UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Electricidad y Magnetismo

Unidad 1: Introducción y Campo Eléctrico

Campo Eléctrico

Profesora Rosa Corona

Profesor Alejandro Riveros

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resumen

Carga Eléctrica

Interacción entre cargas

Ley de Coulomb

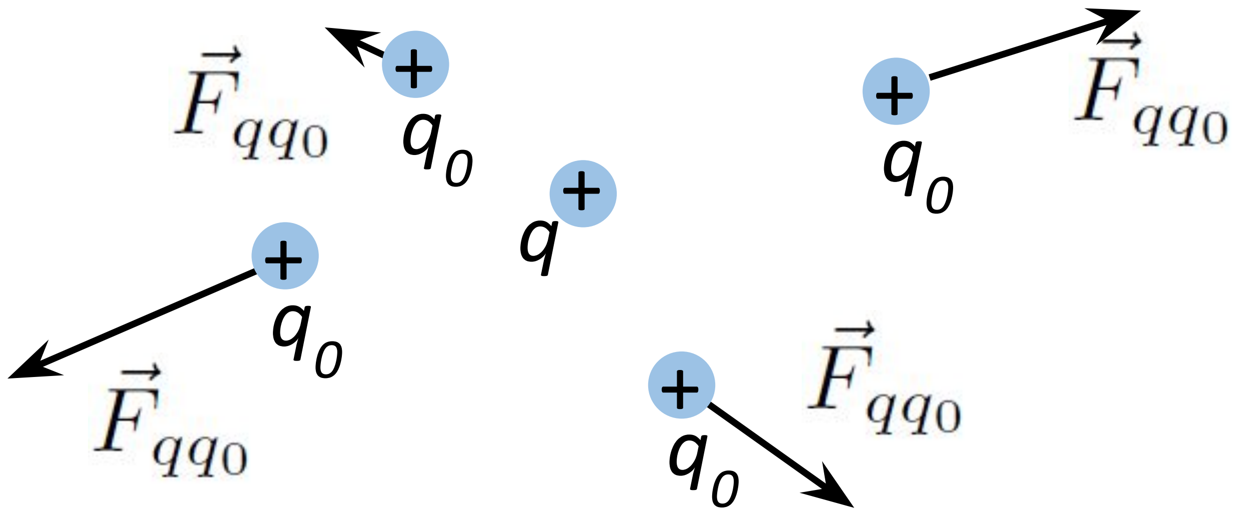
Principio de Superposición distribuciones discretas

Principio de Superposición distribuciones continuas

Contenidos

1. Campo eléctrico de una carga puntual

Hemos aprendido que al colocar una carga q_0 en el espacio, interactúa con las demás cargas del sistema. La carga q_0 "**siente**" la presencia del resto de cargas en cualquier punto donde se ubique la carga q_0 !



La carga q **genera una perturbación** en todo punto del espacio

Notemos que q_0 **siente** la carga *q*, **en cualquier punto donde se ubique la carga** $\boldsymbol{q_0}$!

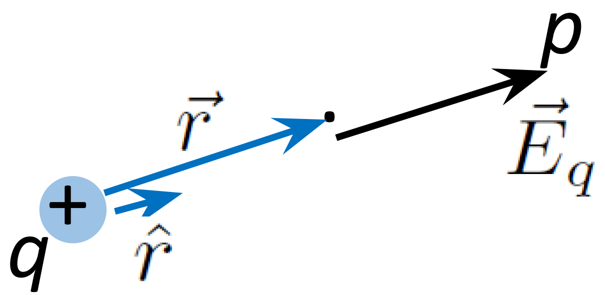
➡ La carga *q* **genera una perturbación del espacio** en todo punto del espacio

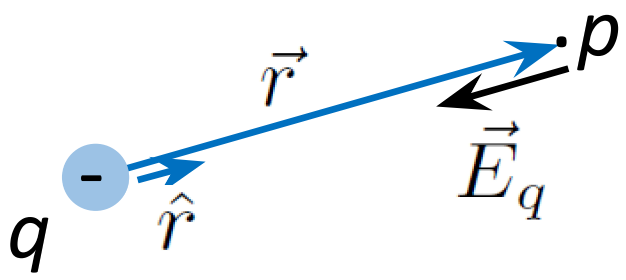
⬇

Campo Eléctrico generado por carga *q*

Notemos que la carga *q* genera un campo eléctrico (en todo punto), **inclusive si no existe la segunda carga q_0 !**

$$\boxed{\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qq_0}}{q_0}} \quad (1) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}_q = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \frac{kq}{r^3}\vec{r}} \quad (1)$$

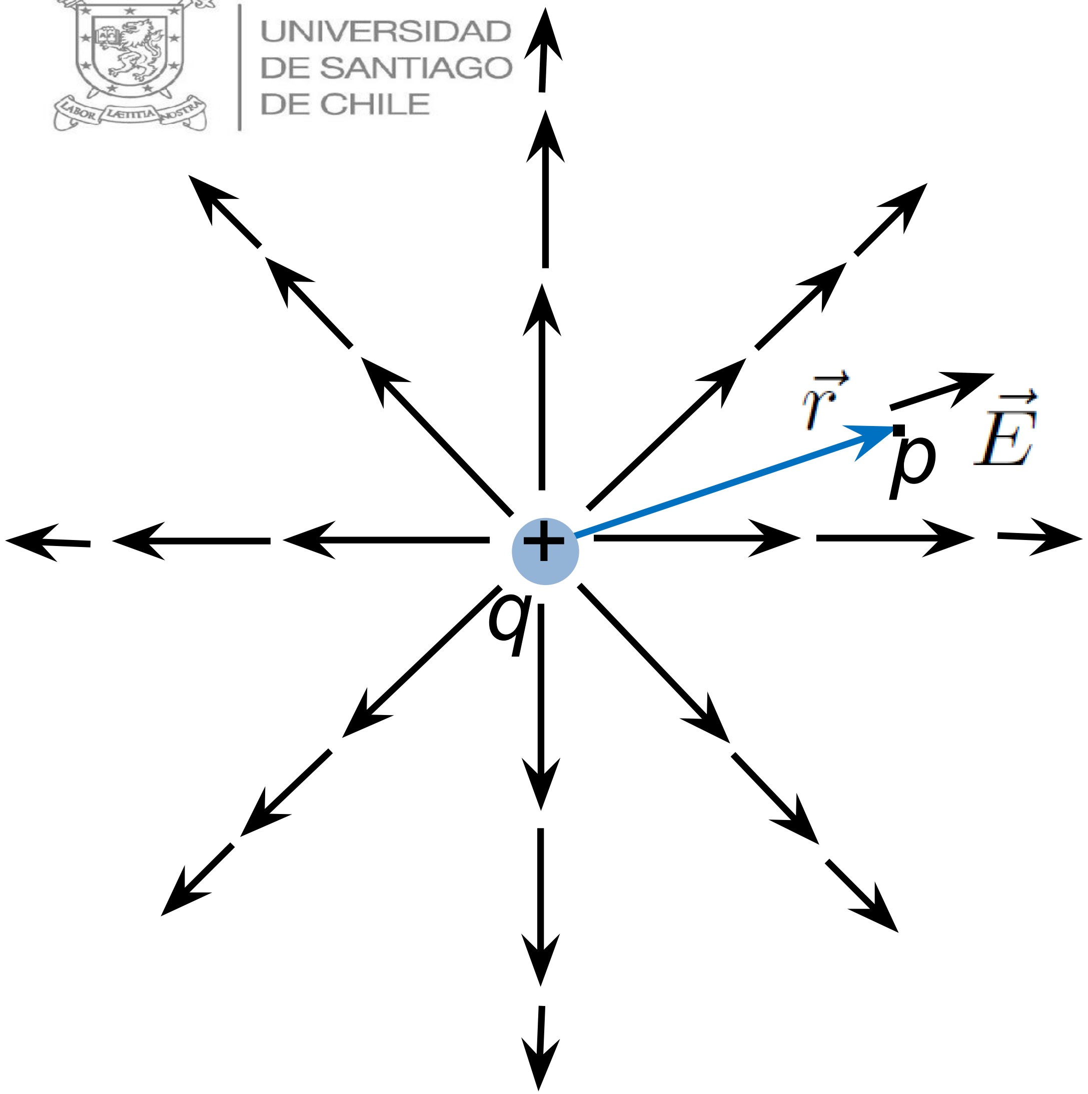




Unidades campo eléctrico: $[\vec{E}] = \text{Newton/Coulomb (N/C)}$

Notemos que el campo eléctrico es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto *p*:

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE



Campo eléctrico generado por una carga **positiva**

Campo eléctrico en el punto p:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kq}{r^3}\vec{r}}$$

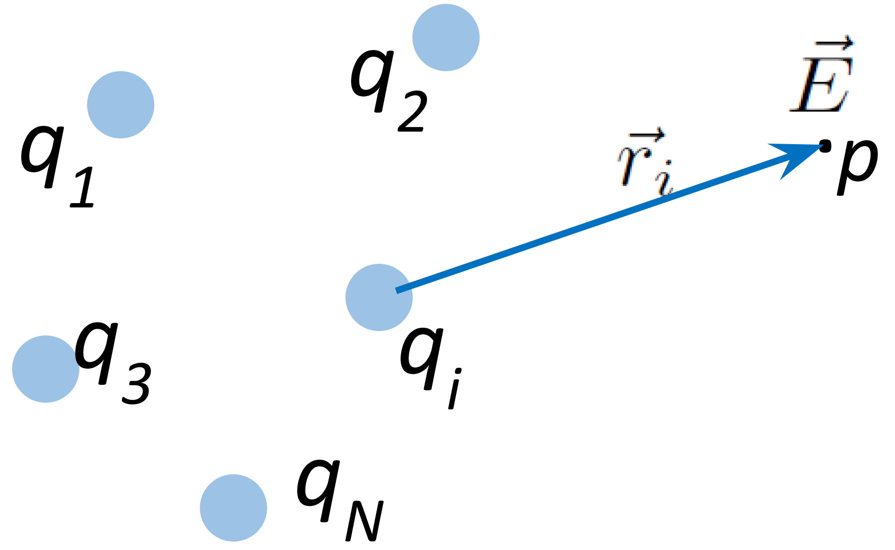
El campo eléctrico que genera una carga puntual **positiva**, apunta en forma radial (**hacia afuera de la carga**)

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

2. Principio de superposición del campo eléctrico

Toda carga eléctrica genera un campo eléctrico **en toda región del espacio**. Si existen más de una carga **cada una de ellas genera campo eléctrico** en toda la región del espacio.

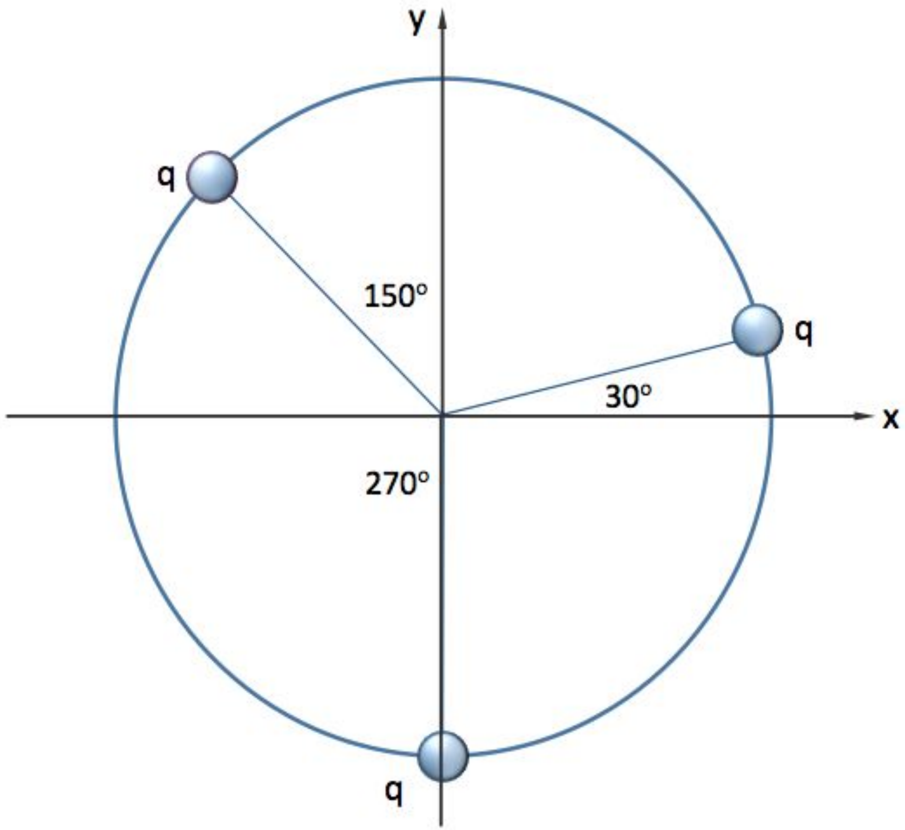
Para obtener el campo eléctrico en un punto *p* del espacio generado por un sistema de *N* cargas puntuales se deben **sumar vectorialmente los campos eléctricos** que generan cada una de ellas



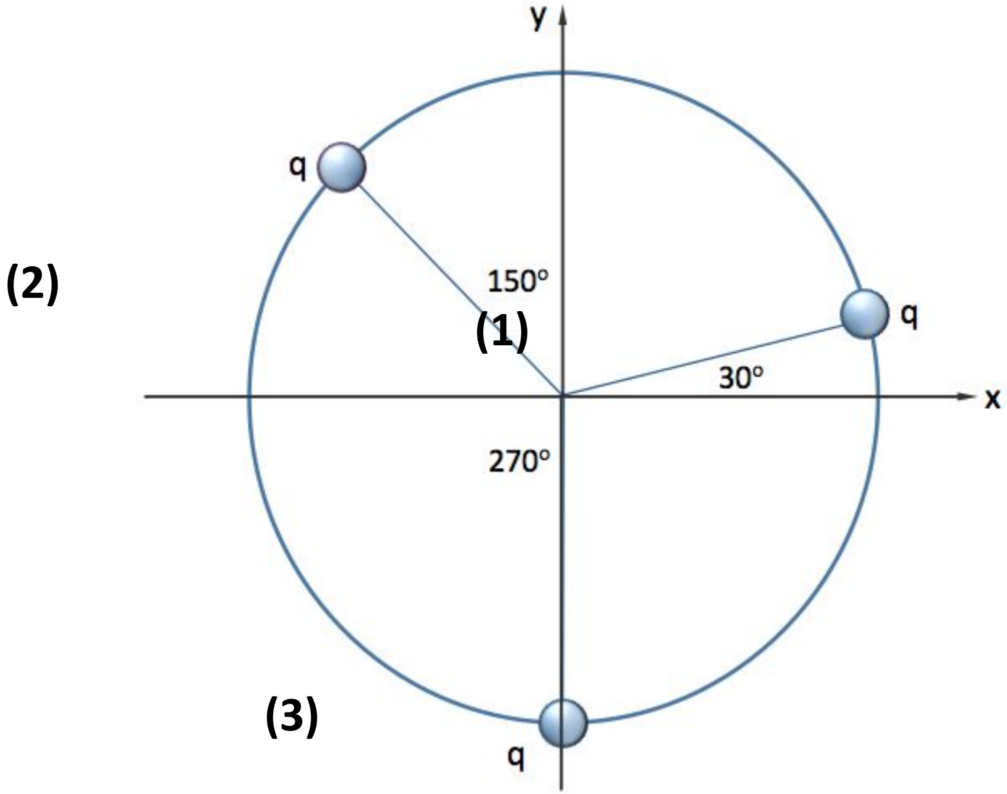
$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i}$$

$$\boxed{\vec{E}_i = \frac{kq_i}{r_i^3}\vec{r}_i}$$

Ejemplo: Tres cargas puntuales idénticas q, se localizan a lo largo de una circunferencia de radio r en los ángulos 30º, 150º y 270º. ¿Cuál es el campo eléctrico resultante en el centro del círculo.



Solución: En la circunferencia de radio r tenemos tres cargas, si enumeramos cada carga, tenemos que el campo eléctrico en el punto p será:



donde:

$$\vec{E} = \vec{E}_{1p} + \vec{E}_{2p} + \vec{E}_{3p}$$

$$\vec{E}_{ip} = k\frac{q}{r_{ip}^3}\vec{r}_{ip} \qquad \vec{r}_{ip} = \vec{r}_p - \vec{r}_i$$

Las posiciones son:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (r\cos 30^{o}, r\sin 30^{o}, 0) \\
\vec{r}_2 &= (-r\cos 30^{o}, r\sin 30^{o}, 0) \\
\vec{r}_3 &= (0, -r, 0)
\end{aligned}$$

Luego, los vectores posición entre las i-ésimas partículas y el punto p será:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{1p} &= \vec{r}_p - \vec{r}_1 = (0,0,0) - (r\cos 30^{\circ}, r\sin 30^{\circ}, 0) \\
\vec{r}_{2p} &= \vec{r}_p - \vec{r}_2 = (0,0,0) - (-r\cos 30^{\circ}, r\sin 30^{\circ}, 0) \\
\vec{r}_{3p} &= \vec{r}_p - \vec{r}_3 = (0,0,0) - (0, -r, 0)
\end{aligned}
$$

Donde escrito en notación analítica, y luego calculando la magnitud de cada vector, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{1p} &= -r\cos 30^{\circ}\hat{\imath} - r\sin 30^{\circ}\hat{\jmath} \\
\vec{r}_{2p} &= r\cos 30^{\circ}\hat{\imath} - r\sin 30^{\circ}\hat{\jmath} \\
\vec{r}_{3p} &= r\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

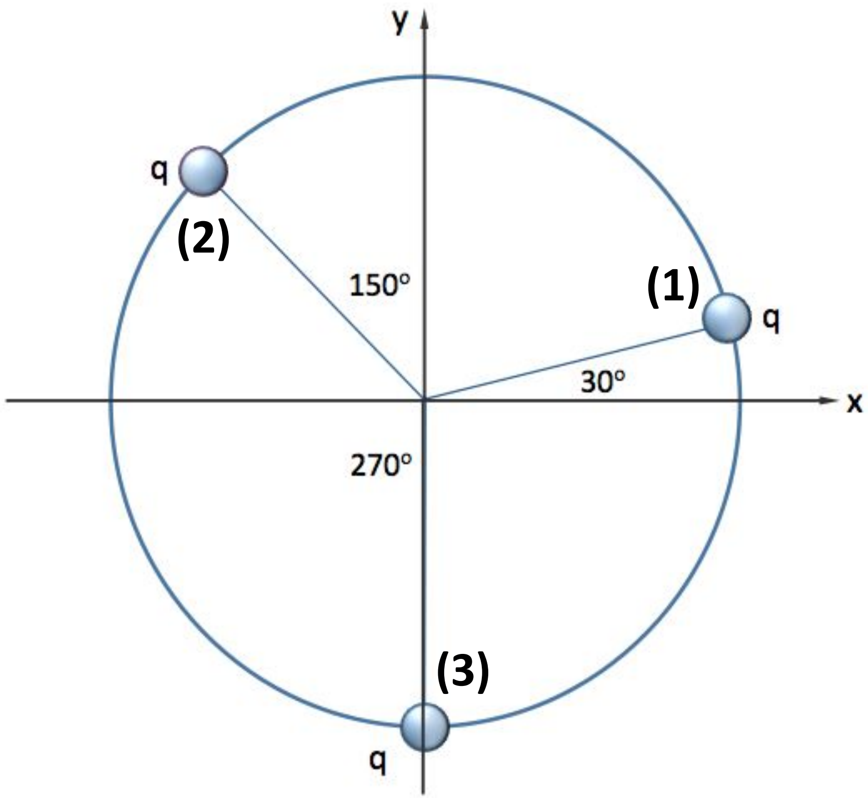
$$
\begin{aligned}
r_{1p} &= r \\
r_{2p} &= r \\
r_{3p} &= r
\end{aligned}
$$

Entonces el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\left[\left(-r\cos 30^{\circ} + r\cos 30^{\circ}\right)\hat{\imath} + \left(-r\sin 30^{\circ} - r\sin 30^{\circ} + r\right)\hat{\jmath}\right]$$

Reduciendo términos, tenemos:

$$\boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\left(1 - 2\sin 30^{\circ}\right)\hat{\jmath}}$$



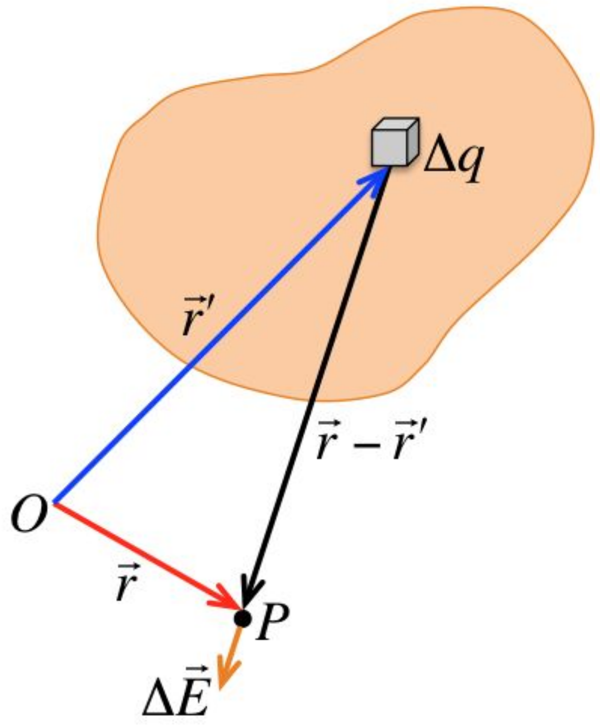
3. Campo eléctrico debido a una distribución de carga continua

- La distancia entre cargas en un grupo de cargas es mucho menor que la distancia de grupo
- El campo en el punto eléctrico p es

$$\Delta\vec{E} = k\frac{\Delta q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

$$\vec{E} = k\lim_{\Delta q\to 0}\sum_i \frac{\Delta q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

$$\vec{E} = k\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

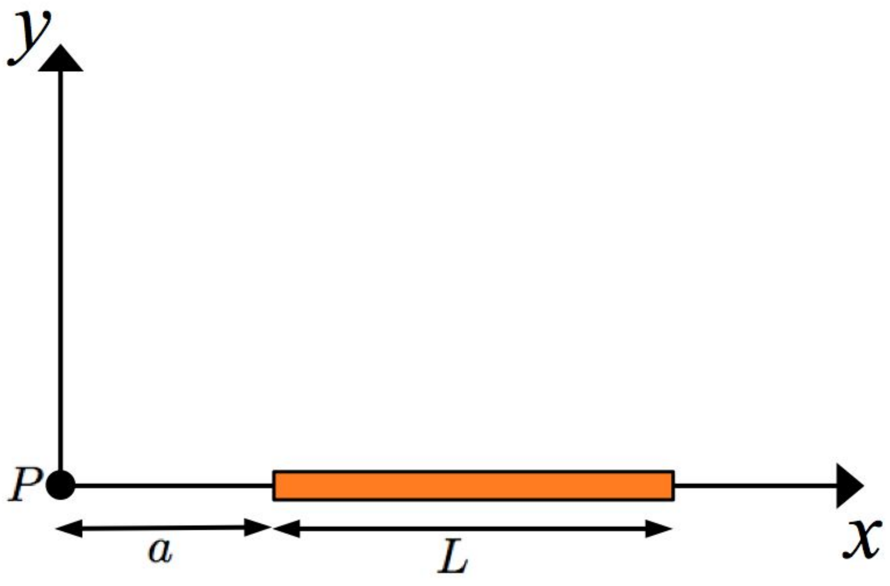


$$\lambda = \frac{q}{\ell} \qquad \lambda = \frac{dq}{d\ell}$$

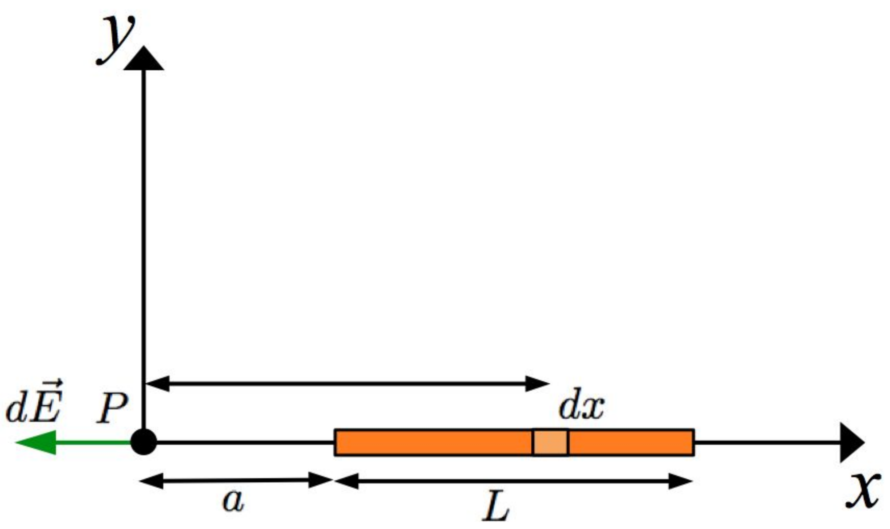
$$\sigma = \frac{q}{s} \qquad \sigma = \frac{dq}{ds}$$

$$\rho = \frac{q}{v} \qquad \rho = \frac{dq}{dv}$$

Ejemplo: Una varilla de longitud L [m] tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud l [C/m] y una carga total Q [C]. Calcule el campo eléctrico en un punto P ubicado a lo largo del eje principal de la varilla y a una distancia a de uno de sus extremos.



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE



Si tomamos pequeños pedazos de la barra, tenemos que el diferencial del campo eléctrico es:

$$d\vec{E} = \frac{kdq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}(\vec{r} - \vec{r'})$$

Como el punto P esta en el origen, es más sencillo escoger los vectores de posición, donde:

$$\vec{r} = 0\hat{\imath} \qquad \vec{r'} = x\hat{\imath}$$

distancia desde el origen al punto P

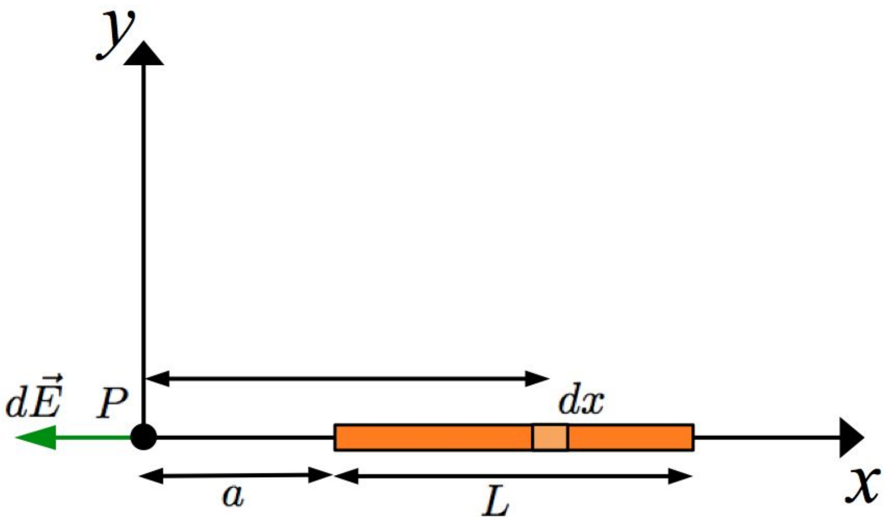
distancia desde el origen a la barra

Entonces: $\vec{r} - \vec{r'} = -x\hat{\imath}$

Y el módulo es: $|\vec{r} - \vec{r'}| = x$

Entonces:

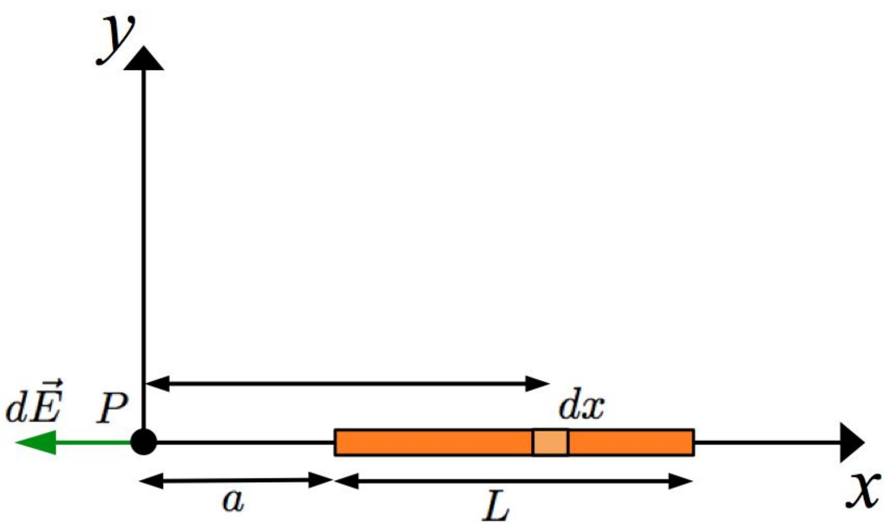
$$d\vec{E} = -\frac{kdq}{x^3}x\hat{\imath}$$



La densidad de carga para una barra es la densidad lineal (l) ya que es una dimensión (dq = l dx), entonces:

$$d\vec{E} = -\frac{k\lambda dx}{x^2}\hat{\imath}$$

Si integramos, notando que los límites de integración estan entre a y a+L, tenemos:



$$\vec{E} = -k\lambda \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2}\hat{\imath}$$

Resolviendo la integral:

$$\int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_a^{a+L} = -\frac{1}{a+L} + \frac{1}{a}$$

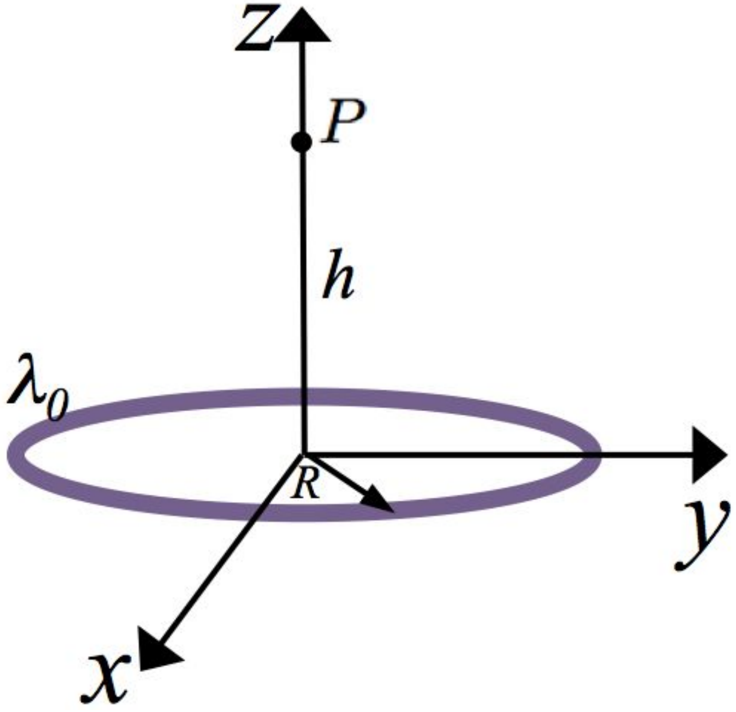
Entonces:

$$\vec{E} = -k\lambda\left[-\frac{1}{a+L} + \frac{1}{a}\right]\hat{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{k\lambda L}{a(a+L)}\hat{\imath} \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

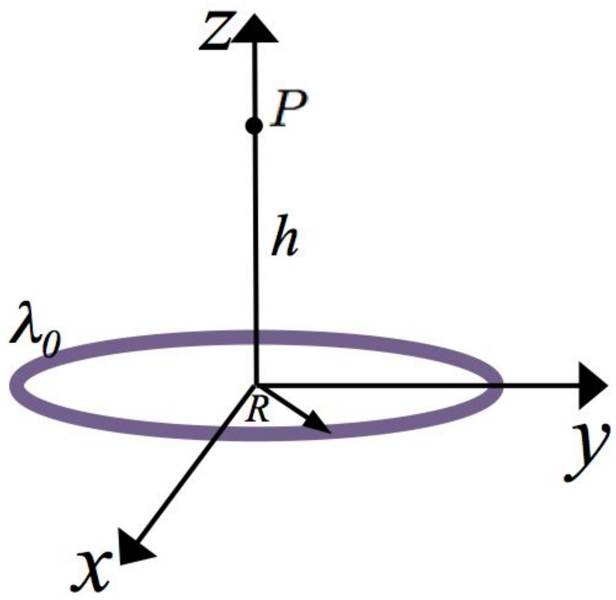
Queda negativo, y es cosa de mirar en el esquema.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Ejemplo: Determine el campo eléctrico a una distancia h [m], sobre el eje de un anillo de radio R [m] que tiene una carga Q [C] distribuida uniformemente. A que valor de h se presenta el máximo valor del campo eléctrico y cuál es el valor del campo eléctrico?



Si tomamos pequeños diferenciales de carga en el anillo, entonces el campo eléctrico es:



$$d\vec{E} = \frac{kdq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}(\vec{r} - \vec{r'})$$

Los vectores posición son:

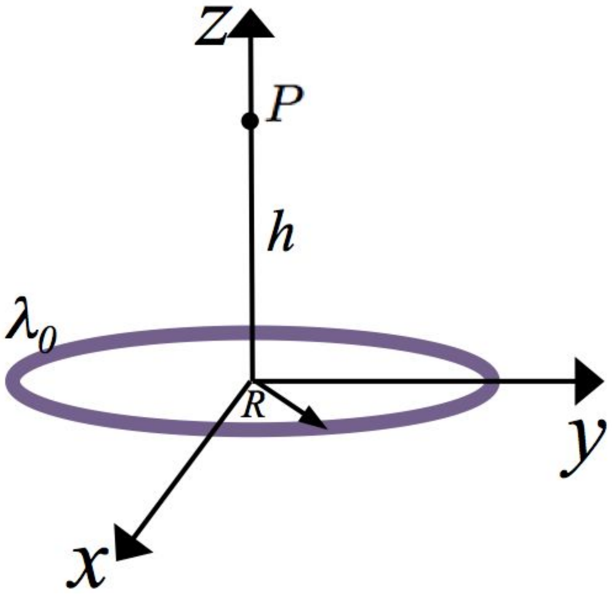
$$\vec{r} = h\hat{z} \quad \& \quad \vec{r'} = \rho\hat{\rho}$$

el módulo es:

$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{h^2 + \rho^2}$$

Debido a la simetría del anillo, las componentes radiales se cancelan y sólo tenemos la componente azimutal (eje z), entonces:

$$d\vec{E} = \frac{kdq}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}h\hat{z}$$



Si integramos, y recordando que en el enunciado decia que la carga era uniforme, la carga no tiene ninguna dependencia entonces:

$$\vec{E} = \frac{kh}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \int dq\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{khQ}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{z} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

Pero el enunciado también pedí el valor de h para que el campo fuera máximo, para realizar esto debemos realizar las siguientes derivadas:

$$\frac{dE}{dh} = 0 \quad \& \quad \frac{d^2E}{dh^2} < 0$$

$$\boxed{\frac{dE}{dh} = 0} \qquad \frac{d}{dh}\left(\frac{khQ}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\right) = 0$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3}{2}(2h)\frac{khQ}{(h^2+R^2)^{5/2}} = 0$$

$$\boxed{\frac{dE}{dh} = 0} \qquad \frac{d}{dh}\left(\frac{khQ}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\right) = 0$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}(\cancel{2}h)\frac{khQ}{(h^2+R^2)^{5/2}} = 0$$

reordenando términos, tenemos:

$$\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3h^2}{h^2+R^2}\right] = 0$$

$$\boxed{\frac{dE}{dh} = 0} \qquad \frac{d}{dh}\left(\frac{khQ}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\right) = 0$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}(\cancel{2}h)\frac{khQ}{(h^2+R^2)^{5/2}} = 0$$

reordenando términos, tenemos:

$$\underbrace{\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}}}_{\neq 0}\underbrace{\left[1 - \frac{3h^2}{h^2+R^2}\right]}_{=0} = 0$$

$$\boxed{\frac{dE}{dh} = 0} \qquad \frac{d}{dh}\left(\frac{khQ}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\right) = 0$$

donde r = R tenemos que:

$$\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}(\cancel{2}h)\frac{khQ}{(h^2+R^2)^{5/2}} = 0$$

reordenando términos, tenemos:

$$\underbrace{\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}}}_{\neq 0}\underbrace{\left[1 - \frac{3h^2}{h^2+R^2}\right]}_{=0} = 0$$

$$\left[1 - \frac{3h^2}{h^2+R^2}\right] = 0 \Rightarrow 3h^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

$$\boxed{\frac{d^2E}{dh^2} < 0} \qquad \frac{d^2}{dh^2}\left(\frac{khQ}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\right) < 0$$

De la primera derivada:

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{kQ}{(h^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3kh^2Q}{(h^2+R^2)^{5/2}}\right) < 0$$

Luego:

$$-\frac{3khQ}{(h^2+R^2)^{5/2}} - \frac{6khQ}{(h^2+R^2)^{5/2}} + \frac{15kh^3Q}{(h^2+R^2)^{7/2}} < 0$$

$$\frac{d^2E}{dh^2} < 0 \qquad\qquad \frac{d^2}{dh^2}\left(\frac{khQ}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\right) < 0$$

Esta cantidad siempre será negativa, por lo tanto tenemos el valor de h para que el campo sea máximo.

$$\boxed{h = \frac{R}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \vec{E}_{max} = \left.\frac{khQ}{(h^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}\right|_{h=R/\sqrt{2}}$$

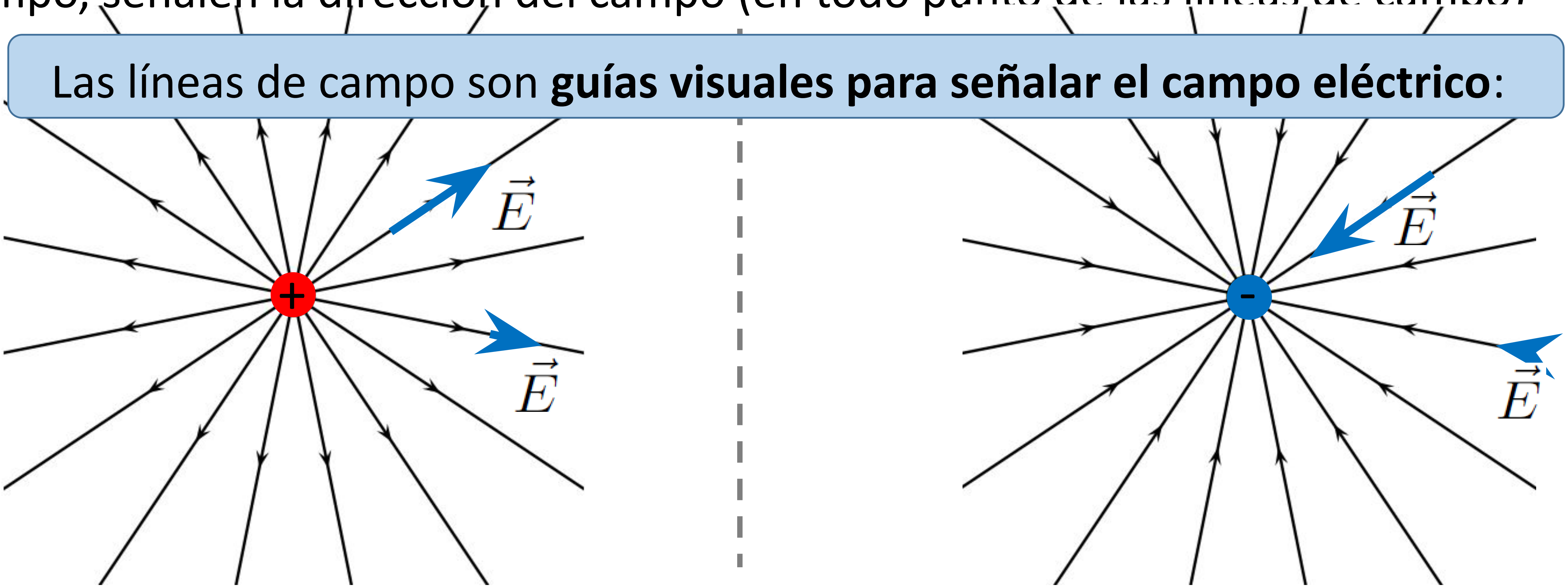
El campo máximo es:

$$\boxed{\vec{E}_{max} = \frac{Q}{6\pi\epsilon_0 R^2\sqrt{3}}\hat{z} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

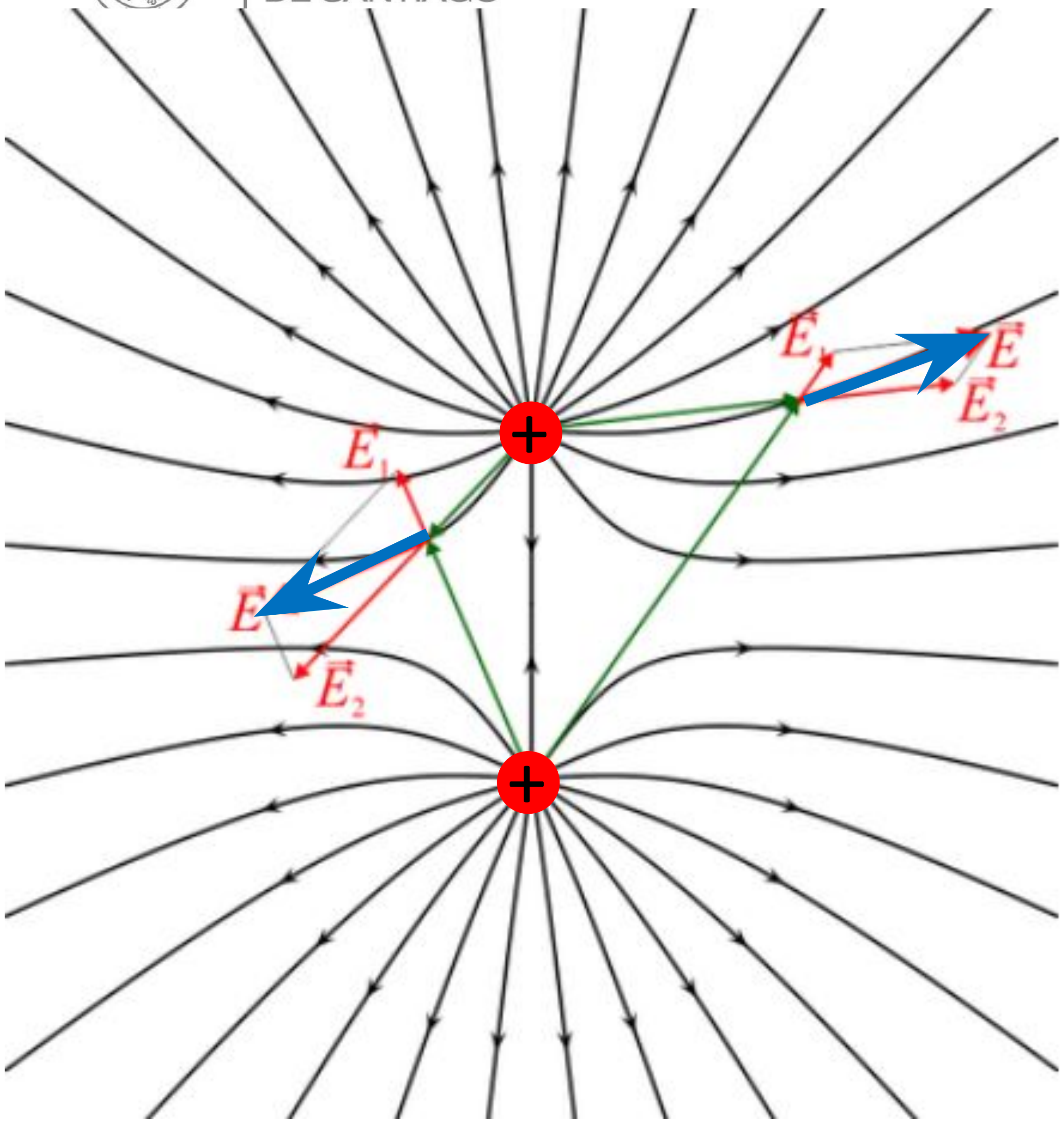
4. Líneas de campo eléctrico

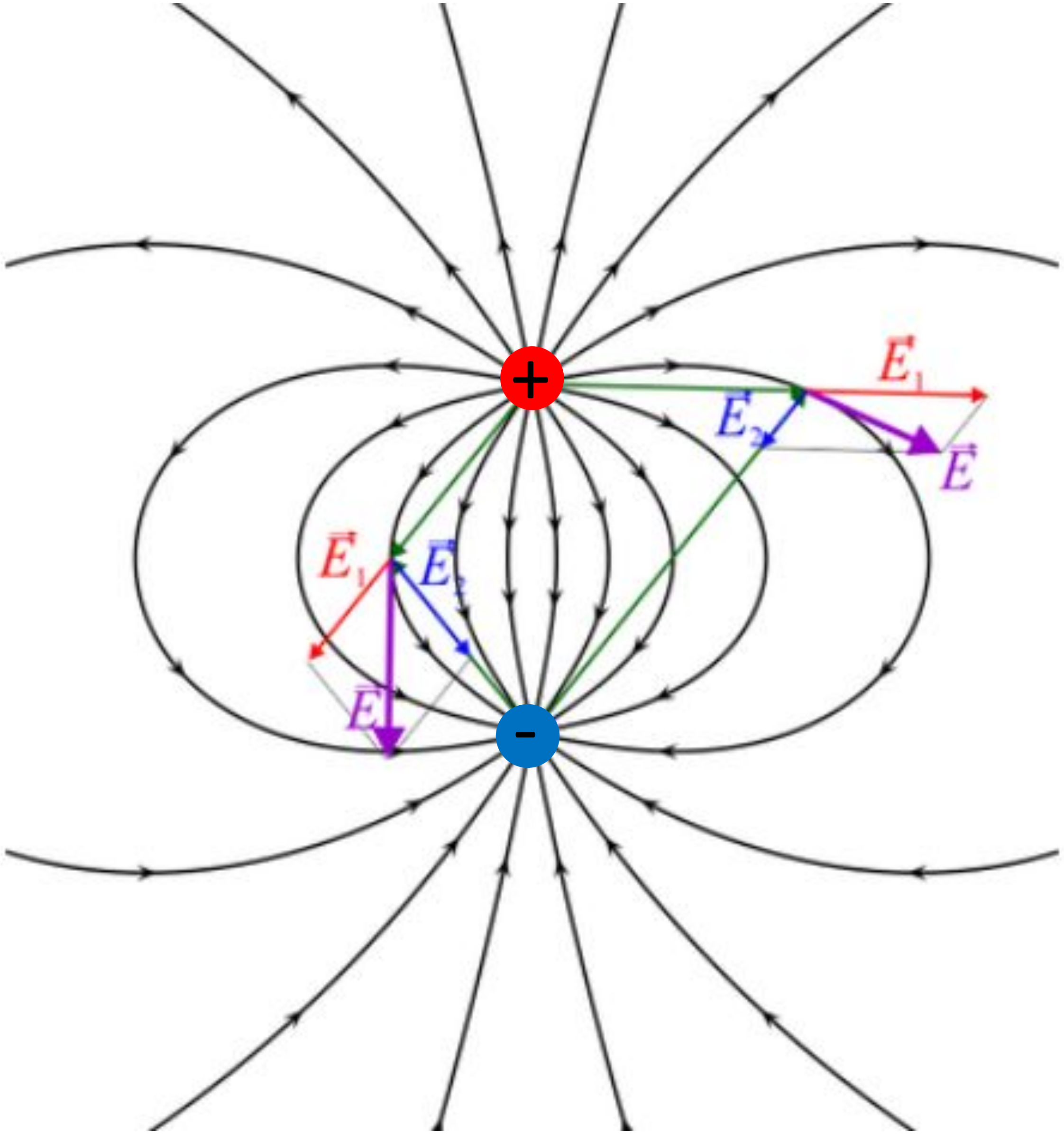
Se puede definir **líneas de campo**, tal que el vector tangente a las líneas de campo, señalen la dirección del campo (en todo punto de las líneas de campo)

Las líneas de campo son **guías visuales para señalar el campo eléctrico**:

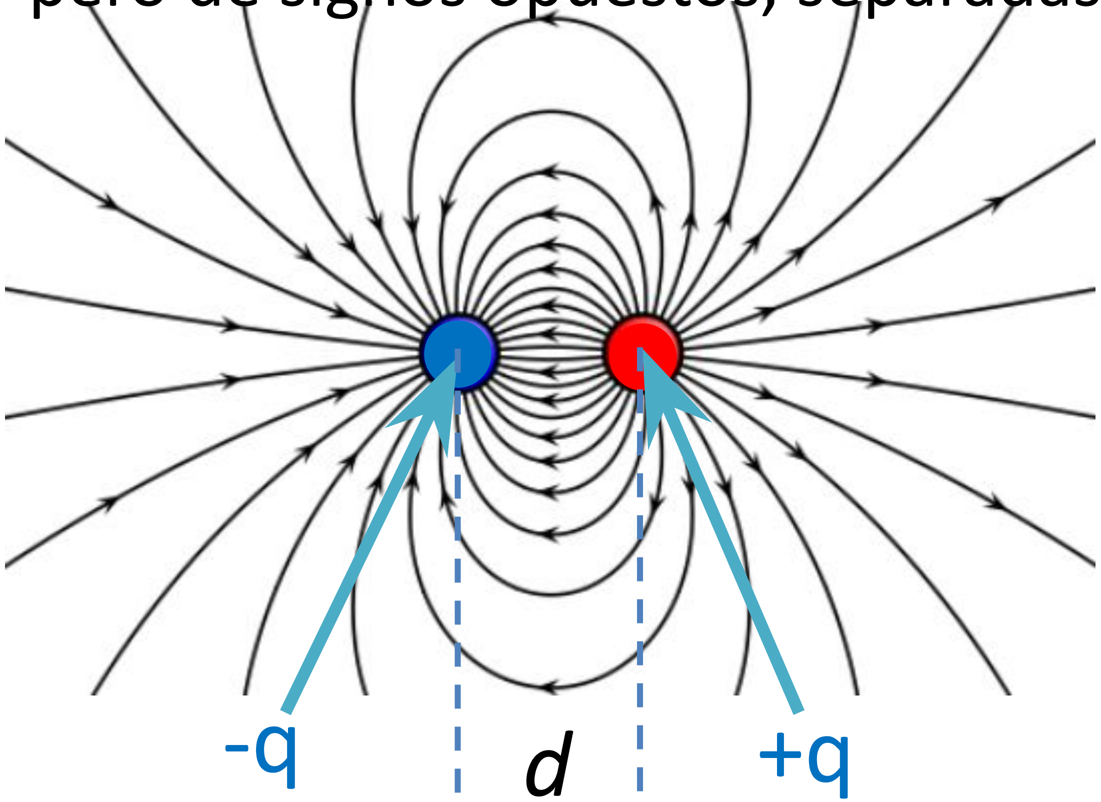


Líneas de Campo Eléctrico





Un dipolo Eléctrico es la configuración de 2 cargas de magnitudes iguales pero de signos opuestos, separadas por una distancia *d*



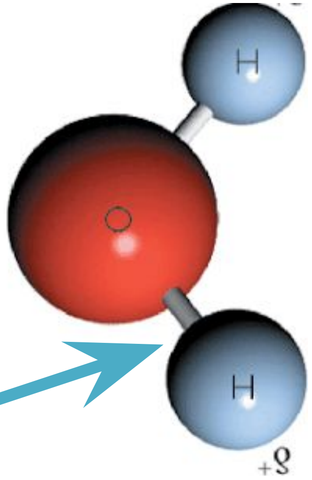
Dipolo eléctrico

Para un dipolo eléctrico existe armonía. las líneas de campo. Salen de la carga positiva e ingresan en la carga negativa. Además, **hay un atracción eléctrica entre la cargas** que forman el dipolo

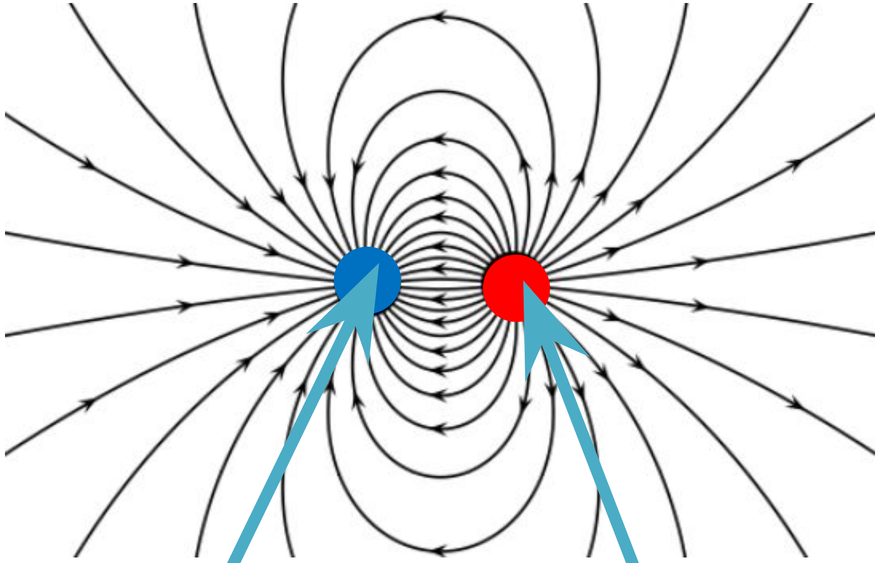
Notar que el dipolo eléctrico **posee carga total nula**, sin embargo está **polarizada** (un extremo del dipolo tiene carga negativa, mientras que el otro extremo tiene carga positiva)

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

El dipolo eléctrico es una configuración estable y es fundamental para que exista vida, en efecto **la molécula de agua se comporta como un dipolo eléctrico**



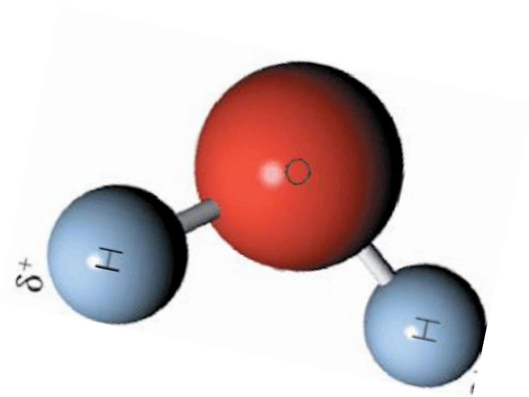
Enlace covalente

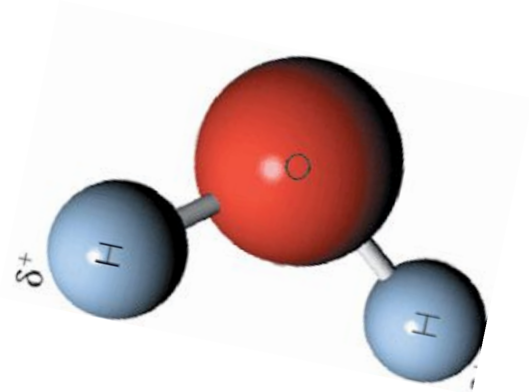


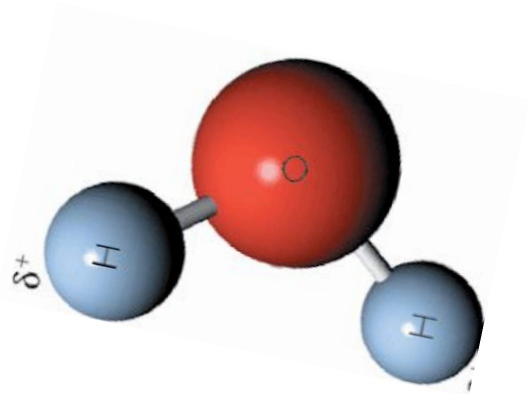
Q= -2*e*

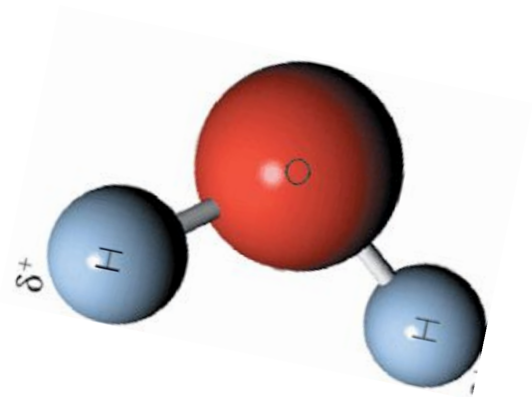
Q= +2*e*

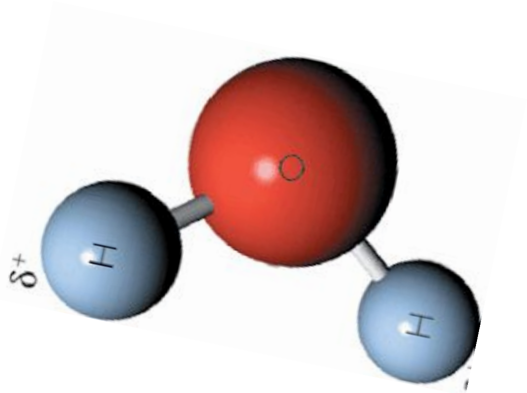
Una molécula de agua está formada por 1 átomo de oxigeno unido a 2 átomos de hidrógeno


O
H
H
δ^+

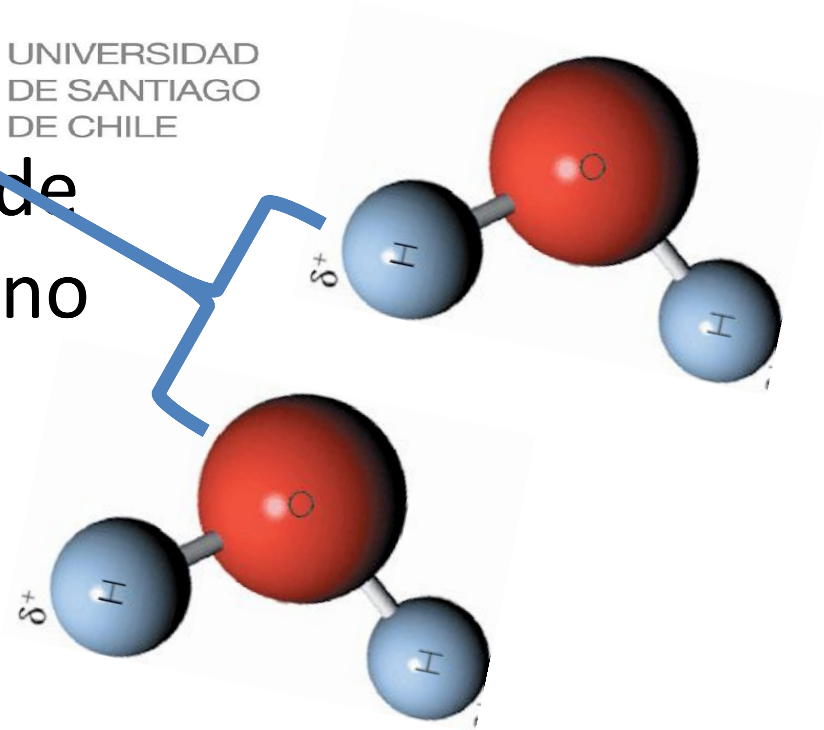

δ+
H
O
H


δ+
H
O
H

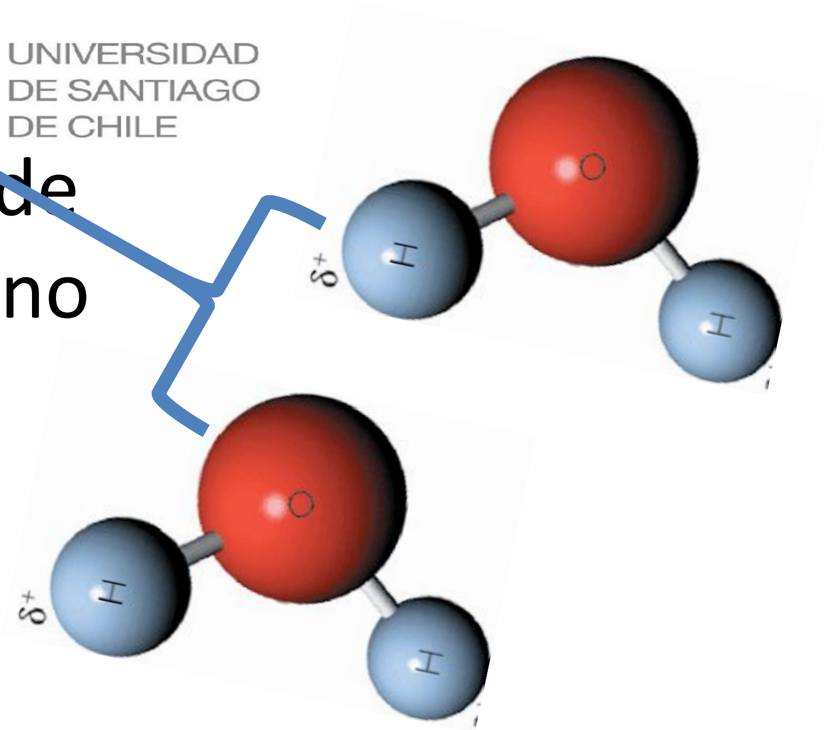

O
H
H
δ^+

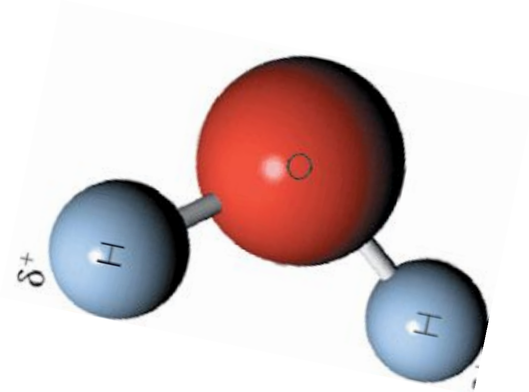

O
H
H
δ^+

Puente de Hidrogeno

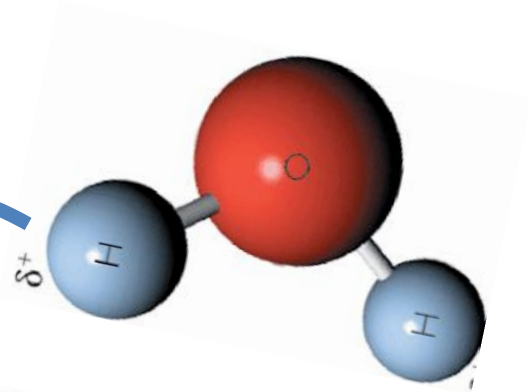


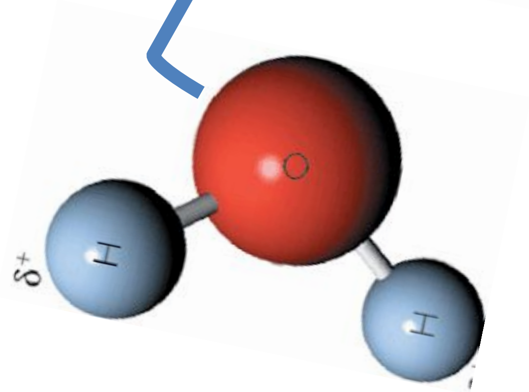
Puente de
Hidrogeno

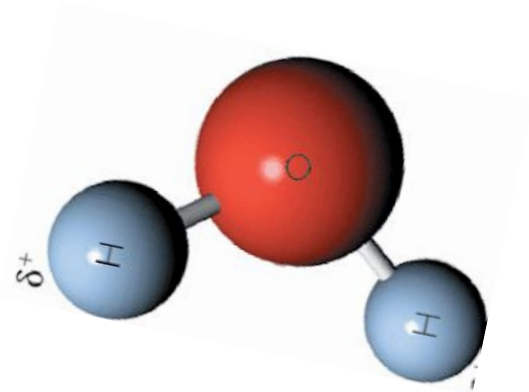




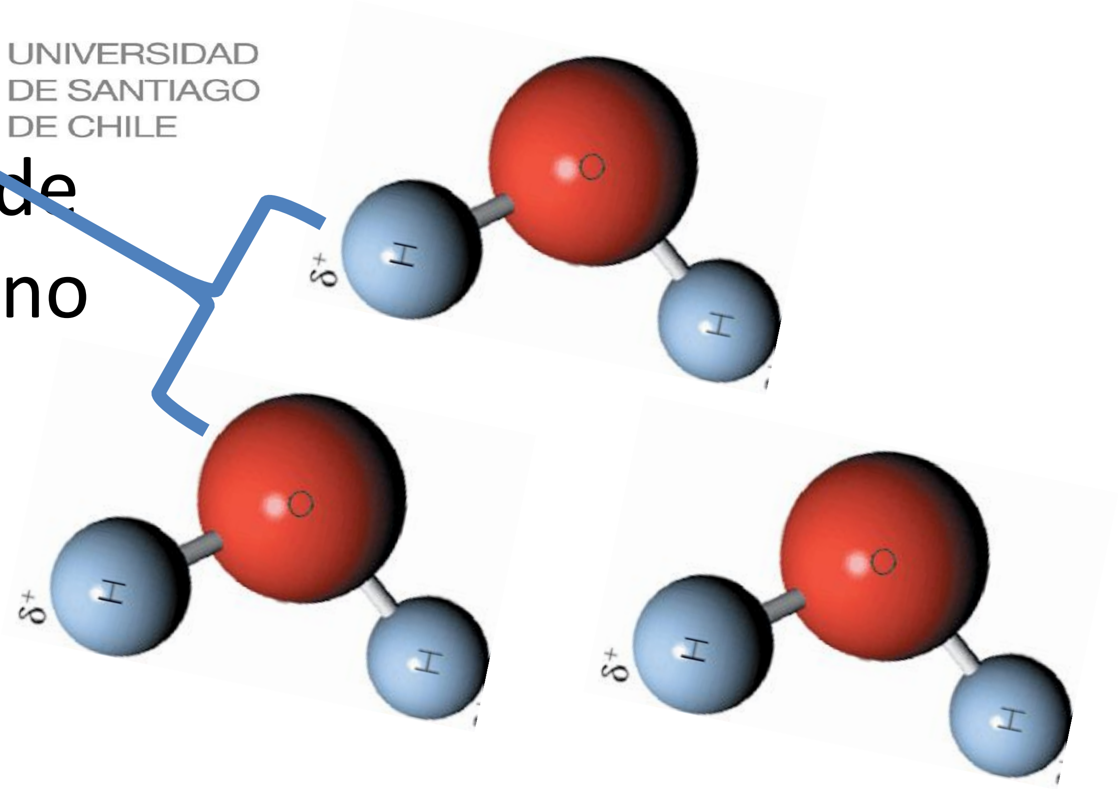
Puente de Hidrogeno





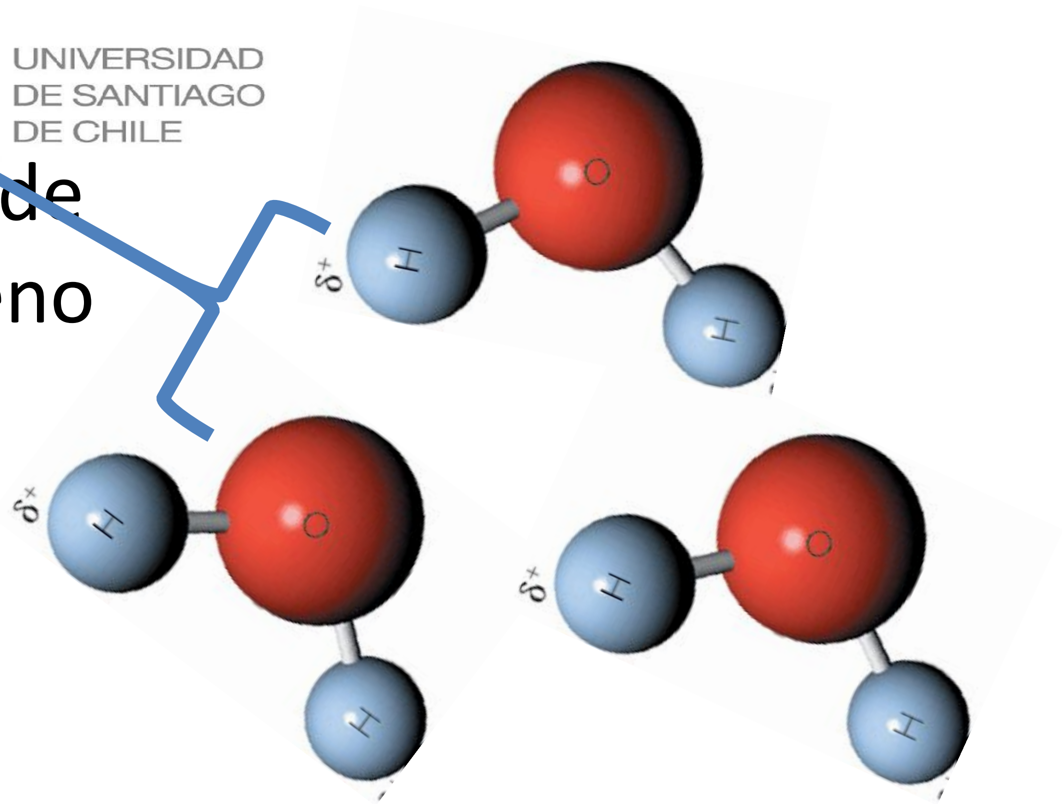


Puente de Hidrogeno



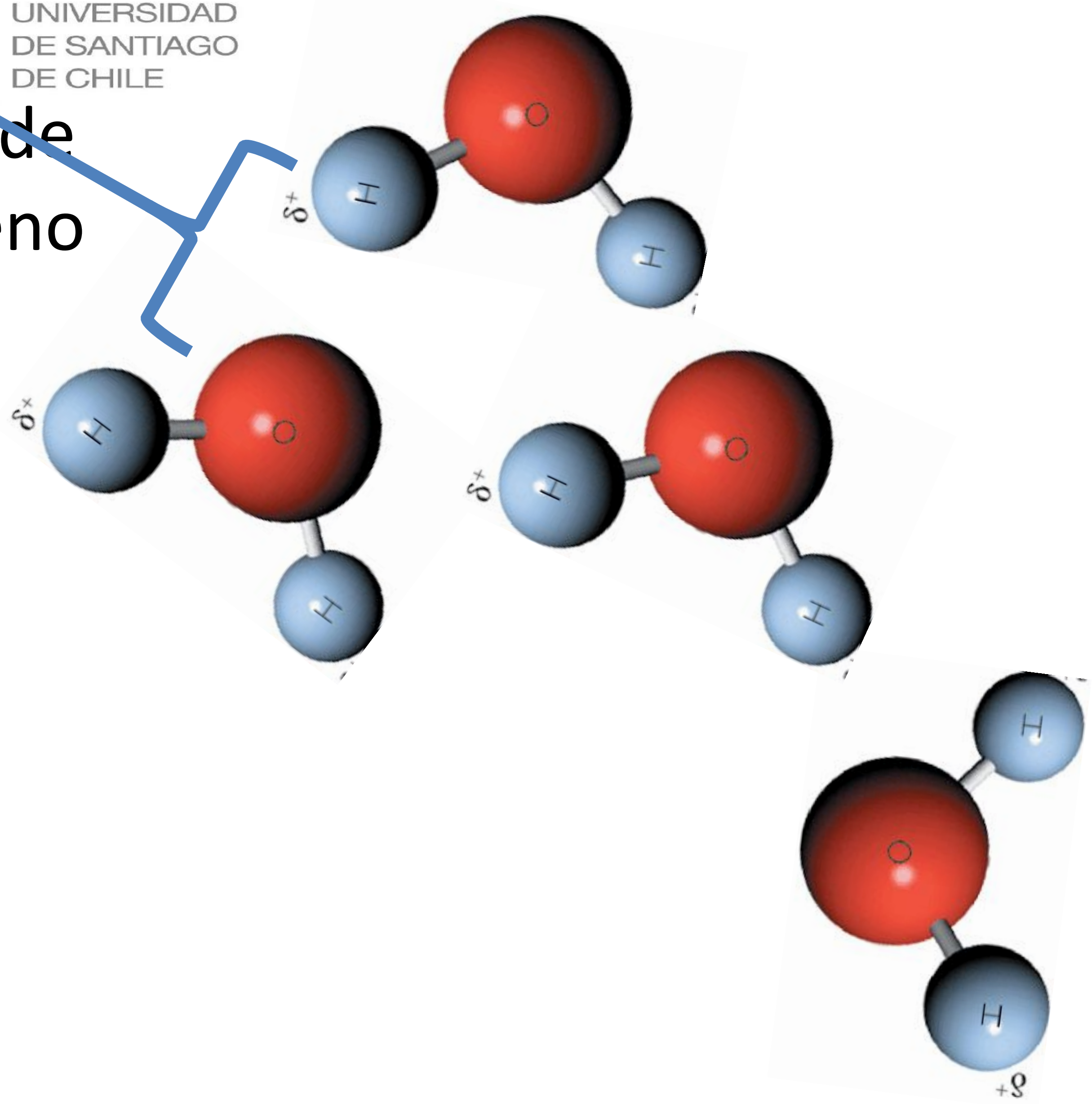
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Puente de Hidrogeno

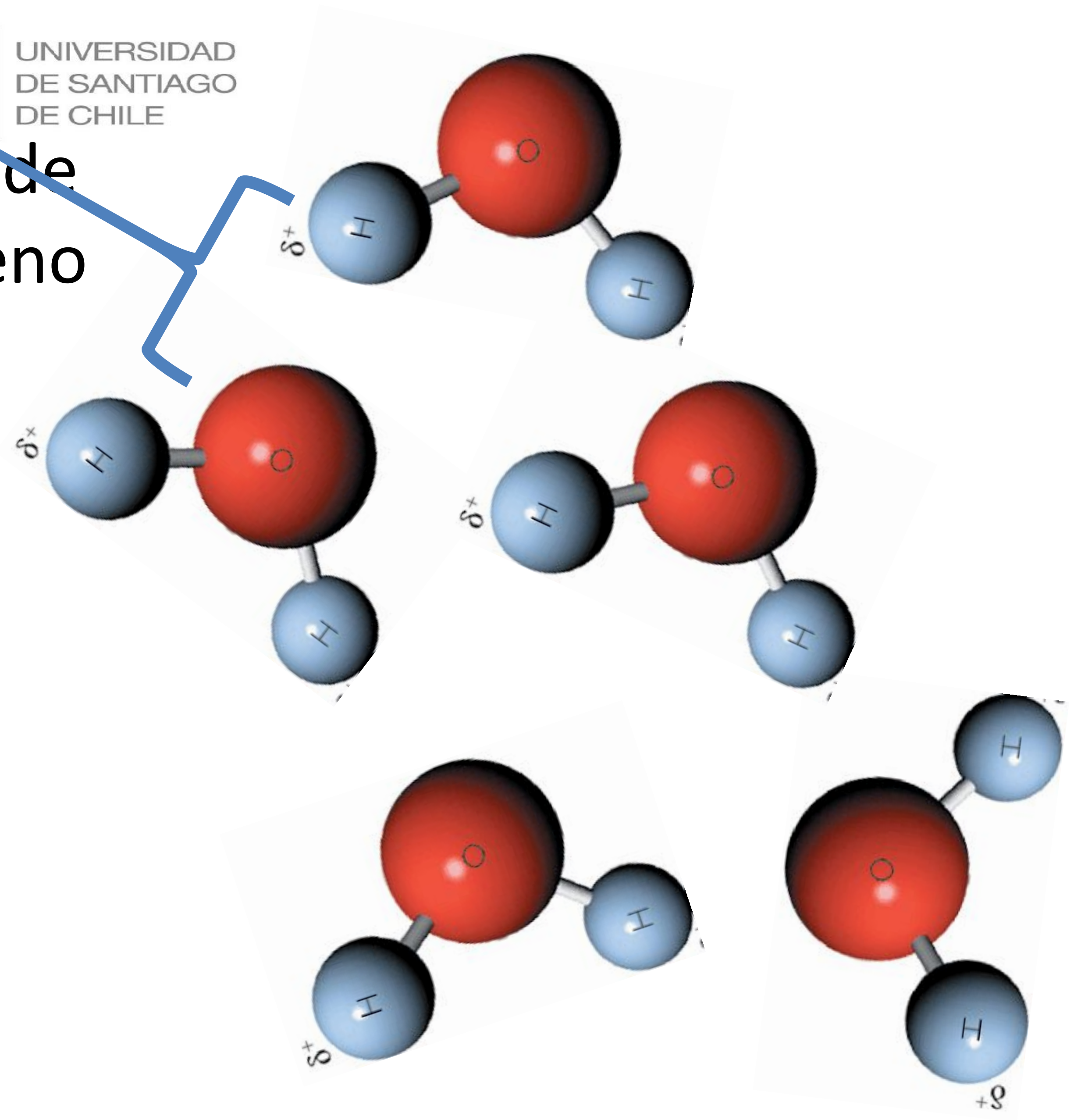


UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

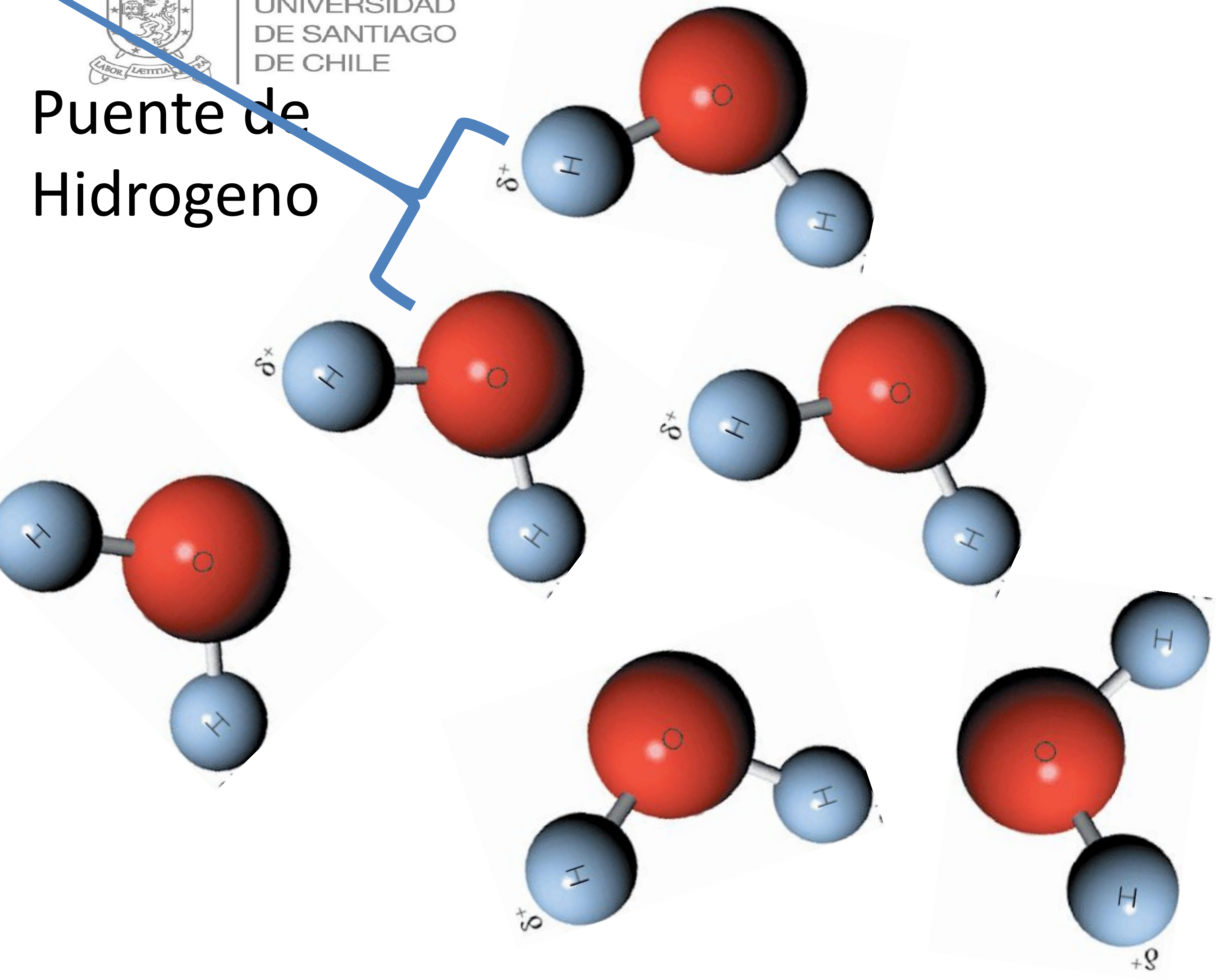
Puente de Hidrogeno



Puente de Hidrogeno

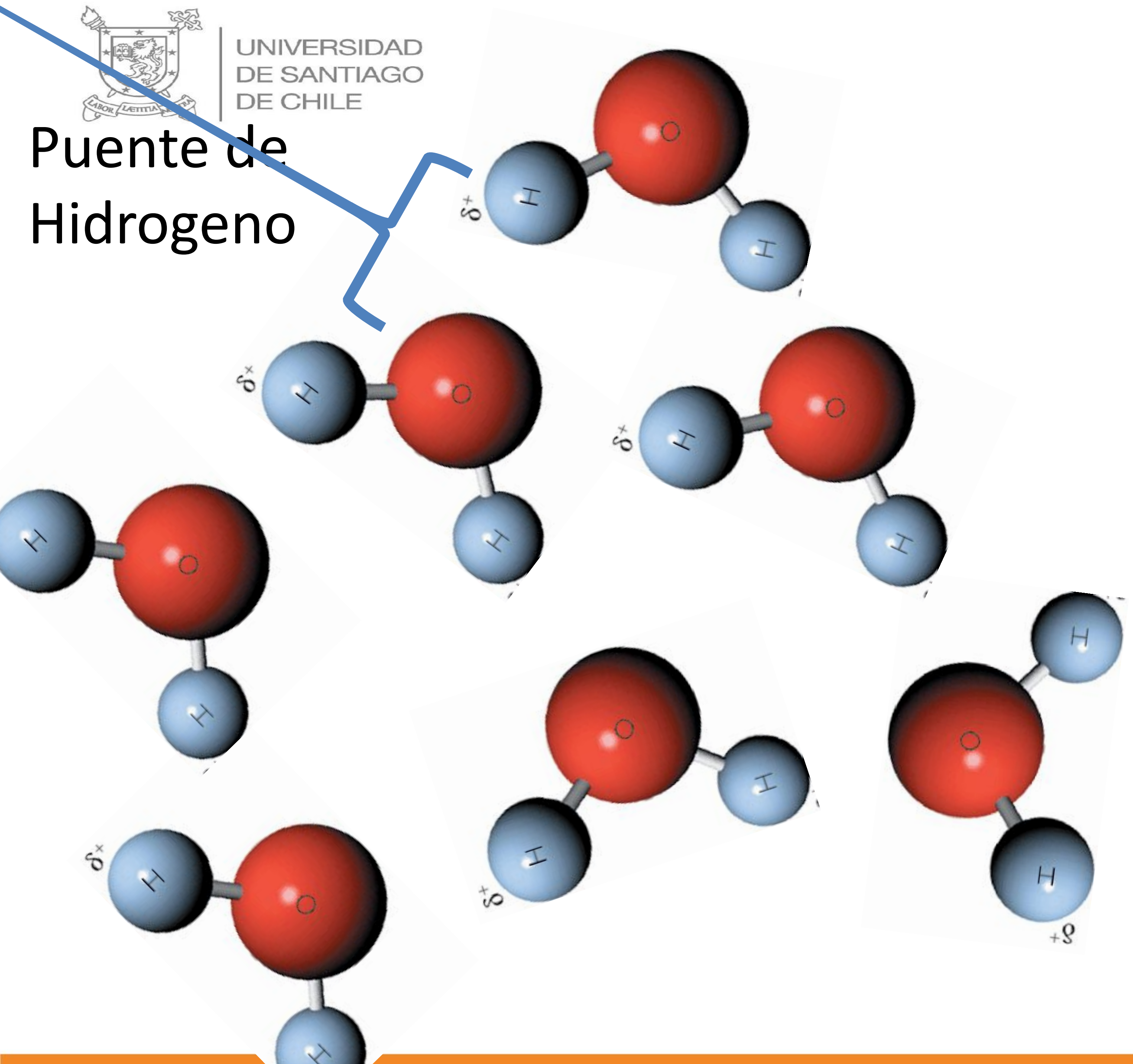


Puente de Hidrogeno



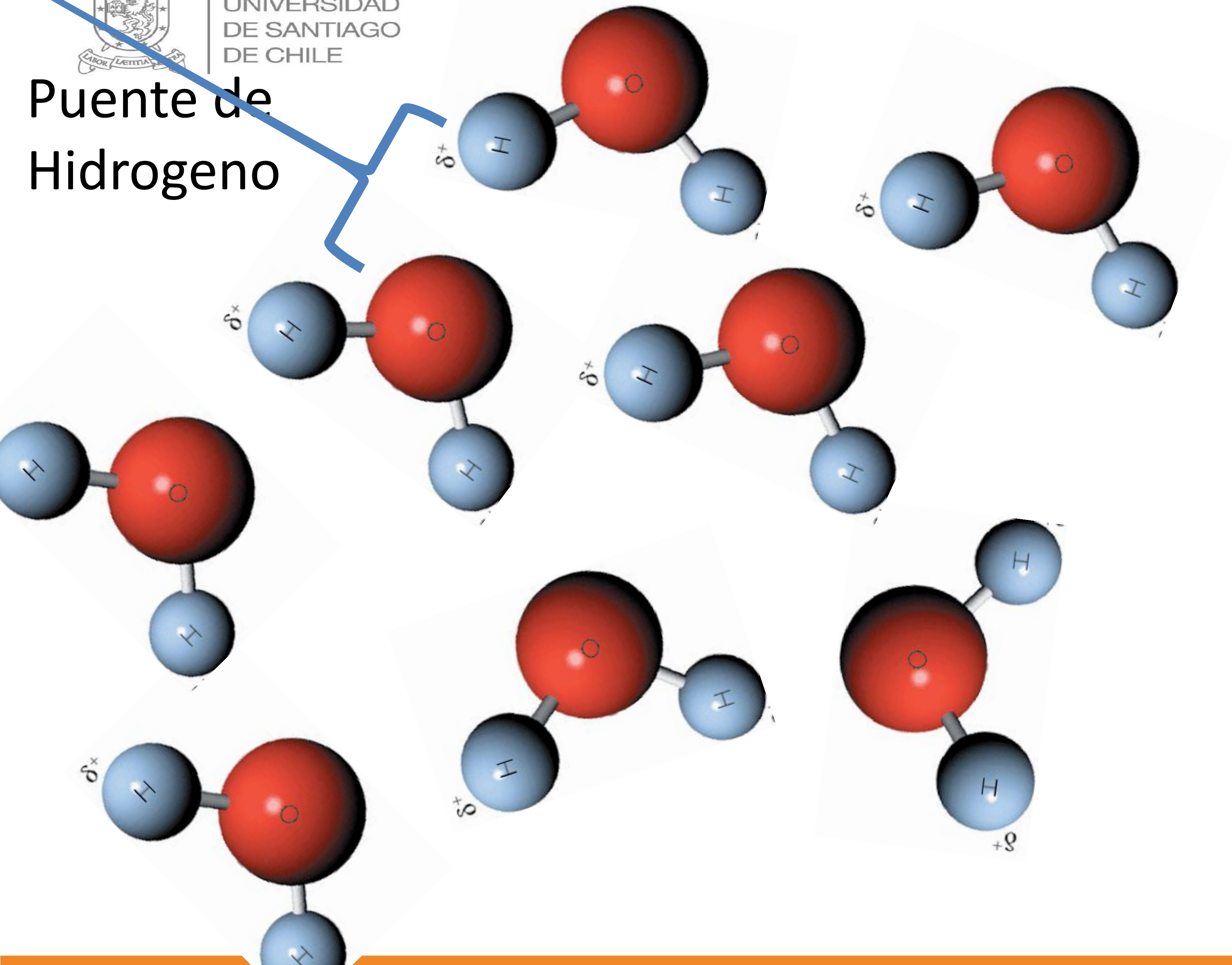
UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Puente de Hidrogeno

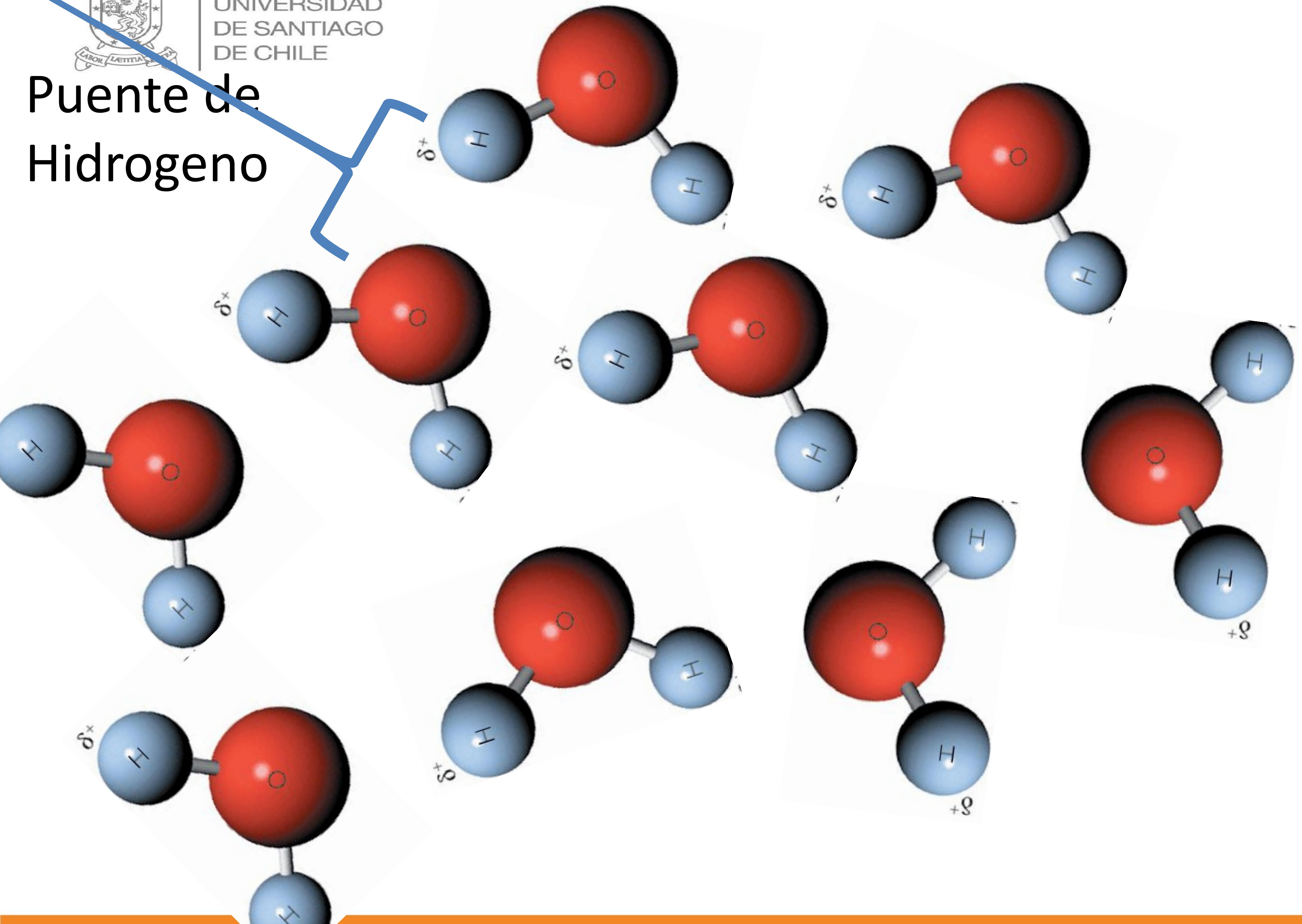


UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

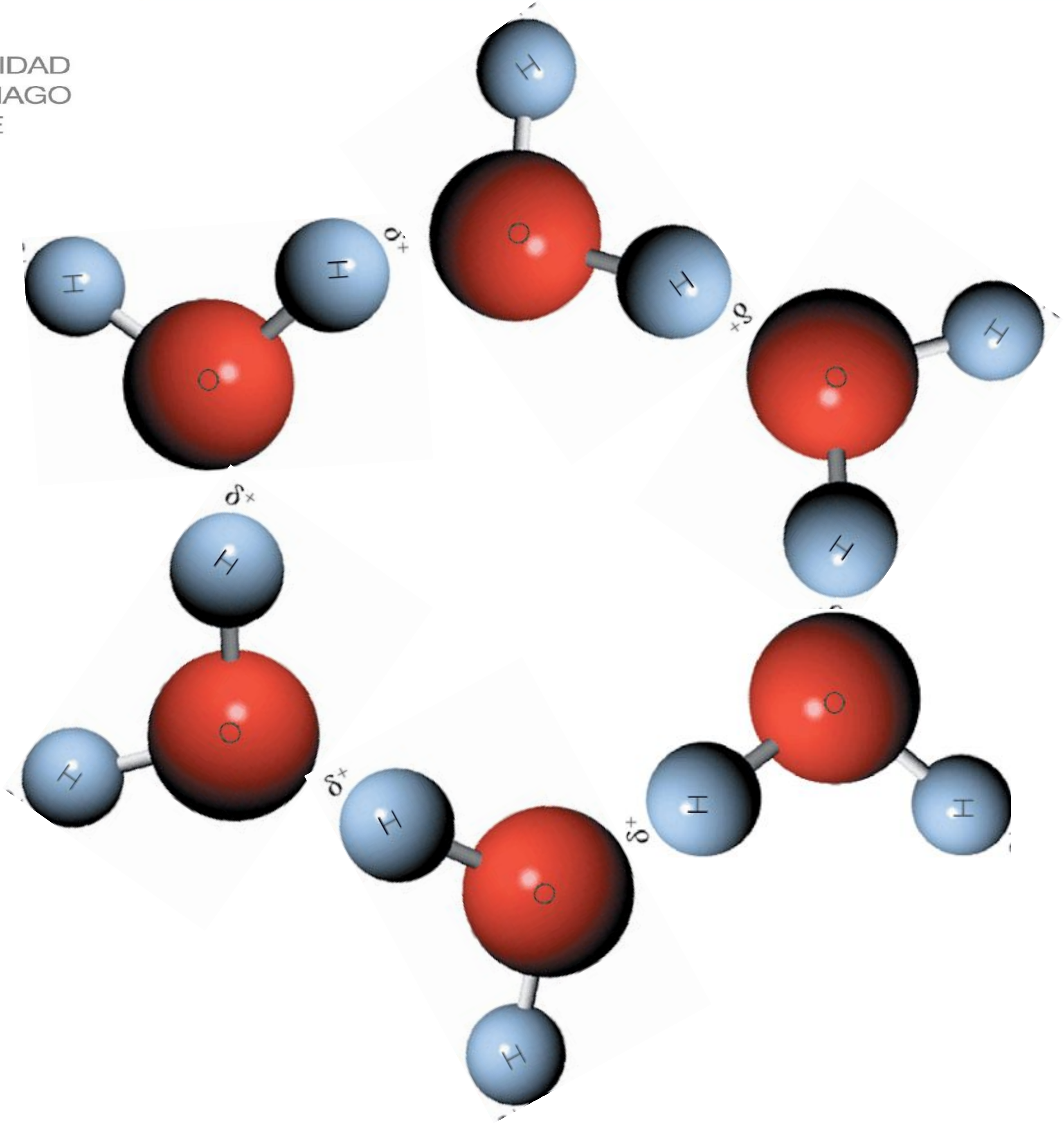
Puente de Hidrogeno



Puente de Hidrogeno



Agua
cristalina
(sólida)



Resumen

Campo Eléctrico

$$\boxed{\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qq_0}}{q_0}}$$

distribuciones discretas

$$\boxed{\vec{E}_q = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \frac{kq}{r^3}\vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i}$$

distribuciones continuas

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} &= k\frac{\Delta q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}) \\
\vec{E} &= k\lim_{\Delta q\to 0}\sum_i \frac{\Delta q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}) \\
\vec{E} &= k\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})
\end{aligned}$$