UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
ECUACIONES DIFERENCIALES Y MÉTODOS NUMÉRICOS

Guía 7: Aplicaciones de Ecuaciones Ordinarias de Segundo Orden

Ecuaciones importantes:

I. **Movimiento de una partícula.**

Se busca dar solución a una ecuación de la forma

$$m\ddot{x} = F$$

Donde m corresponde a la masa de esta partícula, $\ddot{x}$ es su aceleración y F es la fuerza aplicada sobre esta.

(1.1) Movimiento rectilíneo.

Se pueden identificar 2 tipos de fuerzas que actúan frente a estos movimientos:

1) la fuerza gravitacional mg.

2) una fuerza de resistencia k, proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa.

1.1.1. Partícula proyectada verticalmente hacia arriba.
Reemplazando en nuestra ecuación inicial se obtiene $m\ddot{x} = -mg - mk\dot{x}^2$ con ambas fuerzas negativas, ya que disminuyen la aceleración de nuestra partícula.

1.1.2. Partícula proyectada verticalmente hacia abajo.
Reemplazando en nuestra solución inicial, se obtiene $m\ddot{x} = mg - mk\dot{x}^2$ donde la fuerza de resistencia disminuye su aceleración mientras que la gravitatoria la aumenta.

(1.2) Lanzamiento de proyectiles (sin resistencia del aire).

Considerando que $r(t) = (x(t), z(t))$, $v_0 = v_0(\cos(\alpha)\vec{i} + \text{sen}(\alpha)\vec{k})$, la ecuación que describe este movimiento es $m\ddot{r} = -mg\vec{k}$ donde α corresponde al grado de inclinación con que fue lanzado nuestra partícula.

II. **Vibraciones de sistemas mecánicos.**

Constante de rigidez := k.

Masa := m.

(2.1) Vibraciones armónicas simples no amortiguadas.

La ecuación que modela este movimiento es $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ y tiene por solución general:

$$x(t) = c_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + c_2 \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

(2.2) Vibraciones amortiguadas.

Se busca dar solución a la ecuación de la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ donde c es la resistencia de medio.

2.2.1. Vibraciones Sobreamortiguadas.
Corresponde al caso cuando $c > 2\sqrt{km}$ cuya solución general es:

$$x(t) = c_1e^{p_1t} + c_2e^{p_2t}$$

con p_1 y p_2 distintos y negativos.

2.2.2. Vibraciones críticamente amortiguadas.
Corresponde al caso cuando $c = 2\sqrt{km}$ cuya solución general es:

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

2.2.3. Vibraciones subamortiguadas.
Corresponde al caso cuando $c < 2\sqrt{km}$ cuya solución general es:

$$x(t) = e^{-bt}[c_1\cos(\alpha t) + c_2\text{sen}(\alpha t)]$$

con $b = \frac{c}{2m}$ y $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$.

(2.3) Vibraciones forzadas.
Se Busca dar solución a la ecuación de la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t)$

2.3.1. Si $f(t)$ es una función periódica con frecuencia w, por ejemplo, $f = F_0\cos(wt)$, se busca dar solución a la ecuación
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)$

2.3.2. **Resonancia:** El fenómeno de **resonancia** ocurre cuando la fuerza externa tiene frecuencia (w) cercana a la frecuencia del sistema ($\sqrt{k/m}$).

III. **Circuitos eléctricos simples.**

Se busca dar solución a la ecuación de la forma $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

Al derivar se obtiene la ecuación diferencial $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$

Donde:

$I := \frac{dq}{dt}$

I = intensidad de la corriente (amperios)

E = fuerza electromotriz (voltios)

R = resistencia (ohmios)

L = inductancia (henrios)

C = capacitancia (faradios)

q = carga (coulombs).

Ejercicios:

I. Una barcaza está siendo remolcada a 16 pies/seg . Cuando se revienta la cuerda que tira de ella, a partir de ese momento, continúa su movimiento en línea recta, pero frenándose con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad instantánea. Si después de dos minutos de que se revienta la cuerda se observa que la velocidad de la barcaza es de 9 pies/seg , qué distancia recorrerá antes de quedar en reposo?

Sol: 2560 pies

II. Una masa de 2 kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire $\frac{196}{125}m$. al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m. hacia abajo, y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = \frac{195}{14}\cos(t)[N]$ al sistema. Si la constante de amortiguación es 6 [N s/m] , determine el desplazamiento x(t) de la masa en un instante $t > 0$ cualquiera. Considere $g = 9.8m/s^2$.

Sol: $x(t) = -\frac{2}{7}e^{\frac{-3}{2}t}\text{sen}(2t) + \cos(t) + \frac{4}{7}\text{sen}(t)$

III. Un circuito RLC en serie tiene una FEM dada por $E(t) = \text{sen}(100t)$ voltios, un resistor de $0,02$ohmios, un inductor de 0,001 henrios y un capacitor de 2 faradios. Si la corriente inicial y la carga inicial son cero, determinemos la corriente del circuito para $t > 0$.

IV. Un cuerpo de 8 libras de peso cae desde el reposo hacia la tierra desde gran altura. A medida que cae, la resistencia del aire actúa sobre él. Suponga que esta resistencia en libras, equivale numéricamente al doble de la velocidad, en pies por segundos. Determine la velocidad y la distancia de caída en el tiempo t. Considere $g = 32(\text{pies/seg}^2)$.

V. Una masa de 2 kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire 196/125 m. al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m. hacia abajo, y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = 195/14\cos(t)$ newton al sistema. Si la constante de amortiguación es 6 newton seg/m , determine el desplazamiento $x(t)$ de la masa en un instante $t > 0$ cualquiera. Considere $g = 9.8$ m/seg^2.