Ejercicios Resueltos de Transformada de Laplace (I)

1. Dado el siguiente P.V.I.

$$y'' - 2y' - 8y = te^{-3t}; \qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{L}\{te^{-3t}\} = \dfrac{1}{(s+3)^2}$. Justifique su desarrollo.

   (b) Obtenga la solución del P.V.I

Solución: (a) Primero notemos que usando el Primer Teorema de Traslación (o el Teorema de la Derivada de la Transformada), se tiene

$$\mathcal{L}\left(te^{-3t}\right)(s) \;=\; \mathcal{L}(t)(s+3) = \frac{1}{(s+3)^2}$$

Segundo, demostremos que dado $F(s) = \dfrac{1}{(s+3)^2}$, su T.L. inversa es $f(t) = te^{-3t}$. Es decir

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\,\frac{1}{(s+3)}\right)(t) = te^{-3t}.$$

La expresión del lado izquierdo es equivalente a la convolución de la inversa de sus factores

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\,\frac{1}{(s+3)}\right)(t) = e^{-3t} * e^{-3t} = \int_0^t e^{-3u}e^{-3(t-u)}du$$

Resolviendo la expresión, obtenemos finalmente

$$\int_0^t e^{-3u}e^{-3(t-u)}du = te^{-3t}$$

Notar que, para encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right)$, *se podría también aplicar la versión inversa del Primer Teorema de Traslación.*

(b) Al aplicar la Transformada de Laplace en el P.V.I., se obtiene

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - 2sY(s) - 8Y(s) &= \frac{1}{(s+3)^2} + sy(0) + y'(0) + 2y(0) \\ Y(s) &= \frac{1}{(s+3)^2(s-4)(s+2)}, \end{aligned}$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. El lado derecho de la ecuación se trabaja con fracciones parciales

$$\frac{1}{(s+3)^2(s-4)(s+2)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{(s-4)} + \frac{D}{(s+2)}$$

Al resolver las fracciones parciales se obtienen los siguientes valores:

$$A = \frac{8}{49}, \qquad B = \frac{1}{7}, \qquad C = \frac{1}{294}, \qquad D = \frac{-1}{6}$$

Reescribiendo los términos, queda la siguiente expresión

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{8}{49(s+3)} + \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{294(s-4)} - \frac{1}{6(s+2)} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{8e^{-3t}}{49} + \frac{te^{-3t}}{7} + \frac{e^{4t}}{294} - \frac{e^{-2t}}{6}, \end{aligned}$$

donde se utilizó el resultado demostrado en (a).

2. Dado $F(s) = \dfrac{2}{s^3(s-1)}$

   (a) Calcule la $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ usando el Teorema de Convolución.

   (b) Use lo anterior para resolver el siguiente P.V.I

$$y'' - 2e^t + 2 = 0; \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solución: (a) Una de las posibles soluciones al problema es utilizar un acomodo del problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3(s-1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\frac{1}{s^2(s-1)}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\frac{1}{s(s-1)}\right) \end{aligned}$$

Al resolver en orden las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{(s-1)}\right) &= 1 * e^t = \int_0^t e^u du = e^t - 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{s(s-1)}\right) &= 1 * (e^t - 1) = \int_0^t (e^u - 1) du = e^t - t - 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\frac{1}{s^2(s-1)}\right) &= 2(1 * (e^t - t - 1)) = 2\int_0^t (e^u - u - 1) du = 2e^t - t^2 - 2t - 2. \end{aligned}$$

Otra forma sería calcular directamente

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\frac{1}{(s-1)}\right) = t^2 * e^t = \int_0^t u^2 e^{t-u} du = e^t \int_0^t u^2 e^{-u} du = 2e^t - t^2 - 2t - 2.$$

donde se usó

$$\int x^n e^{cx} dx = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c}\int x^{n-1} e^{cx} dx.$$

(b) Al ordenar el PVI y aplicar la transformada de Laplace, llamamos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$.

$$\begin{aligned} y''(t) &= 2e^t - 2 \\ s^2Y(s) - 1 &= \frac{2}{(s-1)} - \frac{2}{s} \\ Y(s) &= \frac{2}{(s-1)s^3} + \frac{1}{s^2} \quad \text{(Despejando)} \\ \Rightarrow y(t) &= 2e^t - t^2 - 2t - 2 + t = 2e^t - t^2 - t - 2, \end{aligned}$$

donde se usó el resultado demostrado en (a).

3. Una masa que pesa 64 libras, unida al extremo de un resorte, lo alarga 8/9 pies. Al inicio, la masa se libera desde la posición de equilibrio con velocidad inicial nula. En el instante $t = 0$ se ejerce una fuerza de $120t$ en el resorte, la cual se interrumpe abruptamente en el instante $t = 1s$. El P.V.I. que modela el problema es:

$$2x''(t) + 72x(t) = f(t), \qquad f(t) = \begin{cases} 120t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Escriba $f(t)$ en términos de $\mathcal{U}(t-1)$ y calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$.
   (b) Resuelva la ecuación planteada usando la Transformada de Laplace.
   (c) Determinar la velocidad de la masa en $t = 2s$.

Solución: (a) La función $f(t)$ queda escrita en términos de $\mathcal{U}(t-1)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(t) &= 120t - 120t\,\mathcal{U}(t-1) = 120t - 120(t-1)\,\mathcal{U}(t-1) - 120\,\mathcal{U}(t-1) \\ \mathcal{L}\left(f(t)\right) &= \frac{120}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right). \end{aligned}$$

(b) Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} 2s^2X(s) + 72X(s) &= \frac{120}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right) \\ X(s) &= \left[\frac{120}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{120}{s^2} + \frac{120}{s}\right)\right]\frac{1}{2s^2+72} \\ &= \frac{60}{s^2(s^2+36)} - e^{-s}\left(\frac{60}{s^2(s^2+36)} + \frac{60}{s(s^2+36)}\right), \end{aligned}$$

donde $X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$ y se consideró las condiciones iniciales entregadas en el enunciado $x(0) = x'(0) = 0$.

Resolviendo por separado cada termino, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{6}{(s^2+36)}\right)(t) &= 1 * \sin(6t) = \int_0^t \sin(6u)du = \frac{1}{6} - \frac{\cos(6t)}{6} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\frac{6}{(s^2+36)}\right)(t) &= 1 * \left(\frac{1}{6} - \frac{\cos(6t)}{6}\right) = \int_0^t \left[\frac{1}{6} - \frac{\cos(6u)}{6}\right]du = \frac{t}{6} - \frac{\sin(6t)}{36}. \end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
X(s) &= 10\left[\left(\frac{1}{s}\frac{6}{(s^2+36)}\right)-\left(e^{-s}\left(\frac{6}{s^2(s^2+36)}+\frac{6}{s(s^2+36)}\right)\right)\right] \\
\Rightarrow x(t) &= \frac{10t}{6}-\frac{10\sin(6t)}{36}-\left[\frac{10t}{6}-\frac{10}{6}\left(\frac{\sin(6t-6)}{6}+\cos(6t-6)\right)\right]\mathcal{U}(t-1).
\end{aligned}
$$

(c) Al evaluar en t=2 se obtiene: x(2)=1.671716428