

# Guía de Problemas 1 - Sistemas Discretos

## Problema 1

**Consigna:** Analizar para los siguientes filtros invariancia en el tiempo, causalidad y linealidad. Para analizar las propiedades mencionadas, se procedió aplicando los procedimientos que se detallan a continuación:

**1. Invariancia:** Para verificar la propiedad de invariancia en el tiempo, se toma la señal de entrada  $x(n)$  y se le aplican las siguientes operaciones:

1. Se retarda en el tiempo y luego se aplica la transformación  $R[ ]$
2. Se aplica la transformación  $R[ ]$  y luego se retarda en el tiempo

Si ambas operaciones arrojan el mismo resultado, se considera que el sistema representado por  $R[ ]$  es invariante, y no lo será, en caso contrario.

**2. Causalidad:** Para verificar la propiedad de causalidad, se partió de la siguiente condición:

$$\begin{cases} x_1(n) = x_2(n) & n \leq k \\ x_1(n) \neq x_2(n) & n > k \end{cases}$$

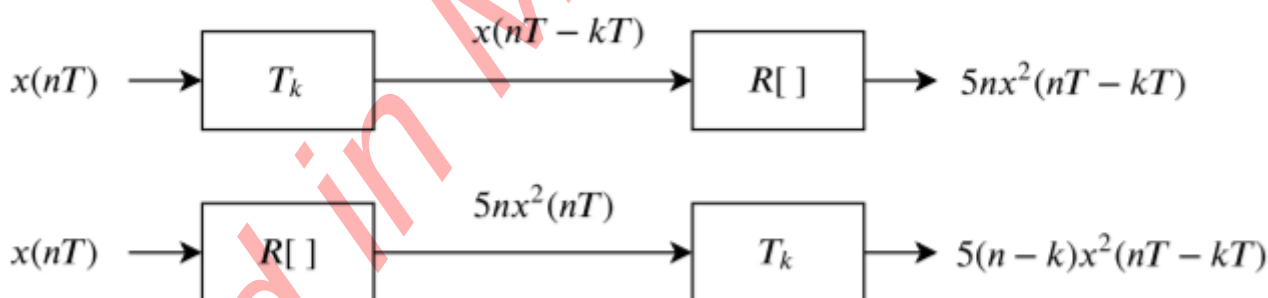
Se aplica la transformación  $R[ ]$  a  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  evaluada en  $x = k$ , y se verifica la igualdad entre  $R[x_1(k)]$  y  $R[x_2(k)]$ . Si se cumple la igualdad, se verifica la propiedad de causalidad del sistema.

**3. Linealidad:** Se evalúa la expresión de  $R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]$  y se verifica que se cumpla:

$$R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]$$

d.  $R[x(nT)] = 5nT x^2(nT)$  ✓

### 1. Invariancia



Se observa que el sistema **no es invariante en el tiempo**

### 2. Causalidad

$$\begin{cases} R[x_1(k)] = 5kx_1^2(k) \\ R[x_2(k)] = 5kx_2^2(k) \end{cases}$$

Dado que  $x_1(n) = x_2(n)$  para  $n \leq k$ , entonces  $R[x_1(k)] = R[x_2(k)]$ , y por lo tanto el sistema **es causal**

### 3. Linealidad

$$\begin{aligned}
 R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] &= 5n[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]^2 \\
 &= 5n[\alpha^2 x_1^2(n) + \beta^2 x_2^2(n) + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n)] \\
 &= \alpha^2[5n x_1^2(n)] + \beta^2[5n x_2^2(n)] + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n) \\
 &= \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)] + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n)
 \end{aligned}$$

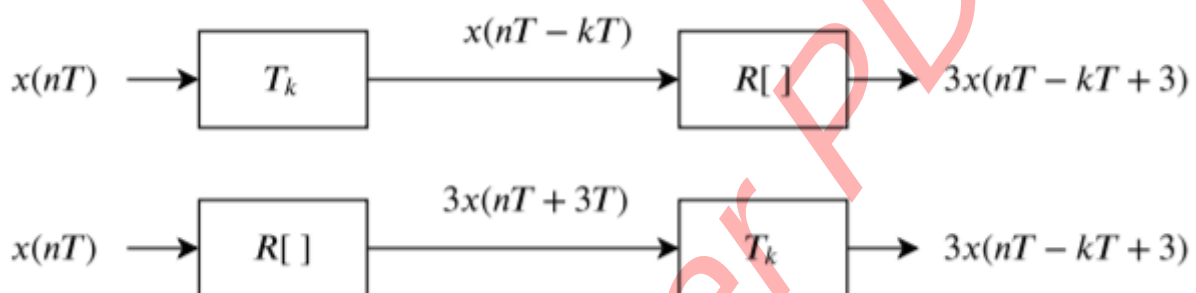
Se evidencia que:

$$R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] \neq \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]$$

Y por lo tanto se concluye que el sistema **no es lineal**

e.  $R[x(nT)] = 3x(nT + 3T)$  ✓

### 1. Invariancia



Se observa que el sistema **es invariante en el tiempo**

### 2. Causalidad

$$\begin{cases} R[x_1(k)] = 3x_1(k + 3) \\ R[x_2(k)] = 3x_2(k + 3) \end{cases}$$

Dado que  $x_1(n) \neq x_2(n)$  para  $n > k$ , entonces  $R[x_1(k)] \neq R[x_1(k)]$ , y por lo tanto el sistema **no es causal**

### 3. Linealidad

$$\begin{aligned}
 R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] &= 3[\alpha x_1(n + 3) + \beta x_2(n + 3)] \\
 &= \alpha 3x_1(n + 3) + \beta 3x_2(n + 3) \\
 &= \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]
 \end{aligned}$$

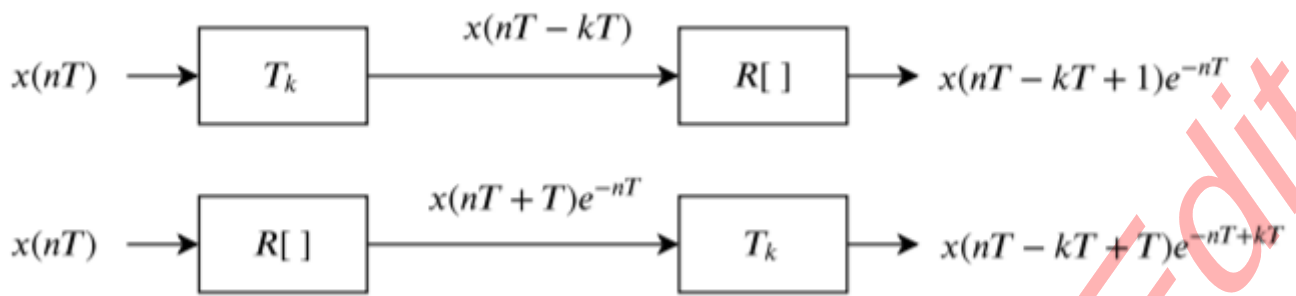
Se evidencia que:

$$R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]$$

Y por lo tanto se concluye que el sistema **es lineal**

i.  $R[x(nT)] = x(n + T)e^{-nT}$  ✓

### 1. Invariancia



Se observa que el sistema **es invariante en el tiempo**

## 2. Causalidad

$$\begin{cases} R[x_1(k)] = x_1(k+1)e^{-k} \\ R[x_1(k)] = x_2(k+1)e^{-k} \end{cases}$$

Dado que  $x_1(n) \neq x_2(n)$  para  $n > k$ , entonces  $R[x_1(k)] \neq R[x_2(k)]$ , y por lo tanto el sistema **no es causal**

## 3. Linealidad

$$\begin{aligned} R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] &= [\alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n+1)]e^{-n} \\ &= \alpha x_1(n+1)e^{-n} + \beta x_2(n+1)e^{-n} \\ &= \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)] \end{aligned}$$

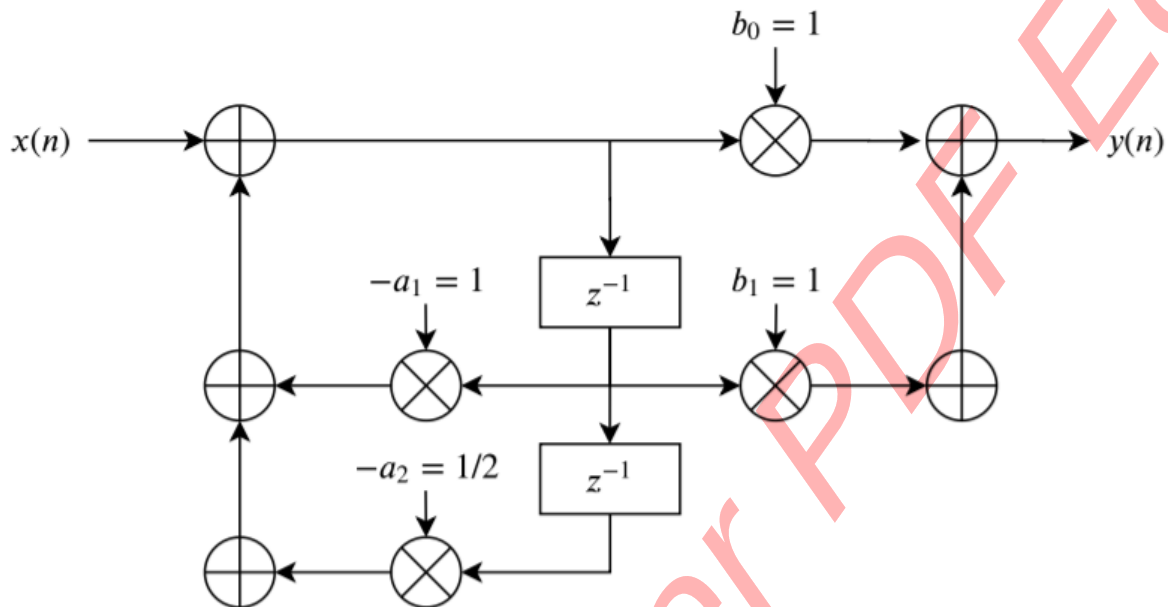
Se evidencia que: ?

$$R[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha R[x_1(n)] + \beta R[x_2(n)]$$

## Problema 2

b

Reescribo el diagrama del sistema de forma que se adapte al sistema descrito por la expresión:



de forma que se adapte al sistema descrito por la expresión:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^2 a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^1 b_k x(n-k)$$

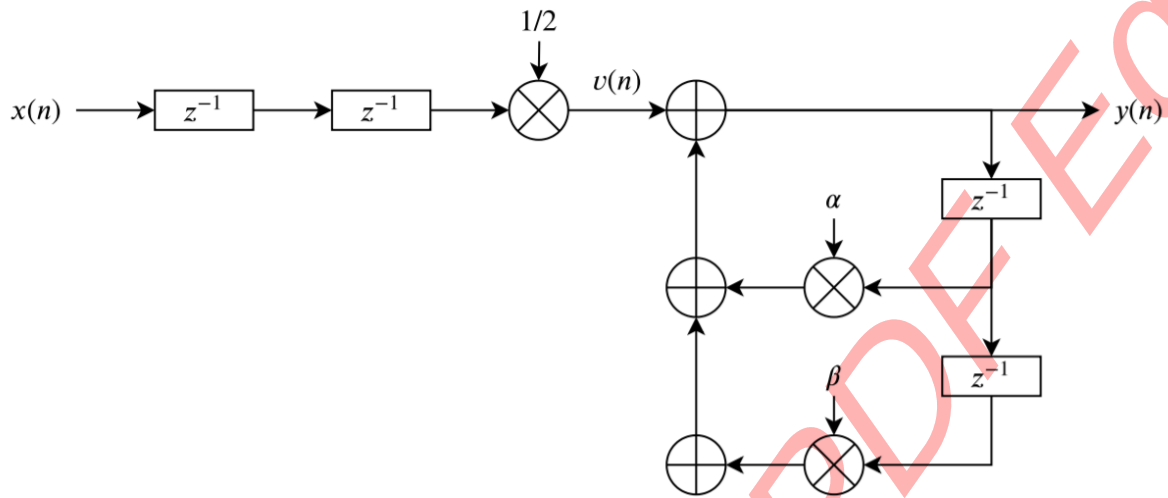
Desarrollado la sumatoria y remplazando los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ , se obtiene la ecuación en diferencias:

$$y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

Bien pero como llegaron ?????

## Problema 9

Reescribo el diagrama del sistema



tal que quede definido por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} y(n) = \alpha y(n-1) + \beta y(n-2) + v(n) \\ v(n) = \frac{1}{2}x(n-2) \end{cases}$$

Resultando la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema:

$$y(n) - \alpha y(n-1) - \beta y(n-2) = \frac{1}{2}x(n-2) \quad \checkmark$$

Se implementó un script en Python para calcular y graficar la respuesta al impulso para 3 combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$

a.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/8 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} \alpha = 5/4 \\ \beta = -25/32 \end{cases}$$

In [4]:

```
%matplotlib inline
from scipy import signal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
matplotlib.rcParams['text.usetex'] = True

fig = plt.figure(figsize=(15,5))

# define finite impulse up to n=30
x = signal.unit_impulse(30)
y = np.zeros(len(x))
alpha = 1
beta = -1/2
for i in range(0, len(x)):
    if i - 1 < 0:
        y_1 = 0
    else:
        y_1 = y[i - 1]

    if i - 2 < 0:
        y_2 = 0
        x_2 = 0
    else:
        y_2 = y[i-2]
        x_2 = x[i-2]

    y[i] = alpha*y_1 + beta*y_2 + 0.5*x_2

plt.plot(y, label=r'$\alpha = 1$ \& $\beta = -1/2$')

y = np.zeros(len(x))
alpha = 1/2
beta = -1/8
for i in range(0, len(x)):
    if i - 1 < 0:
        y_1 = 0
    else:
        y_1 = y[i - 1]

    if i - 2 < 0:
        y_2 = 0
        x_2 = 0
    else:
        y_2 = y[i-2]
        x_2 = x[i-2]

    y[i] = alpha*y_1 + beta*y_2 + 0.5*x_2

plt.plot(y, label=r'$\alpha = 1/2$ \& $\beta = -1/8$')

y = np.zeros(len(x))
alpha = 5/4
beta = -25/32
for i in range(0, len(x)):
    if i - 1 < 0:
        y_1 = 0
    else:
```

```

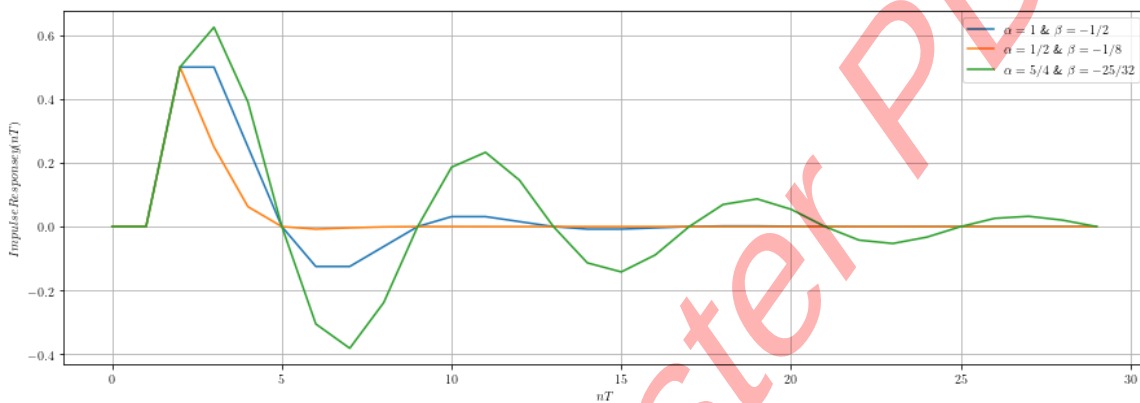
y_1 = y[i - 1]

if i - 2 < 0:
    y_2 = 0
    x_2 = 0
else:
    y_2 = y[i-2]
    x_2 = x[i-2]

y[i] = alpha*y_1 + beta*y_2 + 0.5*x_2

plt.plot(y, label=r'$\alpha = 5/4$ \& $\beta = -25/32$')
plt.legend()
plt.ylabel(r'$Impulse Response y(nT)$')
plt.xlabel(r'$nT$')
plt.grid('minor')
plt.show()

```



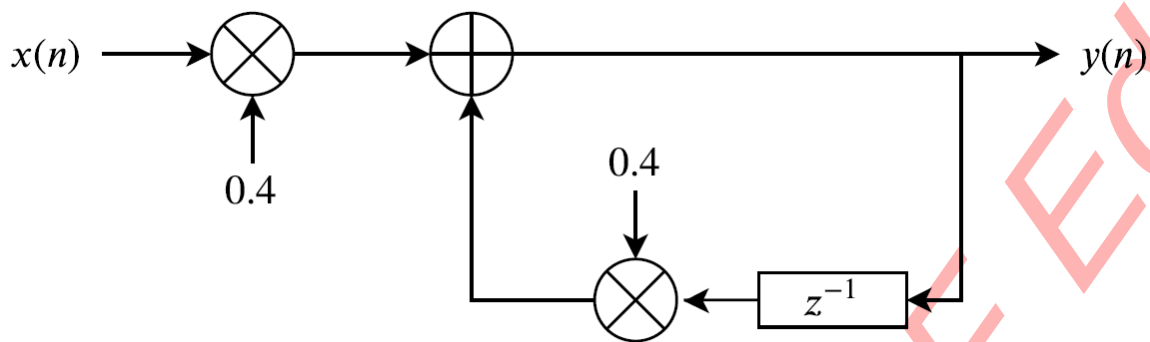
Se observa que la frecuencia de oscilacion de la respuesta al impulso graficada (para los 3 casos) es aproximadamente:

$$f_{osc} = \frac{2}{17T}$$

$$T_{osc} = (17/2)T \approx 8T$$

Puede ser fraccionario?

## Problema 11



La ecuación en diferencias que caracteriza al sistema de la figura es

$$y(nT) = 0.4x(nT) + 0.4y(nT - T)$$

**a.**

Sea la señal de entrada  $x(nT)$  una señal senoidal, tal que:

$$x(nT) = \begin{cases} \sin(\omega nT) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Escribo  $\sin(n\omega T)$  en su forma exponencial compleja:

$$\sin(\omega nT) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT})$$

Si aplico la transformación del sistema  $R[\ ]$  y desarrollo (considerando sistema lineal), se obtiene:

$$\begin{aligned} y(nT) &= R[x(nT)] \\ &= R\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT})\right] \\ &= \frac{1}{2j}R[e^{j\omega nT}] - \frac{1}{2j}R[e^{-j\omega nT}] \end{aligned}$$

Definiendo  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ ,  $y_1(n)$  e  $y_2(n)$  tal que:

$$\begin{cases} y_1(nT) = R[x_1(nT)] = R[e^{j\omega nT}] \\ y_2(nT) = R[x_2(nT)] = R[e^{-j\omega nT}] \end{cases}$$

Entonces podemos reescribir la expresión de  $y(nT)$ :

$$y(nT) = \frac{1}{2j}y_1(nT) - \frac{1}{2j}y_2(nT)$$

Donde  $y_1(n)$  es la salida del sistema cuando se lo excita con la entrada  $x_1(n)$ . Es decir, es el resultado de la convolución de  $x_1(n)$  y la respuesta impulsiva del sistema  $h(n)$ . La expresión de la respuesta impulsiva del sistema puede hallarse utilizando la Transformada  $Z$ .

Transformo la ecuación en diferencias que caracteriza el sistema, y hallo  $H(z)$

$$Y(z) = 0.4X(z) + 0.4z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)(1 - 0.4z^{-1}) = 0.4X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.4 \frac{z}{z - 0.4}$$



Antitransformo para hallar  $h(n)$

$$h(n) = 0.4(0.4)^n u(n)$$

Si desarrollo la convolución de  $x_1(nT)$  y  $h(nT)$  obtengo

$$\begin{aligned} y_1(nT) &= \sum_{k=0}^n e^{j\omega T(n-k)} 0.4(0.4)^k u(kT) \\ &= e^{j\omega nT} \sum_{k=0}^n (0.4e^{-j\omega T})^k \\ y_1(nT) &= \frac{0.4^n - e^{j\omega nT}}{0.4e^{-j\omega T} - 1} \end{aligned}$$

Para regimen permanente, hallo el limite de la respuesta  $y_1(nT)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$

$$\tilde{y}_1(nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1(nT) = \frac{e^{j\omega nT}}{1 - 0.4e^{-j\omega T}}$$

La respuesta  $\tilde{y}_1(nT)$  se puede escribir como el producto del módulo de la transferencia, por  $e^{j\theta(\omega)}$  por  $x_1(nT) = e^{j\omega nT}$ :

$$\tilde{y}_1(nT) = \left[ |H_1(\omega)| e^{j\theta_1(\omega)} \right] e^{j\omega nT}$$

Donde la transferencia en modulo y fase estan dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} |H_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0.4)^2 - 0.8\cos(\omega T)}} \\ \theta_1(\omega) = \arctan \frac{0.4\sin(\omega T)}{1-0.4\cos(\omega T)} \end{cases}$$

Dado que  $H_2(\omega) = H_1(-\omega)$ , y siendo que el módulo de la transferencia es una funcion par de  $\omega$ , entonces  $|H_2(\omega)| = |H_1(\omega)|$ . Y dado que la transferencia de la fase es una función impar de  $\omega$ , entonces  $\theta_2(\omega) = -\theta_1(\omega)$ . Por lo tanto:

$$\tilde{y}_2(nT) = \left[ |H_1(\omega)| e^{-j\theta_1(\omega)} \right] e^{-j\omega nT}$$

De esta forma, la expresión de  $\tilde{y}(nT)$  queda de la siguiente forma:

$$\tilde{y}(nT) = |H_1(\omega)| \left[ e^{j(\theta_1(\omega)+\omega nT)} - e^{-j(\theta_1(\omega)+\omega nT)} \right]$$

Finalmente, la respuesta en regimen permanente para una entrada de forma senoidal esta dada por la epresión:

$$\tilde{y}(nT) = |H_1(\omega)| \sin(\omega nT + \theta_1(\omega))$$

Se utilizó el siguiente script de Python para graficar la respuesta indicada

In [5]:

```
%matplotlib inline
from scipy import signal
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
import cmath
import math
matplotlib.rcParams['text.usetex'] = True

T = 1e-3
f = np.logspace(0,3,100)
w = [2*cmath.pi*fi for fi in f]

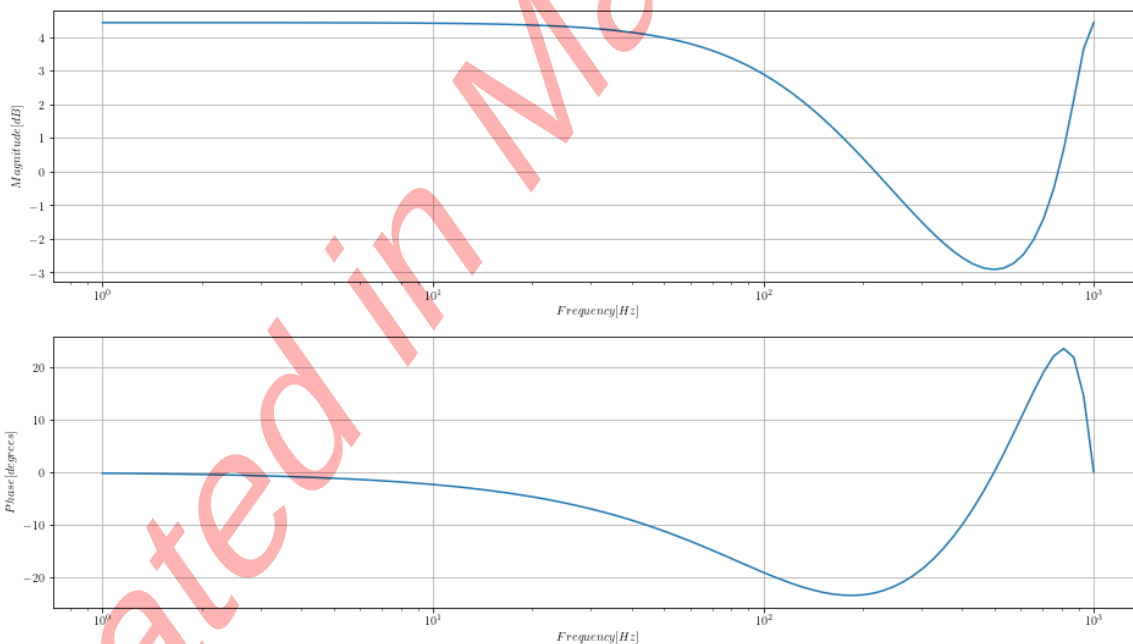
H = [1/(1-0.4*cmath.exp(-1j*wi*T)) for wi in w]
mag = [20*cmath.log10(abs(Hi)) for Hi in H]
phase = [cmath.phase(Hi) for Hi in H]

fig, ax = plt.subplots(2,1, figsize=(16,9))

ax[0].semilogx(f, np.real(mag))
ax[0].set_xlabel(r'$Frequency$ [Hz]$')
ax[0].set_ylabel(r'$Magnitude$ [dB]$')
ax[0].grid('minor')

ax[1].semilogx(f, [math.degrees(phase_i) for phase_i in phase])
ax[1].set_xlabel(r'$Frequency$ [Hz]$')
ax[1].set_ylabel(r'$Phase$ [degrees]$')
ax[1].grid('minor')

plt.savefig('ej_11a.pdf')
plt.show()
```



**b.**

Para hallar la frecuencia en la cual la ganancia de la transferencia es -3dB respecto a la ganancia en  $f = 0$  se utilizó el siguiente script de Python

In [6]:

```
import numpy as np
import cmath
import math

T = 1e-3
f = np.logspace(0,3,100)
w = [2*cmath.pi*fi for fi in f]

H = [1/(1-0.4*cmath.exp(-1j*wi*T)) for wi in w]
mag = [20*cmath.log10(abs(Hi)) for Hi in H]
phase = [cmath.phase(Hi) for Hi in H]

indexes = [i for i, value in enumerate(mag) if np.real(value) < np.real(mag[0])-3]
f0 = int(f[indexes[0]])

print('-3dB Frequency: ' + str(f0) + ' Hz')
```

-3dB Frequency: 162 Hz

157Hz Porque no hicieron directamente el calculo analitico ?

