

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

TEORIA DE CIRCUITOS

TRABAJO PRÁCTICO DE LABORATORIO N°3

GIC, Gyrator, Amplificador de Instrumentación y Ecualizador

Grupo 6:

Paulo NAVARRO 57.775

Benjamín Carlos LIN 57.242

Nicolas Lorenzo MESTANZA 57.521

Facundo Nicolas MOLINA 60.526

German Carlos BERTACHINI 58.750

Responsables de la cátedra:

Daniel Andres JACOBY

Carlos BELAUSTEGUI GOITIA

Presentado:

Corrección:

Contents

1 Filtro con GIC

1.1 Introducción al GIC

Generalized Impedance Converter (GIC) son, como lo nombre lo indica, convertidores de impedancia, es decir para algunos filtros se podrá remplazar alguno de los componentes con un GIC. Por ejemplo cuando el uso de la bobina con inductancias de valor elevado puede involucrar agregar a un circuito un componente de gran tamaño como resistencia parásita indeseado, para ello, en rango de frecuencias donde se permite utilizar amplificadores operacionales, se utilizan los GIC.

Los GIC tienen la siguiente configuración:

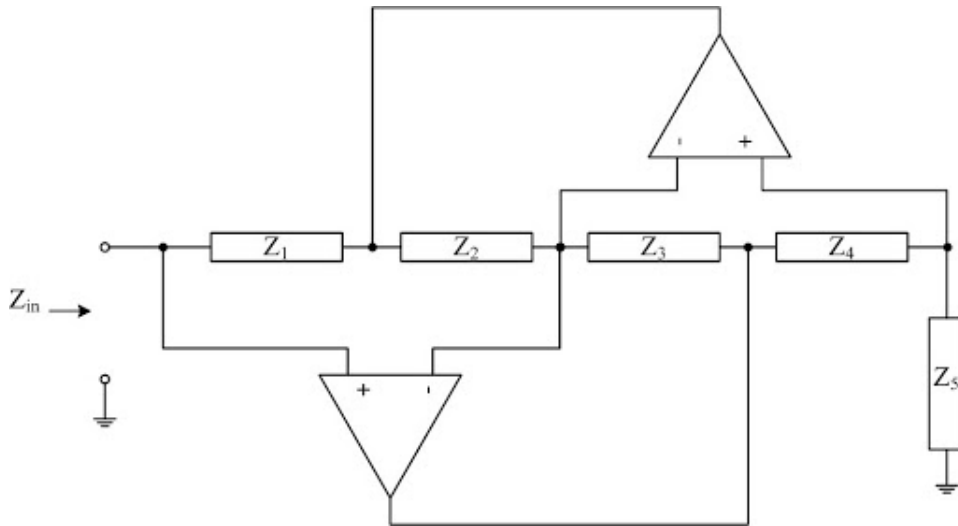


Figure 1: Generalized Impedance Converter Genérico

Considerando los amplificadores ideales, o sea con $A_{vol} \rightarrow \infty$ y $Z_{Ain} \rightarrow \infty$ como no hay corriente entre V^+ V^- para ninguno de los operacionales, hay sólo tres corrientes, puesto que la corriente de Z_2 es la misma que la de Z_3 , y la de Z_4 que la de Z_5 obtenemos que:

$$I_4 = \frac{V_{in}}{Z_5} \quad I_2 = \frac{I_1 Z_1}{Z_2} \quad I_2 = \frac{I_4 Z_4}{Z_3}$$

$$\therefore I_4 = I_1 \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$$

Por lo que la impedancia de entrada del GIC sera:

$$Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

De esta manera es posible simular cualquier componente, sea resistivo capacitivo o inductivo mediante la selección adecuada de los componentes. Luego utilizando el GIC es posible obtener filtros de segundo orden como el notch, pasa-todo y pasa-banda minimizando el espacio utilizado.

1.2 Diseño de un Filtro Pasa-Todo

Se implemento el siguiente circuito:

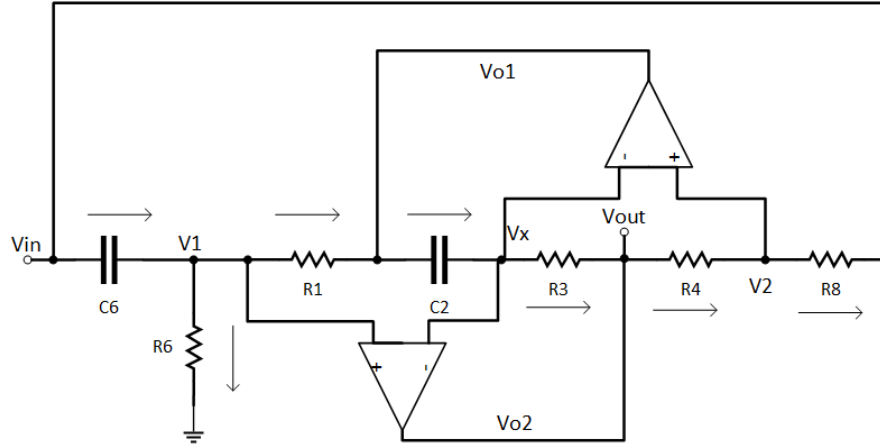


Figure 2: Circuito de un Filtro con GIC

1.2.1 Respuesta en frecuencia

Considerando que los amplificadores operacionales son ideales obtenemos que:

$$\begin{aligned} V_{o1} &= V_1 - R_1 I_1 & V_{o2} &= V_x - R_3 I_3 \\ V_{o1} &= V_x + \frac{1}{sC_2} I_2 & V_{o2} &= V_2 + R_4 I_4 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\therefore I_4 = I_1 \frac{sC_2 R_3 R_1}{R_4} \quad (2)$$

Además como $A_{vol} \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_x = V_2 \\ I_1 &= I_{C6} - I_{R6} & I_{C6} &= (V_{in} - V_1)sC_6 & I_{R6} &= \frac{V_1}{R_6} \\ I_{R8} &= I_4 \end{aligned}$$

$$\therefore V_x = V_{in} \frac{s^2 C_2 C_6 R_1 R_3 R_6 R_8 + R_4 R_6}{sC_2 R_1 R_3 R_8 (sC_6 R_6 + 1) + R_4 R_6} \quad (3)$$

Luego reemplazando las ecuaciones (??) y (??) en (??) la función de transferencia quedará como:

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s^2 C_2 C_6 R_1 R_3 R_6 R_8 - sC_2 R_1 R_3 R_4 + R_4 R_6}{s^2 C_2 C_6 R_1 R_3 R_6 R_8 + sC_2 R_1 R_3 R_8 + R_4 R_6} \quad (4)$$

Esta respuesta en frecuencia corresponde a un Pasa-Todo con:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_4}{C_2 C_6 R_1 R_3 R_8}} \quad (5)$$

$$Q_z = -R_6 \sqrt{\frac{C_6 R_8}{C_2 R_1 R_3 R_4}} \quad (6)$$

$$Q_p = R_6 \sqrt{\frac{C_6 R_4}{C_2 R_1 R_3 R_8}}$$

Se simplifica las ecuaciones si establecemos los valores de los componentes como la siguiente:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_3 = R_4 = R_8 = R \\ R_6 &= QR \\ C_2 &= C_6 = C \end{aligned}$$

Del cual modifica la transferencia como:

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s^2 C^2 R^2 - s \frac{CR}{Q} + 1}{s^2 C^2 R^2 + s \frac{CR}{Q} + 1} \quad (7)$$

1.2.2 Funcionamiento de Resistencias

- Resistencia R_8 :

La función de esta resistencia es conectar la salida del GIC que le da un camino a la corriente y/o la suministra. Luego el efecto de esta resistencia en casos límites será:

$$\lim_{R_8 \rightarrow 0} H(s) = 1 - \frac{sC_2R_1R_3}{R_6}$$

En esta circunstancia se comporta como un filtro pasa altos, donde la impedancia del C_2 y C_6 se vuelve despreciable y a su vez circula mayor corriente en el GIC. Debido a esto aumenta la caída de tensión en los componentes resistivos del GIC, dando lugar a un incremento en la tensión de salida.

En caso de que R_8 tenga un valor muy elevado:

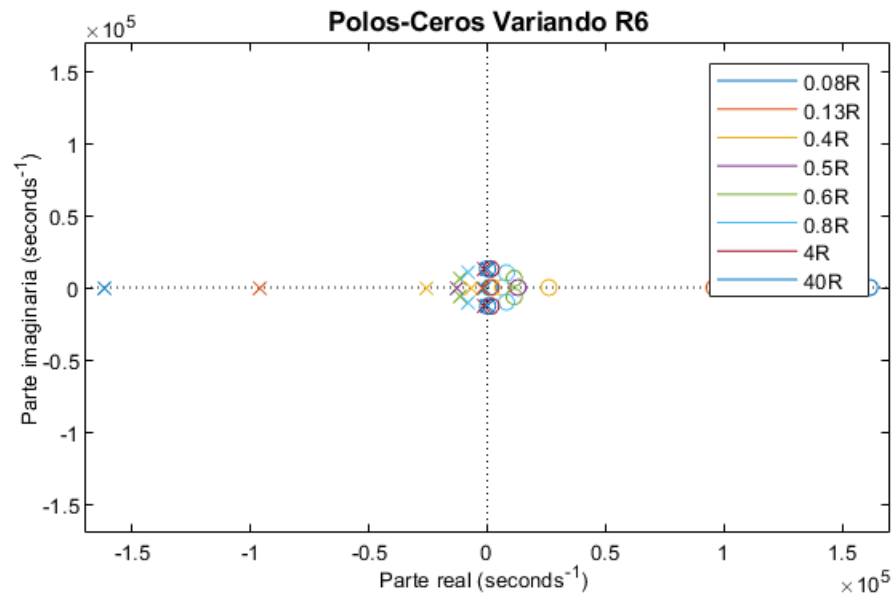
$$\lim_{R_8 \rightarrow \infty} H(s) = \frac{sC_6R_6}{sC_6R_6 + 1}$$

Es posible visualizar el circuito como abierto en la salida del GIC, es decir que no pasa corriente por ella. Es entonces que la tensión de salida $V_{out} = V_1$, que tiene configuración de un RC pasa altos.

Cabe mencionar que para los valores límite de R_8 , el filtro deja de ser de segundo orden, con lo que su presencia es crucial para obtener los resultados esperados a la hora de utilizar un GIC para un filtro pasa-todo.

- Resistencia R_6 :

Esta resistencia es de suma importancia ya que presenta un rol importante en la selección del factor de calidad Q , es decir los polos y los ceros del circuito. Manteniendo las otras resistencias fijas con valor R y los capacitores de valor C de modo que la única resistencia que varía es R_6 obtenemos el siguiente gráfico del polo y ceros:



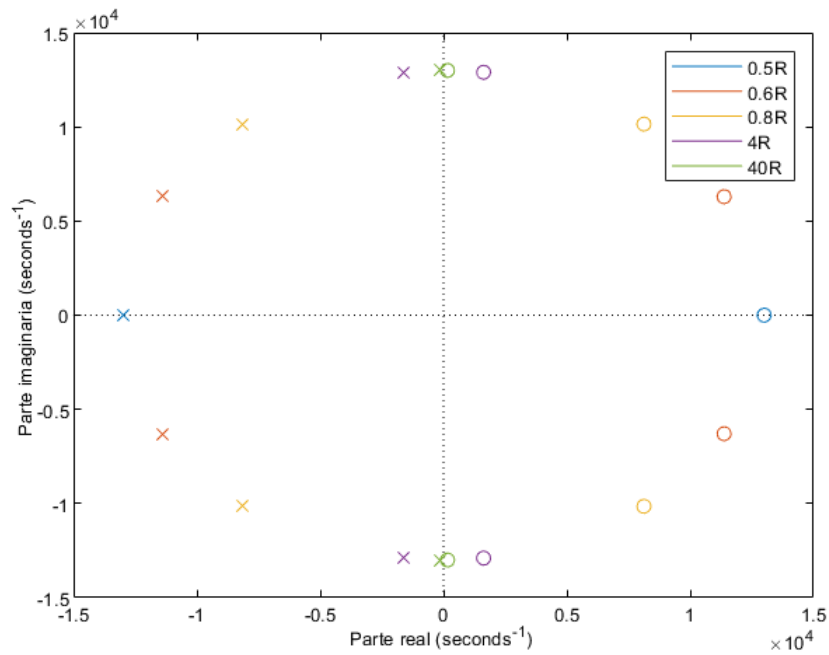


Figure 3: Distribución de Polos y Ceros Variando R6

Se nota entonces que los polos y ceros son opuestos para cualquier valor de R_6 . Además para valores mayores de Q , o sea valores mayores de $R_6 = QR$, se acercan al eje imaginario sobre la circunferencia de radio ω_0 . Por lo que podemos apreciar que:

$$\lim_{R_8 \rightarrow \infty} H(s) = \frac{s^2 C_2 C_6 R_1 R_3 R_8 + R_4}{s^2 C_2 C_6 R_1 R_3 R_8 + R_4} = 1$$

Cuya respuesta nos indica que al desconectar R_6 el circuito deja pasar toda frecuencia sin cambio de fase, en esencia un cable.

En contra parte, valores pequeños de Q dejan de pertenecer a la circunferencia ω_0 , y se mueven en el eje real. Es claro si tomamos valores pequeños de R_6 tenemos:

$$\lim_{R_8 \rightarrow 0} H(s) = -\frac{R_4}{R_8}$$

Es equivalente entonces a un circuito de amplificación inversa con realimentación R_4 y R_8 en serie a la entrada.

1.2.3 Análisis de Sensibilidad

Dado que en las experiencias se desea el menor error posible, se debe tomar en cuenta las tolerancias y los valores comerciales que restringen la elección de parámetros del circuito. Para ello se realiza un análisis de las sensibilidades de los distintos parámetros con respecto a cada componente, esto indicara el peso que tendrá cada componente en el circuito.

La sensibilidad se calcula como:

$$S_x^y = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

Donde ' x ' es el componente e ' y ' la sensibilidad de un parámetro, que en este caso serán ω_0 , Q_z y Q_p dados por las ecuaciones ?? y ??. Entonces para cada uno de los componentes su sensibilidad sera:

y/x	R_1	C_2	R_3	R_4	R_8	C_6	R_6
ω_0	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	0
Q_z	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1
Q_p	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	1

Table 1: Sensibilidad de los componentes

Cabe notar que se verifica la propiedad de suma:

$$\sum_n R_n^y - \sum_k C_k^y = 0$$

De acuerdo con las sensibilidades obtenidas, se sabe que las variaciones en $R6$ no tiene efecto en ω_0 , sin embargo presentan un rol importante para la selección de Q_z y Q_p dado que una modificación de esta afecta con una relación 1:1, o sea si se aumenta un porcentaje la resistencia se incrementa el valor de los Q a la misma razón. Por otro lado, los otros componentes tienen una relación de modulo $\frac{1}{2} : 1$ para ω_0 , Q_z y Q_p . Pero dependiendo del signo de sensibilidad la variación positiva de una no necesariamente significa la elevación de las variables, por ejemplo en ω_0 el aumento del valor de $R4$ causa que la variable se incremente, no obstante un aumento en el valor del resto de los componentes provoca un decremento de éste parámetro.

1.2.4 Impedancia del Circuito

- Impedancia de Entrada

La impedancia de entrada de un circuito esta definida como:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$

Como se analiza el amplificador en condiciones ideales, su impedancia de entrada es infinita. Por lo que podemos obtener la corriente de entrada como:

$$I_{in} = I_{C6} + I_{R8}$$

Por lo tanto desde las relaciones de corrientes obtenidas en el ítem ?? tenemos que:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{s^2 C2 C6 R1 R3 R6 R8 + s C2 R1 R3 R8 + R4 R6}{s^2 C2 C6 R1 R3 R8 + s C2 R1 R3} \quad (8)$$

Observando entonces que si se excita el circuito con tensión continua o frecuencias bajas su impedancia es muy alta. Este fenómeno es debido a los capacitores $C2$ y $C6$ que a estas frecuencias son componentes de alta impedancias, por lo que es escasa la corriente entrante al circuito.

- Impedancia de Salida

Como se espera trabajar en condiciones próximo al ideal, el amplificador operacional presenta muy baja impedancia de salida, por ende para nuestro circuito se espera tener una muy baja impedancia de salida aproximando el 0.

1.2.5 Implementación del Circuito

Los filtros pasa-todo son utilizados para corregir la fase de una frecuencia en particular, de tal manera que modifica lo menos posible las demás frecuencias. Para ello, se selecciona la frecuencia de corte de los polos y ceros, de modo que a la frecuencia deseada ocurra un desfase de 180° .

Para este filtro en particular se pide que:

ω_0 [rad/s]	Q	Ganancia [dB]
13 000	4	0

Por lo que desde la función de transferencia dada por la ecuación ?? se sabe que:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Entonces obtenemos la relación que deben tener los componentes del circuito como:

$$RC = 76.92 \mu s$$

$$R6 = 4R$$

Se selecciono entonces una resistencia $R = 2.2 k\Omega$ para realizar un análisis experimental, por lo que los componentes a utilizar serán:

	Valor ideal	Valor aplicado	Error (%)
R_1	$2.2k\Omega$	$2.2k\Omega$	0
C_2	$34.965nF$	$34.812nF$	0.44
R_3	$2.2k\Omega$	$2.2k\Omega$	0
R_4	$2.2k\Omega$	$2.2k\Omega$	0
R_8	$2.2k\Omega$	$2.2k\Omega$	0
C_6	$34.965nF$	$34.812nF$	0.44
R_6	$8.8k\Omega$	$8.9k\Omega$	1.12

Table 2: Valores de los Componentes Ideales y Aplicados

Luego si experimentamos el circuito se notara en teoría:

$\omega_0[\text{rad/s}]$	Q
13 057	4.05

1.2.6 Elección de Amplificador Operacional

La selección de los amplificadores operacionales dependen del circuito a implementar, ya que son los que determinan que características son las mas importantes para el caso.

Para el filtro a aplicar se busca un gran GBW y A_{vol} para el $A_{vol}(j\omega)$ no baje por los polos dominantes que actúan a frecuencias altas, de esta manera el integrado puede actuar cercano la ideal. En particular los filtros pasa-todos, que se utiliza para la corrección de fase, es importante que tenga ganancia de $0dB$ para toda frecuencia, por ello se debe mantener el mayor rango posible de frecuencia sin distorsiones.

Otra de las características a considerar es el slew-rate, que al estar operando a altas frecuencias un alto valor de ella evita la posibilidad de que se vea limitada la tensión máxima a frecuencias menores menor al del polo.

Por ultimo, la impedancia de entrada del amplificador operacional debe ser muy alta en relación con los otros componentes del circuito, es por esta que impide que circule corriente por las entradas del amplificador haciendo valida las ecuaciones realizadas anteriormente.

Por lo tanto se tuvo en cuenta los opamps $LM833$ y $TL082$ las cuales cumplen con un considerable GBW, slew-rate y impedancia de entrada. Se selecciono entonces el $TL082$, que si bien tiene menor GBW que el $LM833$, a frecuencias que se utiliza el circuito $4MHz$ es suficiente por lo que luego se aprecio mas el slew-rate que es $13\frac{V}{\mu s}$ mayor al del $LM833$.

1.3 Análisis de Resultados

1.3.1 Respuesta en Frecuencia

Realizando un análisis en frecuencia, superponiendo resultados teóricos, simulados y experimental se obtuvo el siguiente gráfico:

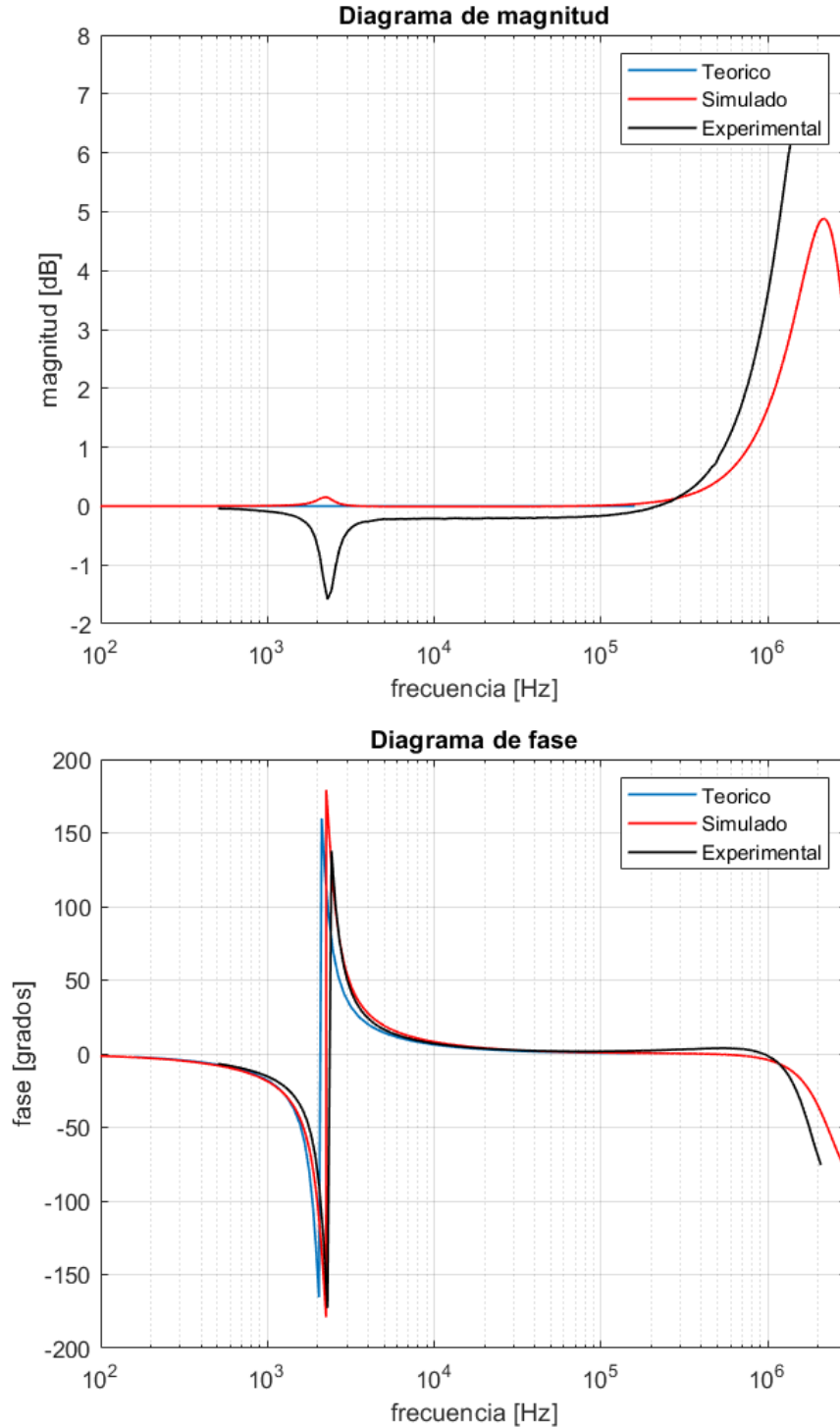


Figure 4: Respuesta en Frecuencia del Circuito

De esta notamos que en la frecuencia de corte $f_c = \frac{1}{2\pi}\omega_0 \approx 2.07kHz$ ocurre un cambio de fase de -180° , si bien experimentalmente se obtuvo que su frecuencia de corte fue en $2.30kHz$. Esta leve diferencia es atribuido a las tolerancias de los componentes utilizados, resistencias de 5% y capacitores de 20%. Además, la caída notoria en la frecuencia de corte es debido a que la transferencia presenta ceros y polos de orden 2 a una misma frecuencia, y ambos factores de calidad $Q > 1/\sqrt{2}$, es decir que son suficientemente grandes para provocar sobre-picos o sobre-caídas. El valor de Q_p determinaría la magnitud de un sobre-pico en casos donde no hubiera ceros, mientras que el valor de Q_z provocaría una sobre-caída. En otras palabras, si los valores del Q_p y Q_z son distintos en alguna frecuencia provocaría una subida o una caída dependiendo de sus valores. En nuestro caso, dado que se observa una caída, se concluye que los valores de Q_z y Q_p fue alterado por las dispersiones de los componentes, llevando que el valor de Q_z sea mayor al de Q_p en esta frecuencia. Estos fenomenos son observables el en la figura ??.

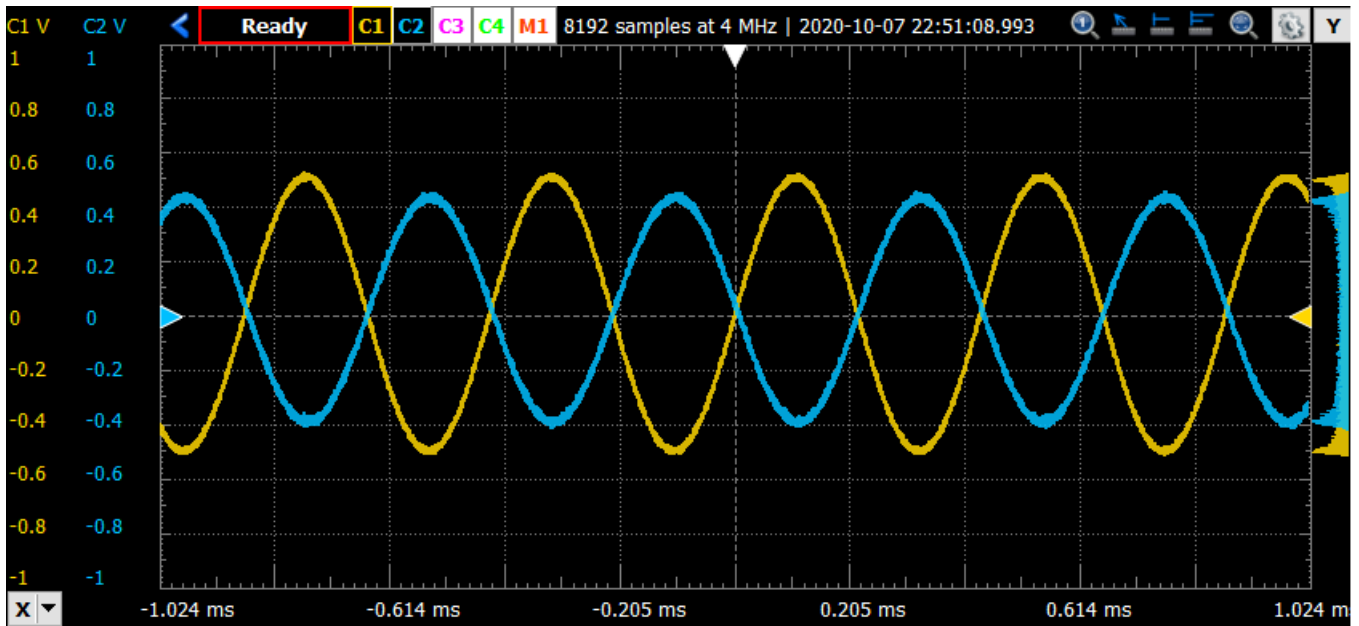


Figure 5: Respuesta en Frecuencia de 2.29kHz

Por otro lado, en altas frecuencias, mayores a 200kHz , se observa un sobre-pico ya que a partir de estas frecuencias comienzan a afectar los efectos del polo del operacional, que no se tuvieron en cuenta en el análisis teórico realizado anteriormente. A su vez, la diferencia en el sobre-pico es influenciado por las tolerancias de los componentes y las puntas de osciloscopio colocados al circuito, que inyectan una resistencia y capacitancia parásita al circuito, modificando en cierta medida la ubicación y la magnitud.

1.3.2 Impedancia de Entrada

Para la medición de esta característica del circuito se colocó una resistencia en serie a la entrada del circuito, luego calculando la corriente que circula por la misma se tiene que la impedancia del circuito es $Z_{in} = \frac{V_{carga}}{i_{R1}}$. Para la selección la resistencia de testeo se utilizó uno cercano a los valores esperados de la impedancia de entrada, ya que si se pusiese una resistencia muy chica, la diferencia entre las tensiones medidas sobre sus bornes sería muy chica aumentando incertidumbre, y si se colocase una resistencia muy grande, la tensión que caería sería mucho mayor a la que caería en el circuito, haciendo que la tensión luego de la resistencia sea muy chica haciendo que sea más vulnerable al ruido.

Luego la impedancia de entrada al circuito dado resulta en:

Observamos entonces que la impedancia de entrada a bajas frecuencias es muy alta debido a los capacitores del circuito. Luego de una caída por el cero, el módulo de la impedancia queda estable en las cercanías de $10\text{k}\Omega$ hasta que hacen efecto los polos dominantes de los operacionales en cercanía a 1MHz .

Cabe notar que a altas frecuencias porque sus tensiones de salida son bajas, el ruido es comparable con la señal de entrada, lo que logra inyectarse en las mediciones dando lugar a un grado de incertidumbre apreciable.

1.3.3 Impedancia de Salida

Para la medición de esta, se realizó la medición de la salida del circuito en el vacío y luego con una carga la salida. Como la corriente de salida debe ser la misma en el vacío como en el de carga obtenemos que la impedancia de salida es:

$$Z_{out} = R_{test} \frac{V_{test}}{V_{vacio} - V_{test}}$$

Luego su impedancia de salida resultó:

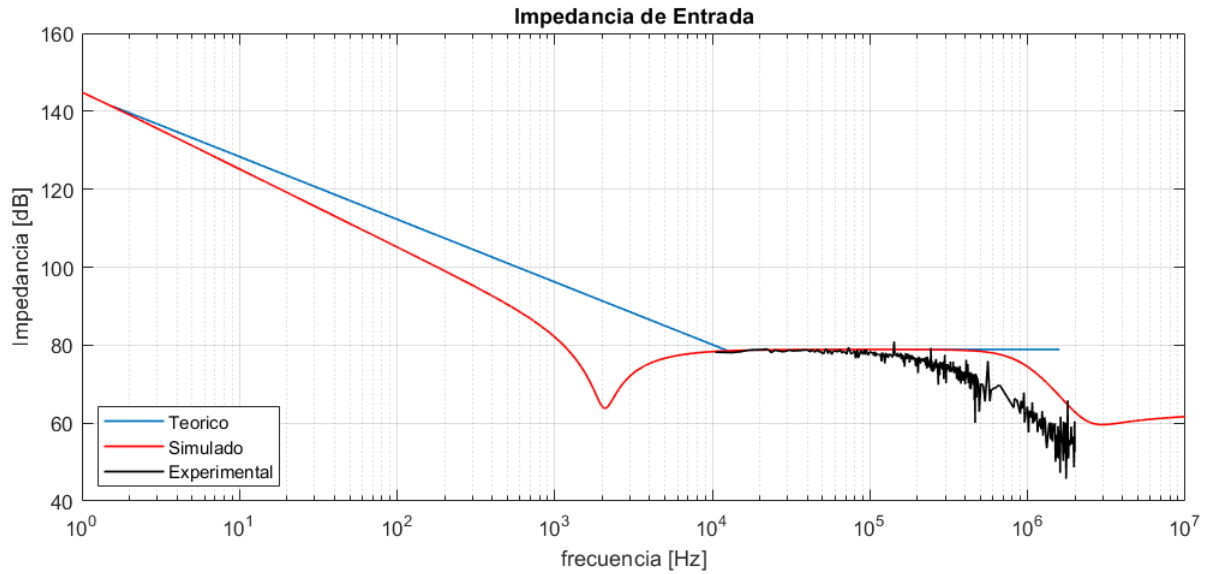


Figure 6: Impedancia de Entrada del Circuito

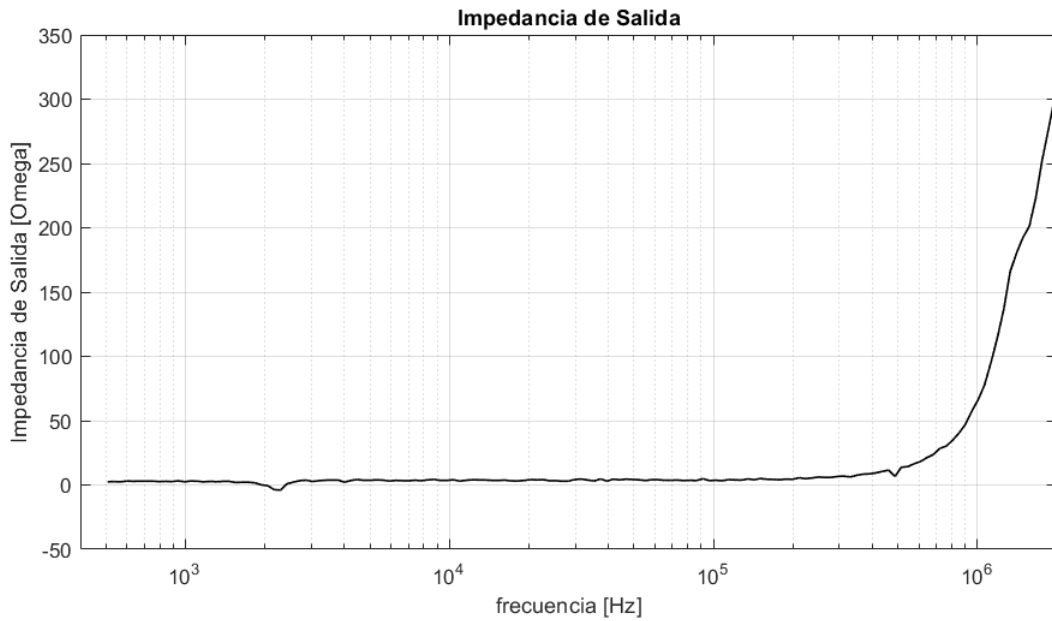


Figure 7: Impedancia de Salida del Circuito

Este resultado fue acorde a lo esperado, teniendo su impedancia para frecuencias menores a 1MHz aproximadamente iguales a 0. Se nota que para frecuencias mayores a 1MHz comienza a tomar otros valores, esto es debido a que los efectos de los polos en el amplificador están tomando efecto en el circuito causando que los amplificadores ya no actúen de forma ideal.

1.4 Respuesta al Escalón

La transferencia del circuito $H(s)$ con $Q_p > \frac{1}{2}$ tiene característica de una oscilación subamortiguado, es decir que la estabilización temporal sufre una oscilación hasta que se pueda estabilizar.

Este efecto es visible excitando el circuito con un escalón del cual la salida sera:

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

Por lo que la respuesta al escalón es:

$$Y(s) = \frac{s^2 C^2 R^2 - s \frac{CR}{Q} + 1}{s^2 C^2 R^2 + s \frac{CR}{Q} + 1} \frac{1}{s}$$

Luego, obtenemos que:

$$y(t) = \frac{2CR(e^{t(-\frac{\sqrt{-C^2(4Q^2-1)R^2}}{(2C^2QR^2)} - \frac{1}{(2CQR)})} - e^{t(\frac{\sqrt{-C^2(4Q^2-1)R^2}}{(2C^2QR^2)} - \frac{1}{(2CQR)})})}{\sqrt{-C^2(4Q^2-1)R^2}} + 1$$

Donde obtenemos que $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ y $\alpha = \frac{1}{2CQR}$, luego $\omega_d = 12.9 \frac{rad}{s}$ y $\tau = \frac{1}{\alpha} = 615 \mu s$.
Entonces la respuesta al escalón sera:

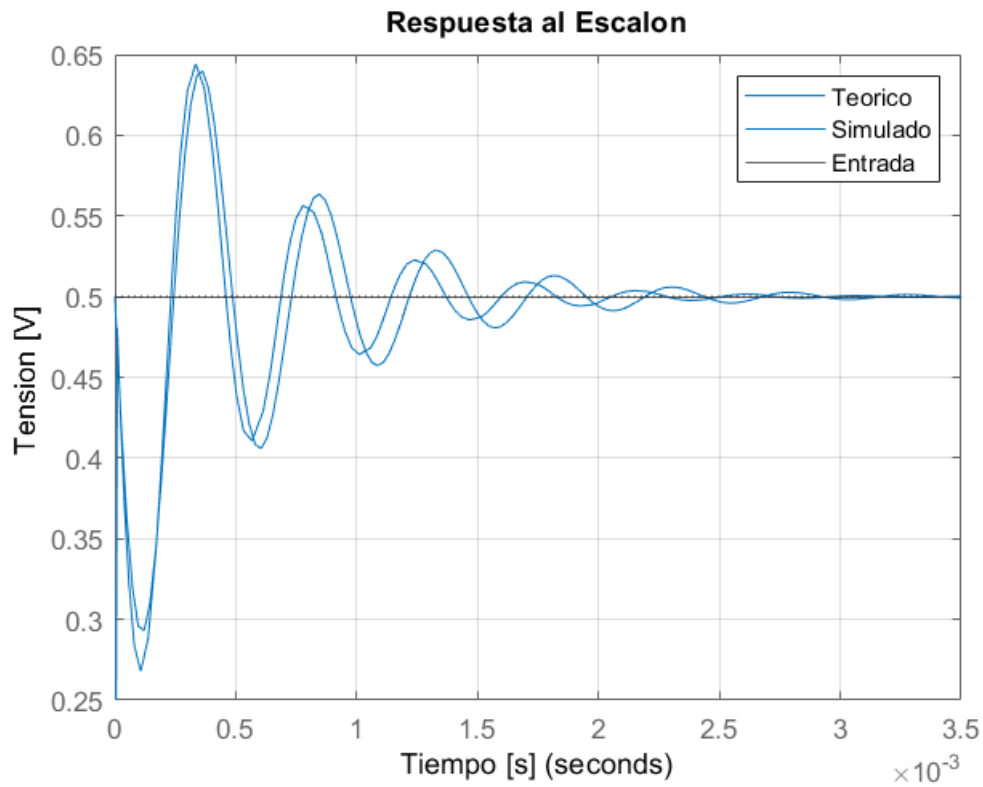


Figure 8: Respuesta al Escalón Teórico y Simulado

Del cual obtuvimos experimentalmente lo siguiente:

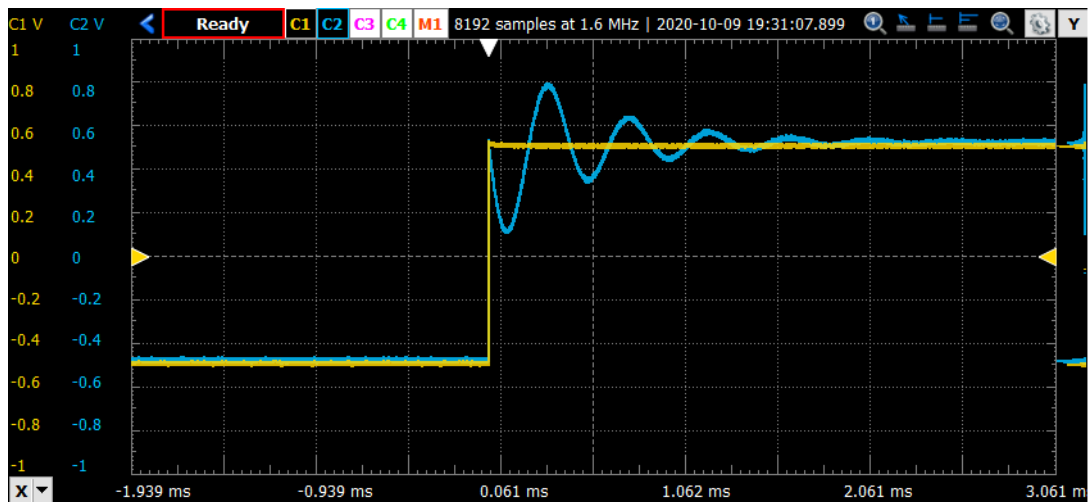


Figure 9: Respuesta al Escalón Experimental

Se observa que las oscilaciones empiezan con pendiente negativa, lo que indica defasaje de 180 grados. Esto se

debe al desfase introduce el filtro a las componentes de la cuadrada de frecuencia mayor a la de corte. Como las componentes de la cuadrada que actúan primero son las de mayor frecuencia, éstas se ven desfasadas 180 grados.

Por otro lado, se establece el circuito a partir del quito pseudoperiodo, es decir que tiene un tiempo de establecimiento de aproximadamente 2.06ms en el experimental mientras que en la simulación y el teorico se establece a tiempos mayores al rededor de los 2.15ms . Dado que existen resistencias parásitas dentro del circuito, es esperable esta mayor atenuación en la experiencia hecha.

Este tiempo de establecimiento es un problema para un filtro pasa-todo ya que a frecuencias con periodos menores a la misma los resultados obtenidos de la misma serán oscilantes en vez de la salida sea otra señal cuadrada. Por ejemplo para señales de frecuencia 1kHz o periodo 1ms , la tensión de salida resulta:

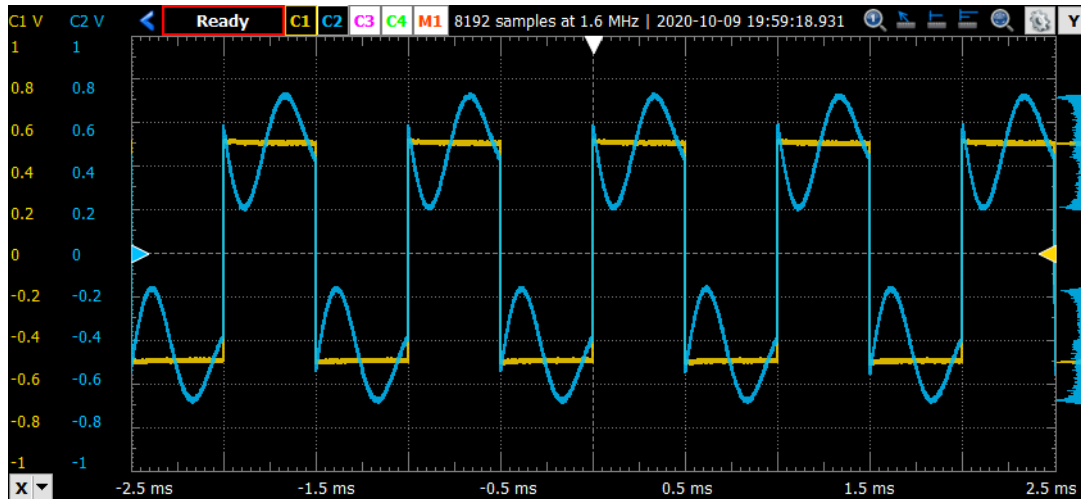


Figure 10: Respuesta al Escalon a 1kHz

1.5 Limitaciones del Circuito

Es importante tener en cuenta las características del amplificador operación a la hora de experimentar un circuito, es por ello que se deben saber los limites en la que podemos operar el circuito con funcionamiento normal.

1.5.1 Limitación por Tensión

Debido a que los operacionales se alimentaron con $V_{CC} = \pm 9\text{V}$, si se excita el circuito con $18V_{pp}$ la salida se satura. Como lo podemos notar en la siguiente figura ??.

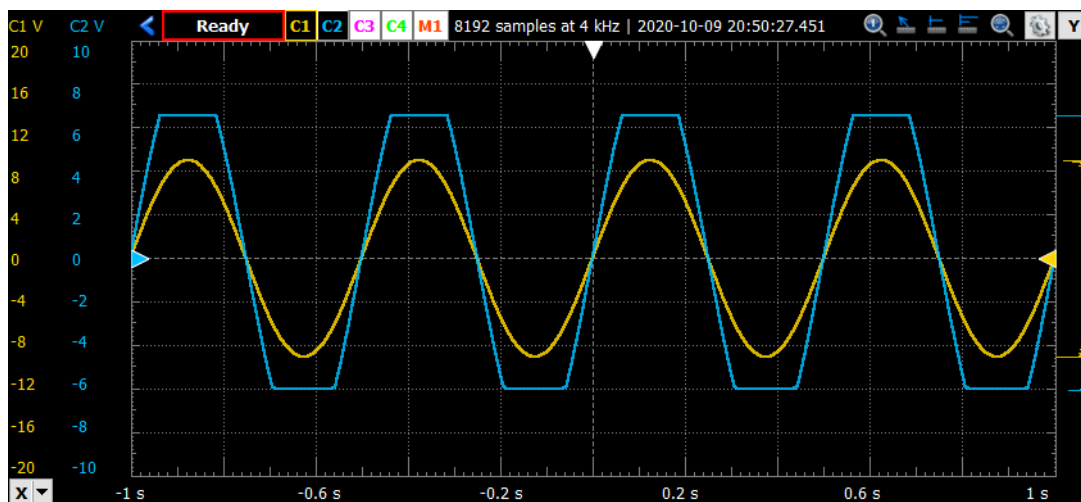


Figure 11: Limite por Tensión

Como se puede observar el circuito se satura a $12V_{pp}$, es decir que no permite que la tensión de entrada supere $12V_{pp}$, pues sino los resultados obtenidos no serán precisos.

1.5.2 Limitación por Frecuencia

El ancho de banda del operacional utilizado es de $4MHz$. Sin embargo, en las mediciones de respuesta en frecuencia se pone de manifiesto que el polo del operacional afecta el comportamiento del filtro mucho antes, como se observa en los gráficos de la figura ???. Por lo tanto, sólo puede asegurarse que el filtro siga el comportamiento calculado hasta los $200kHz$ donde luego de ello aparece el sobre-pico.

1.5.3 Limitación por Señal

En caso de utilizar el circuito con entrada no sinusoidales, es importante tener en cuenta el tiempo de establecimiento de la respuesta temporal, que es de $2.06ms$.

1.6 Conclusión

Con el uso de un GIC, se pudo implementar un pasa-todo, si bien con cierto grado de error debido a tolerancias y/o componentes parásitas, se obtuvo a grandes rázagos los resultados esperados hasta los $200kHz$, donde pasando esta frecuencia el operacional deja de tener carácter ideal. Es también importante remarcar la importancia de sensibilidad que tienen los componentes, es decir debemos tener en cuenta cuales son los componentes mas importantes a la hora de realizar una experiencia para tener resultados acorde a lo planeado, pues una variación de ciertos componentes puede afectar ampliamente los resultados obtenidos.

2 Introducción a Diseño de Filtros

3 Amplificador de Instrumentación

3.1 Amplificador de Instrumentación

4 Control de Tonos y Ecualizador de Fase

4.1 Ecualizador de Fase

En esta sección del informe se procederá a analizar un ecualizador de fase y control de tonos, cuyo circuito se presenta a continuación en la figura [??].

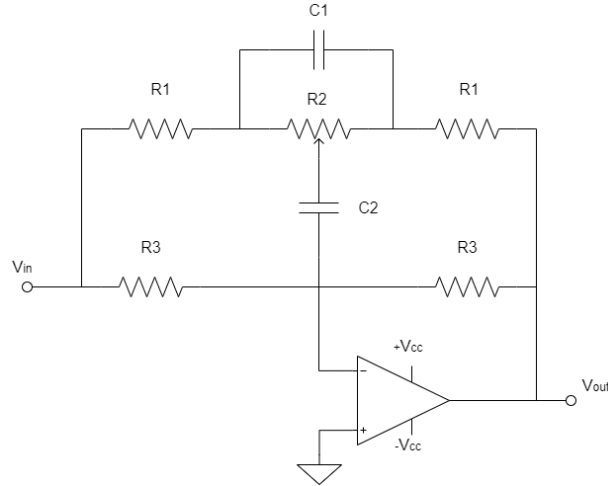


Figure 12: Circuito Ecualizador de Fase

4.2 Análisis matemático

A continuación, se presenta el desarrollo matemático pertinente para obtener la función transferencia del circuito planteado por la cátedra.

Para analizar el circuito propuesto, se optó por reemplazar el potenciómetro R_2 por dos resistencias las cuales llamaremos R_{21} y R_{22} , relacionadas por un coeficiente L . De esta forma será más fácil poder resolver el circuito propuesto, entonces definimos:

$$R_{21} = R_2 L \quad (9)$$

$$R_{22} = R_2 (1 - L) \quad (10)$$

Las relaciones entre ambas resistencias se plantean a continuación:

$$R_{21} + R_{22} = R_2 L + R_2 (1 - L) = R_2 \quad (11)$$

$$R_{21} R_{22} = R_2 L R_2 (1 - L) = R_2^2 (L - L^2) \quad (12)$$

Usaremos las ecuaciones planteadas en [??] y [??] para simplificar las ecuaciones de la transferencia más adelante.

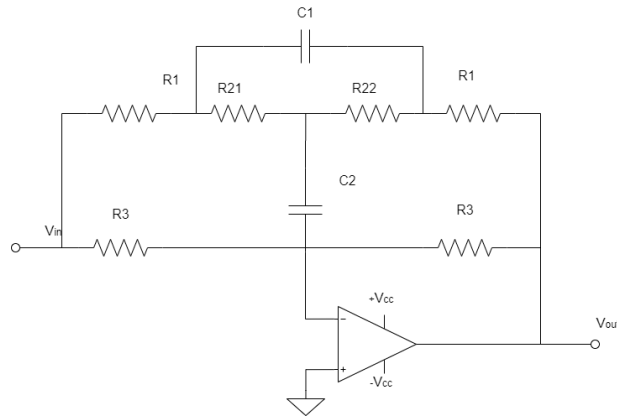


Figure 13: Modelo matemático

Para simplificar el circuito se procedió a aplicar las transformaciones de Kenelly en dos oportunidades. Primero, se procedió a una conversión triángulo-estrella para luego utilizar su contraparte estrella-triángulo. Este procedimiento se muestra en las figuras [??] y [??].

Para el primer reemplazo se usaron las siguientes ecuaciones:

$$Z_{AB} = \frac{1}{sC_1}$$

$$Z_{BC} = R_{22}$$

$$Z_{CA} = R_{21}$$

Considerando,

$$Z_{eq} = Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}$$

Se procede a realizar la primera transformación de Kenelly. Obteniéndose:

$$Z_A = \frac{Z_{AB} + Z_{CA}}{Z_{eq}} \quad (13)$$

$$Z_B = \frac{Z_{AB} + Z_{BC}}{Z_{eq}} \quad (14)$$

$$Z_C = \frac{Z_{BC} + Z_{CA}}{Z_{eq}} \quad (15)$$

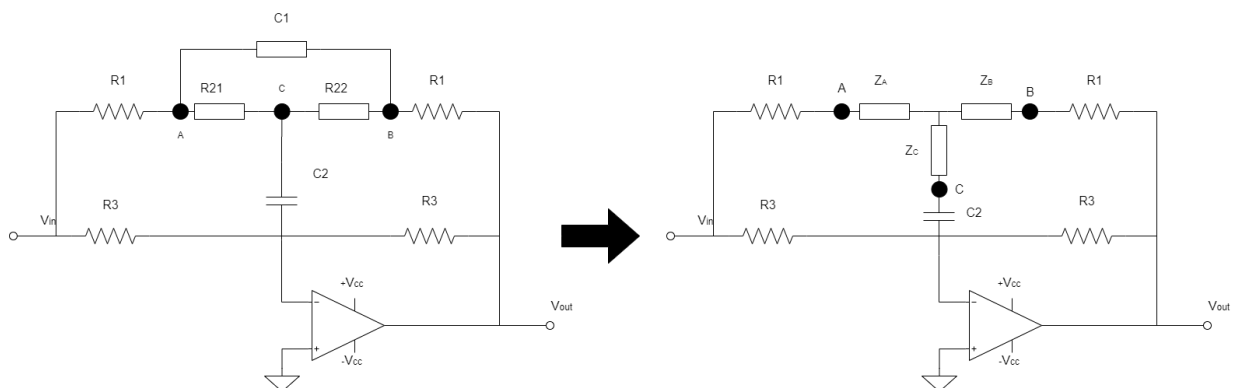


Figure 14: 1° Reemplazo - Transformación estrella a triángulo

Para el segundo reemplazo, se reagrupan las impedancias de la siguiente manera:

$$Z_{A'} = R_1 + Z_A \quad (16)$$

$$Z_{B'} = R_1 + Z_B \quad (17)$$

$$Z_{C'} = \frac{1}{sC_2} + Z_C \quad (18)$$

Se hacen las siguientes consideraciones:

$$Z_{eq'} = Z_{A'} + Z_{B'} + Z_{C'}$$

Consecuentemente, se realiza la segunda transformación de Kenelly, pasando de un modelo estrella un triángulo. Obteniéndose las siguientes expresiones:

$$Z_{A'B'} = \frac{Z_{eq'}}{Z_{C'}} \quad (19)$$

$$Z_{B'C'} = \frac{Z_{eq'}}{Z_{A'}} \quad (20)$$

$$Z_{C'A'} = \frac{Z_{eq'}}{Z_{B'}} \quad (21)$$

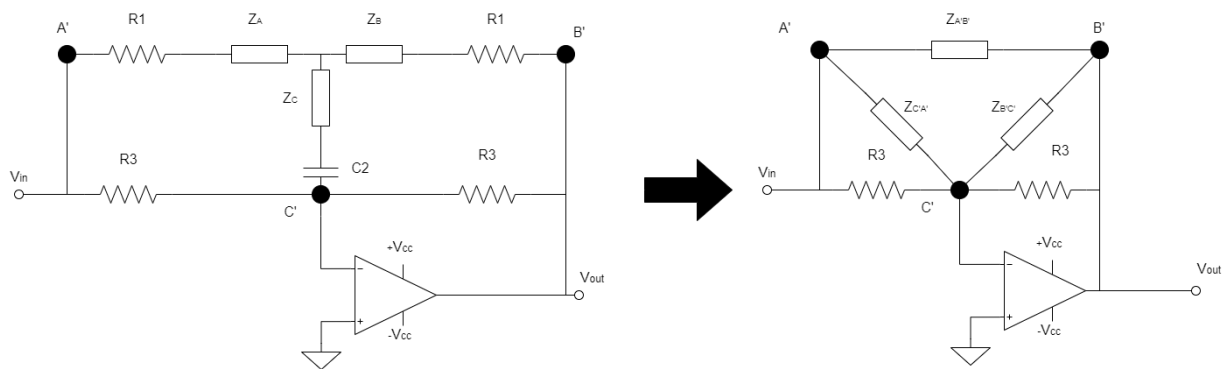


Figure 15: 2° Reemplazo - Transformación estrella a triángulo

Por último, simplificamos las impedancias que estaban en paralelo obteniendo un circuito de 3 impedancias, representado por la figura [??], mucho más simple de resolver.

$$Z_1 = Z_{C'A'} // R_3 \quad (22)$$

$$Z_2 = Z_{B'C'} // R_3 \quad (23)$$

$$Z_3 = Z_{A'B'} // R_3 \quad (24)$$

Debido al gran trabajo de cálculo requerido se decidió utilizar un programa matemático para asistirnos en el despeje de ecuaciones. El programa utilizado fue Matlab, del cual se desprenden las siguientes ecuaciones:

$$Z_1 = \frac{R_3(\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3)}{s^2(\alpha_1 + C_1 C_2 R_1 R_3 R_{21} + C_1 C_2 R_1 R_3 R_{22}) + s(\alpha_2 + R_1 R_3 C_2 + R_{22} R_3 C_2) + \alpha_3} \quad (25)$$

$$Z_2 = \frac{R_3(\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3)}{s^2(\alpha_1 + C_1 C_2 R_1 R_3 R_{21} + C_1 C_2 R_1 R_3 R_{22}) + s(\alpha_2 + R_1 R_3 C_2 + R_{21} R_3 C_2) + \alpha_3} \quad (26)$$

$$Z_3 = \frac{\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}{s^2(C_1 C_2 R_{21} R_{22}) + s(C_1 R_{21} + C_1 R_{22}) + 1} \quad (27)$$

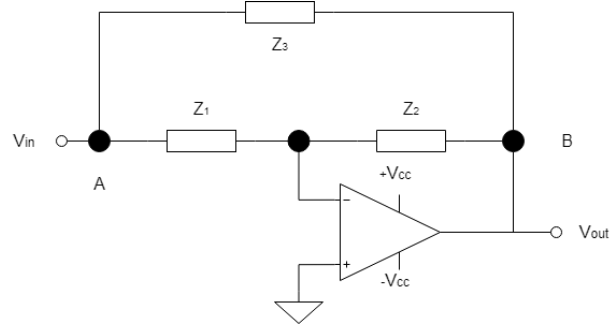


Figure 16: Circuito simplificado

Considerando las siguientes constantes:

$$\alpha_1 = C_1 C_2 R_1^2 R_{21} + C_1 C_2 R_1^2 R_{22} + 2C_1 C_2 R_1 R_{21} R_{22} \quad (28)$$

$$\alpha_2 = 2C_1 R_1 R_{21} + 2C_1 R_1 R_{22} + R_1^2 C_2 + R_1 R_{21} C_2 + R_1 R_{22} C_2 + R_{21} R_{22} C_2 \quad (29)$$

$$\alpha_3 = 2R_1 + R_{21} + R_{22} \quad (30)$$

Aplicando las expresiones obtenidas al principio de la sección en [??] y [??], se pueden simplificar las ecuaciones [??], [??] y [??] como:

$$\alpha_1 = C_1 C_2 R_1^2 R_2 + 2C_1 C_2 R_1 R_2^2 (L - L^2) \quad (31)$$

$$\alpha_2 = 2C_1 R_1 R_2 + R_1^2 C_2 + R_1 R_2 C_2 + R_2^2 (L - L^2) C_2 \quad (32)$$

$$\alpha_3 = 2R_1 + R_2 \quad (33)$$

Por otro lado, utilizando las mismas expresiones se pueden simplificar las ecuaciones [??], [??] y [??] como:

$$Z_1 = \frac{R_3(\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3)}{s^2(\alpha_1 + C_1 C_2 R_1 R_3 R_2) + s(\alpha_2 + R_1 R_3 C_2 + R_{22} R_3 C_2) + \alpha_3} \quad (34)$$

$$Z_2 = \frac{R_3(\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3)}{s^2(\alpha_1 + C_1 C_2 R_1 R_3 R_2) + s(\alpha_2 + R_1 R_3 C_2 + R_{21} R_3 C_2) + \alpha_3} \quad (35)$$

$$Z_3 = \frac{\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}{s^2(C_1 C_2 R_2^2 (L - L^2)) + s(C_1 R_2) + 1} \quad (36)$$

A continuación, se realizarán dos análisis para obtener la función transferencia del circuito. La primera considerando un amplificador operacional ideal que implica las siguientes condiciones:

- $A_0 = \infty$
- $r_{in} = \infty$
- $r_o = 0$

De esta manera, se puede considerar una tierra virtual en la salida inversora del *opamp*, obteniéndose la siguiente transferencia:

$$H_I(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (37)$$

Por otro lado, se analiza el caso de un *opamp* no ideal, que implica las siguientes condiciones:

- $A = \frac{A_0}{\left(1 + \frac{s}{w_p}\right)} \neq \infty$
- $r_{in} \neq \infty$
- $r_o \neq 0$

Este caso, al considerar menos aproximaciones, implica una mayor correlación con el funcionamiento empírico del circuito. Es necesario también utilizar las siguientes expresiones:

$$V_{out} = A(V^+ - V^-) \quad (38)$$

$$V^+ = 0 \quad (39)$$

$$V^- = V_{in} - I_1 Z_1 \quad (40)$$

$$|I_1| = \frac{V^-}{Z_{inp}} + \frac{V^- - V_{out}}{Z_2} \quad (41)$$

El circuito representado por dichas ecuaciones se puede apreciar en la figura [??].

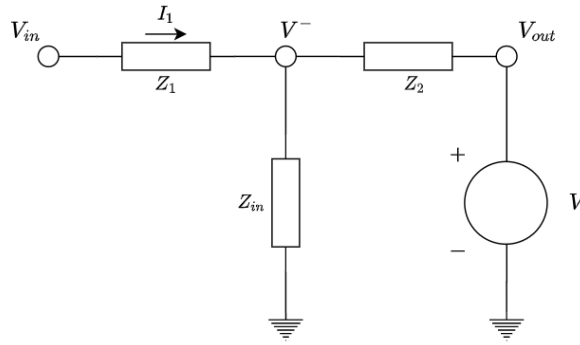


Figure 17: Circuito resultante sin aproximaciones

Finalmente, de las ecuaciones presentadas se puede despejar la transferencia no ideal del sistema como:

$$H_{NI}(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_0 w}{Z_1 Y s + w(Z_1 Y - A_0 \frac{Z_1}{Z_2})} \quad (42)$$

Donde Y está dado por:

$$Y = \frac{1}{Z_{in}} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (43)$$

A partir de [??] es posible llegar a [??] considerando:

$$\lim_{A_0 \rightarrow \infty} H_{NI}(s) = H_I(s) \quad (44)$$

Por ende, se considera la transferencia ideal para seguir despejando.

$$H_I(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{s^2(\alpha_1 + C_1 C_2 R_1 R_3 R_2) + s(\alpha_2 + R_1 R_3 C_2 + R_{22} R_3 C_2) + \alpha_3}{s^2(\alpha_1 + C_1 C_2 R_1 R_3 R_2) + s(\alpha_2 + R_1 R_3 C_2 + R_{21} R_3 C_2) + \alpha_3} \quad (45)$$

Por otro lado, con el fin de simplificar la transferencia obtenida se aplican las siguientes condiciones de diseño sobre la ecuación [??].

$$R_3 \gg R_1 \quad \wedge \quad R_3 = 10R_2 \quad \wedge \quad C_1 = 10C_2 \quad (46)$$

Obteniéndose:

$$H(s) = -\frac{\alpha_{1'}s^2 + \alpha_{2'}s + \alpha_3}{\alpha_{1'}s^2 + \alpha_{2''}s + \alpha_3} \quad (47)$$

Donde las constantes están representadas por:

$$\alpha_{1'} \approx 20C_2^2R_1R_2^2(L - L^2) + 100C_2^2R_1R_2^2 \quad (48)$$

$$\alpha_{2'} \approx 31C_2R_1R_2 + C_2R_2^2(10 - 9L - L^2) \quad (49)$$

$$\alpha_{2''} \approx 31C_2R_1R_2 + C_2R_2^2(11L - L^2) \quad (50)$$

Considerando la ecuación [??], busco su variante normalizada para hallar la frecuencia de corte.

$$H(s) = -\frac{s^2 \left(\frac{\alpha_{1'}}{\alpha_3} \right) + s \left(\frac{\alpha_{2'}}{\alpha_3} \right) + 1}{s^2 \left(\frac{\alpha_{1'}}{\alpha_3} \right) + s \left(\frac{\alpha_{2''}}{\alpha_3} \right) + 1} \quad (51)$$

De [??] se puede despejar la frecuencia de corte del circuito dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_{1'}}} \quad (52)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_{1'}}} \quad (53)$$

Reemplazando [??] y [??] en [??], se obtiene:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2R_1 + R_2}{20C_2^2R_1R_2^2(L(1 - L)) + 100R_1R_2^2C_2^2}} \quad (54)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi C_2 R_2} \sqrt{\frac{2 + \frac{R_2}{R_1}}{20L(1 - L) + 10}} \quad (55)$$

Considerando $10 \gg 20L(1 - L)$, se obtiene la expresión propuesta por la cátedra.

$$f_0 \approx \frac{\sqrt{2 + \frac{R_2}{R_1}}}{20\pi C_2 R_2} \quad (56)$$

Para finalizar el análisis se puede tomar la frecuencia de corte hallada y reemplazarla en el módulo de la función transferencia. De esta manera, tomando los valores extremos para L se pueden obtener las cotas para dicha función, dadas por la ecuación [??].

$$\frac{3R_1}{3R_1 + R_2} \leq A_0 \leq \frac{3R_1 + R_2}{3R_1} \quad (57)$$

4.3 Elección de componentes

Para obtener una mejor simulación usamos 3 frecuencias debido a que el controlador de tonos debería usar frecuencias dentro del espectro audible para el oído humano, esto es en el rango de entre 20Hz y 20kHz, por lo que se debería predecir 3 valores de componentes para distintas frecuencias. Para frecuencias bajas donde están los sonidos graves que están entre los 20Hz y 100Hz, para frecuencias medias donde se encuentran la una gran cantidad de sonidos musicales que están entre 400Hz y 900Hz, y para las frecuencias altas donde se encuentran los sonidos agudos suponemos un limite frecuencia ya que aunque el oído humano detecte hasta señales de 20kHz los sonidos que están por encima de los 5kHz ya no pertenecen a los generados por instrumentos musicales por lo que si suponemos un limite para nuestro circuito bien podría rondar entre los 5kHz y los 8kHz. Para poder elegir los componentes y mantener la relaciones de simplificación ($C_1 = 10.C_2$ y $R_3 = 10.R_2$) tuvimos en cuenta que en el mercado solo hay valores nominales, por lo cual la elección se debía hacer en base a los componentes que se venden y no a lo que teóricamente queremos. El componente más determinante es el potenciómetro R_2 el cual tiene valores de venta mas restringidos, por ese mismo motivo utilizamos un potenciómetro de $10k\Omega$ y optamos por una relación de $R_2 = 10.R_2$ dándonos una resistencia de $R_1 = 1k\Omega$. Luego buscamos mediante la ecuación ?? valores de C_2 para frecuencias bajas, medias y altas (50Hz, 500Hz y 5kHz aproximadamente). Los valores de C_2 fueron los siguientes:

Frecuencia deseada	C_2 deseado	C_2 comercial	Frecuencia obtenida
50Hz	110nF	100nF	55Hz
500Hz	11nF	10nF	551Hz
5kHz	1.1nF	1nF	5.5kHz

De los valores ya obtenidos a elección de R_2 y C_2 se calcularon las demás componentes con sus respectivas relaciones, siendo entonces la siguiente elección de componentes para las distintas frecuencias:

Frecuencia	C_2	C_1	R_1	R_2	R_3
55Hz	100nF	$1\mu F$	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$100k\Omega$
551Hz	10nF	100nF	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$100k\Omega$
5.5kHz	1nF	10nF	$1k\Omega$	$10k\Omega$	$100k\Omega$

A TENER EN CUENTA: Para tener mejores resultados en el circuito se debería usar tecnología SMD, que es tecnología de montaje superficial, ya que esta tecnología permite tener componentes resistivos con tolerancias de 1% y capacitivos con 5% logrando en la práctica mejores resultados.

4.4 Simulaciones

Para las simulaciones se tuvo en cuenta que la posición del potenciómetro es lo que genera más variación sobre la transferencia en las distintas frecuencias, por lo que se mostrará las distintas simulaciones en posición de $L=1$ (donde R_2 es máximo), $L=0.5$ (donde $R_{21} = R_{22}$) y con $L=0$ (donde R_2 es mínimo) como casos extremos de cada frecuencia.

4.4.1 Frecuencias bajas

A continuación mostraremos las amplitudes en dB con los distintos valores de L simulados y teóricos. La frecuencia f_0 es de 55Hz.

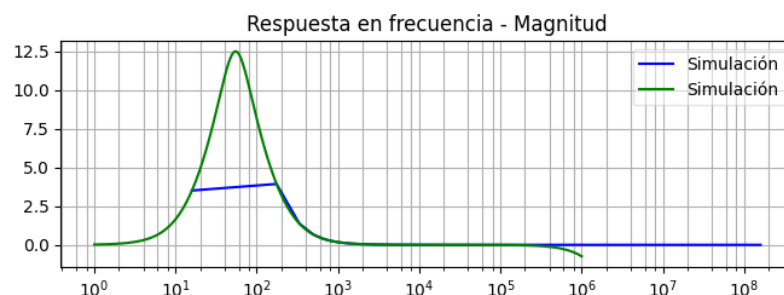
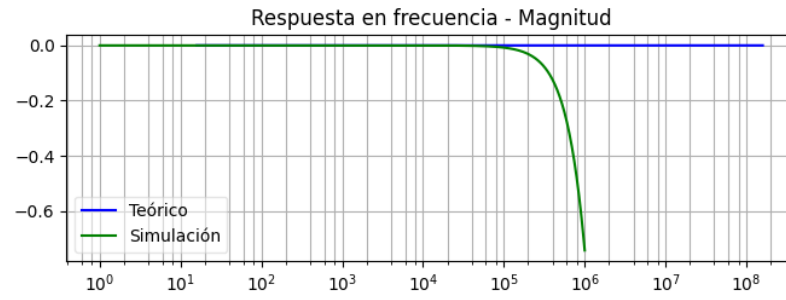
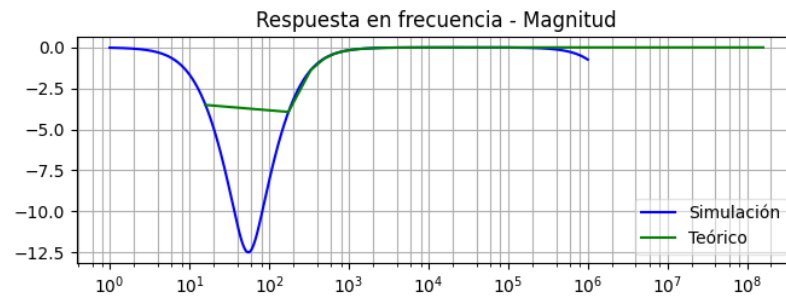
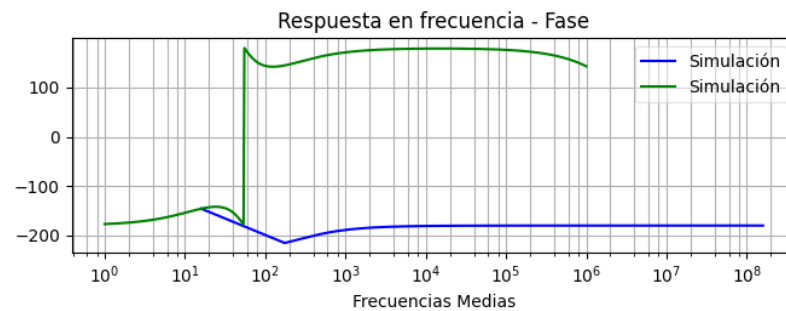
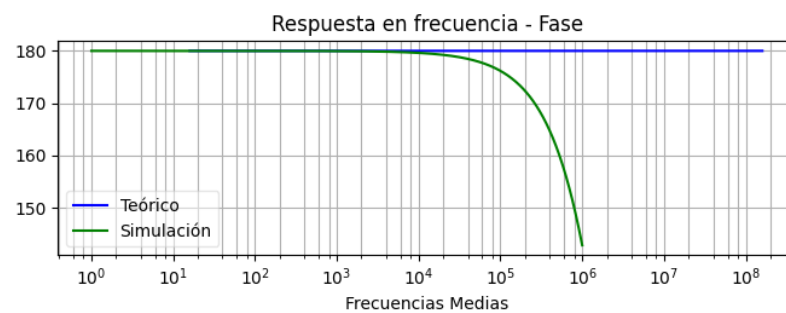
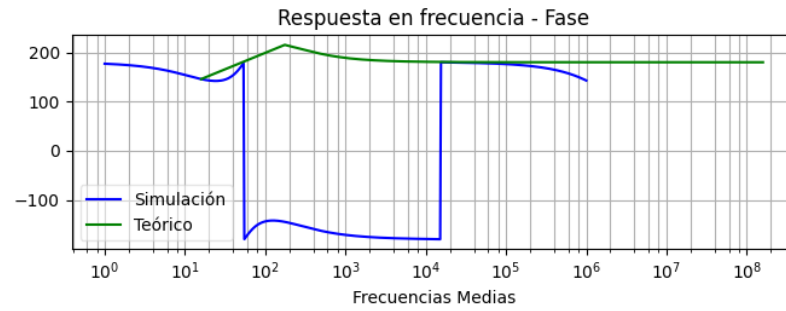


Figure 18: Magnitud en dB con $L=0$

Figure 19: Magnitud en dB con $L=0.5$ Figure 20: Magnitud en dB con $L=1$

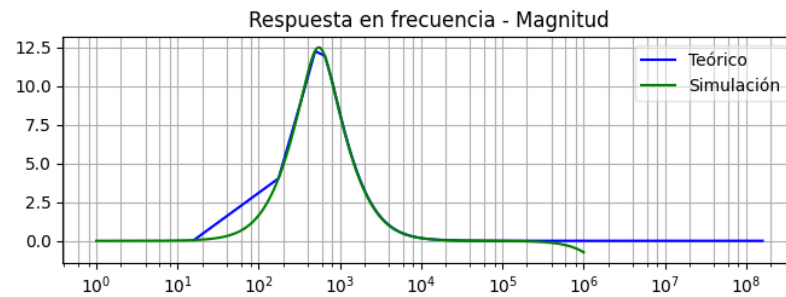
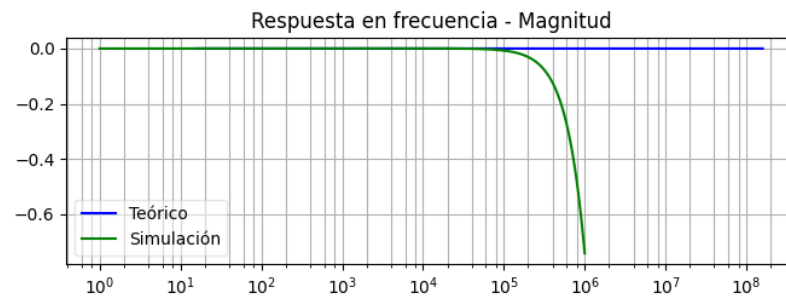
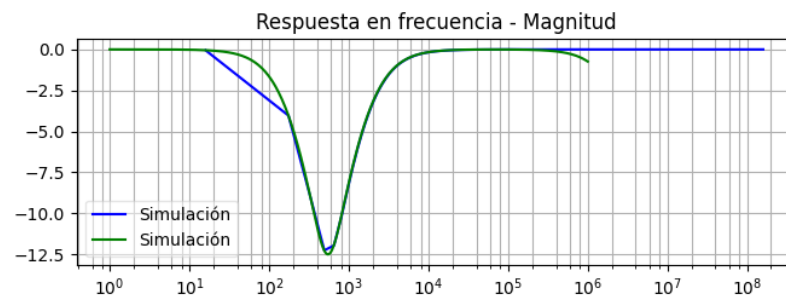
Ahora mostraremos las fases con los distintos valores de L simulados y teóricos.

Figure 21: Fase en grados con $L=0$ Figure 22: Fase en grados con $L=0.5$

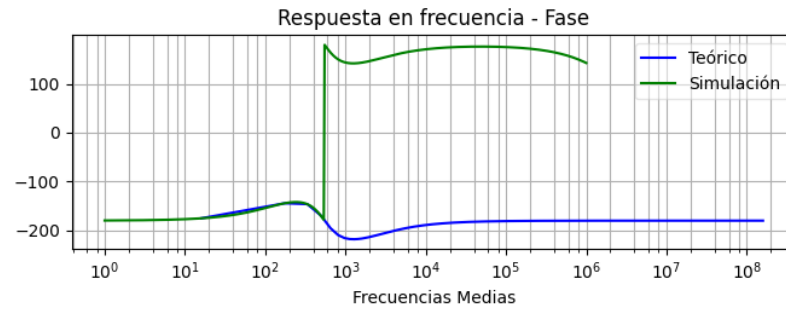
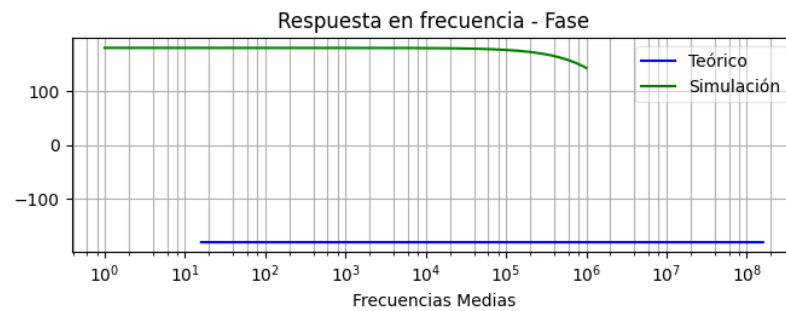
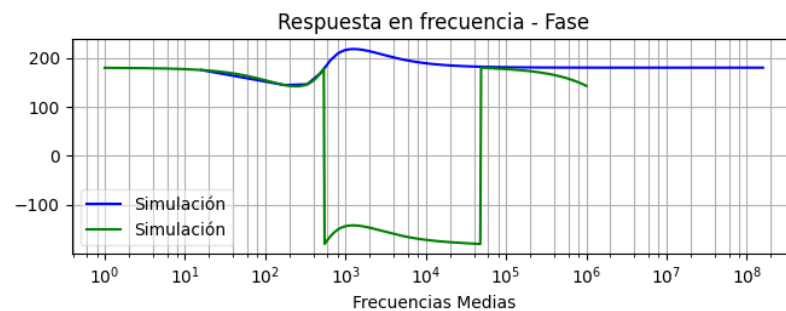
Figure 23: Fase en grados con $L=1$

4.4.2 Frecuencias medias

A continuación mostraremos las amplitudes en dB con los distintos valores de L simulados y teóricos. La frecuencia f_0 es de 551Hz.

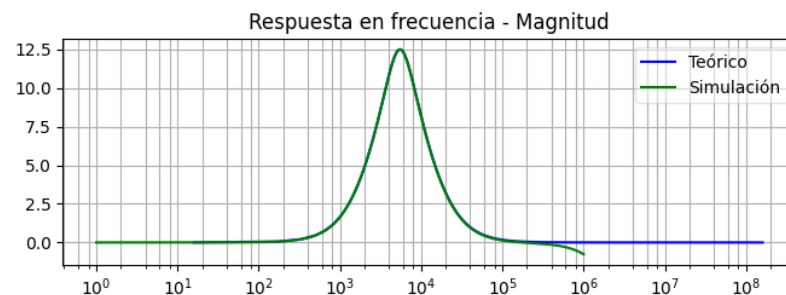
Figure 24: Magnitud en dB con $L=0$ Figure 25: Magnitud en dB con $L=0.5$ Figure 26: Magnitud en dB con $L=1$

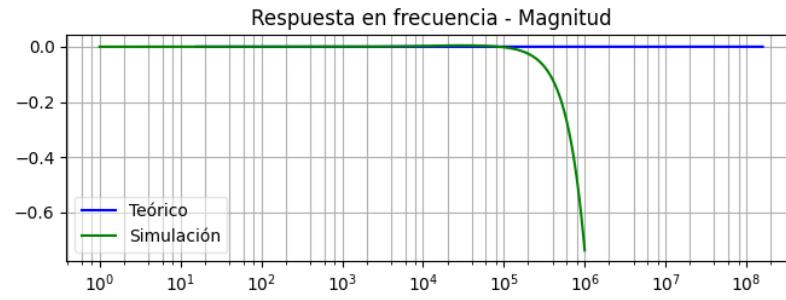
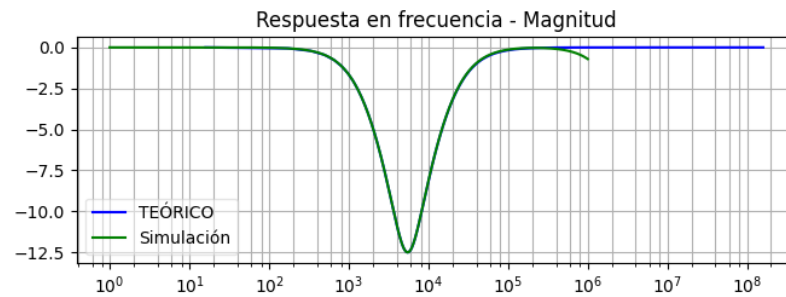
Ahora mostraremos las fases con los distintos valores de L simulados y teóricos.

Figure 27: Fase en grados con $L=0$ Figure 28: Fase en grados con $L=0.5$ Figure 29: Fase en grados con $L=1$

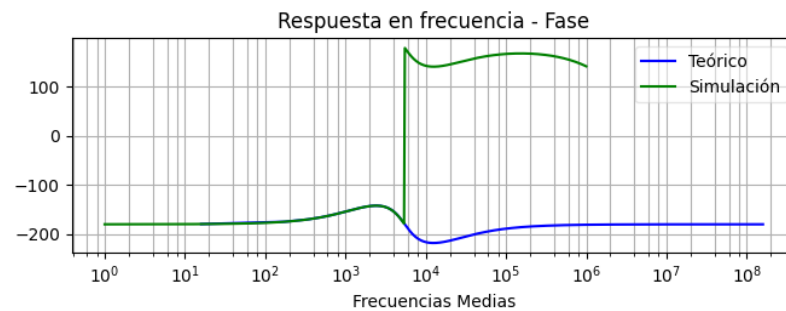
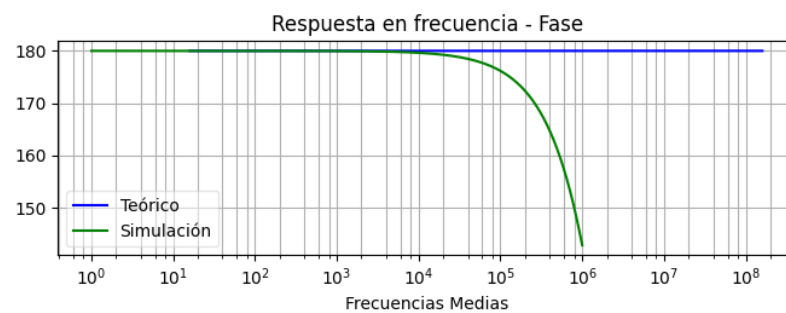
4.4.3 Frecuencias altas

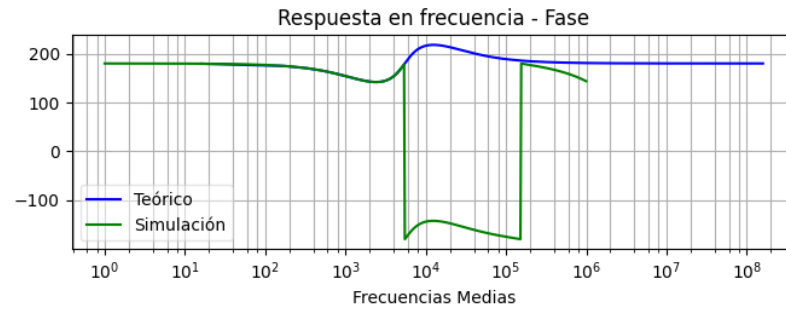
A continuación mostraremos las amplitudes en dB con los distintos valores de L simulados y teóricos. La frecuencia f_0 es de 5.5kHz.

Figure 30: Magnitud en dB con $L=0$

Figure 31: Magnitud en dB con $L=0.5$ Figure 32: Magnitud en dB con $L=1$

Ahora mostraremos las fases con los distintos valores de L simulados y teóricos.

Figure 33: Fase en grados con $L=0$ Figure 34: Fase en grados con $L=0.5$

Figure 35: Fase en grados con $L=1$

De todas las simulaciones mostradas, tanto teóricas como por las del LTSpice, se puede notar como la posición del potenciómetro afecta a que las señales en f_0 se amplifiquen o se atenúen, esto es muy útil ya que la finalidad del controlador de tonos es poder elegir que tono quiero escuchar, si tuviera 3 bloques del mismo circuito (uno para cada frecuencia alta, media y baja) podría elegir a que frecuencia quiero escuchar o como balancear las 3 señales para generar la mejor armonía en mis sonidos de salida. También cabe destacar que las frecuencias mostradas fueron elegidas dentro 3 rangos amplios, podría hacerse varios circuitos para distintas frecuencias si lo que necesito son señales de determinadas frecuencias y no algo muy general, o contar con más de 3 bloques. Lo ideal sería conectar los bloques en cascada para que el ruido de un bloque no afecte a los demás.