UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Electricidad y Magnetismo

Unidad 1: Introducción y Campo Eléctrico

Potencial Eléctrico

Profesora Rosa Corona

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resumen clase anterior

Flujo eléctrico

$$\phi_E = EA\cos\theta$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss

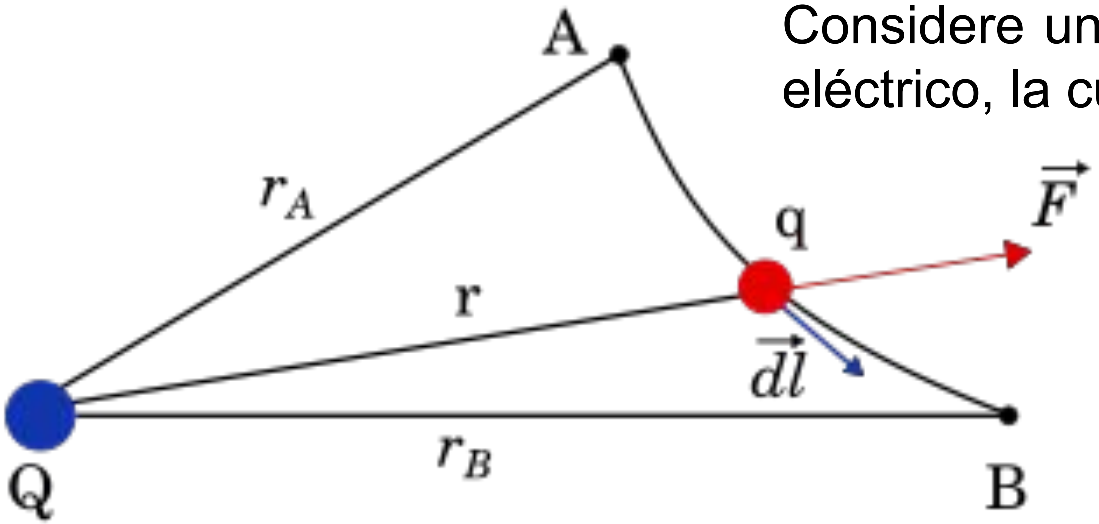
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Contenidos

- 1-Campo eléctrico de una carga puntual
- 2-Principio de superposición
- 3-Campo eléctrico de una distribución de carga continua
- 4- Líneas de campo eléctrico

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

1. Trabajo electrostático



Considere una carga *q* dentro de un campo eléctrico, la cual experimenta una fuerza

donde el trabajo (W) para desplazar la carga del punto A hasta B es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

diferencial de trabajo

fuerza

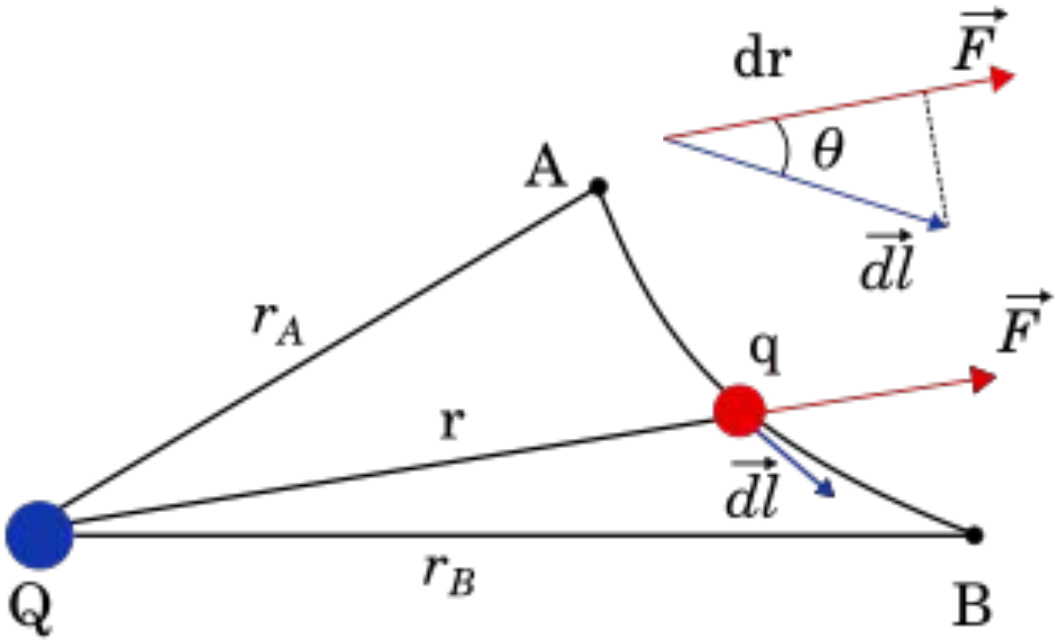
variación peq de desplazamiento

Unidad del trabajo eléctrico

Unidad: Joule
Símbolo: [J]

1. Trabajo electrostático

Integrando desde el punto A hasta el punto B, tenemos:



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$W_{AB} = \int_A^B qE d\ell \cos\theta$$

donde: $dr = d\ell \cos\theta$

$$W_{AB} = q \int_A^B E dr$$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

1. Trabajo electrostático

Ahora, para el caso de una carga puntual, sabemos que el campo eléctrico es:

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

Entonces, el trabajo para moverla será:

$$W_{AB} = q\int_A^B \frac{kQ}{r^2}dr = kqQ\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r}^2 = -\left.\frac{kqQ}{r}\right|_{r_A}^{r_B}$$

$$\boxed{W_{AB} = -kqQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]}$$

2. Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

Del resultado anterior, notamos que al mover una partícula del punto A hasta B, el trabajo no dependerá de la trayectoria de la partícula, sólo de los puntos de inicio y final. Implicando que el campo eléctrico es conservativo. Esto nos muestra además:

$$\Delta U = -W_{AB}$$

Siendo: U La energía potencial

W_{AB} El trabajo

$$\boxed{W_{AB} = -kqQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]}$$

2. Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

El potencial eléctrico, relaciona la energía potencial U con la carga q, por medio de:

$$V = \frac{U}{q}$$

Siendo V el potencial eléctrico.

Unidad del potencial eléctrico

Unidad: electron volt o Joule/Coulomb

Símbolo: [eV] o [J/C]

3. Diferencia de potencial eléctrico

La diferencia de potencial (ΔV) entre dos puntos se puede escribir como:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

Si reemplazamos la diferencia de energía potencial por el trabajo:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{AB}}{q}$$

Y recordamos la definición de trabajo

$$W_{AB} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$

3. Diferencia de potencial eléctrico

- Caso 1: Para un campo eléctrico uniforme

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_A^B E d\ell \cos\theta$$

donde:

$$\Delta V = V_B - V_A \Rightarrow V_B - V_A = -E\left(\ell_B - \ell_A\right) = -Ed$$

Por lo tanto, para un campo uniforme la diferencia de potencia es:

$$\boxed{\Delta V = -Ed}$$

3. Diferencia de potencial eléctrico

- Caso 2: Para un campo variable, con variación desconocida

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

donde:

$$\Delta V = \int_A^B dV \quad \Rightarrow \quad \int_A^B dV = -\int_A^B E d\ell$$

$$dV = -E d\ell \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{d\ell}$$

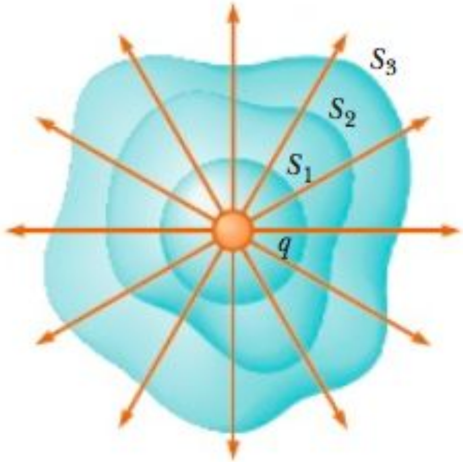
Por lo tanto, para un campo variable, con variación desconocida, tenemos:

$$\boxed{E = -\frac{dV}{d\ell}}$$

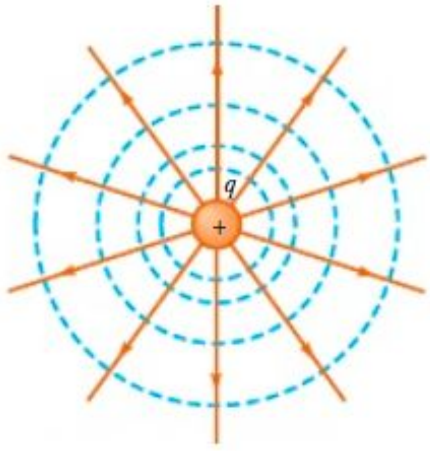
UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

4. Regiones Equipotenciales

Las regiones equipotenciales son aquellas en las que el potencial toma un valor constante.

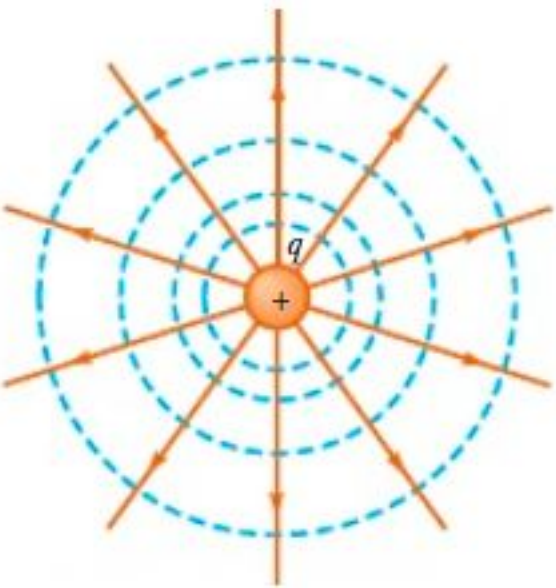


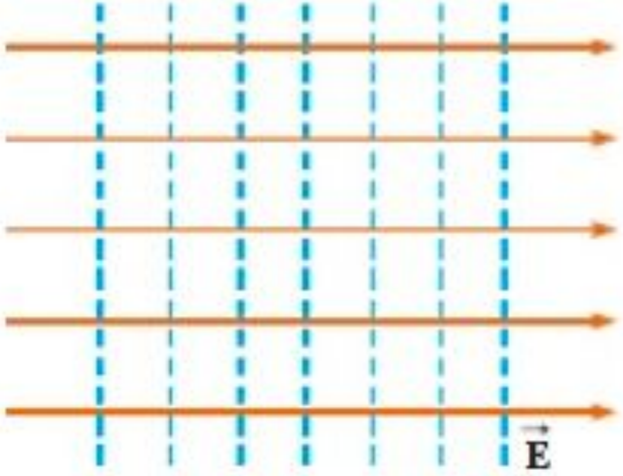
Por ejemplo, las regiones equipotenciales creadas por cargas puntuales son esféricas concéntricas centradas en la carga, como se deduce de la definición de potencial (r = constante)



4. Regiones Equipotenciales

Esto nos permite que la carga se desplace sobre la región equipotencial, haciendo que la fuerza no realice trabajo electrostático,
debido a que $\Delta V = 0$





5. Relación entre campo y potencial eléctrico

Sabemos que el potencial, se puede escribir como:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Consideremos el valor *V* del potencial en dos puntos próximos (*x*, *y*, *z*) y (*x*+*dx*, *y*+*dy*, *z*+*dz*), la variación potencial es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

5. Relación entre campo y potencial eléctrico

La idea es poder igualar ambos términos, entonces reescribimos:

$$dV = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\vec{\nabla}V} \cdot \underbrace{\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right)}_{d\vec{\ell}}$$

donde:

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell}$$

Y recordando que:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell}$$

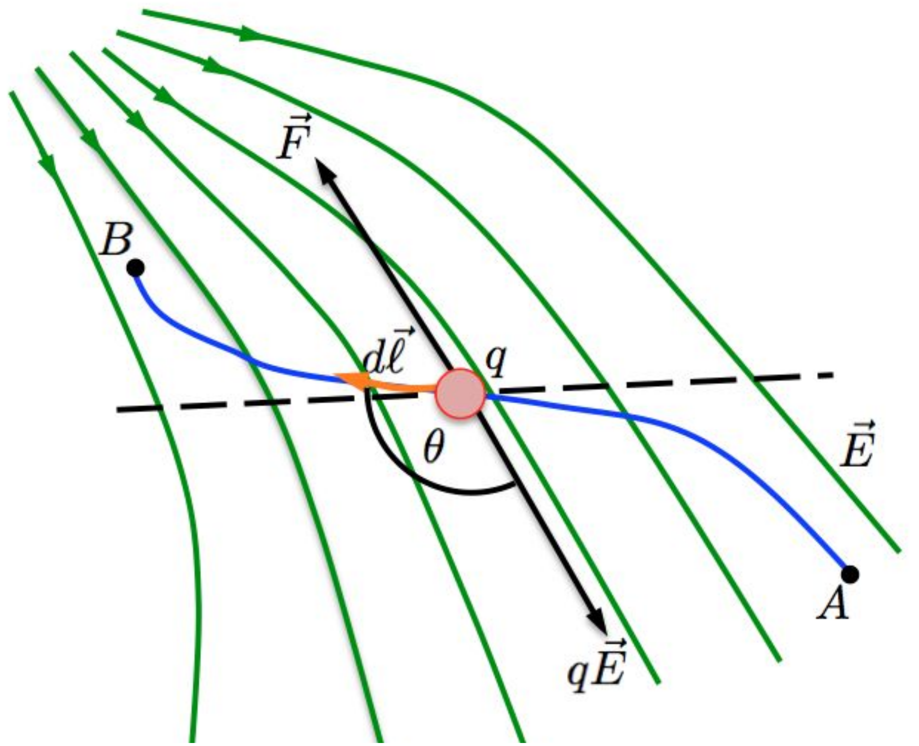
$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

6. Potencial eléctrico de distribuciones discretas

El potencial eléctrico en un punto ubicado a una distancia r de una carga q, está dado por:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



El campo eléctrico para una partícula puntual es:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

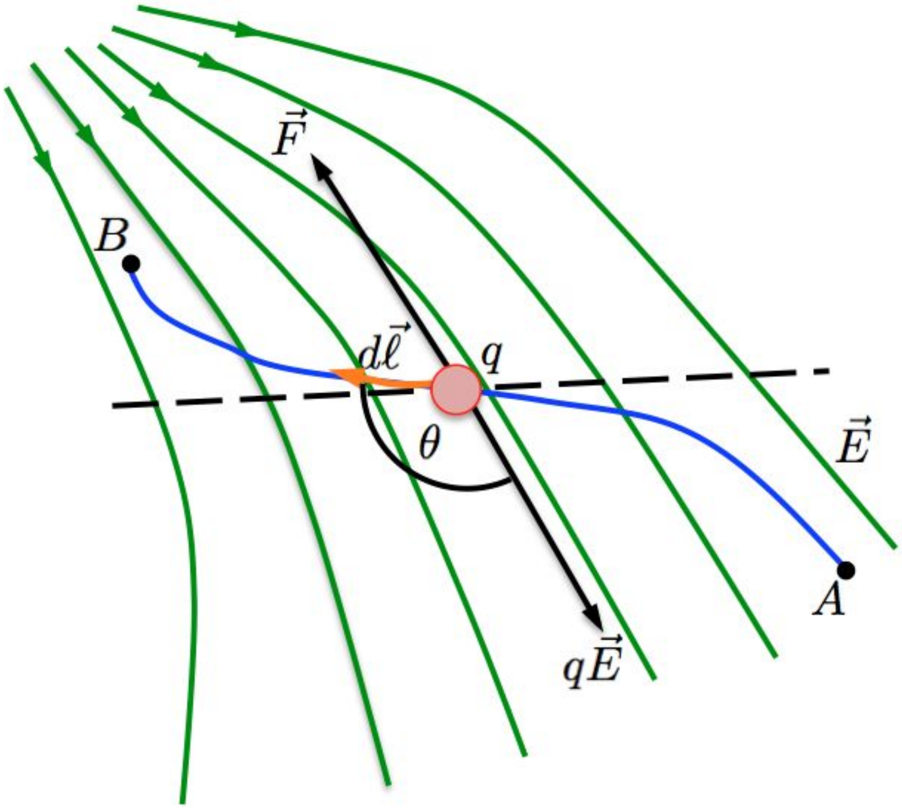
Haciendo el producto:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = d\ell \cos\theta = dr$$

6. Potencial eléctrico de distribuciones discretas

Entonces:

$$\Delta V = -\int_A^B \frac{kq}{r^2} dr = -kq \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B$$



Finalmente:

$$\boxed{\Delta V = kq \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]}$$

6. Potencial eléctrico de distribuciones discretas

En general, se elige el potencial eléctrico que el punto A sea:

$$V_A = 0 \;\Rightarrow\; r_A \to \infty$$

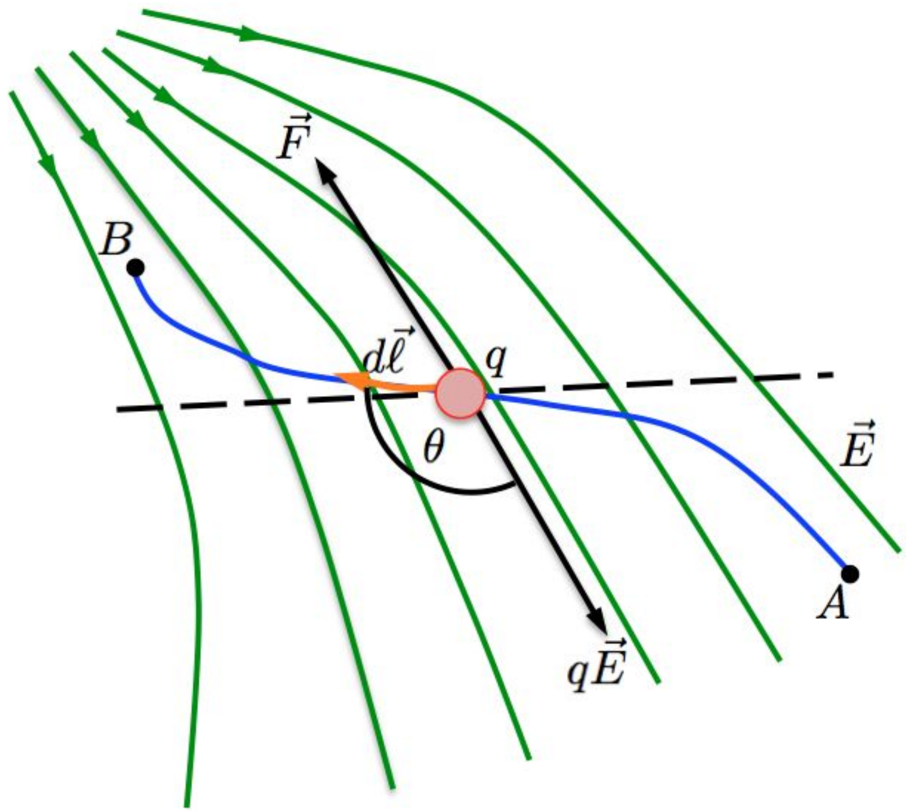
$$\Delta V = kq\left[\cancelto{0}{\frac{1}{r_A}} - \frac{1}{r_B}\right]$$

Finalmente:

$$V = \frac{kq}{r^2}$$

En general:

$$\boxed{V = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

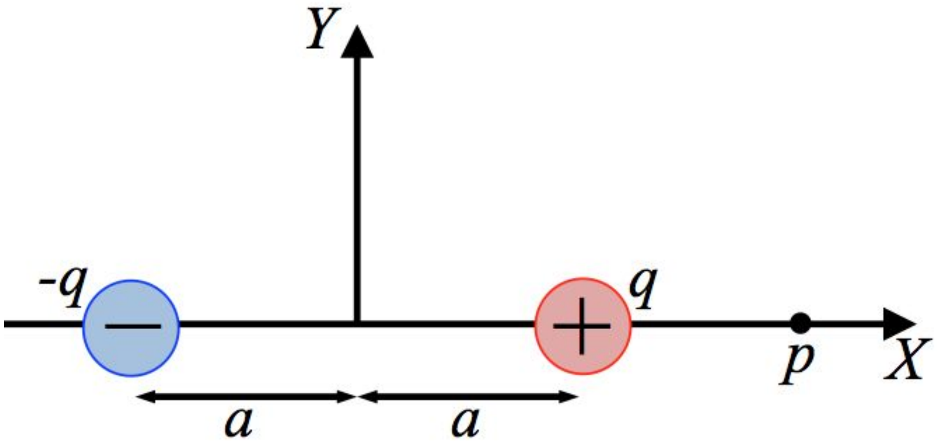


6. Potencial eléctrico de distribuciones discretas

Ejemplo: Un dipolo eléctrico se compone de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto, separadas por una distancia 2a. Calcule:

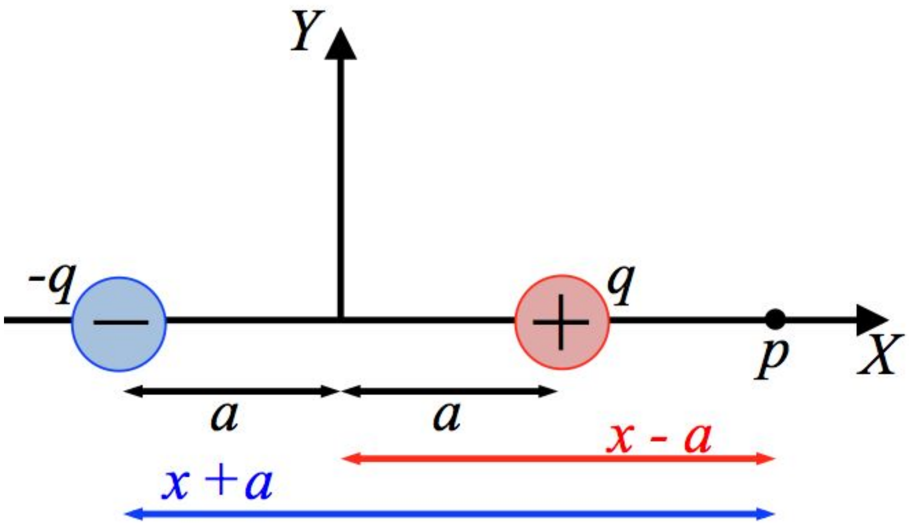
a. El potencial eléctrico en el punto P

b. El potencia y el campo en un punto muy alejado del dipolo.



6. Potencial eléctrico de distribuciones discretas

Solución:



Para calcular el potencial en una distribución discreta tenemos que:

$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow \ V = k\frac{q}{x-a} + k\frac{(-q)}{x+a}$$

$$V = \frac{k(q\cancel{x} - qa - q\cancel{x} - qa)}{x^2 - a^2}$$

luego:

$$\boxed{V = -\frac{2kqa}{x^2 - a^2} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]}$$

6. Potencial eléctrico de distribuciones discretas

Ahora para el caso en que (x>>a), tenemos:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{x^2(1 - a^2/x^2)} \approx \frac{1}{x^2}\left[1 + \cancel{\frac{a^2}{x^2}} + \ldots\right]$$

se desprecia

Luego:

$$V = \frac{2kqa}{x^2} \quad (x \gg a)$$

Ahora, calcularemos el campo eléctrico:

$$E = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{2kqa}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{4kqa}{x^3} \quad (x \gg a)}$$

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Existen dos métodos para calcular el potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga:

Método 1:

Subdividimos la estructura en pequeños elementos de carga dq y usamos el resultado que obtuvimos para una carga puntual pero pasando la sumatoria a una integral, es decir:

$$V = k \int \frac{dq}{r}$$

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Método 2:

Si conocemos el campo eléctrico (por ejemplo, a partir de la Ley de Gauss), usamos entonces:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

donde debemos definir V = 0 en algún punto conveniente donde el potencial se calculará entre los puntos A y B.

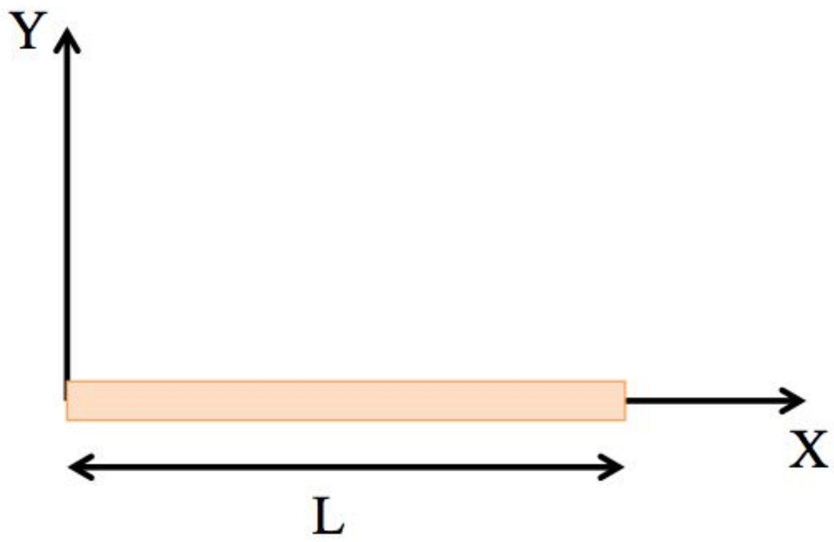
Es conveniente elegir que el origen del potencial es el infinito, es decir:

$$V_0 = V(\infty) = 0$$

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

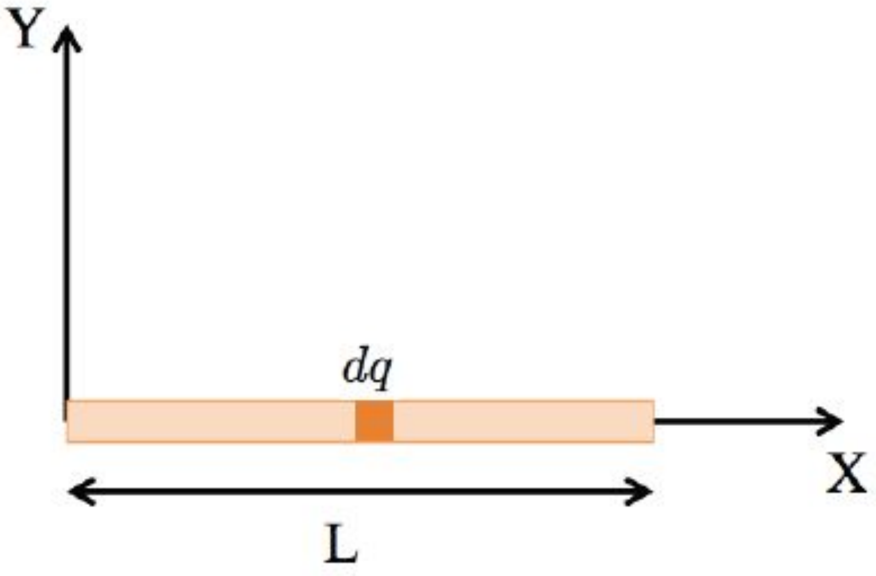
Ejemplo, método 1 (cuando conocemos la distribución continua de carga):

Determine el potencial eléctrico en todo el espacio que genera una varilla delgada de densidad lineal λ_0 [C/m] y largo L [m].



7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Solución:



Como debemos calcular el potencial en todo el espacio, definimos el vector como:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

El potencial es:

$$V = k\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

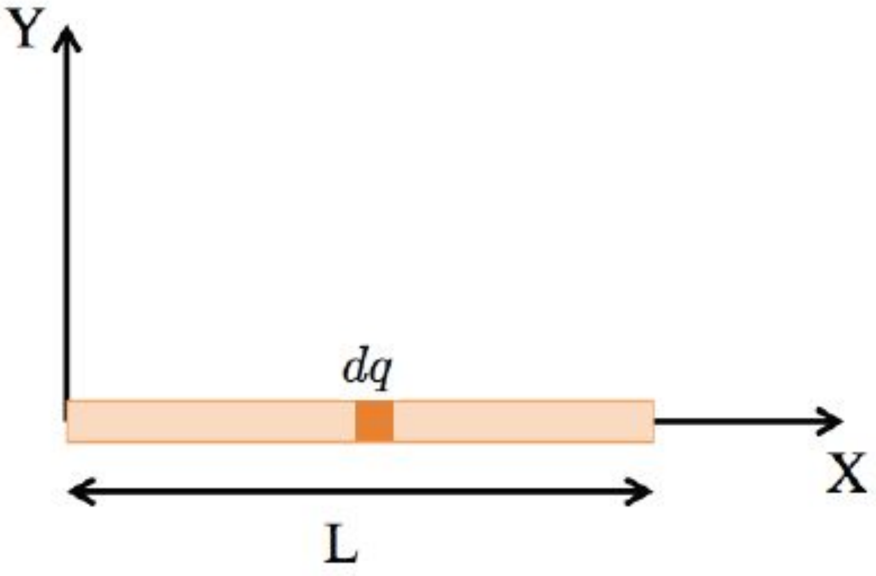
donde la densidad de carga es:

$$dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 dx'$$

Por otro lado, el vector que barre la barra es:

$$\vec{r'} = x'\hat{\imath}$$

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas



Luego, el vector es de la forma:

$$\vec{r} - \vec{r'} = (x - x')\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

y su módulo es:

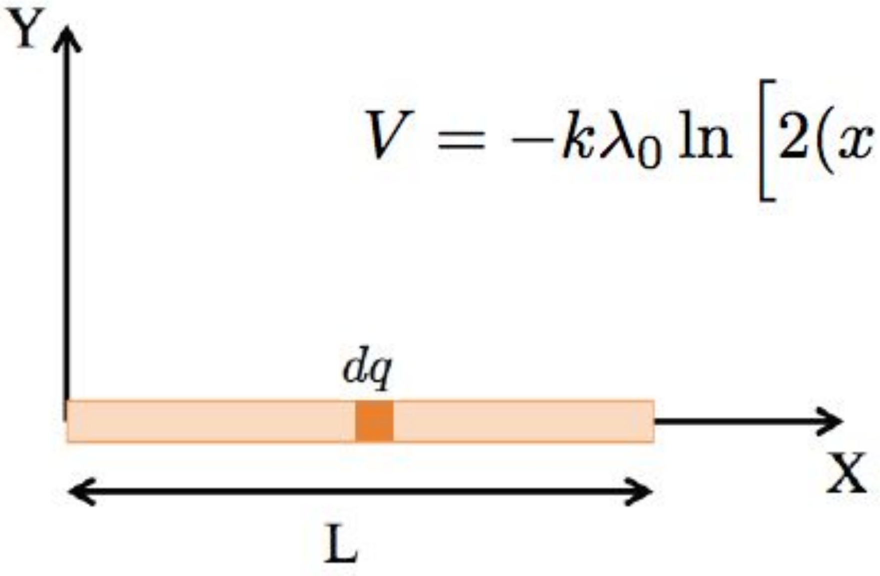
$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{(x - x')^2 + y^2 + z^2}$$

Por lo tanto, el potencial es:

$$V = k \int_0^L \frac{\lambda_0 dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2 + z^2}}$$

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Integrando, tenemos:



$$V = -k\lambda_0 \ln\left[2(x - x' + \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2})\right]\Bigg|_0^L$$

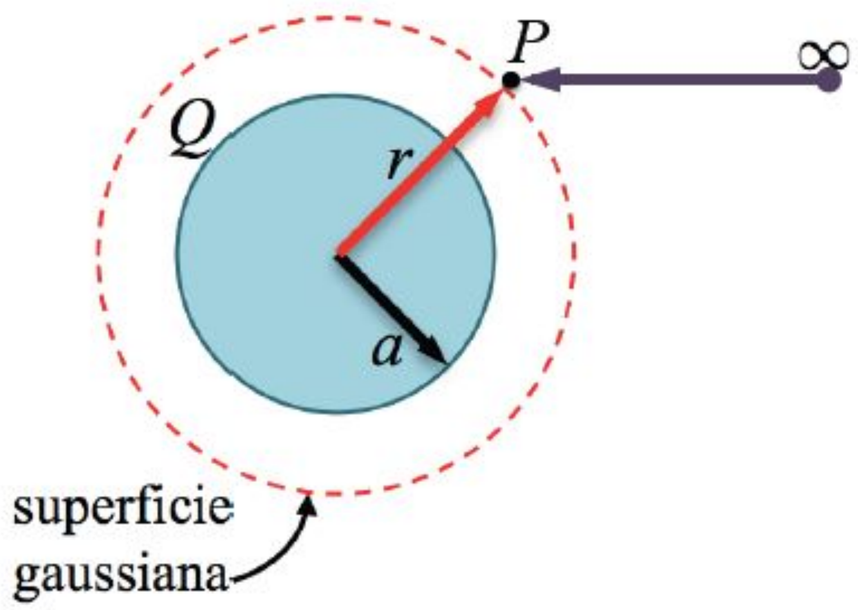
Luego:

$$V = -k\lambda_0 \ln\left[\frac{x - L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2 + z^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] \ [\mathrm{J/C}]$$

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Ejemplo, método 2 (cuando conocemos el campo eléctrico):

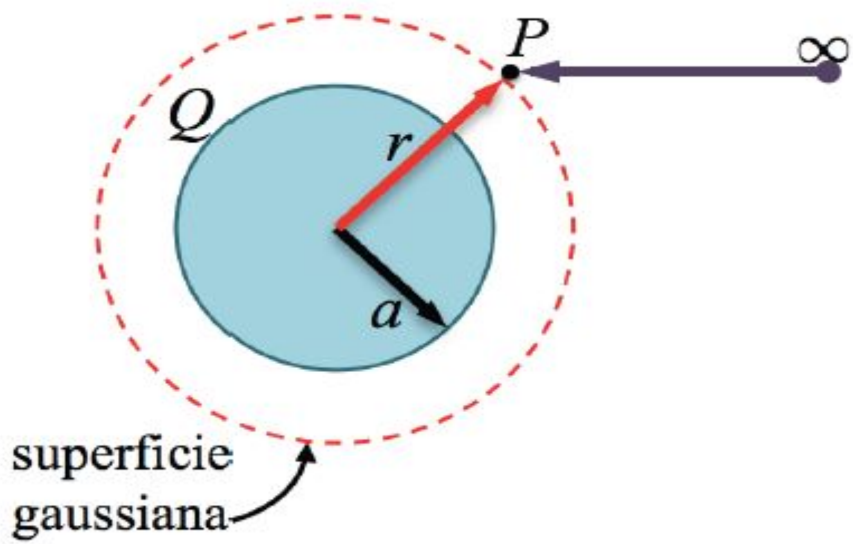
Determine el potencial eléctrico en todo el espacio debido a una esfera de radio a [m] con carga Q [C] distribuida uniformemente en su volumen.



7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

En un punto fuera de la esfera, es decir, r>a, usando la ley de gauss podemos obtener el campo eléctrico. Sin embargo, para calcular el potencial debemos escoger un punto conveniente, por lo que calcularemos desde el infinito hasta el punto P.

$$V = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



sabemos que:

$$\vec{E} \parallel d\vec{\ell} \;\Rightarrow\; \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E dr$$

$$\Rightarrow \; V = -\int_{\infty}^{P} E dr$$

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

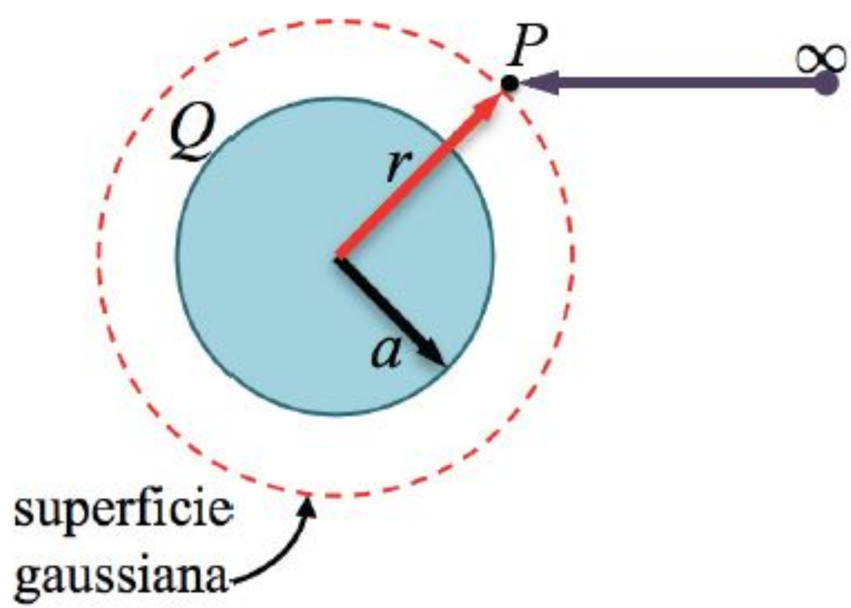
Luego, sabemos que el punto P es r, y que el campo en ese punto se obtiene con la ley de gauss:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$(r > a) \quad \boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}}\right]}$$



$$V = -\int_{\infty}^{P} Edr = -\int_{\infty}^{r} \frac{kQdr}{r^2}$$

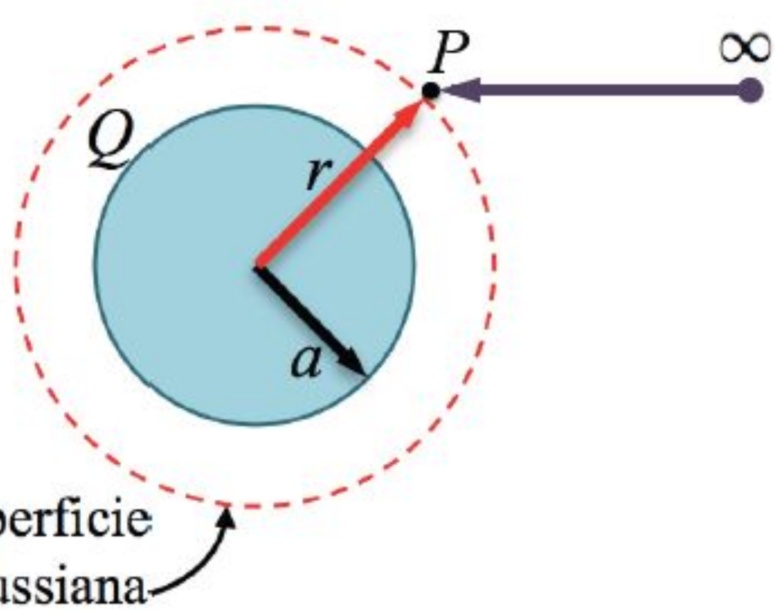
7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Integrando, tenemos:

$$V = kQ\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = kQ\left[\frac{1}{r} - \cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}\right]$$

Entonce, el potencial para r>a es:

$$\boxed{V = \frac{kQ}{r} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]} \quad (r > a)$$



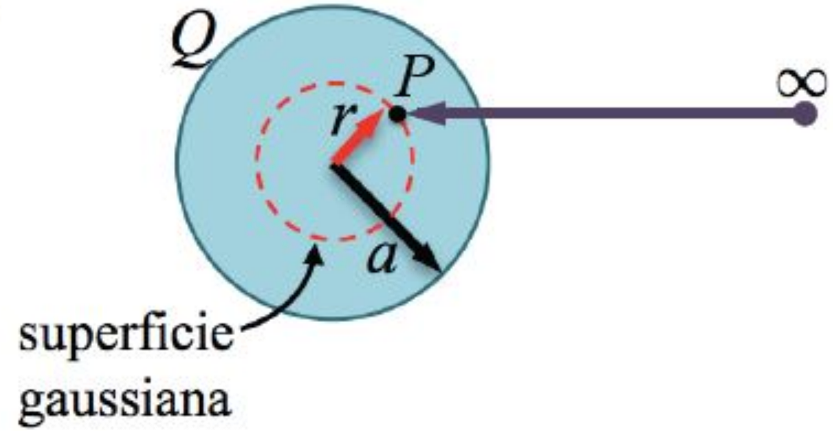
7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

En un punto dentro de la esfera, es decir, r<a, el potencial se calcula desde el infinito, pero los campos dentro y fuera de la esfera son diferentes, entonces debemos separar la integral en dos partes (parte interna y parte externa):

$$V = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{a}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

sabemos que:

$$\vec{E} \parallel d\vec{\ell} \;\Rightarrow\; \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E dr$$



7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Ya sabemos el campo interno, pero el campo externo recordemos que usando la ley de gauss es de la forma:

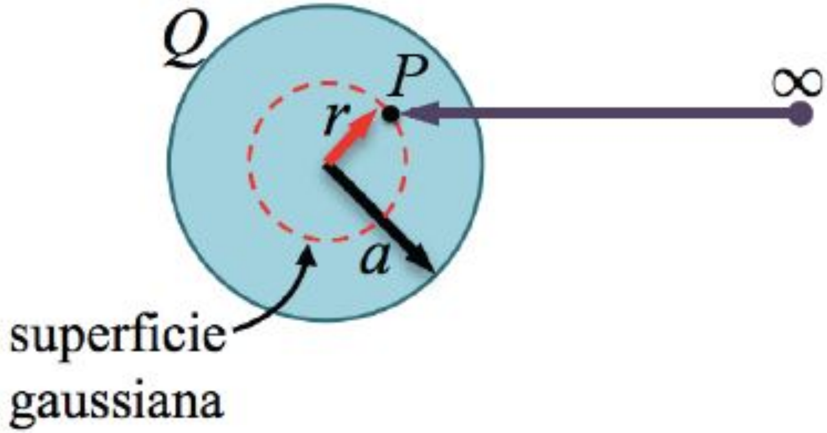
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$EA = \frac{\rho V'}{\epsilon_0}$$

$$E4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0}$$

$$Q = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi a^3 \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

$$\boxed{\vec{E} = kQ\frac{r}{a^3}\hat{r} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]} \quad (r < a)$$



7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

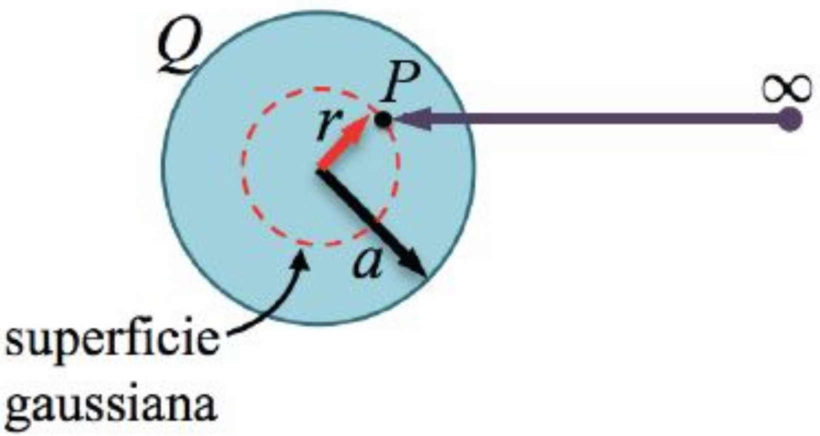
Entonces, el potencial es:

$$V = -\int_{\infty}^{a} \frac{kQdr}{r^2} - \int_{a}^{r} \frac{kQrdr}{a^3}$$

Resolviendo las integrales, tenemos:

$$V = kQ\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{a} - \frac{kQ}{a^3}\frac{r^2}{2}\Bigg|_{a}^{r}$$

$$V = kQ\left[\frac{1}{a} - \cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}\right] - \frac{kQ}{2a^3}\left(r^2 - a^2\right)$$



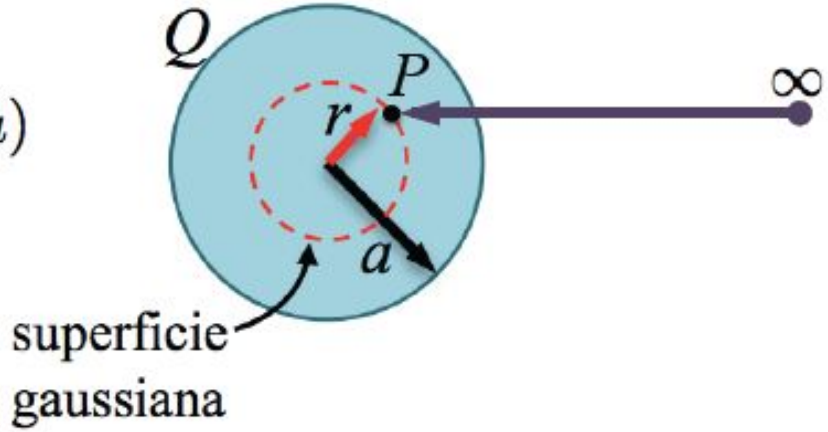
7. Potencial eléctrico de distribuciones continuas

Entonces:

$$V = \frac{kQ}{a} - \frac{kQ}{2a^3}r^2 + \frac{kQ}{2a}$$

Finalmente, el potencial en el interior de la esfera es:

$$\boxed{V = \frac{3kQ}{2a} - \frac{kQ}{2a^3}r^2 \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]} \quad (r < a)$$



Resumen

Trabajo

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Variación de energía potencial eléctrica

$$\Delta U = -W_{AB}$$

Potencial eléctrico

$$V = \frac{U}{q}$$

Diferencia de potencial eléctrico

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$