Guía 8
Leyes de Kirchhoff y circuitos de corriente continua.

1. Objetivos

Esta guía es de soporte y apoyo al tema de : **Leyes de Kirchhoff y circuitos de corriente continua**.

- Determinar resistencias equivalentes conectadas en serie o en paralelo.
- Determinar diferencias de potencial, corrientes y resistencias dentro de un circuito de corriente continua utilizando las Leyes de Kirchhoff.

2. Conceptos necesarios

2.1. FEM

El sistema de una pila conectada por cables a una ampolleta es el ejemplo mas simple de un circuito. La representación de este se muestra en la figura **??**a). En este sistema la batería induce una corriente constante en el circuito, en magnitud y dirección, a esto se le conoce como $\mathbf{corriente\,directa}$. Por otro lado, la $\mathbf{fem}\ \varepsilon$ de una batería es el voltaje máximo posible que ésta puede suministrar entre sus terminales. A través de la conexión de los conductores, los electrones de conducción se mueven del terminal negativo al positivo, lo que implica una corriente desde el terminal positivo al negativo, recuerda que esta inversión en la dirección de la corriente no es más que una convención histórica. El terminal positivo es aquel que se encuentra a un potencial más alto que el negativo.

Ahora bien, ya que la batería esta hecha de materia, esta genera una resistencia al paso de la carga. A esta resistencia se le llama $\mathbf{resistencia\,interna\,r}$ de la batería. En un circuito, el voltaje entre las terminales de la batería, nunca es igual a su fem ε. Este sistema es representado en la figura **??**b) donde la el recuadro representa la batería con su respectiva resistencia interna. Escrito en la siguiente relación

$$V_d - V_a = \Delta V = \varepsilon - Ir \tag{1}$$

El término Ir viene de la aplicación de la ley de Ohm a esa resistencia interna ($\Delta V = Ir$). Tomando estas consideraciones, el voltaje que se aplica a un aparato, depende de la corriente del circuito que pasa por la batería y la resistencia interna r (Cuando $r << R$ se puede ignorar el término Ir).
En el caso de pila común, por ejemplo de tipo AA, en un costado se indica $1{,}5[V]$, este número realmente

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE / RECTORÍA
Av. Libertador Bernardo O´Higgins nº3363 - Estación Central - Santiago - Chile
Mesa central: (+56-2) 2 718 00 00

es la fem, y no es el voltaje al cual se le esta aplicando al aparato alimentado por la pila.
Como en la resistencia R se le aplica el voltaje de las terminales, se tiene que $\Delta V = IR$, y con respecto a (1) ,$\varepsilon = IR + Ir$ por lo que

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \tag{2}$$

Aqui se ve que la corriente depende tanto de R como de r. Nuevamente, si $r << R$, r puede ser despreciada.

Esto sucede en la mayoría de las aplicaciones cotidianas.

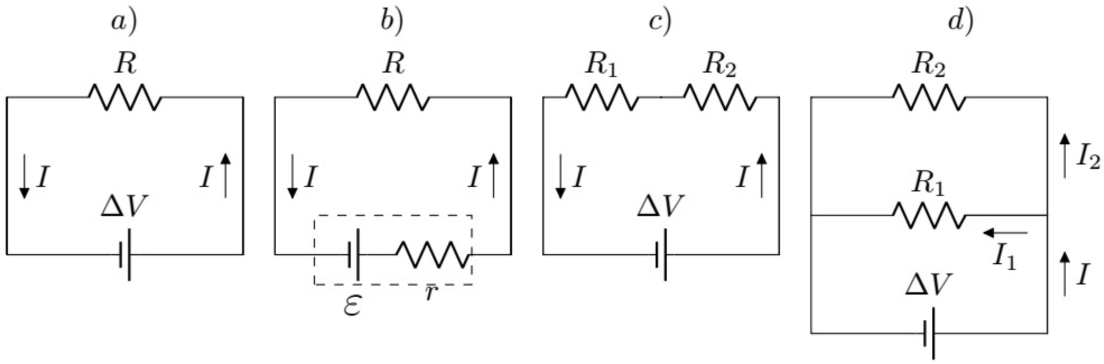


Figura 1: Diferentes tipos de circuitos eléctricos.

2.2. Circuitos Eléctricos

En general en el estudio de un circuito eléctrico queremos determinar las corrientes y diferencias de potencial en cada uno de los elementos del sistema. Esto es debido a que en principio conoceremos unos valores de entrada para el circuito y el objetivo será determinar los valores de salida o diseñar un circuito para obtener valores de salida apropiados:

$$Entradas([I_{1s}, I_{2s} \dots I_{ns}], [V_1 s, V_2 s \dots V_{ms}]) \rightarrow Circuito \rightarrow Salidas([I_{1s}, I_{2s} \dots I_{ps}], [V_{1s}, V_{2s} \dots V_{qs}]) \tag{3}$$

Donde n, m, p, q son respectivamente el número total de corrientes de entrada, voltajes de entrada, corrientes de salida, voltajes de salida. De esta forma, se puede inferir que **Un circuito eléctrico es una interconexión de elementos que transforma unos valores de entrada de intensidad y/o tensión en unos valores de intensidad y tensión de salida.**

Para estudiar un circuito utilizaremos **elementos ideales**, por ejemplo, en el caso de la pila discutido arriba, si bien en su conjunto una pila es un elemento único que genera una diferencia de potencial entre sus terminales y a la vez opone una resistencia al paso de la corriente, la modelamos haciendo uso de una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia ideal. Aunque es imposible encontrar un elemento totalmente ideal, en general con combinaciones apropiadas de elementos ideales es posible modelar el comportamiento eléctrico de cualquier componente real.

2.3. Elementos de un circuito, nodos, ramas y mallas .

2.3.1. Elementos de un circuito

Son aquellos que conforman el circuito. Se consideran puntuales y están completamente definidos por la relación entre la corriente y el voltaje entre sus terminales, a está relación se le llama **relación constitutiva**. Los principales elementos son las resistencias, las inductancias (que veremos más adelante en el curso) y los condensadores. En la tabla **??** tienes las principales relaciones constitutivas, y en la figura **??** su representación gráfica.

Resistencia	Condensador	Inductor
$v(t) = i(t)R$	$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Cuadro 1: Relaciones constitutivas elementos lineales ideales concentrados

Durante este curso, se asumirá que los elementos son lineales, es decir, que el valor de la resistencia (R), la capacitancia (C) o la inductancia (L) se mantienen constantes independiente de los valores de corriente y voltaje que circulen por el elemento. Ningún elemento real es lineal para cualquier valor de corriente, pero suele ser una excelente aproximación en amplios rangos de operación.

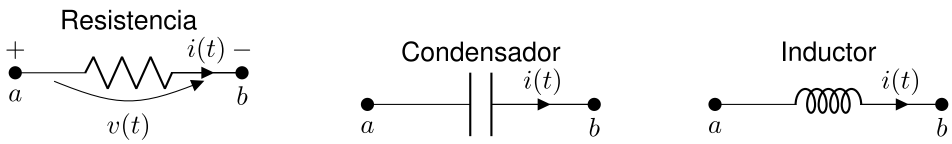


Figura 2: .En la resistencia la caída de tensión es en la dirección de la corriente, por lo que el nodo a estaría a un mayor potencial que el nodo b. Nota que ni en el condensador ni el inductor se ha añadido la polaridad, ya que está dependerá de como esté variando la corriente, no de su dirección.

2.3.2. Nodos, ramas y mallas

Nudo o Nodo : Es un punto de conexión entre tres o más elementos conductores de un circuito.
Rama: Es el fragmento de circuito eléctrico comprendido entre dos nodos consecutivos .
Malla: Una malla es un recorrido cerrado que se puede realizar dentro del circuito, comenzando y terminando en el mismo nodo.

Por ejemplo en el siguiente circuito:

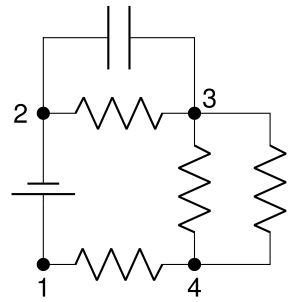


Figura 3: En el circuito hay 6 mallas y 3 nodos (2,3 y 4)

2.4. Conexión en serie o paralelo

Conexión en serie: Se dice que dos elementos están conectados en serie cuando comparten un conductor sin nodos. Por conservación de la carga se deduce que en ambos elementos circula la misma corriente.
Un ejemplo es el circuito de la figura **??**c. Cuando se tienen conectadas resistencias de esa manera se dice que se tiene un circuito en serie. Aquí como no hay bifurcaciones (nodos), el circuito esta cerrado, la corriente que pasa por R_1 es la misma que pasa por R_2. Esto es que $I = I_1 = I_2$.
La conservación de la energía nos permite inferir que el voltaje entre los terminales de la batería es la suma de los voltajes en cada una de las resistencia que están en serie, y usando la ley de Ohm, se tiene que la resistencia equivalente es $R_{eq} = R_1 + R_2$. De manera general, si tengo n resistencias en serie la resistencia equivalente es

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} + R_n \tag{4}$$

Conexión en paralelo: Se dice que dos elementos se conectan en paralelo cuando se conectan a un mismo par de nodos. Esto implica que la diferencia de potencial (voltaje o tensión) en cada elemento es la misma.
Un ejemplo de esta conexión es la que muestra la figura **??**d, donde las resistencias están conectadas en $\mathrm{paralelo}$. A diferencia del caso en serie, ambas resistencias están conectadas directamente a las terminales de la batería, por lo que el voltaje aplicado en R_1 es el mismo que en R_2. Esto implica que $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.
Por otra parte, la corriente se divide al llegar a un nodo. En este caso, en el nodo de la derecha la corriente se divide, por lo que $I = I_1 + I_2$. Haciendo un análisis con la ley de Ohm, se tiene que la resistencia equivalente es $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. De manera general para n resistencias conectadas en paralelo se tiene que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_n} \tag{5}$$

2.5. Leyes de Kirchhoff

Las leyes (o también llamadas reglas) de Kirchhoff son dos.
La primera de ellas siempre es posible aplicarla, pero la segunda de ellas se restringe a sistemas conservativos, es decir no se asumen pérdidas de energía ni potencial de ningún tipo.

Primera Ley o Regla de los nodos: *La suma algebraica de las corrientes que llegan a cualquier nodo es cero*:

$$\sum_{i}^{N} I_i = 0 \tag{6}$$

Donde N es el número total de ramas que llegan a ese nodo en específico. Es posible elegir como positivas las corrientes que llegan al nodo o las que salen, pero asegúrate de ser consistente y mantener la convención que elijas. Algo muy importante que debes notar es que esto no es más que una aplicación de la conservación de carga, ya que está no se crea ni se destruye siempre se cumple que:

$$\text{carga que entra al nodo = carga que sale del nodo} \rightarrow \text{carga que entra - carga que sale} = 0 \rightarrow \sum_{i}^{N} I_i = 0 \tag{7}$$

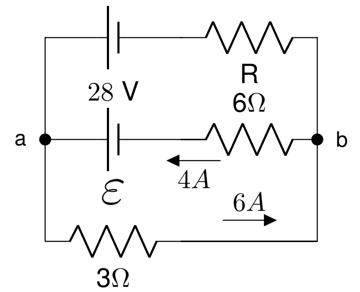
Segunda Ley o regla de las mallas: *La suma algebraica de las diferencias de potencial al recorrer cualquier camino cerrado, incluyendo la de fuentes de voltajes, resistencias y demás elementos debe ser cero.*

$$\sum \Delta V = 0 \tag{8}$$

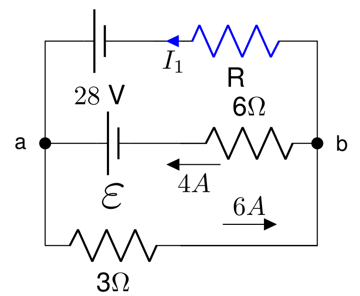
Nota que la segunda regla no es más que una expresión de la naturaleza conservativa del potencial eléctrico. Puedes pensarlo así, para cualquier circuito conservativo un electrón empieza en un punto a con potencial V_1, no importa el camino que siga dentro del circuito, si vuelve al punto a deberá tener un potencial eléctrico asociado igual a V_1. Una forma de imaginarse esto es imaginando el circuito como un cerro, hay puntos más altos (de mayor potencial), y otros más bajos (de menos potencial) y da igual el camino que sigas, si vuelves al mismo punto, estarás a la misma altura que antes.

2.6. Ejemplo

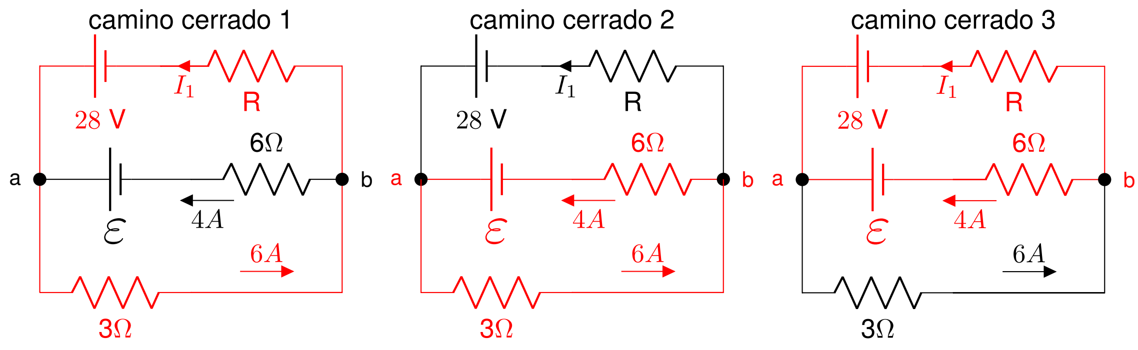
Con respecto al circuito siguiente, a) ¿Cual es la corriente que circula por R?, b) ¿Cual es la resistencia R?, c) ¿ Cuál es el valor de la fem $\mathcal{E}$?



Solución: Lo primero es identificar que el circuito consta únicamente de dos nodos a y b, por tanto, todos los caminos que unan estos nodos deben tener la misma diferencia de potencial entre sus extremos. Esto es debido a que un circuito en el que no hay variaciones de potencial ni campo magnético externos en el tiempo es conservativo, como este es el caso, podremos aplicar con seguridad la segunda regla de Kirchhoff (¡la primera siempre es válida!).
El siguiente paso será hacer el diagrama dejando clara la polaridad (la dirección) elegida de I_1 (puedes elegir a priori cualquiera, lo importante es ser consistente con esta elección en los cálculos:



Lo segundo será tener claro cuales son todos los caminos cerrados que puede seguir la corriente, que en este caso son tres (cada camino cerrado se encuentra en color rojo):



Sabemos que la corriente que circula por la resistencia de 3Ω es de 6 A, luego como el voltaje en una resistencia está dada por $V = IR$ en este caso la diferencia de potencial entre el nodo a y b, $\Delta V_{ab} = V_b - V_a$, es de -18 V, es decir, hay una caída de voltaje de a hacia b ya que el potencial del nodo a es mayor. Como hay una fuente de voltaje de 28 V entre a y b se tiene, aplicando la segunda regla de Kirchhoff con el camino cerrado 1 (o malla 1), la ecuación:

$$\Delta V_{ab} = -28 + I_1 R \implies R = \frac{\Delta V_{ab} + 28}{I_1} = \frac{10}{I_1} \tag{9}$$

Con I_1 dirigida desde b hacia a. Como tenemos dos incógnitas y una única ecuación y además en el circuito hay una tercera incógnita que es la fem ε, la pregunta natural es entonces, ¿Cómo puedo obtener nuevas relaciones entre las variables que desconozco del sistema con las qué si conozco?.
Aplicando conservación de la carga a cada nodo, i.e la primera regla de Kirchhoff:

$$\text{a} \rightarrow I_1 + 4 - 6 = 0 \implies I_1 = 2 \tag{10}$$

$$\text{b} \rightarrow -I_1 - 4 + 6 = 0 \implies I_1 = 2 \tag{11}$$

Ambas dando el mismo resultado como deber ser, de donde $I_1 = 2$ A. Con este nuevo conocimiento ahora es fácil ver que R será igual a 5Ω. Finalmente aplicando la segunda regla con el camino cerrado 2:

$$3 \times 6 - 6 \times 4 + \varepsilon = 0 \implies \varepsilon = 6\text{V} \tag{12}$$

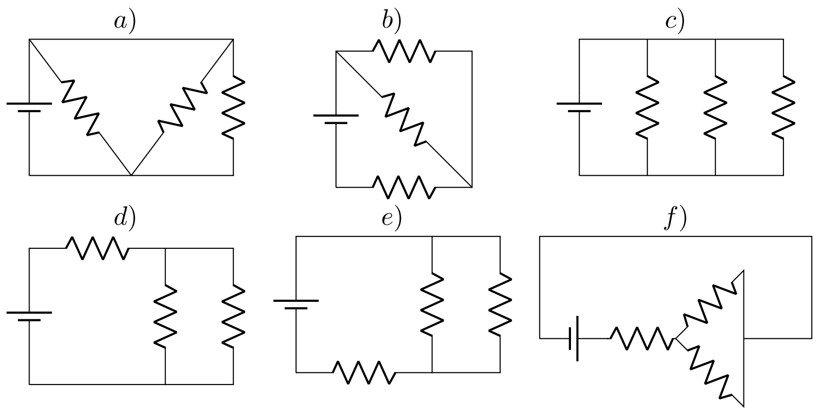
Es posible entonces recomendar seguir algunos pasos con el fin de resolver problemas de circuitos eléctricos exitosamente:

- Dibuje un diagrama de circuito.
- **Identifique** todos las datos conocidos, y todas las incógnitas. Analizar el **número total de incógnitas** y revisar si hay algunas redundantes que se puedan deducir rápidamente.
- Identificar todas las **simplificaciones** posibles: Resistencias en serie o en paralelo, fuentes de voltaje en serie, valores de resistencias, voltajes o perturbaciones muy muy pequeños que puedas despreciar, etc.
- Realizar un **circuito equivalente** simplificado en caso de que sea necesario.
- Definir un sentido para la corriente.
- Identificar dentro del circuito los nodos y mallas.
- Si el sistema es conservativo (por lo momento todos lo son) aplicar las Leyes de Kirchhoff para los nodos y mallas que sean necesarios.
- Resuelva los sistemas de ecuaciones obtenidos e interprete los valores para cada variable.

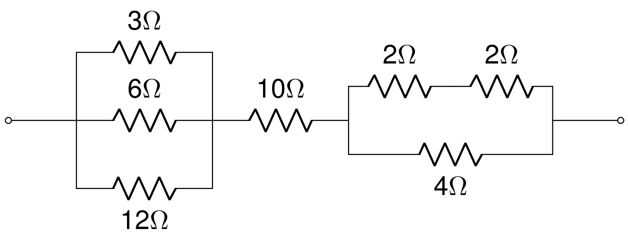
3. Problemas

1. La batería de un automóvil tiene una fem de $12{,}6[V]$ y una resistencia interna de $0{,}08[\Omega]$. Los dos faros juntos presentan una resistencia equivalente de $5[\Omega]$. ¿Cual es la diferencia de potencial aplicada a las lámparas de los faros a) cuando representan la única conexión a la batería y b) cuando funciona el motor de arranque, que consume $35A$ adicionales a la batería (el motor de arranque esta conectado en paralelo a la batería)? R: a) $12{,}4[V]$; b) $9{,}65[V]$

2. Dada las siguiente 6 configuraciones de circuitos mostradas acá abajo. Encuentra cuales de ellas son equivalentes.

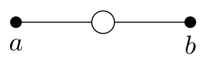


3. Calcula la resistencia equivalente del siguiente circuito



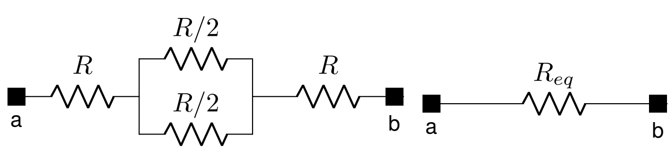
R=$\frac{96}{7}\Omega$

4. Un cable calentador de resistencia uniforme r por unidad de longitud es dividido en tres partes iguales. Una de sus partes se enrolla formando un círculo, y se conectan las tres partes como en la figura:



   a) Dibuja el diagrama del circuito ideal equivalente (recuerda que un cable ideal es un cable sin resistencia)
   b) ¿Cuál es la resistencia total entre los puntos a y b si la longitud total del cable es L?

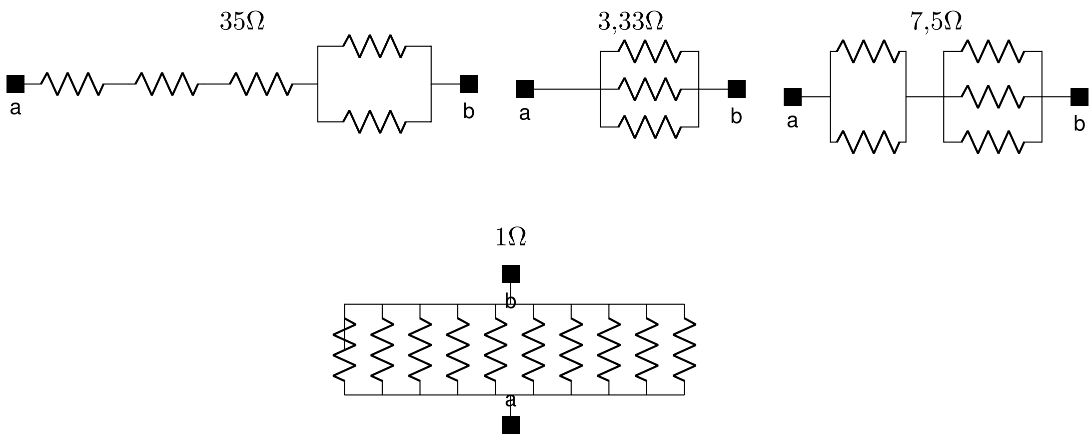
R: Sea R la resistencia equivalente del primer tramo de cable desde a hasta donde comienza el círculo:



con $R_{eq} = 9R/4$ luego la resistencia es $3rL/4$.

5. Estás trabajando por la noche casi de madrugada terminando un proyecto de electrónica para el día siguiente y para terminar necesitas armar un último circuito. Necesitas resistencias de $35, 1, 3{,}33$ y $7{,}5$ Ω pero te dás cuenta que en tu caja de resistencias solo te quedán resistencias de $10\ \Omega$. Para salvar el semestre te das cuenta que puedes configurarlas para obtener las resistencias equivalentes que necesitas, ¿Cómo construirías cada una de las resistencias equivalentes con tus resistencias de 10 Ω? (Recuerda que esta es una situación ficticia, ¡lo importante es aprender no solo salvar el semestre! y para ello hay que hacer las cosas con tiempo).

   R:



6. Cuando se cierra el interruptor S en el circuito de la figura **??** ¿La resistencia equivalente entre los punto a y b aumenta o disminuye? Establezca su razonamiento. Suponga que la resistencia equivalente cambia en un factor de 2. Determine el valor de R (en a y b el circuito está abierto, ahí no hay nada. Pista: ¿Cuál es el circuito y resistencia equivalente antes de cerrar el interruptor?) R: a)decrece; b) $14[\Omega]$

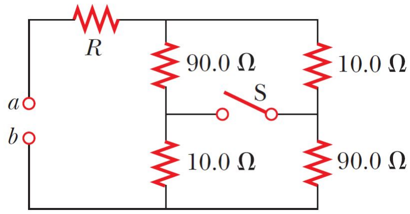
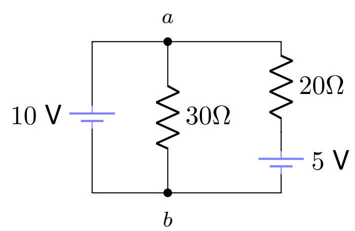


Figura 4: figura

7. Las baterías en el diagrama **??** tienen una resistencia interna despreciable. Encuentra la magnitud y dirección de la corriente a traveés de (a) el resistor de $30\ \Omega$; (b) el de $20\ \Omega$; (c) la batería de 10 V.



R: a) $0{,}33$ A o $1/3$ A de a a b, b) $1/10$ A o $0{,}1$ A de a a b, c) $13/30$ A o $0{,}43$ A de b a a.

8. Si $R = 1[k\Omega]$ y $\Delta V = 250V$ en la figura **??**, determine la dirección y la magnitud de la corriente en el alambre horizontal entre a y e. (*Pista:* ¿Se puede simplificar de alguna forma el circuito?) R: $50[mA]$ del nodo a hacia el e

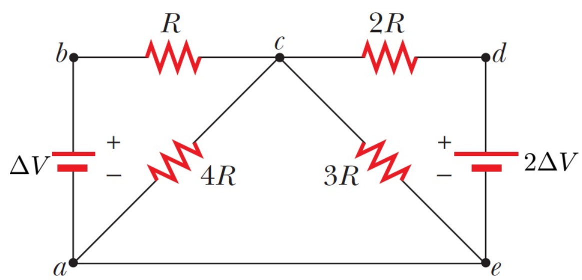


Figura 5: . Circuito Problema 8

9. Para la red que se muestra en la figura **??**, demuestre que la resistencia $R_{ab} = \frac{27}{17}[\Omega]$ *Pista 1*: Imagina que al nodo a llega una corriente I. Por cada resistor circulará una corriente i_j, ¿Cómo puedes determinar las corrientes que circularán por cada resistor en función de I? *Pista 2*: Necesitarás 3 ecuaciones.

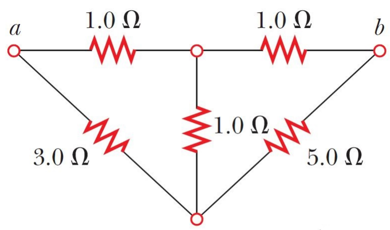


Figura 6: figura

4. Bibliografía

1)**Sears & Zemansky's** *University Physics with modern physics*, 13th edition. Secciones 25.4, 26.1,26.2 (todas las demas secciones del capítulo no son obligatorias pero si muy recomendadas)

2) **Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr.**, *Física para ciencia e ingeniería con física moderna*, Vol 2, 7th edición, 2009. De aquí se baso en las secciones 28.1, 28.2 y 28.3.