Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

4.1 Teorema de Existencia y Unicidad

Como hemos visto una ecuación de segundo orden es de la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0\,. \tag{4.1}$$

Bajo condiciones bastante generales sobre la función F, la ecuación (4.1) se puede escribir de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})\,. \tag{4.2}$$

Como en el caso de las ecuaciones de primer orden, para éste tipo de ecuaciones también tenemos un teorema de existencia y unicidad de soluciones. Antes de e-nunciarlo, y a manera de ejemplo de lo que sucede en situaciones muy generales, analicemos la ecuación

$$y'' \ = \ x^2 \ + \ \mathrm{sen}(x)\,.$$

Integrando sucesivamente obtenemos

$$\begin{aligned} y'(x) \ &= \ \int_{x_0}^{x} (s^2 + \mathrm{sen}(s))ds \ = \ \frac{x^3}{3} \ - \ \cos(x) \ + \ c_1\,, \\ y(x) \ &= \ \int_{x_0}^{x} (\frac{s^3}{3} - \cos(s) + c_1)ds \ = \ \frac{x^4}{12} \ - \ \mathrm{sen}(x) \ + \ c_1 x \ + \ c_2\,. \end{aligned}$$

Como ahora la solución general depende de dos constante arbitrarias, al imponer la condición inicial $y(0) = 1$, por ejemplo, obtenemos como única condición $c_2 = 1$. De esta forma, la familia de funciones que depende de la constante c_1

$$y(x) \ = \ \frac{x^4}{12} \ - \ \mathrm{sen}(x) \ + \ c_1 x \ + \ 1\,,$$

es solución del problema

$$\begin{cases} y'' & = & x^2 \,+\, \text{sen}(x) \\ y(0) & = & 1\,. \end{cases}$$

Para fijar la constante c_1 necesitamos una condición adicional, que puede ser el valor de la solución en otro punto (problema de frontera) o bién, el valor de la primera derivada en el mismo punto (problema de valores iniciales). Observe que en el caso de problemas de frontera, estamos pidiendo que la solución pase por dos puntos distintos prefijados. Veremos más adelante, que en muchos caso no existe tal solución. Para el problema de valores iniciales se pide que la solución pase por un punto dado y que la pendiente de la solución en dicho punto asuma también un valor dado. A este último tipo de problemas se refiere el siguiente teorema.

Recordemos primero que un subconjunto D del espacio es *abierto* si todo punto de D es el centro de un rectángulo que está contenido en D. Más precisamente, D es abierto si para todo punto (x_0, y_0, z_0) en D, existen números positivos a, b y c tales que cualquier punto (x, y, z) que satisface $\mid x - x_0 \mid < a$, $\mid y - y_0 \mid < b$, $\mid z - z_0 \mid < c$ también pertenece a D.

Teorema 4.1.1. *Sea D un conjunto abierto del espacio (x, y, z) y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga además que f tiene derivada parcial con respecto a y y con respecto a z, en todo punto de D y que $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ son continuas sobre D. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de D. Entonces la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$ tiene una solución u definida en un intervalo alrededor de x_0 que verifica $u(x_0) = y_0$ y $u'(x_0) = z_0$. Más aun, si v es una solución definida en el mismo intervalo que u, y se tiene $v(t_0) = y_0$ y $v'(x_0) = z_0$ entonces $v = u$.*

De esta forma, bajo las condiciones del teorema, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' & = & f(x, y, y') \\ y(x_0) & = & y_0\,, \quad y'(x_0) \;=\; z_0\,, \end{cases}$$

tiene una única solución máxima. Es decir, tiene una única solución que no admite continuación. La definición de continuación de una solución y de solución máxima para este tipo de ecuaciones, es similar a la dada para ecuaciones de primer orden dada en los párrafos siguientes al Teorema (2.4.1).

Como la prueba del correspondiente teorema para ecuaciones de primer orden, la demostración de este teorema escapa a la intencionalidad de este libro. Sin embargo, acotemos que, introduciendo la variable auxiliar $v = dy/dx$, nuestro problema de valores iniciales se reduce a

$$\begin{cases} w' & = & (v, f(x, w)) \\ w(0) & = & w_0\,. \end{cases}$$

donde $w = (y, v)$ y $w_0 = (y_0, z_0)$. De modo que este teorema se reduce al teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de primer orden pero en dimensiones mayores.

4.2 Casos simples de reducción de orden

1. Para f continua sobre un intervalo I considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)\,.$$

Un ejemplo de este tipo de ecuación fue dado en la sección anterior. Como en dicho ejemplo, integrando una vez obtenemos la ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} f(u)du + c_1 = f_1(x) + c_1\,,$$

donde x_0 es un punto en I. Volviendo a integrar obtenemos la solución general:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(u)du + c_2x + c_1\,,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.2.1. Considere para $x \notin \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2(x)\,.$$

Queremos encontrar la solución general, las soluciones particulares que verifican $y(\pi) = 1$ y las soluciones particulares que verifican $y(\pi) = 1$ y $y'(\pi) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea I_n el intervalo abierto $\left]\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. Observe que cuando $|\, n \,|$ es par (resp. es impar) se tiene que $\cos(x) > 0$ (resp. $\cos(x) < 0$) para todo $x \in I_n$.
Una primera integración nos da

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x) + c_1$$

y una segunda

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + c_1x + c_2\,.$$

Luego la solución general es

$$y_n(x) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + c_1x + c_2\,, \quad x \in I_n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Las soluciones que verifican $y(\pi) = 1$ estan definidas en $I_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Debemos resolver la ecuación

$$1 = y(\pi) = c_1\pi + c_2\,,$$

lo que nos da $c_2 = 1 - c_1\pi$. Luego las soluciones que verifican $y(\pi) = 1$ son

$$y_c(x) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + c(x-\pi) + 1\,, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,.$$

Si queremos además que verifiquen $y'(\pi) = 0$, como

$$y'(x) = \tan(x) + c_1$$

debemos resolver la ecuación

$$0 = y'(\pi) = c_1\,.$$

Luego la solución es única y está dada por

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + 1\,, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,.$$

2. Ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$$

con f continua sobre un conjunto abierto Λ del plano.

En este caso introducimos la variable $p = \frac{dy}{dx}$, de donde se obtiene $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Entonces sustituyendo tenemos

$$\frac{dp}{dx} = f(x,p)$$

que es una ecuación de primer orden.

Ejemplo 4.2.2. Resolvamos la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} \ + \ 2\frac{dy}{dx} \ = \ x\,.$$

Sea $p = \frac{dy}{dx}$. Entonces tenemos $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ y la ecuación de primer orden

$$x\frac{dp}{dx} \ + \ 2p \ = \ x\,.$$

Esta es equivalente a la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dp}{dx} \ + \ \frac{2}{x}p \ = \ 1\,,$$

cuya solución es

$$
\begin{aligned}
p(x) &= e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[c_1 + \int e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right] \\
p(x) &= e^{-2\ln(x)}\left[c_1 + \int e^{2\ln(x)}dx\right] \\
p(x) &= \frac{1}{x^2}\left[c_1 + \int x^2 dx\right] \\
p(x) &= \frac{1}{x^2}\left[c_1 + \frac{x^3}{3}\right].
\end{aligned}
$$

Pero $p = \frac{dy}{dx}$ implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{x^2} + \frac{x}{3}.$$

Finalmente integrando obtenemos

$$y(x) = -\frac{c_1}{x} + \frac{x^2}{6} + c_2,$$

que es la solución general.

3. Ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$$

con f continua sobre un sobre un subconjunto abierto Λ del plano.

También en este caso introducimos la variable $p = \frac{dy}{dx}$, obteniéndose

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

y la ecuación se reduce a

$$\frac{dp}{dy}p = f(y,p), \quad \text{o bién} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p}f(y,p)$$

que es de primer orden.

Ejemplo 4.2.3. Encontremos la solución general de la ecuación

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 = 0.$$

Poniendo $p = \frac{dy}{dx}$, tenemos $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}p$ y la ecuación queda

$$y\,p\,\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

Dividiendo por p, la ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

cuya solución es

$$p(y) = c_1\, y\,.$$

Volviendo a las variables y y x tenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = c_1\, y \quad \text{que es equivalente a} \quad \frac{dy}{y} = c_1\, dx\,.$$

Integrando obtenemos

$$\ln(y) = c_1\, x + \ln(c_2)$$

y exponenciando

$$y(x) = c_2\, e^{c_1\, x}\,.$$

4. Ecuaciones del tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

donde $F(x, y, y', y'')$ es la diferencial total de una función $\psi(x, y, y')$.

En este caso nuestra ecuación es

$$d\psi = 0$$

y por lo tanto sus soluciones son las soluciones de la ecuación de primer orden

$$\psi(x, y, y') = c$$

donde c es una constante arbitraria.

Ejemplo 4.2.4. Encontremos la solución general de

$$yy'' + (y')^2 = 0\,.$$

La ecuación se puede escribir como

$$d(yy') = 0 \quad \text{lo que implica} \quad yy' = c_1\,,$$

o lo que es lo mismo

$$ydy = c_1 dx \quad \text{cuya solución es} \quad y^2 = c_1 x + c_2\,.$$

5. Ecuaciones del tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

tales que existe función $\mu(x, y, y')$ de modo que $\mu(x, y, y')F(x, y, y', y'')$ es la diferencial total de una función $\psi(x, y, y')$.

Como en el caso anterior, resolvemos $\psi(x, y, y') = c$. Entonces cada solución de esta ecuación es solución de $F(x, y, y', y'') = 0$ o/y de $\mu(x, y, y') = 0$. Luego, debemos eliminar las soluciones *superfluas*, es decir aquellas que verifican $\mu(x, y, y') = 0$ o aquellas que indefinen μ y no verifican $F(x, y, y', y'') = 0$.

Ejemplo 4.2.5. Encontremos usando este método nuevamente la solución general de

$$yy'' - (y')^2 = 0\,.$$

Multiplicando por $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ se obtiene

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = d(\frac{y'}{y}) = 0\,.$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = c_1 dx \quad &\Longrightarrow \quad \ln(y) = c_1 x + \ln(c_2) \\ &\Longrightarrow \quad y(x) = c_2 e^{c_1 x}\,. \end{aligned}$$

La única función candidata a ser solución superflua es $y \equiv 0$ (ya que μ no está definida para $y = 0$), pero no lo es ya que claramente es solución de la ecuación original.

6. Ecuaciones del tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

donde F es homogénea respecto a la segunda, tercera y cuarta variable; es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo (x, y, z, w) se tiene

$$F(x, ky, kz, kw) = k^n F(x, y, z, w)\,.$$

Introducimos una nueva variable z a través de la expresión

$$y = e^{\int z dx}\,.$$

Derivando ambos lados con respecto a x dos veces, se obtiene

$$y' = z e^{\int z dx} \quad \text{y} \quad y'' = (z^2 + z')e^{\int z dx}\,,$$

y al reemplazar en nuestra ecuación

$$\begin{aligned} 0 = F(x, y, y', y'') \quad &= \quad F(x, e^{\int z dx}, z e^{\int z dx}, (z^2 + z')e^{\int z dx}) \\ &= \quad e^{n\int z dx} F(x, 1, z, z^2 + z') \\ &\Longrightarrow \quad F(x, 1, z, z^2 + z') = 0\,, \text{ que es de la forma} \\ & \qquad f(x, z, z') = 0 \quad \text{(ecuación de primer orden)}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.6. Resolvamos la ecuación

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2 \,.$$

Aquí $F(x, y, y', y'') = yy'' - (y')^2 - 6xy^2$, que es homogénea con $n = 2$. Poniendo $y = e^{\int z dx}$, la ecuación se transforma en

$$e^{2\int z dx}(z^2 + z' - z^2 - 6x) = 0 \quad \text{que es equivalente a} \quad z' = 6x \,.$$

La solución de esta última ecuación es

$$z(x) = 3x^2 + c_1 \,,$$

lo que implica

$$y(x) = e^{\int (3x^2+c_1)dx} = e^{x^3+c_1x+c_2} \,,$$

y por lo tanto

$$y(x) = c_2 e^{x^3+c_1x} \,.$$

4.3 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

Son ecuaciones de la forma

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \phi(x) \,. \tag{4.3}$$

donde en general a_0, a_1, a_2 y ϕ son funciones continuas definidas en un intervalo I.

Un ejemplo importante de este tipo de ecuaciones es la que modela el movimiento de una masa acoplada a un resorte:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \; + \; c\frac{dx}{dt} \; + \; kx \; = \; F(t) \,,$$

donde m representa la masa del objeto, c y k son constantes y F es una función dada.

Volviendo a la ecuación (4.3), si $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, dividiendo por $a_0(x)$, reducimos (4.3) a su **forma normal**

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = g(x) \,. \tag{4.4}$$

Por lo tanto (4.4) es de la forma $y'' = f(x, y, y')$ con $f(x, y, z) = g(x) - p_2(x)y - p_1(x)z$. Así tanto f, como $\partial f/\partial y = -p_2(x)$ y $\partial f/\partial z = -p_1(x)$ son continuas en $I \times \mathbb{R}^2$, y entonces nuestra ecuación verifica el Teorema de Existencia y Unicidad (4.1.1). Más que esto, se puede probar que, dado un punto $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, existe una única solución u de (4.4) definida en todo el intervalo I, tal que $u(x_0) = y_0$ y $u'(x_0) = z_0$.

Para deducir con mayor facilidad importantes propiedades de este tipo de ecuaciones diferenciales, asociado a las funciones p_1 y p_2 de antes, consideremos el operador L que toma cualquier función u, dos veces diferenciable sobre el intervalo I, y le asocia la función $L[u]$ definida por

$$L[u](x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)\,. \tag{4.5}$$

Usando este operador la ecuación (4.4) se escribe de la forma

$$L[y] = g(x)\,, \tag{4.6}$$

Tal operador se llama **operador diferencial lineal** pues verifica:

1) $L[cu] = cL[u]$ para todo $c \in \mathbb{R}$,
2) $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$.

Combinando ambas propiedades se obtiene
3) $L[\sum_{k=1}^{n} c_k u_k] = \sum_{k=1}^{n} c_k L[u_k]$, donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

La demostración de 1), 2) y 3) es muy sencilla y se deja de ejercicio para el lector.

4.3.1 Ecuación Lineal Homogénea de Segundo Orden

Son ecuaciones de la forma

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,. \tag{4.7}$$

con p_1, p_2 funciones continuas definidas en un intervalo I.

Usando el operador diferencial L esta ecuación se reduce a

$$L[y] = 0\,. \tag{4.8}$$

Como consecuencia de la linealidad de L, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. *1) Si y_1 es solución de la ecuación (4.8), entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, cy_1 es solución.*

2) Si y_1, y_2 son soluciones de (4.8), entonces $y_1 + y_2$ es solución.

3) Luego si $y_1, \ldots, y_m$ son soluciones de (4.8), entonces cualquier combinación lineal de ellas, digamos $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k$, es solución.

4) Si (4.8) (con coeficientes $p_i(x)$ reales) tiene una solución compleja $y(x) = u(x) + iv(x)$, entonces la parte real $u(x)$ y la parte imaginaria $v(x)$ son soluciones (reales) de (4.8).

5) Si y es solución de (4.8) y existe $x_0 \in I$ tal que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Demostración: 1) y 2) se dejan como ejercicios. 3) es consecuencia directa de 1) y 2). Para 4), notemos que si $y(x) = u(x) + iv(x)$ es solución de (4.8), entonces

$$L[y](x) \;=\; L[u](x) \;+\; iL[v](x) \;=\; 0\,, \quad \text{para todo } x \in I\,.$$

Pero como un número complejo es cero sólo si su parte real y parte imaginaria son cero, tenemos que

$$L[u](x) \;=\; 0\,, \quad L[v](x) \;=\; 0\,, \quad \text{para todo } x \in I\,,$$

y por lo tanto u y v son soluciones de (4.8) en I.

Finalmente 5) sigue directamente del teorema de existencia y unicidad, ya que la función idénticamente cero es también solución.

Definición 4.3.2. *Las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen* **linealmente dependientes** *(L.D.) en el intervalo I, si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que*

$$c_1u_1(x) + \cdots + c_nu_n(x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I\,. \tag{4.9}$$

Las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen **linealmente independientes** *(L.I) en I si (4.9) se verifica sólo cuando $c_1 = \cdots = c_n = 0$.*

Ejemplo 4.3.3. Las funciones $1, x, x^2, \ldots, x^n$ son L.I. en cualquier intervalo I.

En efecto si

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = 0 \quad \forall x \in I$$

entonces, todo $x \in I$ es raíz de este polinomio que es de grado $\leq n$. Como todo polinomio, salvo el constante igual a cero, tiene sólo un número finito de raíces, tenemos que $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ejemplo 4.3.4. *Si $k_1 \neq k_2$ las funciones e^{k_1x}, e^{k_2x} son L.I. en cualquier intervalo I.*

En efecto, la relación

$$\begin{aligned} & c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} = 0 \quad \forall x \in I \\ \Longrightarrow\; & c_1 + c_2e^{(k_2-k_1)x} = 0 \quad \forall x \in I \\ \Longrightarrow\; & \text{(derivando)} \quad (k_2 - k_1)c_2e^{(k_2-k_1)x} = 0 \quad \forall x \in I \\ \Longrightarrow\; & c_2 = 0 \quad \Longrightarrow c_1 = 0\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.5. Demuestre que las funciones e^{kx}, xe^{kx} son L.I. en cualquier intervalo I.

Ejercicio 4.3.6. Demuestre que las funciones $\text{sen}(kx), \cos(kx)$ son L.I. en cualquier intervalo I.

Teorema 4.3.7. *Si y_1, y_2 son L.D. en I, entonces el determinante (llamado* **wronskiano***)*

$$W(x) = W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Demostración. Sean c_1, c_2 constantes no ambas nulas tales que

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I\,. \text{ Entonces también} \\ &c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Si, por ejemplo $c_2 \neq 0$, multiplicando la primera ecuación por $y_1'(x)$ y la segunda por $y_1(x)$ y restando, se obtiene para todo $x \in I$

$$c_2(y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 W(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad W(x) = 0\,.$$

Recuerdo 4.3.8. *Existe $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que*

$$\begin{cases} A_1 x + A_2 y &= 0 \\ B_1 x + B_2 y &= 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Teorema 4.3.9. *Sean y_1, y_2 son soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

con coeficientes continuos $p_1(x), p_2(x)$ en I. Entonces el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Demostración. Supongamos existe $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) = 0$. Entonces existen constantes c_1, c_2, no ambas nulas, tales que

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{cases}.$$

Pero entonces, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es también solución y verifica $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Esto implica que $y(x) = 0$ para todo $x \in I$, y luego $c_1 = c_2 = 0$. Esta es una contradicción y por lo tanto $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema 4.3.10. *Sean y_1, y_2 son soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

con coeficientes continuos $p_1(x), p_2(x)$ en I. Entonces la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad \textit{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Demostración. Sea $y(x)$ solución cualquiera de nuestra ecuación. Debemos demostrar que existen constantes c_1, c_2 tales que $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, para todo $x \in I$.
Fijemos $x_0 \in I$ y sean $y_0 = y(x_0)$ y $z_0 = y'(x_0)$. Consideremos

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(x_0) - z_0 y_2(x_0)}{W(x_0)}\,, \quad c_2 = -\frac{y_0 y_1'(x_0) - z_0 y_1(x_0)}{W(x_0)}\,.$$

Es inmediato verificar que con estos valores de c_1, c_2, se obtiene:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) & = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) & = z_0\,. \end{cases}$$

Entonces la solución $\alpha(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ verifica las condiciones iniciales $\alpha(x_0) = y_0$ y $\alpha'(x_0) = z_0$. Como la solución $y(x)$ también las verifica, concluímos que $y(x) = \alpha(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, para todo $x \in I$.

Corolario 4.3.11. *El número máximo de soluciones linealmente independientes de la ecuación* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *es dos.*

Ejemplo 4.3.12. Considere la ecuación

$$y'' - y = 0\,.$$

Se puede chequear directamente que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones particulares. Además como son L.I., la solución general es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Fórmula de Abel. Si conocemos una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

hagamos la sustitución $y(x) = y_1(x)z(x)$ con $z(x) = \int u(x)dx$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= y_1'z + y_1 z'\,, \quad \text{y} \\ y'' &= y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z''\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'' + p_1(y_1'z + y_1z') + p_2y_1z = 0 \\ \Longrightarrow\ & (y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1)z + (2y_1' + p_1y_1)z' + y_1z'' = 0 \\ \Longrightarrow\ & (2y_1' + p_1y_1)z' + y_1z'' = 0\,. \end{aligned}$$

Como $z'(x) = u(x)$, nos queda la ecuación de primer orden de variables separables

$$(2y_1' + p_1 y_1)u + y_1 u' = 0\,.$$

La podemos escribir de la forma

$$\frac{du}{u} = (-2\frac{y_1'}{y_1} - p_1)dx\,,$$

cuya solución es

$$u(x) = \frac{1}{y_1(x)^2}e^{-\int p_1(x)dx}\,.$$

Esto implica que

$$z(x) = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx\,,$$

y por lo tanto

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx\,, \qquad \textbf{(fórmula de Abel)}$$

es una segunda solución de nuestra ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,.$$

Finalmente observe que estas soluciones son L.I. ya que el correspondiente wronskiano es

$$W(x) = e^{-\int p_1(x)dx}\,.$$

Ejemplo 4.3.13. Resolver la ecuación $x^2y'' - xy' + y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.

El primer paso es escribir la ecuación en la forma en que podemos aplicar el procedimiento anterior (y'' libre de variables). Dividiendo por x^2 tenemos

$$y'' \;-\; \frac{1}{x}y' \;+\; \frac{1}{x^2}y \;=\; 0\,.$$

De esta forma $p_1(x) = -\dfrac{1}{x}$ y usando la fórmula para $z(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} z(x) \;&=\; \int \frac{e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}}{x^2}\,dx \;=\; \int \frac{e^{\int \frac{1}{x}dx}}{x^2}\,dx \\ &=\; \int \frac{e^{\ln(x)}}{x^2}\,dx \;=\; \int \frac{dx}{x} \;=\; \ln(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la segunda solución que se obtiene es

$$y_2(x) \;=\; x\,z(x) \;=\; x\,\ln(x)\,,$$

lo que implica que

$$y(x) \;=\; x\,(c_1\,\ln(x) \;+\; c_2)$$

es la solución general.

4.3.2 Ecuaciones Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

Ahora nuestra ecuación es

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0\,, \tag{4.10}$$

con a_0, a_1, a_2 constantes reales, $a_0 \neq 0$.

Los ejemplos anteriores sugieren buscar soluciones de la forma $y(x) = e^{kx}$, donde k es una constante real a determinar. Tenemos entonces

$$y'(x) = ke^{kx} \quad \text{y} \quad y''(x) = k^2e^{kx}\,.$$

Reemplazando en (4.10) se obtiene

$$e^{kx}(a_0k^2 + a_1k + a_2) = 0\,.$$

Luego
$y(x) = e^{k_1x}$ es solución de (4.10) $\Longleftrightarrow$ k_1 es solución de la ecuación cuadrática

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0\,. \tag{4.11}$$

Tal ecuación es llamada **ecuación característica** asociada a (4.10).

Casos posibles. Sea $d = a_1^2 - 4a_0a_2$, el discriminante de la ecuación característica (4.11), y k_1, k_2 sus raíces.
1) $d > 0$. Entonces k_1, k_2 son raíces reales y distintas de (4.11),

$$k_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{d}}{2a_0}\,, \quad k_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{d}}{2a_0}\,,$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2) $d = 0$. Entonces $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2a_0} \in \mathbb{R}$ y $y_1(x) = e^{k_1x}$ es solución.
Afirmación $y_2(x) = xe^{k_1x}$ es también solución.
En efecto,

$$y_2'(x) = k_1xe^{k_1x} + e^{k_1x} = k_1y_2(x) + e^{k_1x} \tag{4.12}$$

$$\Longrightarrow \quad y_2''(x) = k_1y_2'(x) + k_1e^{k_1x}\,. \tag{4.13}$$

De la ecuación (4.12) obtenemos $e^{k_1x} = y_2'(x) - k_1y_2(x)$. Reemplazando esto en (4.13) obtenemos

$$y_2''(x) = 2k_1y_2'(x) - k_1^2y_2(x) = -\frac{a_1}{a_0}y_2'(x) - \frac{a_1^2}{4a_0^2}y_2(x)$$

y como $\frac{a_1^2}{4a_0^2} = \frac{a_2}{a_0}$, tenemos

$$y_2''(x) = -\frac{a_1}{a_0}y_2'(x) - \frac{a_2}{a_0}y_2(x)\,,$$

lo que implica

$$a_0y_2''(x) + a_1y_2'(x) + a_2y_2(x) = 0\,.$$

Esto prueba la afirmación y por lo tanto la solución general en este caso es

$$y(x) = e^{k_1\,x}\,(c_1 \;+\; c_2\,x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

3) $d < 0$. En este caso k_1, k_2 son números complejos conjugados,

$$k_1 = \alpha - i\beta\,, \quad k_2 = \alpha + i\beta\,, \quad \text{con} \quad \alpha = -\frac{a_1}{2a_0}\,, \quad \beta = \frac{\sqrt{-d}}{2a_0}\,.$$

De esta forma

$$e^{\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\text{sen}(\beta x)) \quad \text{y} \quad e^{\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\text{sen}(\beta x))$$

son raíces complejas de (4.10). Luego la parte real $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y la parte imaginaria $y_2(x) = e^{\alpha x}\text{sen}(\beta x)$ son soluciones reales. Además como ellas son L.I., la solución general es

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\text{sen}(\beta x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.14. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

La ecuación característica es

$$k^2 - 3k + 2 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.15. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

La ecuación característica es

$$k^2 + 4k + 5 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = -2 - i$ y $k_2 = -2 + i$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = e^{-2x}(c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.16. $y'' + 2y' + y = 0$.

La ecuación característica es

$$k^2 + 2k + 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = k_2 = -1$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

4.3.3 Ecuación de Euler

Son ecuaciones de la forma

$$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0\,, \tag{4.14}$$

con a_0, a_1, a_2 constantes reales, $a_0 \neq 0$.
Si hacemos la sustitución $x = e^t$ (para $x > 0$), obtenemos $\frac{dx}{dt} = e^t$ y por lo tanto $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. De esta forma

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}\,, \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}e^{-t}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}e^{-t})\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en (4.14) obtenemos

$$a_0e^{2t}e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + a_1e^te^{-t}\frac{dy}{dt} + a_2y = 0\,,$$

que es equivalente a la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2y = 0\,. \tag{4.15}$$

La ecuación característica de (4.15) es

$$a_0k^2 + (a_1 - a_0)k + a_2 = 0\,.$$

De este modo si k_1 es raíz de esta ecuación, $y(t) = e^{k_1t}$ es solución de (4.15), lo que implica que

$$y(x) = e^{k_1\ln(x)} = x^{k_1}\,,$$

es solución de nuestra ecuación inicial (4.14).

Nota. En la práctica a veces es conveniente buscar directamente soluciones de (4.14) de la forma $y(x) = x^k$.

Ejemplo 4.3.17. $x^2y'' + \frac{5}{2}xy' - y = 0$.

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = \frac{1}{2}$ y $k_2 = -2$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1x^{\frac{1}{2}} + c_2x^{-2}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.18. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 - 2k + 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = k_2 = 1$. Por lo tanto son soluciones para la ecuación transformada

$$y_1(t) = e^t\,, \quad \text{y} \quad y_2(t) = te^t\,.$$

Así

$$y_1(x) = x\,, \quad \text{y} \quad y_2(x) = (\ln(x))x\,,$$

son soluciones de nuestra ecuación y lasolución general es

$$y(x) = x(c_1 + c_2 \ln(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.19. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 + 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = -i$ y $k_2 = i$. Por lo tanto son soluciones para la ecuación transformada

$$y_1(t) = \cos(t)\,, \quad \text{y} \quad y_2(t) = \mathrm{sen}(t)\,.$$

Así

$$y_1(x) = \cos(\ln(x))\,, \quad \text{y} \quad y_2(x) = \mathrm{sen}(\ln(x))\,,$$

son soluciones de nuestra ecuación y la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos(\ln(x)) + c_2\mathrm{sen}(\ln(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 4.3.20. Considere la ecuación

$$a_0(ax + b)^2y'' + a_1(ax + b)y' + a_2y = 0\,.$$

Por medio de una sustitución de variables transformela en una ecuación de Euler y resuelvala.

4.3.4 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden no Homogéneas

Consideremos la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\,, \tag{4.16}$$

donde p_1, p_2 y f son funciones continuas definidas sobre un intervalo I.

Usando el operador diferencial lineal L definido en (4.5), esta ecuación toma la forma

$$L[y\ ] = f(x)\,. \tag{4.17}$$

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la linealidad del operador L.

1) Si y_1 es solución de $L[y\ ]=0$ y $\tilde{y}$ es solución de $L[y\ ]=f(x)$, entonces $y_1+\tilde{y}$ el solución de $L[y\ ]=f(x)$.

2) Si y_i es solución de $L[y\ ]=f_i(x)$, para $i=1,\ldots,n$, entonces $y(x)=\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x)$ es solución de $L[y\ ]=\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$, donde α_i, $i=1,\ldots,n$, son constantes.

3) Suponga que las funciones p_1, p_2, U y V son real valoradas. Entonces, si la e-cuación

$$L[y\ ] = U(x) + iV(x)$$

tiene solución

$$y(x) = u(x) + iv(x)\,,$$

con u y v real valoradas, entonces $u(x)$ es solución de $L[y\ ]=U(x)$ y $v(x)$ es solución de $L[y\ ]=U(x)$.

Teorema 4.3.21. *Considere la ecuación $L[y\ ]=f(x)$, con coeficientes p_1, p_2 y f continuos en un intervalo I. Si $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es la solución general de $L[y\ ]=0$, y $\tilde{y}$ es una solución particular de $L[y\ ]=f(x)$, entonces*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \tilde{y}(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

es la solución general de $L[y\ ]=f(x)$.

Demostración Sea $\tilde{y}_1$ una solución cualquiera de $L[y\ ]=f(x)$. Tenemos que demostrar que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{y}_1(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \tilde{y}(x)\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Pero como $\tilde{y}_1 - \tilde{y}$ es solución de la ecuación $L[y\ ]=0$, existen constante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,, \quad \forall x \in I\,,$$

lo que termina la demostración.

Ejemplo 4.3.22. $\quad y'' + y = x.$

Claramente $\tilde{y}(x)=x$ es solución particular.
Consideremos ahora la ecuación homogénea $y''+y=0$. Su ecuación característica es $k^2+1=0$ y por lo tanto su solución general es

$$c_1\cos(x) + c_2\mathrm{sen}(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\mathrm{sen}(x) + x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

4.3.5 Método de variación de constantes

A continuación introduciremos un procedimiento para encontrar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea bajo el supuesto que conocemos la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Como siempre L denota el operador

$$L[u](x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)\,,$$

donde p_1, p_2 son funciones continuas sobre un intervalo I.
Suponga que $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ es la solución general de $L[y\ ] = 0$.
Dado una función f continua sobre I, buscaremos una solución particular de $L[y\ ] = f(x)$ de la forma:

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,.$$

Tenemos entonces dos funciones incógnitas $c_1(x)$ y $c_2(x)$. Estas deben ser tales que $c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ satisfagan la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\,.$$

Es decir tenemos dos funciones incógnitas y una única ecuación. Podemos entonces pedir que $c_1(x)$ y $c_2(x)$ verifiquen una ecuación adicional que facilite su cálculo. Observe que si $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, entonces

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)\,.$$

Para que por lo menos al hacer la primera derivada de $y(x)$, las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ se comporten como constante, imponemos la condición adicional

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Con esta condición tenemos

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,, \\
y'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \quad \text{y} \\
y''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en nuestra ecuación y ordenando obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)) \\
&\quad + c_2(x)(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)) \\
&= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto nuestras funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\left\{\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= f(x)
\end{aligned}\right.$$

con funciones incógnitas $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$.
Observe que para todo $x \in I$, el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

coincide con el wronskiano $W(x)$ de la ecuación homogénea. Como y_1 y y_2 son L.I. $W(x) \neq 0$, y por lo tanto el sistema siempre tiene solución. Estas soluciones son

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} \quad \text{y} \quad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}\,.$$

Así encontramos $c_1'(x) = \phi_1(x)$, $c_2'(x) = \phi_2(x)$. Finalmente integrando obtenemos

$$c_1(x) = \int \phi_1(x)dx + \bar{c_1} \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \phi_2(x)dx + \bar{c_2}\,.$$

Ejemplo 4.3.23. $\quad y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$.

Como la solución general de $y'' + y = 0$ es $c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)$, ponemos

$$y(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\text{sen}(x)\,,$$

y tratamos de resolver el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\text{sen}(x) & = & 0 \\ -c_1'(x)\text{sen}(x) + c_2'(x)\cos(x) & = & \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos

$$c_1'(x) = -\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \Longrightarrow c_1(x) = \ln(|\cos(x)|) + \bar{c_1} \quad \text{y}$$

$$c_2'(x) = 1 \Longrightarrow c_2(x) = x + \bar{c_2}\,.$$

Luego la solución general es

$$y(x) = \bar{c_1}\cos(x) + \bar{c_2}\text{sen}(x) + \ln(|\cos(x)|)\cos(x) + x\text{sen}(x)\,, \quad \bar{c_1}, \bar{c_2} \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.24. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\,, \quad (x \neq 0)$$

sabiendo que $y_1(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ es solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

Para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, linealmente independiente con $y_1(x)$, usamos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) \;=\; y_1(x) \int e^{-\int p_1(x)dx} y_1(x)^{-2} dx\,,$$

con $p_1(x) \;=\; \frac{2}{x}$.
Como

$$-\int p_1(x)dx \;=\; -2\ln(x) \;=\; \ln(x^{-2})\,,$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \int \frac{1}{x^2} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx \;=\; \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= -\frac{\cos(x)}{x}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) \;=\; c_1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2 \frac{\cos(x)}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea usamos el método de variación de parámetros. Sea

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x}\,.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\tfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2'(x)\tfrac{\cos(x)}{x} &= 0 \\ c_1'(x)\tfrac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^2} + c_2'(x)\tfrac{-x\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{x^2} &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}\right\}\,.$$

Sus soluciones son

$$c_1'(x) \;=\; \cos(x)\,, \quad c_2'(x) \;=\; -\operatorname{sen}(x)\,,$$

e integrando obtenemos

$$c_1(x) \;=\; \operatorname{sen}(x) + c_1\,, \quad c_2(x) \;=\; \cos(x) + c_2\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) \;=\; (\operatorname{sen}(x) + c_1)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + (\cos(x) + c_2)\frac{\cos(x)}{x}$$

es decir

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x} \;+\; \frac{1}{x}\,.$$

4.3.6 Método de coeficientes indeterminados

Este método se aplica para encontrar una solución particular para ecuaciones del tipo

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \sum_{i=1}^{m} e^{r_i x}(P_i(x)\cos(q_i x) + Q_i(x)\mathrm{sen}(q_i x))\,, \tag{4.18}$$

donde a_0, a_1, a_2, r_i y q_i son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P_i(x), Q_i(x)$ son polinomios.

La correspondiente ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0\,. \tag{4.19}$$

Observe que el tipo particular de funciones que aparecen en el lado derecho de la ecuación (4.20) consta de términos de la forma k, x^n, con n entero positivo, $e^{rx}, \cos(qx), \mathrm{sen}(qx)$, o bién expresiones que se pueden obtener por un número finito de adiciones, sustracciones y/o multiplicaciones de las anteriores.

Ejemplos de este tipo de ecuaciones son

$$y'' + 4y' + 5y \;=\; 2e^{3x} \qquad \text{y} \qquad y'' + 5y' + 4y \;=\; 8x^2 + 3 + 2\cos(2x)\,.$$

El siguiente teorema nos da un método para encontrar una solución particular en el caso $m = 1$. Si $m > 1$, para cada $i = 1, \cdots, m$, usando este método podemos encontrar una solución particular $y_i(x)$ de la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{r_i x}(P_i(x)\cos(q_i x) + Q_i(x)\mathrm{sen}(q_i x))\,.$$

Luego

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i(x)$$

es solución particular de (4.18).

Consideremos entonces la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{rx}(P(x)\cos(qx) + Q(x)\mathrm{sen}(qx))\,, \tag{4.20}$$

donde a_0, a_1, a_2, r y q son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P(x), Q(x)$ son polinomios.

Teorema 4.3.25. *Sea $n = \max\{gradoP, gradoQ\}$.*
a) Si $r \pm iq$ no es raíz de la ecuación característica (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx))\,.$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ son polinomios de grado n.
b) Si $r \pm iq$ es raíz de multiplicidad α de (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = x^{\alpha} e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx))\,.$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado* n.

En cada caso los coeficientes de los polinomios $R_n(x), S_n(x)$ *se calculan reemplazando* $y_p(x)$ *en la ecuación.*

Ejemplo 4.3.26. Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y' + 5y \;=\; 2e^{3x}\,.$$

Como $r \pm iq = 3$ no es raíz de la ecuación característica

$$k^2 + 4k + 5 = 0\,,$$

y el máximo entre los grados de $P(x) = 2$ y $Q(x) = 0$ es cero, debemos buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ae^{3x}\,.$$

Para encontrar el valor de A calculamos las dos primeras derivadas de y_p

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x} \qquad \text{y} \qquad y_p''(x) = 9Ae^{3x}\,,$$

y reemplazamos en la ecuación diferencial obteniendo

$$9Ae^{3x} \;+\; 12Ae^{3x} \;+\; 5Ae^{3x} \;=\; 2e^{3x}\,.$$

Por lo tanto

$$26Ae^{3x} \;=\; 2e^{3x} \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{1}{13}\,,$$

y nuestra solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}\,.$$

Ejemplo 4.3.27. Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 5y' + 4y \;=\; 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)\,.$$

La ecuación característica es

$$k^2 + 5k + 4 = 0\,.$$

Escribamos la ecuación de la forma

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)\,,$$

con $f_1(x) = 3 + 8x^2$ y $f_2(x) = 2\cos(2x)$.

Para $L[y] = f_1(x)$, como $r \pm iq = 0$ no es raíz de la ecuación característica y grado de $P(x) = 3 + 8x^2$ es dos, tenemos solución particular de la forma

$$y_1(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2\,.$$

Con respecto a $L[y] = f_2(x)$, $r \pm iq = 2i$ tampoco es raíz de la ecuación característica. Además como el máximo entre los grados de $P(x) = 2$ y $Q(x) = 0$ es cero, tenemos solución particular de la forma

$$y_2(x) = A_3 \cos(2x) + A_4 \mathrm{sen}(2x)\,.$$

De esta forma la ecuación inicial $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$, tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 \cos(2x) + A_4 \mathrm{sen}(2x)\,.$$

Tenemos

$$y_p'(x) = A_1 + 2A_2 x - 2A_3 \mathrm{sen}(2x) + 2A_4 \cos(2x)\,,$$

y

$$y_p''(x) = 2A_2 - 4A_3 \cos(2x) - 4A_4 \mathrm{sen}(2x)\,.$$

Así

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= 2A_2 - 4A_3 \cos(2x) - 4A_4 \mathrm{sen}(2x) + 5(A_1 + 2A_2 x - 2A_3 \mathrm{sen}(2x) \\ &\quad +2A_4 \cos(2x)) + 4(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 \cos(2x) + A_4 \mathrm{sen}(2x)) \\ &= (2A_2 + 5A_1 + 4A_0) + (10A_2 + 4A_1)x + 4A_2 x^2 + 10A_4 \cos(2x) \\ &\quad -10A_3 \mathrm{sen}(2x)\,, \end{aligned}$$

y comparando con

$$f_1(x) + f_2(x) = 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)\,,$$

obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A_2 + 5A_1 + 4A_0 &= 3 \\ 10A_2 + 4A_1 &= 0 \\ 4A_2 &= 8 \\ 10A_4 &= 2 \\ -10A_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$A_3 = 0\,,\ A_4 = \frac{1}{5}\,,\ A_2 = 2\,,\ A_1 = -5\,,\ A_0 = 6\,.$$

Luego

$$y_p(x) = 6 - 5x + 2x^2 + \frac{1}{5}\mathrm{sen}(2x)\,,$$

es la solución particular buscada.

Ejemplo 4.3.28. Busquemos una solución particular de

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x} + 2e^{-3x}\,.$$

La ecuación característica es

$$k^2 - k - 6 = (k+2)(k-3) = 0\,.$$

Como -2 es raíz de multiplicidad uno de ella, la ecuación $L[y] = e^{-2x}$ tiene solución de la forma

$$y_1(x) = A_0 x e^{-2x}\,.$$

Por otra parte -3 no es raíz de la ecuación característica y luego $L[y] = e^{-3x}$ tiene solución de la forma

$$y_2(x) = A_1 e^{-3x}\,.$$

Sea entonces

$$y_p(x) = A_0 x e^{-2x} + A_1 e^{-3x}\,.$$

Derivando se tiene

$$y_p'(x) = A_0 e^{-2x} - 2A_0 x e^{-2x} - 3A_1 e^{-3x} \quad \text{y} \quad y_p''(x) = -4A_0 e^{-2x} + 4A_0 x e^{-2x} + 9A_1 e^{-3x}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= -4A_0 e^{-2x} + 4A_0 x e^{-2x} + 9A_1 e^{-3x} - (A_0 e^{-2x} - 2A_0 x e^{-2x} - 3A_1 e^{-3x}) \\ &\quad -6(A_0 x e^{-2x} + A_1 e^{-3x}) \\ &= -5A_0 e^{-2x} + 6A_1 e^{-3x}\,, \end{aligned}$$

y comparando con $e^{-2x} + 2e^{-3x}$, obtenemos

$$A_0 = -\frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad A_1 = \frac{1}{3}\,.$$

Por lo tanto

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} x e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x}$$

es la solución particular buscada.

4.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.4.1. .Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{1-x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x}\,y \;=\; 1-x\,,$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es $y_1(x) = e^x$.

Solución. Usando fórmula de Abel tenemos una segunda solución de la ecuación homogénea de la forma $y_2 = vy_1$, con

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{x}{1-x}dx} dx \\ &= \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{x}{x-1}dx} dx = \int e^{-2x} e^{x+\ln(x-1)} dx \\ &= \int e^{-x}(x-1)dx = \int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx = -xe^{-x} . \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_2(x) = -xe^{-x}e^x = -x$. De esta forma la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^x - c_2 x .$$

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)e^x - c_2(x)x .$$

Luego las funciones $c_1'(x), c_2'(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x - c_2'(x)x &= 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x) &= 1 - x . \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} c_1'(x) = -xe^{-x} \quad &\Longrightarrow \quad c_1(x) = xe^{-x} + e^{-x} + c_1 \\ c_2'(x) = -1 \quad &\Longrightarrow \quad c_2(x) = -x + c_2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = (xe^{-x} + e^{-x} + c_1)e^x - (-x + c_2)x ,$$

o bien

$$y(x) = x^2 + x + 1 + c_1 e^x - c_2 x .$$

Ejercicio 4.4.2. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x} , \quad (x \neq 0)$$

sabiendo que $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

Solución. Para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, linealmente independiente con $y_1(x)$, usamos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) \ = \ y_1(x) \int e^{-\int p_1(x)dx} y_1(x)^{-2} dx ,$$

con $p_1(x) = \frac{2}{x}$.
Como

$$-\int p_1(x)dx = -2\ln(x) = \ln(x^{-2}),$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= -\frac{\cos(x)}{x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) = c_1\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2\frac{\cos(x)}{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea usamos el método de variación de constante. Sea

$$y(x) = c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2(x)\frac{\cos(x)}{x}.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\tfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2'(x)\tfrac{\cos(x)}{x} &= 0 \\ c_1'(x)\tfrac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^2} + c_2'(x)\tfrac{-x\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{x^2} &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}\right\}.$$

Sus soluciones son

$$c_1'(x) = \cos(x), \quad c_2'(x) = -\operatorname{sen}(x),$$

e integrando obtenemos

$$c_1(x) = \operatorname{sen}(x) + c_1, \quad c_2(x) = \cos(x) + c_2.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = (\operatorname{sen}(x) + c_1)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + (\cos(x) + c_2)\frac{\cos(x)}{x}$$

es decir

$$y(x) = c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2(x)\frac{\cos(x)}{x} + \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 4.4.3. Encuentre la solución general de la ecuación

$$4x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 8x^3\frac{dy}{dx} + y = \tan\left(\frac{1}{2x}\right),$$

haciendo la sustitución $x = \frac{1}{t}$.

Solución.Sea $x = \frac{1}{t}$. Por lo tanto

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{dx} = -t^2\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(-2t\frac{dy}{dt} - t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cdot(-t^2) \\
&= 2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}\cdot
\end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos

$$4\frac{1}{t^4}\left(2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 8\frac{1}{t^3}t^2\frac{dy}{dt} + y = \tan\left(\frac{t}{2}\right)\,,$$

es decir

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot \tag{4.21}$$

Como la ecuación característica

$$m^2 + \frac{1}{4} = 0$$

tiene raíces $m = \pm\frac{1}{2}\imath$, la solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{4}y = 0$$

es

$$y_h(t) = c_1\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos una solución particular de (4.21) de la forma

$$y_p(t) = c_1(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2(t)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,.$$

Luego debemos resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl}
c_1'(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2'(t)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) &=& 0 \\
-\frac{1}{2}c_1'(t)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}c_2'(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) &=& \frac{1}{4}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot
\end{array}\right.$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad \Longrightarrow \\
c_1(t) &= -\ln\left(\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + c_1\,,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_2'(t) &= \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \quad\Longrightarrow \\ c_2(t) &= -\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \left[-\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,, \end{aligned}$$

y la solución general de (4.21) es

$$y(t) = -\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_1\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

De esta forma la solución general de nuestra ecuación es

$$\begin{aligned} y(x) &= -\ln\left[\sec\left(\frac{1}{2x}\right) + \tan\left(\frac{1}{2x}\right)\right]\cos\left(\frac{1}{2x}\right) + \\ & \quad c_1\cos\left(\frac{1}{2x}\right) + c_2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.4.4. Usando el método de los coeficientes indeterminados encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' - y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10\cos(2x)\,.$$

Solución. El polinomio característico de la ecuación homogénea $y'' - y = 0$ es $k^2 - 1 = 0$. Luego la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x}\,.$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea usando coeficientes indeterminados, separamos en dos ecuaciones

$$y'' - y = e^{-x}(2 - 4x) \quad \text{y} \tag{4.22}$$

$$y'' - y = 10\cos(2x) \tag{4.23}$$

Como -1 es solución de la ecuación característica debemos buscar una solución particular de (4.22) de la forma

$$y_1(x) = xe^{-x}(Ax + B)\,.$$

Tenemos

$$y_1'(x)=e^{-x}(-Ax^2+(2A-B)x+B) \quad \text{y} \quad y_1''(x)=e^{-x}(Ax^2+(B-4A)x+2(A-B))$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$e^{-x}(-4Ax+2(A-B))=e^{-x}(2-4x)\,.$$

Luego $A=1$ y $A-B=1$, lo que implica $B=0$. Por lo tanto

$$y_1(x)=x^2e^{-x}\,.$$

Consideremos ahora la ecuación (4.23). Como 2 no es solución de la ecuación característica, buscamos una solución particular de la forma

$$y_2(x)=C\cos(2x)+D\mathrm{sen}(2x)\,.$$

Tenemos

$$y_2'(x)=-2C\mathrm{sen}(2x)+2D\cos(2x) \quad \text{y} \quad y_2''(x)=-4C\cos(2x)-4D\mathrm{sen}(2x)\,,$$

y reemplazando en (4.23) obtenemos

$$-5C\cos(2x)-5D\mathrm{sen}(2x)=10\cos(2x)\,.$$

Por lo tanto $C=-2$, $D=0$ y

$$y_2(x)=-2\cos(2x)\,.$$

Luego

$$y_p(x)=y_1(x)+y_2(x)=x^2e^{-x}-2\cos(x)$$

es solución particular de nuestra ecuación original y su solución general es

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+x^2e^{-x}-2\cos(x) \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 4.4.5. Para $x>0$ encuentre la solución general de la ecuación

$$4xy''+(2-8\sqrt{x})y'-5y=(3\sqrt{x}+2)e^{-\sqrt{x}}\,,$$

usando el cambio $x=t^2$.

Solución. Ponemos $x=t^2$ lo que implica $\frac{dx}{dt}=2t$. Además

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{2t}\left[-\frac{1}{2t^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]=\frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right]. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$4t^2\,\frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt}\;+\;\frac{d^2y}{dt^2}\right]\;+\;(2\;-\;8t)\,\frac{1}{2t}\,\frac{dy}{dt}\;-\;5y\;=\;e^{-t}(3t\;+\;2)\,,$$

o bién

$$\frac{d^2y}{dt^2}\;-\;4\frac{dy}{dt}\;-\;5y\;=\;e^{-t}(3t\;+\;2)\,. \tag{4.24}$$

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2\;-\;4k\;-\;5\;=\;0\;=\;(k\;+\;1)(k\;-\;5)\,,$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t)\;=\;c_1e^{-t}\;+\;c_2e^{5t}\,.$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución particular de (4.24) de la forma

$$y_p(t)\;=\;te^{-t}(A\;+\;Bt)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= e^{-t}[-Bt^2\;+\;(-A\;+\;2B)t\;+\;A] \\ y_p''(t) &= e^{-t}[Bt^2\;+\;(A\;-\;4B)t\;+\;2(-A\;+\;B)]\,. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$e^{-t}[-12Bt\;-\;6A\;+\;2b]\;=\;e^{-t}[3t\;+\;2]\,,$$

lo que implica

$$B\;=\;-\frac{1}{4}\qquad \text{y}\qquad A\;=\;-\frac{5}{12}\cdot$$

Luego la solución general de (4.24) es

$$y(t)\;=\;-\frac{1}{12}te^{-t}(5\;+\;3t)\;+\;c_1e^{-t}\;+\;c_2e^{5t}\,,$$

y por lo tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es

$$y(x)\;=\;-\frac{1}{12}\sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}(5\;+\;3\sqrt{x}\,)\;+\;c_1e^{-\sqrt{x}}\;+\;c_2e^{5\sqrt{x}}\,.$$

Ejercicio 4.4.6. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$y''\;+\;y\;=\;\tan(x)\;+\;3x\;-\;1\,.$$

Determine además el intervalo máximo donde está definida.

Solución. Nuestra ecuación es

$$y'' + y = \tan(x) + 3x - 1\,. \tag{4.25}$$

Observemos primero que la ecuación no está definida para los x de la forma $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n es un entero, ya que en estos x la función coseno se anula y por lo tanto no estan en el dominio de la función tangente. Como queremos una solución alrededor de $x = 0$, debemos partir imponiendo la condición $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Resolvamos entonces la ecuación para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)\,.$$

Resolvamos primero usando variación de parámetros la ecuación

$$y'' + y = \tan(x) \tag{4.26}$$

Buscamos entonces solución de (4.26) de la forma

$$y_1(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\text{sen}(x)\,,$$

y por lo tanto debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \cos(x)c_1'(x) + \text{sen}(x)c_2'(x) & = 0 \\ -\text{sen}(x)c_1'(x) + \cos(x)c_2'(x) & = \tan(x)\,. \end{cases}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\tan(x)\cdot\text{sen}(x) \\ c_2'(x) &= \text{sen}(x)\,, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \text{sen}(x) - \ln(\sec(x) + \tan(x)) + c_1\,, \\ c_2(x) &= -\cos(x) + c_2\,. \end{aligned}$$

Observe que todo esto tiene sentido ya que para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tenemos que $\sec(x) + \tan(x) > 0$.
Luego la solución general de (4.26) es

$$y_1(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\text{sen}(x) - \ln(\sec(x) + \tan(x))\cos(x)\,,$$

y ésta esta definida para todo $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Para resolver

$$y'' + y = 3x - 1 \tag{4.27}$$

usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución de la forma

$$y_2(x) \;=\; Ax \;+\; B\,.$$

Reemplazando en (4.27) y comparando coeficientes se obtiene

$$A \;=\; 3 \qquad \text{y} \qquad B \;=\; -1\,,$$

lo que implica

$$y_2(x) \;=\; 3x \;-\; 1\,.$$

Luego la solución general de la ecuación (4.25) es

$$y(x) \;=\; c_1(x)\cos(x) \;+\; c_2(x)\mathrm{sen}(x) \;-\; \ln(\sec(x) \;+\; \tan(x))\cos(x) \;+\; 3x \;-\; 1\,,$$

y el intervalo máximo donde esta solución está definida es $\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Ejercicio 4.4.7. Encuentre la solución general alrededor de $x=\pi$ de la ecuación

$$y'' \;+\; y \;=\; \tan(x) \;+\; 3x \;-\; 1\,,$$

y determine además el intervalo máximo donde está definida.