Ecuaciones Diferenciales de 1er orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuación diferencial de primer orden.**
- **Teorema de existencia y unicidad de soluciones.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Ecuación diferencial de primer orden

En esta unidad estudiaremos la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

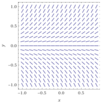
con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada.
Una **solución** de (1) es una función $\phi : I \to \mathbb{R}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de definición de la EDO, satisfaciendo:

- ϕ es derivable para todo $x \in I$,
- $(x, \phi(x)) \in \Omega$,
- $\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \forall x \in I$.

Interpretación gráfica de la solución

Para cada punto (x, y) en el plano tenemos el número real $f(x, y)$, que representa la pendiente en ese punto. Así a todo punto del plano le asignado un segmento de línea recta con pendiente $f(x, y)$, obteniendo un campo de direcciones.

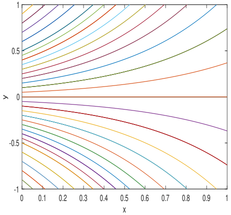
Ejemplo 1: La figura muestra el campo de direcciones de $y'(x) = 2y$.



Interpretación gráfica de la solución

En este sentido, buscar la solución ϕ a (1) equivale a buscar una curva plana $y = \phi(x)$, tal que para cada punto (x, y) de la curva, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto sea precisamente el valor $f(x, y)$ del campo.

Ejemplo 2: La **solución general** *de $y'(x) = 2y$ es $y(x) = Ce^{2x}$, donde C es una constante. Notar que se obtienen una familia de funciones que dependen de C.*



Para mayor información sobre resolver una EDO de primer orden de forma gráfica, ver: *Video Isoclinas*

Problema de valor inicial (PVI)

En el ejemplo anterior, si bien la ecuación diferencial tiene más de una solución, el gráfico sugiere que por cada punto (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ pasa una, y sólo una, de estas curvas. Determinar la solución de una EDO que pasa por cierto punto dado es lo que se conoce como el problema de valor inicial (PVI):
Encontrar y tal que

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

donde I es un intervalo, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. La igualdad $y(x_0) = y_0$ se conoce como **condición inicial o de borde** según la variable x se interprete como tiempo o espacio.

Ejemplo 3: Encontrar la solución del PVI:

$$\begin{cases} y' = 2y & \forall x \in \mathbb{R} \\ y(1) = 2, \end{cases} \tag{3}$$

La solución general es $y = Ce^{2x}$, *para encontrar la solución del PVI, debemos resolver*

$$2 = y(1) = Ce^2 \quad \Longrightarrow \quad C = 2e^{-2}.$$

Luego la solución del PVI es $y(x) = 2e^{2(x-1)}$.

Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Sea D un conjunto abierto del plano XY y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga además que f tiene derivada parcial con respecto a y en todo punto de D y que $\partial f / \partial y$ es continua sobre D. Sea (x_0, y_0) un punto de D. Entonces la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ tiene una y solo una solución ϕ definida en un intervalo abierto I alrededor de x_0 que verifica $\phi(x_0) = y_0$.

Ejemplo 4: En el PVI siguiente

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{4}$$

la función $f(x, y) = y^2$ *y* $\partial f / \partial y = 2y$ *son continuas en el plano* XY*, en particular en el rectángulo* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in (-2, 2),\ y \in (0, 2)\}$*. Como el punto* $(0, 1)$ *se encuentra en el interior de* D*, el Teorema garantiza una solución única del PVI, en algún intervalo abierto* I *que contiene a* $x_0 = 0$*.*
La solución del PVI es

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Notar que la solución es discontinua en $x = 1$*, luego el intervalo* I *puede no coincidir con el rectángulo* D*.*

Ejemplo 5: En el PVI siguiente

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = -2\sqrt{y} \\ y(0) = 0, \end{array} \right. \tag{5}$$

la función $f(x, y)$ *es continua para todo* $y \geq 0$*, pero* $\partial f / \partial y = 1/\sqrt{y}$ *es discontinua cuando* $y = 0$*, y en consecuencia en el punto* $(0, 0)$*. Por esto, es posible que existan dos soluciones diferentes*

$$y_1 = x^2, \qquad y_2 = 0$$

cada una de las cuales satisface la condición inicial $y(0) = 0$*.*