Transformada de Laplace

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 5: Aplicaciones.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Ejemplos

1. Una masa de 32 libras de peso (masa $m = 1$ slug) está unida al extremo libre de un resorte ligero que es estirado 1 pie por una fuerza de 4 libras ($k = 4$ libras/pie). La masa se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. Iniciando en el tiempo $t = 0$ (segundos), se le aplica una fuerza externa $f(t) = \cos(2t)$ a la masa, pero en el instante $t = 2\pi$ la fuerza se interrumpe (abruptamente discontinua) y la masa queda libre continuando con su movimiento. Encuentre la función $x(t)$ que describe la posición de la masa en cada instante t.

Solución: Primero debemos obtener la ecuación que modela el sistema, en ausencia de rozamiento del medio y considerando que parte de reposo, se tiene

$$x''(t) + 4x(t) = f(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Podemos escribir la fuerza $f(t)$ usando la función escalón unitario como

$$f(t) = \cos(2t) - \cos(2t)u(t - 2\pi),$$

y su transformada

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{s^2 + 4}(1 - e^{-2\pi s}).$$

Ejemplos

Aplicaremos la trasformada de Laplace a toda la ecuación

$$s^2 X(s) + 4X(s) = \frac{s}{s^2+4}(1 - e^{-2\pi s})$$

donde $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$, así

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{s}{(s^2+4)^2} e^{-2\pi s}.$$

Debido a que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{1}{4} t \sin(2t), \qquad \text{(Verificar)}$$

se puede concluir que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} t \sin(2t) - \frac{1}{4}(t-2\pi)\sin(2(t-2\pi))u(t-2\pi) \\ &= \frac{1}{4} t \sin(2t) - \frac{1}{4}(t-2\pi)\sin(2t))u(t-2\pi). \end{aligned}$$

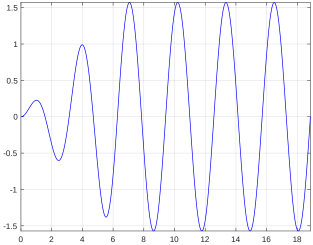
Podemos escribirlo como

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t \sin(2t) & 0 \leq t < 2\pi \\ \frac{1}{2}\pi \sin(2t) & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Ejemplos

Solución:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t \sin(2t) & 0 \leq t < 2\pi \\ \frac{1}{2}\pi \sin(2t) & t \geq 2\pi \,. \end{cases}$$



2. Una masa que pesa 64 libras, unida al extremo de un resorte, lo alarga $8/9$ pies. Al inicio, la masa se libera desde la posición de equilibrio con velocidad inicial nula. En el instante $t = 0$ se ejerce una fuerza de $120t$ en el resorte, la cual se interrumpe abruptamente en el instante $t = 1s$. El P.V.I. que modela el problema es:

$$2x''(t) + 72x(t) = f(t), \qquad f(t) = \begin{cases} 120t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1. \end{cases}$$

1. Escriba $f(t)$ en términos de $\mathcal{U}(t-1)$ y calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$.
2. Resuelva la ecuación planteada usando la Transformada de Laplace.
3. Determinar la velocidad de la masa en $t = 2s$.

Solución: (a) La función $f(t)$ queda escrita en términos de $\mathcal{U}(t-1)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(t) &= 120t - 120t\,\mathcal{U}(t-1) = 120t - 120(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) - 120\,\mathcal{U}(t-1) \\ \mathcal{L}\left(f(t)\right) &= \frac{120}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right). \end{aligned}$$

(b) Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} 2s^2X(s) + 72X(s) &= \frac{120}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right) \\ X(s) &= \left[\frac{120}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right)\right]\frac{1}{2s^2+72} \\ &= \frac{60}{s^2(s^2+36)} - e^{-s}\left(\frac{60}{s^2(s^2+36)} + \frac{60}{s(s^2+36)}\right), \end{aligned}$$

donde $X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$ y se consideró las condiciones iniciales entregadas en el enunciado $x(0) = x'(0) = 0$.

Ejemplos

Resolviendo por separado cada término, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{6}{(s^2+36)}\right)(t) &= 1*\sin(6t)=\int_0^t \sin(6u)du=\frac{1}{6}-\frac{\cos(6t)}{6}\\
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\frac{6}{(s^2+36)}\right)(t) &= 1*\left(\frac{1}{6}-\frac{\cos(6t)}{6}\right)=\int_0^t\left[\frac{1}{6}-\frac{\cos(6u)}{6}\right]du=\frac{t}{6}-\frac{\sin(6t)}{36}.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
X(s) &= 10\left[\left(\frac{1}{s^2}\frac{6}{(s^2+36)}\right)-\left(e^{-s}\left(\frac{6}{s^2(s^2+36)}+\frac{6}{s(s^2+36)}\right)\right)\right]\\
\Rightarrow x(t) &= \frac{10t}{6}-\frac{10\sin(6t)}{36}-\left[\frac{10t}{6}-\frac{10}{6}\left(\frac{\sin(6t-6)}{6}+\cos(6t-6)\right)\right]\mathcal{U}(t-1).
\end{aligned}
$$

(c) Al evaluar en t=2 se obtiene: x(2)=1.671716428