Las cargas eléctricas y el trabajo mecánico

Habíamos dicho que en las proximidades de una o de un conjunto de cargas eléctricas otra carga que hemos llamado “carga exploradora” experimenta una fuerza. Cuando desplazamos el punto de aplicación de una fuerza realizamos un trabajo mecánico. Este trabajo depende de la magnitud y estructura de la fuerza. Si la fuerza es constante, el trabajo mecánico se calcula simplemente como el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{D}=\left|\vec{F}\right||D|\cos\varphi$$

Donde φ es el ángulo que hacen la fuerza y el desplazamiento. De la definición se desprende que el trabajo mecánico es un escalar.

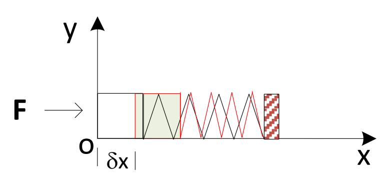


Figura 1, ejemplo de trabajo mecánico

En la figura 1 se muestra el caso de un trabajo mecánico realizado contra la fuerza de un resorte. El bloque pintado con líneas negras es empujado por un fuerza externa **F** y se desplaza un δx en este desplazamiento infinitesimal podemos suponer que la fuerza del resorte es constante, aunque sabemos que depende de la deformación del resorte. Como elegimos el origen O en la posición del resorte sin deformar fuerza que el resorte ejerce se anota simplemente como F=kx, donde k es una característica del resorte. Para calcular el trabajo que realizamos cuando el bloque se mueve desde la posición 0 a x_1, tenemos que sumar todos los trabajos infinitesimales realizados, la fuerza es diferente para cada posición, la ley de fuerzas del resorte sería F=kx donde, como dijimos, k es una constante. Entonces el trabajo mecánico buscado sería:

$$W=\int_0^{x_1} kx\,dx=\left|\frac{kx^2}{2}\right|_0^{x_1}$$

Si se sujeta el resorte deformado, al liberarlo, éste podría hacer un trabajo mecánico, podría, por ejemplo, lanzar el bloque en la dirección contraria a la de compresión. Se dice que el resorte tenía energía acumulada o energía potencial, hay muchos ejemplos de este tipo de energía (como la gravitatoria, por ejemplo) pero ahora queremos enfatizar que, si tenemos dos cargas eléctricas, supongamos que positivas, estas se repelerán y si desplazamos una respecto de la otra, acercándolas, el sistema quedará tensionado por la fuerza de repulsión entre ellas y también acumulará una energía potencial. No estamos seguros pero la similitud entre esta situación y las del resorte tensionado podría ser el origen del nombre de tensión eléctrica a la energía potencial acumulada en un sistema de cargas como el recién descrito.

La ley de Coulomb nos permite calcular el módulo del campo eléctrico (o la fuerza por unidad de carga) debido a una carga q puntual y aislada en el punto O.

$$\vec{E} = \frac{k_e q \vec{r}}{r^2} \tag{1}$$

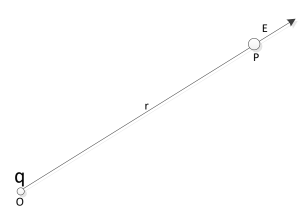


Figura 2.- Campo eléctrico producido por una carga puntual Q

La figura 2 ilustra la forma en que se calcula un campo eléctrico. El módulo del vector **E** viene dado por la expresión (1).

Supongamos ahora que la carga unitaria de ensayo se mueve desde el punto A al B bajo la influencia de la carga fija q en el punto O, como se muestra en la figura 3

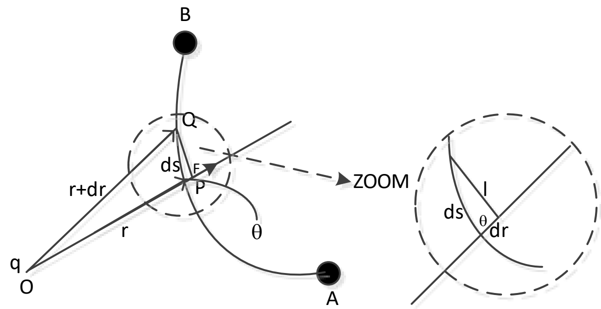


Fig. 3 Trabajo mecánico realizado al trasladar una carga entre dos puntos en un Campo eléctrico.

En el recorrido desde un punto P hasta el punto Q muy próximos, el campo eléctrico ejerce una fuerza por unidad de carga **E** a la que corresponde una diferencial de trabajo:

$$dW = \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{k_e q}{r^2} ds\cos\theta = \frac{edr}{r^2} \tag{2}$$

Por si se ha sorprendido, note que, de la figura 3

$$ds\cos\theta = dr$$

Donde θ es el ángulo formado entre OP y PQ. Si la carga se desplaza entre los puntos A y B, el trabajo total **realizado por el campo** será la suma de los trabajos de cada segmento, es decir:

$$\int_A^B k_e \frac{qdr}{r^2} = k_e\left(\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B}\right) \tag{3}$$

Resulta a veces más conveniente calcular el trabajo **realizado contra el campo**, que resulta igual a:

$$\text{trabajo nuestro} = -\text{trabajo del campo} = k_e\left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A}\right) \tag{4}$$

Note que el trabajo realizado o recibido depende sólo de las posiciones iniciales y finales de la carga. Si esto no fuese así y hubiese una trayectoria que proporcionara (o consumiera) más trabajo que otra podíamos ir por el camino que gasta más energía (trabajo) y regresar por el que gasta menos y vender el excedente a las generadoras, pero eso implicaría haber encontrado una fuente inagotable de energía lo que es contrario al segundo principio de la termodinámica o al de conservación de la energía (usted puede elegir). A todos los campos de fuerza que tienen esta propiedad (que el trabajo es independiente del camino) se les llama **campos conservativos.**

A la magnitud que aparece a la derecha en la expresión (4) se le llama **diferencia de potencial** entre A y B se escribe como V_B-V_A. La diferencia de potencial entre A y B representa el trabajo que se debe hacer para mover una carga eléctrica de ensayo unitaria entre estos dos puntos. Se define el valor absoluto del **potencial en un punto** por la condición de que si A está en el infinito V_A=0. Entonces V_B representa el trabajo que se debe hacer para traer la carga unitaria desde el infinito hasta el punto B. La expresión (4) conduce a que $V_B = k_e q / r_B$. Prescindiendo de los subíndices, el potencial en un punto debido a la carga q se puede poner cómo:

$$V = k_e q/r \qquad (5)$$

Las unidades de una diferencia de potencial o de un potencial eléctrico se obtienen directamente de la definición, se tiene una diferencia de potencial de un Volt entre dos puntos de un campo eléctrico cuando al desplazar una carga unitaria entre esos dos puntos se hace o se recibe un trabajo mecánico de un Joule.

Ejemplo

La energía potencial de un sistema de cargas puntuales es un ejemplo sencillo de la utilidad de ésta magnitud. Si calculamos el potencial que produce una carga q_1 en un punto $\mathbf{r}_i$ resulta:

$$V = \frac{k_e q_1}{r_1}$$

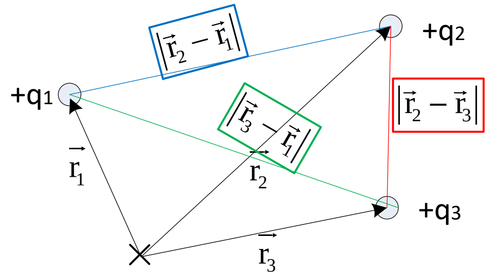


Figura 8. Energía de configuración, tres cargas

Calculemos, por ejemplo, El trabajo que se habría realizado al poner tres cargas eléctricas en una posición determinada, como se muestra en la figura, se le llama la energía de configuración del sistema. El principio de superposición nos permite asegurar que esta energía será simplemente la suma de las energías que se requiere para el traslado de cada carga desde el infinito hasta a la posición en que se encuentran: $U=k_e\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$, la interpretación de esta expresión resulta trivial. Si todas las cargas son positivas, la energía también lo será.

Para una carga aislada q en el origen, el potencial tiene como expresión k_eq/r, como veremos más adelante todos los puntos que están al mismo potencial forman las llamadas superficies equipotenciales, en el caso de una carga puntual aislada, la superficie equipotencial tendrá como ecuación, la expresión: k_eq/r=cte. Por lo tanto será un conjunto de esferas concéntricas (una para cada r) en torno al origen

Si la carga de ensayo tiene una magnitud q' y no la unidad, la ley de Coulomb muestra simplemente que la fuerza sobre ella es q' veces la anterior y el trabajo será también multiplicado por q'. Así: trabajo efectuado entre los puntos A y B de un campo eléctrico será: $W_{AB}=k_eq'(V_B-V_A)$.

Si consideramos el trabajo realizado para mover una carga unitaria desde P a Q como se muestra en la figura 3, se tiene:

$$dV = V_Q - V_P = -\vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad (6)$$

Expresión que enfatiza que el trabajo realizado por nosotros contra el campo es igual a menos el trabajo realizado por el campo. Si expresamos los vectores en un sistema cartesiano se tiene:

$\vec{E}=\vec{E}_x\hat{\imath}+\vec{E}_y\hat{\jmath}+\vec{E}_z\hat{k}$ y $\overrightarrow{ds}=dx\hat{\imath}+dy\hat{\jmath}+dz\hat{k}$ y el producto será:

$$dV=-(E_xdx+E_ydy+E_zdz) \qquad (7)$$

la ecuación (7) conduce, derivada respecto de x,y,z, a las importantes relaciones:

$$E_x=\frac{\partial V}{\partial x}, E_y=\frac{\partial V}{\partial y}, E_z=\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{(signo)} \qquad (8)$$

Esta expresión muestra que es posible obtener al campo eléctrico a partir de la función potencial empleando un operador vectorial, llamado gradiente que se expresa como:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\nabla V, \mathrm{con}\,\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k} \tag{9}$$

La ecuación (6) integrada se escribe como:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \tag{10}$$

El principio de superposición enunciado por Coulomb establece que tanto el campo eléctrico como el potencial son proporcionales a la carga q que los produce. Como se tiene las expresiones para el campo y el potencial producido por una carga aislada se puede generalizar estos conceptos, empleando el principio de superposición, para un con junto de cargas:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots = \Sigma_i \frac{q_i}{r_i}$$

(11)

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} + \cdots += \Sigma_i \frac{q_i \hat{r}_i}{{r_i}^2}$$

El potencial es una magnitud muy útil para los cálculos matemáticos por tratarse de una magnitud escalar. Cuando se tiene una distribución continua de cargas en superficies y volúmenes la suma se convierte en un integral y el potencial se calcula simplemente haciendo:

$$V = \int \frac{\rho dv}{r} + \int \frac{\sigma ds}{r} \tag{12}$$

Nótese que en este caso se considera el potencial producido por una distribución volumétrica de carga más el que produce una distribución superficial.

Para el campo eléctrico se procede de una forma similar. Si se puede calcular el potencial eléctrico en un punto, el campo se calcula a partir de : $\vec{E} = -\mathrm{grad}V$ en general la integración suele ser, sin embargo, muy difícil.

Según (11) Y (12) en todo punto p existe un determinado valor del potencial. Al lugar geométrico de todos los puntos que tienen el mismo potencial se le llama **superficie equipotencial.** Los diferentes valores de V(x,y,z) generan una familia de superficies equipotenciales su ecuación sería:

$$V(x,y,z) = \text{constante} \tag{13}$$

Cada valor de la constante produce una superficie equipotencial.

Para dos cargas próximas la expresión para las equipotenciales será: $k_e q/r_1 + k_e q/r_2 =$ constante (óvalos).

Calculemos la normal en un punto cualquiera de la equipotencial: V(x,y,z)=cte, entonces se podría resolver una coordenada en términos de las otras dos dando, por ejemplo: V(x,y,z(x,y)), esta ecuación representa una superficie en la que el valor de V es constante, es decir una superficie equipotencial. Observamos que si $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ con z=z(x,y) es un vector de posición de cualquier punto de la superficie, un vector tangente a la superficie será: $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, y empleando la definición de gradiente de V= $\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$ se puede escribir la siguiente relación para dV:

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = 0 \tag{14}$$

Puesto que tanto el vector gradiente de V como el vector tangente a la superficie son diferentes de cero, esta expresión que muestra que el vector gradiente en una superficie equipotencial es normal a ésta. Como teníamos: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ se deduce que la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto es normal a la equipotencial que pasa por este punto. Adicionalmente, como la variación del potencial $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$ es igual a $\overrightarrow{\nabla V}\cdot\overrightarrow{dr}$, la ecuación (14) muestra que la normal a la superficie equipotencial, además de mostrar la dirección del vector campo eléctrico, da la dirección en que la variación del valor del potencial es máxima.

Líneas de fuerza.

Supongamos que un conjunto de líneas tiene la propiedad de que sus tangentes en cada punto coinciden con la dirección del campo eléctrico, como se muestra en la figura.3. Esas líneas se denominan **líneas de fuerza**. De acuerdo a la definición las líneas fe fuerza deben salir de las cargas positivas y morir en las cargas negativas. Si se trata de una carga aislada, las líneas de fuerza salen de la carga si ésta es positiva y se prolongan hasta el infinito.

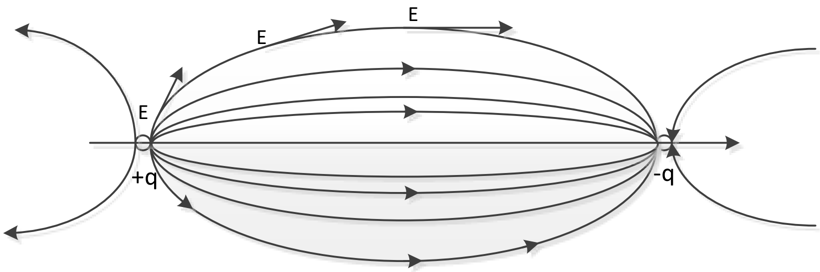
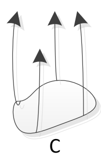


Fig.3 líneas de fuerza del campo producido por dos cargas puntuales +q y –q.

De acuerdo a la definición las líneas de fuerza no se cortan jamás pues si se cortaran implicaría que sus tangentes, que tienen la dirección del campo eléctrico, tendrían dos direcciones diferentes, es decir el campo eléctrico tendría dos direcciones simultáneamente lo que no es posible.



La figura representa un contorno cerrado elemental se ve trazadas las líneas de fuerza que pasan por sus puntos. Estas líneas forman un tubo delgado cuya sección transversal puede variar a lo largo de su longitud pero sus generatrices permanecerán paralelas. Faraday llamó a este recurso geométrico tubo de fuerza definiendo el flujo del tubo como el producto del área de la sección normal por la intensidad del vector **E.** Un tubo unitario es uno de flujo unidad. Los tubos no se cortan pues eso indicaría que el campo eléctrico tiene dos direcciones simultáneamente.

Flujo

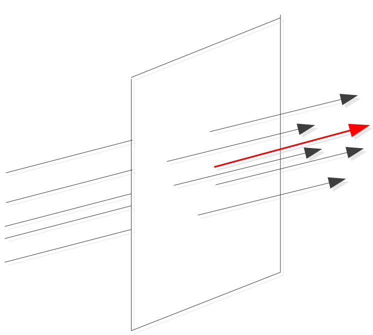


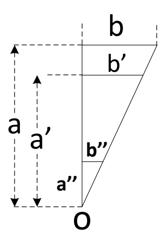
Figura 9. Flujo eléctrico

Supongamos que en el espacio hay un campo eléctrico E, representado por los vectores en negro de la figura. Se llama flujo eléctrico Φ_E al producto escalar de los vectores: $\vec{E}\cdot\vec{A}$, es decir: $\Phi_E = EA\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman E, el campo eléctrico y A el vector de área de la superficie. Si el campo no fuese constante el flujo eléctrico viene dado por:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Para tratar el caso del flujo de un campo eléctrico en una superficie recordaremos la definición de ángulo sólido. Para evitar confusiones destacaremos el hecho de que el ángulo sólido no tiene nada de sólido, es simplemente una definición geométrica que ayuda en la descripción de la idea de flujo.

Angulo subtendido, se entiende por ángulo subtendido a la apertura que produce la observación de una figura. Para el caso de un plano se muestra un esquema un plano como se muestra ben la figura 4. Aquí se puede observar que es posible definir el ángulo en términos del cociente entre la longitud del arco que la figura plana subtiende y el radio correspondiente, definido como la distancia desde el punto de observación al punto extremo de la figura, esta razón adimensional evidentemente no depende del punto en el que se traza el círculo y es la medida del ángulo en radianes, en ésta definición, la circunferencia completa tiene 2π Radianes. El ángulo sólido se refiera al ángulo subtendido que presenta un objeto en el espacio. La definición de ángulo sólido es completamente semejante a la de un ángulo en radianes sólo que aquí en vez de ser un par de línea las que subtienden el ángulo se trata de un manto cónico, así $\Omega\left[\text{Estereoradianes}\right] \equiv \frac{A}{R^2}$ donde R es la longitud del lado cónico que subtiende el cuerpo en examen y A es el área intersecada por el cono. Como se pone en evidencia en la figura 4, la medida del ángulo sólido no depende de la distancia respecto de la que se mide. Si aún no se convence píense en los teoremas de semejanza de triángulos; en la figura los cocientes: (a/b)=(a'/b')=(a''/b'') etc., independiente de donde consideremos las a. En el caso de los radianes, la longitud del arco es proporcional al radio (arco=$\varphi\cdot$(radio)) de manera que si tomamos más radio el arco aumenta de forma proporcional y cociente no cambia.



Lo mismo ocurre en el caso de un ángulo sólido, si el radio del cono aumenta la superficie lo hace de forma proporcional, pero no directamente al radio0 sino que al cuadrado de él. De otra forma la unidad de estereorradián no sería adimensional, como la de los ángulos en radianes.

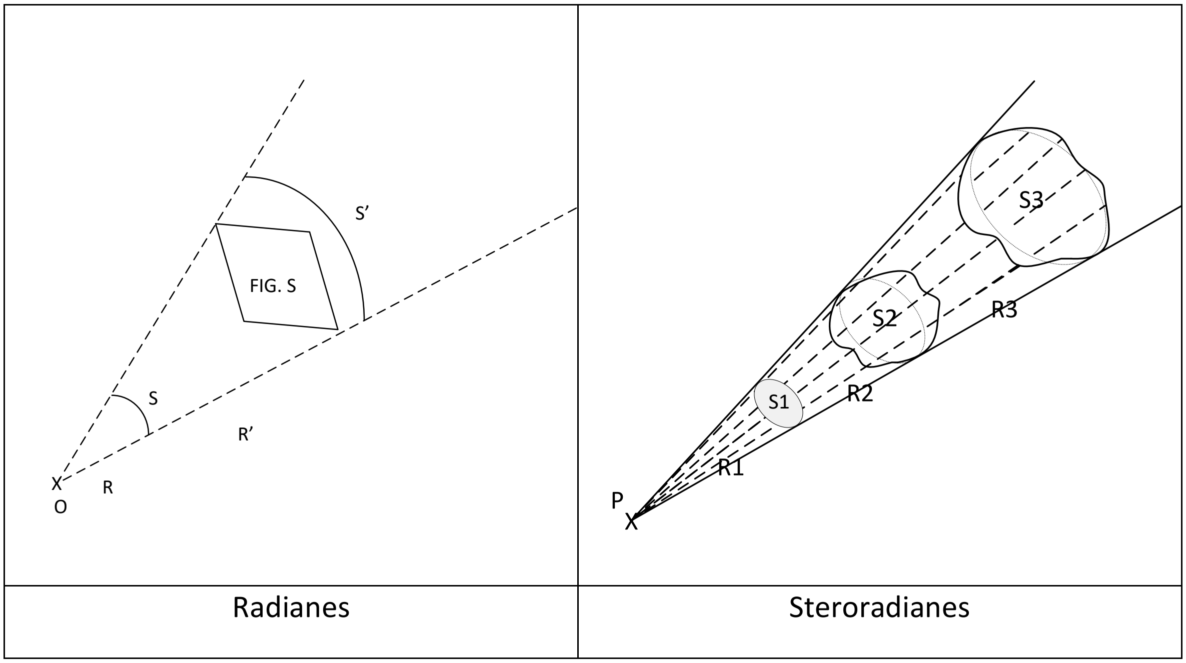


FIG. 4 Ejemplos de radianes y Estereorradianes

Cuando la superficie que se mide es un casquete esférico la definición se puede aplicar simplemente evaluando la apertura del cono respectivo calculando de manera simple el área de la superficie. Cuando se trata de una superficie irregular la definición se generaliza a $\Omega\left[\text{Estereoradianes}\right] \equiv \dfrac{A}{R^2}$. Esta definición puede ser generalizada encontrándose que el llamado ángulo sólido referido a un punto O, se puede expresar como:

$$\Omega\left[\text{Estereoradianes}\right] \equiv \int_S \frac{\hat{R}ds}{R^2}$$

Donde el vector unitario va desde al punto O hasta el elemento de superficie considerado y R es la distancia del origen O hasta el mismo punto.

De la definición de flujo de un tubo resulta que el número de tubos que atraviesan un área elemental dS perpendicular al campo es EdS, si el área no es normal al campo de puede poner: **E**·d**S.** A este producto se le llama flujo de **E** a través de d**S.** Por supuesto que si tenemos una superficie extensa S el flujo se calcula como:

$$\text{flujo de E a travesde S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Si la superficie S es cerrada se habla de flujo que entra o que sale de ella y la integral se extiende sobre toda su extensión.

Considerando con más detalle el flujo de **E** a través de una superficie cerrada S cuando el campo está producido por una carga aislada q en O, como se ilustra en la figura 5. Si θ es el ángulo que hace un elemento dS con el campo **E** calculamos el flujo con la expresión:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS\cos\theta = \frac{k_e q}{r^2} dS\cos\theta = k_e q d\omega$$

$d\omega$ es el ángulo sólido trazado desde el origen O hasta la proyección de área elemental dS en la dirección del campo (dScos θ). 0.

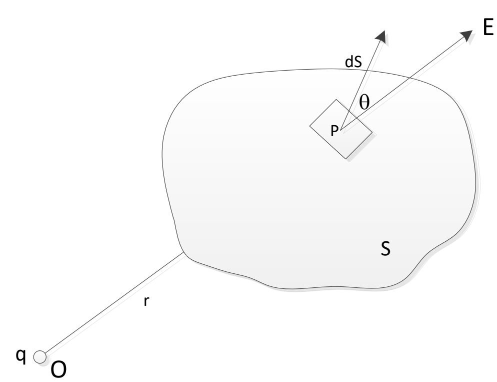


Fig.5 Ilustración de la demostración del teorema de Gauss.

El ángulo sólido que forma una esfera centrada en un punto vale 4π. Entonces para el punto P se calcula:

$$\phi_E = \oint k_e \frac{qdS\cos\theta}{r^2} = k_e q \oint d\omega$$

Pero la integral de $d\omega$ sobre una superficie esférica cerrada es ω que como vimos es el ángulo sólido asociado a una superficie cerrada que vale 4π. Entonces,

$$\int_{\text{Sup.Cerrada}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Este es el teorema de Gauss que nos dice que el flujo total sobre cualquier superficie cerrada conteniendo una carga eléctrica es $(1/\varepsilon_0)q$. El teorema tiene una gran importancia práctica en la resolución de problemas, como lo verán en los ejemplos resueltos y clases de ejercicios. En clase se mostró que cuando la carga era exterior a una superficie cerrada el flujo era cero. Desde un punto de vista más riguroso, el problema se puede visualizar partiendo de una superficie abierta con sus tubos de fuerza correspondientes. Si se cierra la superficie el contorno se va achicando hasta que cuando está completamente cerrada su área se anula dando un flujo cero, como se ilustra en la figura 6.

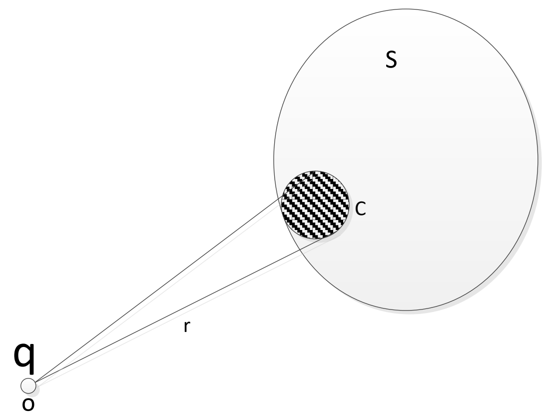


Figura 6.- Ilustración, mediante el ángulo sólido, de que el flujo que aporta una carga exterior a una superficie cerrada es cero.