UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Electricidad y Magnetismo

Unidad 1: Introducción y Campo Eléctrico

Flujo de campo eléctrico y Ley de Gauss

Profesora Rosa Corona

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resumen clase anterior

$$\vec{E}_q = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \frac{kq}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Campo Eléctrico

$$\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qq_0}}{q_0}$$

distribuciones discretas

distribuciones continuas

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} &= k\frac{\Delta q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}) \\
\vec{E} &= k\lim_{\Delta q\to 0}\sum_i \frac{\Delta q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}) \\
\vec{E} &= k\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})
\end{aligned}$$

Contenidos

- 1-Flujo eléctrico
- 2-Ley de Gauss
- 3-Forma diferencial de la Ley de Gauss
- 4- Campo eléctrico en conductores

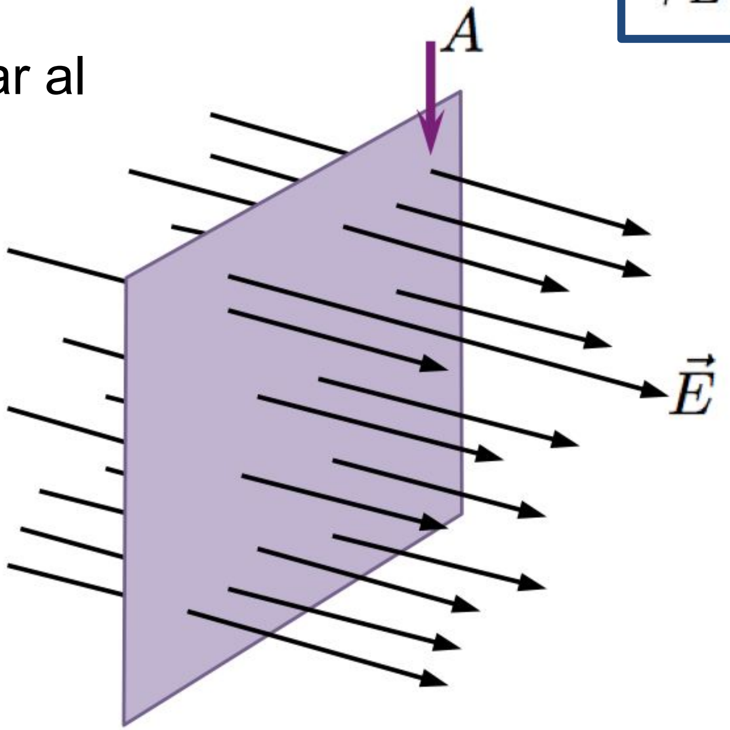
1. Flujo eléctrico

El flujo eléctrico es el producto punto o escalar entre el campo eléctrico y el área de la superficie perpendicular al campo:

$$\boxed{\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}}$$

- Si la superficie es perpendicular al campo eléctrico

$$\phi_E = EA$$

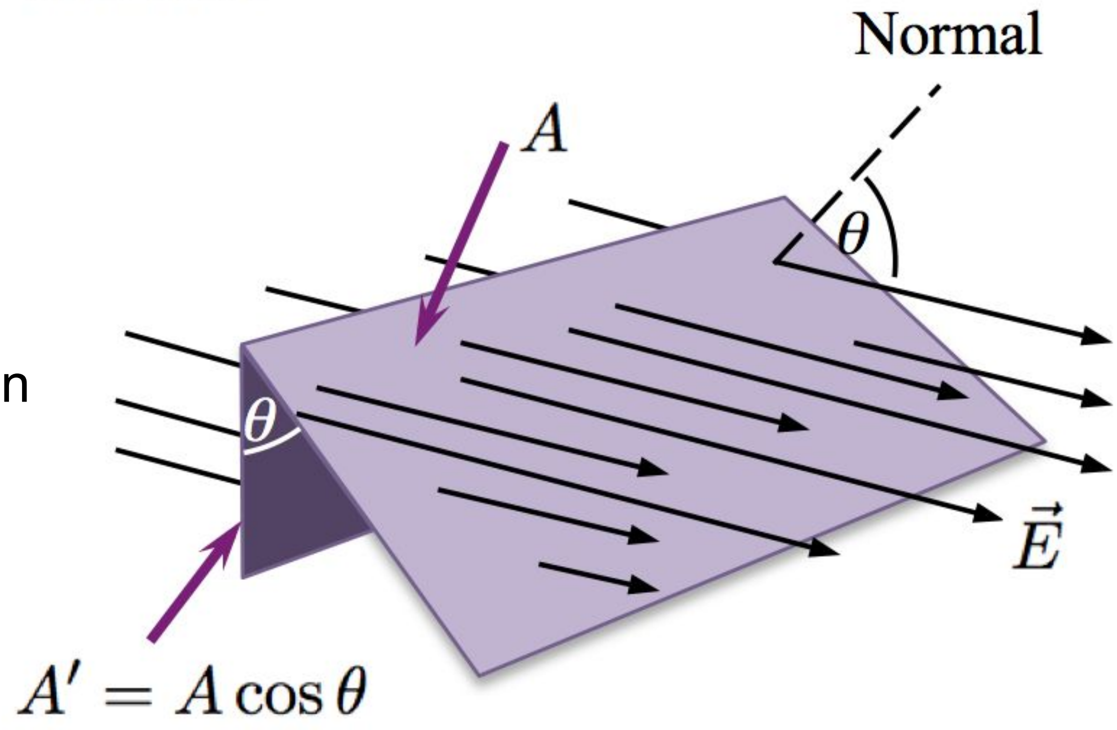


1. Flujo eléctrico

- Si la superficie no es perpendicular al campo eléctrico

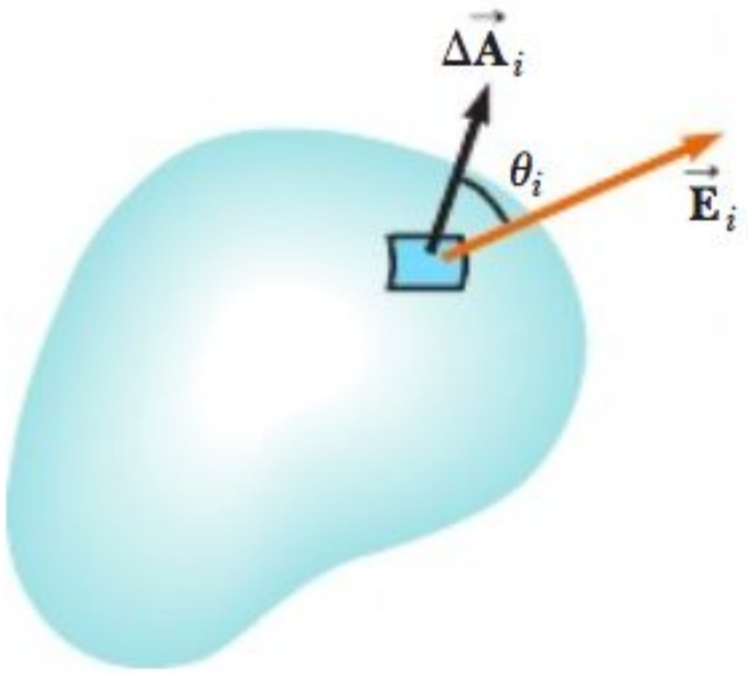
$$\phi_E = EA\cos\theta$$

Debido a que el número de líneas de campo que atraviesan A' es igual al número de líneas que atraviesa A, ambos flujos son iguales.



1. Flujo eléctrico

En general, podemos dividir la superficie en pequeños elementos, donde el flujo eléctrico en cada uno de ellos será:



$$\Delta\phi_{E\,i} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

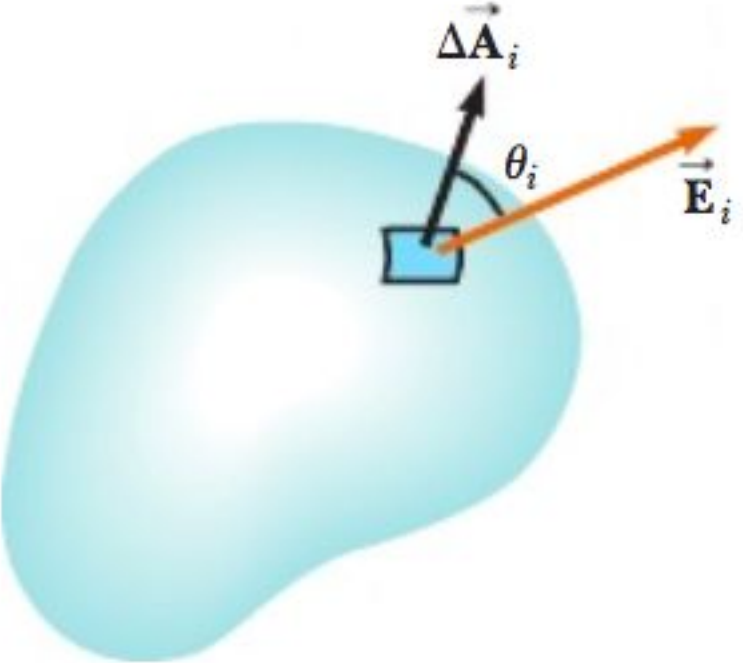
$$\Delta\phi_{E\,i} = E_i \Delta A_i \cos\theta_i$$

Se define el vector de área como un vector normal a la superficie y de módulo igual al área en cuestión

1. Flujo eléctrico

Al sumar la contribución de todos los elementos se obtiene:

$$\phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$



Donde en el límite continuo

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

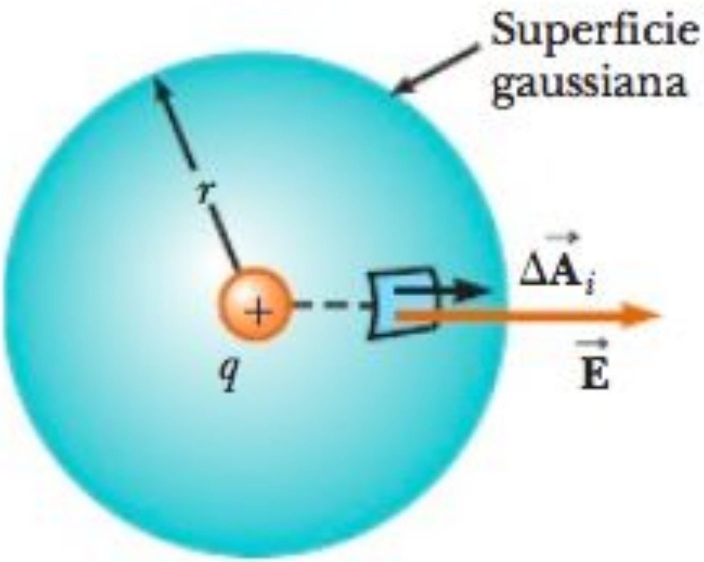
donde $\int_S$

indica que la integral se
realiza sobre una superficie.

2. Ley de Gauss

Considere una carga puntual positiva q, localizada en el centro de una esfera de radio r, siendo esta esfera una **superficie cerrada, conocida como superficie gaussiana**

donde el flujo eléctrico es:



$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\phi_E = \oint_S E \; dA \cos\theta$$

2. Ley de Gauss

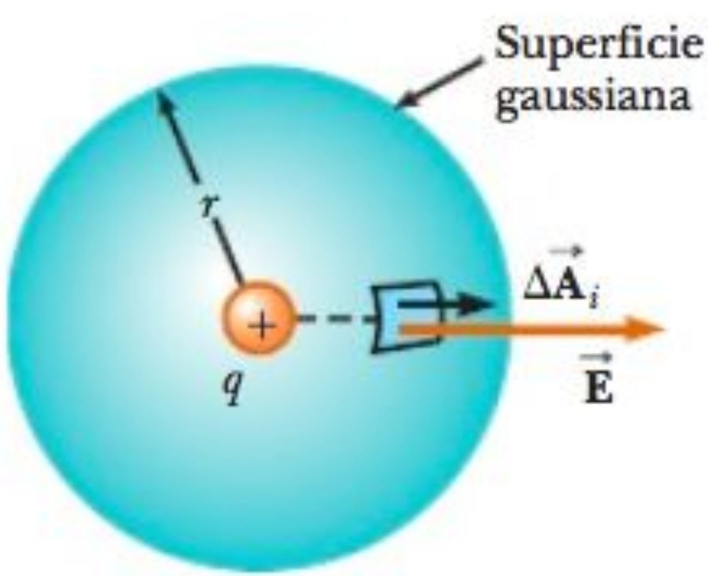
Las líneas de campo apuntan radialmente hacia fuera, entonces θ = 0º (perpendicular a la superficie), de modo que . $cos\theta = 1$
Además, el campo eléctrico es constante sobre la superficie e igual a:

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

Si reemplazamos, tenemos que el flujo es:

$$\phi_E = \oint_S k\frac{q}{r^2} dA \cos\theta$$

$$\phi_E = k\frac{q}{r^2}\oint_S dA$$



donde la integral de superficie sobre una esfera es:

$$\oint_S dA = A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$$

2. Ley de Gauss

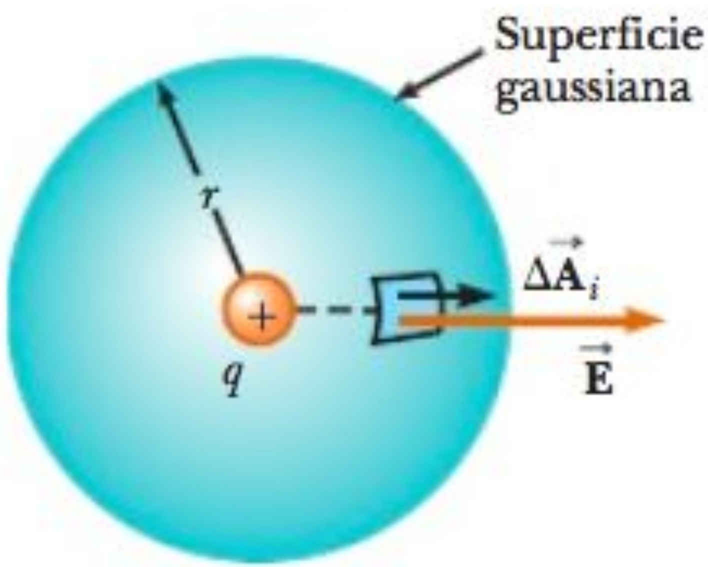
Entonces:

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2$$

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En forma general:

$$\boxed{\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\mathrm{enc}}}{\epsilon_0}}$$



<u>Observaciónes:</u>

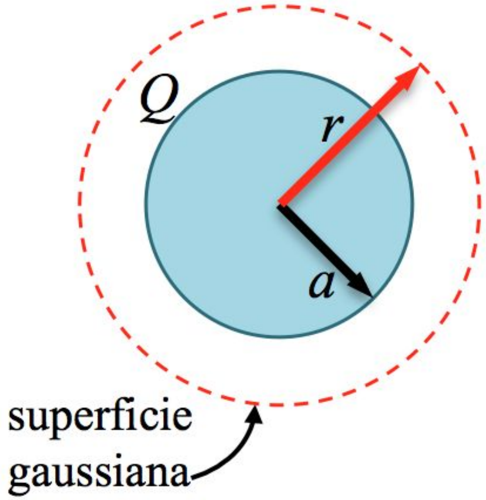
- Si la superficie cerrada no tiene carga, entonces el flujo es cero.
- La ley de Gauss es una generalización del flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada.

2. Ley de Gauss

Ejemplo con geometría esférica:
Una esfera sólida aislante de radio a [m] tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ [C/m^3] y lleva una carga total Q [C].

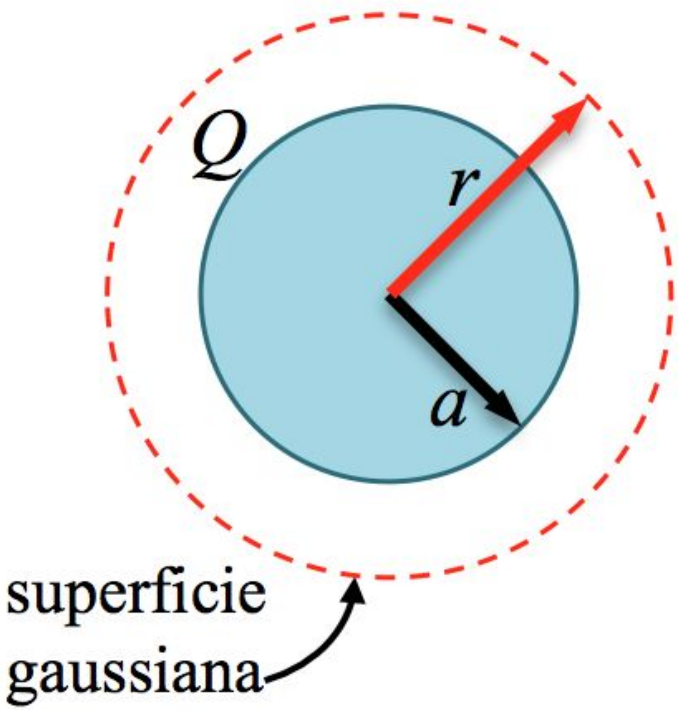
a. Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera.

b. Calcule la magnitud de campo eléctrico en un punto dentro de la esfera.



2. Ley de Gauss

a. Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera, es decir, r>a.



Empecemos usando la ley de Gauss:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

donde la carga que encierra la superficie gaussiana es:

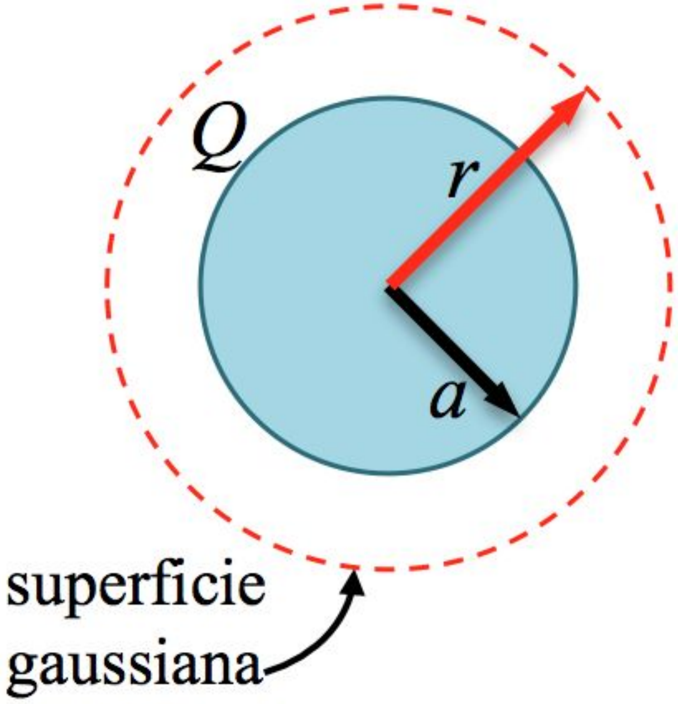
$$q_{\text{enc}} = Q$$

y el área de la superficie gaussiana es:

$$A = 4\pi r^2$$

2. Ley de Gauss

a. Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera, es decir, r>a.



Ahora reemplazamos:

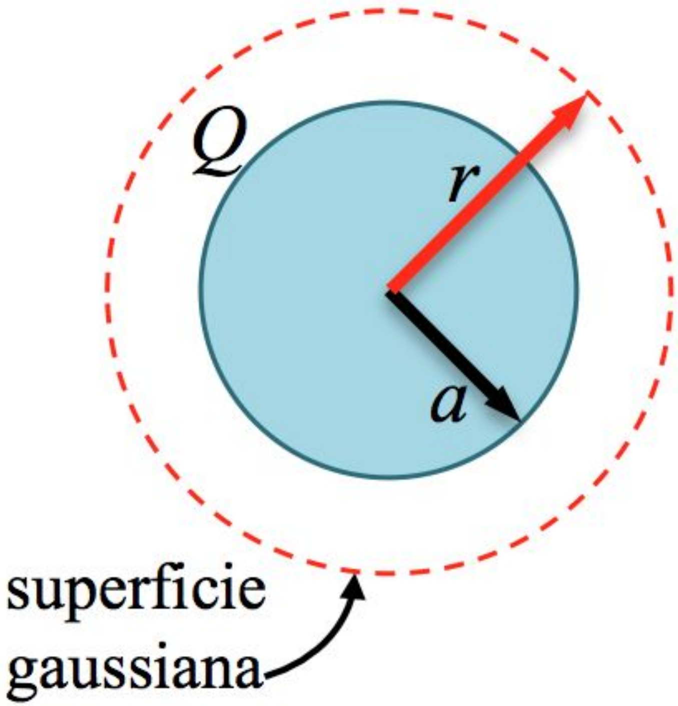
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

2. Ley de Gauss

a. Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera, es decir, r>a.



Entonces, el campo eléctrico es:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Si reescribirmos en función de la constante eléctrica y sabiendo que el campo es radial, tenemos:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]} \quad (r > a)$$

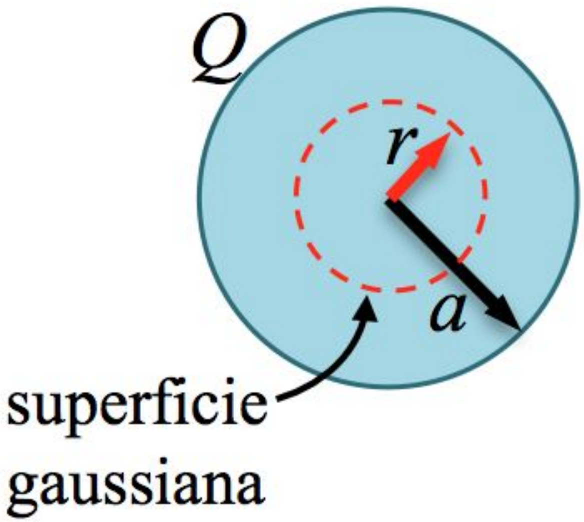
obs. el campo eléctrico es equivalente al de una carga puntual.

2. Ley de Gauss

b. Calcule la magnitud de campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, es decir, r<a.

Empecemos usando la ley de Gauss:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$



La superficie gaussiana ahora es de radio menor que el radio de la esfera sólida. Por lo que la carga encerrada es una proporción de la carga total de la esfera y depende de r, entonces:

$$q_{\text{enc}} = \rho V' \qquad V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

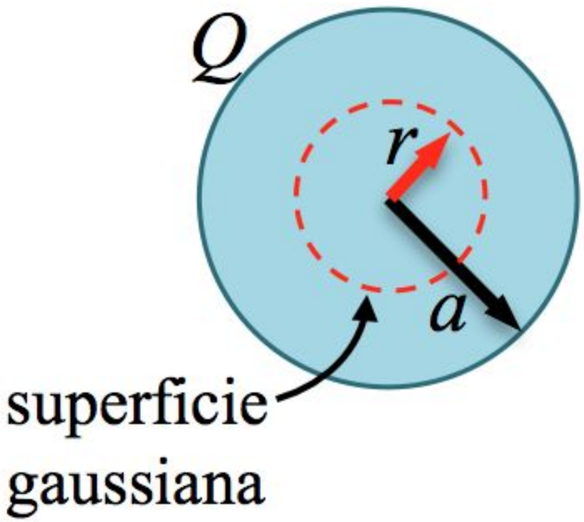
El área de la superficie gaussiana es: $A = 4\pi r^2$

2. Ley de Gauss

b. Calcule la magnitud de campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, es decir, r<a.

ahora reemplazamos:

$$
\begin{aligned}
\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} &= \frac{q_{\rm enc}}{\epsilon_0} \\
EA &= \frac{\rho V'}{\epsilon_0} \\
E4\pi r^2 &= \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0}
\end{aligned}
$$



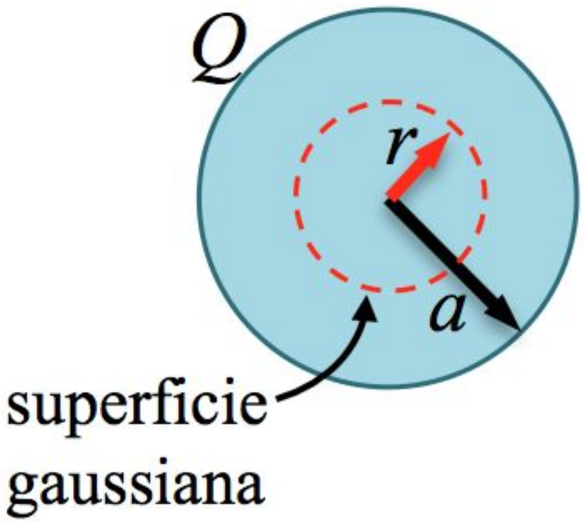
$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Ley de Gauss

b. Calcule la magnitud de campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, es decir, r<a.

ahora reemplazamos:

$$
\begin{aligned}
\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\
EA &= \frac{\rho V'}{\epsilon_0} \\
E\cancel{4\pi}\cancel{r^2} &= \frac{\cancel{4\pi}\rho r^{\cancel{3}}}{3\epsilon_0} \\
E &= \frac{\rho r}{3\epsilon_0}
\end{aligned}
$$



$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Ley de Gauss

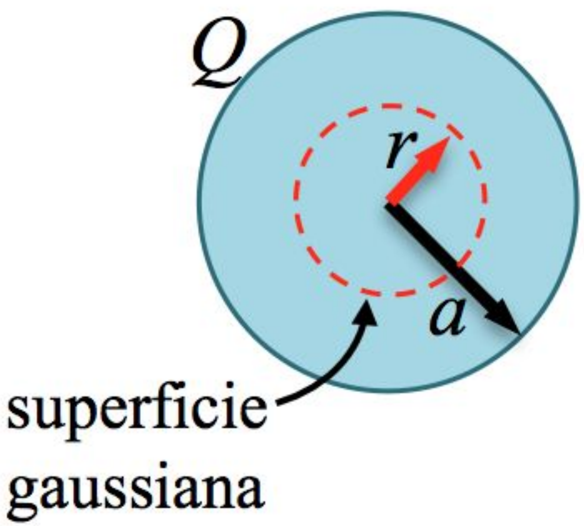
b. Calcule la magnitud de campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, es decir, r<a.

Por otro lado, sabemos que la densidad de carga es una propiedad del cuerpo, por lo que la carga total es:

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

si reemplazamos en el campo, tenemos:

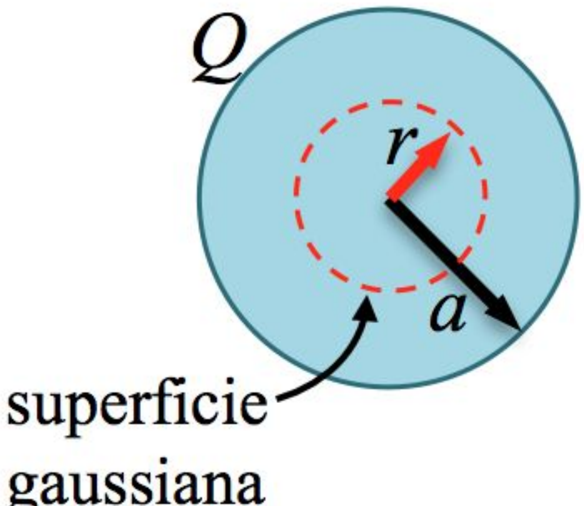
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}$$



$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Ley de Gauss

b. Calcule la magnitud de campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, es decir, r<a.



$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Finalmente, escribiendo en función de la constante eléctrica y sabiendo que el campo es radial, tenemos:

$$\boxed{\vec{E} \;=\; kQ\frac{r}{a^3}\hat{r}\;\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]} \quad (r < a)$$

2. Ley de Gauss

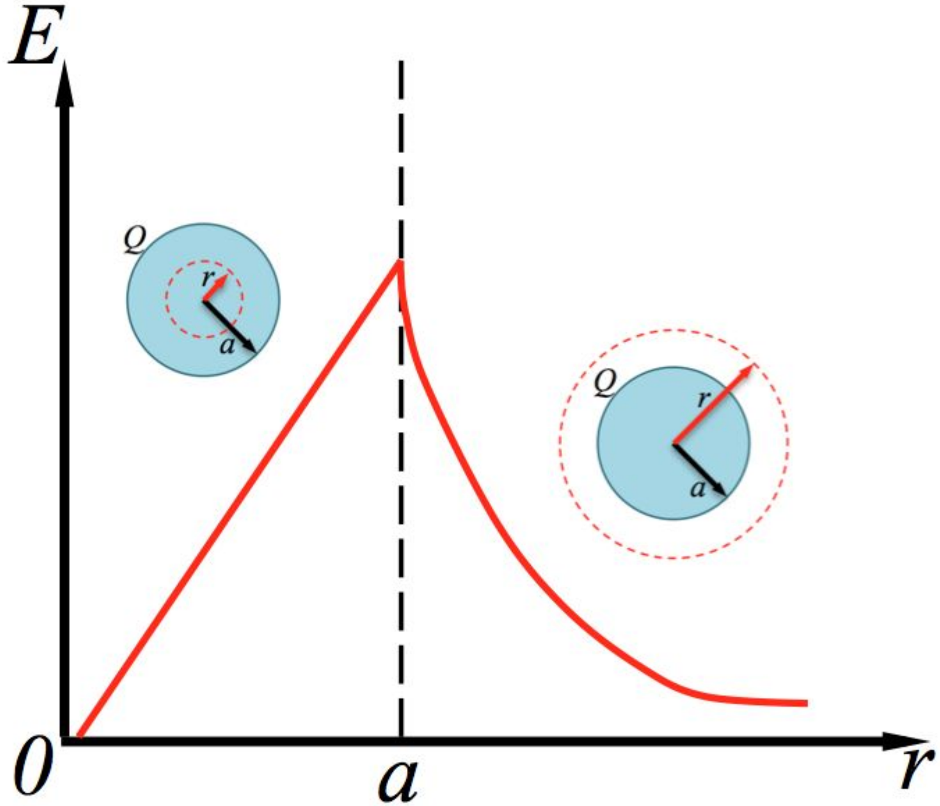
Los resultados son:

$(r > a)$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

$(r < a)$

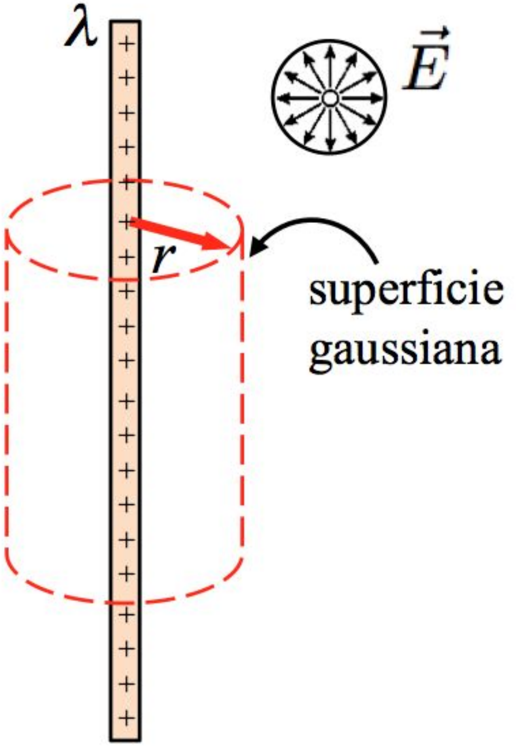
$$\boxed{\vec{E} = kQ\frac{r}{a^3}\hat{r} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$



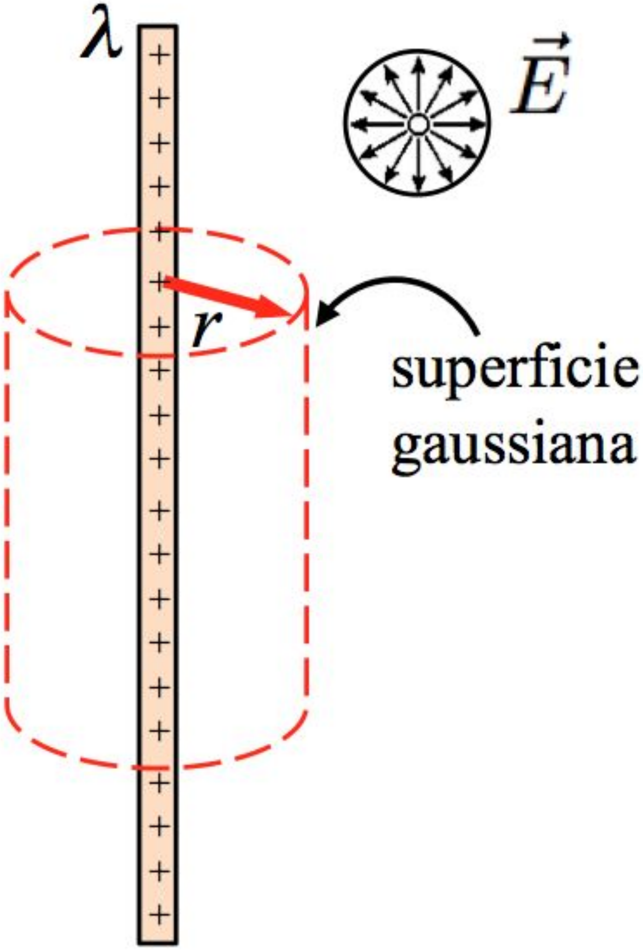
2. Ley de Gauss

Ejemplo con geometría cilíndrica:
Encuentre el campo eléctrico a una distancia r [m] de una línea de carga positiva de longitud infinita cuya carga por unidad de longitud λ [C/m] es constante.

Solución:
Para obtener el campo eléctrico, usamos la ley de Gauss utilizando como superficie gaussiana un cilindro finito de longitud l y radio r. Observando que el campo eléctrico es radial.



2. Ley de Gauss



Comencemos escribiendo la ley de gauss:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

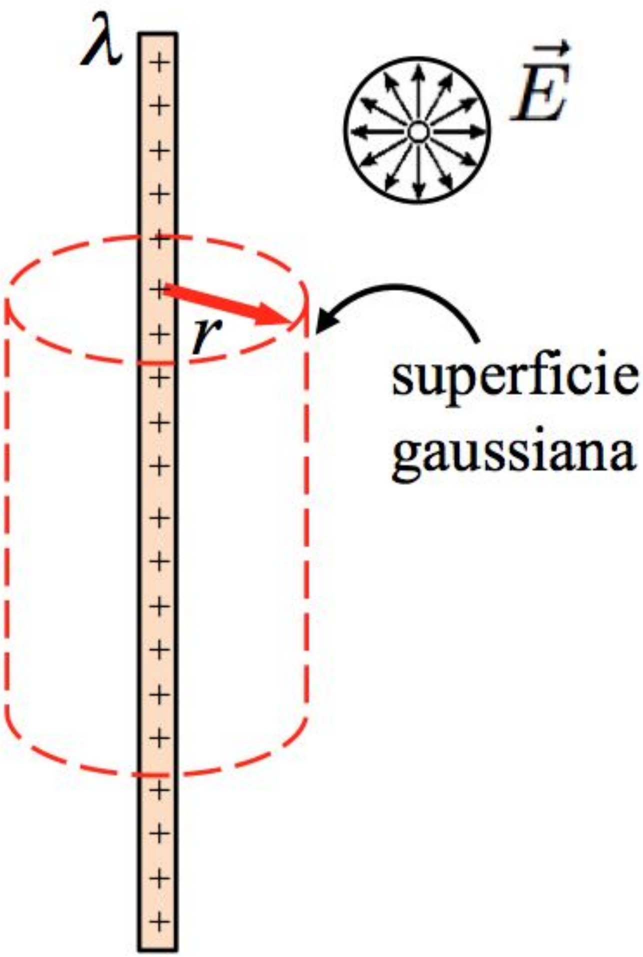
por otro lado, sabemos que el área de la superficie gaussiana es:

Y la carga que está encerrada en la superficie gaussiana es:

$$A = 2\pi r \ell$$

$$q_{\text{enc}} = \lambda \ell$$

2. Ley de Gauss



Reemplazando, tenemos:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$EA = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

Entonces, el campo eléctrico en la línea infinita es:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Y como sabemos que el campo es radial

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]}$$

UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

Paréntesis matemática, el operador Nabla

Nabla es un operador diferencial vectorial, cuya expresión dependerá del sistema coordenado en que se esté trabajando.

- Coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

- Coordenadas cilindricas:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss
Paréntesis matemática, el operador Nabla

- Gradiente: $\vec{\nabla} f$

El vector gradiente se define como un campo vectorial cuyas funciones coordenadas son las derivadas parciales del campo escalar, es decir:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

(vector)

- Divergencia: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Este mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre una superficie. Matemáticamente, se escribe como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned}$$

(escalar)

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

Paréntesis matemática, el operador Nabla

- Rotacional: $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

El rotacional o rotor es un operador vectorial sobre campos vectoriales los cuales muestran la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación en un punto.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \times \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} \right)$$

(vector)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y \right]\hat{\imath} - \left[\frac{\partial}{\partial x}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_x \right]\hat{\jmath} + \left[\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x \right]\hat{k}$$

- Laplaciano: $\nabla^2 f$

Es un operador diferencial elíptico de segundo orden

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(escalar)

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

Para unificar el conocimiento sobre los fenómenos electromagnéticos, James Maxwell reune un grupo de ecuaciones las cuales se pueden escribir en forma diferencial y en forma integral.

La forma integral de la ley de Gauss ya la conocemos, así que partiendo de ella tenemos:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

En matemática existe un teorema que permite transformar una integral cerrada de superficie en una integral de volumen, este teorema fue planteado por **Gauss-Ostrogradsky** y es conocido como el teorema de la divergencia. Sea G una función vectorial, se cumple:

$$\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV$$

Entonces:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

y asumiendo que

$$q_{enc} = \int\int\int_V \rho dV \quad \Rightarrow$$

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

En matemática existe un teorema que permite transformar una integral cerrada de superficie en una integral de volumen, este teorema fue planteado por **Gauss-Ostrogradsky** y es conocido como el teorema de la divergencia. Sea G una función vectorial, se cumple:

$$\int\int\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV = \frac{\int\int\int_V \rho dV}{\epsilon_0}$$

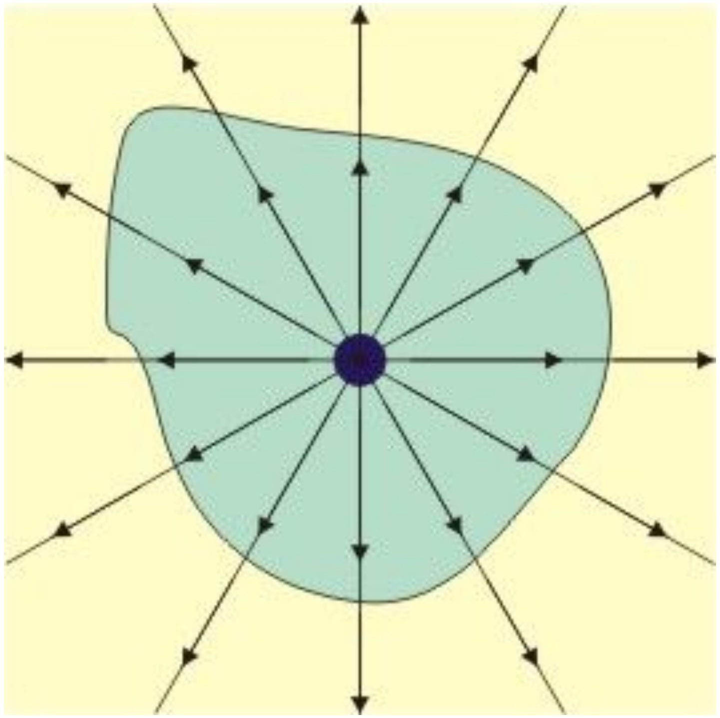
Siendo válido para cualquier volumen, los integrandos son iguales, por lo que finalmente

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Intuitivamente significa que el campo eléctrico diverge o sale desde la carga, lo que representa gráficamente como vectores que salen de la fuente que las genera en todas las direcciones. Por convención si el valor es positivo los vectores salen de la carga y si es negativo los vectores entran en la carga.



3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

Ejemplo: Para el campo eléctrico definido por

$$\vec{E} = kx^2\hat{\imath} + ky^2\hat{\jmath} + 10\hat{k}\ [\mathrm{N/C}]$$

Siendo k una constante positiva, determine la densidad de carga de dicha región.

3. Forma diferencial de la Ley de Gauss

Para determinar la densidad de carga de dicha región, tenemos que usar la forma diferencial de la ecuación de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (kx^2\hat{\imath} + ky^2\hat{\jmath} + 10\hat{k})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}kx^2 + \frac{\partial}{\partial y}ky^2 + \frac{\partial}{\partial z}10$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 2k(x+y)$$

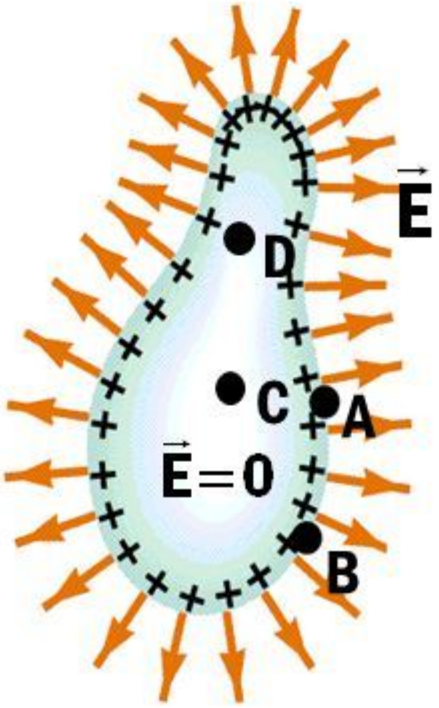
Finalmente:

$$\boxed{\rho = 2k\epsilon_0(x+y)\ [\mathrm{C/m}]}$$

4. Campo eléctrico en un conductor

Los conductores son materiales en los que las cargas se mueven libremente.

Al tener un conductor con carga q, estas cargas comenzará a distribuirse de tal forma que se minimice las fuerzas de repulsión y todas queden en reposo (electrostática). Quedando todas las cargas en la superficie del conductor.



Al no haber movimiento de carga, no existe un campo eléctrico, por lo que en el interior de un conductor el campo eléctrico es cero.

4. Campo eléctrico en un conductor

Entonces, si aplicamos la ley de Gauss:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

- Interior del conductor:

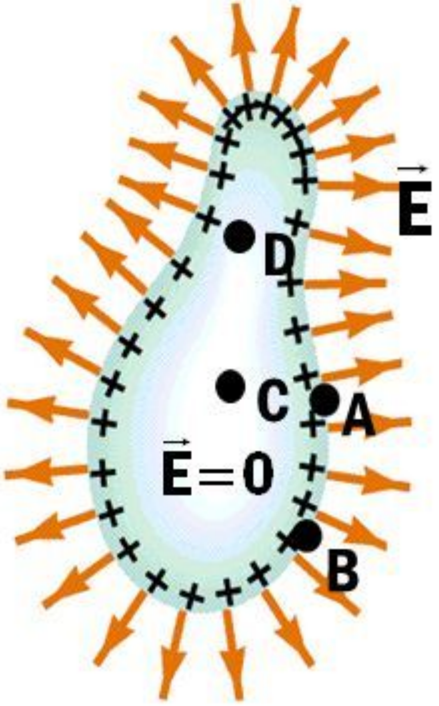
$$EA = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$0A = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{\text{enc}} = 0$$

- Exterior del conductor:

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0};\ q_{\text{enc}} = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Resumen

Flujo eléctrico

$$\boxed{\phi_E = EA\cos\theta}$$

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

$$\boxed{\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}}$$

Ley de Gauss

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$