UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

GUÍA 3

Ley de Gauss

Objetivos de aprendizaje
Esta guía sirve de soporte para estudiar la Ley de Gauss. Las capacidades que tienes que comprobar o desarrollar a través de esta guía son:

- Expresar correctamente el Flujo de Campo Eléctrico.
- Expresar correctamente la Ley de Gauss para distribuciones de carga altamente simétricas.
- Aplicar correctamente los principios fundamentales de Equilibrio electrostático.

Esta guía contiene un resumen de la materia, y los ejercicios esenciales que tienes que saber resolver.
Para profundizar tus conocimientos, puedes apoyarte en las secciones 24.1, 24.2, 24.3 y 24.4 del libro "Física para ciencias e ingeniería" de Serway & Jewett

Ideas Claves

1. Flujo de Campo Eléctrico

Corresponde al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie. Si el campo es uniforme y forma un ángulo θ con la normal a la superficie de área A, entonces el flujo ϕ_E a través de la superficie es:

$$\phi_E = EA\cos\theta$$

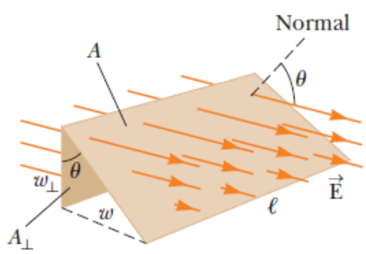


Figura 1: Líneas de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, atravesando un área A.

Para un caso general, donde el campo eléctrico no es uniforme, el flujo eléctrico a través de una superficie es:

$$\phi_E = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

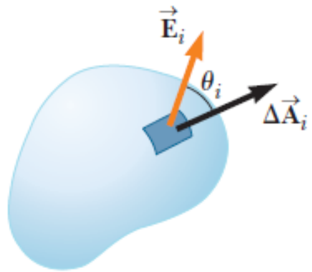


Figura 2: Pequeño elemento de área superficial, en un campo eléctrico.

2. Ley de Gauss

La Ley de Gauss dice que el flujo eléctrico neto ϕ_E a través de cualquier **superficie gaussiana** cerrada es igual a la carga neta q_{enc} dentro de la superficie, dividida entre ε_0:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Usando la Ley de Gauss podemos calcular el campo eléctrico debido a varias distribuciones de cargas simétricas.

¡Recuerde! Las superficies gaussianas no son reales. Son superficies imaginarias que nos permiten simplificar la integral de superficie aprovechando así las simetrías.

Densidad de Carga:

$\rho = Q/V \rightarrow$ Densidad volumétrica de carga.

$\sigma = Q/A \rightarrow$ Densidad superficial de carga.

$\lambda = Q/L \rightarrow$ Densidad lineal de carga.

La **carga** se define como:

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

3. Equilibrio Electrostático

Un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

- El campo eléctrico es cero en todas partes dentro del conductor, ya sea que el conductor sea sólido o hueco.
- Si un conductor aislado tiene una carga, la carga reside sobre su superficie.
- El campo eléctrico justo afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud σ/ε_0, donde σ es la densidad de carga superficial en dicho punto.
- Sobre un conductor con forma irregular, la densidad de carga superficial es mayor en posiciones donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño.

Ejemplo

Cálculo de campo eléctrico a partir de la ley de Gauss
La Figura 3 muestra una sección de una varilla conductora de radio $R_1 = 1{,}3\ mm$ y longitud $L = 11\ m$ dentro de una cáscara cilíndrica conductora coaxial de paredes delgadas y radio $R_2 = 10\ R_1$ y la misma longitud L. La carga neta en la varilla es $Q_1 = +\ 3{,}4\ \times\ 10^{-12}\ C$; y en el cascarón $Q_2 = -\ 2Q_1$.

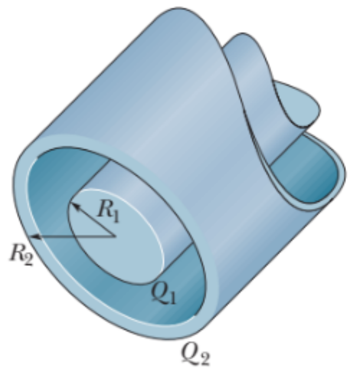


Figura 3

a) ¿Qué magnitud y dirección (radialmente hacia adentro o hacia afuera) tiene el campo $\vec{E}$ a una distancia radial $r = 2R_2$?

b) ¿Qué magnitud y dirección tiene el campo $\vec{E}$ a una distancia radial $r = 5R_1$?

c) ¿Cuál es la carga en la superficie interior y exterior de la cáscara?

Solución:

Las densidades de carga tanto dentro del cilindro conductor como de la cáscara son uniformes y descuidamos el efecto de franja. La simetría se puede utilizar para mostrar que el campo eléctrico es radial, tanto entre el cilindro y la cáscara como fuera de la cáscara. Es cero, por supuesto dentro del cilindro y dentro de la cáscara.

Consideramos la superficie gaussiana como un cilindro de longitud L, coaxial con los cilindros dados, y de radio r. El flujo a través de esta superficie es $\phi = 2\pi\mathrm{rLE}$, donde E es la magnitud del campo en la superficie gaussiana. Podemos ignorar cualquier flujo a través de los extremos. La Ley de Gauss produce $q_{enc} = \varepsilon_0\phi = 2\pi\mathrm{r}\varepsilon_0 LE$, donde q_{enc} es la carga encerrada por la superficie gaussiana.

a) En este caso, tomamos el radio de nuestro cilindro gaussiano como

$$r = 2R_2 = 20R_1 = (20)(1{,}3 \times 10^{-3}\ m) = 2{,}6 \times 10^{-2}\ m$$

La carga encerrada es

$$q_{enc} = Q_1 + Q_2 = -Q_1 = -3{,}4 \times 10^{-12}\ C$$

Luego, a partir de la Ley de Gauss, tenemos:

$$E = \frac{q_{enc}}{2\pi\varepsilon_0 Lr} = \frac{-3{,}4 \times 10^{-12} C}{2\pi(8{,}85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)(11\ m)(2{,}6 \times 10^{-2}\ m)} = -0{,}214\ N/C$$

Entonces **el módulo del campo es** $|\boldsymbol{E}| = \mathbf{0{,}214}\ \boldsymbol{N/C}$

El **signo negativo en** $\boldsymbol{E}$ indica que **el campo apunta hacia adentro**.

b) Para $r = 5R_1$, la carga encerrada por la superficie gaussiana es

$$q_{enc} = Q_1 = 3{,}4 \times 10^{-12}\ C$$

Luego, a partir de la Ley de Gauss, tenemos:

$$E = \frac{q_{enc}}{2\pi\varepsilon_0 Lr} = \frac{3{,}4 \times 10^{-12} C}{2\pi(8{,}85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)(11\ m)(5 \times 1{,}3 \times 10^{-3}\ m)} = 0{,}855\ N/C$$

Entonces **el módulo del campo es** $|\boldsymbol{E}| = \mathbf{0{,}855}\ \boldsymbol{N/C}$

El **signo positivo en** $\boldsymbol{E}$ indica que **el campo apunta hacia afuera**.

c) Consideramos una superficie gaussiana cilíndrica cuyo radio envuelve al propio cascarón. El campo eléctrico es cero en todos los puntos de la superficie, ya que cualquier campo dentro de un material conductor conduciría a un flujo de corriente (y, por lo tanto, a una situación diferente a la electrostática que consideramos aquí), por lo que **el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es cero** y **la carga neta**, por Ley de Gaus, **dentro de él es cero.**

Por otro lado, dado que la varilla central tiene carga Q_1, **la superficie interna del cascarón debe tener carga** $\boldsymbol{q_{enc}} = -\boldsymbol{Q_1} = -\mathbf{3{,}4} \times \mathbf{10^{-12}}\boldsymbol{C}$**.**

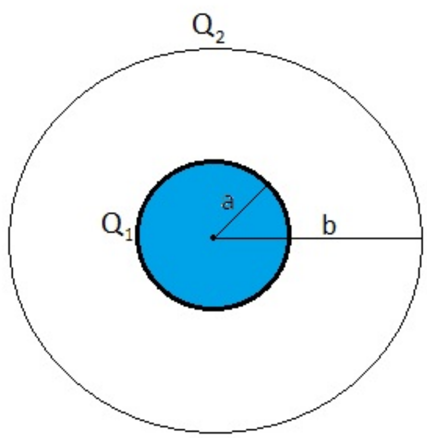
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Ejercicios

Ejercicio 1 *
Una esfera hueca no conductora sin carga, con un radio de $10\ cm$, rodea una carga de $10\ \mu C$ localizada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. Una broca de radio $1\ mm$ es alineada a lo largo del eje z y se hace una perforación en la esfera. Calcule el flujo eléctrico a través de la perforación.

Resp: $\phi_E = 28{,}2\ \left[\frac{Nm^2}{C}\right]$

Ejercicio 2 **
Consideremos dos esferas concéntricas conductoras. La esfera interior es maciza de radio a con carga Q_1 y la esfera exterior es hueca (cascarón esférico) de radio b con carga Q_2, tal como indica la figura.



Usando la Ley de Gauss, encuentre:

a) El campo eléctrico para $r < a$
b) El campo eléctrico para $a < r < b$
c) El campo eléctrico para $r > a$

Resp: *a)* $\vec{E} = 0$,

b) $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$,

$c)\,\vec{E} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Ejercicio 3***

Un filamento recto con carga uniforme de $7\ m$ de longitud, tiene una carga positiva total de $2\ \mu C$. Un cilindro de cartón sin carga, de $2\ cm$ de longitud y $10\ cm$ de radio, rodea el filamento en su parte central, en el eje del cilindro.
A partir de aproximaciones razonables:

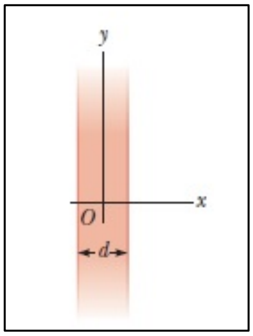
a) Usando la Ley de Gauss calcule el campo eléctrico en la superficie del cilindro de cartón.
b) El flujo eléctrico total a través del cilindro de cartón.

Resp: a) $E = 51{,}4\,\hat{r}\ \left[\frac{kN}{C}\right]$

b) $\phi_E = 6{,}46 \times 10^2\ \left[\frac{Nm^2}{C}\right]$

Ejercicio 4 **

Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme $\rho = Cx^2$, donde x se mide a partir del centro de la placa como se muestra en la figura, y C es constante. La placa es infinita en las direcciones y y z.



Deduzca expresiones para el campo eléctrico en:

a) Las regiones externas ($|x|\ >\ d/2$).
b) La región interna de la placa ($-d/2\ < x < d/2$).

Resp: a) $\vec{E} = \frac{Cd^3}{24\varepsilon_0}\hat{\imath}\qquad para\ x > d/2$

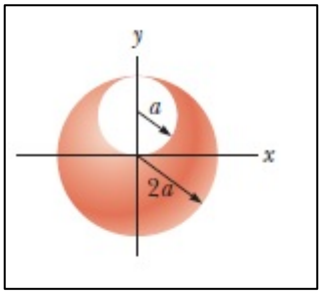
$\vec{E} = -\frac{Cd^3}{24\varepsilon_0}\hat{\imath} \quad para\ x < -d/2$

b) $\vec{E} = \frac{Cx^3}{3\varepsilon_0}\hat{\imath} \quad para\ x > 0$

$\vec{E} = -\frac{Cx^3}{3\varepsilon_0}\hat{\imath} \quad para\ x < 0$

Ejercicio 5 ***

Una esfera de radio $2a$ está hecha de un material no conductor con una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Suponga que el material no afecta al campo eléctrico. Se efectúa en seguida una cavidad de radio a en la esfera, como se muestra en la figura

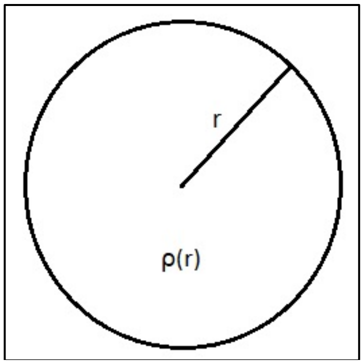


Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $E_x = 0$ y $E_y = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$

Ejercicio 6 ***

Una distribución no uniforme, pero esféricamente simétrica de carga, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ dado por:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(1 - 4r/3R) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$



Donde ρ_0 es una constante positiva.

a) Encuentre la carga total de esta distribución de carga volumétrica.
b) Encuentre el campo eléctrico para $r > R$
c) Encuentre el campo eléctrico para $r < R$

Resp: a) $Q_{total} = 0$

b) $\vec{E} = 0$

c) $\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r}{R}\right]\hat{r}$

BIBLIOGRAFÍA.

Esta guía fue inspirada de los libros siguientes.

1. R. A. Serway, J. W. Jewett Jr., *Física para Ciencias e Ingenierías*, Thomson, 6th edición, 2005.
2. H.D Young, R.A. Freedman, F.W Sears, M.W. Zemansky.*Sears e Zemansky Física III: electromagnetismo*. Pearson, 2004.
3. R.W, Chabay. and B.A., Sherwood, *Matter and interactions*. John Wiley & Sons,2015