CONDENSADORES

Durante el desarrollo de éste curso hemos enfatizado que las palabras que denominan un dispositivo o fenómeno contienen una parte importante, a veces fundamental, de su significado. Para los conceptos que comenzaremos a estudiar ahora este punto de vista no se manifiesta de forma tan directa, al menos parcialmente. Un **CONDENSADOR** es un sistema que es capaz de acumular energía eléctrica, no precisamente de condensarla. Sin embargo, la propiedad que caracteriza a un condensador llamada su **CAPACIDAD** si tiene una interpretación directa y fácil.

Un condensador es un sistema que está constituido por dos conductores, próximos, cargados con cargas iguales de signos opuestos. El concepto de capacidad puede ser asimilado al de otras magnitudes físicas que pueden ser descritas por la misma palabra: por ejemplo la capacidad de un envase (el número de litros que es capaz de contener) o la capacidad calórica de una substancia (la cantidad de energía calórica que es capaz de almacenar). La capacidad de un condensador será definida como la cantidad de carga que es capaz de almacenar por la unidad de diferencia de potencial que se genera entre las dos placas conductoras. Esto se anota de la siguiente manera:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

La unidad de capacidad se denomina “Farad”, por supuesto, la capacidad de uan condensador es de un farad cuando cargado con un Coulomb adquieren la diferencia de potencial de un Volt.

Debido a que hay muchas formas diferentes en lsa que se puede enfrentar dos conductores, hay diferentes tipos de condensadores: planos; dos placas planes enfrentadas, cilíndricos dos casquetes cilíndricos concéntricos enfrentados, Esféricos etc. Uno de los condensadores más sencillos de construir es el plano que como dijimos, está constituido por dos placas planas próximas enfrentadas cargadas con cargas iguales de signos opuestos. Ver figura.

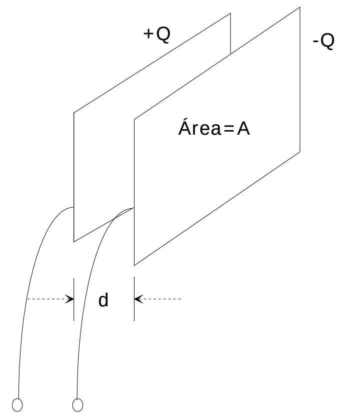
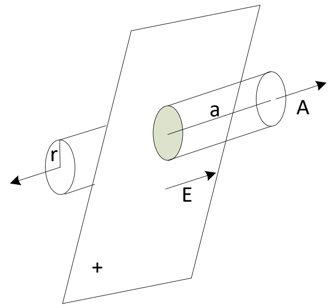


Fig. 1.- Representación esquemática de un condensador plano, los conductores permiten conectar el condensador al sistema eléctrico en el que se desempeñará.

En oportunidades los condensadores se denominan no por su geometría sino por el material de que están hechos así hay condensadores de tántalo, de poliéster, de papel etc., estos condensadores pueden ser de todas las formas que se han enumerado antes, pero, lo que les da su nombre es un material que se introduce entre las placas con el objetivo de mantener la separación evitando que entren en contacto (eso arruinaría al condensador). Desde este punto de vista los condensadores pueden ser de papel de poliéster, cerámicos etc., refiriéndose al material con que se ha construido la hoja que se introduce entre las placas conductoras del condensador, este tema que, como veremos es de alto interés, se tratará más adelante. Aún hay oportunidades en que los condensadores se denotan por el principio de acumulación de las cargas, entre éstos se destaca por su importancia técnica los condensadores electrolíticos.

Las aplicaciones de los condensadores son variadas y van desde el tratamiento de las señales eléctricas con que se miden diversos fenómenos (para filtrar señales indeseables, para hacer que el rendimiento de las máquinas eléctricas sea óptimo para conectar dos secciones diferentes de un circuito eléctrico (condensadores de acoplamiento), hasta la construcción de redes que adapten la entrada un de un circuito a un sistema de amplificación. Una interesante aplicación la constituye la aplicación de condensadores a circuitos que calculan de forma análoga e instantánea algunas magnitudes físicas de la salida en un sistema eléctrico (circuitos integradores, por ejemplo). Durante el desarrollo del presente curso mostraremos algunos ejemplos de aplicación de estos versátiles y útiles elementos de un circuito.

Estudiemos un poco más de cerca lo que ocurre cuando enfrentamos dos placas cargadas con cargas eléctricas iguales pero de diferente signo.



Recordando lo que pasa con un plano infinito calculamos, empleando la ley de Gauss, el campo eléctrico a una distancia a del plano: Haciendo una superficie Gaussiana cilíndrica, perpendicular al plano, observamos que el flujo por el manto del cilindro es cero, debido a que como se estableció en el capítulo anterior (propiedades de un conductor en equilibrio) el campo eléctrico producido por un plano infinito es perpendicular a su superficie en todos los puntos del espacio. Entonces, el flujo es diferente de cero solo en las "tapas" del cilindro que tienen un área πr^2 (ver figura). Como son dos tapas, Gauss dice:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0};$$

En este caso la integral sobre la superficie se puede dividir en dos: flujo por el manto (0) más el flujo por las tapas, entonces:

$$\int \vec{E}_{\text{Manto}} \cdot d\vec{A} + \int \vec{E}_{\text{Tapas}} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La primera de estas integrales se anula pues, como dijimos, el campo eléctrico resulta perpendicular a cada elemento de superficie del cilindro Gaussiano. La segunda integra es muy sencilla de evaluar, como E es constante en todo punto de las tapas del cilindro Gaussiano se puede sacar de la integral dando:

$$\int \vec{E}_{\text{Tapas}} \cdot d\vec{A} = E \cdot \int dA = E \cdot 2\pi r^2$$

Notar que el número 2 aparece porque las tapas del cilindro son dos, por otra parte, si la densidad de carga en las tapas del cilindro es σ (C/m^2), la carga encerrada en la superficie intersecada por el cilindro Gaussiano es $\pi r^2 \sigma$, entonces el campo eléctrico que produce un plano infinito a cualquier distancia de él es:

$$E \cdot 2\pi r^2 = \frac{\pi r^2 \sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Cuando ponemos dos planos próximos, la situación puede describirse como si se tratara de un plano infinito, el campo que produce es igual al de un plano infinito salvo, tal vez en los bordes en el que se desordena un poco, desorden que se puede despreciar sin mucha pérdida de precisión. Si los planos tienen igual carga pero de diferente signo, como tienen igual área presentan la misma densidad de carga, la situación puede representarse como se muestra en la figura siguiente:

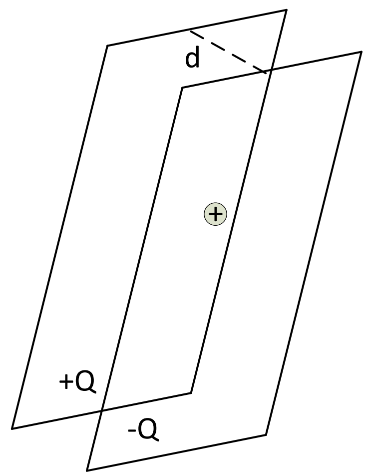


Fig.2.- Esquema de un condensador plano

Si una carga, que supondremos positiva, se pone entre las dos placas, la positiva la repele y la negativa la atrae, como las dos densidades de carga son iguales, la magnitud el campo eléctrico sería:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Es decir tendría un módulo que sería exactamente el doble del que produciría una placa infinita.

La capacidad de un condensador la hemos definido como el cociente entre la carga acumulada por el condensador y la diferencia de potencial que aparece entre los conductores:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \tag{1}$$

Hemos establecido que la CAPACIDAD de un condensador es una medida de su habilidad para acumular carga eléctrica. Para calcular la capacidad de un condensador en situaciones concretas debemos recordar algunos conceptos ya definidos durante el desarrollo de éste curso. Se ha establecido que tanto el campo como el potencial eléctrico son proporcionales al número de cargas presentes en el espacio, esto se ha puesto de manifiesto en el enunciado de la Ley de Coulomb y puede ser interpretado como una consecuencia de la naturaleza vectorial de las fuerzas es así, cómo se ha visto que si dos cargas fijas e_1 y e_2 ejercen fuerzas de módulo kee_1/r^2 y kee_2/r^2 sobre una tercera carga e, la fuerza que ambas ejercen sobre ésta es simplemente la suma vectorial de las fuerzas individuales. Evidentemente, lo mismo ocurre con el campo y con el potencial eléctrico. Este principio de suma es el que conocimos como **principio de superposición** y se manifiesta en diversos procesos físicos, desde luego en todos los que dependen linealmente de una variable.

A una configuración como la mostrada en la figura 2, a pesar de que la carga total de un condensador es nula se acostumbra a designar como carga de un condensador a la carga contenida en una de sus conductores.

Debido a que si se aumenta la cantidad de carga a un condensador, la diferencia de potencial entre sus placas aumenta también proporcionalmente (principio de superposición) se deduce que la capacidad de un condensador no depende de la carga que éste contiene y por lo tanto representa una **propiedad del dispositivo**, ésta propiedad depende de la geometría del condensador y de los materiales de que está hecho.

La expresión (1) nos permite dar una definición operacional de la unidad de capacidad: se dice que la capacidad de un condensador es de un **farad** cuando con la carga de un Coulomb adquiere la diferencia de potencial de un volt. Un farad es una unidad de capacidad muy grande y en la práctica se suele usar submúltiplos de esta: micro farad ($10^{-6)}$ F) o pico farad (10^{-12}F).

Para calcular la capacidad de una pareja de conductores cargados con cargas opuestas suponemos que tienen la carga Q y calculamos la diferencia de potencial que éstos adquieren, la aplicación de la expresión (1) da posteriormente el valor de la capacidad. Si la geometría del sistema es simple el cálculo de la capacidad resulta bastante sencillo. Mientras la situación para el cálculo de la capacidad de un condensador involucra casi siempre a dos conductores enfrentados, **un conductor único** también tiene su capacidad, esta propiedad resulta muy importante de tener en cuenta fundamentalmente en las líneas de transmisión eléctricas pues la existencia de la citada capacidad obliga a tomarla en cuenta cuando se calcula sistemas que transportan energía o señales eléctricas a grandes distancias. Consideremos, como ejemplo, un conductor esférico cargado y aislado, las líneas de campo eléctrico de este conductor serían exactamente las mismas si se tratara de un conductor esférico cargado situado frente a un cascarón esférico conductor, de radio infinito, concéntrico con la esfera con una carga de igual magnitud pero de signo contrario al de la esfera. Entonces podemos identificar al cascarón esférico imaginario con el segundo conductor para formar un condensador, calculemos la capacidad de este condensador:

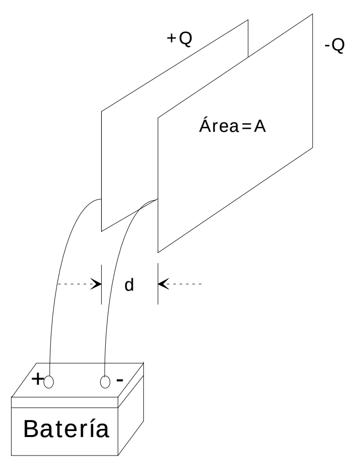
El potencial eléctrico de una esfera de radio R es simplemente k_eQ/R poniendo V=0 para el cascarón infinitamente grande, se tiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_e Q/R} = \frac{R}{k_e} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (2)$$

Debe ser notado que la expresión para la capacidad de un conductor esférico aislado no depende ni de la carga ni del potencial del condensador, dependiendo, como se indicó, sólo de la geometría del sistema.

Condensador de placas plano paralelas.

Supondremos de momento que entre las placas conductoras de los condensadores analizados sólo hay vacío. Dos placas conductoras de área A están separadas una distancia d, como se muestra en la figura 1. La carga que adquiere una de las placas es +Q y la otra –Q al conectar a una batería el sistema los electrones fluyen a la placa negativa y dejan la aplaca positiva, como se ilustra en la figura 2.



Consideremos que las placas tienen igual área la densidad superficial de carga de la placa positiva será $\sigma = Q/A$, mientras que la densidad de carga de la placa negativa será $-\sigma$. Salvo una pequeña deformación en los bordes que se puede despreciar, las líneas de fuerza serán rectas perpendiculares a las placas yendo desde la placa + a la placa -. El valor del campo eléctrico entre las placas se calcula empleando la ley de Gauss dando:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Como el campo entre las dos placas es uniforme, la magnitud de la diferencia de potencial entre las dos placas será Ed, entonces:

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

La capacidad del condensador será, finalmente:

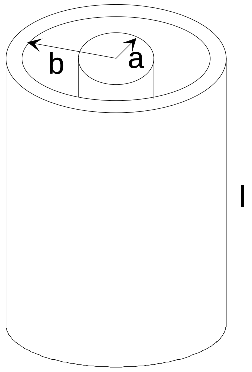
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_0 A}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (3)$$

La capacidad de un condensador plano de placas paralelas es proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la separación entre las placas, como los habíamos anticipado, la capacidad del condensador sólo depende de las características geométricas de éste no de la carga que tenga, más adelante veremos que un material situado entre las placas de un condensador (dieléctrico) tiene una influencia en la capacidad de éste sin embargo, de momento, supondremos entre las placas del condensador hay vacío. Hemos supuesto quela líneas de fuerza en un condensador de placas son rectas que van desde la placa positiva a la negativa, esto no es exactamente así hay efectos de los bordes y pequeñas distorsiones en las líneas de fuerza (ver figuras en los libros de electricidad) pero para casi todos los efectos prácticos la suposición de líneas rectas es una buena aproximación.

Ejemplo 2.- Condensador cilíndrico.

Un conductor sólido de radio a y carga Q es coaxial con una capa cilíndrica de espesor despreciable de radio b>a, y carga –Q, figura 3. Encontremos la capacidad de este condensador de longitud l. No es fácil aplicar argumentos físicos a ésta configuración, aunque se podría aceptar que la capacidad será proporcional a la longitud l del condensador tal como resultó proporcional a la superficie de las placas: simplemente la cargas almacenadas tienen un mayor volumen en el que se pueden distribuir. El campo eléctrico de esta distribución de carga será perpendicular al eje del cilindro y estará confinado a la región



que forman entre ellos. Calculemos primero la diferencia de potencial entre las placas cilíndricas.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

E es el campo eléctrico en la región comprendida entre los cilindros. Mediante la ley de Gauss se ha establecido que la magnitud del campo eléctrico de una distribución de cargas cilíndrica con una densidad lineal de carga λ es $E=2k_e\lambda/r$. Este resultado es también válido aquí porque de acuerdo a la ley de Gauss la carga del cilindro exterior no influye al campo del cilindro interior a él. Como el campo es radial se puede escribir:

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -2k_e\lambda\int_a^b \frac{dr}{r} = -2k_e\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1) empleando el valor de $\lambda=Q/l$, se obtiene:

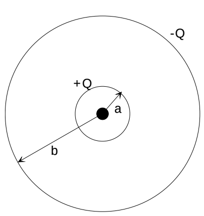
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\left(2k_r Q / l\right)\ln(b / a)} = \frac{l}{2k_e \ln(b / a)} \qquad (4)$$

Como se había supuesto, la capacidad ha resultado proporcional a la longitud del condensador, además de los radios de los cilindros.

La ecuación 4 permite calcular la capacidad por unidad de longitud de dos conductores concéntricos, esta es:

$$\frac{C}{l} = \frac{1}{2k_e \ln(b / a)} \qquad (5)$$

Se deja como trabajo al estudiante establecer que es más efectivo para aumentar la capacidad de un condensador cilíndrico: aumentar su longitud o subir el valor del radio a de él.



Ejemplo 3 condensador esférico:

Un condensador esférico consiste en un cascarón esférico de radio b y carga –Q concéntrico con una pequeña esfera conductora de radio a y carga +Q, como se muestra en la figura. Encontrar la capacidad de ese condensador.

El campo exterior a una distribución esférica d carga es radial y tiene un valor dado por la expresión k_eQ/r^2. En este caso, el resultado aplica al campo entre las esferas (a<r<b). La ley de Gauss nos dice que sólo contribuye al campo la esfera interna entonces la diferencia de potencial entre las esferas es:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_e Q \left[\frac{1}{r}\right]_a^b$$
$$= k_e Q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

la magnitud de la diferencia de potencial es

$$\Delta V = \left|V_b - V_a\right| = k_e Q \frac{(b-a)}{ab}$$

Sustituyendo éste valor en la expresión (1) se obtiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{ab}{k_e (b-a)} \qquad (6)$$

Muestre que el resultado obtenido es equivalente al que corresponde a la capacidad de un conductor esférico aislado, haciendo que $b \to \infty$.

Conexión de condensadores y capacidad equivalente. En oportunidades resulta necesario conectar varios condensadores. Hay dos tipos de conexiones que es posible hacer en estas circunstancias: conexión en serie y en paralelo. En la figura siguiente se muestra los dos tipos de conexión:

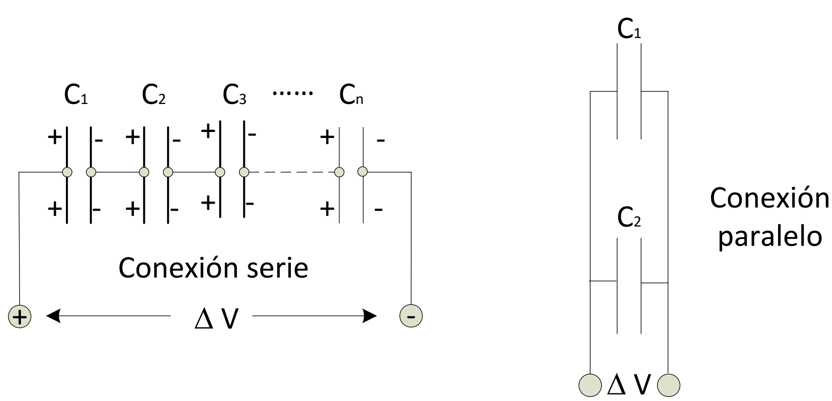


Fig. 3 Esquema de conexiones de condensadores en serie y en paralelo

En la conexión serie toda la carga pasa por cada condensador, cada dispositivo adquiere la misma carga. Lo que ocurre aquí es que si los condensadores originalmente no tiene carga las cargas transferidas desde la fuente se distribuyen en la primera placa (izquierda) del primer condensador, una carga igual pero de sino contrario se transfiere a la última placa de la derecha del último condensador, los condensadores del centro se cargan por inducción sin transferencia neta de carga. Esto explica la aparente paradoja de que en una conexión serie la carga transferida total tiene el mismo valor que la que adquiere cada condensador. El cálculo de la capacidad de un dispositivo que reemplazaría a los dos condensadores a ésta capacidad le llamaremos capacidad equivalente. Para el caso de los condensadores conectados en serie es sencillo, basta para ello considerar que la carga de todos los condensadores es igual pero la diferencia de potencial en los ornes de cada uno de ellos será diferente, sólo que la suma de las dos diferencias será igual a Δv, considerando para simplificar, sólo dos condensadores se tiene: $\Delta v_1+\Delta v_2=\Delta v$, luego, recurriendo a la definición de capacidad tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}=\Delta V,\\
&Q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=\Delta V,\\
&\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)=\frac{\Delta V}{Q}=\frac{1}{C}
\end{aligned} \tag{7}$$

Entonces, el valor recíproco de la capacidad equivalente es igual a la suma de los valores recíprocos de cada condensador, este resultado se generaliza para n condensadores conectados en serie, escriba la expresión que resulta.

Cuando se conectan en paralelo, el condensador equivalente se calcula notando que la diferencia de potencial para los dos (o más) condensadores será igual pero, las cargas serán ahora diferentes, la suma de las cargas que toma cada condensador será la carga total que adquiere el sistema, entonces:

$$\begin{gathered}
Q_1+Q_2=Q,\text{ pero } Q_1=C_1\Delta V;\, Q_2=C_2\Delta V;\\
C_1\Delta V+C_2\Delta V=Q\\
\Delta V\left(C_1+C_2\right)=Q\Rightarrow C_1+C_2=\frac{Q}{\Delta V}=C
\end{gathered} \tag{8}$$

Es decir, la capacidad equivalente de dos o más condensadores conectados en paralelo es igual a la suma de las capacidades. La generalización de estos resultados a más condensadores es trivial, baste para ello considerar que en ningún sitio hemos hecho alusión de que se trata de dos condensadores.

Energía acumulada en un condensador

La teoría del potencial nos ha enseñado que mover una carga en un campo eléctrico requiere de transacciones de energía (se hace trabajo en contra del campo o el campo hace trabajo a favor de nosotros). Cuando introducimos carga en un condensador hacemos muy poco trabajo cuando ponemos entre sus placas la primera carga eléctrica. Pero a medida que el condensador se carga se establece un campo eléctrico creciente que tenemos que vencer a medida que acumulamos carga en éste. Así cada nueva carga que ponemos en el condensador deberá vencer un campo eléctrico cada vez mayor.

El trabajo que debemos realizar para incrementar la carga del condensador en una magnitud dQ, se puede anotar como: $dW=\nabla V\cdot dQ$. Entonces el trabajo realizado al cargar el condensador y por consiguiente, como tratamos con campos conservativos, la energía acumulada en el dispositivo se puede calcular haciendo la siguiente integral:

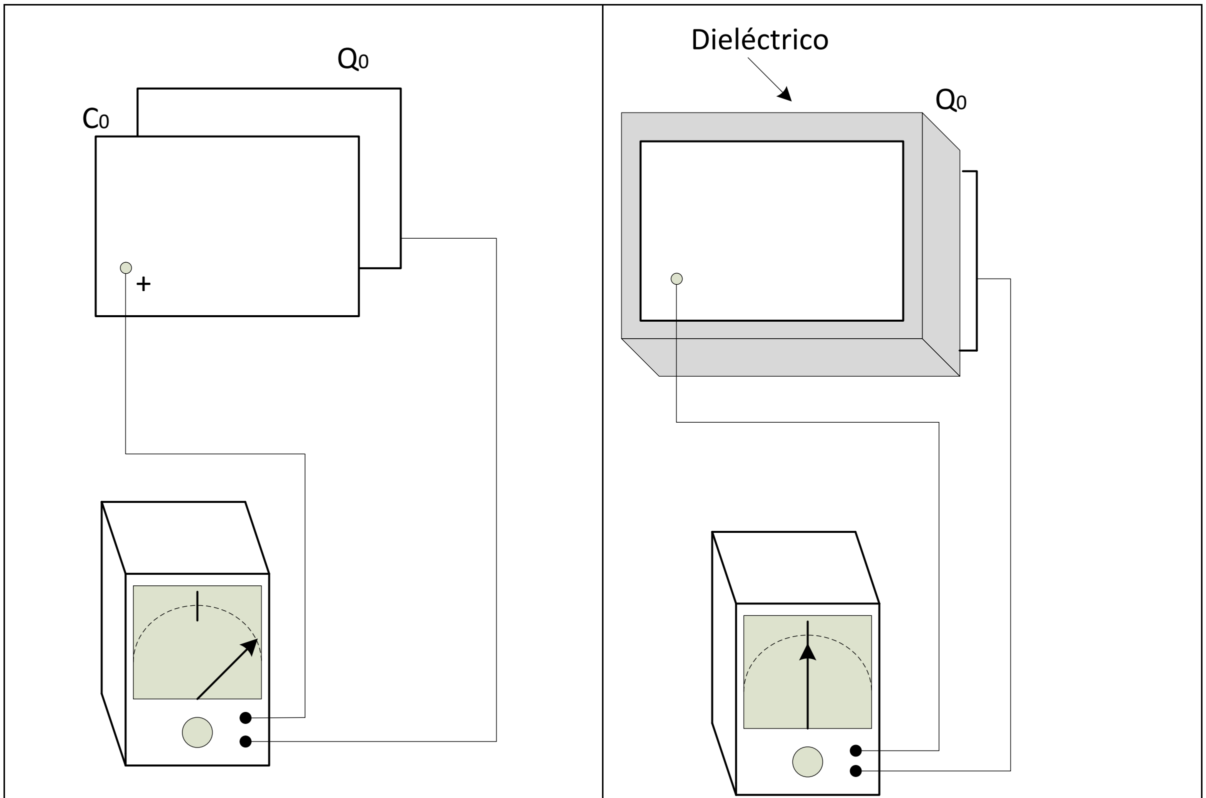
$W=\int_0^q \Delta V\cdot dQ$ como $\Delta V=\frac{Q}{C}$ $W=\int_0^Q \frac{Q}{C}dQ$, es decir: $W=\frac{Q^2}{2C}$ como $C=\frac{Q}{\Delta V}$, se puede anotar para la energía acumulada en el sistema las expresiones equivalentes:

$$U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}Q\Delta V=\frac{1}{2}C\left(\Delta V\right)^2$$

Condensadores con dieléctrico.

Como habíamos comentado un dieléctrico es un material que no conduce cargas (o al menos no las conduce con facilidad), es un aislador. En la figura siguiente se muestra un experimento en el que un condensador se ha cargado con una determinada carga y luego se **retira de la batería**. El condensador quedará cargado con la carga Q_0 y la diferencia de potencial que manifiesta entre sus bornes se ha esquematizado en la parte (a) de la figura siguiente.

Supongamos ahora que sin variar la geometría del condensador se introduce un dieléctrico entre sus placas, el efecto observado es el que se muestra en la parte (b) de la figura, esto es, la diferencia de potencial del condensador disminuye. ¿Qué pudo haber producido este efecto? Sabemos que la carga se conserva y por lo tanto, como no hemos introducido carga en el sistema (el dieléctrico estaba neutro), la única posibilidad para explicar este efecto es que haya cambiado la capacidad del condensador



(a). Condensador cargado sin dieléctrico. Toma la tensión de la batería.	(b) Condensador al que se le ha introducido un dieléctrico.

Si llamamos ΔV_0 al voltaje que el condensador adquirió cuando se conectó a la batería para cargarlo (este tiene que ser necesariamente igual al de la batería) los voltajes inicial y final estarán relacionados por la expresión:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$$

Como $\Delta V < \Delta V_0$ se concluye que $\kappa > 1$; y como hemos dicho, Q_0 no cambia, llegamos a la conclusión que la capacitancia ha cambiado al valor:

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\frac{\Delta V_0}{\kappa}} \kappa \frac{Q_0}{\Delta V}$$

$$C = \kappa C_0$$

El dieléctrico tiene dos efectos beneficiosos para los condensadores: el primero es que aumenta su capacidad, el segundo es que hace que se pueda someter a mayores tensiones sin que se produzcan averías. En efecto, parece que es posible aumentar la capacidad de un condensador simplemente disminuyendo la distancia entre sus placas. Esto es verdad, pero, cuando la distancia entre placas alcanza un mínimo salta una chista entre las placas del condensador y produce una falla catastrófica. Los dieléctricos tienen una gran capacidad para evitar este efecto y esta se mide en Volt/metro en la tabla siguiente daremos algunas de cifras para diferentes sustancias:

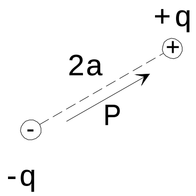
Material	Constante dieléctrica κ	Resistencia (10^6V/m)
Aire (seco)	1.00059	3
Bakelita	4.9	24
Papel	3.7	16
Clorhidrato de polivinilo	3.4	40
Porcelana	6	12
Aceite de siliconas	2.5	15
Titanato de estroncio	233	8

Entonces, por ejemplo introducir una hoja de papel aumenta en 3.7 veces la capacidad de un condensador, además se podría someter a una tensión de 16×10^6 Volts sin que salte una chispa entre sus placas, claro que eso para un condensador con una separación de 1 metro entre placas. Calcule, por ejemplo cual sería la capacidad de ese condensador, haga lo mismo con otros ejemplos pensando que la separación entre las placas sea, por ejemplo de 0,2 mm.

Hasta ahora hemos trabajado con un hecho experimental: la capacidad de un condensador aumenta cuando se introduce un dieléctrico entre sus placas, pero qué es lo que verdad ocurre? La explicación de este fenómeno viene de entender lo que le ocurre, a nivel microscópico a un dieléctrico cuando se introduce entre las placas de un condensador cargado o un condensador descargado, conectándolo después a una batería. Para eso trataremos brevemente el problema físico de introducir un dieléctrico entre las placas de un condensador cargado.

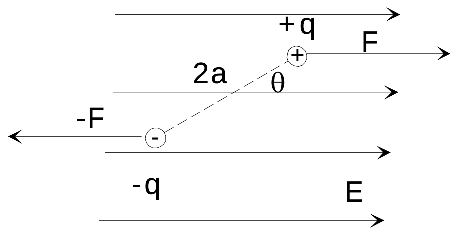
Dipolo eléctrico en un campo eléctrico.

Dos cargas eléctricas de igual magnitud, separadas a una distancia 2a forman



un dipolo, como se muestra en la figura. Se define como **momento del dipolo eléctrico** para esta configuración al vector **P** dirigido desde -q a +q a lo largo la línea que une a las cargas. La magnitud del momento del dipolo es, por definición:

$$p \equiv 2aq \tag{9}$$



Supongamos ahora que el dipolo está situado en un campo eléctrico externo uniforme **E**, como se muestra en la figura. Este campo es establecido por alguna otra distribución de cargas. Ponemos el dipolo en el campo de tal manera que forma un ángulo θ con el eje del dipolo. La fuerza neta que aparece sobre el dipolo es nula, sin embargo, el torque que aparece por la acción de estas fuerzas es diferente de cero.

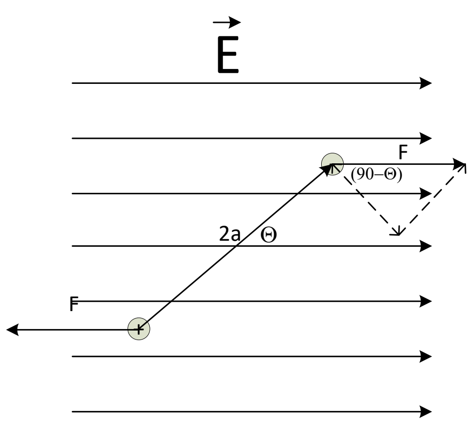
Para calcular el torque ejercido por el campo sobre el dipolo lo referiremos al punto medio de éste. Si el eje del dipolo hace un ángulo θ con este, el torque debido a la carga positiva es igual a la componente perpendicular de la fuerza por su brazo (a), entonces, como se puede deducir fácilmente de la figura, se tiene:

$$F_{\perp}=F\cos(90-\theta);\ \text{o bien}\ F_{\perp}=F\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (10)$$

El torque sobre la carga negativa tiene la misma magnitud y se suma al calculado anteriormente por lo que se tiene:

$$|\tau|=F(a\,\mathrm{sen}\,\vartheta+a\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad F(11)$$

como $F=qE$, $|\tau|=2aqE\,\mathrm{sen}\,\theta$, reemplazando $2aq=p$, el torque total se puede poner como:



$$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E} \qquad (12)$$

Es posible determinar la energía potencial del sistema, en éste caso un dipolo en un campo eléctrico externo como función de la orientación del dipolo respecto al campo. Primero, reconocemos que para cambiar la orientación del dipolo de manera que resulte menos alineado con el campo debemos hacer un trabajo. El trabajo realizado se acumula como energía potencial del sistema. El trabajo realizado para rotar el dipolo un ángulo $d\theta$ es: $dW=\tau d\theta$. Como $\tau=pE\,\mathrm{sen}\,\theta$ el trabajo para una rotación desde el ángulo θ_i al θ_f produce un cambio de energía potencial:

$$U_f - U_i = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$= \int_{\theta_i}^{\theta_f} pEsen\theta d\theta$$

$$= pE\int_{\theta_i}^{\theta_f} sen\theta d\theta$$

Integrando esta expresión e invirtiendo el orden se tiene:

$$U_f\text{-}U_i = pE[\cos\theta_i - \cos\theta_f] \qquad (13)$$

Claramente $\cos\theta_i$ depende de la orientación inicial del dipolo. Como el nivel de energía potencial de un sistema se puede fijar arbitrariamente, elegimos como nivel cero $\theta_i=\pi/2$ (nivel de referencia de la energía potencial del sistema). Entonces tendríamos $U_i=0$ y $U=U_f$, y el valor final de U se pone como:

$$U=-pE\cos\theta \qquad (14)$$

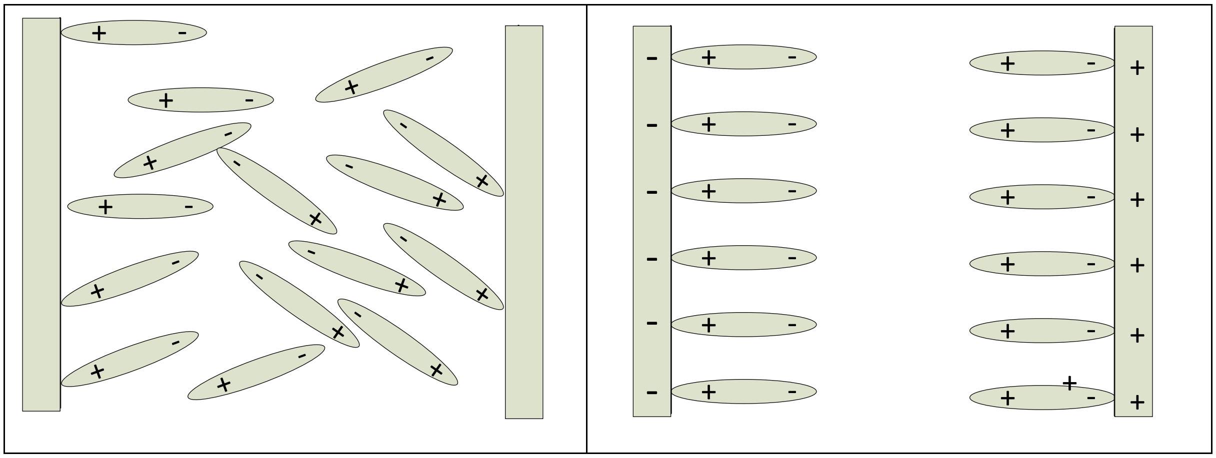
Expresión que se puede escribir como el producto punto entre los vectores **p** y **E**:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (15)$$

Estas expresiones pueden ser comparadas con las obtenidas para un desplazamiento de un objeto de masa m en el campo gravitatorio, sólo que en un caso se trata de desplazamientos angulares y en el otro de desplazamientos rectilíneos.

Cuando en una molécula hay desplazamientos entre partes cargadas positiva y negativamente acumulando cargas de cada signo en diferentes partes de ella, se dice que está polarizada. En el agua esta condición está siempre presente por lo que sus moléculas se denominan “moléculas polares” y se considera el agua como un buen ejemplo de molécula polar, en contraste, hay materiales que están constituidos por moléculas no polares.

Ahora podemos dar una descripción atómica de un dieléctrico. Establezcamos primero lo que ocurre cuando se introduce un dieléctrico entre las placas de un condensador, sin perder generalidad, consideraremos que siempre se hablará de condensadores planos, haciendo así más sencillo el problema desde el punto de vista geométrico.



Un dieléctrico es un material formado por moléculas polares, es decir por dipolos como los que se muestran en la parte izquierda de la figura. Inicialmente las moléculas polares están orientadas al azahar, en general la carga neta del dieléctrico es nula, las cargas negativas están balanceadas por las positivas. Cuando se introduce un dieléctrico entre las placas del condensador, sus moléculas están desordenadas, como se muestra en la figura. El efecto que esta introducción tiene es, como hemos visto, aumentar la capacidad del condensador. El nuevo valor de la capacidad del condensador sería:

$$C' = \frac{K\varepsilon_0 A}{d}, \ \kappa > 1 \Rightarrow C' > C \qquad (16)$$

Ahora estamos en condiciones de establecer la causa de este aumento de capacidad desde el punto de vista atómico.

Habíamos encontrado que, cuando no se introducen nuevas cargas eléctricas a un condensador cargado previamente, la diferencia de potencial ∇V_0 entre las placas se reduce cuando introducimos un dieléctrico entre ellas, entonces combinando la expresión para la capacidad de un condensador plano:

$$C' = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Con la relación recién encontrada C'=κC, es inmediato deducir:

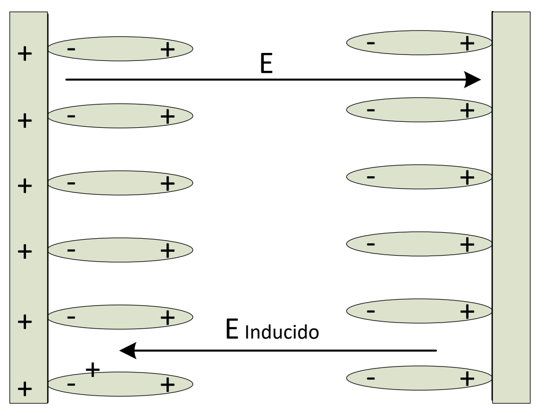
$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad C' = \frac{\varepsilon_0 A}{d} K \qquad (17)$$

Así: $C = \frac{C'}{K}$, como $C = \frac{Q}{\Delta V}$ y C'>C resulta $\frac{Q}{\Delta V'} > \frac{Q}{\Delta V}$ y $\frac{1}{\Delta V'} > \frac{1}{\Delta V}$ y $\Delta V' < \Delta V$ porque $E' = \Delta V' d$, y $E = \Delta V d$, resulta inmediato que E'<E, así que todo ocurre porque la introducción de un dieléctrico entre las placas del

condensador hace que la magnitud del campo eléctrico que se establece entre ellas disminuya. La nueva magnitud del campo eléctrico $\mathbf{E_0}$ entre las placas se reduce a:

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

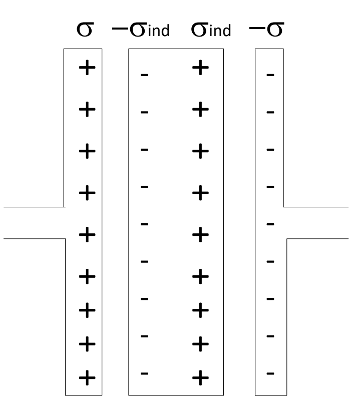
Cómo puede ocurrir esto? Consideremos nuevamente la situación entre las placas del condensador. En la figura siguiente se ha representado el condensador y los campos eléctricos involucrados en la maniobra:



Cuando introducimos un dieléctrico entre las placas de un condensador, si este está hecho con moléculas polares, se polarizan y si no es polar, la presencia del campo eléctrico induce un nivel de polarización en él. En todos los casos este fenómeno induce un nuevo campo eléctrico en el interior del condensador. Supongamos que el campo eléctrico en el condensador antes de introducir un dieléctrico sea $\mathbf{E_0}$, la introducción del dieléctrico induce un campo $\mathbf{E_{ind}}$, que tiene una dirección opuesta al campo original, como se muestra en la figura. De esta manera, el campo eléctrico neto en el dieléctrico tiene la magnitud:

$$E = E_0 - E_{ind}. \tag{18}$$

Para el condensador de placas planas de la figura se puede calcular explícitamente los valores de los campos inducidos. Para esto recordamos que:



$$C = \frac{Q}{\Delta V}; \qquad \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{Q}{A} = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{d}$$ como $\frac{Q}{A} = \sigma$ y

$\Delta V = Ed$ se tiene: $\sigma = \frac{\varepsilon_0 E \cancel{d}}{\cancel{d}} \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\text{Para } C' \text{ tenemos las siguientes relaciones:}$$

$$C' = C\kappa = \frac{Q}{\Delta V}\kappa;\ C' = \frac{Q}{\Delta V'} \Rightarrow C' = \frac{Q}{E'd}$$

$$E' = \frac{Q}{dC'},\ \text{para condensador plano: } C' = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\kappa \text{ y}$$

$$E' = \frac{Q}{\cancel{d}\,\frac{\varepsilon_0 A}{\cancel{d}}\kappa} \text{ de donde: } E' = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0}, \text{así que}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};\ E' = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0} \Rightarrow E' < E, \text{ como se supuso}$$

Recordando que E_0 es el campo entre las placas del condensador sin dieléctrico y E' el campo entre placas después de introducir un dieléctrico resulta claro que tiene que cumplirse la relación:

$$E' = E_0 - E_{inducido}$$

O, en términos de las densidades de carga:

$$\frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{inducido}}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_{inducido} = \sigma - \frac{\sigma}{\kappa} \Rightarrow \sigma_{inducido} = \sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \Rightarrow \sigma_{inducido} = \sigma\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)$$

Habíamos observado que la energía de un condensador disminuye cuando se inserta en éste un dieléctrico, entonces algún agente debe realizar un trabajo negativo para que esto ocurra. El trabajo se produce porque la distribución de cargas produce un campo eléctrico no uniforme en los bordes del condensador las cargas inducidas en el sistema generan una fuerza contraria a que el dieléctrico se deslice entre las placas, así que el operador debe forzar al dieléctrico a entrar en el condensador, produciendo el trabajo negativo en éste.