EDO Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **EDO Lineales homogéneas con coeficientes constantes.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Ecuaciones Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \tag{1}$$

donde a_0, a_1, a_2 constantes reales, $a_2 \neq 0$.

Buscaremos soluciones de la forma $y(x) = e^{kx}$, donde k es una constante real a determinar. Tenemos entonces

$$y'(x) = ke^{kx} \quad \text{y} \quad y''(x) = k^2 e^{kx}\,.$$

Reemplazando en (1) se obtiene

$$e^{kx}(a_2 k^2 + a_1 k + a_0) = 0\,.$$

Luego
$y(x) = e^{k_1 x}$ es solución de (1) $\iff$ k_1 es solución de la ecuación cuadrática

$$a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0\,. \tag{2}$$

Tal ecuación es llamada **ecuación característica** asociada a (1).

EDO Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Casos posibles. Sea $d = a_1^2 - 4a_2a_0$, el discriminante de la ecuación característica (2), y k_1, k_2 sus raíces.

Caso I: Raíces reales distintas: Si $d > 0$. Entonces k_1, k_2 son raíces reales y distintas de (2),

$$k_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{d}}{2a_2}, \quad k_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{d}}{2a_2},$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso II: Raíces reales e iguales: Si $d = 0$. Entonces $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2a_2} \in \mathbb{R}$ y $y_1(x) = e^{k_1 x}$ es solución.

Afirmación: $y_2(x) = xe^{k_1 x}$ es también solución.
En efecto, usando la fórmula de Abel

$$y_2(x) \quad = \quad y_1(x) \int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2}\int dx}}{y_1(x)^2} dx = e^{k_1 x} \int \frac{e^{2k_1 x}}{e^{2k_1 x}} dx = e^{k_1 x} \int dx = xe^{k_1 x} \qquad (3)$$

Luego la solución general en este caso es

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 \, x \, e^{k_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso III: Raíces complejas: Si $d < 0$. En este caso k_1, k_2 son números complejos conjugados,

$$k_1 = \alpha - i\beta\,, \quad k_2 = \alpha + i\beta\,, \quad \text{con} \quad \alpha = -\frac{a_1}{2a_2}\,, \quad \beta = \frac{\sqrt{-d}}{2a_2}\,.$$

Usaremos un resultado conocido como la **fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

De esta forma

$$e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) \quad \text{y} \quad e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

son raíces complejas de (1). Luego la solución

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) + c_2 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) \\ &= (c_1 + c_2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i(c_2 - c_1)e^{\alpha x}\sin(\beta x), \end{aligned}$$

lo que demuestra que las funciones $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ y $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ son soluciones reales de (1)). Además, como son L.I., la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Ejemplos:

Ejemplo 1: Encuentre la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Solución: Buscamos soluciones de la forma e^{kx}, al sustituir en la ecuación obtenemos la ecuación característica:

$$k^2 - 3k + 2 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 2: Encuentre la solución general de

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Solución: Buscamos soluciones de la forma e^{kx}, al sustituir en la ecuación obtenemos la ecuación característica:

$$k^2 + 2k + 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = k_2 = -1$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplos:

Ejemplo 3: Encuentre la solución general de

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Solución: La ecuación característica es

$$k^2 + 4k + 5 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = -2 - i$ y $k_2 = -2 + i$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

EDO lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes

En general, para resolver una EDO lineal homogénea de orden n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4}$$

donde las a_i, $i = 1, ..., n$ son constantes reales. Si buscamos soluciones de la forma e^{kx}, debemos resolver la ecuación característica:

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 = 0.$$

Caso I: Todas las raíces reales distintas: La solución general es

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \cdots + c_n e^{k_n x}, \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots.$$

EDO lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes

Caso II: Raíz real con multiplicidad m: Sea k_1 una raíz de multiplicidad m, entonces las soluciones L.I. asociadas a k_1 son

$$\{e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{k_1 x}\}$$

Caso III: Raíces complejas: Sea $k_1 = \alpha + i\beta$ una raíz compleja de multiplicidad m y $k_2 = \alpha - i\beta$, su raíz conjugada también de multiplicidad m. Entonces tenemos $2m$ soluciones L.I. en el conjunto fundamental de soluciones:

$$\begin{gathered}\{e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\\ e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x),\ x^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}.\end{gathered}$$

Ejemplos:

Ejemplo 4: Encuentre la solución general de

$$y''' + 3y'' - 4y = 0.$$

Solución: Buscamos soluciones de la forma e^{kx}, al sustituir en la ecuación obtenemos la ecuación característica:

$$k^3 + 3k^2 - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (k-1)(k^2+4k+4) = (k-1)(k+2)^2 = 0.$$

Se tiene la raíz $k_1 = 1$ con multiplicidad $m = 1$ y $k_2 = -2$ con multiplicidad $m = 2$. Así la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}.$$

Ejemplos:

Ejemplo 5: Encuentre la solución general de

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$

Solución: La ecuación característica es

$$k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = i$ y su conjugado $k_2 = -i$, cada una con multiplicidad $m = 2$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + c_3 x \cos(x) + c_4 x \sin(x).$$