# Ecuaciones No Lineales

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuaciones no Lineales. Métodos de Convergencia Garantizada: Método de Bisección**
- **Métodos de Convergencia Veloz: Método de Newton–Raphson.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

# Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Estudiaremos algunos métodos básicos de resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales.

El problema consiste en:

- dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (no lineal), encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, para el caso de una sola ecuación, o bien
- dada $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (no lineal), encontrar $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, para el caso de un sistema de ecuaciones.

Para el caso escalar (una sola ecuación), la solución $x$ se denomina **raíz** de la función $f$.

## Existencia de raíces

**Teorema de Bolzano.** *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en el intervalo* $[a,b]$*. Si* $f(a)f(b) < 0$ *( o sea* $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen signos distintos) entonces existe por lo menos una raíz* $\alpha$ *de* $f$ *en el intervalo* $(a,b)$*.*

## Método de Bisección. Algoritmo.

1. Dados $a$ y $b$ tales que $a < b$ y $f \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$, sean $x_a := a$ y $x_b := b$. Por lo tanto $f$ tiene una raíz en el intervalo $(x_a, x_b)$.
2. Sea $x_m := \dfrac{x_a + x_b}{2}$.
3. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:
    1. $f(x_a)f(x_m) = 0$: en este caso se tiene que $f(x_m) = 0$; por lo tanto ya localizamos una raíz, $x_m$, y se finaliza el proceso;
    2. $f(x_a)f(x_m) < 0$: por lo tanto $f$ tiene una raíz en el intervalo $(x_a, x_m)$ y redefinimos entonces $x_b$ como $x_m$;
    3. $f(x_a)f(x_m) > 0$: por lo tanto $f$ tiene una raíz en el intervalo $(x_m, x_b)$ y redefinimos entonces $x_a$ como $x_m$.
4. En los casos (b) y (c) anteriores $f$ tiene una raíz en el nuevo intervalo $(x_a, x_b)$. Por lo tanto, el proceso se vuelve a repetir desde (2) con el nuevo intervalo $(x_a, x_b)$, hasta que se satisfaga algún criterio de detención.

Es fácil comprobar a partir del algoritmo que, si $\alpha$ es la raíz de la ecuación, entonces los valores $x_k = x_m$ calculados en cada paso (donde $k$ denota el número de paso) satisfacen

$$|\alpha - x_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a) \qquad \text{y, por lo tanto,} \qquad \alpha = \lim_{k \longrightarrow \infty} x_k.$$

**Observaciones.**

1. La cota del error $\left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)$ en el método de bisección se reduce a la mitad en cada paso.
2. El método puede ser demasiado lento, pero al menos es un método en el que la convergencia está garantizada.
3. El método es sólo aplicable al caso escalar (de una sola ecuación), y no se generaliza al caso de sistemas de ecuaciones.

## Orden de Convergencia de un Método

**Definición.** *Una sucesión* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge a* $\alpha$ *se dice* **convergente con orden** $p \geq 1$, *si*

$$|\alpha - x_{k+1}| \leq C|\alpha - x_k|^p \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

*para alguna constante* $C > 0$.

Si $p = 1$ se dice que la sucesión **converge linealmente** a $\alpha$; si $p = 2$, que **converge cuadráticamente**; etc.

Cuanto mayor es $p$, más velozmente se reduce el error.

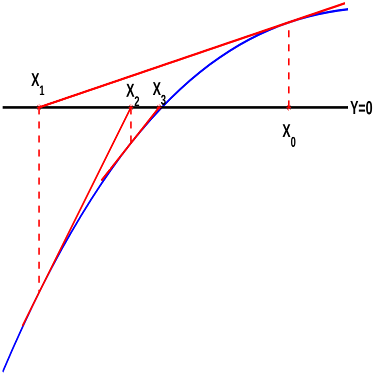
# El método de Newton–Raphson.

Se basa en usar una **recta tangente** a la gráfica de $f$ para aproximar esta gráfica, cerca del punto donde la función se anula.

Supongamos que tenemos la aproximación $x_k$ a la raíz $\alpha$ de $f(x)$. Trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(x_k, f(x_k))$:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Esta recta cruza al eje de abscisas en un punto $x_{k+1}$ que será nuestra siguiente aproximación a la raíz $\alpha$.



El punto $x_{k+1}$ donde la recta tangente

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

corta al eje de abscisas queda determinado por

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

El método de la tangente define entonces la sucesión de aproximaciones a $\alpha$ de la manera siguiente:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a partir de una aproximación inicial $x_0$ dada y siempre que $f'(x_k) \neq 0$.

**Teorema 1.** *Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ con una raíz $\alpha \in (a,b)$ y sean $m_1$ y $M_2$ tales que*

$$m_1 \leq \min_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right| \qquad y \qquad \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right| \leq M_2.$$

*Supongamos que $m_1 > 0$.*
*Dado $x_0 \in [a,b]$, sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión obtenida por el método de Newton–Raphson.*
*Supongamos que $x_k \in [a,b] \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$|\alpha - x_{k+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\alpha - x_k|^2 .$$

*Por lo tanto, si $x_0$ se escoge suficientemente cercano a $\alpha$, se tiene la convergencia*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} x_k = \alpha,$$

*con orden $p = 2$.*

Notar que la convergencia cuadrática se tiene si $\alpha$ es un cero simple, es decir, $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$.

**Observaciones.**

1. De acuerdo al Teorema 1, si el método de Newton–Raphson converge, lo hace **cuadráticamente** (es decir, con **orden** $p = 2$).
2. La convergencia está asegurada por el Teorema 1, bajo la hipótesis de que $x_0$ esté **suficientemente cerca de la solución** $\alpha$. Sin embargo, no hay una forma práctica de verificar esto.

**Ejemplo: Cálculo de $\sqrt{2}$.** Resolver la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

con error menor que $10^{-5}$, usando los métodos de *Bisección* y *Newton–Raphson*.

**Algoritmo M. Bisección:**

$x_a = 1$, $x_b = 2$: datos iniciales.
Para $k = 0, 1, 2, \ldots$
  calcular $x_0 = x_m = \frac{x_a + x_b}{2}$
  caso: Si $f(x_a)f(x_m) < 0$, entonces $x_b = x_m$
  caso: Si $f(x_a)f(x_m) > 0$, entonces $x_a = x_m$
  caso: Si $f(x_a)f(x_m) = 0$, entonces $f(x_m) = 0$
  $x_{k+1} = x_m$
hasta que $|x_{k+1} - x_k| < \texttt{tol}$.

Iteraciones donde $f(x) = x^2 - 2$ y $f'(x) = 2x$:

- $x_0 = 1.5$ en $(x_a, x_b) = (1, 2)$
- $x_1 = 1.25$ en $(x_a, x_b) = (1, 1.5)$
- $x_2 = 1.375$ en $(x_a, x_b) = (1.25, 1.5)$
- $x_3 = 1.4375$ en $(x_a, x_b) = (1.375, 1.5)$ $\ldots$

**Algoritmo de Newton–Raphson:**

$$\left|\begin{array}{l} x_0 = 2\text{: dato inicial.} \\ \text{Para } k = 0, 1, 2, \ldots \\ \qquad \text{calcular } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ \text{hasta que } |x_{k+1} - x_k| < \texttt{tol}. \end{array}\right.$$

Iteraciones, donde $f(x) = x^2 - 2$ y $f'(x) = 2x$:

- $x_0 = 2$,
- $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 2 + (4 - 2)/4 = 1.5$
- $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1.5 - (1.5^2 - 2)/(2 \cdot 1.5) = 1.416667$
- $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1.41667 - (1.41667^2 - 2)/(2 \cdot 1.41667) = 1.414215$
- $x_4 = x_3 - f(x_3)/f'(x_3) = 1.414213$

**Ejemplo: Cálculo de $\sqrt{2}$.**

Resolución de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

con error menor que $10^{-5}$.

Resultados obtenidos por los métodos de *Bisección* y *Newton–Raphson*.

| | Bisección | Newton–Raphson |
|---|---|---|
| 1 | 1.50000000000000 | 2.00000000000000 |
| 2 | 1.25000000000000 | 1.50000000000000 |
| 3 | 1.37500000000000 | 1.41666666666667 |
| 4 | 1.43750000000000 | 1.41421568627451 |
| 5 | 1.40625000000000 | 1.41421356237469 |
| 6 | 1.42187500000000 | |
| 7 | 1.41406250000000 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| 15 | 1.41421508789063 | |
| 16 | 1.41419982910156 | |
| 17 | 1.41420745849609 | |

Valor exacto $\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$

# Ejemplo

Aproximar la solución de la ecuación $x = \cos(x)$.

**Solución:** Sea $f(x) = \cos(x) - x$. Notar que

$$f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0, \qquad f(0) = 1 > 0,$$

luego usando el Teorema de Bolzano, existe un cero de $f$ en el intervalo de $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sea $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Apliquemos el método de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}, \quad n \geq 0.$$

Si tomamos $x_0 = \pi/4$, se obtiene los siguiente resultados:

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 0.7853981635 |
| 1 | 0.7395361337 |
| 2 | 0.7390851781 |
| 3 | 0.7390851332 |
| 4 | 0.7390851332 |