Ecuaciones Diferenciales lineal de 2do orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuación diferencial lineal de 2do orden.**
- **Solución general de la EDO lineal homogénea.**
- **Reducción del orden: Fórmula de Abel.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Ecuaciones Lineales de Orden n

Una EDO es lineal de orden n si tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x), \tag{1}$$

donde $a_i(x) \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, ..., n$.

Sin perdida de generalidad trabajaremos en EDO de 2do orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \phi(x)\,. \tag{2}$$

donde en general a_0, a_1, a_2 y ϕ son funciones continuas definidas en un intervalo I.

Problema de valores iniciales

Un problema de valores iniciales de orden 2 es resolver

$$
\begin{aligned}
&a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \phi(x) \\
&y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,
\end{aligned}
$$

donde y_0 y y_1 son valores dados.

Teorema de existencia y unicidad: Supongamos que las funciones a_0, a_1, a_2 y ϕ son continuas en un intervalo abierto I que contiene a x_0 y sea $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces, existe una única solución $y(x)$ que verifica el P.V.I.

Operador Lineal de orden 2

Si $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, dividiendo por $a_2(x)$, reducimos (2) a su **forma normal**

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = g(x)\,. \tag{3}$$

Definimos el **operador** L que toma cualquier función u, dos veces diferenciable sobre el intervalo I, y le asocia la función $L[u]$ definida por

$$L[u](x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)\,. \tag{4}$$

Usando este operador la ecuación (3) se escribe de la forma

$$L[y] = g(x)\,, \tag{5}$$

Tal operador se llama **operador diferencial lineal** pues verifica:

1) $L[cu] = cL[u]$ para todo $c \in \mathbb{R}$,
2) $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$.

Combinando ambas propiedades se obtiene
3) $L[\sum_{k=1}^{n} c_k u_k] = \sum_{k=1}^{n} c_k L[u_k]$, donde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Ecuación Lineal Homogénea de Segundo Orden

Son ecuaciones de la forma

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,. \tag{6}$$

con p_1, p_2 funciones continuas definidas en un intervalo I.

Usando el operador diferencial L esta ecuación se reduce a

$$L[y] = 0\,. \tag{7}$$

Como consecuencia de la linealidad de L, se tiene el siguiente resultado:

Teorema

1) Si y_1 es solución de la ecuación (7), entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, cy_1 es solución.
2) Si y_1, y_2 son soluciones de (7), entonces $y_1 + y_2$ es solución.
3) Luego si $y_1, \dots, y_m$ son soluciones de (7), entonces cualquier combinación lineal de ellas, digamos $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k$, es solución.

Funciones linealmente independientes

Definición: Las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen **linealmente dependientes** (L.D.) en el intervalo I, si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I\,. \tag{8}$$

Las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen **linealmente independientes** (L.I.) en I si (8) se verifica sólo cuando $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Ejemplo: Si $k_1 \neq k_2$ las funciones $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ son L.I. en cualquier intervalo I.
En efecto, la relación

$$\begin{aligned}
& c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} = 0 \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow \quad & c_1 + c_2 e^{(k_2 - k_1)x} = 0 \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow \quad & \text{(derivando)} \quad (k_2 - k_1) c_2 e^{(k_2 - k_1)x} = 0 \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow \quad & c_2 = 0 \quad \Longrightarrow c_1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Funciones linealmente independientes

Teorema: Si y_1, y_2 son L.D. en I, entonces el determinante (llamado **wronskiano**)

$$W(x) = W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Demostración. Sean c_1, c_2 constantes no ambas nulas tales que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I\,.\ \text{Entonces también}$$
$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Si, por ejemplo $c_2 \neq 0$, multiplicando la primera ecuación por $y_1'(x)$ y la segunda por $y_1(x)$ y restando, se obtiene para todo $x \in I$

$$c_2(y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 W(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad W(x) = 0\,.$$

Observación: Si $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para algún $x \in I$, entonces y_1, y_2 son L.I.

Soluciones linealmente independientes

Teorema: Sean y_1, y_2 soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

con coeficientes continuos $p_1(x), p_2(x)$ en I. Entonces el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Soluciones general de la EDO lineal homogénea

Teorema: Sean y_1, y_2 soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,, \tag{9}$$

con coeficientes continuos $p_1(x), p_2(x)$ en I. Entonces la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Demostración. Sea $y(x)$ una solución de (9). Fijemos $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) \neq 0$ y sean $k_1 = y(x_0)$ y $k_2 = y'(x_0)$. Si examinamos las ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) & = k_1 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) & = k_2\,. \end{cases}$$

Podemos determinar c_1 y c_2 de forma única, siempre que el determinante del sistema verifique

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero este determinante coincide con $W(x_0) \neq 0$.
Si definimos $\alpha(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ veremos que $\alpha(x)$ verifica las condiciones iniciales $\alpha(x_0) = k_1$ y $\alpha'(x_0) = k_2$.
Como la solución $y(x)$ también las verifica, concluímos que $y(x) = \alpha(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, para todo $x \in I$.

Ejemplo

Considere la ecuación

$$y'' - 4y = 0\,.$$

Se puede chequear directamente que las funciones $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{-2x}$ son soluciones particulares. Además son L.I. ya que

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Soluciones general de la EDO lineal homogénea de orden n

Teorema: Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,, \qquad (10)$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ en I. Entonces la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,, \quad \text{con} \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Observación: Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea (10), entonces el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Este conjunto de soluciones L.I. se conoce como Conjunto fundamental de soluciones de (9).

Primer Método para encontrar la solución de la EDO lineal homogénea: Fórmula de Abel

Reducción del orden: Fórmula de Abel

Si conocemos una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,, \tag{11}$$

la idea es encontrar una segunda solución L.I. de la forma $y(x) = y_1(x)z(x)$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= y_1'z + y_1z'\,, \quad \text{y} \\ y'' &= y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'' + p_1(y_1'z + y_1z') + p_2y_1z = 0 \\ \Longrightarrow\quad & \underbrace{(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1)}_{=0} z + (2y_1' + p_1y_1)z' + y_1z'' = 0 \\ \Longrightarrow\quad & (2y_1' + p_1y_1)z' + y_1z'' = 0\,. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u(x) = z'(x)$, transformamos a una ecuación de primer orden de variables separables (y lineal)

$$(2y_1' + p_1y_1)u + y_1u' = 0\,.$$

Reducción del orden: Fórmula de Abel

La podemos escribir de la forma

$$\frac{du}{u} = (-2\frac{y_1'}{y_1} - p_1)dx\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|u| = -2\ln|y_1| - \int p_1(x)dx,$$

cuya solución es

$$\ln|u(x)y_1^2| = -\int p_1(x)dx + c\,, \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) = \frac{c_1}{y_1(x)^2}e^{-\int p_1(x)dx}\,.$$

Regresando a $z(x) = u'(x)$, implica que

$$z(x) = c_1\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx + c_2\,.$$

Si elegimos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, obtenemos una segunda solución $y_2 = y_1(x)z(x)$ como

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx\,, \qquad \textbf{(fórmula de Abel)}$$

Luego la solución general de la EDO lineal homogénea (11) se escribe como

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx.$$

Ejemplo:

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2y'' - xy' + y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.

Solución: El primer paso es escribir la ecuación en la forma en que podemos aplicar el procedimiento anterior. Dividiendo por x^2 tenemos

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' + \frac{1}{x^2}\,y = 0\,.$$

De esta forma $p_1(x) = -\frac{1}{x}$ y usando la fórmula de Abel para la segunda solución

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\int \frac{e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}}{x^2}\,dx = x\int \frac{e^{\int \frac{1}{x}\,dx}}{x^2}\,dx \\ &= x\int \frac{e^{\ln(x)}}{x^2}\,dx = x\int \frac{dx}{x} = x\ln(x)\,. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$y(x) = c_1 x + c_2\, x\, \ln(x).$$

es la solución general.