Aproximación numérica de las soluciones

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Errores.**
- **Aproximación numérica de las soluciones.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Solución Numérica de un P.V.I.

Los métodos numéricos son útiles para resolver problemas diferenciales, para los cuales no existe un método para obtener la solución análitica (solución en términos de funciones elementales). Estos métodos proporcionan una sucesión de aproximaciones a la solución exacta en un conjunto finito de puntos.

Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación

$$y'(x) = e^{-x^2}.$$

Una solución sería

$$y(x) = \int e^{-x^2} dx + C,$$

pero sabemos que no existe una solución en términos de funciones comunes de cálculo elemental.

Solución Numérica de un P.V.I.

Los métodos numéricos para resolver el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \ \text{dado}, \end{cases} \tag{1}$$

se basan en tomar una partición en N subintervalos del intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

y obtener **sucesivamente** N números $y_1, y_2, \ldots, y_N$ que aproximan a los valores $y(x_1), \ldots, y(x_N)$ de la solución exacta en los **nodos** $x_1, \ldots, x_N$.
Típicamente los nodos se escogen equiespaciados; es decir, están definidos por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, N, \qquad \text{con } h = \frac{b-a}{N}.$$

Método de Euler (o de la Tangente)

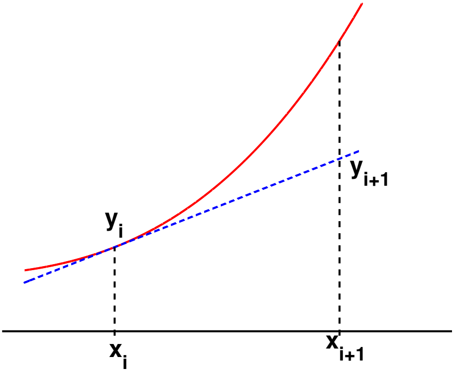
Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Una manera geométrica de aproximar la solución de este problema consiste en reemplazar la derivada y' por la aproximación

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

válida para h pequeño.



Haciendo este reemplazo en la ecuación se encuentra

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$

de donde,

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Partiendo de la condición inicial $y(a) = y_0$ y considerando h pequeño, el valor

$$y_1 := y(a) + hf(a, y(a))$$

define una aproximación para $y(a+h)$.
Una vez calculada esta aproximación, se puede utilizar para obtener la aproximación y_2 de $y(a+2h)$, a saber,

$$y_2 := y_1 + hf(a+h, y_1).$$

Repitiendo este proceso se pueden obtener aproximaciones para $y(a+3h)$, $y(a+4h)$, $\ldots$, $y(a+Nh)$.

Usando nodos x_i equiespaciados obtenemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo de Euler

Para $i = 0, \ldots, N-1$

$x_i = a + ih$

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

fin i.

Definición: El error global de discretización, $E(h)$, se define por:

$$E(h) = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i - y(x_i)|.$$

En general, los errores son de orden p si existe una constante C tal que

$$E(h) \leq Ch^p.$$

El **orden** de un método coincide con el entero p. El método de Euler es de orden 1, ya que el crecimiento del error es lineal con respecto a h

$$E(h) \leq Ch.$$

Ejemplo.

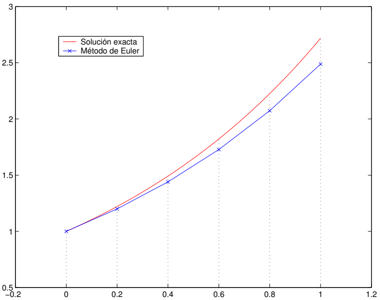
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Solución:

$$y(x) = \mathrm{e}^x.$$

Método de Euler.

$$[a,b] = [0,1], \quad N = 5,$$
$$h = \frac{b-a}{N} = 0.2, \quad f(x,y) = y.$$



Iteraciones:

- $y(0) = y_0 = 1,$
- $y(0.2) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.2\, f(0,1) = 1 + 0.2 \cdot 1 = 1.2$
- $y(0.4) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.2 + 0.2\, f(0.2, 1.2) = 1.2 + 0.2 \cdot 1.2 = 1.44$
- $y(0.6) \approx y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.44 + 0.2\, f(0.4, 1.44) = 1.44 + 0.2 \cdot 1.44 = 1.728$
- $y(0.8) \approx y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1.728 + 0.2\, f(0.6, 1.728) = 1.728 + 0.2 \cdot 1.728 = 2.0736$
- $y(1) \approx y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 2.0736 + 0.2\, f(0.8, 2.0736) = 2.0736 + 0.2 \cdot 2.0736 = 2.48832$

Si queremos aproximar el valor de e, usando la solución aproximada de la ecuación diferencial (2) cometemos un error del 22%. En efecto, el error absoluto, sabiendo que $y(1) = e$, se obtiene

$$E = |y(1) - y_5| = |2.71828 - 2.48832| = 0.22.$$

Método de Heun o Euler Mejorado

Una modificación del método de Euler se consigue integrando la ecuación diferencial (1) entre x_i y x_{i+1}

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx. \tag{3}$$

La primera integral, puede calcularse directamente, mientras que la otra, puede calcularse mediante la regla del trapecio[1], así:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))],$$

osea,

$$\begin{aligned} & y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \\ \Longrightarrow \quad & y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))] \end{aligned}$$

donde y_i es la aproximación de $y(x)$ en el punto x_i.

[1] Regla del trapecio: $\int_a^b f(x)\, dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$

Método de Heun o de Euler Mejorado

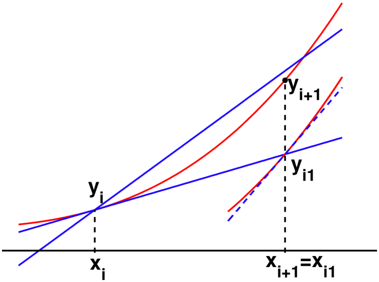
También se conoce como un método de Runge Kutta de orden 2, RK2, donde el crecimiento del error es cuadrático con respecto a h, es decir, $E(h) \leq Ch^2$.

Algoritmo de Euler Mejorado, RK2

Para $i = 0, \ldots, N-1$

$$x_i = a + ih$$
$$x_{i1} = x_i + h$$
$$y_{i1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i1}, y_{i1})]$$

fin i.



Método de Runge Kutta de orden 4

Este método se obtiene aplicando la regla de integración de Simpson[2] en (3). Para determinar cada y_{i+1} se realizan cuatro estimaciones previas:

Algoritmo (RK4)

Para $i = 0, \dots, N-1$

$$x_i = a + ih$$
$$K_1 = h\,f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = h\,f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{1}{2}K_1)$$
$$K_3 = h\,f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{1}{2}K_2)$$
$$K_4 = h\,f(x_i + h, y_i + K_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

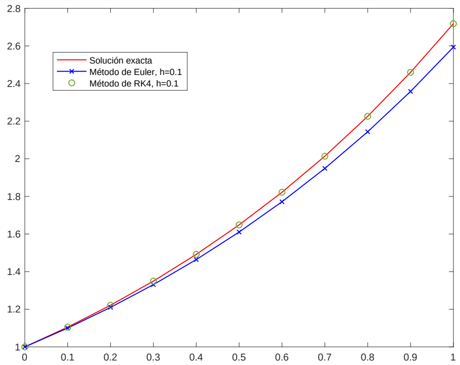
fin i.

Este método es de orden 4, es decir $E(h) \leq Ch^4$, por lo que es uno de los métodos más usados.

[2] Regla de Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$

Ejemplo. $\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Solución exacta: $y(x) = \mathrm{e}^x$.

		Euler: $h = 0.1$		Euler: $h = 0.025$		$RK4$: $h = 0.1$	
X	Sol. Ex.	Sol. Cal.	Error	Sol. Cal.	Error	Sol. Cal.	Error
0.0	1.000000	1.000000	0.0	1.000000	0.0	1.000000	0.0
0.1	1.105170	1.100000	5.1×10^{-3}	1.103812	1.3×10^{-3}	1.105170	8.4×10^{-8}
0.2	1.221402	1.210000	1.1×10^{-2}	1.218402	2.9×10^{-3}	1.221402	1.8×10^{-7}
0.3	1.349858	1.331000	1.8×10^{-2}	1.344888	4.9×10^{-3}	1.349858	3.1×10^{-7}
0.4	1.491824	1.464100	2.7×10^{-2}	1.484505	7.3×10^{-3}	1.491824	4.5×10^{-7}
0.5	1.648721	1.610510	3.8×10^{-2}	1.638616	1.0×10^{-2}	1.648720	6.3×10^{-7}
0.6	1.822118	1.771561	5.0×10^{-2}	1.808725	1.3×10^{-2}	1.822117	8.3×10^{-7}
0.7	2.013752	1.948717	6.5×10^{-2}	1.996495	1.7×10^{-2}	2.013751	1.0×10^{-6}
0.8	2.225540	2.143588	8.1×10^{-2}	2.203756	2.1×10^{-2}	2.225539	1.3×10^{-6}
0.9	2.459603	2.357947	0.1	2.432535	2.7×10^{-2}	2.459601	1.6×10^{-6}
1.0	2.718281	2.593742	0.12	2.685063	3.3×10^{-2}	2.718279	2.0×10^{-6}


Solución exacta
Método de Euler, h=0.1
Método de RK4, h=0.1
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1