Ejercicios Resueltos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 3y \\ y' &= -x + 4y \end{aligned}$$

Solución El sistema puede ser escrito en forma de vector de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 1$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & -3 \\ -1 & 4-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)^t$ como el vector propio asociado a λ_1 y $\mathbf{v}_2 = (1, 3)^t$ el asociado a λ_2. De esta forma la solución del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre la solución del sistema:

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

Solución Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -1$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 4 \\ -1 & -3-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que los autovalores son repetidos, solamente se puede encontrar un vector propio asociado con el método anterior. El vector escogido es $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)^t$. Para encontrar el segundo vector propio se debe resolver el sistema anterior igualado al vector $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 4 \\ -1 & -3-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El vector resultante es:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1-2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Como el vector $\mathbf{v}_2$ contiene al vector $\mathbf{v}_1$ estos no son linealmente independientes. Debido a esto, se deben separar los vectores como se hizo en el paso anterior para escribir la solución de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

3. Encuentre la solución del sistema diferencial:

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

Solución Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 1+i$ y $\lambda_2 = 1-i$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & -1 \\ 1 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que los vectores propios son complejos, no existe mucha diferencia en utilizar cualquiera de los 2 valores propios. Por lo anterior se debe resolver solamente con un valor propio, en este caso se escogerá $\lambda = 1+i$.
Se escoge $\mathbf{v} = (i,1)^t$ como el vector propio. Este vector posee en realidad 2 vectores linealmente independientes asociados, esto se ve de manera más clara cuando se escribe la solución de la forma:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^t \left(\cos(t) + i\sin(t)\right).$$

Si se agrupan los términos, la solución queda como:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} i\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + i\sin(t) \end{pmatrix} e^t$$

Las partes reales e imaginaria son en realidad los 2 vectores propios linealmente independientes, de esta forma la solución es la siguiente:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

4. Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de una partícula de masa m y carga q que se mueve en un campo magnético uniforme B perpendicular al plano XY están dadas por el sistema:

$$x'' = wy' \quad ; \quad y'' = -wx'$$

$$x(0) = C \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = -wC$$

   (a) Resuelva el sistema

   (b) Muestre que la trayectoria de la particula es una circunferencia. Determine el radio de la circunferencia.

Solución El sistema puede ser escrito en forma de vector de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} -\lambda & w \\ -w & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + w^2 = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = wi$ y $\lambda_2 = -wi$. Al igual que en el caso anterior se debe resolver con solo un valor propio, en este caso se utilizará el positivo

$$\begin{pmatrix} -\lambda & w \\ -w & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v} = (-i, 1)^t$ como el vector propio asociado a λ De esta forma, al escribir la solución se obtiene:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(wi)t} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(wt) + i \sin(wt))$$

Si se agrupan los terminos, la solución queda como:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -i\cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) + i\sin(t) \end{pmatrix}$$

Dando como solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = C_1 \begin{pmatrix} \sin(wt) \\ \cos(wt) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos(wt) \\ \sin(wt) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_1 \sin(wt) - C_2 \cos(wt) \\ y'(t) &= C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt) \end{aligned}$$

Debido a que la expresión anterior corresponde a la primera derivada de la solución, se debe integrar

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-C_1}{w} \cos(wt) - \frac{C_2}{w} \sin(wt) + C_3 \\ y(t) &= \frac{C_1}{w} \sin(wt) - \frac{C_2}{w} \cos(wt) + C_4 \end{aligned}$$

Al utilizar todas las condiciones iniciales se llega a que las constantes asociadas tienen los siguientes valores $C_1 = -wc, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0$. Dando como solución al problema:

$$x(t) = C\cos(wt) \tag{1}$$
$$y(t) = -C\sin(wt) \tag{2}$$

Para comprobar si es una circunferencia, se debe recordar la forma canónica de una circunferencia en el plano carteciano $x^2 + y^2 = R^2$. Notar que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= C^2\cos^2(wt) + C^2\sin^2(wt) \\ &= C^2(\cos^2(wt) + \sin^2(wt)) \\ &= C^2 \end{aligned}$$

Luego, queda demostrado que es una circunferencia de radio C.

5. Dado el siguiente sistema

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine la solución homogénea asociada al sistema.

   (b) Determine la solución particular del sistema.

Solución: (a) Resolvamos primero el sistema homogéneo. Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_i & 2 \\ 3 & -1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (2, 1)^t$ como el vector propio asociado a λ_1 y $\mathbf{v}_2 = (1, -3)^t$ el asociado a λ_2. De esta forma la solución del sistema homogéneo es:

$$\mathbf{X}_h(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Para encontrar una solución particular del sistema no homogéneo, usando coeficiente indeterminado, se propone

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} A\cos(t) \\ C\cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B\sin(t) \\ D\sin(t) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema se obtiene

$$A = \frac{-11}{65}, \quad B = \frac{-3}{65}, \quad C = \frac{41}{130}, \quad D = \frac{23}{130}$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{-11}{65}\cos(t) \\ \frac{41}{130}\cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-3}{65}\sin(t) \\ \frac{23}{130}\sin(t) \end{pmatrix}$$

Luego la solución general de nuestro sistema es

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} \frac{-11}{65}\cos(t) \\ \frac{41}{130}\cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-3}{65}\sin(t) \\ \frac{23}{130}\sin(t) \end{pmatrix}$$

6. Dado el siguiente sistema

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine la solución homogénea asociada al sistema.

(b) Determine la solución particular del sistema.

Solución (a) Resolvamos primero el sistema homogéneo. Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 4+3i$ y $\lambda_2 = 4-3i$. Al igual que en los casos 3 y 4 se debe resolver con solo un valor propio, en este caso se utilizará el positivo

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v} = (i, 1)^t$ como el vector propio asociado a λ De esta forma, al escribir la solución se obtiene:

$$\mathbf{X}_(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(4+3i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} (\cos(3t) + i\sin(3t))$$

Si se agrupan los terminos, la solución queda como:

$$\mathbf{X}_h(t) = \begin{pmatrix} i\cos(3t) - \sin(3t) \\ \cos(3t) + i\sin(3t) \end{pmatrix} e^t$$

Dando como solución homogenea del sistema:

$$\mathbf{X}_h(t) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

Para encontrar una solución particular del sistema no homogéneo, usando coeficiente indeterminado, se propone

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema se obtiene

$$A = \frac{-18}{25} \quad B = \frac{-49}{25}$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{-18}{25} \\ \frac{-49}{25} \end{pmatrix}$$

Luego la solución general de nuestro sistema es

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-18}{25} \\ \frac{-49}{25} \end{pmatrix}$$

7. Encuentre la solución de

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

Solución Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} -0.5-\lambda & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25-\lambda & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+0.5)(\lambda+0.25)(\lambda+0.2) = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.25$ y $\lambda_3 = -0.2$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} -0.5-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (3, -6, 5)^t$ como el vector propio asociado a λ_1 y $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 5)^t$ el asociado a λ_2 y $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)^t$. De esta forma la solución del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-0.5t} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 e^{-0.25t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 e^{-0.2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Resuelva el siguiente sistema

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t)$$

Solución Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)^2 = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = -2$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda_i & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda_i & 0 \\ -1 & -3 & -3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (1,1,-2)^t$ como el vector propio asociado a λ_1 y $\mathbf{v}_2 = (-1,0,1)^t$ el asociado a λ_2 y se construye el vector 3 utilzando el vector 2 de manera similar a como se hizo en el ejercicio 2 $\mathbf{v}_3 = (-1,0,0)^t$. De esta forma la solución del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

9. Encuentre la solución del sistema

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

Solución Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)^2 = 0.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -1$. El vector propio $\mathbf{v}_i$ asociado a λ_i se obtiene resolviendo

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda_i & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{v}_1 = (1,-1,1)^t$ como el vector propio asociado a λ_1. Es importante destacar que en este caso no se debe formar un vector 3 ya que el valor propio 2 tiene asociado 2 vectores linealmente independientes los cuales son $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^t$ y $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)^t$. De esta forma la solución del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$