Ecuaciones Diferenciales Lineales

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuaciones Diferenciales Lineales.**
- **Ecuaciones que se reducen a EDO Lineales.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Una EDO *lineal de primer orden* tiene la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{1}$$

dividiendo por $a_1(x)$, se obtiene la forma **estándar** de una ecuación lineal:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \tag{2}$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y las funciones $p, q : I \to \mathbb{R}$ son continuas. Notar que esta ecuación cae dentro de la categoría general $y' = f(x, y)$, con $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$.

Solución de la EDO homogénea ($q = 0$) :

$$y' + p(x)y = 0, \quad x \in I, \tag{3}$$

Es fácil ver que (3) es una ecuación de variables separables que sabemos resolver:

$$y' = -p(x)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Longrightarrow \quad y_h = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Para encontrar la solución de la EDO lineal no homogénea (2), presentaremos dos métodos:

1. (Variación de parámetros) Sea $y_1(t)$ una solución de la ecuación homogénea que no sea la solución cero. Buscaremos u, tal que $y = u(x)y_1(x)$ sea solución de (2). Sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$(u\, y_1)' + p(x)u\, y_1 = q(x)\,,$$

o

$$u\, y_1' + y_1 u' + p(x)u\, y_1 = q(x)$$

Como $y_1' + p(x)y_1 = 0$, la última ecuación se reduce a

$$y_1 u' = q(x) \quad \Longrightarrow \quad u'(x) = \frac{q(x)}{y_1}$$

y por lo tanto

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{y_1}\, dx + C\,.$$

De esta forma obtenemos

$$y(x) = y_1(x)u(x) = y_1(x)\int \frac{q(x)}{y_1(x)}\, dx + Cy_1(x)\,. \tag{4}$$

Si reemplazamos la función y_1 en (4) por $e^{-\int p(x)dx}$ (solución de la EDO homogénea), establecemos el siguiente resultado:

Teorema (Fórmula de Leibniz)
Las soluciones de $y' + p(x)y = q(x)$ estań dadas por

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx + Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{5}$$

donde x está en I y C es una constante arbitraria.

Observación: La solución de las ecuaciones lineales es la suma de la solución de la ecuación homogénea $Ce^{-\int p(x)dx}$ más lo que llamaremos *solución particular* de la EDO

$$e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx,$$

es decir, la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales

2. Otro método de resolución consiste en escribir (2) de la forma

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (p(x)y - q(x))dx \; + \; dy \; = \; 0 \tag{6}$$

y darnos cuenta que admite factor integrante que depende solo de la variable x. En efecto, si

$$M(x,y) \; = \; p(x)y - q(x)\,, \quad \text{y} \quad N(x,y) \; = \; 1\,,$$

tenemos

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \; = \; p(x)\,,$$

y luego tenemos *factor integrante*

$$u(x) \; = \; e^{\int p(x)\,dx}\,.$$

La ecuación (6) multiplicada por $u(x)$ es

$$e^{\int p(x)\,dx}y' + e^{\int p(x)\,dx}p(x)y = e^{\int p(x)\,dx}q(x). \tag{7}$$

Notar que el lado izquierdo tiene la estructura de la derivada de una producto, es decir.

$$\left(e^{\int p(x)\,dx}y\right)' = e^{\int p(x)\,dx}q(x).$$

Luego, integrando tenemos

$$e^{\int p(x)\,dx}y = \int (e^{\int p(x)\,dx}q(x))\,dx + C$$

Despejando y obtenemos nuevamente la fórmula de Leibniz

$$y(x) \; = \; e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx + Ce^{-\int p(x)dx}\,.$$

Ejemplo 1:

Encuentre la solución general $y = y(x)$ de la ecuación

$$y' + x^{-1}y = 1, \quad x > 0. \tag{8}$$

Solución: Identificamos las componentes de la ecuación $p(x) = x^{-1}$ y $q(x) = 1$.

Siguiendo la metodología descrita en el método 2, calculemos el *factor integrante*

$$u(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int x^{-1}dx} = e^{\ln(x)} = x,$$

ya que $x > 0$. Multiplicando (8) por el *factor integrante* obtenemos

$$xy' + y = x,$$

y acá se vé claramente la estructura de regla del producto en el lado izquierdo. Con esto, podemos escribir

$$(xy)' = x,$$

integrando obtenemos

$$xy = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

y despejando concluimos que

$$y(x) = Cx^{-1} + \frac{1}{2}x, \quad x > 0, \tag{9}$$

es solución general de (8). Notar que x^{-1} es solución de la ecuación homogénea asociada $y' + x^{-1}y = 0$, y que $\frac{1}{2}x$ es solución particular de (8) (verificar).

Ejemplo 2:

Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x, \quad y(1) = 0. \tag{10}$$

Solución: Primero escribamos la ecuación en su forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2, \quad y(1) = 0, \tag{11}$$

donde $p(x) = 1/x$ y $q(x) = 2$. Resolveremos el problema en el intervalo $(0, \infty)$ donde se encuentra la condición inicial y $p(x)$ es continua. El factor integrante es $u(x) = e^{\int dx/x} = x$, luego

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(xy) = 2x.$$

Integrando

$$xy = x^2 + C \quad \Longrightarrow \quad y = x + \frac{C}{x}.$$

Sustituyendo la condición inicial $y(1) = 0$ implica que $C = -1$, luego la solución del PVI es

$$y(x) = x - \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \infty.$$

Ecuaciones que se reducen a EDO Lineales.

Ecuación de Bernoulli

Una ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad x \in I, \tag{12}$$

donde $p, q : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, y $n \in \mathbb{R}$. Notar que en el caso que $n = 0$ o $n = 1$ la ecuación se reduce a una ecuación lineal, y entonces para esos casos ya tenemos método.

Multiplicando por y^{-n} obtenemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} \;=\; q(x)\,.$$

Haciendo el cambio de variables $z = y^{1-n}$, tenemos

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)[-p(x)z \;+\; q(x)]\,,$$

es decir

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z \;=\; (1-n)q(x)\,,$$

que es lineal.

Ejemplo 3:

Encuentre la solución general del problema

$$y' - x^{-1}y = -y^2, \quad x > 0. \tag{13}$$

Solución: Esta ecuación es claramente de tipo Bernoulli con $n = 2$. Haciendo el cambio de variable $z = y^{-1}$.

Usando la regla de la cadena, se tiene que $z' = -y^{-2}y'$, es decir $y^{-2}y' = -z'$. Reemplazando esta expresión y usando el cambio de variables, obtenemos que

$$-z' - x^{-1}z = -1,$$

de donde

$$z' + x^{-1}z = 1, \quad x > 0.$$

pero esta ecuación fue resuelta en el apunte anterior! Su solución general tiene la forma

$$z(x) = Cx^{-1} + \frac{1}{2}x, \quad x > 0,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante indeterminada. En este punto volvemos a la variable original y a través del cambio $z = y^{-1}$ para obtener

$$y(x) = \frac{1}{Cx^{-1} + \frac{1}{2}x} = \frac{2x}{2C + x^2}.$$