Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos. Benjamín A. Jorquera J.
Taller 1. Sección: F1

1. Considerando el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x-1}\left[\dfrac{3(x^2-1)-xy}{3(x-1)}\right], \\ y(0) = -3 \end{cases} \qquad (1)$$

a) Solución de (1).

i) Desarrollamos la expresión.

$$y' = \frac{y}{x-1}\left(\frac{\cancel{3}\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{3}\cancel{(x-1)}} - \frac{xy}{3(x-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{(x+1)}{(x-1)}\cdot y - \frac{x}{3(x-1)^2}\cdot y^2 \qquad (1.1)$$

La que corresponde a una Ecuación Diferencial de Bernoulli.

ii) Multiplicamos (1.1) por y^{-n} con $n=2$.

$$y^{-2}\cdot y' - \frac{(x+1)}{(x-1)}\cdot y^{-1} = \frac{-x}{3(x-1)^2} \qquad (1.2)$$

Realizamos un cambio de variable $Z(x) = y^{1-n} = y^{-1}$

Derivamos utilizando regla de la cadena.

$$Z' = -y^{-2}\cdot y' \Leftrightarrow -Z'(x) = y^{-2}\cdot y'$$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1

Reemplazamos la nueva variable en (1.2)

$$z'(x) + \frac{(x+1)}{(x-1)} z(x) = \frac{x}{3(x-1)^2} \quad (1.4)$$

La cual Corresponde a una Ecuación Diferencial Lineal.

iii) Utilizamos el metodo del factor integrante para resolverla.

$$(p(x) z - q(x))dx + dz = 0$$

Con $p(x) = (x+1)/(x-1)$ y $q(x) = x/3(x-1)^2$

$$M(x,z) = \frac{x+1}{x-1} z - \frac{x}{3(x-1)^2} \quad y \quad N(x,z) = 1$$

$$\frac{1}{\cancel{N}}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial N}{\partial x}}\right) = \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{(x+1)}{(x-1)} = p(x)$$

∴ Admite factor integrante que depende de x.

Calculamos factor integrante y lo multiplicamos por (1.4)

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{(x+1)}{(x-1)}dx} = e^{2\ln(x-1) + x - 1} = (x-1)^2 e^{(x-1)}$$

* Demostración $\int \frac{(x+1)}{(x-1)} dx$.

$$\underset{①}{\int \frac{x}{(x-1)}} + \underset{②}{\int \frac{1}{(x-1)}}.$$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1

① $\int \frac{x}{x-1}dx = \int x(x-1)^{-1}dx \quad u=x,\ du=dx,\ dv=(x-1)^{-1},\ v=\ln(x-1)$

$= x\ln(x-1) - \underbrace{\int \ln(x-1)\,dx} \quad u=(x-1)\ du=dx$

$\int \ln(u)\,du \quad f=\ln(u),\ df=u^{-1},\ dg=1du,\ g=u.$

$= x\ln(x-1) - \left(\ln(x-1)(x-1) - x + 1\right)$

② $\int (x-1)^{-1}dx = \ln(x-1)$

$\therefore \int \frac{(x+1)}{(x-1)}dx = ① + ② = 2\ln|x-1| + x - 1 + C$

Entonces la ecuación (1.4) queda.

$$(x-1)^2 e^{(x-1)} z'(x) + \frac{(x+1)}{\cancel{(x-1)}}(x-1)^{\cancel{2}\,1} e^{(x-1)}\cdot z(x) = \frac{x}{3\cancel{(x-1)^2}}\cancel{(x-1)^2}e^{(x-1)}$$

$$\underbrace{(x-1)^2 e^{(x-1)}\cdot z'(x) + (x+1)(x-1)e^{(x-1)}\cdot z(x)} = \frac{xe^{(x-1)}}{3}$$

$$\left((x-1)^2\cdot e^{(x-1)}\cdot z(x)\right)' = \frac{xe^{(x-1)}}{3}$$

Integramos. $(x-1)^2 e^{(x-1)}\cdot z(x) = \frac{1}{3}\int xe^{(x-1)}dx$

$\int xe^{(x-1)}dx = \frac{1}{e}\int xe^x dx \quad u=x,\ du=dx,\ dv=e^x,\ v=e^x$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x = x e^x - e^x + C$$

Entonces desarrollamos algebraicamente y nos queda.

$$Z(x) = \underbrace{\frac{1}{3(x-1)}}_{Z_p} + \underbrace{\frac{C}{(x-2)^2 e^x}}_{Z_h}$$

Solución de (1.4)

iv) Volvemos a la variable original.

$$y(x) = \left(\frac{(x-1)e^x + 3C}{3(x-2)^2 e^x}\right)^{-1}$$

$$y(x) = \frac{3(x-2)^2 e^x}{(x-1)e^x + C} \qquad \text{Donde } y(0) = -3$$

$$\Rightarrow y(0) = \frac{3}{-1+C} = -3 \Rightarrow C = 0$$

$\therefore$ La solución de **(1)** es:

$$y(x) = 3(x-1)$$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1.

b.) Dos métodos de distinto orden para $y(0.5)$ con $h=0.1$

i) Orden 1. Método de Euler

$$y_n := y_{n-1} + h\, f(a + (n-1)h,\ y_{n-1})$$

Con condición inicial $y(a) = y_0$, $(y(0) = -3)$

$Y_1 = Y_0 + 0.1\, f(0, -3)$. Evaluando $x=0$ e $y=-3$ de $f(x,y) = y'$ en (1) se obtiene:

$$Y_1 = -3 + 0.1 \cdot 3 = -2.7$$

$$Y_2 = -2.7 + 0.1\, f(0.1, -2.7) = -2.4$$

$$Y_3 = -2.4 + 0.1\, f(0.2, -2.4) = -2.1$$

$$Y_4 = -2.1 + 0.1\, f(0.3, -2.1) = -1.8$$

$$Y_5 = -1.8 + 0.1\, f(0.4, -1.8) = -1.5$$

Con un error absoluto de:

$$E = |y(0.5) - Y_5| = 0$$

donde $y(0.5) = 3(0.5-1) = -1.5$ la solución de (1)

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1

ii) Método de Heun o Euler Mejorado, de Orden 2.

$$Y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))\right]$$

Donde $x_0 = 0$ y $y_0 = -3$, $f(x,y) = y'$ de (1)
y $y(x) = 3(x-1)$ solución de (1). Entonces:

$$Y_1 = -3 + \frac{0.1}{2}\left[f(0,-3) + f(0.1, -3 + 0.1 f(0,-3))\right]$$

Del método anterior habíamos calculado los valores de $f(x_i, y_i)$, por lo tanto reemplazamos:

$$Y_1 = -3 + \frac{0.1}{2}\left[3 + f(0.1, -2.7)\right] = -2.7$$

$$Y_2 = -2.7 + \frac{0.1}{2}\left[3 + f(0.2, -2.4)\right] = -2.4$$

$$Y_3 = -2.4 + \frac{0.1}{2}\left[3 + f(0.3, -2.1)\right] = -2.1$$

$$Y_4 = -2.1 + \frac{0.1}{2}\left[3 + f(0.4, -1.8)\right] = -1.8$$

$$Y_5 = -1.8 + \frac{0.1}{2}\left[3 + f(0.5, -1.5)\right] = -1.5$$

Con un error absoluto de:

$$E = |y(0.5) - Y_5| = \emptyset.$$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1

c) No existe error en las aproximaciones debido a que tanto la función $f(x,y)$ y la solución de la ecuación diferencial dependen de las variables x e y de tal forma que no existen funciones no primitivas ni números irracionales.

Benjamin A. Jorquera Jorquera.
Sección F1

2. Extracción de un recurso natural renovable.

Sea $X(t)$ un número Real positivo. La tasa de reproducción del recurso natural: $\rho(x) = \rho_0(1 - X/K)$ con ρ_0 y K constantes positivas propias de la especie.

Modelo de extracción del recurso:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = \rho_0 \cdot X(t)\left(1 - \dfrac{X(t)}{K}\right) - h \cdot X(t), & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \qquad (2)$$

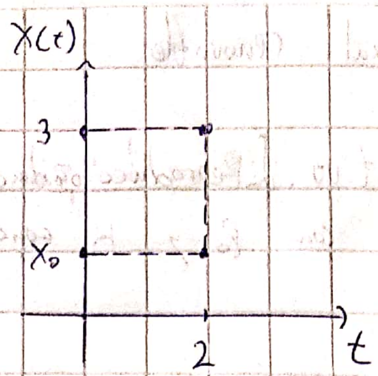
donde $h > 0$ indica la tasa de extracción del recurso.

i) Región para garantizar existencia y unicidad de (2).

$f(t, x) = f(x(t))$ es una ecuación diferencial autónoma, es decir depende solo de $X(t)$. Debemos asegurarnos de que esta función sea continua en una región del plano (t, x) que contenga a la condición inicial para determinar si existe alguna solución.

- Se observa que $X' = \rho_0 \cdot X\left(1 - \dfrac{X}{K}\right) - h \cdot X$ es continua para $X \in \mathbb{R}^+$ (con $K \neq 0$). Por lo tanto consideramos una región rectangular de $t \in [0, 2]$ y $X \in [X_0, 3]$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1



Como la función es continua en este intervalo existe una o varias soluciones para (2).

- Ahora derivamos parcialmente $f(x(t))$ con respecto a x

$$\frac{\partial f(x(t))}{\partial x} = \rho_0 - \frac{2 \cdot \rho_0 \, x(t)}{K} - h$$

Al evaluar el intervalo escogido anteriormente no se indetermina, quiere decir que la función resultante es continua en la región y por lo tanto la ecuación (2) presenta una única solución.

ii) Los estados estacionarios o puntos de equilibrio de (2) son:

$$f(x) = x\left(\rho_0 \cdot h - \frac{\rho_0 \cdot x}{K}\right) = 0$$

$$x_1^* = 0 \quad y \quad x_2^* = K\left(1 - \frac{h}{\rho_0}\right)$$

Benjamín A. Jorquera J.
Sección F2

iii) Para encontrar la solución explícita de (2):

a) Resolvemos la siguiente E.D.O.

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi(x)}{dx} = \dfrac{1}{f(x)}\phi(x) & (2.1) \\ \phi(x_0) = 1, \quad \text{donde } f(x) = x\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{hx}{\rho_0} \end{cases}$$

Corresponde a una Ecuación Diferencial de variables separables

$$\frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = \frac{dx}{f(x)} \quad \text{Integramos:} \quad \int \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = \int \frac{dx}{f(x)}$$

Resolvemos $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{hx}{\rho_0}}$

donde $f(x) = x\left(\dfrac{\rho_0 \cdot K - \rho_0 \cdot x - Kh}{K \cdot \rho_0}\right)$

$$\Rightarrow K \cdot \rho_0 \cdot \int \frac{dx}{x(\rho_0 K - \rho_0 x - Kh)}$$

Desarrollamos la expresión por fracciones parciales.

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(\rho_0 K - \rho_0 x - Kh)}$$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección F1

Donde: $A\rho_0 \cdot K - A\rho_0 \cdot X - A \cdot K \cdot h + BX = 1$

$$\begin{cases} A\rho_0 \cdot K - AKh = 1 & \Rightarrow \quad A = (\rho_0 K - Kh)^{-1} \\ B - A\rho_0 = 0 & \Rightarrow \quad B = A \cdot \rho_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{(\rho_0 K - Kh)X} dx}_{1} + \underbrace{\int \frac{\rho_0 \cdot dx}{(\rho_0 K - Kh)(\rho_0 K - \rho_0 \cdot X - Kh)}}_{2}$$

Resolvemos. 1. $(\rho_0 K - Kh)^{-1} \int \frac{dx}{X} = (\rho_0 K - Kh)^{-1} \ln(x)$

2 $\rho_0 \cdot (\rho_0 K - Kh)^{-1} \cdot \int \frac{dx}{\rho_0 K - \rho_0 X - Kh}$ $\quad u = \rho_0 K - \rho_0 X - Kh$, $du = -\rho_0 dx$

$$= \cancel{\rho_0} (\rho_0 K - Kh)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\rho_0}} \int \frac{1}{u} du \right) = -(\rho_0 K - Kh)^{-1} \cdot \ln(\rho_0 K - \rho_0 X - Kh)$$

$$\therefore \int \frac{dx}{f(x)} = 1 + 2 = \cancel{K} \cdot \rho_0 \cdot \left((\rho_0 \cancel{K} - \cancel{K}h)^{-1} \ln(x) - (\rho_0 \cancel{K} - \cancel{K}h)^{-1} \ln(\rho_0 K - \rho_0 X - Kh) \right) + C$$

$$= \rho_0 (\rho_0 - h)^{-1} \cdot \left(\ln(x) - \ln(\rho_0 \cdot K - \rho_0 \cdot X - K \cdot h) \right) + C$$

$$y \quad \int \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = \ln(\phi(x))$$

Benjamín A. Jorquera J.
sección F1

Así: $$e^{\ln \phi(x)} = e^{\rho_0(\rho_0-h)^{-1}\cdot(\ln(x) - \ln(\rho_0\cdot K - \rho_0 \cdot X - K\cdot h)) + C}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = X^{\rho_0\cdot(\rho_0-h)^{-1}} \cdot (\rho_0 K - \rho_0 X - Kh)^{-\rho_0(\rho_0-h)^{-1}} \cdot C$$

donde $\phi(X_0) = X_0^{\rho_0(\rho_0-h)^{-1}} \cdot (\rho_0 K - \rho_0 X - Kh)^{-\rho_0(\rho_0-h)^{-1}} \cdot C = 1$

$$\Rightarrow C = \left(X_0^{\rho_0(\rho_0-h)^{-1}} \cdot (\rho_0 K - \rho_0 X + Kh)^{-\rho_0(\rho_0-h)^{-1}} \right)^{-1}$$

Solución de (2.1):

$$\phi(x) = \frac{X^{\rho_0\cdot(\rho_0-h)^{-1}} \cdot (\rho_0 K - \rho_0 X - Kh)^{-\rho_0(\rho_0-h)^{-1}}}{X_0^{\rho_0(\rho_0-h)^{-1}} \cdot (\rho_0 K - \rho_0 \cdot X_0 - Kh)^{-\rho_0(\rho_0-h)^{-1}}}$$ $\boxtimes$

b). Ecuación Diferencial Ordinaria que satisface $\dot{Z}(t)$ donde $Z(t) = \phi(X(t))$.

Derivamos $Z'(t) = \phi'(X(t)) \cdot X'(t)$.

Benjamín A. Jorquera Jorquera
Sección: F1

3. Solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{d}{dx} y(x) = y^2 - \frac{2}{x^2} \qquad (3)$$

Dominio de (3): $x \neq 0$.

Nota: Esta E.D.O corresponde a una Ecuación Diferencial de Ricatti.

i) Probar que $y_1(x) = 1/x$ es solución particular de (3)

- Calculamos $y_1'(x)$: $\frac{d}{dx} y_1(x) = -x^{-2}$.
- Reemplazamos $y_1(x)$ y $y_1'(x)$ en (3)

$$-x^{-2} = x^{-2} - 2 \cdot x^{-2} \Leftrightarrow -x^{-2} = -x^{-2} \blacksquare$$

$\therefore$ $y_1(x)$ es solución particular de (3).

ii) Ecuación Diferencial que satisface $z(x)$ si $y(x) = y_1(x) + 1/z(x)$

- Tenemos: $y(x) = x^{-1} + z^{-1}(x) \Rightarrow z(x) = (y - 1/x)^{-1}$
- Derivamos $y'(x) = -x^{-2} - z'(x) \cdot z^{-2}(x)$ por regla de la cadena.
- Sustituimos $y(x)$ y $y'(x)$ en (3):

$$\cancel{\frac{-1}{x^2}} - \frac{z'(x)}{z^2(x)} = \left(\cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} \right) - \cancel{\frac{2}{x^2}}$$

$$\frac{-z'(x) - 1}{z^{2}(x)} = \frac{2}{x \cancel{z(x)}}$$

Benjamin A. Jorquera J.
Sección: F1

· Finalmente: $\frac{dz(x)}{dx} + \frac{2}{x}z(x) = -1$ (3.1)

Es la Ecuación Diferencial.

iii) Solución de (3.1)

· Es una Ecuación Diferencial Lineal

$z'(x) + p(x)z(x) = q(x)$ con $p(x) = 2/x$ y $q(x) = -1$

· Reescribimos (3.1): $(2z/x + 1)dx + dz = 0$

donde $M(x,y) = (2z/x + 1)$ y $N(x,y) = 1$.

Entonces: $\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2}{x} = p(x)$

∴ Admite factor integrante que depende de x.

· Factor integrante $u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln(x)}$

$u(x) = x^2$

· Multiplicamos $u(x)$ por (3.1):

$$\underbrace{x^2 \cdot z' + 2x \cdot z}_{} = -x^2$$

$$(x^2 z)' = -x^2$$

· Integramos: $\int (x^2 z)' = \int -x^2 \iff x^2 \cdot z = -\frac{1}{3}x^3 + C$

· Usamos álgebra y encontramos la solución de (3.1)

$$z(x) = \underbrace{\frac{-x}{3}}_{z_p} + \underbrace{\frac{C}{x^2}}_{z_h} \blacksquare$$

Benjamín A. Jorquera J.
Sección F1

iv) Volvemos a la variable original.

$$z = \left(\frac{3C - x^3}{3x^2}\right)^{-1} = y(x) - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x} \quad \blacksquare$$

Es la solución general de la ecuación (3).