Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Clasificación de las ecuaciones diferenciales.**
- **Ecuaciones Diferenciales y Modelos Matemáticos.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

- Una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) es una identidad de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

donde x es la variable independiente e y es la función incógnita. La función F representa la relación que combina las derivadas de y.

- Se dice que la ecuación es **ordinaria** pues se deriva con respecto a una sola variable.

Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = -ky, \qquad y'' + 5y' + 6y = \sin(x),$$
$$(x^2 + y^2)dx + 4xy^2 dy = 0, \qquad (1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p+1) = 0.$$

- Cuando la variable dependiente depende de más de una variable independiente, la ecuación se llama **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplo: La ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u = u(x, t)$.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales según el orden

- El **orden** de una ecuación diferencial está dado por el orden mayor de la derivada que aparece en la ecuación.

  Ejemplos:

  1. $y''' - 3y'' + 5y' - y = xe^x - \cos(x)$, es una EDO de orden 3.
  2. $6\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$, es una EDO de orden 2.

Solución de las ecuaciones diferenciales

- En ocaciones la ecuación (1) puede excribirse explícitamente para $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) . \tag{2}$$

- Una función ϕ definida sobre un intervalo I, es llamada una **solución** de la ecuación diferencial (2) si para todo $x \in I$, ϕ es derivable hasta el enésimo orden y se tiene

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)).$$

Ejemplos:

1. Verificar que $y = xe^x$ es una solución de la ecuación:

$$y'' = 2y' - y, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   En efecto, Calculamos $y' = xe^x + e^x$ e $y'' = xe^x + 2e^x$ y sustituimos en la ecuación para obtener que se cumple la igualdad:

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

Ecuación diferencial lineal de orden n

- Una EDO es lineal de orden n si tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x), \qquad (3)$$

  donde $a_i(x) \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, ..., n$.

- Si $F(x) = 0$, la EDO lineal se dice homogénea. Si $F(x) \neq 0$, la EDO lineal se dice no homogénea.

- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x, se dice que la EDO lineal es a coeficientes constantes. De lo contrario se dice que es una EDO es a coeficientes variables.

  Ejemplos:

  1. $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' + 6y = e^x$, es una ecuación lineal no homogénea a coeficientes variables.
  2. $y'' - 2y' + y = 0$, es una ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes.

- Si la ecuación no es de la forma (3), se dice que es una EDO no lineal. Ejemplo:

$$y'' + \sin(y)y' = 0, \qquad y''' + e^x y' + y^2 = 4.$$

Ecuaciones Diferenciales y Modelos Matemáticos

Las ecuaciones diferenciales aparecen frecuentemente en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real. Muchas leyes naturales y hipótesis pueden ser traducidas vía el lenguaje matemático en ecuaciones que envuelven derivadas.

- Modelos de población:

  Modelo de Malthus (1793) que estudia el crecimiento demográfico humano que ocurre como resultado de tasas constantes de mortalidad y natalidad. El modelo considera que, la tasa de crecimiento natural de la población es proporcional a la población total, $P(t)$, es decir

  $$\frac{dP}{dt} = kP(t),$$

  donde k es una constante de proporcionalidad.

- Ley de enfriamiento de Newton: La rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el instante t, T_A es la temperatura ambiente, entonces

  $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

  donde k es una constante de proporcionalidad.

Ecuaciones Diferenciales y Modelos Matemáticos

- Propagación del Covid-19: Es razonable suponer que la tasa o razón con que se propaga no sólo es proporcional a la cantidad de personas, $x(t)$, que la han contraído en el momento t, sino también a la cantidad de sujetos, $y(t)$, que no han sido expuestos todavía al contagio. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy,$$

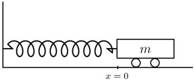
donde k es la constante de proporcionalidad. Consideremos el caso de una ciudad con población constante de n personas y llega un turista de Italia infectado con Covid-19, luego x e y se relacionan de la siguiente forma $x + y = n + 1$. Usando esta información obtenemos el siguiente modelo:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x),$$

Con la condición inicial $x(0) = 1$.

Ecuaciones Diferenciales y Modelos Matemáticos

- Sistema mecánico: Consideremos un carro de masa m sujeta por un resorte a un muro.



Si se desplazamos una distancia x, entonces el resorte ejerce una fuerza restauradora **opuesta** a la dirección del alargamiento y con una magnitud **directamente proporcional** al valor del alargamiento *(Ley de Hooke)*:

$$F_r = -kx, \qquad k > 0,$$

donde k es la constante de rigidez del resorte. Si aplicamos la Segunda Ley de Newton (Fuerza total = masa · aceleración) obtenemos la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t).$$