Capítulo 5

Aplicaciones de Ecuaciones Ordinarias de Segundo Orden

Así como hemos hecho con las ecuaciones diferenciales de primer orden, presentamos ahora algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

5.1 Curvas de Persecución

La primera aplicación que veremos se refiere a la determinación de la trayectoria que sigue un cazador al perseguir su presa.

Ejemplo 5.1.1. Supongamos que un barco A, que viaja a velocidad constante α, está persiguiendo a un barco B que viaja a velocidad constante β. En $t = 0$, suponemos que A se encuentra en el origen $(0, 0)$ y que B está en el punto $(b, 0)$, $b > 0$; y que para $t > 0$, B se desplaza por la recta $x = b$. Al cabo se t horas, A se encuentra en $P = (x, y)$ y B en $Q = (b, \beta t)$ (Figura 5.1). Determine la trayectoria de A como función de x para el caso $\alpha > \beta$.

Como el barco A persigue al barco B, la recta tangente al gráfico de la curva $y = y(x)$ en el punto P debe pasar por el punto Q. Esto implica

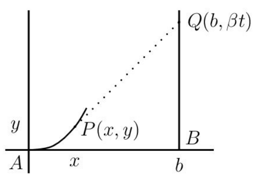

Figure 5.1: Curvas de Persecución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-\beta t}{x-b} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{y - y'(x-b)}{\beta} \, .$$

Como A avanza con velocidad constante α, en el tiempo t recorre αt kilometros. Luego la longitud de la curva que recorre A en el tiempo t es αt; es decir,

$$\alpha t = \int_0^x \sqrt{1+(y'(u))^2}\, du \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta}(y - y'(x-b)) = \int_0^x \sqrt{1+(y'(u))^2}\, du \, .$$

Poniendo $y' = w$, tenemos

$$\frac{\alpha}{\beta}(y - w(x-b)) = \int_0^x \sqrt{1+w(u)^2}\, du \, ,$$

y derivando con respecto a x

$$\frac{\alpha}{\beta}(y' - w'(x-b) - w) = \sqrt{1+w^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta}(b-x)w' = \sqrt{1+w^2} \, .$$

Separando variables obtenemos la ecuación

$$\frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{dx}{x-b} \, .$$

Las condiciones del problema indican que $w(0) = 0$. Integrando tenemos

$$\ln\left(w + \sqrt{1+w^2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{x-b}{-b}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad w + \sqrt{1+w^2} = \left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{1+w^2} = -w + \left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + w^2 = w^2 - 2w\left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \left(\frac{b}{b-x}\right)^{2\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \quad 2w\left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\frac{b}{b-x}\right)^{2\frac{\beta}{\alpha}} - 1$$

$$\Longrightarrow \quad w(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{b}{b-x}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad w(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} - \left(1-\frac{x}{b}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \frac{b}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1+\frac{\beta}{\alpha}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\right] + \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} \, .$$

Cuando el barco A cruza la recta $x = b$ captura al barco B. Por lo tanto el punto en que el barco A intercepta al barco B es

$$(b, y(b)) \;=\; \left(b, \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \,,$$

y el tiempo $\bar{t}$ que demora la captura es

$$\bar{t} \;=\; \frac{b\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \,.$$

Ejercicio 5.1.2. Desarrolle el ejemplo anterior para el caso $\alpha = \beta$.

Ejercicio 5.1.3. Un conejo parte del punto $(2, 0)$ y corre por $x = 2$ a una velocidad de 10 Km/H. Al mismo tiempo un perro sale de $(0, 0)$ con velocidad 15 Km/H persiguiendo al conejo. ¿ Cuanto tiempo demora el perro en pillar al conejo?

5.2 Movimiento de una Partícula

La ecuación del movimiento de una partícula, según la Segunda Ley de Newton, es

$$\mathbf{m}\,\ddot{x} \;=\; \mathbf{F}\,, \tag{5.1}$$

donde

$\mathbf{F}$ es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

$\mathbf{m}$ es la masa de la partícula.

$\ddot{x}$ es la aceleración de la partícula relativa a algún sistema de referencia.

A.- Movimiento rectilíneo.
1.- Partícula proyectada verticalmente hacia arriba.
Supondremos que las únicas fuerzas que actúan son:

a) la fuerza gravitacional mg, donde m es la masa de la partícula, y

b) una fuerza de resistencia proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa.

Designemos por $x(t)$ la altura en que se encuentra la partícula medida desde el punto de propulsión en un instante t posterior, y por $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ su velocidad. Reemplazando en (5.1) obtenemos la ecuación de segundo orden

$$m\ddot{x} = -mg - mk(\dot{x})^2 \,,$$

que se reduce, usando la relación $v = \dot{x}$ y simplificando por m, a

$$\dot{v} = -g - kv^2 \,. \tag{5.2}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{\dot{v}}{g + kv^2} = -1 \Longleftrightarrow \frac{dv}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\; v\right)^2} = -g dt \,.$$

Integrando el lado izquierdo entre $v_0 = v(0)$ (velocidad inicial) y $v(t)$ y el lado derecho entre 0 y t se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\; v(t)\right) = -t + \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\; v_0\right) \,.$$

Observe que para

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\; v_0\right)$$

tenemos $v(\bar{t}) = 0$. Luego este $\bar{t}$ es el tiempo que debe trascurrir para que la partícula alcance su altura máxima.
Para poder calcular $\bar{x} = x(\bar{t})$, es decir, la altura máxima que alcanza la partícula, vamos a escribir nuestra ecuación (5.2) en términos de v y de x.
Tenemos

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\, v \,,$$

y reemplazando en (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} v\,\frac{dv}{dx} = -g - kv^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{vdv}{g + kv^2} = -dx \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2kvdv}{g + kv^2} = -2kdx \,. \end{aligned}$$

Observemos que como la altura inicial $x(0) = 0$, tenemos que $v_0 = v(x)/_{x=0}$. Entonces integrando el lado izquierdo entre $v_0 = v(0)$ y $v(x)$ y el lado derecho entre 0 y x, se obtiene

$$\ln(g + kv(x)^2) - \ln(g + kv_0^2) = -2kx \,.$$

Para calcular $\bar{x}$ resolvemos $v(\bar{x}) = 0$; luego

$$\bar{x} = -\frac{1}{2k}(\ln(g) - \ln(g + kv_0^2)) = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{g + kv_0^2}{g}\right) \;=\; \frac{1}{2k} \ln\left(1 + \frac{k}{g} v_0^2\right) \,.$$

2.- Partícula proyectada verticalmente hacia abajo.
Supondremos que las únicas fuerzas que actúan son:

a) la fuerza gravitacional mg, donde m es la masa de la partícula, y

b) una fuerza de resistencia proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa.

Designemos nuevamente por $x(t)$ la distancia recorrida por la partícula en un instante t posterior, y por $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ su velocidad.
Nuestra ecuación es ahora

$$m\ddot{x} = mg - mk(\dot{x})^2\,,$$

ya que ahora la fuerza gravitacional está a favor del movimiento de la partícula. Usando la relación $v = \dot{x}$ y simplificando por m, obtenemos

$$\dot{v} = g - kv^2\,. \tag{5.3}$$

Sea $v_0 = v(0)$ la velocidad inicial. Observe primero que si $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$, tenemos la solución constante $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ y por lo tanto $x(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\, t\,.$
Para $v_0 \neq \sqrt{\frac{g}{k}}$ la ecuación se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dv}{g-kv^2} = dt \iff & \frac{dv}{1-(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v)^2} = gdt\\ \iff & \frac{dv}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}\,v} + \frac{dv}{1+\sqrt{\frac{k}{g}}\,v} = 2gdt\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Como la ecuación (5.3) cumple las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones (Teorema 4.1.1) y $\tilde{v}(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ es solución, la condición

$$v_0 < \sqrt{\frac{g}{k}} \implies v(t) < \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \forall\, t \geq 0\,,$$

y la condición

$$v_0 > \sqrt{\frac{g}{k}} \implies v(t) > \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \forall\, t \geq 0\,.$$

Luego en cualquiera de los dos casos se tiene

$$\frac{1-\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0} \;>\; 0 \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

Por lo tanto, integrando el lado izquierdo de (5.4) entre v_0 y $v(t)$ y el lado derecho entre 0 y t se obtiene

$$\sqrt{\frac{g}{k}}\left[-\ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0}\right) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(t)}{1+\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0}\right)\right] = 2gt\,.$$

Agrupando y exponenciando se tiene

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v(t)}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v(t)}\;\frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v_0}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v_0} = e^{2\sqrt{kg}\,t}\,.$$

Despejando la variable v y denotando $K = \frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v_0}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v_0}$, se tiene

$$K\sqrt{g}+K\sqrt{k}\,v \;=\; (\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v)\,e^{2\sqrt{kg}\,t}\,.$$

Esto es,

$$v\sqrt{k}\left(K+e^{2\sqrt{kg}\,t}\right) \;=\; \sqrt{g}\left(e^{2\sqrt{kg}\,t}-K\right)\,.$$

Así

$$\frac{dx}{dt} \;=\; v \;=\; \sqrt{\frac{g}{k}}\;\frac{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;-\;K}{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;+\;K}\,,$$

que implica

$$dx \;=\; \sqrt{\frac{g}{k}}\;\frac{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;-\;K}{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;+\;K}\,dt\,. \tag{5.5}$$

Sea $w = K+e^{2\sqrt{kg}\,t}$; entonces $dw = 2\sqrt{kg}\,e^{2\sqrt{kg}\,t}\,dt$, y como $w-K = e^{2\sqrt{kg}\,t}$, obtenemos

$$dw \;=\; 2\sqrt{kg}\cdot(w-K)\,dt\,.$$

Luego

$$\frac{1}{2\sqrt{kg}}\;\frac{dw}{w-K} \;=\; dt\,.$$

De esta forma, reemplazando en (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
dx &= \sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{(w-K)\;-\;K}{w}\cdot\frac{dw}{2\sqrt{kg}\,(w-K)}\\
&= \sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{kg}}\cdot\frac{w-2K}{w\,(w-K)}\,dw\\
&= \frac{1}{2k}\cdot\left[\frac{1}{w-K}\;-\;\frac{2K}{w\,(w-K)}\right]dw\\
&= \frac{1}{2k}\,\frac{dw}{w-K}\;+\;\frac{1}{k}\left[\frac{1}{w}\;-\;\frac{1}{w-K}\right]dw\\
&= \frac{1}{k}\,\frac{dw}{w}\;-\;\frac{1}{2k}\,\frac{dw}{w-K}\,.
\end{aligned}$$

Como para todo $t\geq 0$ se tiene $w(t)\geq w(0) = 1+K>0$, integrando obtenemos

$$x(w) \;=\; \frac{1}{k}\,\ln\left(\frac{w}{K+1}\right)\;-\;\frac{1}{2k}\,\ln\left(\frac{w-K}{1}\right)\,.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{k}\,\ln\left(\frac{K+e^{2\sqrt{kg}\,t}}{1+K}\right) - \frac{1}{2\,k}\,\ln\left(e^{2\sqrt{kg}\,t}\right) \\
&= \frac{1}{k}\,\ln\left(\frac{K+e^{2\sqrt{kg}\,t}}{K+1}\right) - \sqrt{\frac{g}{k}}\,t\,. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Observe que cuando $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$, tenemos $K = 0$, y reemplazando este valor en (5.6), se recupera la solución $x(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,t$, obtenida anteriormente.

3.- Partícula proyectada hacia arriba desde la superficie de la Luna.
Supondremos que la única fuerza que domina es la fuerza gravitacional y que esta varía con la altura. Se sabe que la fuerza gravitacional de cualquier planeta o luna varía inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro. Usando esto tenemos la ecuación

$$m\ddot{r} = -kr^{-2}\,,$$

donde $r(t)$ es la distancia a que se encuentra la partícula en el instante t, medida desde el centro de la luna.

Como $v = \frac{dr}{dt}$, tenemos $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = v\,\frac{dv}{dr}$.
Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
mv\frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^2} &\iff mvdv = -\frac{k}{r^2}dr \\
&\iff \frac{m}{2}v(r)^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} \\
&\iff v(r)^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} + \frac{m}{2}\,v_0^2\right)\,.
\end{aligned}
$$

Si a es el radio medio de la luna, tenemos $k = mg_0\,a^2$ donde g_0 es la gravedad sobre la superficie de la luna. Reemplazando en la ultima ecuación se obtiene

$$v(r)^2 = 2g_0\,a\left(\frac{a}{r} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0\,a}\right)\,.$$

Si ocurre que $\frac{v_0^2}{2g_0\,a} > 1$, es decir si $v_0^2 > 2g_0\,a$, entonces $v(r) > 0$ para todo t, y la partícula escapa del campo gravitacional de la luna.
Por el contrario, si $\frac{v_0^2}{2g_0\,a} < 1$, entonces existe cierta altura $\bar{r}$ en la cual $v(\bar{r}) = 0$, es decir, la partícula alcanza una altura máxima $\bar{r}$ y luego regresa a la superficie de la luna. Es fácil ver que

$$\bar{r} = \frac{a}{1 - \frac{v_0^2}{2\,g_0\,a}}\,.$$

Para calcular el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima $\bar{r}$, consideramos

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2g_0\, a\left(\frac{a}{r} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0\, a}\right)}$$

(con $+\sqrt{\ldots}$ ya que $v_0 > 0$), o bien

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r} + c_1}} = \sqrt{2g_0\, a}\, dt\,,$$

con $c_1 = \frac{v_0^2}{2g_0\, a} - 1$.
Resuelta esta ecuación debemos encontrar $\bar{t}$ tal que $r(\bar{t}) = \bar{r}$.

4.- Un paracaidista cuyo peso (es decir, masa) es de 80 Kg. se deja caer de un helicóptero que se mantiene a 6.000 mts. de altura. Suponemos que cae bajo la influencia de una fuerza gravitacional constante y que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista. La constante de proporcionalidad es 10 Kg/seg cuando el paracaídas está cerrado y 100 kg/seg cuando el paracaídas está abierto.
Si el paracaídas se abre 1 minuto después que el paracaidista abandona el helicóptero, ¿ al cabo de cuanto tiempo llegará a la superficie?

Solución: Sea $x(t)$ la distancia relativa al helicóptero en que se encuentra el paracaidista en el instante t. Luego la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\dot{x}(t), \quad \dot{x} = v\,,$$

es decir,

$$m\dot{v} = mg - kv \Longrightarrow \frac{dv}{-g + \frac{k}{m}v} = -dt\,,$$

e integrando

$$\begin{aligned} \frac{m}{k}\ln\left(\frac{-g + \frac{k}{m}v(t)}{-g + \frac{k}{m}v_0}\right) &= -t \\ \Longrightarrow \quad -g + \frac{k}{m}v(t) &= \left(-g + \frac{k}{m}v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t} \\ \Longrightarrow \quad v(t) &= \frac{m}{k}g + \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right)e^{-\frac{k}{m}t}\,. \end{aligned}$$

Tenemos $m = 80Kg$ y consideremos $g = 9,81 mt/seg^2$. Cuando el paracaídas está cerrado tenemos $v_0 = 0$ y $k = 10Kg/seg$. Esto nos dá

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = 78,48\left(1 - e^{-\frac{1}{8}t}\right) \\ \Longrightarrow \quad x(t) &= 78,48\left[t + 8\left(e^{-\frac{1}{8}t} - 1\right)\right] = 78,48t + 627,84\left(e^{-\frac{1}{8}t} - 1\right)\,. \end{aligned}$$

Como $e^{-\frac{1}{8}t} - 1$ evaluado en $t = 60$ es $-0.99944692..$, aproximando esta cantidad por -1 obtenemos

$$v(60) = 78,48 \quad \text{y} \quad x(60) = 4.080,96\,.$$

Cuando el paracaídas se abre en la ecuación

$$v(t) = \frac{m}{k}g + \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

tenemos $k = 100Kg/seg$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4.080,96$ y $v_0 = 78,48$. Luego

$$\begin{aligned} & v(t) = 7,848 + (78,48 - 7,848)e^{-\frac{5}{4}t} \\ \Longrightarrow \quad & v(t) = 7,848 + 70,632e^{-\frac{5}{4}t} \\ \Longrightarrow \quad & x(t) = 7,848t - 56,5056\left(e^{-\frac{5}{4}t} - 1\right) + 4.080,96\,. \end{aligned}$$

Luego debemos resolver

$$7,848t - 56,5056\left(e^{-\frac{5}{4}t} - 1\right) + 4.080,96 = 6.000\,,$$

o lo que es lo mismo

$$7,848t - 56,5056e^{-\frac{5}{4}t} = 1.975,5456\,.$$

La solución de esta ecuación es aproximadamente $t = 251,725$ segundos. Luego se demora aproximadamente $311,725$ segundos en llegar a la superficie.

B.- Proyectiles (sin resistencia del aire).

Suponemos que hay una velocidad inicial y que luego está sometido solo al campo gravitacional.

Sean x, z las coordenados del plano del movimiento. Suponemos

$(x, z) = x\vec{i} + z\vec{k}$,

$-mg\vec{k}$: fuerza gravitacional actuante,

$\vec{V_0} = V_0(\cos(\alpha)\vec{i} + \mathbf{sen}(\alpha)\vec{k})$: vector velocidad inicial,

$r(t) = (x(t), z(t))$: posición del proyectil en el instante t.

La ecuación del movimiento es entonces

$$m\ddot{r} = -mg\vec{k}$$

e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -g\vec{k}t + \dot{r}(0) = -g\vec{k}t + \vec{V_0}\,, \quad \text{lo que implica} \\ r(t) &= -g\vec{k}\frac{t^2}{2} + \vec{V_0}t\,. \end{aligned}$$

Es decir,

$$r(t) = (x(t), z(t)) = (V_0 \cos(\alpha)t, V_0 \text{sen}(\alpha)t - g\frac{t^2}{2}) \,.$$

Así

$$\begin{aligned} x(t) = V_0 \cos(\alpha)t \quad &\Longleftrightarrow \quad t = \frac{x(t)}{V_0 \cos(\alpha)} \\ &\Longleftrightarrow \quad z(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2(V_0 \cos(\alpha))^2} x^2 \,. \end{aligned}$$

Observaciones 5.2.1. 1) Note que $z'(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{g}{(V_0 \cos(\alpha))^2}x$, lo que implica $x = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ = valor donde el proyectil alcanza su altura máxima.

2)

$$\begin{aligned} z(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{2V_0^2(\cos(\alpha))^2}{g} \tan(\alpha) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{2V_0^2 \cos(\alpha)\text{sen}(\alpha)}{g} = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}(2\alpha) \,. \end{aligned}$$

Este valor $x = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}(2\alpha)$ es el blanco del proyectil.

3) El proyectil recorre una distancia máxima cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y esta distancia es $x = \frac{V_0^2}{g}$. Observe que esta distancia es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial.

5.3 Vibraciones en Sistemas Mecánicos

Aparecen cuando se perturba un sistema físico en equilibrio que luego queda sujeto a fuerzas que tienden a restaurar el equilibrio.

1.- Vibraciones armónicas simples no amortiguadas. Consideremos un carro de masa m sujeta por un muelle a un muro (Figura 5.2).

El muelle no ejerce fuerza cuando el carro está en su posición de equilibrio, $x = 0$. Pero si se desplaza una distancia x, entonces el muelle ejerce una fuerza restauradora opuesta a la dirección del alargamiento y con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento (Ley de Hooke):

$$F_s = -kx \,, \; k > 0 \,.$$

La constante k se llama constante de rigidez del muelle.

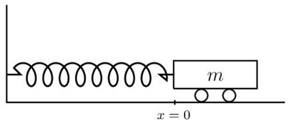

Figure 5.2: Carro sujeto por un muelle

Si aplicamos la Segunda Ley de Newton (Fuerza total = masa . aceleración) obtenemos la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

La ecuación característica es

$$p^2 + \frac{k}{m} = 0\,,$$

y luego la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \,+\, c_2 \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Si en el instante inicial $t = 0$, el carro se lleva a la posición $x = x_0$ y desde allí se suelta sin velocidad inicial, tenemos las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \qquad \text{y} \qquad v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0\,,$$

y obtenemos $c_1 = x_0$ y $c_2 = 0$. Luego tenemos la solución

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\,,$$

cuyo gráfico es presentado en la Figura 5.3.

Entonces la *amplitud* de la vibración es x_0, el *período* (tiempo requerido para completar un *ciclo*) es $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y la frecuencia de la vibración (número de ciclos por unidad de tiempo) es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Observe que f crece cuando crece la rigidez k del muelle y cuando decrece la masa m del carro.

En el caso que $v(0) = v_0 > 0$, tenemos $c_1 = x_0$ y

$$x'(t) \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\left[-x_0 \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \,+\, c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right]\,,$$

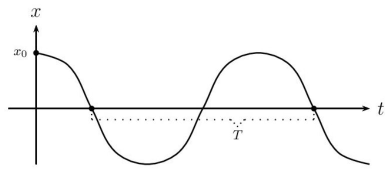

Figure 5.3: Gráfico de $x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

lo que implica

$$v_0 \;=\; x'(0) \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}} c_2 \quad\Longrightarrow\quad c_2 \;=\; v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Entonces

$$x(t) \;=\; x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \;+\; v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\,,$$

que se puede escribir de la forma

$$x(t) \;=\; A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi\right)\,,$$

donde $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$ es la amplitud, $\phi = \arctan\left(\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ es el ángulo de fase, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ es el período y $f = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$ es la frecuencia natural.

2.- Vibraciones amortiguadas. En este caso se agrega el efecto de una fuerza de amortiguamiento F_d, debida a la viscosidad del medio en que el carro se mueve (aire, agua, aceite, etc.), también opuesta a la dirección del alargamiento y con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento:

$$F_d = -c\,\frac{dx}{dt}\,, \quad c > 0\,, \qquad c:\ \text{resistencia del medio}\,.$$

Tenemos entonces la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d\,, \qquad \text{o bién}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

La ecuación característica es

$$p^2 + \frac{c}{m}p + \frac{k}{m} = 0\,,$$

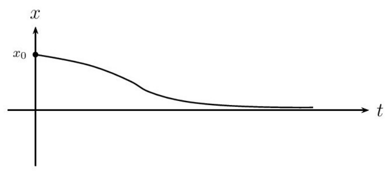

Figure 5.4: Gráfico de $x(t) = \frac{x_0}{p_1-p_2}\left(p_1e^{p_2t} - p_2e^{p_1t}\right)$

que tiene raíces

$$p_1, p_2 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\,.$$

A) Vibraciones Sobreamortiguadas. Corresponden al caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$ (es decir, $c > 2\sqrt{km}$).

Entonces p_1, p_2 son números negativos distintos y la solución general es

$$x(t) = c_1e^{p_1t} + c_2e^{p_2t}\,.$$

Bajo las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = \frac{x_0}{p_1 - p_2}\left(p_1e^{p_2t} - p_2e^{p_1t}\right)\,.$$

cuyo gráfico es presentado en la Figura 5.4.

Observe que no hay vibración y el carro tiende a restaurar su posición de equilibrio.

B) Vibraciones críticamente amortiguadas. En este caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ (es decir, $c = 2\sqrt{km}$).

Aquí $p_1 = p_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$ y la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\,.$$

Al imponer las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = x_0(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

cuyo gráfico es del mismo tipo que el de la Figura 5.4. Luego no hay vibración y el carro tiende a ir a su posición de equilibrio.

C) Vibraciones Subamortiguadas. Ahora $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$ (es decir, $c < 2\sqrt{km}$).

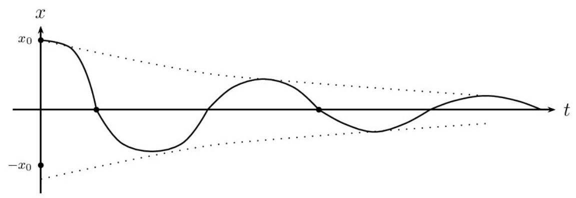

Figure 5.5: Gráfico de $x(t) \;=\; \frac{x_0\sqrt{\alpha^2+b^2}}{\alpha}e^{-b\,t}\cos(\alpha t-\theta)$

Tenemos

$$p_1, p_2 \;=\; -\frac{c}{2m} \;\pm\; i\sqrt{\frac{k}{m} \;-\; \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\;,$$

y la solución general es

$$x(t) \;=\; e^{-b\,t}\left[c_1\cos(\alpha\; t) \;+\; c_2\text{sen}(\alpha\; t)\right]\;,$$

donde $b = \frac{c}{2m}$ y $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m} \;-\; \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$.

Con las condiciones $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) \;=\; \frac{x_0}{\alpha}e^{-b\,t}\left[\alpha\cos(\alpha\; t) \;+\; b\text{sen}(\alpha\; t)\right]\;.$$

Si ponemos además $\theta = \arctan\left(\frac{b}{\alpha}\right)$ tenemos

$$x(t) \;=\; \frac{x_0\sqrt{\alpha^2+b^2}}{\alpha}e^{-b\,t}\cos(\alpha t-\theta)\,,$$

cuyo gráfico es presentado en la Figura 5.5

Observe que la amplitud decrece exponencialmente. No es periódica, pero cruza la posición de equilibrio $x = 0$ en intervalos regulares. Así podemos considerar $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Además el número $f = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi}$, es llamado la *frecuencia natural* del sistema.

2.- Vibraciones forzadas. A las fuerzas anteriores agregamos una fuerza externa $F_e = f(t)$ que actúa sobre el carro. Esta se puede producir por vibraciones del muro o por un campo magnético externo.

Tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e\,,$$

lo que implica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t)\,.$$

Un caso importante es cuando la fuerza externa es periódica

$$f(t) = F_0 \cos(wt)\,.$$

En ese caso la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)\,.$$

Como ya conocemos la solución de la ecuación homogénea correspondiente, podemos usar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular, y con ello la solución general de nuestra ecuación. Entonces si iw no es raíz de la ecuación característica, buscamos una solución del tipo

$$x_p(t) = A\text{sen}(wt) + B\cos(w(t)\,.$$

Tenemos las derivadas

$$x_p'(t) = w(A\cos(wt) - B\text{sen}(w(t))\,, \qquad x_p''(t) = -w^2(A\text{sen}(wt) + B\cos(w(t))\,,$$

y reemplazando en nuestra ecuación multiplicada por m, obtenemos

$$\begin{aligned} F_0\cos(wt) &= k(A\text{sen}(wt) + B\cos(w(t)) + cw(A\cos(wt) - B\text{sen}(w(t)) \\ &\quad -mw^2(A\text{sen}(wt) + B\cos(w(t))\,. \end{aligned}$$

Luego las constantes A y B deben verificar

$$\left\{ \begin{array}{rcl} wcA + (k - mw^2)B &=& F_0 \\ (k - mw^2)A - wcB &=& 0\,. \end{array} \right.$$

Por lo tanto

$$A = \frac{wcF_0}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2} \qquad B = \frac{F_0(k - mw^2)}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}\,,$$

y

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}\left[wc\text{sen}(wt) + (k - mw^2)\cos(wt)\right]\,.$$

Si ponemos $\phi = \arctan\left(\frac{wc}{k - mw^2}\right)$, podemos escribir

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}}\cos(wt - \phi)\,.$$

Así por ejemplo, en el caso subamortiguado, la solución general es

$$x(t) = e^{-b\,t}\left[c_1\cos(\alpha\, t) \;+\; c_2\text{sen}(\alpha\, t)\right] \;+\; \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}}\cos(wt - \phi)\,.$$

El primer sumando de esta expresión se llama *término transitorio* (tiende a cero cuando t se va para infinito) y el segundo sumando *parte estacionaria* (prevalece cuando el tiempo se hace grande). Por ello, se dice que la frecuencia de esta vibración es $\frac{w}{2\pi}$ y que su amplitud es $\frac{F_0}{\sqrt{(k-mw^2)^2+w^2c^2}}$.

Caso importante. Consideremos el caso anterior cuando la constante de amortiguación c es nula y iw es raíz de la ecuación característica (es decir $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) \;=\; c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) ,$$

que se puede escribir de la forma

$$x_h(t) \;=\; A\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi\right) ,$$

con $A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$ y $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$.

Debemos buscar solución particular de ecuación no-homogénea de la forma

$$x_p(t) \;=\; Ct\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + Dt\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

Calculando la primera y segunda derivada de $x_p(t)$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$C \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad D \;=\; \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} ,$$

y por lo tanto

$$x_p(t) \;=\; \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\,t\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

De esta forma la solución general es

$$x(t) \;=\; A\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi\right) \;+\; \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\,t\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) .$$

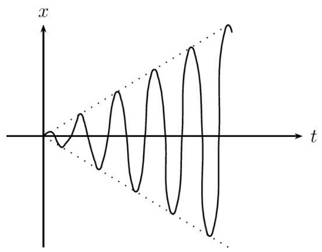

Figure 5.6: Gráfico de $x_p(t) = \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} t\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

Observe que la curva $x = x_h(t)$, cuyo gráfico es similar al de la Figura 5.3, presenta oscilaciones uniformes. Pero la solución $x_p(t)$, como lo muestra la Figura 5.5, oscila entre los valores $\pm\frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$, y por lo tanto, su magnitud máxima tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Luego si en el sistema

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(wt)\,.$$

la constante de amortiguación c es muy pequeña, el sistema está sujeto a grandes oscilaciones cuando la función de forzamiento tiene frecuencia (w) cercana a la frecuencia de **resonancia** del sistema ($\sqrt{\frac{k}{m}}$).

Estas grande vibraciones en resonancia son las que preocupan a los ingenieros. Se sabe que las vibraciones en resonancia ocasionan que las alas de los aviones se rompan, que los puentes se desplomen, etc.

Ejemplo 5.3.1. Una masa que pesa 4 lb. estira un resorte 3 pulgadas al llegar al reposo en equilibrio. Se tira luego de la masa 6 pulgadas debajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de $\sqrt{2}$ pie/seg dirigida hacia abajo. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación y externas que puedan estar presentes, determine la ecuación del movimiento de la masa junto con su amplitud, periodo y frecuencia natural ¿ Cuánto tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio?

Como estamos en el caso de una vibración simple no amortiguada, tenemos la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,,$$

cuya solución general es

$$x(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\,,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar k observamos que la masa de 4 lb. estira el resorte 3 pulgadas o 1/4 pie. Empleando la ley de Hooke, se tiene

$$4 = mg = k\frac{1}{4}\,,$$

lo que implica k =16 lb/pie. Como $g = 32$ pie/seg^2, se tiene que $m = 4/32 = 1/8$ slug y por lo tanto

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16}{1/8}} = 8\sqrt{2}\,.$$

Luego

$$x(t) = c_1 \cos\left(8\sqrt{2}\,t\right) \;+\; c_2 \mathrm{sen}\left(8\sqrt{2}\,t\right)\,.$$

Imponiendo nuestras condiciones iniciales son $x(0) = 6$ pulgadas $= 1/2$ pie y $x'(0) = \sqrt{2}$ pie/seg, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= x(0) = c_1\,, \\ \sqrt{2} &= x'(0) = 8\sqrt{2}c_2\,, \end{aligned}$$

lo que implica $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = \frac{1}{8}$. Por consiguiente, la ecuación del movimiento de la masa es

$$x(t) \;=\; \frac{1}{2}\cos\left(8\sqrt{2}\,t\right) \;+\; \frac{1}{8}\mathrm{sen}\left(8\sqrt{2}\,t\right)\,.$$

Para expresar la solución en forma senoidal hacemos

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{8}\,, \quad \tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2} = 4\,,$$

Entonces

$$x(t) \;=\; \frac{\sqrt{17}}{8}\mathrm{sen}\left(8\sqrt{2}\,t + \phi\right)\,,$$

con $\phi = \arctan(4) = 1.326$.

Por lo tanto, la amplitud es $A = \frac{\sqrt{17}}{8}$, el período es $T = \frac{2\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ y la frecuencia natural es $f = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$. Finalmente el tiempo $\bar{t}$ que transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio verifica $8\sqrt{2}\;\bar{t} + \phi = \pi$, lo que implica $\bar{t} = \frac{\pi-\phi}{8\sqrt{2}} = 0.16042...$

5.4 Circuitos eléctricos simples

Establecimos en 3.4, para un circuito del tipo que aparece en la Figura 5.7 la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} \;+\; RI \;+\; \frac{1}{C}q \;=\; E(t)\,, \tag{5.7}$$

donde:

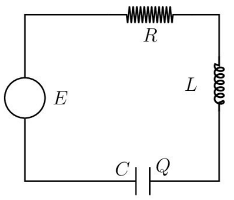

Figure 5.7: Circuito eléctrico simple

I = intensidad de la corriente (amperios),

E = fuerza electromotriz (voltios),

R = resistencia (ohmios),

L = inductancia (henrios),

C = capacitancia (faradios),

q = carga (coulombs).

Como la intensidad de corriente es igual a la razón del cambio instantáneo de la carga, es decir, $I = \frac{dq}{dt}$, tenemos la ecuación

$$L\frac{d^2q}{dt^2} \ + \ R\frac{dq}{dt} \ + \ \frac{1}{C}q \ = \ E(t)\,; \tag{5.8}$$

o bien, diferenciando

$$L\frac{d^2I}{dt^2} \ + \ R\frac{dI}{dt} \ + \ \frac{1}{C}I \ = \ \frac{dE}{dt}\,. \tag{5.9}$$

Ejemplo 5.4.1. Un circuito RLC en serie tiene una fem dada por $E(t) = \text{sen}(100\,t)$ voltios, un resistor de 0,02 ohmios, un inductor de 0,001 henrios y un capacitor de 2 faradios. Si la corriente inicial y la carga inicial son cero, determinemos la corriente del circuito para $t > 0$.

Tenemos $L = 0,001$, $R = 0,02$, $C = 2$, y $E(t) = \text{sen}(100\,t)$. Reemplazando en (5.9) obtenemos

$$0,001\frac{d^2I}{dt^2} \ + \ 0,02\frac{dI}{dt} \ + \ 0,5I \ = \ 100\cos(100\,t)\,,$$

o bien

$$\frac{d^2I}{dt^2} \ + \ 20\frac{dI}{dt} \ + \ 500I \ = \ 100.000\cos(100\,t)\,.$$

Como la ecuación característica

$$k^2 + 20k + 500 = 0$$

tiene raíces $k = -10 \pm 20\imath$, la solución general de la ecuación homogénea es

$$I_h(t) = e^{-10\,t}[c_1 \cos(20\,t) + c_2 \mathrm{sen}(20\,t)]\,.$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución particular de la forma

$$I_p(t) = A\cos(100\,t) + B\mathrm{sen}(100\,t)\,.$$

Reemplazando en la ecuación no homogénea obtenemos

$$A = -\frac{95}{9.425}\,, \qquad B = \frac{20}{9.425}\,,$$

lo que implica

$$I_p(t) = \frac{1}{9.425}[-95\cos(100\,t) + 20\mathrm{sen}(100\,t)]\,.$$

Entonces

$$I(t) = e^{-10\,t}[c_1 \cos(20\,t) + c_2 \mathrm{sen}(20\,t)] \;+\; \frac{1}{9.425}[-95\cos(100\,t) + 20\mathrm{sen}(100\,t)]\,.$$

Nuestras condiciones iniciales son $I(0) = q(0) = 0$.

Para encontrar $I'(0)$, se sustituyen los valores de L, R y C en (5.7) y se igualan ambos miembros para $t = 0$:

$$(0,001)I'(0) + 0,02I(0) + 0,5q(0) = \mathrm{sen}(0) \quad \Longrightarrow \quad I'(0) = 0\,.$$

Obtenemos así

$$\begin{aligned} 0 = \quad I(0) \quad &= c_1 - \frac{95}{9.425} \\ 0 = \quad I'(0) \quad &= -10c_1 + 20c_2 + \frac{2.000}{9.425}\,, \end{aligned}$$

lo que implica

$$c_1 = \frac{95}{9.425} \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{105}{18.850}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I(t) \quad = \quad & e^{-10\,t}\left[\frac{95}{9.425}\cos(20\,t) - \frac{105}{18.850}\mathrm{sen}(20\,t)\right] \\ & - \frac{95}{9.425}\cos(100\,t) \;+\; \frac{20}{9.425}\mathrm{sen}(100\,t)\,\cdot \end{aligned}$$

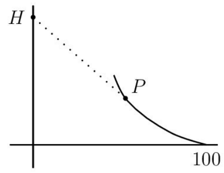

Figure 5.8: Gráfico de la curva $y = y(x)$

5.5 Problemas resueltos

Ejercicio 5.5.1. Un hombre se desplaza en dirección norte con velocidad constante de v_1 metros por segundo. En el instante inicial llama a su perro que se encuentra a 100 metros al este de él. Si el perro corre con velocidad $v_2 = 2v_1$ dirigido a cada instante a su dueño, determine la trayectoria descrita por el perro y el tiempo en que tarda en alcanzar a su amo.

Solución. Supongamos que inicialmente el hombre se encuentra en el origen y que el perro se encuentra en el punto $(100, 0)$. Sea $P = (x, y)$ la posición del perro en el instante t. En ese mismo instante el hombre se encuentra en $H = (0, v_1 t)$ (Figura 5.8).

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - v_1 t}{x} \implies t = \frac{1}{v_1}(y - xy')\,.$$

La longitud de la curva $y = y(x)$ que describe la trayectoria del perro entre el punto $(100, 0)$ y P es

$$v_2 t = \int_x^{100} \sqrt{1 + y'(u)^2}\,du \implies \frac{v_2}{v_1}(y - xy') = \int_x^{100} \sqrt{1 + y'(u)^2}\,du\,.$$

Derivando con respecto a x y usando que $v_2 = 2v_1$, nos queda

$$2(-xy'') = -\sqrt{1 + (y')^2}\,.$$

Poniendo $p = y'$, que implica $p' = y''$, y reemplazando obtenemos

$$\frac{2dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{x}\,.$$

Al integrar se tiene

$$2\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \ln(x) + \ln(c) \implies p + \sqrt{1 + p^2} = c \cdot \sqrt{x}\,.$$

Como en $x = 100$, tenemos $y = 0$ y $y' = 0$, debemos tener $c = \frac{1}{10}$, y luego

$$p \,+\, \sqrt{1 \,+\, p^2} \;=\; \frac{\sqrt{x}}{10}\,\cdot$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} \;=\; p \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}}{10} \,-\, \frac{10}{\sqrt{x}}\right],$$

e integrando

$$\begin{aligned} y(x) \;&=\; \frac{1}{2}\int_{100}^{x}\left[\frac{\sqrt{u}}{10} \,-\, \frac{10}{\sqrt{u}}\right]du \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{15} \,-\, 20\sqrt{u}\right]\Big/_{100}^{x} \\ &=\; \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} \,-\, 10\sqrt{x} \,+\, \frac{200}{3}\,\cdot \end{aligned}$$

De esta forma

$$y(0) \;=\; \frac{200}{3}$$

y el tiempo en que tarda en alcanzar a su amo es

$$\frac{200}{3v_1} \quad \text{segundos.}$$

Ejercicio 5.5.2. Un cuerpo de 8 libras de peso cae desde el reposo hacia la tierra desde gran altura. A medida que cae, la resistencia del aire actúa sobre él. Suponga que esta resistencia en libras, equivale numéricamente al doble de la velocidad, en pies por segundos. Determine la velocidad y la distancia de caída en el tiempo t. Considere $g = 32(pies/seg^2)$. Analice las funciones resultantes en el caso que $t \to \infty$.

Solución. Por la Segunda Ley de Newton se tiene

$$m\,\frac{dv}{dt} \;=\; F_1 \,+\, F_2\,,$$

donde

$$m \;=\; \frac{W}{g} \;=\; \frac{\text{peso}}{g} \;=\; \frac{8}{32} \;=\; \frac{1}{4}\,,$$

$$F_1 \;=\; \text{fuerza de empuje} \;=\; m\,g \;=\; 8\,,$$

y

$$F_2 \;=\; \text{fuerza de resistencia} \;=\; -2\,v\,.$$

Por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{1}{4}\,\frac{dv}{dt} \;=\; 8 \,-\, 2\,v\,.$$

Separando variables y multiplicando por 4 obtenemos

$$\frac{dv}{4-v} \;=\; 8\,dt\,,$$

e integrando

$$-\ln|4-v| \;=\; 8t \;-\; \ln(c) \quad \Longrightarrow 4 \;-\; v \;=\; c\,e^{-8t}\,.$$

Como $v(0)=0$, debemos tener $c=4$ y luego $v(t) \;=\; 4\,(1-e^{-8t})$.

Para conocer la distancia recorrida en el tiempo t, pongamos $v=\dfrac{dx}{dt}$ con $x(0)=0$. Obtenemos así la ecuación

$$\begin{aligned}
&dx = 4\left(1-e^{-8t}\right)dt \quad \text{cuya solución es}\\
&x(t) = 4\left[t+\frac{e^{-8t}}{8}\right]+c_1 \quad \text{y como} \quad x(0)=0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}\\
&x(t) = 4\left[t+\frac{e^{-8t}}{8}-\frac{1}{8}\right]\,.
\end{aligned}$$

Conclusiones.

a) Como $v(t)=4\,(1-e^{-8t})$, se tiene que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t)=4$.

b) Como $x(t)=4\left[t+\dfrac{1}{8}e^{-8t}-\dfrac{1}{8}\right]$, se tiene que $x\to\infty$ si $t\to\infty$.
Esto no implica que el movimiento será eterno. Al llegar a la superficie esta solución no funciona.

Ejercicio 5.5.3. Una barcaza está siendo remolcada a 16 pies/seg . Cuando se revienta la cuerda que tira de ella, a partir de ese momento, continúa su movimiento en línea recta, pero frenándose con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad instantánea. Si después de dos minutos de que se revienta la cuerda se observa que la velocidad de la barcaza es de 9 pies/seg , ¿ qué distancia recorrerá antes de quedar en reposo?

Solución. Se tiene

$$\frac{dv}{dt} \;=\; -k\sqrt{v} \quad \text{con las condiciones} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 0\,,\\ v(0) & = & 16 \text{ pies/seg}\,,\\ v(120) & = & 9 \text{ pies/seg}\,. \end{array}\right.$$

Integrando la ecuación se obtiene

$$2\sqrt{v} \;=\; -kt \;+\; c_1\,.$$

Como $v(0) = 16$, debemos tener $c_1 = 8$, y por lo tanto

$$\sqrt{v} = -\frac{k}{2}t + 4 .$$

Pero

$$v(120) = 9 \implies 3 = -60k + 4 \implies k = \frac{1}{60} ,$$

y luego

$$\sqrt{v} = 4 - \frac{t}{120} \cdot$$

De esta forma

$$\frac{dx}{dt} = v = \left(4 - \frac{t}{120}\right)^2 ,$$

e integrando

$$x(t) = -\frac{120}{3}\left(4 - \frac{t}{120}\right)^3 + c_2 = -40\left(4 - \frac{t}{120}\right)^3 + c_2 .$$

La condición $x(0) = 0$ implica $c_2 = 40 \cdot 4^3 = 2.560$, y tenemos

$$x(t) = -40\left(4 - \frac{t}{120}\right)^3 + 2.560 .$$

La barcaza estará en reposo cuando $\frac{dx}{dt} = 0$, luego esto sucederá a los $t = 480$ segundos. Además como

$$x(480) = -40\left(4 - \frac{480}{120}\right)^3 + 2.560 = 2.560 \text{ pies} ,$$

la distancia que recorre antes de quedar en reposo es de 2.560 pies.

Ejercicio 5.5.4. Una partícula de masa m se desliza *hacia abajo* sobre un plano inclinado bajo la influencia de la gravedad. Si al movimiento se opone una fuerza $f = kmv^2$ y θ es el ángulo de inclinación del plano, encontrar:

a) La velocidad de la partícula en función del tiempo, suponiendo que parte del reposo.

b) El desplazamiento en función del tiempo si $x(0) = 0$.

c) El tiempo necesario para que se desplace una distancia d desde el reposo.

Solución. La ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = mg\text{sen}(\theta) - kmv^2 .$$

a) Separando variables obtenemos

$$\frac{dv}{A-v^2} = kdt\,, \quad \text{donde} \quad A = \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dv}{v-A} - \frac{dv}{v+A} = -2Akdt\,.$$

Como $v(0) = 0$, integrando obtenemos

$$\ln(v(t)-A) - \ln(-A) - \ln(v+A) + \ln(A) = -2kAt\,,$$

y exponenciando

$$\frac{v(t)-A}{-A}\quad\frac{A}{v(t)+A} = e^{-2kAt} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{v(t)-A}{v(t)+A} = e^{-2Akt}\,.$$

Despejando y reemplazando el valor de A se tiene

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}}{1+e^{-2\sqrt{kg\text{sen}(\theta)}\,t}} = \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}\tanh(\sqrt{kg\text{sen}(\theta)}\,t)\,.$$

b) Integrando la expresión anterior y usando que $x(0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}\int_0^t \frac{1-e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,s}}{1+e^{-2\sqrt{kg\text{sen}(\theta)}\,s}}ds \\
&= \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}(\int_0^t ds + \frac{1}{\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}}\int_0^t \frac{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,s}}{1+e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,s}}ds) \\
&= \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}(t + \frac{1}{\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}}\ln(\frac{1+e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}}{2})) \\
&= \frac{1}{k}(\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t + \ln(\frac{1+e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}}{2}) \\
&= \frac{1}{k}(\ln(e^{\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}) + \ln(\frac{1+e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}}{2})) \\
&= \frac{1}{k}\ln(e^{\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}\frac{1+e^{-2\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}}{2}) \\
&= \frac{1}{k}\ln(\frac{e^{\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}+e^{-\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t}}{2}) \\
&= \frac{1}{k}\ln(\cosh(\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t))\,.
\end{aligned}$$

c) Si $x = d$

$$d = \frac{1}{k}\ln(\cosh(\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}\,t))$$

lo que implica

$$t = \frac{\operatorname{arccos h}(e^{kd})}{\sqrt{gk\text{sen}(\theta)}}\,.$$

Ejercicio 5.5.5. Una pelota de 6 onzas de peso se lanza hacia arriba desde una altura de 7 pies con una velocidad inicial de 84 pies por segundo. Si la pelota está sujeta a una resistencia del aire igual a 3/128 (libras por segundo) de la velocidad de ella (pies por segundo) ¿ Que altura máxima alcanzará antes de regresar a la tierra? Datos: 1 libra = 16 onzas, g = 32 pies por segundo al cuadrado.

Solución.Tenemos la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} \;=\; -mg - \frac{3}{128}v,\; x(0) \;=\; 7,\; v(0) \;=\; 84,$$

donde

$$mg \;=\; 6 \text{ onzas} \;=\; \frac{6}{16}\text{lb} \;=\; \frac{3}{8}\text{lb} \quad\Longrightarrow\quad m \;=\; \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{32} \;=\; \frac{3}{256}\,\cdot$$

Reemplazando obtenemos

$$\frac{3}{256}\frac{dv}{dt} \;=\; -\frac{3}{8} \;-\; \frac{3}{128}v \quad\Longrightarrow\quad \frac{dv}{dt} \;+\; 2v \;=\; -32\,,$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} v(t) \;=\; e^{-\int 2dt}\left[\int -32e^{\int 2dt}dt \;+\; c\right] &\Longrightarrow\; v(t) \;=\; e^{-2t}\left[-16e^{2t} \;+\; c\right] \\ &\Longrightarrow\; v(t) \;=\; -16 \;+\; ce^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Como $v(0) \;=\; 84$ tenemos

$$84 \;=\; -16 \;+\; c \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; 100\,,$$

y entonces

$$v(t) \;=\; -16 \;+\; 100e^{-2t}\,.$$

Para calcular el tiempo t_0 que se demora en alcanzar la altura máxima debemos resolver

$$v(t_0) \;=\; -16 \;+\; 100e^{-2t_0} \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{-2t_0} \;=\; \frac{16}{100} \;=\; \frac{4}{25} \;&\Longrightarrow\; -2t_0 \;=\; \ln\left(\frac{4}{25}\right) \;=\; 2\ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ &\Longrightarrow\; t_0 \;=\; -\ln\left(\frac{2}{5}\right) \;=\; \ln\left(\frac{5}{2}\right)\,\cdot \end{aligned}$$

También tenemos

$$x(t) \;=\; x(0) \;+\; \int_0^t v(s)ds \;=\; 7 - 16t - 50(e^{-2t} - 1) \;=\; 57 - 16t - 50e^{-2t}\,,$$

y luego la altura máxima es

$$\begin{aligned} x\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) \;&=\; 57 - 16\ln\left(\frac{5}{2}\right) - 50e^{-2\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \;=\; 57 - 50\cdot\frac{4}{25} - 16\ln\left(\frac{5}{2}\right) \\ &=\; 49 - 16\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right) \;=\; 34.3393\,\text{pies.} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.5.6. Una masa de 4 libras se suspende de un resorte ocasionando un estiramiento de 2 pie. En el instante $t = 0$, sin velocidad inicial la masa se desplaza 0.5 pie sobre su posición de equilibrio y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa equivalente a $f(t) = 8\text{sen}(t)$ libras. Suponiendo que no hay resistencia del aire, encontrar la ecuación del movimiento resultante y la posición del objeto al cabo de $\frac{\pi}{4}$ segundos. Considere $g = 32\frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}$.

Solución. La constante de rigidez k del resorte verifica

$$2\,k \;=\; m\,g \;=\; 4$$

lo que implica $k = 2\frac{\text{lb}}{\text{pie}}\cdot$ y $m = \frac{1}{8}$ Slugs.
Como el constante de amortiguación es nula, la ecuación del movimiento es

$$x'' + \frac{k}{m}x \;=\; \frac{f(t)}{m}\,,$$

es decir

$$x'' + 16x \;=\; 64\text{sen}(t)\,, \quad x(0) = -\frac{1}{2}\,, \quad x'(0) = 0\,.$$

Aplicando transformada de Laplace y poniendo $\mathcal{L}(x(t))(s) = X(s)$ obtenemos

$$s^2X(s) + \frac{1}{2}s + 16X(s) \;=\; \frac{64}{1+s^2}\,.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} X(s) \;&=\; \frac{64}{(s^2+1)(s^2+4^2)} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4^2} \\ &=\; \frac{64}{15}\frac{1}{s^2+1} - \frac{16}{15}\frac{4}{s^2+4^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4^2}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t) \;=\; \frac{64}{15}\text{sen}(t) - \frac{16}{15}\text{sen}(4t) - \frac{1}{2}\cos(4t)\,.$$

Luego

$$x(\frac{\pi}{4}) \;=\; \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \;=\; 3.516989\,.$$

y el objeto está abajo de la posición de equilibrio.

Ejercicio 5.5.7. Una masa de 2 kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire $\frac{196}{125}$m. al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m. hacia abajo, y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = \frac{195}{14}\cos(t)$newton al sistema. Si la constante de amortiguación es 6 newton seg/m , determine el desplazamiento $x(t)$ de la masa en un instante $t > 0$ cualquiera. Considere $g = 9.8$m/seg^2.

Solución. Tenemos $m = 2$ Kg y estiramiento $\frac{196}{125}$m. Luego la constante k del resorte es

$$k \;=\; 2 \cdot 9.8 \cdot \frac{125}{196} \;=\; \frac{125}{10} \cdot$$

De esta forma nuestra ecuación diferencial es

$$x'' + 3x' + \frac{125}{20}x \;=\; \frac{195}{28}\cos(t)\,.$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) \;=\; 1\,, \quad x'(0) \;=\; 0\,.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 3\lambda + \frac{125}{20} \;=\; 0\,,$$

cuyas raíces son

$$\lambda \;=\; -\frac{3}{2} \pm 2\imath\,.$$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) \;=\; e^{-\frac{3}{2}t}[c_1\cos(2t) \;+\; c_2\mathrm{sen}(2t)]\,.$$

Para encontrar una solución particular de la no homogénea, usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución de la forma

$$x_p(t) \;=\; A\cos(t) \;+\; B\mathrm{sen}(t)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -A\mathrm{sen}(t) \;+\; B\cos(t)\,, \\ x_p''(t) &= -A\cos(t) \;-\; B\mathrm{sen}(t)\,, \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\frac{195}{28}\cos(t) \;=\; [-A + 3B + \frac{125}{20}A]\cos(t) \;+\; [-B - 3A + \frac{125}{20}B]\mathrm{sen}(t)\,.$$

Tenemos entonces el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{21}{4}A + 3B & = & \frac{195}{28} \\ -3A + \frac{21}{4}B & = & 0 \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$A \ = \ 1\,, \quad B \ = \ \frac{4}{7} \cdot$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$x(t) \ = \ e^{-\frac{3}{2}t}[c_1 \cos(2t) \ + \ c_2 \mathrm{sen}(2t)] \ + \ \cos(t) \ + \ \frac{4}{7}\mathrm{sen}(t)\,.$$

Las condiciones $x(0) \ = \ 1$ y $x'(0) \ = \ 0$ implican respectivamente

$$c_1 + 1 \ = \ 1 \qquad \text{y} \qquad 2c_2 - \frac{3}{2}c_1 + \frac{4}{7} \ = \ 0\,.$$

Luego

$$c_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{2}{7}\,,$$

y nuestra solución es

$$x(t) \ = \ -\frac{2}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\mathrm{sen}(2t) \ + \ \cos(t) \ + \ \frac{4}{7}\mathrm{sen}(t)\,.$$