Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Estadística

ESTADISTICA (523250)

Listado 7 Intervalos de confianza
Solución
Segundo Semestre 2023

Profesor:Jean Paul Navarrete C. & Francisco Muñoz.

1. La duración de un cierto tipo de cuenta de credito en un banco se describe por una distribución Normal con desviación típica 1500 horas.

   a) Si en una muestra de clientes de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la duración media es de 9900 horas, determine un intervalo, con el 95 % de confianza, para la duración media de esta clase de cuentas de credito.

   b) Con un nivel de confianza del 99 % se ha construido un intervalo para la media con un error máximo de 772.5 horas, ¿Cuál es el tamaño de la muestra que se ha tomado en este caso?

2. El precio de un determinado producto, en los comercios de alimentación de una ciudad, sigue una distribución normal. Se toma una muestra aleatoria de 8 comercios y se observa el precio de ese producto, obteniendo las siguientes observaciones:

132	125	130	139	126	138	124	140

   a) Determine un intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional.

   b) Determine un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de productos con precios menores o iguales a 130.

3. En el *Journal of Testing and Evaluation, July 1981* se informó de los resultados de pruebas de laboratorio realizadas para investigar la estabilidad y permeabilidad del concreto de asfalto de grado abierto. En una parte del experimento se prepararon 4 especímines de concreto con un contenido de asfalto de 3 % por peso total de la mezcla, y con 7 %. Se determinó la permeabilidad al agua de cada especímen de concreto haciendo fluir agua sin aire sobre el especímen y midiendo la pérdida de agua. Las mediciones de permeabilidad(pulg/hora) para los 8 especímenes de concreto se muestran en la tabla siguiente.

Asfalto 3 %	1189	840	1020	980
Asfalto 7 %	853	900	733	785

   a) Determine un intervalo de confianza del 90 % para la diferencia entre las permeabilidades medias del concreto elaborado con un contenido de asfalto de 3 % y 7 %. Interprete.

   b) Mencione los supuestos necesarios para que los resultados obtenidos en la pregunta anterior sean válidos.

4. Se desea estudiar si es que hay diferencias en las probabilidades de ocurrencia de accidentes automovilísticos dependiendo del color de los autos. A 100 propietarios de vehículos de color rojo y a 200 propietarios de autos de color blanco, se les consultó si habían tenido algún accidente automovilistico durante el tiempo que han sido dueños de los autos. Se obtuvo como resultado que 45 de los dueños de autos rojos y 70 de los dueños de autos blancos, habían tenido al menos un accidente automovilístico. Construya un intervalo de confianza del 90 % para la diferencia de las probabilidades de que ocurra al menos un accidente automovilístico.

Listado N° 3
Intervalos de Confianza.

① Sol:

X = "Duración de un cierto tipo de cuenta de crédito en un banco"

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = (1500)^2)$$

a)

$\sigma = 1500$

$n = 100$

$\bar{x} = 9900$

$100(1-\alpha) = 95$

$\alpha = 0{,}05$

$$IC_{95\%}(\mu) = \left[\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[9900 \pm Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} \frac{1500}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= \left[9900 \pm Z_{0{,}975} \frac{1500}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= \left[9900 \pm 1{,}96 \cdot \frac{1500}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= \left[9900 \pm 294\right]$$

$$IC_{95\%}(\mu) = [9606 ; 10194] //$$

b) $e = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{e}\right)^2 = \left(\frac{Z_{1-\frac{0{,}01}{2}} \cdot 1500}{772{,}5}\right)^2 = \left(\frac{Z_{0{,}995} \cdot 1500}{772{,}5}\right)^2 = \left(\frac{2{,}57 \cdot 1500}{772{,}5}\right)^2$$

datos

$e = 772{,}5$

$100(1-\alpha) = 99$

$\alpha = 0{,}01$

$$n = (4{,}9902)^2$$

$$n = 24{,}9$$

$$\boxed{n = 25} //$$

② Sol.:

a)

$n = 8$

$S^2 = (6{,}562)^2$

$100(1-\alpha) = 95$

$\alpha = 0{,}05$

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

$$= \left[\frac{(8-1)(6{,}562)^2}{\chi^2_{1-\frac{0{,}05}{2};8-1}} ; \frac{(8-1)(6{,}562)^2}{\chi^2_{\frac{0{,}05}{2};8-1}}\right]$$

$$= \left[\frac{7\cdot(6{,}562)^2}{\chi^2_{0{,}975;7}} ; \frac{7\cdot(6{,}562)^2}{\chi^2_{0{,}025;7}}\right]$$

$$= \left[\frac{301{,}35}{16{,}01} ; \frac{301{,}35}{1{,}69}\right]$$

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = [18{,}82 ; 178{,}31] //.$$

b)

132	125	130	139	126	138	124	140
0	1	1	0	1	0	1	0

$\hat{p} = \bar{x} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$

$100(1-\alpha) = 95$

$\alpha = 0{,}05$

$$IC_{95\%}(p) = \left[\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right]$$

$$IC_{95\%}(p) = \left[\hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}5 \pm Z_{1-\frac{0{,}05}{2}}\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{8}}\right]$$

$$= \left[0{,}5 \pm Z_{0{,}975}\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{8}}\right]$$

$$= [0{,}5 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}17677]$$

$$= [0{,}5 \pm 0{,}34648]$$

$$IC_{95\%}(p) = [0{,}1535 ; 0{,}8464] //.$$

③ Sol:

a) X = "Permeabilidad para el asfalto al 3% (pulg/hr).

Y = "Permeabilidad para el asfalto al 7% (pulg/hr).

luego Varianzas Poblacionales son desconocidos.

$\sigma_x^2 = ??$

$\sigma_y^2 = ??$

Primero Realizamos un $IC(\sigma_Y^2/\sigma_X^2)$.

$100(1-\alpha)=90$

$\alpha = 0,1$

$n_x = 4$

$n_y = 4$

$\bar{x} = 1007,2$

$\bar{y} = 817,75$

$S_x^2 = 143,65^2$

$S_y^2 = 73,626^2$

$$IC_{90\%}(\sigma_Y^2/\sigma_X^2) = \left[\frac{S_Y^2}{S_X^2} F_{n_x-1, n_y-1; \frac{\alpha}{2}} ; \frac{S_Y^2}{S_X^2} F_{n_x-1; n_y-1; 1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$= \left[\frac{73.626^2}{143.65^2} F_{3,3,\frac{0,1}{2}} ; \frac{73,626^2}{143,65^2} F_{3,3;1-\frac{0,1}{2}}\right]$$

$$= \left[0,263 \cdot \frac{1}{F_{3,3,1-\frac{0,1}{2}}} ; 0,263 \cdot F_{3,3;0,95}\right]$$

$$= \left[0,263 \cdot \frac{1}{F_{3,3;0,95}} ; 0,263 \cdot 9,28\right]$$

$$= \left[0,263 \frac{1}{9,28} ; 0,263 \cdot 9,28\right]$$

$$IC_{90\%}(\sigma_Y^2/\sigma_X^2) = [0,028 ; 2,4406]$$

obs: Propiedad de la F.

$$\boxed{F_{a;b;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{b,a;1-\frac{\alpha}{2}}}}$$

Como el $1 \in IC. \Rightarrow \sigma_Y^2 = \sigma_X^2$ desconocido pero Iguales.

luego elegimos:

$$IC(\mu_X - \mu_Y) = \left[\bar{x} - \bar{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x+n_y-2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\right]$$

$$IC_{90\%}(\mu_X - \mu_Y) = \left[(1007,2 - 817,75) \pm t_{1-\frac{0,1}{2};\,4+4-2} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}\right]$$

$$= \left[189,45 \pm t_{0,95;6} \cdot 114,141 \cdot \sqrt{\frac{2}{4}}\right]$$

obs:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_X - 1)\, s_X^2 + (n_Y - 1)\, s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{3 \cdot 143,65^2 + 3 \cdot 73,626^2}{4 + 4 - 2}}$$

$$\boxed{s_p = 114,141}$$

$$IC_{90\%}(\mu_X - \mu_Y) = \left[189,45 \pm 1,94 \cdot 114,141 \cdot \sqrt{\frac{2}{4}}\right]$$

$$= \left[189,45 \pm 156,58\right]$$

$$IC_{90\%}(\mu_X - \mu_Y) = \left[32,87 \ ; 346,03\right]$$

Como $0 \notin IC$, $\Rightarrow \mu_X \neq \mu_Y$.

b) tanto como la variable X e Y deben tener distribución Normal $\therefore$ Suponemos que $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

4) Solución:

X = "Posibilidad de accidente de auto de color rojo.

Y = "Posibilidad de accidente de auto de color blanco.

dato:

$n_X = 100$

$n_Y = 200$

$\hat{p}_X = \bar{x} = \frac{45}{100} = 0{,}45$

$\hat{p}_Y = \bar{y} = \frac{70}{200} = 0{,}35$

$1-\alpha = 0{,}9$

$\alpha = 0{,}1$

$$IC_{90\%}(p_X - p_Y) = \left[(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}}\right]$$

$$= \left[0{,}45 - 0{,}35 \pm Z_{0{,}95} \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{100} + \frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{200}}\right]$$

$$= [0{,}1 \pm 1{,}64 \cdot 0{,}0601]$$

$$= [0{,}1 \pm 0{,}0985]$$

$$IC_{90\%}(p_X - p_Y) = [0{,}0015 \ ; \ 1{,}0985]$$

Como el $0 \notin IC \Rightarrow p_X \neq p_Y$.