Representación Gráfica Ajuste y Rectificación

Objetivos de aprendizaje:

- **Identificar y representar** gráficamente las variables que intervienen en un experimento.
- Determinar mediante el proceso de **rectificación y ajuste lineal** la relación funcional entre estas variables físicas**.**
- **Interpretar** físicamente las constantes estimadas del proceso de **rectificación y ajuste lineal.**

Fundamentos Teóricos

Un gráfico permite visualizar el comportamiento de las magnitudes que caracterizan el fenómeno en estudio, y así poder establecer una relación matemática entre las variables que intervienen en el evento, esta ecuación obtenida es lo que se denomina ***"relación funcional".*** La determinación e interpretación de la relación funcional asociada al gráfico constituye uno de los objetivos importantes de la experimentación.

Esta relación se puede expresar como $y = f(x)$, donde *"y"* es la variable dependiente y *"x"* es la variable independiente. Entendiéndose como ***variable independiente*** aquella controlada por el experimentador y por ***variable dependiente*** a aquella cuyo valor depende del fenómeno físico bajo estudio. Los valores de *"x"* e *"y"* se representan en un gráfico y determinar su relación funcional constituye uno de los objetivos más relevantes en un laboratorio, porque permite predecir el comportamiento de la variable dependiente del fenómeno bajo estudio (proyectar, caracterizar, calibrar instrumentos, validar modelos, etc).

Función lineal

Si el gráfico resulta ser una línea recta, entonces la relación entre las variables *"x"* e *"y"* ***es lineal*** de la forma:

$$y = mx + b$$

Donde *"m"* es la pendiente de la recta y *"b"* es el punto de intersección de la recta con el eje y para *"x=0"***.**

FACULTAD DE CIENCIA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Av. Ecuador 3493 Estación Central - Santiago - Chile
Coordinador de laboratorios: Belfor Galaz, mail: coord.labfis.a@usach.cl
Consultas sobre asistencia: Magaly Sepúlveda, ubicada en el mesón del block D

Para estimar los valores de *"m"* y de *"b"*, se puede aplicar los métodos descritos a continuación.

1. **Método gráfico:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = y - mx$$

2. **Método promedios:** Para calcular *"m"* y *"b"* se necesitan dos ecuaciones lineales, por lo tanto se dividen los datos experimentales en dos grupos, con cada grupo se genera una ecuación y se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c|} \overline{y}_i = m\overline{x}_i + b \\ \overline{y}_j = m\overline{x}_j + b \\ \hline \end{array}$$

3. **Método de los mínimos cuadrados:**

$$m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad \mathrm{b} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$\Delta \boldsymbol{m} = \sqrt{\frac{\sum \boldsymbol{d_i^2}}{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})}}$$

$$\Delta \boldsymbol{b} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{\overline{x}^2}}{\boldsymbol{D}}\right)\frac{\sum \boldsymbol{d_i^2}}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})}}$$

Con $D = \sum(x_i - \bar{x})^2$ y $d_i = y_i - mx_i - b$.

Cuando la relación entre las variables es lineal, el **coeficiente de correlación lineal** (r), indica el grado de linealidad entre las variables en estudio. Es una métrica que es usada para cuantificar la calidad del ajuste realizado.

Para determinar el valor de este coeficiente, se utiliza la expresión:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]\left[n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}$$

FACULTAD DE CIENCIA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Av. Ecuador 3493 Estación Central - Santiago - Chile
Coordinador de laboratorios: Belfor Galaz, mail: coord.labfis.a@usach.cl
Consultas sobre asistencia: Magaly Sepúlveda, ubicada en el mesón del block D

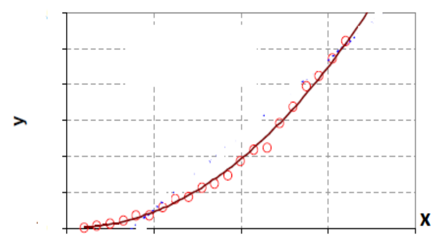
Los valores que puede tomar "r" están en el intervalo $[-1\,;1]$, esto significa que cuando $|r| \to 1$, decimos que la relación es lineal y que cuando $|r| \to 0$, la relación no es lineal aunque puede haber otro tipo de correlación (exponencial, potencial, parabólica, etc.).

Las calculadoras que incluyen cálculos de regresión o las hojas de cálculo, como *Excel*, incorporan entre sus funciones el coeficiente de correlación, con lo que basta introducir los datos y aplicar dicha función.

Si la **función no es lineal**, entonces la relación entre las variables puede tener alguna de las siguientes formas:

Función Potencial

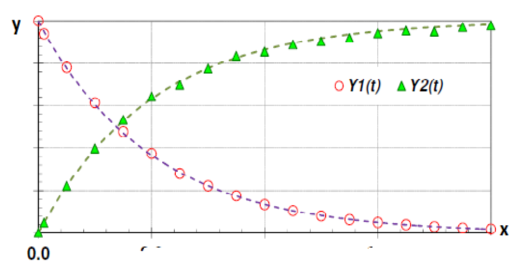
Las variables "x" e "y" presentan una dependencia potencial si es de la forma $y = ax^c$ donde a y c son constantes distintas de cero. Esta función se puede linealizar aplicando logaritmo natural a ambas variables.



$$y' = \ln(y) = cln(x) + \ln(a) = cx' + b$$

Función Exponencial

Las variables "x" e "y" presentan una dependencia exponencial si es de la forma $y = ae^{cx}$, donde a y b son constantes distintas de cero. Esta función se puede linealizar aplicando logaritmo en base natural la variable dependiente.



$$y' = \ln\,(y) = cx + \ln(a) = cx + b$$

La figura muestra dos ejemplos de funciones exponenciales.

Una vez linealizado o rectificado el gráfico, se determina las constantes de este nuevo gráfico para obtener la relación funcional entre las variables.

$$c = m \quad \text{y} \quad a = e^b$$

Al utilizar el método de los mínimos cuadrados en Excel, es conveniente realizar los cálculos correspondientes por columnas.

Para estimar m y b:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
Σx_i	Σy_i	$\Sigma x_i y_i$	Σx_i^2	Σy_i^2

Para estimar sus Δm y Δb:

$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
	$\Sigma(x_i - \overline{x})^2$

FACULTAD DE CIENCIA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Av. Ecuador 3493 Estación Central - Santiago - Chile
Coordinador de laboratorios: Belfor Galaz, mail: coord.labfis.a@usach.cl
Consultas sobre asistencia: Magaly Sepúlveda, ubicada en el mesón del block D

y_i	m	x_i	b	d_i	d_i^2
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
					Σd_i^2

Otra forma de obtener la relación funcional entre las variables “x“ e “y” es realizar un ajuste de curva con la ayuda de las herramientas de Excel o utilizar otro programa tal como Matlab.

Una medida de la calidad del ajuste da el coeficiente de correlación lineal “r”. Si la dispersión de los datos es baja y el valor de “r” es cercano a 1, el modelo empírico representado por el ajuste es bueno.

FACULTAD DE CIENCIA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Av. Ecuador 3493 Estación Central - Santiago - Chile
Coordinador de laboratorios: Belfor Galaz, mail: coord.labfis.a@usach.cl
Consultas sobre asistencia: Magaly Sepúlveda, ubicada en el mesón del block D