Transformada de Laplace

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 3: Funciones Discretas.**

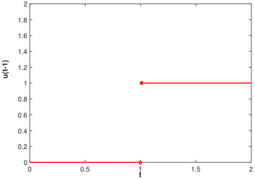
DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Funciones discontinuas

Definición: *La función escalón (o salto) en a se define como*

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a \end{cases}$$

Gráfico de $u(t-1)$:



Ejemplo: Sean

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2\pi, \\ \sin(t) & t \geq 2\pi \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 20t & 0 \leq t < 5, \\ 0 & t \geq 5 \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} h_1(t) & 0 \leq t < a, \\ h_2(t) & t \geq a \end{cases}$$

Se pueden escribir en términos de la función salto

$$f(t) = \sin(t)u(t-2\pi) \qquad g(t) = 20t - 20t\,u(t-5) \quad h(t) = h_1(t) + (-h_1(t) + h_2(t))u(t-a).$$

Podemos calcular la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(u(t-a))(s) = \int_0^a e^{-ts} \cdot 0dt + \int_a^\infty e^{-ts} \cdot 1dt = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{para} \quad s > 0 \,.$$

Teorema: Segundo Teorema de Traslación

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para $a > 0$ se tiene

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t)(s) \,.$$

Equivalentemente, si $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = f(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = f(t-a)u(t-a).$$

Demostración: En efecto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) &= \int_a^\infty e^{-ts} f\,\underbrace{(t-a)}_{u}\,dt = \int_0^\infty e^{-(u+a)s} f(u)du \\
&= e^{-as} \int_0^\infty e^{-us} f(u)du = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s) \,.
\end{aligned}$$

Ejemplo

1. Calculemos la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ t^2 & 2 \leq t < \infty \end{cases} .$$

En términos de la función salto se escribe

$$f(t) \;=\; t + (2 - t)u(t-1) + (t^2 - 2)u(t-2) .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}((2-t)u(t-1))(s) + \mathcal{L}((t^2-2)u(t-2))(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}((1-(t-1))u(t-1))(s) + \\ &\quad \mathcal{L}(2 + 4(t-2) + (t-2)^2)u(t-2))(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) e^{-s} + \left(\frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) e^{-2s} \end{aligned}$$

Ejemplo

2. Calculemos
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right)(t)\,.$$

Sea
$$f(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) \;=\; t\,.$$

Entonces
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right)(t) \quad &= \quad \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\,\mathcal{L}(f(t))(s)\right)(t) = f(t-2)u(t-2) \\
&= \quad (t-2)u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<2 \\ t-2 & \text{si} \quad t\geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ejemplo

La corriente I en un circuito RLC en serie está regida por la ecuación

$$I''(t) + 4I(t) \;=\; g(t)\,, \quad I(0) = I'(0) = 0\,.$$

con

$$g(t) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}\,.$$

Determine la corriente en función del tiempo.
Tenemos $g(t) = 1u(t-0) - 2u(t-1) + 1u(t-2)$. Si ponemos $\widehat{I}(s) = \mathcal{L}(I)(s)$ obtenemos

$$\mathcal{L}(I'')(s) = s^2\widehat{I}(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(g(t))(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\,.$$

Entonces aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación tenemos

$$\begin{aligned} s^2\widehat{I}(s) + 4\widehat{I}(s) &= \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\,, \quad \text{es } \textit{decir} \\ \widehat{I}(s) &= \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2+4)} + \frac{2e^{-2s}}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

Continuación

Notar que basta calcular la transformada inversa de $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$, en efecto

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \quad \text{(Fracciones Parciales)} \\
\Rightarrow \quad f(t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))
\end{aligned}
$$

Aplicando el segundo Teorema de Traslación ($\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = f(t-a)u(t-a)$):

$$\therefore \qquad I(t) = f(t) - 2f(t-1)u(t-1) + f(t-2)u(t-2)$$

$$= \frac{1}{4}(1-\cos(2t)) - \frac{1}{2}\left[1-\cos(2(t-1))\right]u(t-1) + \frac{1}{4}\left[1-\cos(2(t-2))\right]u(t-2)$$