Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Ley de enfriamiento de Newton: La rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el instante t, T_A es la temperatura ambiente, entonces

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_A), \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Solución: Notar que (1) es una ecuación diferencial de variables separables que sabemos resolver

$$\frac{dT}{T - T_A} = k\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dT}{T - T_A} = \int k\,dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|T - T_A| = kt + c,$$

obtenemos

$$T(t) = T_A + Ce^{kt},$$

donde $C = e^c$.

Continuación

Supongamos que la temperatura del aire es de $25^o C$ y un objeto se enfría de $100^o C$ a $50^o C$ en 30 minutos, queremos calcular en qué instante la temperatura del objeto será de $40^o C$.
Los datos que nos entregan son

$$T_A = 25, \quad T(0) = 100, \quad T(30) = 50.$$

Primero sustituimos la condición inicial para obtener el valor de C

$$T(0) = 25 + C = 100, \quad \Longrightarrow \quad C = 75.$$

Segundo, evaluamos en $t = 30$min. para determinar el valor de k

$$50 = 25 + 75e^{30k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{25}{75} = e^{30k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} = e^{30k} \quad \Longrightarrow \quad -\ln(3) = 30k$$

$$\Longrightarrow \quad k = -\frac{\ln(3)}{30}$$ negativo!!!

Por último, sea t_1 el tiempo tal que $T(t_1) = 40^o$. Entonces

$$40 = 25+75e^{-\frac{\ln(3)}{30}t_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{5} = e^{-\frac{\ln(3)}{30}t_1} \quad \Longrightarrow \quad -\ln(5) = -\frac{\ln(3)}{30}t_1 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 30\frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 44min.$$

Propagación del Covid-19: Es razonable suponer que la tasa o razón con que se propaga no sólo es proporcional a la cantidad de personas, $x(t)$, que la han contraído en el momento t, sino también a la cantidad de sujetos, $y(t)$, que no han sido expuestos todavía al contagio. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy,$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Consideremos el caso de una ciudad con población constante de n personas y llega un turista de Italia infectado con Covid-19, luego x e y se relacionan de la siguiente forma $x + y = n + 1$. Usando esta información obtenemos el siguiente modelo:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x),$$

Con la condición inicial $x(0) = 1$.

Propagación del Covid-19

Solución: Notar que es una EDO de variables separables, luego

$$\int \frac{dx}{x(n+1-x)} = \int k\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{n+1}\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1-x}\right) dx = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{n+1} \ln \left| \frac{x}{n+1-x} \right| = kt + c \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{n+1-x} = Ce^{k(n+1)t}.$$

Sustituyendo la condición inicial $x(0) = 1$ se obtiene $C = 1/n$, así la solución escrita de forma explícita es

$$x(t) = \frac{(n+1)e^{k(n+1)t}}{n + e^{k(n+1)t}}.$$

Usemos los datos de la Región de Ñubles. El 12 de marzo (nuestro $t = 0$) se registró el primer caso en Chillán, 13 días después, el 25 de marzo había 111 casos de Covid-19. Si la población de es 480.610, podemos calcular el valor de k:

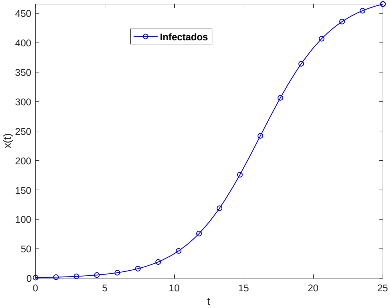
$$k = \frac{1}{(n+1)t} \ln \left(\frac{nx}{n+1-x} \right) = \frac{1}{(480.610+1)13} \ln \left(\frac{480.610 \cdot 111}{480.610 + 1 - 111} \right) \quad \Longrightarrow \quad k = 7.937217 \times 10^{-4}.$$

Propagación del Covid-19

El modelo que describe los infectados por Covid-19 en Chillán, Ñubles es

$$x(t) = \frac{(n+1)e^{k(n+1)t}}{n + e^{k(n+1)t}}.$$

Podemos graficar esta función y ver que después de 25 días se pronostica 466 casos !! (valor real 474 casos el 6 de abril)



Problemas de mezclas

Consideremos un recipiente de V litros de capacidad que contiene una solución perfectamente homogeneizada (por ejemplo: agua y sal) como en la Figura 1.

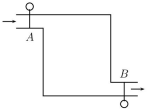


Figure: 1. Problema de mezcla.

Se accionan simultáneamente las llaves A y B, haciendo ingresar por A agua pura a razón de a *lts*/*min* y se extrae solución por B en la misma proporción.
Sea $x(t)$ la cantidad de sal presente en un instante t posterior. Entonces

$$\frac{x(t)}{V} \quad \text{es la cantidad de sal por litro en el recipiente,}$$

y la variación de la cantidad de sal es

$$x'(t) = -a\,\frac{x(t)}{V}\,.$$

De esta forma

$$x(t) = x(0)\,e^{-\frac{a}{V}t}\,.$$

Problemas de mezclas

Si en lugar de agua pura entra una solución que contiene c gramos de sal por litro, entonces

$$x'(t) \;=\; a \cdot c \;-\; a\,\frac{x(t)}{V}\;,$$

es decir

$$\frac{dx}{x - V \cdot c} \;=\; -\frac{a}{V}\,dt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; V \cdot c \;+\; (x(0) \;-\; V \cdot c)\,e^{-\frac{a}{V}\,t}\;.$$

Las múltiples posibilidades que se presentan en los problemas de mezclas se reducen a la ecuación

$$x'(t) \;= e(t) \;-\; s(t)\;,$$

donde $e(t)$ y $s(t)$, son respectivamente, la cantidad de sal que se añade y se retira en el instante de t.

Problemas de mezclas

Ejemplo 1: Considere el mismo recipiente de la Figura 1 y suponga que de nuevo por la llave A entra agua pura a razón de a lts/min; pero que por la llave B sale solución a razón de b lts/min, con $b > a$.
Tenemos entonces

- $e(t) = 0$ (no hay entrada de sal).
- $V - (b-a)\,t$: es la cantidad de líquido presente en el instante t.
- $\frac{x(t)}{V - (b-a)\,t}$: es la cantidad de sal por litro en el instante t.

Luego

$$s(t) = \frac{x(t)}{V - (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,,$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x\,b}{V - (b-a)\,t}\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dx}{x} = -\frac{b}{V - (b-a)\,t}\,dt \quad\Longrightarrow\quad x(t) = x(0)\left[1 - \frac{b-a}{V}\,t\right]^{\frac{b}{b-a}}\,.$$

Problemas de mezclas

Ejemplo 2: Suponga la misma situación anterior, pero entrando por A en lugar de agua pura, solución con concentración de c gramos por litro.
Tenemos

$$\begin{aligned} e(t) &= c\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot a\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,, \\ s(t) &= \frac{x}{V - (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\,, \end{aligned}$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} = c\,a - \frac{x\,b}{V - (b-a)\,t}\,.$$

Esta es la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + \frac{b}{V - (b-a)\,t}\,x = c\,a\,,$$

cuya solución es

$$x(t) = cV\left(1 - \frac{b-a}{V}\,t\right) + (x(0) - cV)\left(1 - \frac{b-a}{V}\,t\right)^{\frac{b}{b-a}}\,.$$

Trayectorias Ortogonales

Dada una familia de curvas planas

$$f(x, y, c) = 0, \qquad (2)$$

donde cada valor del parámetro c representa una curva. Nuestro objetivo es encontrar una familia de curvas que dependan de un parámetro k

$$g(x, y, k) = 0, \qquad (3)$$

tal que cualquier curva de (2) al interceptar a cada curva de la familia (3), las pendientes de las rectas tangentes en el punto sean perpendiculares. Estas familias de curvas se denominan trayectorias ortogonales.

Ejemplos:

- **Electrostática:** La familia de curvas equipotenciales y la de línea de fuerza.
- **Hidrodinámica:** El potencial de velocidad y las líneas de corriente o de flujo.

Trayectorias Ortogonales

Dada una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$, primero se encuentra la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

como las pendientes de las trayectorias ortogonales deben cumplir

$$m \cdot m_1 = -1,$$

se obtiene que la familia de curvas ortogonales debe resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{F(x, y)}.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene la trayectoria ortogonal $g(x, y, c) = 0$.

Trayectorias Ortogonales

Ejemplo: Encuentre las trayectorias ortogonales de todas las parábolas con vértice en el origen y foco sobre el eje X.
Solución: La familia de parábolas tiene la forma

$$y^2 = 4px, \quad p \neq 0.$$

La ecuación diferencial asociada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}.$$

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales verifica

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}.$$

Notar que es una EDO de variables separables cuya solución es

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = k, \quad k \neq 0,$$

que representa a la familia de elipses con centro en el origen.