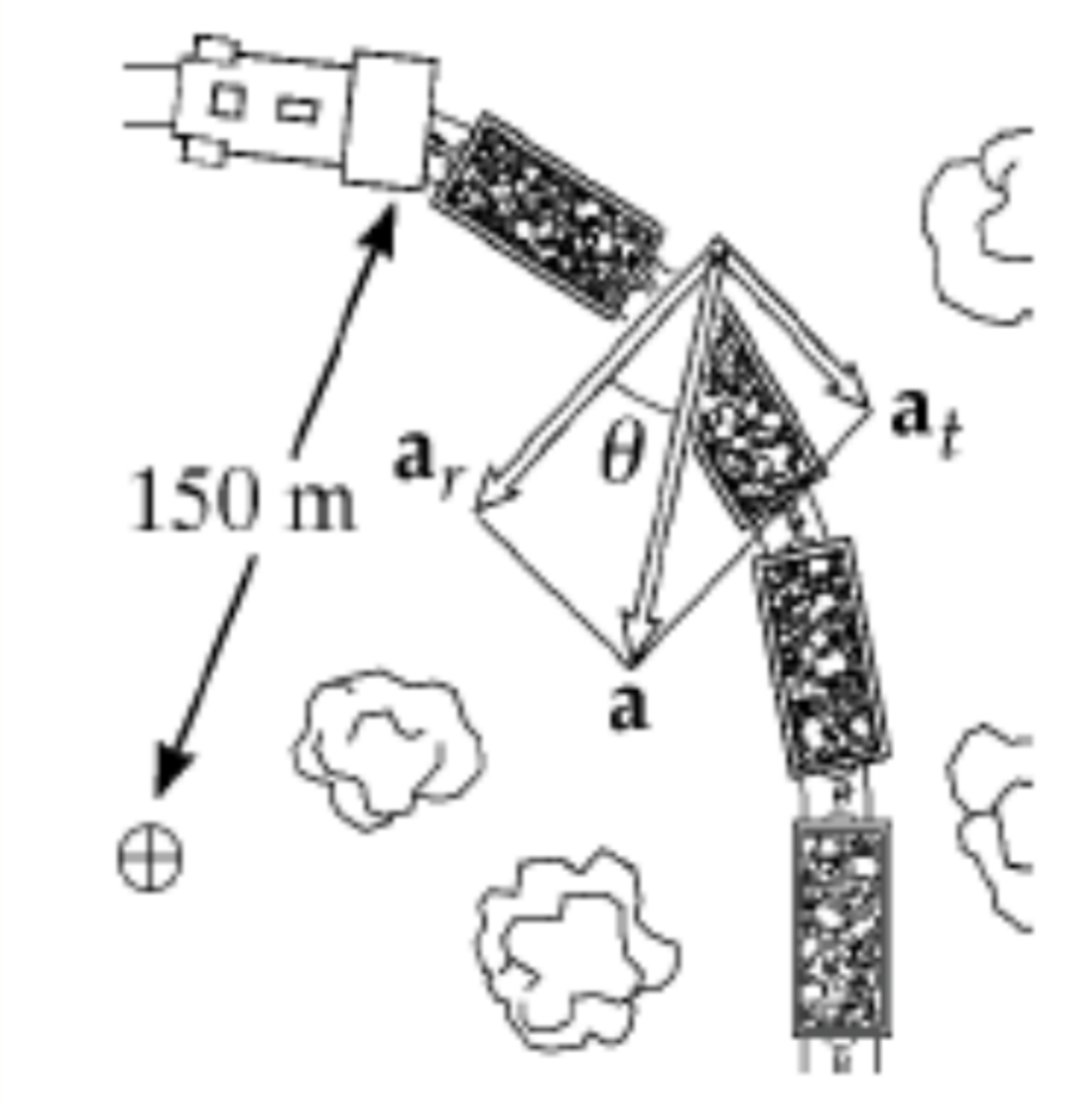


Respuestas: 13 m/s^2, 5.7m/s, 7.5 m/s^2

Problema #4

(no en los libros de texto)

Un tren recorre un circuito circular cerrado, y reduce su velocidad de 90km/h a 50km/h en los 15s que necesita para dar una vuelta. El radio de la curva es de 150m. Calcule la magnitud de la aceleración en el momento en que el tren llega a 50 km/h, así como el ángulo θ que tiene la aceleración con la dirección radial. Puede suponer que el ritmo en el que el tren reduce la velocidad es constante.



(resolver en pizarra)

Respuestas: 1.48 m/s^2, θ=30.0^o

Problema #5

(no en el los libros de texto)

La estructura de la base de la escalera de un autobomba rota alrededor de un eje vertical que pasa por O con velocidad angular constante Ω = 10 grados/seg. Al mismo tiempo, la escalera se eleva a velocidad constante $\dot{\phi}$ = 7 grados/seg y la escalera se extiende a velocidad constante de 0.5 m/s.En el instante en que ϕ=30 ,*OA*=9m y *AB*=6m. Determine la magnitud de la velocidad y de la aceleración del extremo *B* de la escalera.

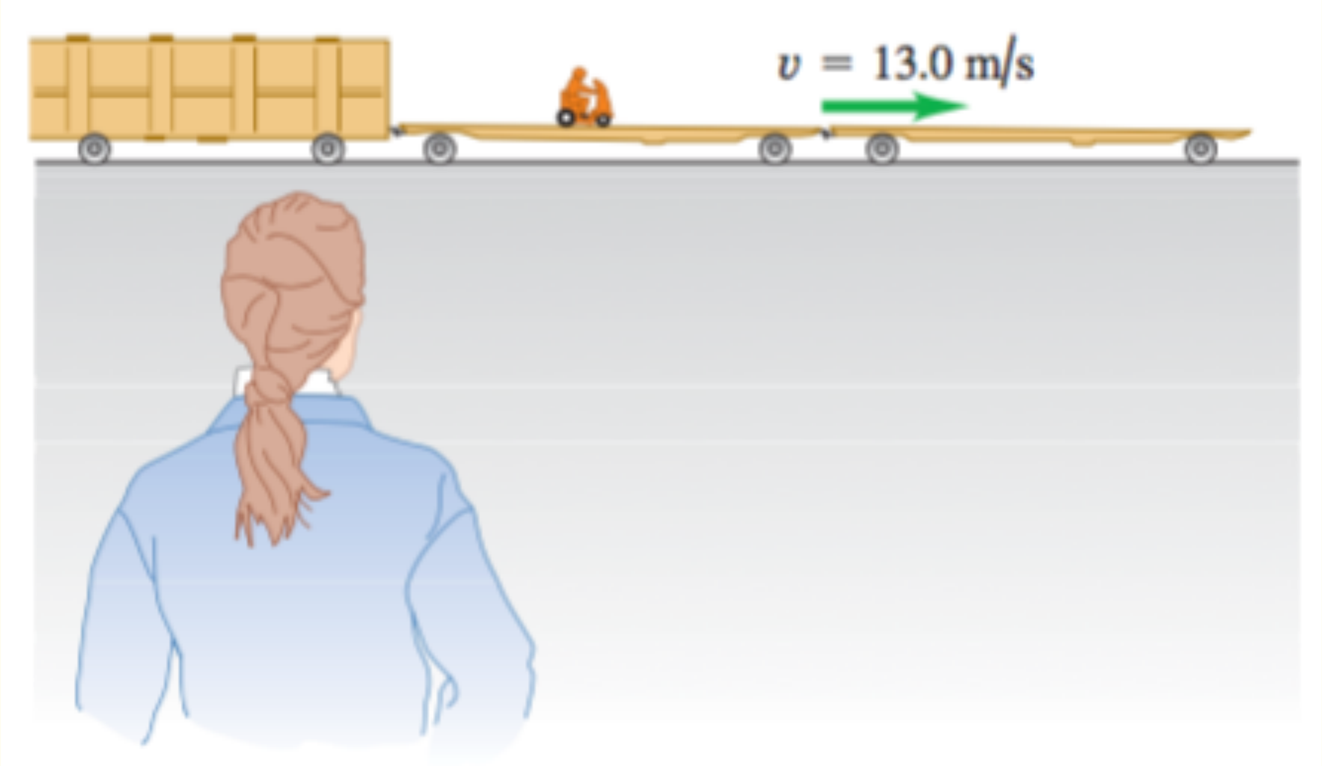
(Nota: este problema se hace con coordenadas esféricas)

Respuesta: v=2.96 m/s; a=0.672 m/s^2

Problema #6

(3.36 en el Young&Freedman)

Un vagón abierto de ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0m/s relativa a un observador parado en la tierra. Alguien se mueve en motoneta sobre el vagón abierto, como mostrado en la figura. ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa al vagón abierto si su velocidad relativa al observador en el suelo es (a) 18.0m/s, (b) 3.0m/s a la izquierda, (c) cero?



¡bastante papas!

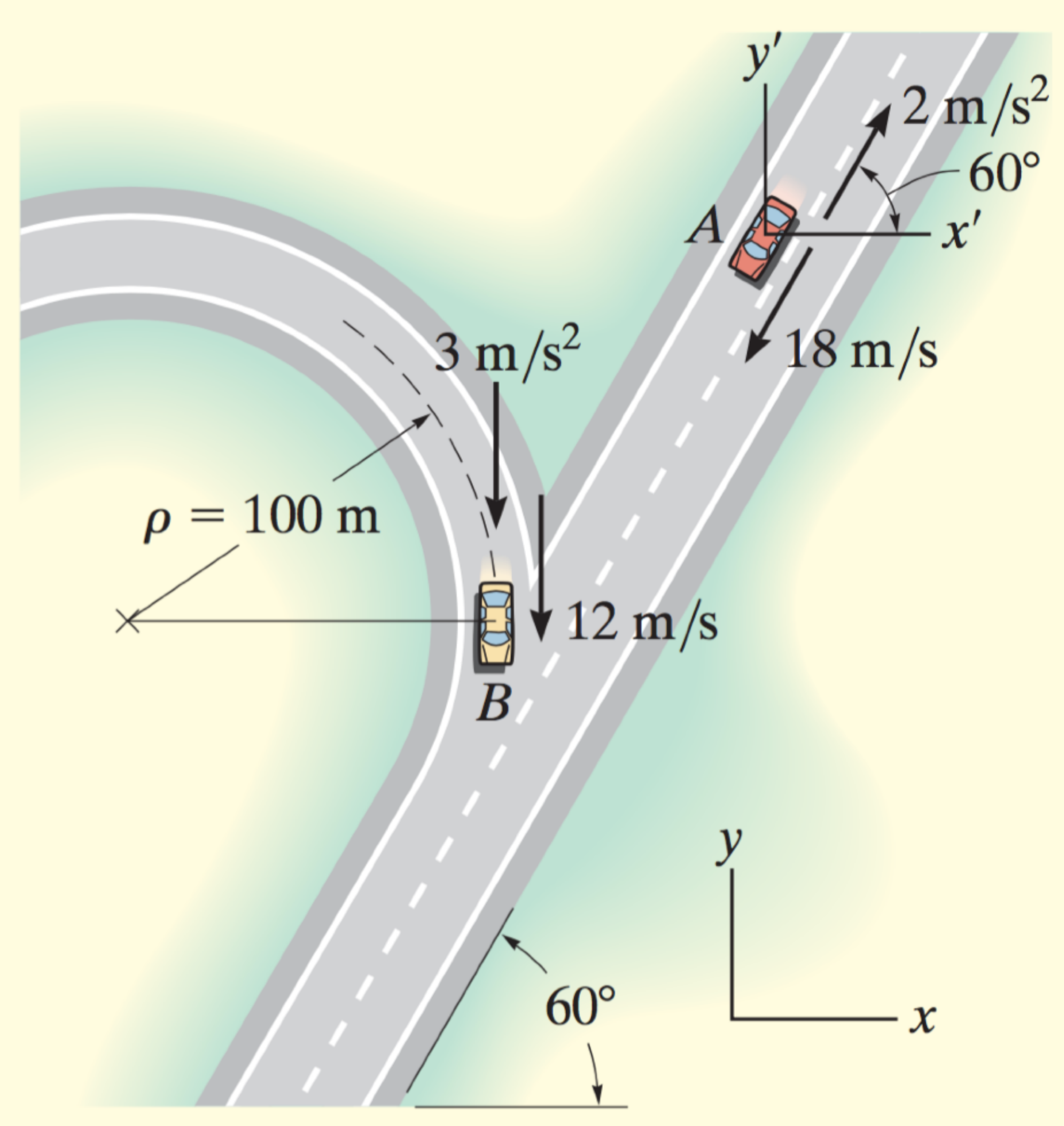
Respuestas: (a) 5m/s, (b) -16m/s, (c) 13m/s (a la izquierda)

Problema #7

(Ejemplo Resuelto 12.27 en el Hibbeler)

Dos autos A y B se mueven como mostrado en la figura. Determine la velocidad y la aceleración de B respecto a A

Nota: se recomienda intentar visualizar qué dirección y magnitud aproximada debe tener la respuesta antes de hacer los cálculos.



Respuestas:

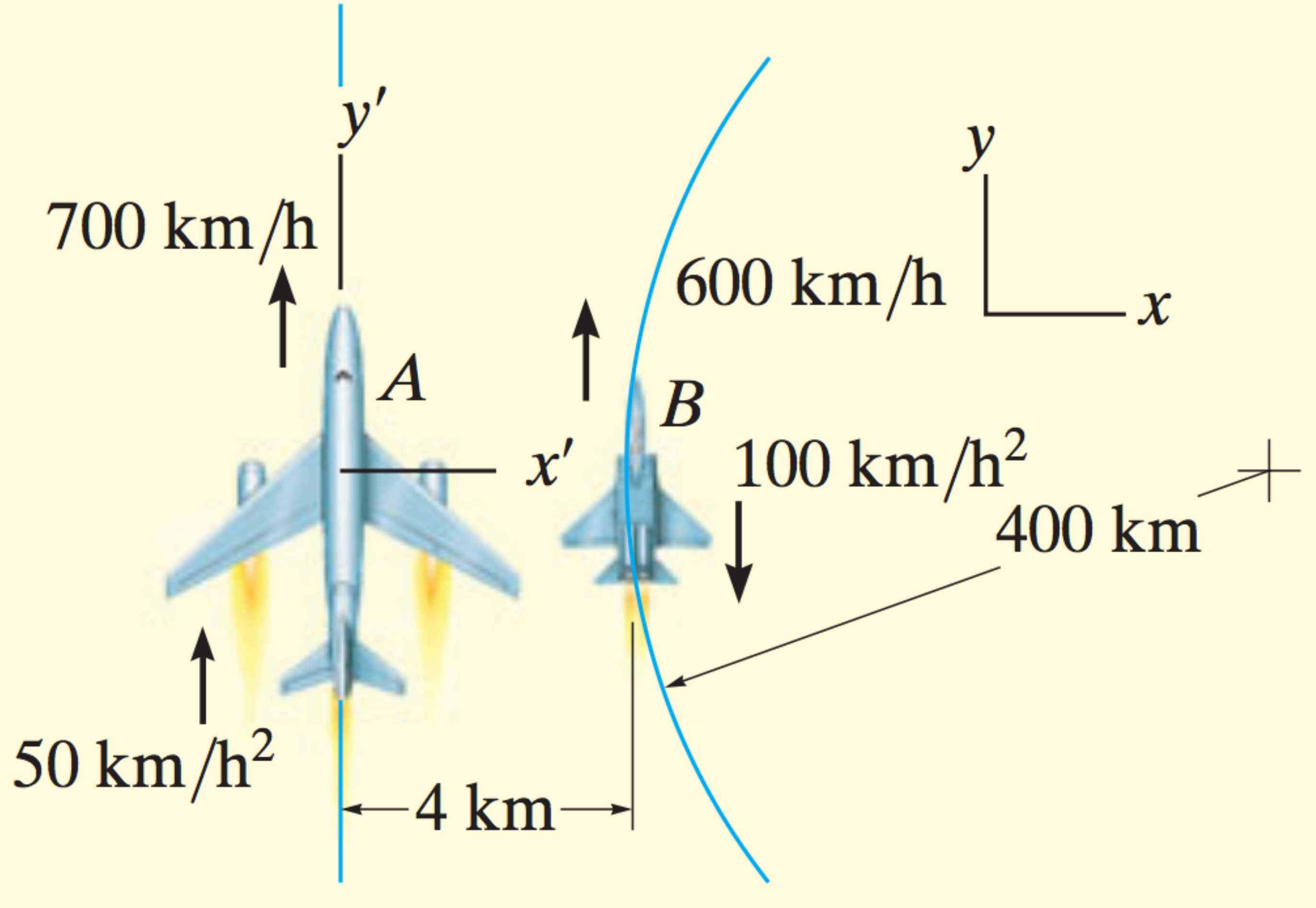
$\mathbf{v}_{B/A} = 9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}$ m/s (magnitud $v_{B/A} = 9.69$ m/s)

$\mathbf{a}_{B/A} = -2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}$ m/s^2 (magnitud $a_{B/A} = 5.32$ m/s^2)

Problema #8

(Ejemplo resuelto 12.26 en el Hibbeler)

El avión A en la figura vuela en línea recta, mientras que el avión B sigue una trayectoria circular de radio R=400km. Determine (a) la velocidad y (b) la aceleración de B como medida por A en el instante mostrado.



Respuestas:

(a) $\vec{v}_{B/A} = -100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\,\hat{j}$

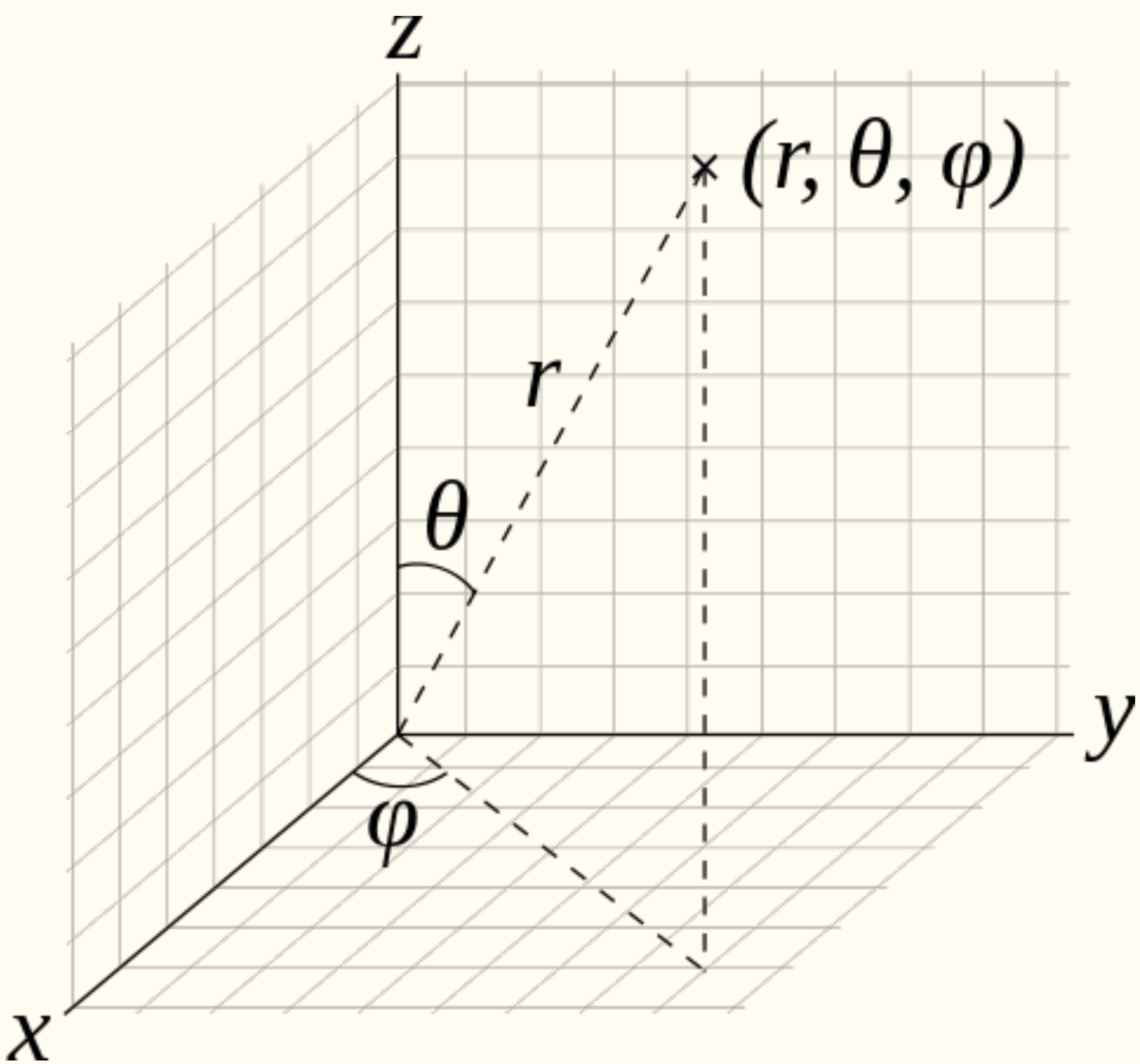
(b) $\vec{a}_{B/A} = 900\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}^2}\,\hat{i} - 150\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}^2}\,\hat{j}$

Material Extra sobre Coordenadas Exféricas

(no entra este semestre)

Coordenadas Esféricas

El mismo razonamiento que aplicamos a coordenadas polares/cilíndricas lo podemos aplicar a coordenadas esféricas



Nota: esta es la definición más común, aunque algunos libros definen los ángulos de forma diferente.

En este sistema, un punto en el espacio se ubica con tres cantidades: una distancia (r) y dos ángulos (θ, ϕ)

De esféricas a cartesianas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

De cartesianas a esféricas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Coordenadas Esféricas

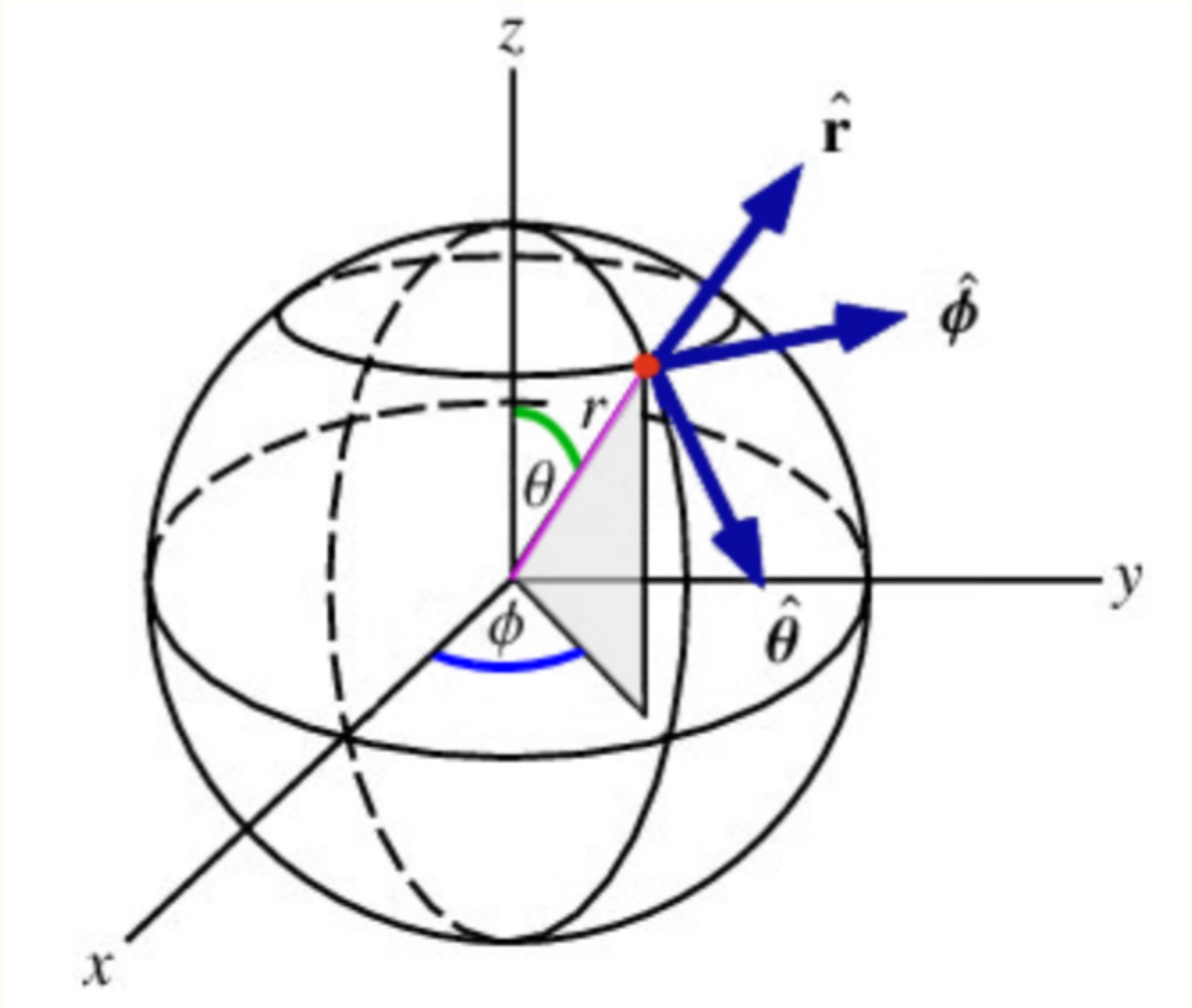
Los vectores unitarios se pueden expresar en función de coordenadas cartesianas como:

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

(esto no se va a demostrar en clase)



Velocidad y Aceleración en Esféricas

Si uno calcula las derivadas temporales de los vectores unitarios, y utiliza el resultado para calcular expresiones generales para la velocidad y la aceleración de la misma forma que lo hicimos en polares, el resultado es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}$$
$$+ \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{\phi}$$

Esto es demasiado trabajo, por lo que no lo haremos en clase.

No necesitan memorizar esto. Lo importante es que lo sepan usar si fuera necesario

(Se puede encontrar la demostración completa en https://www.ece.nus.edu.sg/stfpage/elehht/Teaching/EE2011%20Part%20A/Lecture%20Notes%5CSupplementary%20Notes%5CSpherical%20coordinate%20system%20-%20grad,%20div,%20curl,%20Laplacian.pdf)

Próximo tema: Leyes de Newton