Electromagnetismo 2021, tercera lección.

Como se estableció en la clase pasada, el campo eléctrico que produce una serie de cargas en un punto del espacio se calcula usando el principio de superposición.

En la figura se muestra un conjunto de cargas “puntuales” (sabemos que es sólo una aproximación) y se desea calcular cuánto vale el campo eléctrico que produce este conjunto en el punto P. Para que la situación sea más clara haremos el razonamiento sólo con la carga q_1, los otros son idénticos.

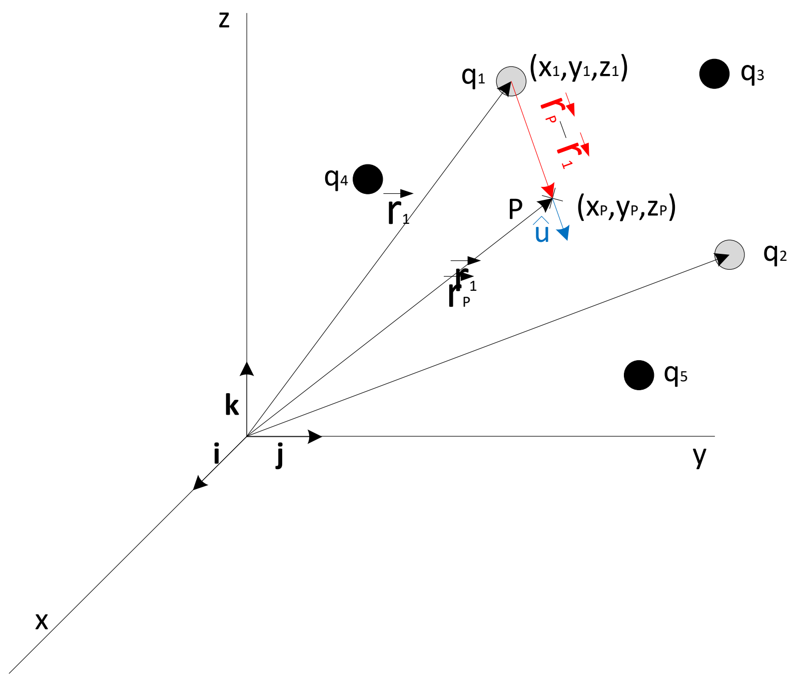


Figura 1. Distribución de cargas y su campo eléctrico asociado.

La posición de cada carga se especifica con su vector de posición, también la posición del punto en el que se desea calcular el campo eléctrico. A la posición de la carga q_1 le llamamos $\mathbf{r}_1$, a la del punto P $\mathbf{r}_P$ etc. Para calcular el campo eléctrico necesitamos la distancia mutua entre el punto y cada una de las cargas, para la carga q_1 esta es: $|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_1|$, entonces la contribución al campo en P de la carga q_1 se pone como:

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{k_e q_1}{[\vec{r}_P - \vec{r}_1]^2} \frac{\vec{r}_P - \overrightarrow{r_1}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|}$$

Notar que en el texto ponemos los vectores en negrita mientras en las fórmulas en notación vectorial, esto sólo para facilitar la tarea de escritura.

Si se conocen las coordenadas de posición de las cargas y el punto donde se necesita saber el campo, la solución del problema se simplifica notablemente, como los habrán apreciado los estudiantes que resolvieron en términos de coordenadas el problema-ejemplo para el cálculo del campo de un dipolo en un punto de su simetral.

Supongamos que el vector **r₁** se exprese como: $\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ y el vector de posición del punto P es: : $\overrightarrow{r_P} = x_P\hat{i} + y_P\hat{j} + z_P\hat{k}$, el vector que representa la posición de P respecto de **r** será:

$\vec{r}_P - \vec{r}_1 = (x_P - x_1)\hat{i} + (y_P - y_1)\hat{j} + (z_P - z_1)\hat{k}$, la distancia entre P y q_1 es el módulo del vector diferencia: $|\vec{r}_P - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_P - x_1)^2 + (y_P - y_1)^2 + (z_P - z_1)^2}$, el vector unitario se escribe simplemente como:$\hat{u} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|} = \frac{(x_P - x_1)\hat{i} + (y_P - y_1)\hat{j} + (z_P - z_1)\hat{k}}{\sqrt{(x_P - x_1)^2 + (y_P - y_1)^2 + (z_P - z_1)^2}}$, este vector unitario está pintado de azul en la figura 1, se ha supuesto que la carga q_1 es positiva, si en el punto P situamos una carga de prueba unitaria (siempre es positiva la carga de prueba) el vector unitario que muestra la contribución al campo eléctrico de q_1 sería el que hemos deducido, si q_1 fuese negativa habría que invertir el signo de **u**. Finalmente la contribución al campo de q_1 se calcula como:

$$\vec{E}_1 = \frac{k_e q_1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_P - \vec{r}_1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_1|}, \text{ o, lo que es igual:}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{k_e q_1}{[(x_P - x_1)^2 + (y_P - y_1)^2 + (z_P - z_1)^2]}\frac{(x_P - x_1)\hat{i} + (y_P - y_1)\hat{j} + (z_P - z_1)\hat{k}}{[(x_P - x_1)^2 + (y_P - y_1)^2 + (z_P - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

La ventaja de expresar el problema en términos de los vectores expresados en coordenadas reside en que reemplazados los valores de las coordenadas todo queda expresado en términos de operaciones algebraicas simples. Si se hace el mismo trabajo con las otras cargas, el campo total se calcula como una suma de vectores:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots \vec{E}_n \text{ o dicho de otra forma: } \vec{E}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

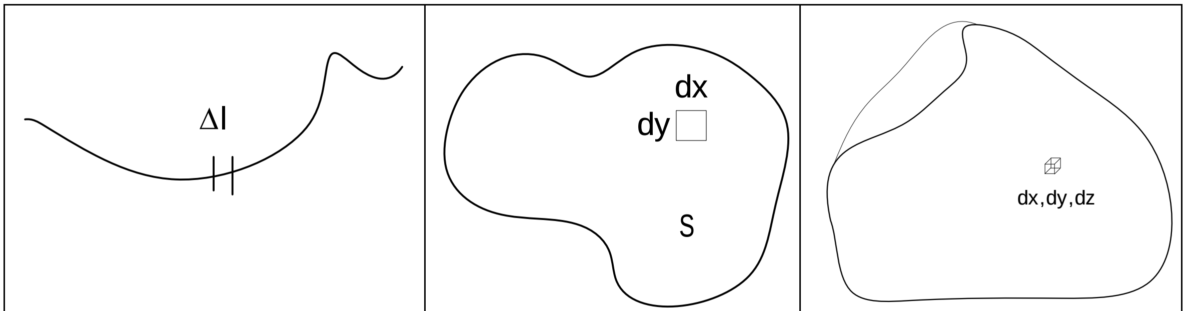
Esta es una expresión del principio de superposición que se cumple tanto en expresión escalar, por ejemplo, cuando multiplicamos por n la carga de un punto, la fuerza o el campo en un punto cercano también aumenta en un factor n o, como en este caso, si se aumenta el número de cargas que contribuyen a crear un campo eléctrico, el valor de éste crece como la suma vectorial de la contribución de cada una de las cargas individuales que se va agregando.

DISTRIBUCIÓN CONTÍNUA DE CARGAS

En ciertas oportunidades no es conveniente considerar a las cargas como puntos en el espacio, a pesar de que los electrones son partículas muy pequeñas cuya carga es $e=-1.60218\times10^{-19}$ C y su masa $m=9.1009\ \times10^{-32}$ kg. Son partículas pequeñísimas, cuando están en un objeto extenso, conviene tratarlas como si se tratase de un fluido. Entonces se habla no de un gran conjunto de cargas puntuales, sino que de una **densidad de carga.** Por supuesto que las cargas siguen residiendo en los electrones, pero esta visión aproximada de la situación resulta muy conveniente y entrega resultados completamente válidos dentro de las aproximaciones que se consideran corrientemente en situaciones reales.

Para cargas residentes en objetos extensos se dan tres tipos de densidad de carga:

Densidad de carga lineal, cuando las cargas residen en un filamento relativamente fino, se mide en Coulomb/m y representa la carga que reside en una pequeña porción del filamento (alambre). En la figura 2 se muestra un trozo de alambre y en el una pequeña porción de alambre de longitud Δs.



Elemento lineal	Elemento de superficie	Elemento de volumen

Figura 2. Elementos para una densidad de carga

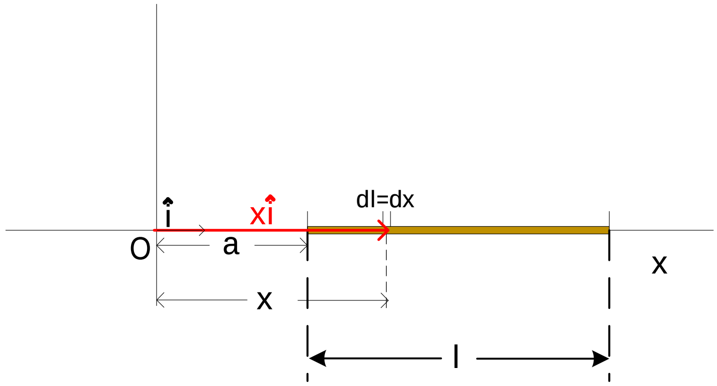
Si en esa pequeña longitud está encerrada una carga Δq, la densidad de caga de ese segmento será Δq/Δs [Coulomb/metro], similarmente, la densidad superficial de carga se refiere a las cargas contenidas en una superficie, se denota por la letra σ y evidentemente se mide en [Coulomb/m^2] , finalmente , si se trata de un volumen, la densidad de carga tendría la forma: ρ [Coulomb/m^3]. En definitiva, las densidades de carga se presentan de la siguiente manera:

$$\lambda \equiv \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{l}}, \qquad \sigma \equiv \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{A}}, \qquad \rho \equiv \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{V}}$$

Esto funciona muy bien cuando las densidades de carga son constantes, es decir cuando elegido cualquier elemento de línea en un filamento de área en una superficie o de volumen en un cuerpo, la cantidad de carga es la misma, siempre que los elementos lo sean, eso se le llama densidad de carga constante. ¿Pero qué ocurre si la cantidad de carga varía en cada elemento?, lo que usa entonces es considerar un pequeño elemento de línea, superficie o volumen tan pequeño que en él la densidad de carga es constante, digamos para un elemento diferencial de línea dl , la carga contenida será dq, así dq=λdl dq=σdA y dq=ρdV, como las densidades de carga no son constantes de estas afirmaciones se desprende que λ(x,y,z)=(dq/dl), σ(xyz)=(dq/da), ρ(xyz)=(dq/dV), note que se debe conocer las expresiones para las densidades en función de las coordenada para poder operar, para en caso de λ, que es una densidad lineal de carga para estar en presencia de un filamento debe haber relaciones entre las coordenadas que hacen que la carga se encuentre efectivamente en una línea, igual para las superficies y los volúmenes. Veremos algunos ejemplos simples de las situaciones recién descritas y la forma en que opera la teoría recién descrita.

Ejemplo de una densidad de carga a lo largo de una línea recta. En este caso, para facilitar las cosas, se ha elegido un sistema de coordenadas en el que línea cargada coincide con el eje de las x. Si lo queremos poner como dijimos unas líneas más arriba habría que decir: La ecuación de la línea cargada es: y=0, z=0, x=x o, s(xyz)=x.

La solución de este tipo de problemas viene por el uso adecuado de nuestras definiciones y el principio de superposición, veamos cómo es eso:



En la figura se muestra una línea cargada con una densidad lineal de carga λ(C/m), <u>constante</u>. la línea tiene una longitud l y está separada una distancia a" "del origen. Se pide el campo eléctrico que la línea produce en un punto P situado en el origen.

Para resolver el problema suponemos que la línea cargada coincide con el eje de las x en un sistema de coordenadas, entonces: un pequeño trocito del conductor de longitud dl=dx tiene una carga eléctrica dq=λdl, como resulta claro de la figura el vector de posición de esa carga "puntual" es: $\vec{r'}=x\hat{i}$, por supuesto $\hat{i}$ es nuestro conocido vector unitario a lo largo del eje x. $\vec{r}=\vec{0}$, porque el punto en el que se desea calcular el campo es el origen. Ahora tratamos nuestro dq como si fuese una carga puntual, de sobra sabemos cómo se calcula el campo eléctrico que la carga "puntual dq" produce en el punto P=O (origen):

$d\vec{E}=k_e\frac{\lambda dx}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$, reemplazando los valores de las variables, obtenemos para el campo eléctrico producido por el segmento de alambre infinitesimal dl=dx:

$$d\vec{E}=k_e\frac{\lambda dx}{|\vec{0}\text{-}x\hat{i}|^2}\frac{\vec{0}\text{-}x\hat{i}}{|\vec{0}\text{-}x\hat{i}|}=\frac{\lambda dx}{x^2}\text{-}\hat{i}\therefore d\vec{E}=\text{-}\hat{i}k_e\frac{\lambda dx}{x^2}$$

Para calcular el campo total producido por la línea cargada en el punto empleamos el teorema de superposición, como se trata de una distribución continua de cargas, la suma se realiza mediante un proceso de integración entre los extremos de la barra (a, l+a), resultando:

$\vec{E}=\text{-}\hat{i}k_e\int_a^{l+a}\frac{\lambda dx}{x^2}=\text{-}\hat{i}k_e\lambda\left|\text{-}\frac{1}{x}\right|_a^{l+a}=\text{-}\hat{i}k_e\lambda\left(\text{-}\frac{1}{l+a}+\frac{1}{a}\right)$, sumando las fracciones el campo queda como:

$\vec{E}=\text{-}\hat{i}k_e\lambda\frac{l}{a(l+a)}=\text{-}\hat{i}k_e\frac{Q}{a(l+a)}$ expresión en la que se ha reconocido que la carga total de la línea de longitud l y densidad de carga constante λ es: Q=λl.

Haremos más problemas de este estilo, pero este, por su sencillez y rigor en el planteamiento, sirve para reconocer la aplicación del principio de superposición dejando claramente establecido que las leyes del electromagnetismo se cumplen con su hermosa sencillez siempre.

Ahora consideraremos una distribución mixta de cargas, es decir un sistema de cargas con dos cargas puntuales acompañada de una distribución continua de cargas. Veremos que, como era de esperarse, con las debidas precauciones, emplearemos nuevamente el principio de superposición.

Se pide el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto $\vec{P}$ de coordenadas(0,0,2L). como se muestra en la figura 3. El campo está producido por dos cargas puntuales +q y –q, que se encuentran en el plano (y,z) ver la figura, y un cilindro macizo de densidad de carga constante ρ.

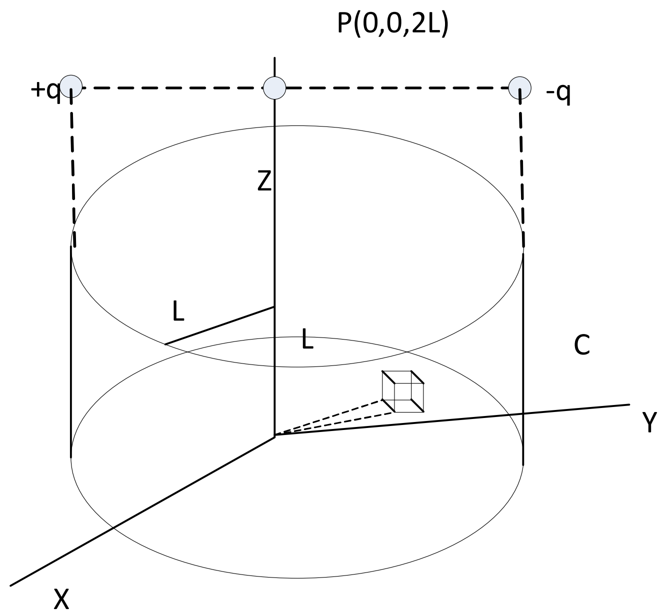


Fig. 3 distribución mixta de cargas

Primero encontremos el vector que representa el punto en el queremos calcular el campo. Las coordenadas del punto P son (0,0,2L) así el vector del punto para calcular el campo será: $\vec{r}_0 = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2L\hat{k}$, el vector de posición de la carga +q es $\vec{r}' = 0\hat{\imath} - L\hat{\jmath} + 2L\hat{k}$, repita el mismo trabajo con la carga –q. Calcule las contribuciones de estas cargas al campo en P. Para calcular la contribución al campo que hace el cilindro macizo haremos un pequeño razonamiento, las coordenadas que mejor se adaptan a la simetría del problema son las cilíndricas, referiremos entonces cada porción infinitesimal del cilindro en ese sistema de coordenadas, como es bien sabido las coordenadas cilíndricas son $(\eta\phi z)$, como se muestra en la figura 4. Este sistema de coordenadas representa todos los puntos de una superficie circular plana. En la figura 4 se muestra este efecto: cada punto de un círculo, por ejemplo, el círculo de radio L se puede representar con valores de las coordenadas (η,ϕ), para este caso consideramos z=0, estamos en el plano que es la base del cilindro, las coordenadas se pueden reducir a componentes de un vector haciendo las transformaciones similares a las que hemos hecho para el caso cartesiano, entonces cada punto del cilindro se puede representar mediante los vectores: $\eta\cos\phi\hat{\imath}+\eta\operatorname{sen}\phi\hat{\jmath}+z\hat{k}$, del dibujo se aprecia que $0\leq\eta\leq L$, $0\leq\phi\leq2\pi$, $0\leq z\leq 2L$. Estos serán los límites a considerar cuando realicemos la suma (integral) de las contribuciones del cilindro cargado al campo eléctrico en el punto (0.0,2L).

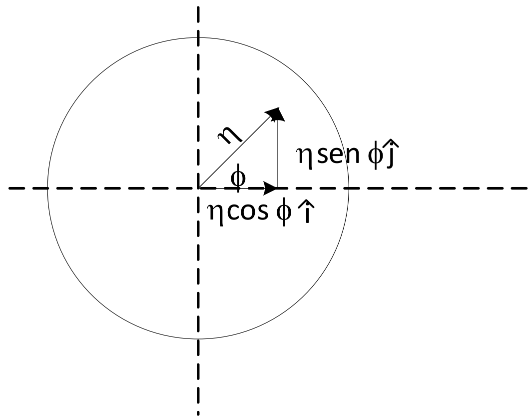


Figura 4 dos de las coordenadas cilíndricas proyectadas al fondo del cilindro (z=0)

Un pequeño elemento de volumen en este sistema de coordenadas se representa como se muestra en la figura 4

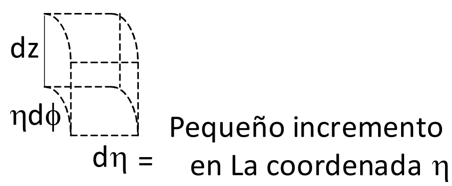


Figura 5. Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

Para calcular la contribución del cilindro encontramos de la carga “puntual” dq y sumamos las contribuciones de todas las cargas. Por supuesto que dq=ρdv (igual que antes) y dv es un “cubo” igual a $\eta d\phi\times d\eta\times dz$, en realidad $\eta d\phi$ es n arco pero en un cubo de dimensiones infinitesimales, puede ser tratado como su todas las líneas sean rectas.

Entonces, como dV=ηdηdφdz, la diferencial de carga que para ρ constante se anota como: dq=ρdv muestra que dq=ρηdηdφdz. El vector del punto en el que queremos calcualr el campo eléctrico es: $\vec{r}=2L\hat{k}$ mientras que el vector $\vec{r'}$ que es el vector que denota la posición de cada carga “puntual” se anota como: $\vec{r'}=\eta\cos\varphi\hat{i}+\eta\text{sen}\varphi\hat{j}+z\hat{k}$. Ahora podemos calcular la diferencial de campo que aportará cada trocito del cilindro en consideración:

$$d\vec{E}=k_e\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r'}\right)$$

Con $\vec{r}-\vec{r'}=2L\hat{k}-\left(\eta\cos\varphi\hat{i}+\eta\text{sen}\varphi\hat{j}+z\hat{k}\right)$; $\vec{r}\text{-}\vec{r}'=(2L\text{-}z)\hat{k}-\left(\eta\cos\varphi\hat{i}\eta+\text{sen}\varphi\hat{j}\right)$

$$\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|=[(2L\text{-}z)^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}$$

Además habíamos establecido que dV=ηdηdφdz,; entonces armando el monito tendríamos:

$$d\vec{E}_{\text{cilindro}}=k_e\rho_0\frac{\eta d\eta d\varphi dz}{[(L\text{-}z)^2+\eta^2\eta]^{\frac{3}{2}}}\left[(2L\text{-}z)^2\hat{k}-\eta\cos\varphi\hat{i}\text{-}\eta\text{sen }\varphi\hat{k}\right]$$

Entonces, la contribución al campo por parte del cilindro macizo se calcula sumando (integrando) sobre el volumen todas las contribuciones diferenciales, es decir:

$$\overrightarrow{\mathrm{E_{cil}}} = \int \mathrm{k}_e \rho_0 \frac{\eta d\eta d\varphi dz}{[(\mathrm{L\text{-}z})^2 + \eta^2\eta]^{\frac{3}{2}}} \left[(2\mathrm{L\text{-}z})^2\hat{\mathrm{k}} - \eta\cos\varphi\hat{\mathrm{i}}\text{-}\eta\mathrm{sen}\ \varphi\hat{\mathrm{k}}\right]$$

La integral debe ser tomada sobre el volumen completo y considerando los límites del problema sería:

$$\vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{Cilindro}} = \rho_0 \mathrm{k_e} \iiint_{0,0,0}^{\mathrm{L},2\pi,\mathrm{L}} \frac{\eta d\eta d\varphi dz}{[(\mathrm{L\text{-}z})^2 + \eta^2\eta]^{\frac{3}{2}}} \left[(2\mathrm{L\text{-}z})^2\hat{\mathrm{k}} - \eta\cos\varphi\hat{\mathrm{i}}\text{-}\eta\mathrm{sen}\ \varphi\hat{\mathrm{k}}\right]$$

Los límites de las integrales corresponden a los de las variables η, φ, y z ya encontrados (ver el dibujo). Ahora separamos las integrales según sus componentes vectoriales e integramos obteniendo el resultado para las componentes **i**, **j**, y **k,** esta integración se la dejamos al lector como tarea.

Al desarrollar los cálculos llegarán a una integral cuya cuadratura pueden no conocer, pero no se preocupen, está resuelta en el segundo archivo adjunto que hemos denominado “truquelis”.