Método de Variación de parámetros

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Método de Variación de parámetros.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Método de Variación de parámetros

Sea L el operador diferencial lineal de segundo orden

$$L[u](x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)\,,$$

donde p_1, p_2 son funciones continuas sobre un intervalo I.

Suponga que conocemos la solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$L[y\ ] = 0, \qquad y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado una función f continua sobre I, buscaremos una solución particular de $L[y\ ] = f(x)$ de la forma:

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,.$$

Tenemos dos funciones incógnitas $c_1(x)$ y $c_2(x)$. Estas deben ser tales que satisfagan la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\,.$$

Tenemos dos funciones incógnitas y una única ecuación. Podemos entonces pedir que $c_1(x)$ y $c_2(x)$ verifiquen una ecuación adicional que facilite su cálculo.
Observe que si $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, entonces

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)\,.$$

Imponemos la condición adicional

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Método de Variación de parámetros

Con esta condición tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,, \\ y'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \quad \text{y} \\ y''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en nuestra ecuación y ordenando obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)\underbrace{\left(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)\right)}_{=0} \\ &\quad + c_2(x)\underbrace{\left(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)\right)}_{=0} \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestras funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &=& 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &=& f(x) \end{array} \right.$$

con funciones incógnitas $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$.

Método de Variación de parámetros

Observe que para todo $x \in I$, el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

coincide con el wronskiano $W(x)$ de la ecuación homogénea. Como y_1 y y_2 son L.I. $W(x) \neq 0$, y por lo tanto el sistema siempre tiene solución. Estas soluciones son

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} \quad \text{y} \quad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}\,.$$

Así encontramos $c_1'(x) = \phi_1(x)$, $c_2'(x) = \phi_2(x)$. Finalmente integrando obtenemos

$$c_1(x) = \int \phi_1(x)dx + \bar{c_1} \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \phi_2(x)dx + \bar{c_2}\,.$$

La solución general es

$$y(x) = \underbrace{\bar{c_1}y_1(x) + \bar{c_2}y_2(x)}_{y_h} + \underbrace{y_1(x)\int \phi_1(x)dx + y_2(x)\int \phi_2(x)dx}_{y_p},.$$

Ejercicio:

Ejercicio: Encontrar la solución general de

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Solución: Como la solución general de $y'' + y = 0$ es $y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x)$, ponemos

$$y(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\mathrm{sen}(x)\,,$$

y tratamos de resolver el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\mathrm{sen}(x) & = & 0 \\ -c_1'(x)\mathrm{sen}(x) + c_2'(x)\cos(x) & = & \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos

$$c_1'(x) = -\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \Longrightarrow c_1(x) = \ln(|\cos(x)|) + \bar{c}_1 \quad \text{y}$$

$$c_2'(x) = 1 \Longrightarrow c_2(x) = x + \bar{c}_2\,.$$

Luego la solución general es

$$y(x) = \bar{c}_1 \cos(x) + \bar{c}_2 \mathrm{sen}(x) + \ln(|\cos(x)|)\cos(x) + x\mathrm{sen}(x)\,, \quad \bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio:

Ejercicio: Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\,, \quad (x \neq 0)$$

sabiendo que $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.
Solución: Para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, linealmente independiente con $y_1(x)$, usamos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) \;=\; y_1(x) \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}\,dx\,,$$

con $p_1(x) \;=\; \frac{2}{x}$.
Como

$$-\int p_1(x)dx \;=\; -2\ln(x) \;=\; \ln(x^{-2})\,,$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \;=\; \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\
&= -\frac{\cos(x)}{x}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) \;=\; c_1\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2\frac{\cos(x)}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio:

Para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea usamos el método de variación de parámetros. Sea

$$y(x) \;=\; c_1(x)\,\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\,\frac{\cos(x)}{x}\,.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1'(x)\,\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2'(x)\,\frac{\cos(x)}{x} & = & 0 \\ c_1'(x)\,\frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} + c_2'(x)\,\frac{-x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{x^2} & = & \frac{1}{x} \end{array}\right\}.$$

Sus soluciones son

$$c_1'(x) \;=\; \cos(x)\,, \quad c_2'(x) \;=\; -\operatorname{sen}(x)\,,$$

e integrando obtenemos

$$c_1(x) \;=\; \operatorname{sen}(x) + c_1\,, \quad c_2(x) \;=\; \cos(x) + c_2\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) \;=\; (\operatorname{sen}(x) + c_1)\,\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + (\cos(x) + c_2)\,\frac{\cos(x)}{x}$$

es decir

$$y(x) \;=\; c_1(x)\,\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\,\frac{\cos(x)}{x} \;+\; \frac{1}{x}\,.$$