Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de 2do orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

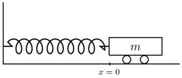
- **Vibraciones en sistemas mecánicos.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Vibraciones en sistemas mecánicos

Aparecen cuando se perturba un sistema físico en equilibrio que luego queda sujeto a fuerzas que tienden a restaurar el equilibrio.

1.- Vibraciones armónicas simples no amortiguadas. Consideremos un carro de masa *m* sujeta por un resorte a un muro.



El muelle no ejerce fuerza cuando el carro está en su posición de equilibrio, $x = 0$. Pero si se desplaza una distancia x, entonces el muelle ejerce una fuerza restauradora *opuesta a la dirección del alargamiento y con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento* (Ley de Hooke):

$$F_s = -kx\,,\ k > 0\,.$$

La constante k se llama constante de rigidez del muelle.

Vibraciones en sistemas mecánicos

Si aplicamos la Segunda Ley de Newton (Fuerza total = masa . aceleración) obtenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

La ecuación característica es

$$p^2 + \frac{k}{m} = 0\,,$$

y luego la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Si en el instante inicial $t = 0$, el carro se lleva a la posición $x = x_0$ y desde allí se suelta sin velocidad inicial, tenemos las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \qquad \text{y} \qquad v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0\,,$$

y obtenemos $c_1 = x_0$ y $c_2 = 0$. Luego tenemos la solución

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Vibraciones en sistemas mecánicos

El gráfico es presentado en la siguiente figura

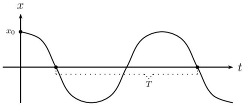


Figure: Gráfico de $x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

La *amplitud* de la vibración es x_0, el *período* (tiempo requerido para completar un *ciclo*) es $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y la frecuencia de la vibración (número de ciclos por unidad de tiempo) es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

2.- Vibraciones amortiguadas. En este caso se agrega el efecto de una fuerza de amortiguamiento F_d, debida a la viscosidad del medio (aire, agua, aceite, etc.), también *opuesta a la dirección del alargamiento y con una magnitud directamente proporcional al valor de la velocidad del alargamiento*:

$$F_d = -c\,\frac{dx}{dt}\,, \quad c > 0\,, \qquad c:\ \text{resistencia del medio}\,.$$

Tenemos entonces la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d\,, \qquad \text{o bién}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

La ecuación característica es

$$p^2 + \frac{c}{m}p + \frac{k}{m} = 0\,,$$

que tiene raíces

$$p_1, p_2 \;=\; -\frac{c}{2m} \;\pm\; \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \;-\; \frac{k}{m}}\,.$$

Vibraciones en sistemas mecánicos

A) Vibraciones Sobreamortiguadas. Caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$ ($c > 2\sqrt{km}$).

Entonces p_1, p_2 son números negativos distintos y la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}.$$

Bajo las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = \frac{x_0}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}\right).$$

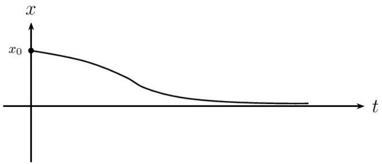


Figure: Gráfico de $x(t) = \frac{x_0}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}\right)$

B) Vibraciones críticamente amortiguadas. En este caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ (es decir, $c = 2\sqrt{km}$).

Aquí $p_1 = p_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$ y la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}.$$

Al imponer las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = x_0(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

cuyo gráfico es del mismo tipo que la figura anterior. Luego no hay vibración y el carro tiende a ir a su posición de equilibrio.

Vibraciones en sistemas mecánicos

C) Vibraciones Subamortiguadas. Ahora $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$ (es decir, $c < 2\sqrt{km}$). Tenemos

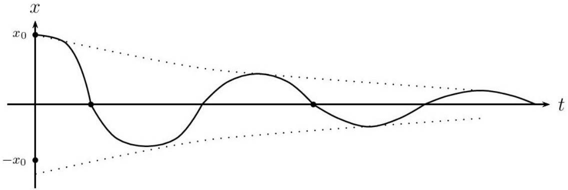
$$p_1, p_2 = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2},$$

y la solución general es

$$x(t) = e^{-b\,t}\left[c_1 \cos(\alpha\, t) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha\, t)\right],$$

donde $b = \frac{c}{2m}$ y $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$.
Con las condiciones $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = \frac{x_0}{\alpha} e^{-b\,t}\left[\alpha \cos(\alpha\, t) + b \operatorname{sen}(\alpha\, t)\right].$$



2.- Vibraciones forzadas. Si agregamos una fuerza externa $F_e = f(t)$ que actúa sobre el carro. Tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e \,,$$

lo que implica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t)\,.$$

Un caso importante es cuando la fuerza externa es periódica

$$f(t) = F_0\cos(wt)\,.$$

En ese caso la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)\,.$$

Vibraciones en sistemas mecánicos

Usaremos el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular. Si iw no es raíz de la ecuación característica, buscamos una solución del tipo

$$x_p(t) = A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t)\,.$$

Tenemos las derivadas

$$x_p'(t) = w(A\cos(wt) - B\mathrm{sen}(w(t))\,, \qquad x_p''(t) = -w^2(A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t))\,,$$

y reemplazando en nuestra ecuación multiplicada por m, obtenemos

$$\begin{aligned} F_0\cos(wt) \quad &= \quad k(A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t)) + cw(A\cos(wt) - B\mathrm{sen}(w(t)) \\ &\quad\ -mw^2(A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t))\,. \end{aligned}$$

Luego las constantes A y B deben verificar

$$\left\{ \begin{array}{rcl} wcA + (k - mw^2)B & = & F_0 \\ (k - mw^2)A - wcB & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Por lo tanto

$$A = \frac{wcF_0}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2} \qquad B = \frac{F_0(k - mw^2)}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}\,,$$

y

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}\left[wc\mathrm{sen}(wt) + (k - mw^2)\cos(wt)\right]\,.$$

Vibraciones en sistemas mecánicos

Caso importante: Resonancia. Consideremos el caso anterior cuando la constante de amortiguación c es nula y iw es raíz de la ecuación característica (es decir $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

Debemos buscar solución particular de ecuación no-homogénea de la forma

$$x_p(t) = C\,t\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\,t\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

Calculando la primera y segunda derivada de $x_p(t)$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$C = 0 \qquad \text{y} \qquad D = \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} ,$$

y por lo tanto

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\,t\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

Resonancia

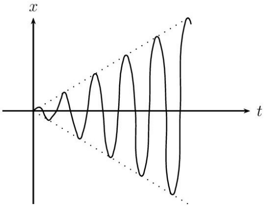


Figure: Gráfico de $x_p(t) = \dfrac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

De esta forma la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right).$$

El fenómeno que describimos se conoce como **resonancia** que ocurre cuando la **frecuencia externa** w es igual a la **frecuencia natural** del sistema masa-resorte $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, es decir, $w = \sqrt{k/m}$.

Sistema de unidades

Sistema de unidades

Sistema	Masa	g aceleración	tiempo	Fuerza	distancia
Internacional (SI)	kg	$9,8[m/s^2]$	seg	Newton [N]	m
Cegesimal (CGS)	g	$980[cm/s^2]$	seg	Dina	cm
Inglés	slugs	$32[pie/s^2]$	seg	Libra fuerza [lbf]	1pie=12 pulgadas

Ejercicio: Un cuerpo con una masa $0,1kg$ estira un resorte $0,2m$ hasta llegar a la posición de equilibrio. A continuación, se tira el cuerpo 1m debajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de $\sqrt{2}m/seg$ dirigida hacia abajo. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación y externas, determine:

- la ecuación del movimiento de la masa junto con su amplitud, periodo y frecuencia natural.
- ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio?.

Considere $g = 10m/seg^2$.

Solución: Como estamos en el caso de una vibración simple no amortiguada, tenemos la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,,$$

cuya solución general es

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar k observamos que la masa de $0.1kg$ estira el resorte $l_0 = 0,2m$. Empleando la ley de Hooke en la posición de equilibrio, se tiene

$$mg = kl_0 \quad \Longrightarrow \quad k = 5\,,$$

lo que implica $k = 5\,[kg/seg^2]$, así

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,.$$

Luego

$$x(t) = c_1 \cos\left(5\sqrt{2}\;t\right) \;+\; c_2 \mathrm{sen}\left(5\sqrt{2}\;t\right)\;.$$

Imponiendo nuestras condiciones iniciales son $x(0) = 1m$ y $x'(0) = \sqrt{2}m/seg$, tenemos

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad x(0) \;=\; c_1\,, \\ \sqrt{2} \quad &= \quad x'(0) \;=\; 5\sqrt{2}c_2\,, \end{aligned}$$

lo que implica $c_1 = 1$ y $c_2 = \frac{1}{5}$. Por consiguiente, la ecuación del movimiento de la masa es

$$x(t) \;=\; \cos\left(5\sqrt{2}\;t\right) \;+\; \frac{1}{5}\mathrm{sen}\left(5\sqrt{2}\;t\right)\;.$$

Para encontrar la amplitud de las oscilaciones debemos introducir el **ángulo de fase**, que se define por

$$\sin(\phi) = \frac{c_1}{A} \qquad \cos(\phi) = \frac{c_2}{A}, \qquad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Usando esto la solución la podemos escribir de la forma

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = A\frac{c_1}{A}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + A\frac{c_2}{A}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\\
&= A\sin(\phi)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + A\cos(\phi)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\\
&= A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right).
\end{aligned}$$

En nuestro caso la amplitud de las oscilaciones es

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5} = 1,0198.$$

Podemos calcular el ángulo de fase, notar que $\tan(\phi) = c_1/c_2 = 5$, entonces $\phi = \arctan(5) = 1,3734$.

La solución queda

$$x(t) = \frac{\sqrt{26}}{5} \sin\left(5\sqrt{2}\ t + 1,3734\right).$$

El período es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{5}} = 0,2\sqrt{2}\pi,$$

y la frecuencia de la vibración

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5}{0,1}} = 5\frac{\sqrt{2}}{2\pi}.$$

El tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio verifica

$$5\sqrt{2}\ \bar{t} + \phi = \pi \quad \Longrightarrow \quad \bar{t} = \frac{\pi - \phi}{5\sqrt{2}} = 0,25seg.$$