UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
ECUACIONES DIFERENCIALES Y MÉTODOS NUMÉRICOS

Guía 8: Ecuaciones Diferenciales, Transformada de Laplace.

La transformada de Laplace (TL)de una función f se define mediante:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Algunas Tranformaciones Conocidas:

1. $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0$
2. $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots, \quad \forall s > 0$
3. $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a$
4. $\mathcal{L}(\cos(kt))(s) = \frac{s}{s^2+k^2}, \quad \forall s > 0$
5. $\mathcal{L}(\sin(kt))(s) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad \forall s > 0$
6. $\mathcal{L}(\cosh(kt))(s) = \frac{s}{s^2-k^2}$
7. $\mathcal{L}(\sinh(kt))(s) = \frac{k}{s^2-k^2}$

Propiedades de la TL:

1. **Linealidad:** Sea $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ y $\mathcal{L}(g(t))(s) = G(s)$

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = aF(s) + bG(s), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. **Cambio de escala**

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

3. **Primera propiedad de traslación**

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = F(s - a).$$

4. **Segunda propiedad de traslación**

$$\mathcal{L}(u(t - a)f(t - a))(s) = e^{-as} F(s).$$

5. **Transformada de una derivada**

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

6. **Derivadas de transformadas**

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

7. **Transformada de una integral**

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(u)du)(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

8. **Transformada de la convolución**

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t))(s) = F(s)G(s).$$

I. Demuestre que:

(1.1) $\mathcal{L}(e^t \cos 3t)(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+9}$.

(1.2) $\mathcal{L}(t \cos a)(s) = -\frac{-s^2+a^2}{(s^2+a)^2}$

(1.3) $\mathcal{L}[t^2 \text{sin} t] = \dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$.

(1.4) $\mathcal{L}[t\text{cosh}(at)] = \dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

II. Descomponer las siguientes funciones en fracciones parciales y calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$:

(2.1) $F(s) = \dfrac{3s-7}{(s-1)(s-3)}$

Sol: $f(t) = 2e^t + e^{3t}$

(2.2) $F(s) = \dfrac{2s-8}{(s^2-5s+6)}$

Sol: $f(t) = 4e^{2t} - 2e^{3t}$

(2.3) $F(s) = \dfrac{8s^2-7s+6}{s^2(s-2)}$

Sol: $f(t) = 2 - 3t + 6e^{2t}$

III. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ para cada $F(s)$:

(3.1) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-2s+3}$

Sol: $f(t) = e^{2t}\text{sin}(t)$

(3.2) $F(s) = \dfrac{e^{-5s}}{(s-3)^2}$

(3.3) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$

Sol: $u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1)$

IV. Utilice la TL para resolver el problema de valores iniciales.

(4.1) $y'' + 6y' + 2y = 1$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -6$

Sol: $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{28}e^{-3t}[(\sqrt{7}-9)e^{\sqrt{7}t} + (\sqrt{7}+9)e^{-\sqrt{7}t}]$

(4.2) $y'' + 8y' + 15y = 2$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -4$

Sol: $y(t) = \frac{2}{15} + \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{7}{10}e^{-5t}$

(4.3) $y'' - 10y' + 26y = 4$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 15$

Sol: $y(t) = \frac{2}{13} + \frac{37}{13}e^{5t}\cos(t) + \frac{10}{13}e^{5t}\text{sin}(t)$

(4.4) $y'' - 6y' + 8y = e^t$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 9$

Sol: $y(t) = \frac{1}{3}e^t + 2e^t + \frac{5}{3}e^{4t}$

(4.5) $y'' + 4y' + 3y = t$; $y(0) = 9$; $y'(0) = -18$

Sol: $y(t) = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3}t + 5e^{-t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$

(4.6) $y'' + 3y' - 4y = e^{-t}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

Sol: $y(t) = \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{-4t}$

(4.7) $y'' + 2y' - 3y = e^{-3t}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

Sol: $y(t) = \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-3t}$

(4.8) $y'' + 6y' + 8y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

Sol: $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-4t}$

(4.9) $y'' - y' - 6y = \cos(2t)$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

Sol: $y(t) = \frac{3}{65}e^{3t} + \frac{1}{20}e^{-2t} - \frac{5}{52}\cos(2t) - \frac{1}{52}\text{sin}(2t)$

V. Escriba la función $f(t)$ en forma de la función salto y resuelva utilizando la TL en cada problema de valores iniciales.

(5.1) $y'' + 4y = f(t)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t < 4 \\ & \\ 3 & si \qquad t \ge 4 \end{cases}$

Sol: $y(t) = \cos(2t) + \frac{3}{4}[1 - \cos(2(t-4))]u(t-4)$

(5.2) $y'' + 4y' + 4y = f(t)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$, $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < 2 \\ & \\ 0 & si \qquad t \ge 2 \end{cases}$

Sol: $y(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{7}{2}te^{-2t} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} + \frac{1}{2}(t-2)e^{-2(t-2)}\right] u(t-2)$

(5.3) $y'' + 2y' - 7y = f(t)$; $y(0) = -2$; $y'(0) = 0$, $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t < 5 \\ & \\ 2 & si \qquad t \ge 5 \end{cases}$

(5.4) Use la Transformada de Laplace para encontrar la solución de las ecuaciones integrales:

5.4.1. $y(t) + \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau = 1$

5.4.2. $y(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t e^{-s}y(t-s)ds$

5.4.3. $y(t) = \cos t \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}y(t-\tau)d\tau$

5.4.4. $y(t) = 2t - 4\displaystyle\int_0^t \sin(\tau)y(t-\tau)d\tau$