GUÍA 4

Potencial Eléctrico

1. Objetivos de aprendizaje

Esta guía es de soporte y apoyo a la cuarta unidad del curso: Potencial Eléctrico. Las capacidades que tienes que comprobar y desarrollar a través de esta guía son:

- Desarrollar problemas de **potencial eléctrico** y aplicarlo para resolver problemas con distribuciones discretas y continuas de carga
- Utilizar el principio de superposición para resolver problemas de potencial eléctrico.
- Relacionar **campo y potencial eléctrico,** de forma conceptual y matemática.

2. Perspectiva y aplicaciones

El potencial eléctrico es parte fundamental de nuestra vida, tanto para el entendimiento de todos los circuitos eléctricos, y estos a su vez son el bloque fundamental la civilización moderna. Hay muchas otras situaciones (probablemente todas las que puedan pensar) en que las fuerzas electromagnéticas tienen un rol fundamental, sin ir más allá, la silla en la que estás sentado no se desmorona por las fuerzas de atracción eléctrica entre sus átomos, pero enfoquémonos en los circuitos.

En general para que circule corriente por un conductor es necesario que exista una diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos del sistema, esta diferencia de potencial la podemos generar con un campo eléctrico externo, trabajo del que se encargan por ejemplo las baterías cuya energía está contenida en los enlaces de los componentes químicos que las forman (enlaces que a su vez también son formados por fuerzas electromagnéticas), como las pilas del control o la batería del pc. Otra forma es haciendo uso del fenómeno de inducción electromagnética (que verán con detalles más adelante en el curso), el cual es utilizado en las centrales hidroeléctricas, eólicas, de gas (podría ser gas de biomasa), de carbón, fisión nuclear (con turbinas de vapor por ejemplo, se calienta agua y está se utiliza para alimentar las turbinas), etc.

Es notable como estas diferencias de potencial, creadas a partir de la conversión de energía cinética, potencial gravitatoria, química, etc en las centrales es la que disfrutamos en nuestros hogares a 230 V

3. Conceptos necesarios

Cada concepto estará presentado de forma formal, la cual deben conocer, es muy importante que las lean con atención y las conozcan. Se les ánima a pensar otras situaciones o ejemplos donde aplicar el concepto antes y después de hacer la guía, así podrán comprobar si entendieron o no las ideas principales.

Todas las unidades utilizadas son del SI. **Recomendación:** lee una vez toda la guía con atención, aunque no entiendas todo al terminar de leer intenta hacer los problemas, apóyate en la guía y las referencias dadas según resuelves los problemas. No intentes entender todo solo leyendo, es imposible. Tampoco intentes hacer los problemas sin antes leer los conceptos. Lee cada problema con atención, **anota todas las propiedades y ecuaciones relevantes** en cada problema, y siempre **haz un dibujo esquemático** de la situación propuesta.

3.1. Potencial Eléctrico

Cuando se coloca una carga en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, **la carga experimenta una fuerza en la dirección del campo**, donde el **sentido** se lo da el **signo de la carga** (Sobre una carga positiva la fuerza es en la dirección del campo). Al igual que en la asignatura de física 2, cuando un campo eléctrico externo mueve la carga a través del espacio, el **trabajo** consumido (o adquirido) por la carga es de **signo contrario** al trabajo hecho por el campo (esto se justifica por el hecho que el *trabajo es un mecanismo de transferencia de energía*, lo que uno gana el otro lo pierde). La **energía potencial** ΔU **adquirida**(o pérdida) por la carga se expresa como

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \tag{1}$$

donde q_0 es la carga de prueba, $\vec{\mathbf{E}}$ es el campo donde esta sometido la carga. La integral se evalúa en los puntos iniciales y finales de la trayectoria. Esto es debido a que **la fuerza de Coulomb es conservativa** (tiene la misma forma que la fuerza gravitatoria de Newton). Pero el concepto que nos incumbe en nuestra discusión es la de **diferencia de potencial**, y se define como el cambio de energía potencial al desplazar una carga unitaria (de 1 C en el SI) a través del campo de un punto A a otro punto B, dividido por la carga:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \tag{2}$$

Notar que esta definición es **independiente de la carga**. La diferencia de potencial depende solo del campo generado por la fuente. En cambio ΔU **depende de la carga de prueba** que uno coloque. La diferencia de potencial se mide en Volts [V]. $1[V] = \frac{1[J]}{1[C]}$. Otros nombres similares se encuentran en la literatura como voltaje o potencial eléctrico

3.2. diferencia potencial para un campo eléctrico uniforme

Una aplicación simple, es considerar el $\vec{\mathbf{E}}$ constante, entonces se puede derivar una relación simple para ΔV que es la siguiente

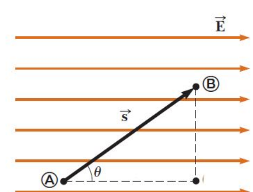


Figura 1: . $\Delta V = s \cdot E\cos(\theta)$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \int_A^B d\vec{\mathbf{s}} = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{s}}$$
$$\implies \Delta V = V_B - V_A = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{s}}$$

Notar que si el campo va en la misma dirección de la linea recta que une A-B, esto es $\vec{\mathbf{E}}//\vec{\mathbf{s}}$, entonces resulta que $\Delta V = -E \cdot s$. También darse cuenta que el signo del potencial depende del orden de los puntos iniciales y finales. Se deduce además de la ecuación (2) que el campo eléctrico apunta en la dirección en donde disminuye el potencial.

3.3. potencial debido a una carga puntual y a una distribución continua

Para el **potencial debido a una carga puntual** es directo obtener de la definición de potencial, haciendo uso del teorema fundamental del cálculo al integrar, que la diferencia de potencial entre dos puntos cualquiera, $\vec{\mathrm{b}}$ y $\vec{\mathrm{a}}$, a distancias r_B y r_A respectivamente de la carga, está dada por:

$$\Delta V = kq\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right), \quad \text{con} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{N \cdot m^2}{C^2}\right] \tag{3}$$

Un aspecto fundamental del potencial eléctrico (y cualquier otro potencial) es que solo tiene sentido comparar la diferencia de potencial entre dos puntos, por esto, y en analogía con el potencial de energía en física 2, siempre en los problemas se debe elegir un potencial de referencia. Un criterio común es elegir el potencial de referencia en $r_a = \infty \rightarrow V_a = 0$ (aunque no necesario, es solo cuestión de elección) Por lo que el potencial eléctrico debido a una carga puntual queda simplemente como

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{kq}{r}, \quad \text{específicamente en el punto } \vec{\mathrm{b}}: \quad V_b = k\frac{q}{r_b} \tag{4}$$

Notar que arbitrariamente y por conveniencia hemos situado el origen de coordenadas en la carga.

Al igual que cuando queríamos calcular el campo eléctrico de muchas partículas solo teníamos que calcular el campo de cada una de ellas y después sumar (**principio de superposición**), para el potencial eléctrico es lo mismo. Por lo que para un conjunto de N cargas q_i el potencial que generan en todo el espacio está dado por:

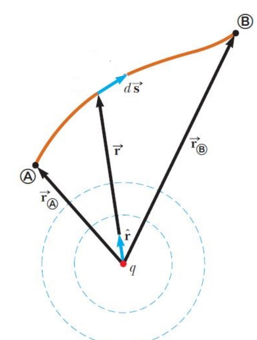


Figura 2: . La línea naranja podría ser cualquier camino para la integral en el cálculo de la diferencia de potencial entre A y B

$$v(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i} \quad \text{con} \quad r_i = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r_i}}| \tag{5}$$

Uno de los grandes **beneficios** de trabajar con el potencial eléctrico, es que **trabajas con escalares en vez de vectores**, y eso se agradece bastante a la hora del calculo. Y la forma de unir estos dos conceptos, es a través de una derivada del potencial. Si el potencial depende de una única variable, entonces

$$E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \tag{6}$$

$$E_r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \tag{7}$$

En caso de mas variables, entonces $\vec{\mathbf{E}}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$

Para calcular el **potencial debido a una distribución continúa de carga** hacemos uso del principio de superposición. Dividimos la distribución en pequeñas cargas puntuales, de magnitud dq_i, y simplemente sumamos el potencial generado por cada una de ellas:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k\left(\frac{dq_1}{r_1} + \frac{dq_2}{r_2} + \dots\right) \tag{8}$$

Cuando tomamos el límite infinitesimal y hacemos estas cargas dq_i muy pequeñas la forma de sumarlas convenientemente es haciendo uso de la integral de Riemann y nos queda que:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k\int \frac{dq}{(\vec{\mathbf{r}})} \tag{9}$$

Si la distribución de carga es un volumen el diferencial de carga estará dado por $dq = \rho dV'$, si es una superficie $dq = \sigma dS'$ y si es un cable $dq = \lambda dl'$. Donde $\rho(\vec{\mathbf{r'}}), \sigma(\vec{\mathbf{r'}}), \lambda(\vec{\mathbf{r'}})$ son respectivamente las densidades de carga volumétrica, supericial y líneal:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k\oint_{V'} \frac{\rho(\vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|}dV', \qquad V(\vec{\mathbf{r}}) = k\oint_{S'} \frac{\sigma(\vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|}dS', \qquad V(\vec{\mathbf{r}}) = k\int \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r'}})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r'}}|}dl' \tag{10}$$

4. Problemas

P1.

Dos cargas de igual magnitud Q son ubicadas a una distancia d la una de la otra. Considera solo los puntos en la línea que une ambas cargas.

a) Si las dos cargas tienen el mismo sentido, encuentra la ubicación de todos lo puntos (si es que hay alguno) donde (i) el potencial es cero (¿es cero el campo eléctrico en estos puntos?), (ii) donde el campo eléctrico es cero (¿es cero el potencial en estos puntos?).

b) Repite (i) y (ii) para dos cargas con signo opuesto.

Tomar como punto de referencia $V(r) = 0, r \to \infty$

Solución:

a) (i)Lo primero es ubicar las cargas y elegir un centro de coordenadas. Eligiendo el punto medio de ambas cargas como el origen tenemos que $\vec{\mathbf{r}}_1 = (d/2)\hat{x}$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-d/2)\hat{x}$, luego el potencial en el eje x que une ambas cargas está dado por:

$$V(x) = kQ\left(\frac{1}{|x+d/2|} + \frac{1}{|x-d/2|}\right)$$

De donde es evidente que será igual a cero solo en los puntos infinitamente lejanos de ambas cargas $x \to \infty$, donde el campo eléctrico también es cero.

(ii) Para calcular el campo eléctrico hay dos opciones claras, una utilizar el resultado conocido del campo eléctrico generado por una carga puntual y sumar el de ambas cargas aplicando el principio de superposición. La segunda es escribir el potencial como una función por partes (¡nunca derives directamente una expresión con un valor absoluto!) y calcular el campo como la derivada del potencial en la dirección x. Lo más simple es el primer camino y se obtiene directamente:

$$E(x) = \begin{cases} -kQ\left(\frac{1}{|x+d/2|^2} + \frac{1}{|x-d/2|^2}\right), & \text{for} \quad x < -d/2 \\ kQ\left(\frac{1}{|x+d/2|^2} - \frac{1}{|x-d/2|^2}\right), & \text{for} \quad -d/2 < x < d/2 \\ kQ\left(\frac{1}{|x+d/2|^2} + \frac{1}{|x-d/2|^2}\right), & \text{for} \quad x > d/2 \end{cases}$$

Por tanto solo será cero el campo eléctrico en $x = 0$. El potencial ya sabemos que no será cero.

b) (i)el potencial será 0 en $x = 0$, y el campo eléctrico no será cero. (ii) El campo eléctrico será cero solo $x \to \infty$ donde el potencial también será cero.

P2.

Una carga de 28 nC está ubicada en un campo eléctrico uniforme dirigido verticalmente hacia arriba con una magnitud de 4×10^4 V/m. ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo eléctrico cuándo la carga se mueve de (a)0.450 m a la derecha; (b) 0.670 m hacia arriba; (c) 2.60 m en un ángulo de 45° hacia abajo respecto a la perpendicular a la dirección del campo?

Solución Como el trabajo efectuado por el campo es simplemente el opuesto en el cambio de energía potencial de la carga se tiene que: (a) W = 0, (b) W = 0.7504 mJ, (c) W = -2.059 mJ

P3.

Una carga eléctrica total de $3{,}5$ nC está uniformemente distribuida sobre la superficie de una esfera metálica de radio 24 cm. Si el potencial es cero en el infinito, calcular el valor del potencial a las siguientes distancias del centro de la esfera: (a) 48 cm, (b) 24 cm, (c) 12 cm.

Solución Aplicando Ley de Gauss el campo eléctrico en el interior es cero, y en el exterior:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \implies V(r_{ext}) = -\frac{Q}{4\pi r\epsilon 0} \tag{11}$$

(a) $V(r = 48cm) = -65{,}534$ V, (b) $V(r = 24cm) = -131{,}038$ V, (c) $V(r = 12cm) = V(r = 24cm)$

P4.

Las placas deflectoras (verticales) de un osciloscopio son dos placas cuadradas paralelas de aproximadamente 3 cm por lado, distanciadas una de la otra 5 mm. La diferencia del potencial de las placas es de 25 V. Las placas están tan cerca una de la otra que podemos ignorar los efectos de borde. En estas condiciones: (a) ¿Cuánta carga hay en cada placa? (responde en μ C con dos cifras significativas)(b) ¿Qué tan fuerte es el campo eléctrico entre las placas?, (c) Si un electrón es liberado por la placa negativa, ¿qué tan rápido se moverá cuándo alcance la placa positiva? (Pista: Puedes utilizar la ley de gauss para calcular el campo eléctrico entre las placas, recuerda las ecuaciones de la cinética del curso de física 1 o derívalas directamente desde la segunda Ley de Newton $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$. La carga total en las placas se distribuye de manera uniforme en su superficie)

Carga del electrón: $e \approx 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, masa del electrón: $m_e \approx 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg

permitividad en el vacío: $\epsilon_0 \approx 8{,}85419 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2

Solución (a) Q $\approx$ 0.04 μC. (b) 5000 N/C (c) v $\approx$ 2965383.8 m/s

P5.

Calcule el campo eléctrico asociado a los diferentes potenciales $a) V_1(x, y) = V_0(sin^2(x)+y);\quad b) V_2(x) = V_0 cos^2(x);\quad c) V_3 = V_1 + V_2$

Resp: $a)\overrightarrow{\mathbf{E}} = -V_0(sin(2x)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}});\quad b)\overrightarrow{\mathbf{E}} = V_0 sin(2x)\hat{\mathbf{x}};\quad c)\overrightarrow{\mathbf{E}} = -V_0\hat{\mathbf{y}}$

P6.

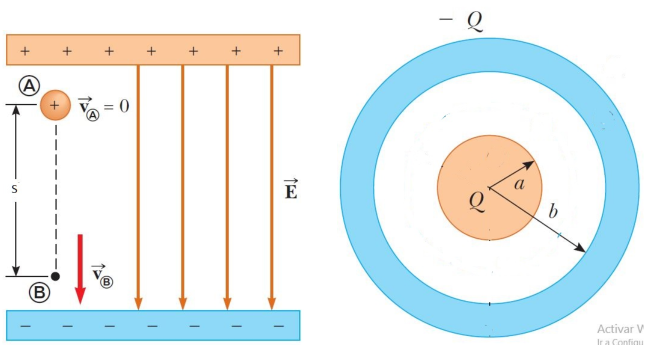
Un protón se libera desde e reposo en el punto A en un campo eléctrico uniforme que tiene una magnitud de $10^6[V/m]$(figura 3.a). El protón se somete a un desplazamiento de $1[m]$ al punto B en la dirección de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Encuentre la rapidez del protón después de completar el desplazamiento de $1[m]$. ¿La velocidad encontrada rompe con la cota superior de la velocidad de la luz? (la velocidad de la luz es $c \approx 3 \cdot 10^8[m/s]$)(Hint: Ocupa la conservación de la enegría)

Resp:$v \approx 1{,}38 \cdot 10^7[m/s]$

P7.

Se tienen 2 esferas concentricas conductoras, la esfera interior es maciza de radio a y carga $+Q$ y la esfera exterior (cascaron) tiene carga $-Q$. Calcule el potencial eléctrico entre las esferas $(a < r < b)$ (figura 3.b)

Resp: $\Delta V = kQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$



(a) Placas (b) Placas

Figura 3: P6 y P7

P8.

Un tubo Geiger-Muller es un detector de radiación que consiste en un cilindro metálico cerrado y hueco (el cátodo) de radio interior r_a y un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio r_b (ver figura). La carga por unidad de longitud sobre el ánodo es λ. Entonces un gas llena el espacio entre los electrodos. Cuando un partícula elemental de alta energía de alta energía pasa a través de este espacio, ioniza un átomo del gas. La intensidad del campo eléctrico hace que el ion y el electrón resultantes aceleren en direcciones opuestas; golpean otras moléculas del gas y las ionizan, lo que produce una avalancha de descarga eléctrica. El pulso de la corriente eléctrica entre el alambre y el cilindro se cuenta mediante un circuito eléctrico externo. (figura 4)

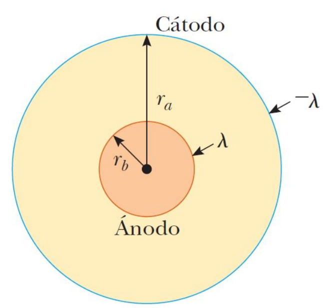


Figura 4: Geiger

a) Asumiendo que ente el ánodo y el cátodo, esta vacio,demuestre que la magnitud de la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro es (Hint: utiliza la definición de potencial eléctrico dada en esta esta guía)

$$\Delta V = 2k\lambda ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre cátodo y ánodo es

$$E = \frac{\Delta V}{ln\left(r_a/r_b\right)}\left(\frac{1}{r}\right)$$

5. Bibliografía

1. Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr., Física para ciencia e ingeniería con física moderna, Vol 2, 7^{th} edición, 2009. De aqui se baso en todo el capitulo 25.

2. Sears and Zemansky's. *University Physics with modern physics*. Young and Freedmand, 13^{th} Edition. *Sections 23.1,23.2,23.3,23.5, Summary*