Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Clase 3: El Método de coeficientes indeterminados**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

El Método de coeficientes indeterminados para sistemas no homogéneos

Dado el sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t), \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante de $n \times n$ y $\mathbf{F}$ es una función vectorial continua dada, sabemos que una solución general tiene la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t),$$

donde $\mathbf{x}_h(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$ es una solución general del sistema *homogéneo* asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo (**??**).

- Supondremos que el término no homogéneo $\mathbf{F}(t)$ es una combinación lineal de productos de polinomios, funciones exponenciales y senos y cosenos.
- El método de coeficientes indeterminados supone la *forma general* de una solución particular $\mathbf{x}_p(t)$ similar al término $\mathbf{F}(t)$.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}.$$

Solución

- Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

La ecuación caracterśtica de la matriz de los coeficientes $\mathbf{A}$ es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 - 9\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 7$$

Luego, los vectores propios son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema homogéneo es:

$$\mathbf{x}_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

- La matriz $\mathbf{F}(t)$ se puede escribir como

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

  Determinamos una solución particular del sistema no homogéneo de la misma forma

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

- Sustituimos en el sistema se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- De aquí se obtiene un sistema de 4 ecuaciones algebraicas con 4 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 6a_2 + b_2 + 6 = 0 \\ 4a_2 + 3b_2 - 10 = 0 \end{array} \right| \qquad \left. \begin{array}{l} 6a_1 + b_1 - a_2 = 0 \\ 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 = 0 \end{array} \right|$$

  Resolviendo se obtiene: $a_1 = -\frac{4}{7}$, $b_1 = \frac{10}{7}$, $a_2 = -2$ y $b_2 = 6$.

- Un vector solución particular es:

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{7} \\ \dfrac{10}{7} \end{pmatrix}$$

- La solución general del sistema no homogéneo en $(-\infty, \infty)$ es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{7} \\ \dfrac{10}{7} \end{pmatrix} .$$