Guía de Problemas 1 - Sistemas Discretos

Problema 1

Consigna: Analizar para los siguientes filtros invariancia en el tiempo, causalidad y linealidad. Para analizar las propiedades mencionadas, se procedió aplicando los procedimientos que se detallan a continuación:

1.Invarianvia: Para verificar la proiedad de invariancia en le tiempo, se toma la señal de entrada $x(n)$ y se le aplican las siguientes operaciones:

1. Se retarda en el tiempo y luego se aplica la transformacion $R[\,]$
2. Se aplica la transformacion $R[\,]$ y luego se retarda en el tiempo

Si ambas operaciones arrojan el mismo resultado, se considera que el sistema representado por $R[]$ es invariante, y no lo será, en caso contrario.

2.Causalidad: Para verificar la propiedad de causalidad, se partió de la siguiente condición:

$$\begin{cases} x_1(n) = x_2(n) & n <= k \\ x_1(n) \neq x_2(n) & n > k \end{cases}$$

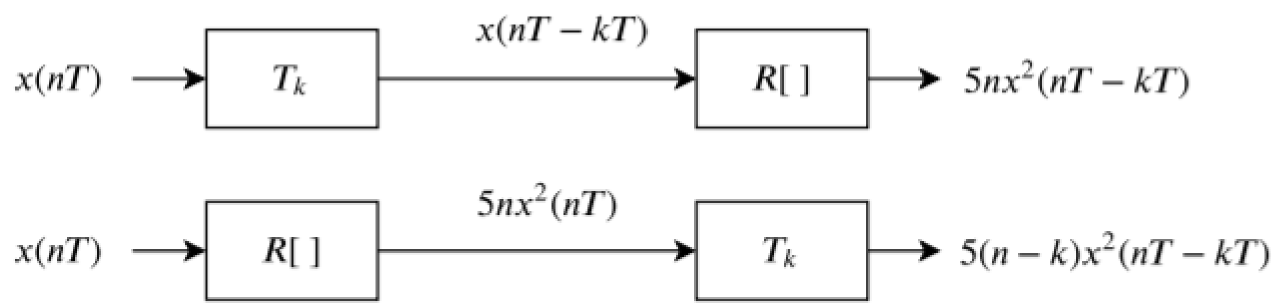
Se aplica la transformación $R[\,]$ a $x_1(n)$ y $x_2(n)$ evaluada en $x = k$, y se verifica la igualdad entre $R[x_1(k)]$ y $R[x_2(k)]$. Si se cumple la igualdad, se verifica la propiedad de causalidad del sistema.

3.Linealidad: Se evalúa la epresión de $R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]$ y se verifica que se cumpla:

$$R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]$$

d. $R[x(nT)] = 5nTx(nT)$

1. Invariancia



Se observa que el sistema **no es invariante en el tiempo**

2. Causalidad

$$\begin{cases} R[x_1(k)] = 5kx_1^2(k) \\ R[x_2(k)] = 5kx_2^2(k) \end{cases}$$

Dado que $x_1(n) = x_2(n)$ para $n <= k$, entonces $R[x_1(k)] = R[x_1(k)]$, y por lo tanto el sistema **es causal**

3. Linealidad

$$\begin{aligned} R[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)] &= 5n[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)]^2 \\ &= 5n[\alpha^2 x_1^2(n)+\beta^2 x_2^2(n)+2\alpha\beta x_1(n)x_2(n)] \\ &= \alpha^2[5nx_1^2(n)]+\beta[5nx_2^2(n)]+2\alpha\beta x_1(n)x_2(n) \\ &= \alpha R[x_1(n)]+\beta R[x_2(n)]+2\alpha\beta x_1(n)x_2(n) \end{aligned}$$

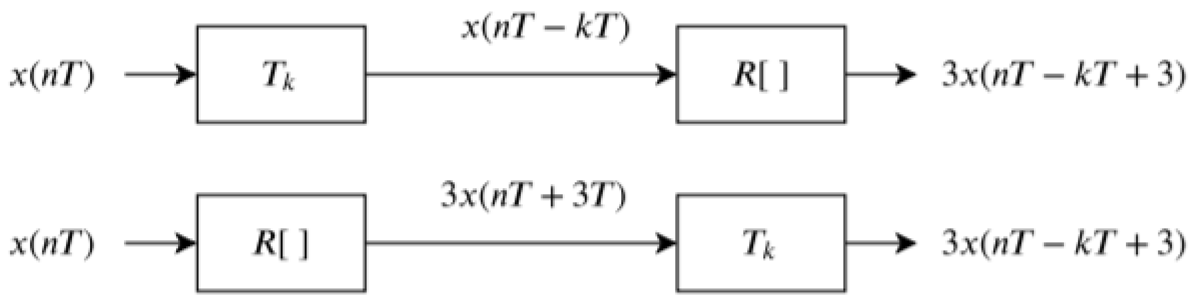
Se evidencia que:

$$R[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)] \neq \alpha R[x_1(n)]+\beta R[x_2(n)]$$

Y por lo tanto se concluye que el sistema **no es lineal**

e. $R[x(nT)] = 3x(nT+3T)$

1. Invariancia



Se observa que el sistema **es invariante en el tiempo**

2. Causalidad

$$\begin{cases} R[x_1(k)] = 3x_1(k+3) \\ R[x_2(k)] = 3x_2(k+3) \end{cases}$$

Dado que $x_1(n) \neq x_2(n)$ para $n > k$, entonces $R[x_1(k)] \neq R[x_1(k)]$, y por lo tanto el sistema **no es causal**

3. Linealidad

$$\begin{aligned} R[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)] &= 3[\alpha x_1(n+3)+\beta x_2(n+3)] \\ &= \alpha 3x_1(3n+3)+\beta 3x_2(n+3) \\ &= \alpha R[x_1(n)]+\beta[x_2(n)] \end{aligned}$$

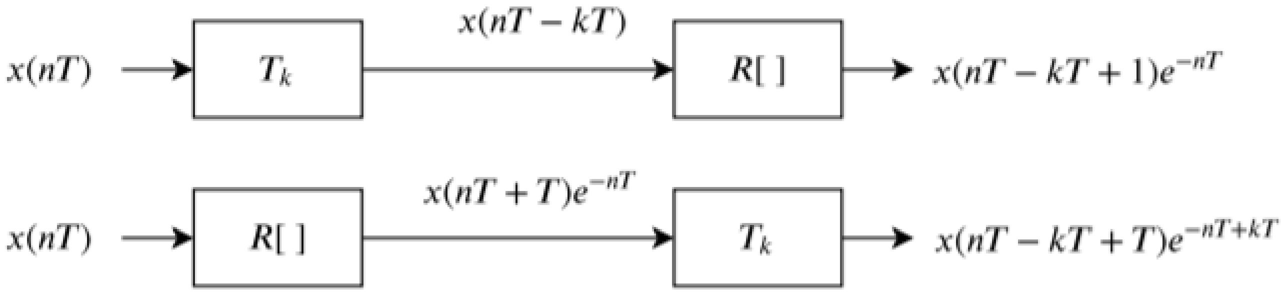
Se evidencia que:

$$R[\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)] = \alpha R[x_1(n)]+\beta R[x_2(n)]$$

Y por lo tanto se concluye que el sistema **es lineal**

i. $R[x(nT)] = x(n+T)e^{-nT}$

1. Invariancia



Se observa que el sistema **es invariante en el tiempo**

2. Causalidad

$$\begin{cases} R[x_1(k)] = x_1(k+1)e^{-k} \\ R[x_1(k)] = x_2(k+1)e^{-k} \end{cases}$$

Dado que $x_1(n) \neq x_2(n)$ para $n > k$, entonces $R[x_1(k)] \neq R[x_1(k)]$, y por lo tanto el sistema **no es causal**

3. Linealidad

$$\begin{aligned} R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] &= [\alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n+1)]e^{-n} \\ &= \alpha x_1(n+1)e^{-n} + \beta x_2(n+1)e^{-n} \\ &= \alpha R[x_1(n)] + \beta[x_2(n)] \end{aligned}$$

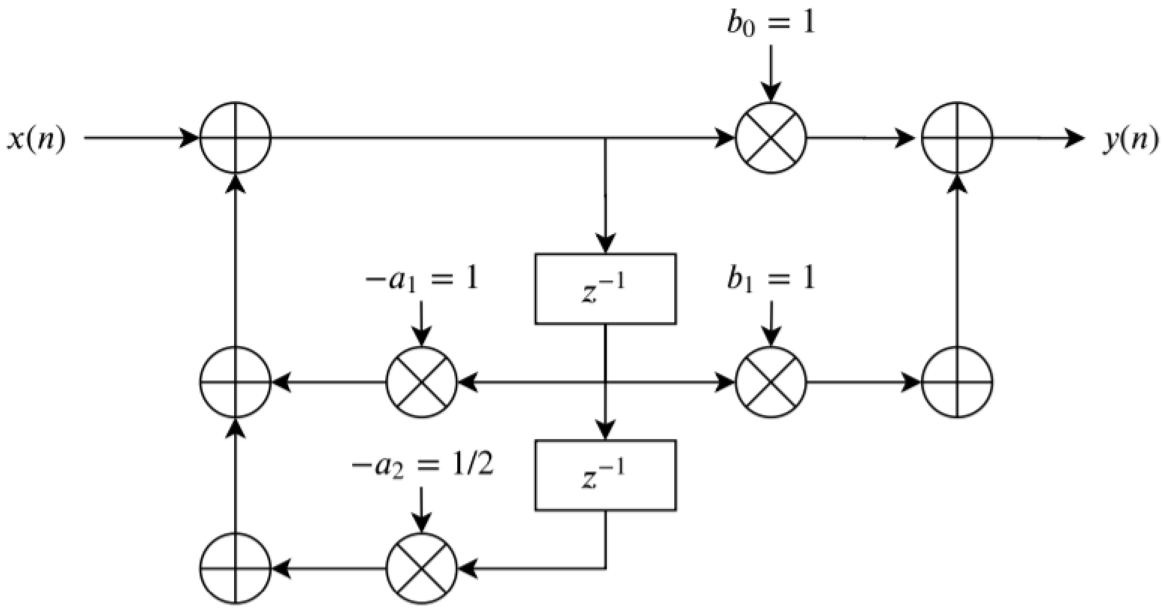
Se evidencia que:

$$R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]$$

Problema 2

b

Reescribo el diagrama del sistemade forma que se adapte al sistema descripto por la expresion:



de forma que se adapte al sistema descripto por la expresion:

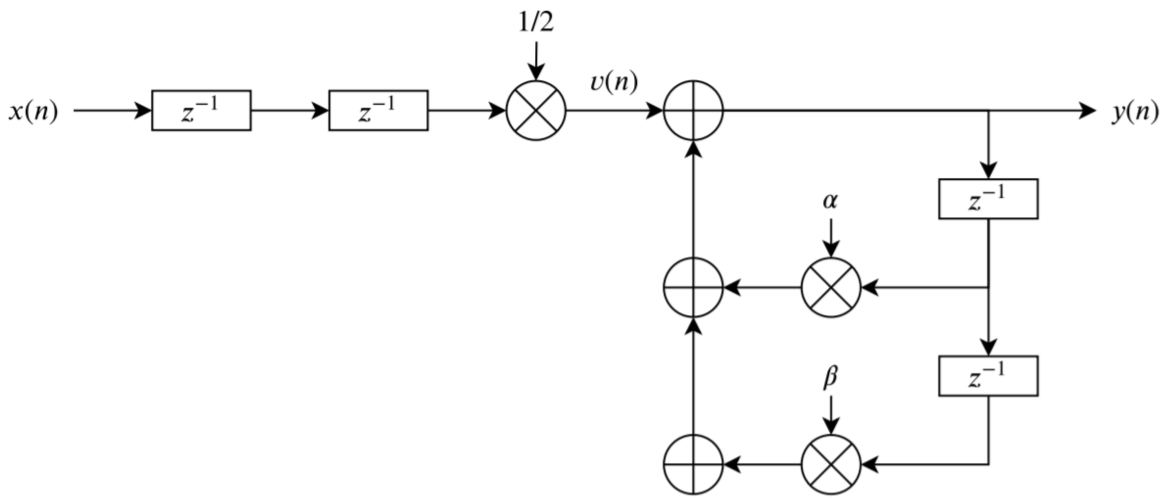
$$y(n) = -\sum_{k=1}^{2} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{1} b_k x(n-k)$$

Desarrollado la sumatoria y remplazando los coeficientes a_k y b_k, se obtiene la ecuación en diferencias:

$$y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

Problema 9

Reescribo el diagrama del sistema



tal que quede definido por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} y(n) = \alpha y(n-1) + \beta y(n-2) + v(n) \\ v(n) = \frac{1}{2} x(n-2) \end{cases}$$

Resultando la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema:

$$y(n) - \alpha y(n-1) - \beta y(n-2) = \frac{1}{2} x(n-2)$$

Se implementó un script en Python para calcular y graficar la respuesta al impulso para 3 combinaciones de \alpha& y \beta$

a.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/8 \end{cases}$$

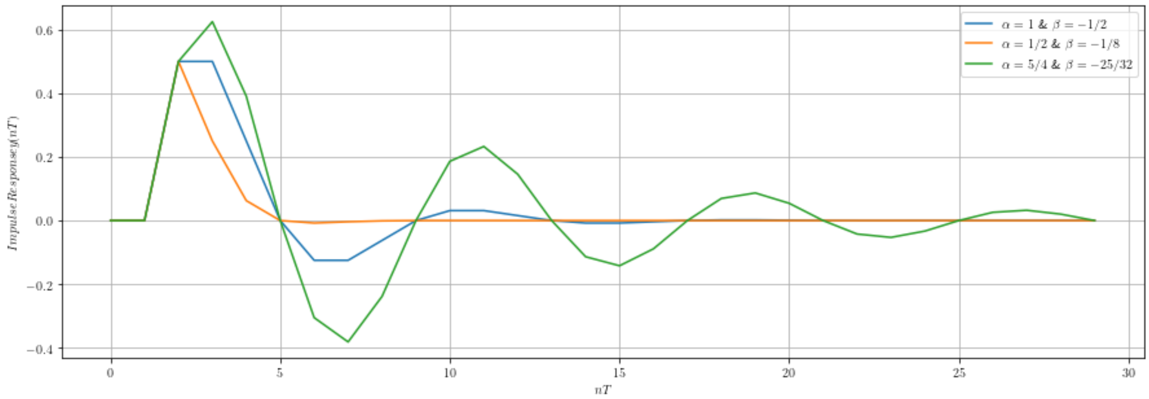
c.

$$\begin{cases} \alpha = 5/4 \\ \beta = -25/32 \end{cases}$$

In [4]:

```
%matplotlib inline
from scipy import signal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
matplotlib.rcParams['text.usetex'] = True


fig = plt.figure(figsize=(15,5))

# define finite impulse up to n=30
x = signal.unit_impulse(30)
y = np.zeros(len(x))
alpha = 1
beta = -1/2
for i in range(0, len(x)):
    if i - 1 < 0:
        y_1 = 0
    else:
        y_1 = y[i -1]

    if i -2 < 0:
        y_2 = 0
        x_2 = 0
    else:
        y_2 = y[i-2]
        x_2 = x[i-2]

    y[i] = alpha*y_1 + beta*y_2 + 0.5*x_2

plt.plot(y, label=r'$\alpha = 1$ \& $\beta = -1/2$')

y = np.zeros(len(x))
alpha = 1/2
beta = -1/8
for i in range(0, len(x)):
    if i - 1 < 0:
        y_1 = 0
    else:
        y_1 = y[i -1]

    if i -2 < 0:
        y_2 = 0
        x_2 = 0
    else:
        y_2 = y[i-2]
        x_2 = x[i-2]

    y[i] = alpha*y_1 + beta*y_2 + 0.5*x_2

plt.plot(y, label=r'$\alpha = 1/2$ \& $\beta = -1/8$')

y = np.zeros(len(x))
alpha = 5/4
beta = -25/32
for i in range(0, len(x)):
    if i - 1 < 0:
        y_1 = 0
    else:
```

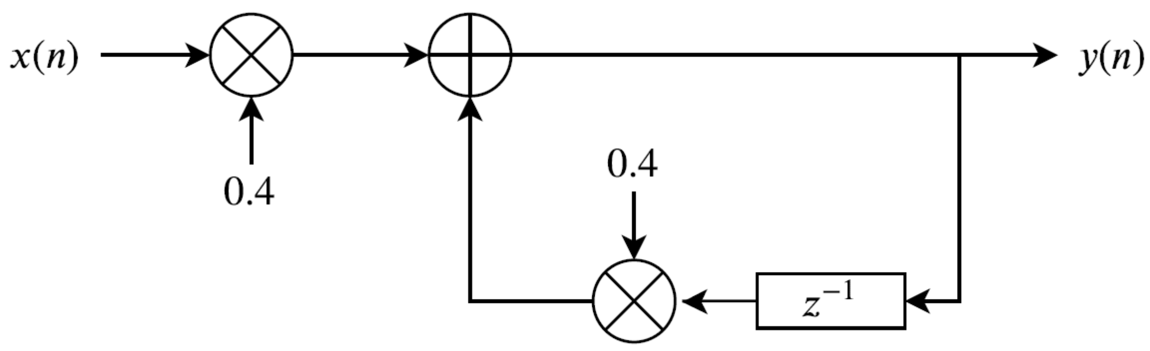
```
        y_1 = y[i -1]

    if i -2 < 0:
        y_2 = 0
        x_2 = 0
    else:
        y_2 = y[i-2]
        x_2 = x[i-2]

    y[i] = alpha*y_1 + beta*y_2 + 0.5*x_2

plt.plot(y, label=r'$\alpha = 5/4$ \& $\beta = -25/32$')
plt.legend()
plt.ylabel(r'$Impulse Response y(nT)$')
plt.xlabel(r'$nT$')
plt.grid('minor')
plt.show()
```



Se observa que la frecuencia de oscilacion de la respuesta al impulso graficada (para los 3 casos) es aproximadamente:

$$f_{\text{osc}} = \frac{2}{17T}$$

Problema 11



La ecuación en diferencias que caracteriza al sistema de la figura es

$$y(nT) = 0.4x(nT) + 0.4y(nT - T)$$

a.

Sea la señal de entrada $x(nT)$ una señal senoidal, tal que:

$$x(nT) = \begin{cases} sin(\omega nT) & n >= 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Escribo $sin(n\omega T) en su forma exponencial compleja:

$$sin(\omega nT) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}\right)$$

Si aplico la transformación del sistema $R[\,]$ y desarrollo (considerando sistema lineal), se obtiene:

$$\begin{aligned} y(nT) &= R[x(nT)] \\ &= R\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2j}R\left[e^{j\omega nT}\right] - \frac{1}{2j}R\left[e^{-j\omega nT}\right] \end{aligned}$$

Definiendo $x_1(n)$, $x_2(n)$, $y_1(n)$ e $y_2(n)$ tal que:

$$\begin{cases} y_1(nT) = R[x_1(nT)] = R\left[e^{j\omega nT}\right] \\ y_2(nT) = R[x_2(nT)] = R\left[e^{-j\omega nT}\right] \end{cases}$$

Entonces podemos reescribir la expresión de $y(nT)$:

$$y(nT) = \frac{1}{2j}y_1(nT) - \frac{1}{2j}y_2(n)$$

Donde $y_1(n)$ es la salida del sistema cuando se lo excita con la entrada $x_1(n)$. Es decir, es el resultado de la convolución de $x_1(n)$ y la respuesta impulsiva del sistema $h(n)$. La expresión de la respuesta impulsiva del sistema puede hallarse utilizando la Transformada Z.

Transformo la ecuación en diferencias que caracteriza el sistema, y hallo $H(z)$

$$Y(z) = 0.4X(z) + 0.4z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)\left(1 - 0.4z^{-1}\right) = 0.4X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.4\frac{z}{z - 0.4}$$

Antitransformo para halar $h(n)$

$$h(n) = 0.4(0.4)^n u(n)$$

Si desarrollo la convolución de $x_1(nT)$ y $h(nT)$ obtengo

$$y_1(nT) = \sum_{k=0}^{n} e^{j\omega T(n-k)} 0.4(0.4)^k u(kT)$$

$$= e^{j\omega nT} \sum_{k=0}^{n} \left(0.4e^{-j\omega T}\right)^k$$

$$y_1(nT) = \frac{0.4^{nT} - e^{j\omega nT}}{0.4e^{-j\omega T} - 1}$$

Para regimen permanente, hallo el limite de la respuesta $y_1(nT)$ cuando n tiende a ∞

$$\tilde{y}_1(nT) = \lim_{n\to\infty} y_1(nT) = \frac{e^{j\omega nT}}{1 - 0.4e^{-j\omega T}}$$

La respuesta $\tilde{y}_1(nT)$ se puede escribir como el producto del módulo de la transferencia, por $e^{j\theta(\omega)}$ por $x_1(nT) = e^{j\omega nT}$:

$$\tilde{y}_1(nT) = \left[|H_1(\omega)|\, e^{j\theta_1(\omega)}\right] e^{j\omega nT}$$

Donde la transferencia en modulo y fase estan dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} |H_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0.4)^2 - 0.8cos(\omega T)}} \\ \theta_1(\omega) = \arctan \frac{0.4sin(\omega T}{1-0,4cos(\omega T)} \end{cases}$$

Dado que $H_2(\omega) = H_1(-\omega)$, y siendo que el módulo de la transferencia es una funcion par de ω, entonces $|H_2(\omega)| = |H_1(\omega)|$. Y dado que la transferencia de la fase es una función impar de ω, entonces $\theta_2(\omega) = -\theta_1(\omega)$. Por lo tanto:

$$\tilde{y}_2(nT) = \left[|H_1(\omega)|\, e^{-j\theta_1(\omega)}\right] e^{-j\omega nT}$$

De esta forma, la expresión de $\tilde{y}(nT)$ queda de la siguiente forma:

$$\tilde{y}(nT) = |H_1(\omega)| \left[e^{j(\theta_1(\omega)+\omega nT)} - e^{-j(\theta_1(\omega)+\omega nT)}\right]$$

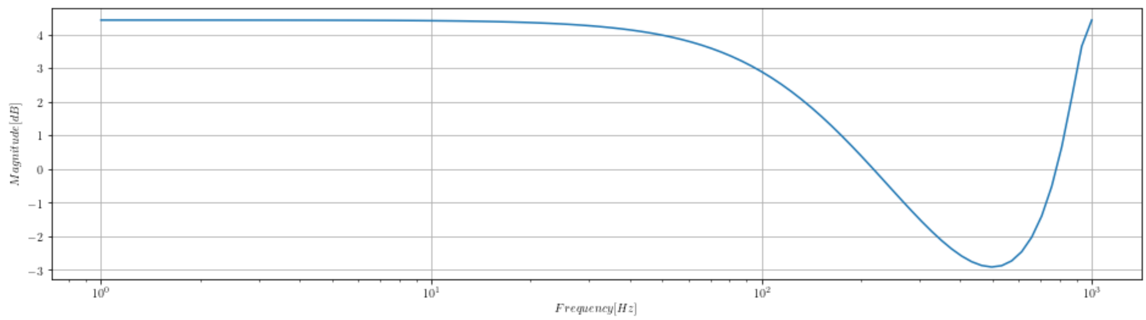
Finalmente, la respuesta en regimen permanente para una entrada de forma senoidal esta dada por la epresión:

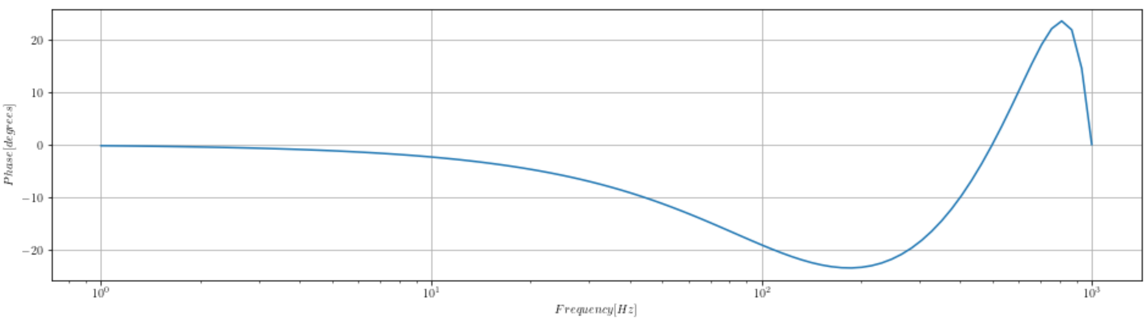
$$\tilde{y}(nT) = |H_1(\omega)|\, sin(\omega nT + \theta_1(\omega))$$

Se utilizó el siguiente script de Python para graficar la respuesta indicada

In [5]:

```
%matplotlib inline
from scipy import signal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
import cmath
import math
matplotlib.rcParams['text.usetex'] = True

T = 1e-3
f = np.logspace(0,3,100)
w = [2*cmath.pi*fi for fi in f]

H = [1/(1-0.4*cmath.exp(-1j*wi*T)) for wi in w]
mag = [20*cmath.log10(abs(Hi)) for Hi in H]
phase = [cmath.phase(Hi) for Hi in H]

fig, ax = plt.subplots(2,1, figsize=(16,9))

ax[0].semilogx(f, np.real(mag))
ax[0].set_xlabel(r'$Frequency [Hz]$')
ax[0].set_ylabel(r'$Magnitude [dB]$')
ax[0].grid('minor')

ax[1].semilogx(f, [math.degrees(phase_i) for phase_i in phase])
ax[1].set_xlabel(r'$Frequency [Hz]$')
ax[1].set_ylabel(r'$Phase [degrees]$')
ax[1].grid('minor')

plt.savefig('ej_11a.pdf')
plt.show()
```





b.

Para hallar la frecuencia en la cual la ganancia de la transferencia es -3dB respecto a la ganancia en $f = 0$ se utilizó el siguiente script de Python

In [6]:

```python
import numpy as np
import cmath
import math

T = 1e-3
f = np.logspace(0,3,100)
w = [2*cmath.pi*fi for fi in f]

H = [1/(1-0.4*cmath.exp(-1j*wi*T)) for wi in w]
mag = [20*cmath.log10(abs(Hi)) for Hi in H]
phase = [cmath.phase(Hi) for Hi in H]

indexes = [i for i, value in enumerate(mag) if np.real(value) < np.real(mag[0])-3]
f0 = int(f[indexes[0]])

print('-3dB Frequency: ' + str(f0) +' Hz')
```

```
-3dB Frequency: 162 Hz
```