Capítulo 3

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

3.1 Familias de Curvas y Trayectorias Ortogonales

Hemos visto que normalmente la solución general de una ecuación diferencial de primer orden es una familia de funciones que contiene una constante arbitraria, llamada *parámetro*. Si la ecuación diferencial verifica nuestro Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 2.4.1), por cada punto del dominio de definición Λ de la ecuación diferencial pasa una única curva solución (máxima). Por lo tanto, las curvas de nuestra familia cubren nuestro dominio Λ y son disjuntas entre sí. Llamaremos en general, **familia a 1-parámetro de curvas** sobre un conjunto Λ del plano, a cualquier familia, que dependa de un parámetro, de curvas que son disjuntas entre sí y que cubren Λ.

Si la familia a 1-parámetro de curvas viene dada implícitamente por la ecuación

$$f(x, y, c) = 0\,, \tag{3.1}$$

en la mayoría de los casos podemos encontrar una ecuación diferencial cuya solución general esté dada por (3.1). Para lograr esto, primero derivamos implícitamente 3.1 respecto de x, obteniendo una relación del tipo

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0\,. \tag{3.2}$$

Luego, eliminamos el parámetro c (si es posible) usando las ecuaciones 3.1 y 3.2, llegando a una ecuación diferencial de primer orden:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0\,.$$

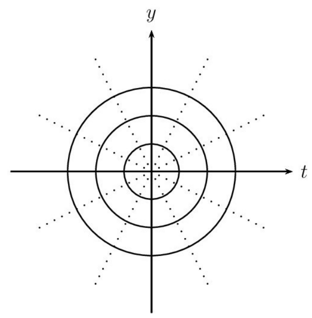

Figure 3.1: Familia de trayectorias ortogonales de $x^2 + y^2 = c^2\,,\ c \in \mathbb{R}$

Ejemplo 3.1.1. Considere la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen

$$x^2 + y^2 = 2cx\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$$

y encontremos la ecuación diferencial asociada.

Derivando con respecto a x obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2c\,.$$

Pero

$$x^2 + y^2 = 2cx \quad \Longrightarrow \quad 2c = \frac{x^2 + y^2}{x}\,,$$

y reemplazando en la ecuación diferencial tenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x}\,,$$

o bién

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\,.$$

Como aplicación consideremos el problema de hallar trayectorias ortogonales. Diremos que una familia de curvas es una **familia de trayectorias ortogonales** de otra familia de curvas, si toda curva de una de las familias es ortogonal (es decir, perpendicular) a todas las de la otra familia. Por ejemplo, la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos centrados en el origen $x^2 + y^2 = c^2\,,\ c \in \mathbb{R}$, es la familias de rectas por el origen $y = cx\,,\ c \in \mathbb{R}$.

Las correspondientes ecuaciones diferenciales son

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,,$$

respectivamente, y la ortogonalidad de sus curvas solución se refleja en que

$$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x} \;=\; -1\,.$$

De hecho, la familia de trayectorias ortogonales de una familia de curvas que es la solución general de la ecuación $y' = f(x,y)$, está dada por la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{1}{f(x,y)}\,.$$

Ejemplo 3.1.2. Encontremos la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen $x^2+y^2 = 2cx\,,\ c\in\mathbb{R}$, del ejemplo anterior.

La ecuación diferencial asociada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}\,, \tag{3.3}$$

y luego debemos encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}\,. \tag{3.4}$$

La forma más sencilla de resolver esta ecuación es intercambiando los roles de las variables x e y poniendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2}{2xy}\,.$$

Observe que esta ecuación es la misma ecuación 3.3 con x e y intercambiados. Luego la solución general es la solución general de 3.3 con x e y intercambiados, es decir

$$x^2+y^2 = 2cy\,,\ c\in\mathbb{R}\,,$$

que es la familia de círculos tangentes al eje OX en el origen.

Otra forma de resolver 3.4 es escribiéndola de la forma

$$2xydx \;+\; (y^2-x^2)dy = 0\,,$$

y observando que tiene factor integrante que depende sólo de variable y. En efecto, si

$$M(x,y) = 2xy \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = y^2-x^2\,,$$

entonces

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; -\frac{2}{y}\,,$$

y el factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; e^{\int_1^y -\frac{2}{v}dv} \;=\; \frac{1}{y^2}\,.$$

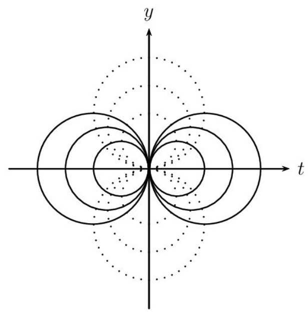

Figure 3.2: Familia de trayectorias ortogonales de $x^2 + y^2 = 2cx\,,\ c \in \mathbb{R}$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos la ecuación exacta

$$2\frac{x}{y}dx \ + \ \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0 \cdot$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int 2\frac{x}{y}dx + g(y) \ = \ \frac{x^2}{y} + g(y) \quad \text{y} \\ 1 - \frac{x^2}{y^2} &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \ = \ -\frac{x^2}{y^2} + g'(y)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g'(y) \ = \ 1 \quad \Longrightarrow \quad g(y) \ = \ y\,,$$

y

$$u(x,y) \ = \ \frac{x^2}{y} + y\,.$$

Luego la solución general es

$$\frac{x^2}{y} + y \ = \ 2c\,,$$

o lo que es lo mismo, multiplicando por y

$$x^2 + y^2 \ = \ 2cy\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

3.2 Reacciones químicas de primer orden y desintegración

En general no es dificil observar en la naturaleza diversas reacciones químicas entre elementos. Por ejemplo, si una moléculas de cierto tipo, por la acción del medio,

tienen tendencia a desintegrarse en moléculas más pequeñas a un ritmo que no se ve afectado por la presencia de otras sustancias, es natural pensar que el número de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo sea proporcional al número total presente (reacción química de primer orden).
Supongamos que en $t = 0$ se tienen x_0 gramos. Si denotamos por $x(t)$ el número de gramos presentes en el instante t (luego $x(0) = x_0$), tendremos que $\frac{dx}{dt}$ es el ritmo de crecimiento de x y $-\frac{dx}{dt}$ es el ritmo de decrecimiento. De esta forma si $k > 0$ es la constante de proporcionalidad, tenemos la ecuación

$$-\frac{dx}{dt} = kx\,.$$

Integrando se obtiene

$$\ln(x) - \ln(x_0) \;=\; -kt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; x_0 e^{-kt}\,.$$

Se llama **semi vida** T al tiempo requerido para que la sustancia se reduzca a la mitad. De esta forma

$$\frac{x_0}{2} \;=\; x_0 e^{-kT} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2} \;=\; e^{-kT} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(2) \;=\; -kT \quad\Longrightarrow\quad T \;=\; \frac{\ln(2)}{k}\,\cdot$$

Por lo tanto, si se conocen k o T experimentalmente, por esta relación se conoce la otra cantidad.

Ejemplo 3.2.1. Desintegración radioactiva.

El radio carbono tiene semi vida de más o menos 5.600 años. Este se produce en la alta atmósfera por la acción de rayos cósmicos sobre el nitrógeno. El radio carbono por oxidación pasa a dióxido de carbono y este se mezcla (por el viento) con el dióxido de carbono no radiactivo ya presente.
La proporción en el carbono ordinario ha alcanzado hace tiempo un estado de equilibrio.
Todas las plantas y los animales que comen plantas, incorporan esta proporción de radio carbono en sus tejidos. Mientras el animal o la planta viven, esta proporción permanece constante. Pero al morir deja de absorber radio carbono y el que había en el momento de morir sigue desintegrándose.
Así si un fragmento de madera antigua tiene la mitad de radioactividad que un árbol vivo, éste vivió hace unos 5.600 años ($= T$). Si solo tiene la cuarta parte, determinemos el tiempo $\tilde{t}$ en que vivió. Tenemos entonces

$$\frac{x_0}{4} \;=\; x_0 e^{-k\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{4} \;=\; e^{-k\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(4) \;=\; -k\tilde{t}\,,$$

y luego

$$2\ln(2) \;=\; \frac{\ln(2)}{T}\tilde{t} \quad\Longrightarrow\quad \tilde{t} \;=\; 2T \;=\; 11.200 \quad (\text{años aproximadamente})\,.$$

Esto proporciona un método para poner fecha a cualquier objeto antiguo de origen orgánico: madera, carbón, fibra vegetal, huesos, cuernos o piel.

Ejemplo 3.2.2. Si la vida media de una sustancia reactiva es de 32 dias. Determinemos el tiempo $\tilde{t}$ en que 24 Kilos se convierten en 3 Kilos.

Tenemos
$$x(0) \;=\; 24 \quad \text{y} \quad 32 \;=\; T \;=\; \frac{\ln(2)}{k} \quad \Longrightarrow \quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{32}\,.$$
Entonces debemos tener
$$3 \;=\; x(\tilde{t}) \;=\; 24e^{-k\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8} \;=\; e^{-k\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad k\tilde{t} \;=\; \ln(8)\,,$$
lo que implica
$$\tilde{t} \;=\; \frac{3\ln(2)}{k} \;=\; 3\cdot 32 \;=\; 96 \quad \text{días}\,.$$

Ejercicios 3.2.3. Resuelva

1.- Si el 25 % de una sustancia radiactiva se desintegra en 100 años. ¿ Cual es la vida media ?

2.- En un proceso con una sustancia radiactiva se hacen dos mediciones. La primera, dos horas después de iniciado el proceso arroja la cantidad de 100 mgr.; la segunda, una hora después, indica la presencia de 8 mgr. ¿ Cual es la cantidad original de sustancia radiactiva ?

3.- Usando carbono 14 (C^{14}) cuya vida media es 5.568 años, determine la edad de un fósil humano que contiene 25,2 mgr. de C^{14}, si la cantidad presente en un ser humano vivo es 53,8 mgr.

Ejemplo 3.2.4. Crecimiento de bacterias.

Sea $N(t)$ la cantidad de bacterias presentes en el instante t. Entonces
$$\frac{dN}{dt} \;=\; \text{Nacimientos} \quad - \quad \text{Muertes} \;=\; a(t)N \;-\; b(t)N\,,$$
donde $a(t)$ (respectivamente, $b(t)$) es la proporción de nacimientos (resp., muertes) con respecto a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Entonces, tenemos la ecuación
$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} \;=\; a(t) \;-\; b(t)\,, \quad \Longrightarrow \quad N(t) \;=\; N(0)e^{\int_0^t (a(s)-b(s))ds}\,.$$

Por ejemplo si $a(t) = a$ y $b(t) = b$, tenemos $N(t) = N(0)e^{(a-b)t}$.

Ejemplo 3.2.5. Suponga que conoce $N(0)$ y $N(t_1)$. ¿ Cuanto tiempo $\tilde{t}$ debe transcurrir para tener $\bar{N}$ bacterias ?

Llamemos $N_0 = N(0)$ y $N_1 = N(t_1)$. Entonces

$$N(t) \;=\; N_0 e^{(a-b)t}\,, \quad \text{y}$$

$$N_1 \;=\; N(t_1) \;=\; N_0 e^{(a-b)t_1} \quad \Longrightarrow \quad a-b \;=\; \frac{\ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right)}{t_1}\,.$$

Por lo tanto

$$\bar{N} \;=\; N(\tilde{t}) \;=\; N_0 e^{(a-b)\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{t} \;=\; \frac{\ln\left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)}{a-b} \;=\; t_1 \frac{\ln\left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right)}\,.$$

Ejemplo 3.2.6. Una superficie electrizada se descarga con una velocidad proporcional a la carga. Hallar la carga en función del tiempo.

Si designamos por $C(t)$ la carga presente en el instante t, nuestra ecuación es nuevamente

$$\frac{dC}{dt} \;=\; -kC\,.$$

Por lo tanto

$$C(t) \;=\; C_0 e^{-kt}\,.$$

Ejemplo 3.2.7. Ley de enfriamiento de Newton.
La velocidad con que se enfría una sustancia en el aire es proporcional a la diferencia de la temperatura de la sustancia y la del aire.

Si designamos por $T_s(t)$ y T_m respectivamente, la temperatura de la sustancia en el instante t y la temperatura (que suponemos constante) del medio (aire) en que se encuentra la sustancia, nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dT_s}{dt} \;=\; -k(T_s(t) - T_m)\,.$$

Separando variables

$$\frac{dT_s}{T_s(t) - T_m} \;=\; -kdt\,,$$

e integrando entre 0 y t

$$\ln\left(\frac{T_s(t) - T_m}{T_s(0) - T_m}\right) \;=\; -kt\,,$$

obtenemos la solución

$$T_s(t) \;=\; T_m + (T_s(0) - T_m)e^{-kt}\,.$$

Por ejemplo, si la temperatura del aire es de 20^0 y la sustancia se enfría de 100^0 a 60^0 en 30 minutos, calculemos en que instante la temperatura de la sustancia será de 40^0.

Tenemos

$$T_s(0) \;=\; 100\,, \quad T_m \;=\; 20\,, \quad T_s(30) \;=\; 60\,.$$

Luego

$$T_s(t) \;=\; 20 \;+\; 80e^{-kt}\,.$$

Evaluando en $t = 30$ obtenemos

$$60 \;=\; 20 \;+\; 80e^{-30k}\,,$$

lo que implica

$$\frac{1}{2} \;=\; e^{-30k} \quad \Longrightarrow \quad -\ln(2) \;=\; -30k \quad \Longrightarrow \quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{30}\,\cdot$$

Sea $\tilde{t}$ el tiempo buscado. Entonces

$$40 \;=\; 20 \;+\; 80e^{-\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \;=\; e^{-\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad -2\ln(2) \;=\; -\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}\,,$$

lo que implica

$$\tilde{t} \;=\; 60\,\text{minutos}\,.$$

3.3 Procesos químicos simples

Suponemos que A y B son compuestos químicos que reaccionan entre ellos de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -k_1A \;+\; k_2B \\ \dot{B} &= k_1A \;-\; k_2B\,. \end{aligned}$$

Asumimos $A(0) \;=\; A_0 > 0$, $B(0) \;=\; 0$ y $A(t) \;+\; B(t) \;\equiv\; A_0$ para todo t. Entonces $B(t) \;=\; A_0 \;-\; A(t)$ y nuestra primera ecuación diferencial se transforma en la ecuación lineal de primer orden

$$\dot{A} \;+\; (k_1 \;+\; k_2)A \;=\; k_2A_0\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{-\int_0^t (k_1+k_2)ds}\left[A_0 \;+\; \int_0^t e^{\int_0^u (k_1+k_2)ds}k_2A_0du\right] \\ &= e^{-(k_1+k_2)t}\left[A_0 \;+\; k_2A_0\int_0^t e^{(k_1+k_2)u}du\right] \\ &= e^{-(k_1+k_2)t}\left[A_0 \;+\; \frac{k_2A_0}{k_1+k_2}\left(e^{(k_1+k_2)t} - 1\right)\right] \\ &= A_0\left[1 \;-\; \frac{k_2}{k_1+k_2}\right]e^{-(k_1+k_2)t} \;+\; \frac{k_2A_0}{k_1+k_2} \\ &= \frac{k_1A_0}{k_1+k_2}e^{-(k_1+k_2)t} \;+\; \frac{k_2A_0}{k_1+k_2}\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B(t) &= A_0 - A(t) = A_0 - \frac{k_1 A_0}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} - \frac{k_2 A_0}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{k_1 A_0}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right] . \end{aligned}$$

Observe que si ponemos

$$A_e = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{k_2 A_0}{k_1 + k_2} \quad \text{y} \quad B_e = \lim_{t\to\infty} B(t) = \frac{k_1 A_0}{k_1 + k_2} ,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} A(t) &= B_e e^{-(k_1+k_2)t} + A_e \quad \text{y} \\ B(t) &= B_e \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right] . \end{aligned}$$

Observe finalmente que los valores de k_1 y k_2, que en general se obtienen experimentalmente, verifican

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{A_0 - A_e}{A(t) - A_e} \right) = k_1 + k_2 = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{B_e}{B_e - B(t)} \right) .$$

3.4 Circuitos eléctricos simples

Sabemos que las leyes de Newton nos permiten establecer relaciones entre las fuerzas que afectan a un sistema mecánico. De manera similar , las leyes de Kirchhoff (1824-1887) nos permiten establecer relaciones entre los elemnetos que proveen y usan energia en un circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico es un dispositivo que permite la circulación de un campo eléctrico. Un campo eléctrico es el campo de fuerza asociado a un carga eléctrica. Finalmente, la carga eléctrica es uno de los constituyentes básicos de la materia y se reconocen dos tipos que son arbitrariamente designados como positiva y negativa. El principio general es que cargan iguales se atraen y cargas opuestas se repelen. La velocidad de la carga eléctrica se denomina *corriente*. Esto es: si q es la carga, entonces la corriente es $I = \frac{dq}{dt}$.

En un circuito eléctrico se reconocen elementos activos y pasivos. Elementos activos son baterías, pilas, motores eléctricos. Elementos pasivos son resistores, inductores y capacitores.

Por ejemplo, consideremos un circuito R L C en serie como en la Figura 3.3. Consta de tres ramas: una resistencia R, un autoinductor L y un capacitor C.
Una rama se puede considerar como un mecanismo eléctrico con dos terminales. Por ejemplo la rama C tiene terminales β y γ. Estos terminales se conectan entre si para formar los nodos α, β, γ.
Por cada rama circula una corriente cuya intensidad se mide por un número real,

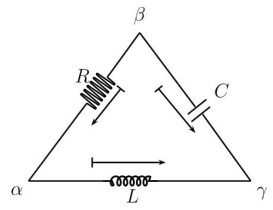

Figure 3.3: Circuito R L C

digamos, i_R, i_L, i_C, donde por ejemplo, i_R es la intensidad a través del resistor.
Las flechas del diagrama que orientan las ramas indican el sentido en que fluye la corriente. Si $i_R > 0$, entonces fluye de β a α.

Ley de Kirchhoff para las intensidades: La suma de las intensidades de corriente que van hacia un nodo es igual a la suma de las que se alejan.

Esto también puede enunciarse como *la cantidad neta de corriente a través de cada nodo es cero.*

En nuestro caso
$$i_R = i_L \, , \; i_L = -i_C \, .$$

El estado del circuito está caracterizado por la intensidad $i = (i_R, i_L, i_C)$ junto con la tensión (voltaje), o bien, las caídas de tensión (caídas de voltaje) en cada rama. Sean estas v_R, v_L, v_C.
Para medir la tensión se coloca un voltímetro en cada uno de los nodos α, β, γ que marca $v(\alpha), v(\beta), v(\gamma)$. Entonces
$$v_R = v(\beta) - v(\alpha) \, , \; v_L = v(\alpha) - v(\gamma) \, , \; v_C = v(\beta) - v(\gamma) \, .$$

Ley de Kirchhoff para las tensiones: $v_R + v_L - v_C = 0$ (en nuestro circuito, Figura 3.3).

Este es un caso particular de la Ley de Kirchhoff para tensiones que dice que *la caída neta de voltaje en un circuito cerrado es cero.*

Si se considera el circuito
se tiene
$$i_R = i_L = i_C \quad \text{y} \quad v_R + v_L + v_C = 0 \, .$$

Ley de Ohm: La caída de voltaje v_R a través de un resistor es proporcional a la corriente I que pasa por el resistor.
$$v_R = RI \, .$$

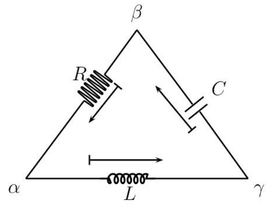

Figure 3.4: Circuito R L C

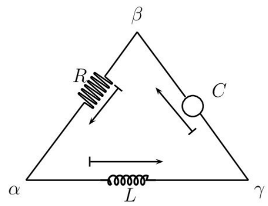

Figure 3.5: Circuito R L C

Leyes de Faraday y Lenz: La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional a la razón de cambio instantáneo de la corriente.

$$v_L \;=\; L\frac{dI}{dt}\;.$$

Si consideramos el circuito
donde $E \;=\; E(t)$ es una fuerza electromotriz que proporciona un voltaje (o energía potencial) al circuito en el instante t.

Ley de conservación de voltajes de Kirchhoff: $v_L \;+\; v_R \;=\; E(t)$.
Obtenemos así la ecuación lineal de primer orden

$$RI \;+\; L\frac{dI}{dt} \;=\; E(t)\;.$$

En el caso en que $E(t) \;=\; E_0$ es constante,

$$L\frac{dI}{dt} \;+\; RI \;=\; E_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dI}{dt} \;+\; \frac{R}{L}I \;=\; \frac{E_0}{L}$$

cuya solución es

$$I(t) \;=\; e^{-\frac{R}{L}t}\left[I(0) \;+\; \frac{E_0}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t}-1\right)\right]\;.$$

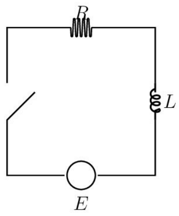

Figure 3.6: Condición $I(0) = 0$.

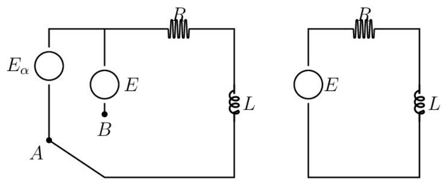

Figure 3.7: Condición $I(0) > 0$.

Observaciones 3.4.1. Imponer la condición $I(0) = 0$ quiere decir que en el instante inicial no circula corriente por el circuito. En este caso antes de iniciar el circuito nuestra situación puede ser como la mostrada en la Figura 3.6.

Una condición del tipo $I(0) > 0$ se obtiene cuando existe otra fuerza electromotriz constante E_α que se aplica por un tiempo apropiado para obtener una corriente estacionaria $I(0)$ (Lado izquierdo de Figura 3.7).
En el instante $t = 0$ el interruptor pasa del punto A al punto B cerrando un circuito propulsado por una fuerza electromotriz E (Lado derecho de Figura 3.7).
En este caso la ecuación es

$$I' + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} , \quad I(0) = I_0 > 0 .$$

Otra situación se presenta cuando no hay fuerza electromotriz en un circuito R - L. Antes de activarse el circuito podemos tener la situación del lado derecho de la Figura 3.8.
En el instante $t = 0$ el interruptor pasa del punto A al punto B, cerrándose un circuito que no tiene fuerza electromotriz (lado izquierdo de la Figura 3.8).
La ecuación es

$$I' + \frac{R}{L} I = 0 , \quad I(0) = I_0 > 0 ,$$

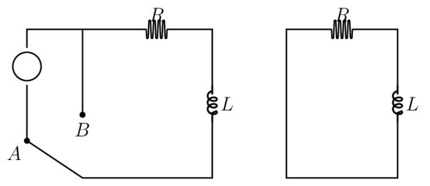

Figure 3.8: Circuito R - L sin fuerza electromotriz.

cuya solución es

$$I(t) \;=\; I(0)e^{-\frac{R}{L}t} \,.$$

Observe que el circuito se *descarga* una vez que la fuente de voltaje a sido suprimida.

Frecuentemente $E(t)$ es de la forma

$$E(t) \;=\; E_0\cos(\omega t) \qquad \text{(fuerza electromotriz alterna)}$$

Se tiene la ecuación

$$I' \;+\; \frac{R}{L}I \;=\; \frac{E_0}{L}\cos(\omega t) \;,$$

y suponiendo $I(0) \;=\; 0$, se tiene la solución

$$I(t) \;=\; \frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t e^{\frac{R}{L}u}\cos(\omega u)du \;,$$

o bien

$$I(t) \;=\; \frac{E_0}{\frac{R^2}{L}+\omega^2 L}\left(\frac{R}{L}\cos(\omega t) \;+\; \omega \text{sen}(\omega t)\right) \;-\; \frac{E_0 R}{R^2+L^2\omega^2}\,e^{-\frac{R}{L}t} \;.$$

3.5 Problemas de mezclas

Para la obtención de un remedio, de una pintura, de un trago preparado, es necesario mezclar diversos ingredientes los cuales hacen parte de una solución perfectamemnte homogeneizada (esto es: no importa la muestra, la distribución de ingredientes es siempre la misma). Por ejemplo, consideremos un recipiente de V litros de capacidad que contiene una solución perfectamente homogeneizada (por ejemplo: agua y sal) como en la Figura 3.9.
Se accionan simultáneamente las llaves A y B, haciendo ingresar por A agua pura a razón de $a\ lts/min$ y se extrae solución por B en la misma proporción.

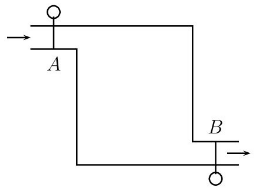

Figure 3.9: Problema de mezcla.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal presente en un instante t posterior. Entonces

$$\frac{x(t)}{V} \quad \text{es la cantidad de sal por litro en el recipiente,}$$

y la variación de la cantidad de sal es

$$\dot{x} \;=\; -a\,\frac{x(t)}{V} \;\cdot$$

De esta forma

$$x(t) \;=\; x(0)\,e^{-\frac{a}{V}t}\;.$$

Si en lugar de agua pura entra una solución que contiene c gramos de sal por litro, entonces

$$\dot{x} \;=\; a\cdot c \;-\; a\,\frac{x(t)}{V}\;,$$

es decir

$$\frac{dx}{x - V\cdot c} \;=\; -\frac{a}{V}\,dt \quad\longrightarrow\quad x(t) \;=\; V\cdot c \;+\; (x(0) \;-\; V\cdot c)\,e^{-\frac{a}{V}t}\;.$$

Las múltiples posibilidades que se presentan en los problemas de mezclas se reducen a la ecuación

$$\dot{x} \;= e(t) \;-\; s(t)\;,$$

donde $e(t)$ y $s(t)$, son respectivamente, la cantidad de sal que se añade y se retira en el instante de t.

Ejemplo 3.5.1. Considere el mismo recipiente de la Figura 3.9 y suponga que de nuevo por la llave A entra agua pura a razón de a lts/min; pero que por la llave B sale solución a razón de b lts/min, con $b > a$.

Tenemos entonces

- $e(t) \;=\; 0$ (no hay entrada de sal).

- $V \;-\; (b-a)\,t$: es la cantidad de líquido presente en el instante t.
- $\frac{x(t)}{V \,-\, (b-a)\,t}$: es la cantidad de sal por litro en el instante t.

Luego

$$s(t) \;=\; \frac{x(t)}{V \;-\; (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; -\frac{x\,b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dx}{x} \;=\; -\frac{b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,dt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; x(0)\left[1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right]^{\frac{b}{b-a}}\,.$$

Ejemplo 3.5.2. Suponga la misma situación anterior, pero entrando por A en lugar de agua pura, solución con concentración de c gramos por litro.

Tenemos

$$e(t) \;=\; c\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot a\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

$$s(t) \;=\; \frac{x}{V \;-\; (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; c\,a - \frac{x\,b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,.$$

Esta es la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} \;+\; \frac{b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,x \;=\; c\,a\,,$$

cuya solución es

$$x(t) \;=\; cV\left(1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right) \;+\; (x(0) - cV)\left(1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right)^{\frac{b}{b-a}}\,.$$

Ejemplo 3.5.3. Consideremos ahora dos tanques como en la Figura 3.10

Al primero de V_1 litros de capacidad entra agua pura a través de la llave A a razón de b lts/min. Por la llave B, también a razón de b lts/min sale solución del primer tanque y entra en el segundo. Finalmente del segundo tanque, por la llave C sale solución a razón de b lts/min.

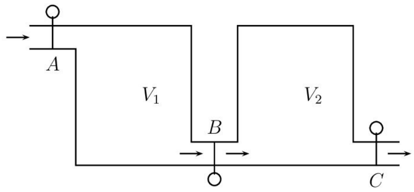

Figure 3.10: Problema de mezcla con dos tanques.

Sea $x_1(t), x_2(t)$ la cantidad de sal en el primer y segundo tanque, respectivamente, en el instante t. Tenemos entonces, en el primer tanque, razón de entrada $e_1(t) = 0$ y razón de salida

$$s_1(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \frac{\text{grs}}{\text{lt}}\, b\, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \,.$$

Por otra parte, en el segundo tanque, la razón de entrada $e_2(t)$ es igual a la razón de salida del primer tanque $s_1(t)$. Luego

$$e_2(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \frac{\text{grs}}{\text{lt}}\, b\, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \,,$$

y la razón de salida es

$$s_2(t) = \frac{x_2(t)}{V_2} \frac{\text{grs}}{\text{lt}}\, b\, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \,.$$

Tenemos así el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\frac{b}{V_1}\, x_1 \\ \\ \dot{x_2} = \frac{b}{V_1}\, x_1 - \frac{b}{V_2}\, x_2 \end{cases}$$

Consideremos ahora $b = 2$ lt/min, $V_1 = 1$ lt, $V_2 = 2$ lt y las condiciones iniciales $x_1(0) = 5$ gr y $x_2(0) = 6$ gr y tratemos de determinar cuanto debe funcionar el sistema para que del segundo tanque empiece a salir solución con concentración por debajo de 1 gr/lt.
Con estos valores tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2\, x_1 \\ \\ \dot{x_2} = 2\, x_1 - x_2 \end{cases}$$

Resolviendo la primera ecuación obtenemos

$$x_1(t) = 5e^{-2t} \,,$$

y reemplazando en la segunda ecuación tenemos la ecuación lineal

$$\dot{x_2} \; + \; x_2 \; = \; 10e^{-2t} \; .$$

Por lo tanto, usando la Fórmula de Leibniz (2.34),

$$x_2(t) \; = \; e^{-t}\left(\int_0^t e^t 10e^{-2t}dt + 6\right) \quad \Longrightarrow \quad x_2(t) \; = \; 16e^{-t} \; - \; 10e^{-2t} \; .$$

Debemos encontrar $\bar{t}$ tal que

$$\frac{x_2(\bar{t})}{V_2} \; = \; 1 \quad \text{es decir} \quad 16e^{-\bar{t}} \; - \; 10e^{-2\bar{t}} \; = \; 2 \; .$$

Poniendo $u = e^{-\bar{t}}$ y dividiendo por 2 tenemos la ecuación

$$5u^2 - 8u + 1 \; = \; 0 \; ,$$

cuyas soluciones son

$$u_1 \; = \; \frac{4+\sqrt{11}}{5} \sim 1.46 \quad \text{y} \quad u_2 \; = \; \frac{4-\sqrt{11}}{5} \sim 0.1368 \; .$$

Como para t positivo $u = e^{-t} < 1$, tenemos que

$$u_2 = e^{-\bar{t}} \quad \Longrightarrow \quad \bar{t} \sim 1,989 \; .$$

Ejemplo 3.5.4. Queremos inyectar un medicamento en un órgano humano. Supongamos que el volumen de circulación sanguínea del órgano es 150 cm^3 y que se inyectan 1 cm^3/min de agua destilada con 0.3 mgr/cm^3 de concentración de medicamento. La sangre entra al órgano a la misma razón que sale. Si en el instante inicial no hay presencia del medicamento ¿ En qué momento la concentración del medicamento en el órgano será de 0.05 mgr/cm^3?

Si designamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t, tenemos $x(0) \; = \; 0$ y nuestra ecuación es

$$\dot{x} \; = \; 0.3 \cdot 1 \; - \; \frac{x}{150} \cdot 1 \; .$$

Tenemos entonces la ecuación lineal

$$\dot{x} \; + \; \frac{x}{150} \; = \; 0.3 \; ,$$

cuya solución es

$$x(t) \; = \; 45 \; - \; 45e^{-\frac{1}{150}t} \; .$$

Queremos encontrar $\bar{t}$ tal que

$$\frac{x(\bar{t}\,)}{150} \;=\; 0.05 \;=\; \frac{5}{100}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(\bar{t}\,) \;=\; \frac{75}{10} \;=\; 7.5 \;&\Longrightarrow\; 45 \;-\; 45e^{-\frac{1}{150}\bar{t}} \;=\; 7.5 \\ &\Longrightarrow\; e^{-\frac{1}{150}\bar{t}} \;=\; \frac{37.5}{45} \\ &\Longrightarrow\; -\frac{1}{150}\bar{t} \;=\; \ln\left(\frac{37.5}{45}\right) \\ &\Longrightarrow\; \bar{t} \;=\; -150\ln\left(\frac{37.5}{45}\right) \text{ min.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.5. Una solución de acido nítrico fluye a razón constante de 6 lts/min. hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 litros de una solución del mismo ácido al 0.5%. La solución contenida en el tanque se mantiene uniformemente distribuida y sale del tanque a razón de 8 lt/min. Si la solución que entra al tanque es del 20 % de ácido nítrico, determine la cantidad de este ácido presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿ En qué momento el % de ácido contenido en el tanque será de 10 % ?

Sea $x(t)$ la cantidad de ácido nítrico presente en el instante t.
Ingresan: 6 lt/min. al 20% , lo cual significa: 1.2 lt/min.

Salen: $\frac{8x}{200-2t}$ lt/min. luego de t minutos.
Luego la ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; 1.2 \;-\; \frac{4x}{100-t}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{100-t}x \;=\; 1.2\,.$$

La ecuación es lineal y su solución general es

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; e^{-4\int\frac{dt}{100-t}}\left[c \;+\; \int 1.2e^{4\int\frac{dt}{100-t}}dt\right] \\ &=\; e^{4\ln(100-t)}\left[c+1.2\int e^{-4\ln(100-t)}dt\right] \\ &=\; (100-t)^4\left[c+1.2\int(100-t)^{-4}dt\right] \\ &=\; (100-t)^4\left[c+\frac{1.2}{3}(100-t)^{-3}\right] \\ &=\; c(100-t)^4+0.4(100-t)\,. \end{aligned}$$

En $t = 0$ hay 200 lt. al 0.5% . Por lo tanto $x(0) = 1$lt. Así

$$1 = c \cdot 100^4 + 0.4 \cdot 100 \quad \Longrightarrow \quad c \; = \; -39 \cdot 100^{-4} \, .$$

Entonces

$$x(t) \; = \; 0.4(100 - t) - 39 \left(1 - \frac{t}{100} \right)^4 \, .$$

Ahora, si $\tilde{t}$ es el instante en que en el estanque hay 10% de ácido, debemos tener

$$100 \cdot \frac{x(\tilde{t}\,)}{200 - 2\tilde{t}} \; = \; 10$$

lo que implica

$$5 \left[0.4 - 39 \left(\frac{100 - \tilde{t}}{100} \right)^4 \frac{1}{100 - \tilde{t}} \right] \; = \; 1$$

es decir

$$2 - \frac{195}{100^4}(100 - \tilde{t}\,)^3 \; = \; 1$$

lo que implica

$$(100 - \tilde{t}\,)^3 \; = \; \frac{100^4}{195} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{t} = 19.9573 \text{ min.}$$

3.6 Problemas resueltos

Ejercicio 3.6.1. Dada una curva $y = y(x)$, sea $L_T(x)$ la longitud de la recta tangente entre el punto $P = (x, y(x))$ y su punto de intesección T con el eje OX.

a) Demuestre que

$$L_T(x) \; = \; \frac{y(x)}{y'(x)} \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, \cdot$$

b) Si a es una constante no nula, encuentre la ecuación diferencial de la familia de curvas que verifican

$$L_T(x) \; = \; a(y(x))^2 \, .$$

c) Demuestre que la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas del item b) está dada por

$$y(x) \; = \; \frac{1}{a} \cosh(ax + b) \, , \; b \in \mathbb{R} \, .$$

Solución. a) Tenemos en el triángulo TSP (Figura 3.11)

$$L_T \; = \; \bar{PT} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\theta) \; = \; \frac{\bar{PS}}{\bar{PT}} \; = \; \frac{y}{L_T} \, \cdot$$

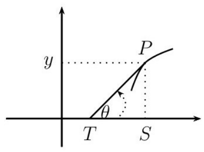

Figure 3.11: Curva $y = y(x)$.

Además

$$y' \;=\; \tan(\theta) \;=\; \operatorname{sen}(\theta)\cdot\sec(\theta) \;=\; \frac{y}{L_T}\cdot\sqrt{1+(y')^2}\;,$$

lo que implica

$$L_T \;=\; \frac{y}{y'}\sqrt{1+(y')^2}\cdot$$

b) Tenemos

$$ay^2 \;=\; \frac{y}{y'}\sqrt{1+(y')^2} \quad\Longrightarrow\quad ayy' \;=\; \sqrt{1+(y')^2} \quad\Longrightarrow\quad a^2y^2(y')^2 \;=\; 1+(y')^2\,.$$

Luego

$$(a^2y^2-1)(y')^2 \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{a^2y^2-1}\,y' \;=\; 1\,,$$

y obtenemos la ecuación diferencial

$$y' \;=\; \frac{1}{\sqrt{a^2y^2-1}}\cdot$$

c) La ecuación diferencial para las correspondientes trayectoria ortogonales es

$$y' \;=\; -\sqrt{a^2y^2-1}\cdot$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2-1}} \;=\; -dx\,,$$

e integrando

$$\frac{1}{a}\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2-1}\right) \;=\; -x-\frac{b}{a}\cdot$$

Por lo tanto

$$\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2-1}\right) \;=\; -(ax+b) \quad\Longrightarrow\quad ay+\sqrt{a^2y^2-1} \;=\; e^{-(ax+b)}\,.$$

Esto implica

$$ay = \frac{e^{ax+b} + e^{-(ax+b)}}{2},$$

y así

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax+b), \; b \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 3.6.2. Un profesor redacta las notas del curso con una rapidez proporcional al número de hojas ya escritas. Por otra parte sus alumnos son capaces de leer los apuntes con una velocidad constante. Al comenzar el curso, el profesor entrega 10 hojas a sus alumnos y posteriormente se las va proporcionando a medida que las escribe. Determine el atraso de uno de sus alumnos en la lectura de las notas al finalizar el 3^{er} trimestre si al cabo del primero llevaba un atraso de 20 páginas y al término de 6 meses un atraso de 70 páginas. Considere cada trimestre de tres meses sin receso entre cada uno de ellos.

Solución. Usemos las siguientes variables:

t : tiempo medido en meses.

$H(t)$: número de hojas escrita al cabo de t meses.

$L(t)$: número de hojas leídas al cabo de t meses.

Tenemos entonces los siguientes datos

$$H(0) = 10, \quad L(0) = 0, \quad H(1) = L(1) + 20, \quad H(2) = L(2) + 70,$$

y las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dH}{dt} = k\,H, \quad \frac{dL}{dt} = p.$$

Sea H el número de hojas (notas) ya escritas. Tenemos entonces

$$\frac{dH}{dt} = k\,H \quad \Longrightarrow \quad H(t) = ce^{kt}.$$

La condición inicial $H(0) = 10$ implica $c = 10$, y por lo tanto

$$H(t) = 10\,e^{kt}.$$

Por otra parte, si L es la variable que indica la lectura de los apuntes, entonces

$$\frac{dL}{dt} = p \quad \Longrightarrow \quad L(t) = p\,t + c_2.$$

La correspondiente condición inicial

$$L(0) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad L(t) \;=\; p\,t\,.$$

Además las relaciones

$$\begin{aligned} H(3) &\;=\; L(3) \;+\; 20\,, \\ H(6) &\;=\; L(6) \;+\; 70\,, \end{aligned}$$

implican el sistema

$$\begin{cases} 10\,e^{3k} \;=\; 3\,p \;+\; 20 \\ 10\,e^{6k} \;=\; 6\,p \;+\; 70\,. \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación con dos veces la primera y poniendo $x \;=\; e^{3k}$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$10\,x^2 \;-\; 20\,x \;=\; 30\,,$$

cuya solución positiva es $x \;=\; e^{3k} \;=\; 3$. De esta forma

$$k \;=\; \frac{\ln(3)}{3} \quad \text{y} \quad p \;=\; \frac{10}{3}\,.$$

Así

$$H(t) \;=\; 10\,e^{\left(\frac{\ln(3)}{3}\right)t}\,, \quad L(t) \;=\; \frac{10}{3}\,t\,,$$

y el número de páginas de atraso al cabo de 9 meses es

$$H(9) \;-\; L(9) \;=\; 10\,e^{3\ln(3)} \;-\; 30 \;=\; 270 \;-\; 30 \;=\; 240\,.$$

Ejercicio 3.6.3. Un modelo matemático para describir la población humana es $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$ donde $a = 0,029$ y $b = 2.695 \cdot 10^{-12}$. ¿Cuántos habitantes llegará a tener la Tierra según este modelo? Justifique sus afirmaciones.

Solución. La ecuación es de variables separables y se puede escribir de la forma

$$\frac{dx}{ax - bx^2} \;=\; dt\,,$$

o bien

$$dt = \;=\; \frac{1}{a}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\dfrac{a}{b} - x}\right]\,.$$

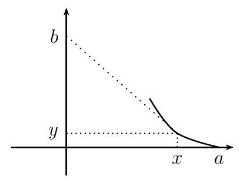

Figure 3.12: Curva $y = y(x)$.

Luego integrando obtenemos

$$a\,t \;+\; c \;=\; \ln\left(\frac{x}{\dfrac{a}{b} - x}\right) \,,$$

de donde

$$\frac{bx}{a-bx} \;=\; c\,e^{at} \quad \Longrightarrow x(t) \;=\; \frac{a}{b}\,\frac{ce^{t}}{1+ce^{at}}\,.$$

La cantidad de habitantes que llegará a tener la Tierra se obtiene calculando

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \;=\; \frac{a}{b} \;=\; 1.076\cdot 10^{10}\,.$$

Ejercicio 3.6.4. Un esquiador acuático ubicado en el punto $(a,0)$ es tirado por un bote localizado en el origen y que viaja hacia arriba a lo largo del eje OY. Hallar la trayectoria del esquiador si éste se dirige en todo momento al bote.

Solución. Supongamos que en el instante $t>0$ el bote está en el punto $(0,b)$ y que el esquiador está en el punto (x,y) (Figura 3.12).

Debemos tener entonces

$$x^2 + (y-b)^2 \;=\; a^2 \quad\Longrightarrow\quad |\;y-b\;| = \;\sqrt{a^2-x^2} \quad\Longrightarrow\quad b-y = \sqrt{a^2-x^2}\,,$$

ya que $b>y$.

Como la curva $y=y(x)$ es decreciente tenemos también

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{b-y}{x} \;=\; -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,.$$

Luego como $y(a)=0$, integrando obtenemos

$$y(x) \;=\; -\int_a^x \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du\,\cdot$$

Para calcular esta integral ponemos $u = a\cos(t)$, que implica $du = -a\text{sen}(t)$ y $\sqrt{a^2-u^2} = a\text{sen}(t)$. Así

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^{\arccos\left(\frac{x}{a}\right)} \frac{a^2\text{sen}^2(t)}{a\cos(t)}dt \;=\; a\int_0^{\arccos\left(\frac{x}{a}\right)} (\sec(t)-\cos(t))dt \\
&= a\left[\ln(\sec(t)+\tan(t)) - \text{sen}(t)\right] \Big/_{0}^{\arccos\left(\frac{x}{a}\right)} \\
&= a\left[\ln\left(\frac{a}{x} + \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}}\right) - \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right] \\
&= a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3.6.5. Considere un tanque que contiene 1.000 litros de agua, dentro del cual una solución salada de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 litros por minuto. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de 5 litros por minuto. Si la concentración de sal en la salmuera que entra al tanque es de 1 kilógramo por litro, determine cuando será de 63/64 kilógramo por litro la concentración de sal en el tanque.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t. Entonces la velocidad de entrada de sal al tanque en el instante t es

$$e(t) \;=\; 6\,\frac{\text{lt}}{\text{min}}\cdot 1\,\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\,.$$

También en el instante t, la cantidad de líquido en el tanque es de

$$V(t) \;=\; 1.000 + (6-5)t\ \text{lt}\,,$$

la concentración es

$$\frac{x(t)}{1.000+t}\,\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\,,$$

y la velocidad de salida de sal es

$$s(t) \;=\; 5\,\frac{\text{lt}}{\text{min}}\cdot\frac{x(t)}{1.000+t}\,\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\,.$$

Luego nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; 6 \;-\; \frac{5x}{1000+t}\,, \quad x(0) = 0\,.$$

Para resolverla, consideramos primero la ecuación homogénea

$$\frac{dx}{dt} \;=\; -\,\frac{5x}{1000+t}\,,$$

que se puede escribir

$$\frac{dx}{x} \;=\; -\,\frac{5}{1000+t}\,dt\,.$$

La solución de la homogénea es

$$x_h(t) \;=\; \frac{c}{(1000+t)^5}\,.$$

Haciendo variar la constante $c = c(t)$ y reemplazando en la no homogénea obtenemos

$$\frac{c'(x)}{(1000+t)^5} \;=\; 6 \quad\Longrightarrow\quad c'(x) \;=\; 6(1000+t)^5 \quad\Longrightarrow\quad c(t) \;=\; (1000+t)^6 + c\,.$$

Por lo tanto

$$x(t) \;=\; 1000 + t + \frac{c}{(1000+t)^5}\,.$$

Como $x(0) = 0$, tenemos $c = -1000^6$, y entonces nuestra solución es

$$x(t) \;=\; 1000 + t - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}\,.$$

Así, la concentración del sal en el estanque en el instante t es

$$\frac{1000 + t - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}}{1000+t} \;=\; 1 - \frac{1000^6}{(1000+t)^6}\,.$$

Tenemos que encontrar t tal que

$$1 - \frac{1000^6}{(1000+t)^6} \;=\; \frac{63}{64}\,.$$

Entonces

$$\frac{1}{64} \;=\; \frac{1000^6}{(1000+t)^6} \quad\Longrightarrow\quad (1000+t)^6 \;=\; 64\cdot 1000^6 \quad\Longrightarrow\quad 1000+t \;=\; 2000\,,$$

y por lo tanto

$$t \;=\; 1000\ \mathrm{min}\,.$$

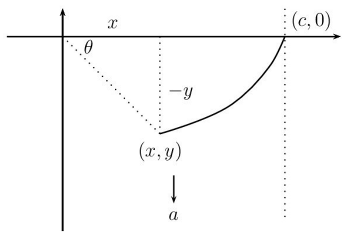

Figure 3.13: Curva $y = y(x)$.

Ejercicio 3.6.6. El eje OY y la recta $x = c$ son las orillas de un río cuya corriente fluye a velocidad uniforme a en la dirección de y negativa. Una barca entra al río por el punto $(c, 0)$ y se dirige hacia el origen con velocidad b relativa al agua (Figura 3.13). ¿Qué trayectoria seguirá la barca? Determine condiciones para a y b que permitan a la barca alcanzar la otra orilla. ¿En qué punto tocará tierra?

Solución. Las componentes de la velocidad de la barca son

$$\frac{dx}{dt} = -b\cos(\theta) \qquad \frac{dy}{dt} = -a + b\text{sen}(\theta)\,,$$

lo que implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a + b\text{sen}(\theta)}{-b\cos(\theta)} = \frac{-a + b\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}\,,$$

que se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\,\cdot$$

Haciendo el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$, obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} + z\right) - \frac{1}{x}\,z\,,$$

es decir la ecuación

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{b}\,\frac{1}{x}\,\sqrt{1+z^2}\,\cdot$$

Separando variables tenemos

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a}{b}\,\frac{dx}{x}\,,$$

integrando

$$\ln\left(z \;+\; \sqrt{1+z^2}\right) \;=\; \frac{a}{b}\;\ln(x) \;+\; \ln(C)\,,$$

y exponenciando

$$z \;+\; \sqrt{1+z^2} \;=\; C\,x^{\frac{a}{b}}\,.$$

Despejando z obtenemos

$$z \;=\; \frac{1}{2}\left[C\,x^{\frac{a}{b}} \;-\; \frac{1}{C}\,x^{-\frac{a}{b}}\right]\,,$$

lo que implica

$$y(x) \;=\; \frac{1}{2}\,x\,\left[C\,x^{\frac{a}{b}} \;-\; \frac{1}{C}\,x^{-\frac{a}{b}}\right]\,.$$

Imponiendo la condición inicial $y(c) \;=\; 0$, obtenemos

$$C\,c^{\frac{a}{b}} \;=\; \frac{1}{C}\,c^{-\frac{a}{b}} \quad\Longrightarrow\quad C \;=\; c^{-\frac{a}{b}}\,,$$

y por lo tanto

$$y(x) \;=\; \frac{c}{2}\,\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{1+\frac{a}{b}} \;-\; \left(\frac{x}{c}\right)^{1-\frac{a}{b}}\right]\,.$$

Observemos que la barca llegará a la otra orilla del río solo si $y(x)$ está definido en $x=0$. Para que esto ocurra debemos tener $1-\frac{a}{b}\geq 0$, es decir $b\geq a$.

Para $b>a$ tenemos $y(0)=0$, y luego la barca llega a la otra orilla en el punto $(0,0)$. Pero si $b=a$, tenemos

$$y(x) \;=\; \frac{c}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{2} \;-\; 1\right]\,,$$

y por lo tanto la barca llega al otro lado en el punto $(0,-\frac{c}{2})$.

Ejercicio 3.6.7. Una fábrica de papel está situada cerca de un río con un fluido constante de 1000 m^3/seg, el cual va a dar a la única entrada de un lago de volumen 10^9 m^3. Suponga que en el instante $t=0$, la fábrica de papel comienza a bombear contaminantes en el río a razón de 1 m^3/seg y que la entrada y salida de agua del lago son constantes e iguales. ¿Cuál será la concentración de contaminantes en el lago en cualquier tiempo t?

Solución. Tenemos $V\;=\;10^9$, velocidad de entrada y salida de agua del lago es $a=b=1001$, y la concentración de contaminantes en el agua que entra al lago es $c=1/1001$. Luego nuestra ecuación diferencial es

$$\dot{x} \;=\; \frac{1001}{1001} \;-\; \frac{x}{10^9}\,1001\,,$$

o bién

$$\dot{x} + \frac{1001\,x}{10^9} = 1 \cdot$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = c\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos una solución de la ecuación no-homogénea de la forma

$$x(t) = c(t)\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\,.$$

Entonces debemos tener

$$c'(t)\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t} = 1 \quad\Longrightarrow\quad c'(t) = e^{\frac{1001}{10^9}\,t} \quad\Longrightarrow\quad c(t) = \frac{10^9}{1001}\,e^{\frac{1001}{10^9}\,t} + c\,,$$

y luego

$$x(t) = \frac{10^9}{1001} + c\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\,.$$

Pero

$$0 = x(0) = \frac{10^9}{1001} + c \quad\Longrightarrow\quad c = -\frac{10^9}{1001}\,,$$

y por lo tanto

$$x(t) = \frac{10^9}{1001}\left(1 - e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\right)\,.$$

De esta forma la concentración de contaminantes en el lago en el tiempo t es

$$\frac{x(t)}{V} = \frac{1}{1001}\left(1 - e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\right)\,.$$

Ejercicio 3.6.8. Se ha determinado experimentalmente que la variación de peso de un tipo de pez varia según la ley

$$\frac{dp}{dt} = \alpha\,p^{2/3} - \beta\,p\,,$$

donde $p = p(t)$ representa el peso del pez y α, β son constantes positivas que caracterizan la especie. ¿Para qué valor del tiempo t le parece razonable autorizar la captura de peces de esta especie?

Solución. Como la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} + \beta\,p = \alpha\,p^{2/3}$$

es del tipo Bernoulli, hacemos el cambio de variables

$$u = p^{\frac{1}{3}} \quad \text{que implica} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{3}\,p^{-\frac{2}{3}}\,\frac{dp}{dt}\,.$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación lineal

$$3\,\frac{du}{dt} \;+\; \beta\, u \;=\; \alpha\,.$$

La solución es

$$u(t) \;=\; e^{-\int \frac{\beta}{3} dt} \left[c \;+\; \frac{\alpha}{3} \int e^{\frac{\beta}{3}t}\, dt \right] ,$$

es decir

$$u(t) \;=\; \frac{\alpha}{\beta} \;+\; c\, e^{-\frac{\beta}{3}t}\,.$$

Por lo tanto

$$p(t) \;=\; \left(\frac{\alpha}{\beta} \;+\; c\, e^{-\frac{\beta}{3}t} \right)^3 .$$

En el instante de nacer tenemos $p(0) \;=\; 0\,$. Luego $c \;=\; -\dfrac{\alpha}{\beta}$ y

$$p(t) \;=\; \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 \;-\; e^{-\frac{\beta}{3}t} \right) \right]^3 .$$

Como esta función es creciente, el mayor peso es

$$p_\infty \;=\; \lim_{t\to\infty} p(t) \;=\; \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 ,$$

y un tiempo razonable para autorizar la captura será, por ejemplo, aquél para el cual $p(t) \;\geq\; \dfrac{3}{4}\, p_\infty$, esto es

Ejercicio 3.6.9. En el interior de una casa, y en un cierto instante, el termómetro marca 70^o F. El termómetro se traslada al exterior de la casa, donde la temperatura del aire es de 10^o F. Tres minutos después el termómetro marca 25^o F. Determine la ecuación que permite conocer la temperatura del termómetro en el exterior de la casa en cualquier instante t.

Solución. Según la Ley de enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial es

$$\frac{dT}{dt} \;=\; -k\,(T \;-\; 10)\,,$$

y tenemos los datos

$$T(0) \;=\; 70\,, \quad T(3) \;=\; 25\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dT}{T-10} \;=\; -k\, dt \quad\Longrightarrow\quad \ln(T \;-\; 10) \;=\; -k\, t \;+\; c \quad\Longrightarrow\quad T(t) \;=\; 10 \;+\; c\, e^{-kt}\,.$$

La condición

$$T(0) \;=\; 70 \quad \Longrightarrow \quad c \;=\; 60 \quad \Longrightarrow \quad T(t) \;=\; 10 \;+\; 60\, e^{-kt}\,.$$

La otra condición

$$T(3) \;=\; 25 \quad \Longrightarrow \quad 25 \;=\; 10 + 60\, e^{-3k} \quad \Longrightarrow \quad e^{-3k} \;=\; \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad k \;=\; \frac{1}{3}\ln(4)\,.$$

Por lo tanto

$$T(t) \;=\; 10 \;+\; 60 \left[\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right]^t .$$

Ejercicio 3.6.10. Una barra de largo L, sección transversal A y densidad (masa por unidad de volumen) ρ_0 se sumerge en un líquido de densidad ρ. Recuerde que según el principio de Arquímides: *el líquido ejerce sobre el cuerpo que se sumerje una fuerza opuesta que es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.* Si x denota la parte de la barra sumergida, considerando una velocidad inicial v_0,

a) Obtenga la ecuación diferencial que describe al movimiento.

b) ¿ Hasta que profundidad desciende la barra?

c) Si $v_0 = 0$ ¿ cual es la condición para que la barra descienda completamente? ¿ Cual es la velocidad máxima de descenso?

Solución. a) Sea $m = L \cdot A \cdot \rho_0$ la masa de la barra y sea $t = 0$ el instante en que se comienza a sumergir la barra. Las fuerzas que actuan sobre el objeto son la fuerrza gravitacional $m\,g$ y la fuerza F_0 dada por el principio de Arquímides. Como $x(t)$ denota la longitud de la parte sumergida en el instante t y el peso del fluido por unidad de volumen es ρg, el peso del fluido desplazado en el instante t es $A\,x(t)\,\rho\,g$ y por lo tanto $F_0 \;=\; -A\,\rho\,g\,x(t)$. Entonces aplicando la Segunda Ley de Newton

$$m \cdot x'' \;=\; \text{suma de las fuerzas que actuan sobre el objeto}$$

se tiene la ecuación

$$m \cdot x'' \;=\; m\,g \;-\; A\,\rho\,g\,x(t)\,.$$

b) Haciendo $v \;=\; x'$, en las variables v y x la ecuación anterior queda

$$v\,\frac{dv}{dx} \;=\; g \;-\; \frac{A\,\rho\,g\,x}{m}\,.$$

Separando variables obtenemos

$$v\,dv \;=\; \left(g \;-\; \frac{A\,\rho\,g\,x}{m}\right)\,dx\,,$$

e integrando

$$\frac{1}{2}\,v^2 \;=\; g\,x \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{A\,\rho\,g}{m}\,x^2 \;+\; k\,.$$

Como en $t = 0$ tenemos $x = 0$ y $v = v_0$, se tiene

$$k \;=\; \frac{1}{2}\,v_0^2\,,$$

y así

$$v^2 \;=\; 2\,g\,x \;-\; \frac{A\,\rho\,g}{m}\,x^2 \;+\; v_0^2\,.$$

Poniendo el valor de m, se reduce a

$$v^2 \;=\; 2\,g\,x \;-\; \frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,x^2 \;+\; v_0^2\,.$$

La barra desciende hasta $v = 0$. Luego, para determinar hasta donde desciende la barra debemos resolver la ecuación cuadrática

$$\frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,x^2 \;-\; 2\,g\,x \;-\; v_0^2 \;=\; 0\,,$$

cuyas soluciones son

$$x \;=\; \frac{\rho_0\,L}{\rho\,g}\,\left[g \;\pm\; \sqrt{g^2 \;+\; \frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,v_0^2}\right]\,.$$

Luego la barra desciende hasta

$$x \;=\; \frac{\rho_0\,L}{\rho\,g}\,\left[g \;+\; \sqrt{g^2 \;+\; \frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,v_0^2}\right]\,.$$

c) Si $v_0 = 0$, la barra desciende hasta

$$x \;=\; 2\,\frac{\rho_0\,L}{\rho}\,,$$

y luego la barra desciende completamente en este caso si

$$2\,\frac{\rho_0\,L}{\rho} \geq L \quad\Longleftrightarrow\quad \rho_0 \geq \frac{\rho}{2}\,.$$

La velocidad máxima de descenso se obtiene cuando $\frac{dv}{dx} \;=\; 0$. Como

$$x'' \;=\; \frac{dv}{dt} \;=\; \frac{dv}{dx}\,v\,,$$

tenemos

$$\frac{dv}{dx} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad x'' \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad m\,g \;-\; A\,\rho\,g\,x \;=\; 0\,.$$

De esta forma la velocidad máxima de descenso se obtiene cuando

$$x \;=\; \frac{m}{A\,\rho} \;=\; \frac{L\,\rho_0}{\rho}\,.$$