Transformada de Laplace

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 4: Convolución.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Convolución

Definición: *Sean* $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas por parte. La* **convolución** *de las funciones* $f(t)$ *y* $g(t)$, *es una nueva función, que se denota por* $f * g$, *y que se define por*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - v)g(v)dv \,.$$

Propiedades: Sean $f, g, h : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas por parte. Entonces:

1) $f * g = g * f$.
2) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
3) $f * (g * h) = (f * g) * h$.
4) $f * 0 = 0$.

Teorema de la Convolución:
Sean $f, g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas por parte y de orden exp.* α. *Entonces*

$$\mathcal{L}((f * g)(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s) \,.$$

o equivalentemente si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ *y* $G(s) = \mathcal{L}(g(t)(s)$, *entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))(t) = (f * g)(t) \,.$$

Ejemplos

Resolvamos el P.V.I.

$$y'' + y = \cos(t)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \\ &= \mathcal{L}(\sin(t))(s) \cdot \mathcal{L}(\cos(t))(s), \end{aligned}$$

y así, usando el Teorema de la convolución ($\mathcal{L}^{-1}F(s)G(s))(t) = (f * g)(t)$)

$$y(t) = \sin(t) * \cos(t) = \frac{1}{2}\, t\, \sin(t)\,.$$

Notar que se uso el siguiente resultado previo

$$\sin(t) * \cos(t) = \int_0^t \sin(t-v)\cos(v)\,dv = \frac{1}{2}\, t\, \sin(t).$$

Aplicación de la T.L. para resolver ecuaciones integrales

Sean $f(x)$, $k(x)$ funciones dadas. La ecuación

$$f(x) \;=\; y(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt$$

donde $y(x)$ es la función incógnita, se llama **ecuación integral**.

Solución: Aplicando transformada de Laplace a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(x))(s) &= \mathcal{L}(y(x))(s) + \mathcal{L}((k*y)(x))(s) \\
\Rightarrow \quad \mathcal{L}(f(x))(s) &= \mathcal{L}(y(x))(s) + \mathcal{L}(k(x))(s)\cdot\mathcal{L}(y(x))(s) \quad \text{(T. de la convolución)} \\
\Rightarrow \quad \mathcal{L}(y(x))(s) &= \frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{1+\mathcal{L}(k(x))(s)} \\
\Rightarrow \quad y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{1+\mathcal{L}(k(x))(s)}\right](x)
\end{aligned}$$

Ejemplo

Resolvamos

$$y(x) \;=\; x^3 + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)y(t)dt\,.$$

Aplicando la T.L. a ambos lados y el Teorema de la convolución tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y(x))(s) &= \mathcal{L}(x^3)(s) + \mathcal{L}(\operatorname{sen}(x))(s)\cdot\mathcal{L}(y(x))(s)\\
\Rightarrow\quad \mathcal{L}(y(x))(s) &= \frac{\mathcal{L}(x^3)(s)}{1-\mathcal{L}(\operatorname{sen}(x))(s)} = \frac{\frac{3!}{s^4}}{1-\frac{1}{1+s^2}} = \frac{3!}{s^4}\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{3!}{s^4}+\frac{3!}{s^6}\,,\\
\Rightarrow\quad y(x) &= x^3 + \frac{1}{20}x^5\,.
\end{aligned}$$

Ejemplos

Probar que la ecuación diferencial

$$y'' + a^2 y = f,$$

con $y(0) = y'(0) = 0$ tiene a

$$y(t) = \frac{1}{a}\int_0^t f(u)\sin a(t-u)du$$

como solución.

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados y obtenemos:

$$s^2 Y(s) + a^2 Y(s) = \mathcal{L}(f) \qquad \Longrightarrow \qquad Y(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}\mathcal{L}(f),$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}(y)$. Aplicando el Teorema de la convolución

$$Y(s) = \mathcal{L}\left(\frac{\sin(at)}{a}\right)\mathcal{L}(f) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(\sin(at) * f(t)).$$

Aplicamos la transformada inversa y obtenemos el resultado deseado:

$$y(t) = \frac{1}{a}\int_0^t f(u)\sin a(t-u)du.$$