GUÍA 9

Magnetismo y Fuerza Magnética sobre conductores

Objetivos de aprendizaje
Esta guía sirve de soporte para estudiar magnetismo y fuerza magnética. Las capacidades que tienes que comprobar o desarrollar a través de esta guía son:

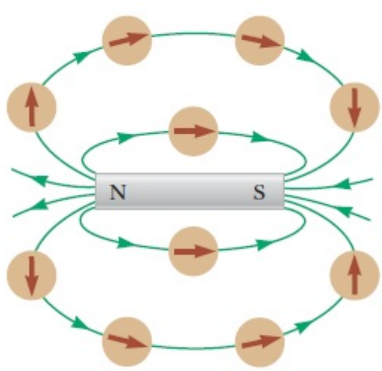
- Expresar la fuerza magnética.
- Aplicar el concepto de fuerza magnética en distinto tipo de trayectoria.

Esta guía contiene un resumen de la materia, y los ejercicios esenciales que tienes que saber resolver.
Para profundizar tus conocimientos, puedes apoyarte en las secciones 29.1, 29.2, 29.3 y 29.4 del libro "Física para ciencias e ingeniería" vol. 2 de Serway & Jewett.

Ideas Claves

Análisis de modelo: partícula en un campo magnético

Cuando estudiamos la electricidad, descubrimos la interacción entre objetos cargados en función de campos eléctricos. Cualquier carga eléctrica está rodeada por un campo eléctrico. Pero además de contener un campo eléctrico, el espacio que rodea a cualquier carga eléctrica en movimiento también contiene un campo magnético.
La dirección del campo magnético, denotado por $\vec{B}$ en cualquier sitio es la dirección a la cual apunta la aguja de una brújula colocada de dicha posición. Igual que en el caso del campo eléctrico, es posible representar el campo magnético gráficamente utilizando líneas de campo magnético.



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Figura 1: Podemos trazar las líneas de campo magnético, generado por un imán, siguiendo la aguja de una brújula.

Podemos cuantificar el campo magnético $\vec{B}$ usando el modelo de una partícula en un campo. La existencia de un campo magnético en algún punto en el espacio puede determinarse midiendo la magnitud de la fuerza magnética F_b que ejerce el campo sobre una partícula ubicada en ese punto. Si realizamos un experimento colocando una partícula cargada q en el campo magnético, nos encontraremos con los siguientes resultados, que son similares a los de los experimentos con las fuerzas eléctricas:

- La fuerza magnética es proporcional a la carga q de la partícula.
- La fuerza magnética ejercida sobre una carga negativa tiene dirección opuesta a la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva que se mueva en la misma dirección.
- La fuerza magnética es proporcional a la magnitud del vector de campo magnético $\vec{B}$.

También encontramos los siguientes resultados, que son totalmente diferentes de los experimentos con las fuerzas eléctricas:

- La fuerza magnética es proporcional a la rapidez v de la partícula.
- Si el vector velocidad forma un ángulo theta con el campo magnético, la magnitud de la fuerza magnética es proporcional al seno de θ.
- Cuando una partícula cargada se mueve paralela al vector de campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre ella es igual a cero.
- Cuando una partícula cargada se mueve de forma no paralela al vector de campo magnético, la fuerza magnética actúa en dirección perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{B}$, es decir, la fuerza magnética es perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

Estos resultados muestran que la fuerza magnética sobre una partícula es más complicada que la fuerza eléctrica. La fuerza magnética es distintiva porque depende de la velocidad de la partícula y porque su dirección es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$.
A pesar de este complicado comportamiento, estas observaciones se pueden resumir en una expresión para la fuerza magnética:

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La cual, por definición del producto vectorial, es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$.

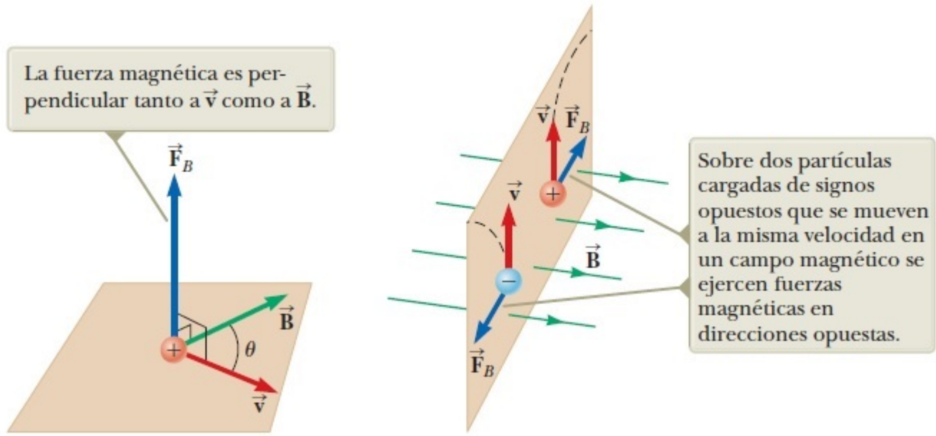


Figura 2: Dirección de la fuerza magnética $\overrightarrow{F_B}$ que actúa sobre una partícula cargada moviéndose con velocidad $\vec{v}$, en presencia de un campo $\vec{B}$ (izquierda). Fuerza magnética sobre una carga positiva y negativa.

A continuación, veremos la regla de la mano derecha para determinar la dirección del producto cruz $\vec{v} \times \vec{B}$ y la dirección de $\overrightarrow{F_B}$. Como se ve en la figura, dirija los cuatro dedos de su mano derecha a lo largo de la dirección de $\vec{v}$, manteniendo la palma de cara a $\vec{B}$, y cierre los dedos hacia $\vec{B}$. El pulgar extendido, que forma un ángulo recto con los dedos, apunta en la dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$. Ya que $\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B}$, $\overrightarrow{F_B}$ queda en la dirección del pulgar si q es positiva y en dirección opuesta si q es negativa.

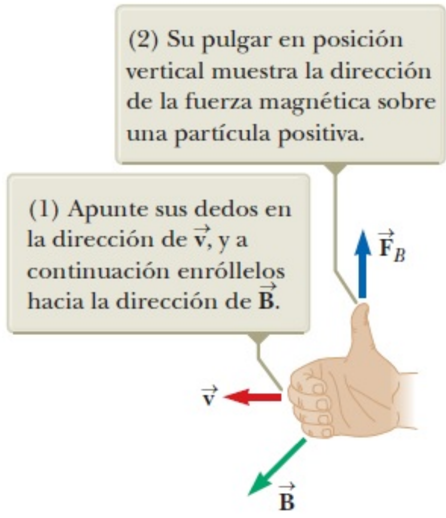


Figura 3: Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre una carga q y que se mueve a velocidad $\vec{v}$. La fuerza magnética va en la dirección en que apunta el dedo pulgar.

La magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada es

$$F_B = |q|vB\ sen\ \theta$$

Donde θ es el menor ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Por esta expresión puede ver que F_B será igual a cero cuando $\vec{v}$ es paralela o antiparalela a $\vec{B}$ $(\theta = 0\ o\ 180°)$, y es máxima cuando $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{B}$ $(\theta = 90°)$.

Comparemos las diferencias importantes entre las versiones eléctrica y magnética del modelo de partícula en un campo:

- El vector fuerza eléctrica actúa a lo largo de la dirección del campo eléctrico, en tanto que el vector fuerza magnética actúa perpendicularmente al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada sin importar si esta se encuentra en movimiento, en tanto que la fuerza magnética actúa sobre una partícula cargada sólo cuando está en movimiento.
- La fuerza eléctrica efectúa trabajo al desplazar una partícula cargada, en tanto que la fuerza magnética asociada con un campo magnético estable no efectúa trabajo cuando se desplaza una partícula, debido a que la fuerza es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación.

Con base en este último enunciado y también con el teorema trabajo-energía cinética, se concluir que la energía cinética de una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético no puede ser modificada solo por el campo magnético. El campo magnético puede modificar la dirección del vector velocidad, pero no puede cambiar la rapidez ni la energía cinética de la partícula.

La unidad del SI del campo magnético es newton por coulomb-metro por segundo, o tesla (T):

$$1\,T = 1\frac{N}{C \cdot m/s}$$

Dado que 1 ampere se define como 1 coulomb por segundo.

$$1\,T = 1\frac{N}{A \cdot m}$$

El gauss (G), es una unidad no perteneciente al SI, que se usa comúnmente para el campo magnético, se relaciona con el tesla mediante la conversión $1\,T = 10^4\,G$.

Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente

Si ejercemos una fuerza sobre una partícula cargada cuando esta se mueve a través de un campo magnético, no debería sorprendernos que un alambre que transporta una corriente también experimente una fuerza cuando se le coloca en un campo magnético. La corriente es un conjunto de muchas partículas cargadas en movimiento; de ahí que la fuerza resultante ejercida por el campo sobre el alambre sea la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre todas las partículas cargadas que conforman la corriente. La fuerza ejercida sobre las partículas se transmite al alambre cuando colisionan con los átomos que constituyen el alambre.

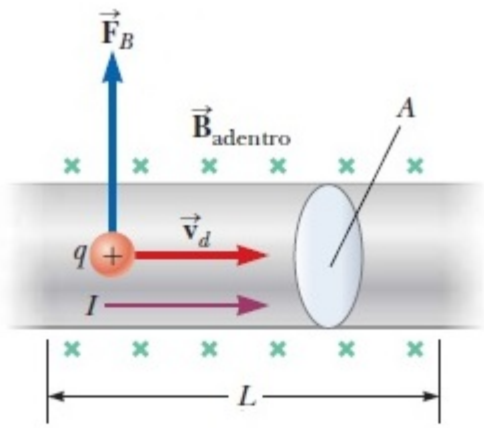


Figura 4: Segmento de alambre que conduce corriente en un campo magnético $\vec{B}$.

Consideremos un segmento recto de alambre de longitud L y de área de sección transversal A, que conduce una corriente I bajo un campo magnético uniforme $\vec{B}$, como vemos en la figura. Como vimos en el modelo de una partícula en un campo magnético, la fuerza magnética ejercida sobre una carga q que se mueve con una velocidad de arrastre $\vec{v_d}$, está dada por $q\vec{v_d} \times \vec{B}$. Para encontrar la fuerza total que actúa sobre el alambre, multiplicamos la fuerza ejercida sobre una carga por el número de cargas en el segmento. Como el volumen del segmento es AL, el número de cargas en el segmento es igual a nAL, donde n es el número de cargas móviles por unidad de volumen. Entonces, la fuerza magnética total sobre el alambre de longitud L es

$$\overrightarrow{F_B} = (\, q\overrightarrow{v_d} \times \vec{B})nAL$$

Sabemos que la corriente en el alambre es igual a $I = nqv_dA$ (ver Guía 7), por lo tanto,

$$\overrightarrow{F_B} = \ I\,\vec{L} \times \vec{B}$$

Donde $\vec{L}$ es un vector que apunta en la dirección de la corriente I y tiene una magnitud igual a la longitud L del segmento. Debemos tener en cuenta que esta expresión solo se aplica a un segmento de alambre recto y en un campo magnético uniforme.

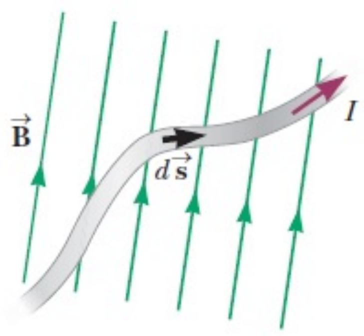


Figura 5: Segmento de alambre en forma arbitraria que lleva una corriente I en un campo magnético $\vec{B}$, experimenta una fuerza magnética.

Consideremos por otro lado, un alambre de forma arbitraria, de sección transversal uniforme en un campo magnético, como en la figura. De la expresión anterior concluimos que la fuerza magnética que se ejerce sobre un pequeño segmento de vector de longitud $d\vec{s}$, en presencia de un campo $\vec{B}$ es

$$d\overrightarrow{F_B} = I\, d\vec{s} \times \vec{B}$$

Donde $d\overrightarrow{F_B}$ está dirigido hacia fuera de la página debido a las direcciones de $\vec{B}$ y de $d\vec{s}$ en la figura.

Para calcular la fuerza total $\overrightarrow{F_B}$ que actúa sobre el alambre de la figura, integramos la última expresión por toda la longitud del alambre:

$$\overrightarrow{F_B} = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B}$$

De a y b son los puntos extremos del alambre. Cuando integramos, la magnitud del campo magnético y la dirección del campo en relación con el vector $\vec{ds}$ puede variar en diferentes puntos.

Ejemplo 1: Partículas cargadas en un campo magnético

La partícula A con carga q y masa m_A y la partícula B con carga 2q y masa m_B, son aceleradas desde el reposo por una diferencia de potencial ΔV y posteriormente desviadas por un campo magnético uniforme en trayectorias semicirculares. Los radios de las trayectorias de la partícula A y B son R y 2R, respectivamente. La dirección del campo magnético es perpendicular a la velocidad de la partícula. ¿Cuál es su relación de masa? **(ver guía complementaria)**

Solución:

La energía cinética ganada por las cargas es igual a

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

cuyos rendimientos

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

Las cargas se mueven en semicírculos, ya que la fuerza magnética apunta radialmente hacia adentro y proporciona la fuente de la fuerza centrípeta:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

El radio del círculo se puede obtener fácilmente como:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}}$$

lo que muestra que r es proporcional a $(m/q)^{1/2}$. La relación de masa se puede obtener a partir de

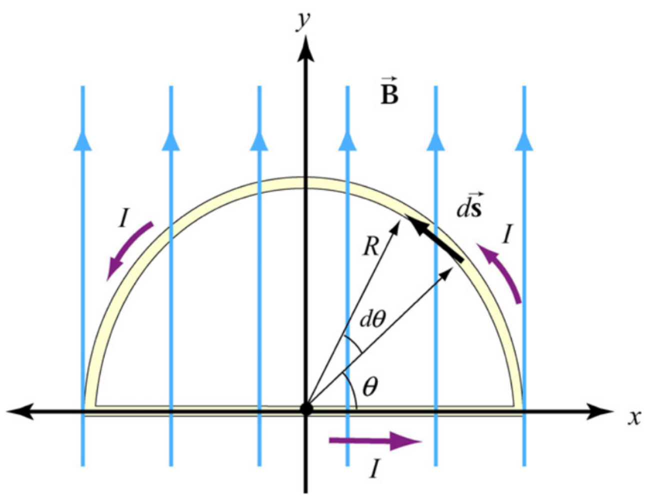
$$\frac{r_A}{r_B}=\frac{(m_A/q_A)^{1/2}}{(m_B/q_B)^{1/2}}\Longrightarrow\frac{R}{2R}=\frac{(m_A/q)^{1/2}}{(m_B/2q)^{1/2}}$$

lo que da

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{1}{8}$$

Ejemplo 2: Fuerza magnética en un bucle semicircular

Considere un bucle semicircular cerrado que se encuentra en el plano xy que transporta una corriente I en sentido antihorario, como se muestra en la figura



Se aplica un campo magnético uniforme que apunta en la dirección $+y$. Encuentre la fuerza magnética que actúa sobre el segmento recto y el arco semicircular.

Solución:

Sea $\vec{B}=B\hat{j}$ y $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ las fuerzas que actúan sobre el segmento recto y las partes semicirculares, respectivamente. Usando la ecuación $d\vec{F_1}=Id\vec{s}\times\vec{B}$ y observando que la longitud del segmento recto es $2R$, la fuerza magnética es

$$\overrightarrow{F_1}=I(2R\hat{\imath})\times(B\hat{\jmath})=2IRB\hat{k}$$

Donde $\hat{k}$ se dirige fuera de la página.

Para evaluar $\overrightarrow{F_2}$, primero notamos que el elemento $d\vec{s} = ds\hat{\theta} = Rd\theta(-sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{\jmath})$. La fuerza que actúa sobre el elemento de longitud $d\vec{s}$ es

$$d\vec{F}_2 = Id\vec{s} \times \vec{B} = Rd\theta(-sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{\jmath}) \times B\hat{\jmath} = -IBRsin\theta d\theta\hat{k}$$

Aquí vemos que $d\vec{F}_2$ apunta a la pagina, integrando todo el arco semicircular, tenemos

$$\vec{F}_2 = -IBR\hat{k}\int_0^{\pi} sin\theta d\theta = -2IBR\hat{k}$$

Por tanto, la fuerza neta que actúa sobre el alambre semicircular es

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Esto es consistente con nuestra afirmación anterior de que la fuerza magnética neta que actúa sobre un circuito cerrado portador de corriente debe ser cero.

Ejercicios

Ejercicio 1

Un protón que se mueve a una velocidad de $4 \times 10^6\ m/s$ a través de un campo magnético de $1.7\,T$, experimenta una fuerza magnética de magnitud $8.2 \times 10^{-13}\ N$. ¿Cuál es el ángulo que forma la velocidad del protón y el campo?

Resp: $\theta = 48{,}9°$

Ejercicio 2

Un protón se mueve con una velocidad $\vec{v} = \left(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + \hat{k}\right)\ m/s$ en una región donde el campo magnético tiene un valor $\vec{B} = \left(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right)\ T$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que experimenta esta carga?

Resp: $\left|\vec{F}_B\right| = 13{,}2 \times 10^{-19}\ [N]$

Para realizar los ejercicios 3,4,5 y 6, ver Guía complementaria.

Ejercicio 3

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Una partícula con carga q y energía cinética K, viaja en un campo magnético uniforme de magnitud B. Si la partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R, encuentre las expresiones de:

a) Su rapidez.
b) Su masa.

Resp: a) $v = \frac{2K}{qBR}$

b) $m = \frac{q^2B^2R^2}{2K}$

Ejercicio 4

Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante de magnitud $1\,mT$. El momento angular del electrón en relación con el centro del circulo es $4 \times 10^{-25}\ [kgm^2/s]$. Determine:

a) El radio de la trayectoria circular.
b) La rapidez del electrón.

Resp: a) $R = 5\ [cm]$

b) $v = 8{,}78 \times 10^6\ [m/s]$

Ejercicio 5

Un ciclotrón **(ver Figura 5, guía complementaria)**, concebido para acelerar protones, tiene un radio exterior de $0{,}35\,m$. Los protones son emitidos, prácticamente desde el reposo, por una fuente ubicada en el centro y son acelerados por una diferencia de potencial de $600\,V$ cada vez que atraviesan el espacio existente entre las *"des".* Estas están instaladas entre los polos de un electroimán de campo de $0{,}8\,T$.

a) Determine la frecuencia del ciclotrón para los protones en este ciclotrón.
b) Determine la rapidez a la cual los protones salen del ciclotrón.
c) Su energía cinética máxima.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

d) ¿Cuántas revoluciones efectúa un protón en el ciclotrón?
e) ¿Durante qué intervalo de tiempo se acelera un protón?

Resp: a) $\omega = 7{,}66 \times 10^{7}\ [rad/s]$

b) $v = 2{,}68 \times 10^{7}\ [m/s]$

c) $K = 3{,}76 \times 10^{6}\ [eV]$

d) $3{,}13 \times 10^{3}\ revoluciones$

e) $\Delta t = 2{,}57 \times 10^{-4}\ [s]$

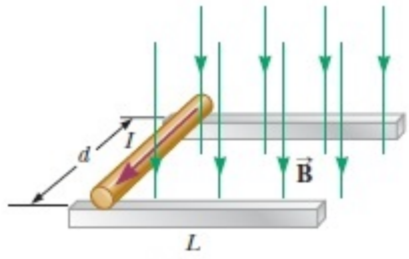
Ejercicio 6

Considere el espectrómetro de masas que se muestra esquemáticamente en la **figura 4 de la guía complementaria**. La magnitud del campo eléctrico entre las placas del selector de velocidad es $2{,}5 \times 10^{3}\ V/m$, y el campo magnético, tanto en el selector de velocidad como en la cámara de deflexión, tiene una magnitud de $0{,}035\ T$. Calcule el radio de la trayectoria para un ion de una sola carga con una masa $m = 2{,}18 \times 10^{-26}\ kg$.

Resp: $r = 0{,}278\ m$.

Ejercicio 7

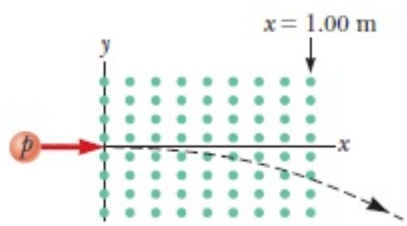
Una varilla con $0.72\ kg$ de masa y un radio de $6\ cm$, descansa sobre dos rieles paralelos (ver figura) que están separados por una distancia $d = 12\ cm$ y tiene una longitud $L = 45\ cm$ de largo. La varilla conduce una corriente $I = 48\ A$ en la dirección que se muestra y rueda por los rieles sin resbalar. Perpendicularmente a la varilla y a los rieles existe un campo magnético uniforme de magnitud $0{,}24\ T$. Si parte del reposo, ¿Cuál será la rapidez de la varilla cuando se salga de los rieles?



Resp: $v = 1{,}07\ [m/s]$.

Ejercicio 8

Protones con una energía de $5.0\, MeV$ $(1eV = 1.6 \times 10^{-19}\, J)$ se mueven en la dirección positiva de x entran en un campo magnético $\vec{B} = 0{,}05\, \hat{k}\ T$ dirigido hacia fuera del plano de la página que se extiende desde $x = 0\, m$ hasta $x = 1\, m$, como se observa en la figura.



a) Ignore los efectos relativistas y determine el ángulo α entre el vector de velocidad inicial del haz de protones y el vector de velocidad después que el haz sale del campo.
b) Calcule la componente y del momento de los protones cuando salen del campo magnético.

Resp: a) $\alpha = 8{,}9°$

b) $P_y = -8 \times 10^6\ [kg \cdot m/s]$

BIBLIOGRAFÍA.

Esta guía fue inspirada de los libros siguientes.

1. R. A. Serway, J. W. Jewett Jr., *Física para Ciencias e Ingenierías*, Thomson, 6th edición, 2005.

2. H.D Young, R.A. Freedman, F.W Sears, M.W. Zemansky.*Sears e Zemansky física III: electromagnetismo*. Pearson, 2004.