Cálculo de la integral: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Dividiendo el numerador y el denominador por 1/a la integral se expresa como:

$$\int \frac{\frac{1}{a}dx}{\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}}} \Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}} \qquad (1)$$

Sea $\frac{x^2}{a^2} = \tan^2 \Rightarrow \frac{x}{a} = \tan\vartheta$; es decir $\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ (2)

$x = a\tan\vartheta \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = a\sec^2\vartheta \Rightarrow dx = a\sec^2\vartheta d\vartheta$ entonces,

$$\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\cancel{a}}\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\vartheta}}\cancel{a}\sec^2\vartheta d\vartheta$$

$\int \frac{1}{\sec\vartheta}\sec^2\vartheta d\vartheta$, integral aún sin cuadratura, entonces:

$\int \sec\vartheta d\vartheta = \int \sec\vartheta \cdot \frac{\sec\vartheta+\tan\vartheta}{\sec\vartheta+\tan\vartheta}d\vartheta$ (hemos multiplicado por 1 la integral)

$$\int \frac{\sec^2\vartheta+\sec\vartheta\tan\vartheta}{\sec\vartheta+\tan\vartheta}d\vartheta$$

Hagamos ahora

$$m = \sec\vartheta+\tan\vartheta \Rightarrow \frac{dm}{d\vartheta} = \sec\vartheta\tan\vartheta+\sec^2\vartheta \text{ y } dm = \left(\sec\vartheta\tan\vartheta+\sec^2\vartheta\right)d\vartheta$$

Y la integral se transforma definitivamente en: $\int \frac{dm}{m} = \ln|m|+C$ deshaciendo el reemplazo realizado, se tiene: $\int \sec\vartheta d\vartheta = \ln|\sec\vartheta+\tan\vartheta|+C$ ahora deshacemos la sustitución (2):

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+\left(-\ln a+C\right)$$

El último término es una nueva constante por lo que en definitiva la integral se expresa simplemente como:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$$