Transformada de Laplace

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 1: Definición y propiedades.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Definición y propiedades

Definición: *Sea* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, *entonces se dice que la integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt$$

es la **Transformada de Laplace** *de* f *y se denota* $\mathcal{L}(f(t))(s)$, *siempre que la integral converja para algunos valores de* s. Notar que $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ es una función de s.

Teorema: $\mathcal{L}$ *es lineal, es decir dadas* $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que* $F(s)$ *y* $G(s)$ *existen,* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = a\mathcal{L}(f(t))(s) + b\mathcal{L}(g(t))(s)$$

Ejemplo 1.: $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s} \qquad \forall s > 0.$

En efecto si $s > 0$

$$\int_0^R e^{-st} dt = -\frac{1}{s}(e^{-sR} - 1)\,,$$

lo que implica

$$\mathcal{L}(1)(s) = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-st} dt = \lim_{R \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-Rs} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s} \qquad \forall s > 0\,.$$

Observe que $\mathcal{L}(1)(s)$ no existe para $s \leq 0$. Así $\mathcal{L}(1)(s)$ sólo está definida para $s > 0$.

Ejemplos del cálculo de T.L.

Ejemplo 2.: $\mathcal{L}(t)(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad \forall s > 0.$

Integrando por partes y usando $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-st} = 0$, si $s > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t)(s) &= \left.\frac{-te^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s^2} \qquad \forall s > 0\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.: $\mathcal{L}(e^t)(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad \forall s > 1.$

Para $R > 0$

$$\int_0^R e^{-st}e^t\,dt = \int_0^R e^{(1-s)t}\,dt = \frac{1}{1-s}e^{(1-s)t}\Big|_0^R = \frac{1}{1-s}\left[e^{(1-s)R} - 1\right].$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-st}e^t\,dt = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s}\lim_{R\to+\infty} e^{(1-s)R} = \frac{1}{s-1} + 0 \quad \forall s > 1\,.$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s-1} \qquad \forall s > 1\,.$$

Transformadas de algunas funciones

Transformadas de algunas funciones básicas:

1. $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0$
2. $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, \ldots \forall s > 0$
3. $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \forall s > a$
4. $\mathcal{L}(\cos(kt))(s) = \frac{s}{s^2+k^2}, \forall s > 0$
5. $\mathcal{L}(\sin(kt))(s) = \frac{k}{s^2+k^2}, \forall s > 0$
6. $\mathcal{L}(\cosh(kt))(s) = \frac{s}{s^2-k^2}, \forall s > |k|$
7. $\mathcal{L}(\sinh(kt))(s) = \frac{k}{s^2-k^2}, \forall s > |k|$

Definición y propiedades

Definición: *Sea* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Decimos que* f *es de* **orden exponencial** b *(orden exp.* b*) si existe* $M > 0$ *tal que* $|f(t)| \leq Me^{bt} \quad \forall t \geq 0$.

Teorema (Existencia de la T.L.): *Sea* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continua (continua por tramos) y de orden exp.* b*. Entonces* $\mathcal{L}(f(t))(s)$ *existe* $\forall s > b$*.*

Demostración: Estudiaremos la convergencia absoluta que implica la convergencia, entonces es suficiente probar que la integral

$$\int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt$$

existe para $s > b$. Como f es de orden exponencial, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{bt}$ implica que

$$\int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} |e^{-st} Me^{bt}| dt = M \int_0^{\infty} e^{-(s-b)t} dt = \frac{M}{s-b}$$

si $s > b$. Hemos mostrado que la integral impropia permanece acotada luego existe para $s > b$.

Observación: Notar que

$$|F(s)| = |\mathcal{L}(f(t))(s)| \leq \frac{M}{s-b}$$

luego

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0.$$

Definición y propiedades

Teorema (Unicidad de la T.L.): *Si* $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *son continuas y* $\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(g(t))(s)\ \forall s \geq s_0$, *entonces* $f(t) = g(t)\ \forall t \geq 0$.

Usando este teorema podemos definir el operador inverso $\mathcal{L}^{-1}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = f(t) \Longleftrightarrow \mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)\,.$$

Observaciones: $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal; es decir, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s))(t) = a\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) + b\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t)\,.$$

Transformadas inversas de algunas funciones:

1. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$
2. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{n!}{s^{n+1}}) = t^n,\ n = 1, 2, \ldots$
3. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-a}) = e^{at}$
4. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+k^2}) = \cos(kt)$
5. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{k}{s^2+k^2}) = \sin(kt)$
6. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2-k^2}) = \cosh(kt)$
7. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{k}{s^2-k^2}) = \sinh(kt)$

Ejemplo:

Calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)(t).$$

Usando la linealidad de la transformada inversa se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)(t) &= \frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)(t) \\
&= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t)-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)(t) \\
&= \frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,(2t).
\end{aligned}$$

Propiedades

Los siguientes resultados nos permiten calcula la T.L. de $e^{at}f(t)$ y $t^n f(t)$ conociendo $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$.

Teorema: Primer Teorema de Traslación
Si $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-a) = F(s-a),$$

o equivalentemente si $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = f(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a))(t) = e^{at}f(t).$$

Demostración: Es inmediata de la definición de T.L.

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = \mathcal{L}(f(t))(s-a).$$

Propiedades

Ejemplos:

- $$\mathcal{L}(e^{6t}t^3)(s) = \mathcal{L}(t^3)(s-6) = \frac{6}{(s-6)^4},$$

- $$\mathcal{L}(e^{-2t}\cos(4t))(s) = \mathcal{L}(\cos(4t))(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^2+16},$$

- $$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2-9}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^3}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+1)^2-9}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^t t^2 + \frac{1}{3}e^{-t}\sinh(3t).
\end{aligned}$$

Propiedades

Teorema: Derivadas de transformadas
Si $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$ *y* $n = 1, 2, \dots,$ *entonces*

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Notar que, para el caso de la primera derivada

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}(t\, f(t))dt = -\mathcal{L}(t\, f(t))(s).$$

Ejemplos

- $$\begin{aligned}\mathcal{L}(t\ \sin(3t))(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin(3t))(s)\\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{L}(t\, e^{-t}\cos(t))(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{-t}\cos(t))(s)\\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) = \frac{(s+1)^2-1}{((s+1)^2+1)^2}\end{aligned}$$