Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 1: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Conceptos Básicos

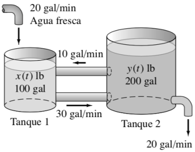
La forma más general de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= \quad f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
x_2'(t) &= \quad f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
x_n'(t) &= \quad f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

donde las funciones $f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, son continuas en todas sus variables, en el subconjunto Λ del espacio $t, x_1, x_2, \cdots, x_n$ donde estamos trabajando.

Ejemplo de Sistemas de EDO

Ejemplo 1: Considere dos tanques con salmuera conectados como se muestra en la figura. El tanque 1 contiene $x(t)$ lb de sal en 100 gal de salmuera, y el tanque 2 contiene $y(t)$ lb de sal en 200 gal de la solución. La salmuera en cada tanque se mantiene uniforme por agitación. Se agrega agua pura al tanque 1 a 20 gal/min, y la salmuera en el tanque 2 fluye hacia afuera a 20 gal/min. Las velocidades de cambio de la cantidad de sal en los dos tanques satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:



$$
\begin{aligned}
x'(t) &= -30\frac{x}{100} + 10\frac{y}{200} = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}y, \\
y'(t) &= 30\frac{x}{100} - 10\frac{y}{200} - 20\frac{y}{200} = \frac{3}{10}x - \frac{3}{20}y.
\end{aligned}
$$

Relación de una EDO de orden n con un Sistema de EDOs de primer orden

Toda ecuación de orden n

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden. En efecto, si ponemos

$$x_1 = y,\ \ x_2 = y'\ , \dots, x_n = y^{(n-1)},$$

la ecuación diferencial es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \quad x_2 \\ x_2'(t) &= \quad x_3 \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= \quad f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Observación: El recíproco también se cumple, es decir, resolver un sistema de primer orden de n ecuaciones proporciona la solución de una EDO de orden n.

Relación de una EDO de orden n con un Sistema de EDOs de primer orden

Ejemplo 2: Encontrar la solución de la ecuación diferencial de tercer orden

$$y''' + 3y'' + 2y' - 5y = \sin(2t),$$

es equivalente a resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones de primer orden ($x_1 = y,\; x_2 = y'\; x_3 = y''$):

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2 \\ x_2'(t) &= x_3 \\ x_3'(t) &= 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \sin(2t). \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Encontrar la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= y \\ y'(t) &= 2x + y + t^2. \end{aligned}$$

es equivalente a resolver la siguiente ecuación de segundo orden:

$$x'' = y' = 2x + y + t^2 = 2x + x' + t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x'' - x' - 2x = t^2.$$

Sistemas lineales

1. Si cada una de las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ es lineal, entonces se dice que es un **sistema de ecuaciones lineales de primer orden**, que escrito en forma normal o estándar adopta la notación:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   donde las funciones $a_{ij}(t)$ y f_i, son continuas en un intervalo común I.

2. Si las funciones $f_i(t) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$ se dice que el sistema es **homogéneo**, en caso contrario, se dice que es **no homogéneo**.

Forma matricial de un sistema lineal

Si consideramos las matrices

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

el sistema se puede escribir matricialmente de la forma

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t). \tag{2}$$

Definición: Una solución del sistema consiste en una función diferenciable $\mathbf{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre un intervalo abierto I de la recta real, de la forma $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^t$, tal que para todo $t \in I$ verifique el sistema (2).

Teorema (Existencia y Unicidad del P.V.I, caso lineal): Sea I un intervalo cerrado y acotado. Si $\mathbf{A} \in C(I)^{n\times n}$ y $\mathbf{F} \in C(I)^n$, entonces dados $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I$, existe una única solución $\mathbf{x} \in C^1(I)^n$ del sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t), \qquad \forall t \in I \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Sistema lineal homogéneo

Estudiemos el Sistema lineal homogéneo:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \tag{3}$$

- La única solución de un sistema homogéneo con condición inicial nula $\mathbf{x}(t_0) = 0$, es la vector nulo $\mathbf{x} = (0, \cdots, 0)^t$.
- **Principio de superposición:** Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ un conjunto de vectores solución de (3), entonces la combinación lineal
$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t)$$
también es solución de (3), con c_i, $i = 1, \ldots, k$ constantes. Notar que
$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= c_1\mathbf{x}_1'(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k'(t) = c_1\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_k\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k(t)\\ &= \mathbf{A}(t)(c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t)) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$
- **Wronskiano de la solución:** A cada conjunto de n vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ que son soluciones de (3) y a cada $t \in I$, podemos asociarle el determinante:
$$W(t) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$
donde $\mathbf{x}_j(t) = (x_{1j}(t), \ldots, x_{nj}(t))$.

Sistema lineal homogéneo

Teorema: Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones de (3). Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en I sí y sólo sí el Wronskiano $W \neq 0$ en todo punto de I.

Teorema: Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo (3). Entonces toda solución de (3) es combinación lineal de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ con constantes en $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t).$$

Definición: Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo (3). La matriz $n \times n$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \end{pmatrix},$$

cuya j-iésima columna está formada por las componentes de la solución $\mathbf{x}_j(t) = (x_{1j}(t), \ldots, x_{nj}(t))^t$, es llamada **matriz funtamental** del sistema lineal homogéneo (3).

Observación: La solución general del sistema (3) se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)C, \qquad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Además, $W(t) = |\Phi(t)|$.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 3x_2, \\ x_2' &= 6x_1 - 7x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Verifiquemos que los siguientes vectores son solución

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix}$$

para eso es necesario calcular

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1', \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -5e^{-5t} \\ -15e^{-5t} \end{pmatrix} = \mathbf{x}_2'.$$

El Wronskiano de estas soluciones es

$$W = \begin{vmatrix} 3e^{2t} & e^{-5t} \\ 2e^{2t} & 3e^{-5t} \end{vmatrix} = 7e^{-3t},$$

el cual nunca es cero, luego las soluciones son l.i. y la solución general es la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Por componentes

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}, \\ x_2(t) &= 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{-5t} \end{aligned}$$

Sistema lineal no homogéneo

Estudiemos

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t). \tag{4}$$

Teorema: Supongamos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes del correspondiente sistema lineal homogéneo (3) en un intervalo abierto I y que $\mathbf{x}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogégeo (4) . Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución del sistema (4), entonces existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_p(t), \qquad \forall t \in I.$$