Transformada de Laplace

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 2: Resolución de EDO usando Transformada de Laplace.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

T.L. de la derivada y la integral

Teorema: *Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua y de orden exponencial b. Entonces*

a) *Si además $f' : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\mathcal{L}(f'(t))(s)$ existe $\forall s > b$ y*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$$

b) *Si $b \neq 0$ y $F(t) = \int_0^t f(u)du$, entonces F es de orden exponencial b y*

$$\mathcal{L}(F(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) \quad \forall s > b.$$

Demostración: a) Integrando por partes tenemos

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -f(0) + s\mathcal{L}(f(t)).$$

b) Notar que $F'(t) = f(t)$ y $F(0) = 0$, luego aplicando a) se obtiene

$$\mathcal{L}(f(t)(s) = \mathcal{L}(F'(t))(s) = s\mathcal{L}(F(t)) - F(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}(F(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s).$$

En general, *si* $f, f', f'', \cdot, f^{(n-1)}$ *son continuas y de orden exponencial* b*, se tiene para* $s > b$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t))(s) &= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0) \\
\mathcal{L}(f''(t))(s) &= s^2\mathcal{L}(f(t))(s) - sf(0) - f'(0) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) &= s^n\mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Resolver EDO usando Transformada de Laplace

Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' - y &= 1 - t \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

Sea $y(t)$ la solución y asumamos que $\mathcal{L}(y(t))(s)$ y $\mathcal{L}(y'(t))(s)$ existen $\forall s > s_0$. Luego aplicando la T.L. a ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'(t) - y(t))(s) &= \mathcal{L}(1-t)(s) \\
\mathcal{L}(y'(t))(s) - \mathcal{L}(y(t))(s) &= \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(t)(s) \quad \text{(Linealidad de la T.L.)} \\
s\mathcal{L}(y(t))(s) - y(0) - \mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \quad \text{(Transformada de la derivada)} \\
(s-1)\mathcal{L}(y(t))(s) - 2 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \\
\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + 2\right] = \frac{s-1+2s^2}{s^2(s-1)} \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s-1} \quad \text{(Fracciones Parciales)} \\
&= \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(2e^t)(s) \\
\therefore \quad y(t) &= t + 2e^t.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t} \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 12\,.$$

Solución:. Llamemos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'(t))(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 2\,, \\
\mathcal{L}(y''(t))(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 12 \qquad \text{y} \\
\mathcal{L}(-8e^{-t})(s) &= -8\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{-8}{s+1}\,.
\end{aligned}$$

Luego aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) - 2s - 8 = \frac{-8}{s+1}\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} = \frac{3s+5}{s^2 - 2s + 5} - \frac{1}{s+1} \\
&= \frac{3(s-1) + 2\cdot 4}{(s-1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s+1}. \quad \text{(Completar el cuadrado)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2} - \frac{1}{s+1}\right)(t) \\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right)(t) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right)(t) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)(t) \\
&= 3e^{t}\cos(2t) + 4e^{t}\operatorname{sen}(2t) - e^{-t}\,.
\end{aligned}
$$

Se usó el Primer Teorema de Traslación $\mathcal{L}^{-1}(F(s-a))(t) = e^{at}f(t)$.