Guía 6
Energía en capacitores y dieléctricos

1. Objetivos de aprendizaje

Esta guía es de soporte y apoyo al contenido de **Energía en capacitores y dieléctricos**.
Las capacidades que tienes que comprobar y desarrollar a través de esta guía son:

- Comprender adecuadamente **la relación** entre carga, potencial, campo eléctrico y energía almacenada en un capacitor en diferentes situaciones.
- Comprender el **motivo práctico de introducir un material dieléctrico** entre las placas de un condensador y calcular de forma correcta la capacitancia, carga, energía almacenada y campo eléctrico entre las placas con y sin dieléctrico.

2. Perspectiva y aplicaciones

La historia de los condensadores se remonta a octubre de 1745, cuando el alemán Ewald Georg Von Kleist, descubre el primer condensador , el que posteriormente fue conocido como *Leyden jar* o *botella de Leyden* . Lo curioso del experimento que llevó a este descubrimiento fue el hecho de que el propio cuerpo humano fue utilizado ¡como fuente de carga! (un modelo un poco tosco de un cuerpo humano en un circuito podría ser una resistencia y un capacitor en serie).
En sus orígenes la botella de Leyden consistía en un metal conductor que se introducía en una botella con agua. El metal era posteriormente conectado a a un generador electrostático (como el generador de Van de Graaff) cargado por las propias manos, probablemente de un ayudante , mientras la botella era sostenida por otro ayudante . El resultado de esto es que el agua (no pura sino ionizada) adquiere una carga neta negativa, el vidrio hace de dieléctrico, y la mano del ayudante es la otra “placa” con carga neta positiva. Luego desconectaban la botella del generador,y... ¿Cómo descubrieron que había “carga” almacenada en la botella?, tocando el conductor con la otra mano, electrocutándolos fuertemente, debido al paso de los electrones desde el agua hacia el cuerpo.
Este nuevo descubrimiento fue muy estimulante, y varias personas, entre ellas Benjamin Franklin experimentaron con estas botellas. De hecho este último, observó de forma independiente que era posible almacenar más energía si se conectaban botellas en paralelo.

¿Pero qué pasa actualmente con los condensadores?. Los condensadores están literalmente en todas partes, en tu computador, en tu teléfono, en el metro, en la micro, en la tele, en la radio, no hay prácticamente elemento eléctrico o electrónico que no contenga al menos un condensador.
El rol de los condensadores varía según la aplicación, en circuitos de potencia eléctrica se utiliza para contrarrestar la potencia inductiva de los motores de inducción, u otros elementos inductivos, que generan un desfase en la corriente disminuyendo el porcentaje útil de potencia resistiva. En los aparatos electrónicos se utilizan generalmente para almacenar energía eléctrica y que esta pueda ser utilizada en valles de energía. En cierta forma es posible hacer la analogía con los amortiguadores de una bicicleta o un autobús, los condensadores actúan muchas veces como los amortiguadores de los circuitos eléctricos.

Aplicaciones más modernas incluyen su uso como fuente de energía casi instantánea, con enormes baterías de condensadores, para alimentar láseres apuntados hacia una pequeña cápsula de no más de 10 mg de deuterio y tritio para comprimirlo y calentarlo a niveles tales que reacciones de fusión nuclear puedan ocurrir. Otra aplicación es en los autos eléctricos, no como batería principal, pero si como sistema de almacenamiento de energía secundario. Especialmente interesante es el uso de *supercondensadores*, que no son más que simples condensadores, solo que en vez de tener un dieléctrico entre sus placas, tienen un electrolito separado de las placas con membranas especiales.

Más importante ahora, y el tema que nos tiene aquí, es entender los conceptos básicos del funcionamiento de los condensadores, esperamos que esta guía, y los **problemas que debes hacer** te ayuden a ello, mientras mas problemas hagas, mejor entenderás, ¡mucho éxito!

3. Ideas Clave

Les invitamos a leer cada la definición formal de cada concepto, para luego aplicarlo resolviendo los problemas propuestos.
Todas las unidades utilizadas son del SI.
Recomendación: lee una vez toda la guía con atención, aunque no entiendas todo. Al terminar de leer, intenta hacer los problemas, apóyate en la guía y las referencias dadas según resuelves los problemas. No intentes entender todo solo leyendo, ni tampoco solo intentando resolver los problemas.
Lee cada problema con atención, **anota todas las propiedades y ecuaciones relevantes** y siempre **realiza un dibujo esquemático** de la situación propuesta.

3.1. Energía en capacitores

Debido a que en un capacitor existen dos superficies cargadas con signos contrarios, el sistema tiene asociada una energía potencial eléctrica, conviertiéndolo en un sistema capaz de almacenar energía. Si conectamos las dos superficies, la carga se moverá entre ellas a través del alambre conductor, debido a la diferencia de potencial que existía en un comienzo. En este proceso, las superficies se descargan, y se disipa la energía previamente almacenada.
El total de energía disipada al descargarse completamente las superficies, será igual al trabajo necesario

para cargar las superficies desde una carga $q = 0$ hasta $q = Q$. Este trabajo viene dado por:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \tag{1}$$

Este trabajo, se interpreta como energía potencial en el sistema capacitor (W↔U), donde utilizando la relación entre carga y diferencia de potencial $Q = C\Delta V$ se tiene que

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 \tag{2}$$

Este resultado es valido para cualquier tipo de capacitor, sea cual sea su geometría.
En la práctica los capacitores tienen un umbral para almacenar energía, ya que más allá de este valor, se produce una descarga eléctrica entre las superficies (lo que se estudiará en detalle en la siguiente sección).

Consideremos ahora que la energía asociada a los capacitores, esta relacionada con el campo eléctrico entre las superficies. ya que $\vec{\mathbf{E}} \propto \Delta V$. En el caso de un capacitor de placas paralelas se tiene que $\Delta V = Ed$. Calculando

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A d) E^2 \tag{3}$$

Y ya que el volumen entre las placas es Ad, se define la **densidad de energía eléctrica**

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tag{4}$$

Aunque esto se calculó para un capacitor de placas paralelas, es valido para cualquier fuente de campo eléctrico.

3.2. Capacitores con dieléctricos

Un dieléctrico es un material no conductor como el hule, el vidrio o el agua destilada. Aunque no lo parezca el agua pura, sin sales, es un muy buen aislante, son las sales que contiene las que la vuelven conductora de electricidad.
Cuando tenemos el sistema capacitor cargado , sin conexión a una batería, se tiene que el potencial asociado a las placas es $\Delta V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$. Ahora bien, con el dieléctrico entre las placas, sucede que este disminuye el campo eléctrico entre ellas.
Como sabemos, cuando tenemos un $\vec{\mathbf{E}}$ constante (como el que existe entre dos placas paralelas cargadas), el potencial es proporcional al campo, por lo que el hecho de colocar un dieléctrico, disminuirá también la diferencia de potencial ΔV (ver figura 1).
La relación entre los voltajes del capacitor, con y sin dieléctrico, es:

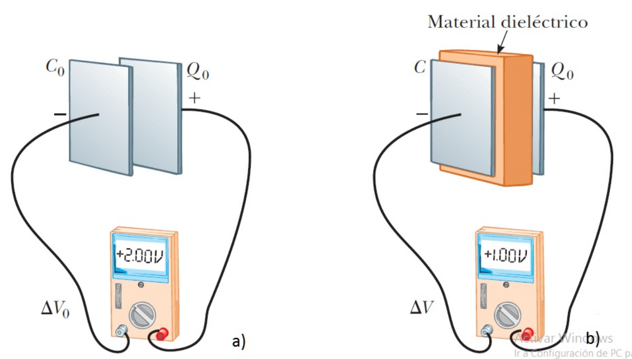

Figura 1: a) Capacitor sin dieléctrico b) Capacitor con dieléctrico

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa} \tag{5}$$

Donde ΔV es el potencial con el dieléctrico, ΔV_0 es el potencial del capacitor sin el dieléctrico, y κ es la constante dieléctrica, una cantidad adimensional $\kappa > 1$, que depende del material del que esté hecho el dieléctrico.
En la figura 2 (al final de la guía) se muestra una lista con los valores de κ para distintos materiales.
El proceso de colocar el dieléctrico entre las placas, no provoca un flujo o cambio en la carga Q_0 asociada del sistema aislado (siempre y cuando no apliquemos un potencial). De lo anterior no es difícil demostrar que la capacitancia aumenta con el dieléctrico y lo hace como

$$C = \kappa C_0 \tag{6}$$

Donde C es la capacitancia con el dieléctrico y C_0 es la capacitancia sin el dieléctrico. En el caso especial de las placas paralelas se tiene que

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{7}$$

Donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, A es el área de las placas y d es la distancia entre las placas.
Aunque se piense que se puede tener cualquier valor de capacitancia solamente variando d, la verdad es que se encuentra limitado, porque si las placas están muy cerca podría ocurrir una descarga eléctrica a través del dieléctrico . Además, existe un límite al cual se le puede aplicar un voltaje al capacitor, y este depende de un numero llamado **resistencia dieléctrica** (se mide en unidades de campo eléctrico). Si se supera esta barrera, el dieléctrico cederá y empezará a conducir. En la tabla al final de la guía, la segunda columna, están tabulados las resistencias dieléctricas para distintos aislantes (también se encuentra en la literatura como voltaje de ruptura o voltaje nominal).

4. Ejemplo

Condensador de placas paralelas.
Un condensador de placas paralelas de área A, tiene separación x entre ellas y cargas $+Q$ y $-Q$ en su superficie. El condensador es desconectado de la fuente de carga, por lo que la carga en cada placa permanece constante.
a) ¿Cuál es la energía total almacenada en el condensador? ,
b) Si las placas se separan una distancia adicional dx. ¿Cuál es el cambio en la energía almacenada? .
c) Si F es la fuerza con qué las placas se atraen mutuamente, el cambio en la energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ hecho en separar las placas. Encuentra una expresión para F.
d) Explica porqué F *no es igual* a QE donde E es el campo eléctrico entre las placas.
e) Suponga que el condensador se sumerge en agua destilada, y todos los parámetros se mantienen constantes incluidas la carga en las placas, ¿Cuál es la nueva fuerza entre las placas?, ¿es mayor o menor que antes? .

Solución:

a) La energía total es igual al trabajo necesario para cargar el condensador, que se puede calcular fácilmente:

$$E = W = \int_0^W dW = \int_0^Q v dq = \int_0^Q \frac{qdq}{C} = \frac{Q^2}{2C} \tag{8}$$

Como en un condensador de placas paralelas $C = \epsilon_0 A/x$ obtenemos que E = $xQ^2/2\epsilon_0 A$.

b) $E(x' + dx) - E(x) = dxQ^2/2\epsilon_0 A$

c) F = $Q^2/2\epsilon_0 A = QE/2$

d) Como se habla de un desplazamiento es necesario fijar un sistema de referencia. Tomando como origen del sistema de referencia el centro de masa de una de las placas, y el eje x como el eje que une el centro de masa de ambas placas, la segunda se desplaza dx. Como un cuerpo no puede ejercer fuerza sobre sí mismo, la única fuerza que actúa sobre esta placa es la del campo generado por la primera. Como el campo eléctrico entre las placas es $E = E_1 + E_2 = 2E_1$ tenemos que el campo que actúa sobre la placa que se desplaza es $E_1 = E/2$ lo que explica la diferencia.

e) Por un proceso similar se obtiene $E = xQ^2/2k\epsilon_0 A$, de donde $F = F_0/k$, como para el agua $k = 80$ se tiene que $F << F_0$ donde F_0 es la fuerza entre las placas en el aire.

5. Problemas

En estos problemas aproxima la dieléctrica del aire a la del vacío. Notar que a diferencia del vacío el aire si se puede convertir en conductor. La permitividad del vacío es $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right]$.

1. Un capacitor de $3\mu F$ se conecta a una batería de $12V$.
   a)¿ cuánta energía se almacena en el capacitor? ,
   b) Si el capacitor hubiera estado conectado a una batería de $6V$, ¿cuánta energía hubiera almacenado? ,
   c) en el caso de $6V$, Calcular la energía y capacitancia cuando se coloca un dieléctrico de Nylon y Titanio de estroncio (ver figura 2).

   R: a) $216\mu J$, b) $54\mu J$, c) Nylon: $\Delta U = 15{,}9\mu J$, $C = 10{,}2\mu F$; Titanio de estroncio: $\Delta U = 0{,}23\mu J$, $C = 0{,}7mF$

2. ¿Cuál es la carga máxima que se puede suministrar a un capacitor con aire entre las placas antes de que falle, si el área de cada una de las placas es de $5cm^2$? b) hacer el mismo calculo con poliestireno.

   R: a) 13.3nC b) 272 nC

3. Un capacitor en el aire tiene una separación entre sus placas de $1{,}5cm$ y una superficie de placas de $25cm^2$. Las placas están cargadas a una diferencia de potencial de de $250V$ y han sido desconectadas de la fuente de energía. El capacitor se sumerge en agua destilada. Determine:
   a) la carga en las placas antes y después de la inmersión,
   b) la capacitancia y la diferencia de potencial después de la inmersión, y
   c) el cambio en la energía del capacitor.

   R: a) La carga es la misma antes y después de la inmersión $Q = 369[pC]$, b) $C_f = 118[pF]$ y $(\Delta V)_f = 3{,}12V$; c) $\Delta U = -45{,}5[nJ]$

4. Un condensador de placas paralelas tiene una capacidad $C = 5{,}8\ \mu F$ en el aire con una temperatura de 290 K y 1 atm con una separación entre los platos de $5\ mm$ y una diferencia de potencial de $400\ V$ entre sus placas. Calcula la densidad de energía de la región entre las placas, en unidades de J/m^3. Asuma que las propiedades dieléctricas del aire a temperatura y presión ambiente se asemejan lo suficiente a las propiedades dieléctricas del vacío como para poder despreciar las diferencias.

   R: $u = 2{,}83 \times 10^{-2} J/m^3$

5. Cuando un capacitor de aire de 360-nF (1 nF = 10^{-9} F) es conectado a una fuente de energía, la energía almacenada en el capacitor es de $1{,}85 \times 10^{-5}$ J. Mientras el capacitor está conectado a la fuente de energía, es insertado un bloque dieléctrico que ocupa totalmente el volumen entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada por $2{,}32 \times 10^{-5}$ J. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? (b)¿ Cuál es la constante dieléctrica del bloque? .

   R: Notar que la clave que ahora es el voltaje, no la carga, lo que se mantiene constante. a) $V \approx 10{,}14$ V b) $\mathbf{k} \approx 2{,}25$

6. **Potencial en células humanas**.
Algunas paredes celulares del cuerpo humano tienen una capa de carga negativa en la cara interior y una capa de carga positiva de igual magnitud en la cara exterior. Suponga que la densidad de carga de cada superficie es de $\pm 0{,}5 \times 10^{-3}\ C/m^2$ y que el interior de la pared tiene propiedades dieléctricas semejantes a las del aire. La pared celular es de $5nm$ de grosor, determine:
a) El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en el interior de la pared entre las dos capas de carga,
b) La diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula. ¿El interior o el exterior están a un mayor potencial? .
c) Una típica célula humana tiene un volumen de $10^{-16}\ m^3$. Estime el total de energía eléctrica almacenada en la pared de una célula de este tamaño. (Pista: Asume que la célula es esférica y calcula el volumen de la pared, incluye el volumen de la pared en el volumen total dado para la célula).
d) En realidad, el material en el interior de la célula no es tan semejante al aire como para despreciar la diferencia, el tejido en el interior tiene una constante dieléctrica aproximada de $5{,}4$. Repita las partes (a) y (b) con este valor. Notar que es posible despreciar la diferencia de carga total entre las paredes interior y exterior de la célula.

R: la clave es que el radio de las capas circulares de la célula está implícitamente dado en el volumen total de la célula en el apartado c), también que es posible aproximar $r_e \approx r_i$.
a) $\mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$, $r_i = 2874{,}4$ nm $\implies$ $\mathbf{E} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}4{,}666 \times 10^{-4}$ N/C. Otra forma válida es notar que $r_i/r \approx 1$, luego $\mathbf{E} \approx -\hat{\mathbf{r}}\rho/\epsilon_0 = 5{,}65 \times 10^7$ N/C, increíblemente fuerte.
b) $\Delta V \approx 0{,}282$V. El exteiror está a un mayor potencial.
c) $E = 2\rho\pi r_i^2 V \approx 7{,}32 \times 10^{-15}$ J = 45669 eV.
d) a)$1{,}046 \times 10^7$ N/C, b) $52{,}2$ mV.

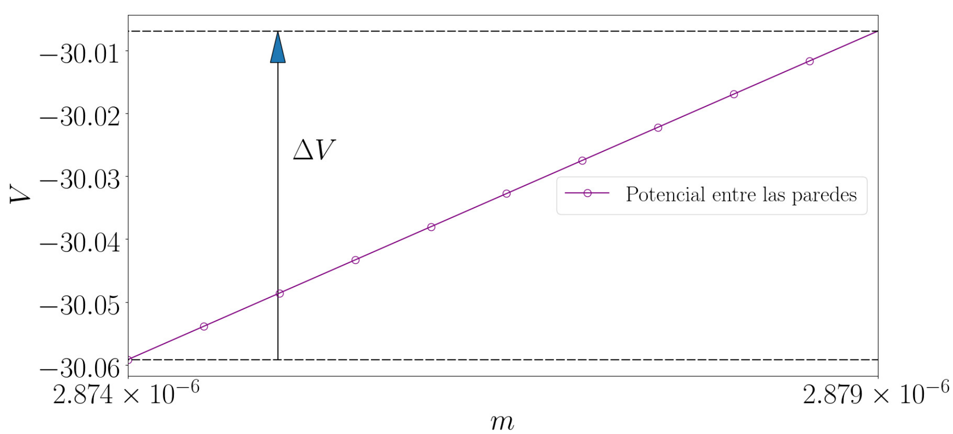

Figura 2: . Potencial entre las paredes de la célula.

Constantes dieléctricas y resistencias dieléctricas aproximadas de diversos materiales a temperatura ambiente

Material	Constante dieléctrica κ	Intensidad dieléctrica[a] (10^6 V/m)
Aceite de silicón	2.5	15
Agua	80	—
Aire (seco)	1.000 59	3
Baquelita	4.9	24
Cloruro de polivinilo	3.4	40
Cuarzo fundido	3.78	8
Hule de neopreno	6.7	12
Mylar	3.2	7
Nylon	3.4	14
Papel	3.7	16
Papel impregnado en parafina	3.5	11
Poliestireno	2.56	24
Porcelana	6	12
Teflón	2.1	60
Titanato de estroncio	233	8
Vacío	1.000 00	—
Vidrio pirex	5.6	14

[a] La resistencia dieléctrica es igual al campo eléctrico máximo que puede existir en un dieléctrico sin que se rompa el aislamiento. Observe que estos valores dependen en gran medida de si existen o no impurezas o defectos en los materiales.

Figura 3: Tabla con los valores de la constante dieléctrica κ y su resistencia electrica para distintos materiales

Referencias

[1] Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr., Física para ciencia e ingeniería con física moderna, Vol 2, 7^{th} edición, 2009. De aqui se baso en las secciones 26.4 y 26.5 .

[2] **Sears & Zemansky's** *University Physics with modern physics*, 13th edition. Secciones 24.1,24.3,24.4. (todas las demas secciones del capítulo no son obligatorias pero si recomendadas)

[3] Kovalenko, Y. V.; Pureskin, D. N.; Savkin, V. Y.; Senkov, D. V. & Yakovlev, D. V. Charging and control

system of a high-energy capacitor bank for pulse experiments on controlled nuclear fusion. *Instruments and Experimental Techniques*, *Pleiades Publishing Ltd*, 2016, 59, 802-807

[4] Horn, M.; MacLeod, J.; Liu, M.; Webb, J. & Motta, N. Supercapacitors: A new source of power for electric cars? *Economic Analysis and Policy, Elsevier BV*, 2019, 61, 93-103