Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
Primer Semestre 2021

TALLER No. 1 - PRIMER SEMESTRE 2021

Estimadas y estimados estudiantes:

1. El Taller estará disponible en la plataforma Moodle desde **el lunes 10 de mayo a las 19:00 hasta el viernes 14 de mayo a las 22:00**, es decir, el tiempo destinado para el desarrollo completo del Taller es de Lunes a Viernes.

2. Las respuestas a cada pregunta planteada deben ser escritas con letra legible, de modo que la escritura contraste con el fondo de la hoja. Se recomienda desarrolle cada ejercicio en hojas independientes. **Incluir en el desarrollo de su prueba TODOS los resultados parciales.**

3. Luego, la solución a dichos problemas deberá ser **escaneada o fotografiada** en un documento **único** en formato **.pdf**. Para ello pueden usar cualquier dispositivo electrónico, tales como teléfonos inteligentes, Tablet, etc. que cuentan con múltiples aplicaciones gratuitas para realizar esta tarea, ejemplo: CamScanner.

   Incorpore en cada hoja el Nombre Completo y Sección.

4. El documento deberá respetar el formato de nombre de archivo: **"apellido_nombre.pdf"** (Ejemplo: **peralta_nicole.pdf**).

5. El plazo de envío termina impostergablemente a las **22:00 horas** del viernes 14 de mayo, esto está configurado en la plataforma https://uvirtual.usach.cl/moodle. Si no respeta este tiempo, no podrá enviar su evaluación.

Taller No. 1

P1) (2 ptos.) Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x-1}\left[\dfrac{3(x^2-1)-xy}{3(x-1)}\right], \\ y(0) = -3. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Encuentre la solución de (1), **describiendo todo el desarrollo**.

(b) Utilice dos métodos de **distinto orden** para aproximar $y(0.5)$, con $h = 0.1$.

(c) Para los dos métodos usados en (b), analice el error de su aproximación e interprete el resultado.

P2) (2 ptos.) **Extracción de un recurso natural renovable.**

El objetivo de este problema, es poder determinar una política óptima de extracción de un recurso renovable (por ejemplo, especie forestal, vegetal, marina) en el sentido de obtener la mayor cantidad del recurso sin afectar la permanencia de éste en el ecosistema.

La variable de estado indicará la cantidad de recurso, representado por un **número real positivo**, el cual denotaremos por $\boldsymbol{x(t)}$. Supondremos que el recurso natural a ser analizado se reproduce a una taza

$$\rho(x) = \rho_0\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde ρ_0, K son dos constantes positivas que son propias a la especie y al entorno donde evoluciona el recurso natural renovable.

Así, el modelo de extracción para el recurso renovable viene dado por el siguiente modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \rho_0 x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right) - hx(t), \quad t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

donde la constante $\boldsymbol{h > 0}$ indica la tasa de extracción del recurso.

i. Establezca la región donde quede garantizada la existencia y unicidad de (2).

ii. Encuentre los dos estados estacionarios asociados a (2), llamados x_1^* y x_2^*.

iii. Ahora nuestro objetivo es encontrar una solución explícita de (2). Para ello, siga los siguientes pasos:

   a) Resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

   $$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\phi(x) = \dfrac{1}{f(x)}\phi(x), \\ \boldsymbol{\phi(x_0) = 1}, \end{cases}$$

   donde $f(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{hx}{\rho_0}$, **describiendo todo el desarrollo**.

   b) Encuentre la ecuación diferencial ordinaria que satisface $z(t)$, donde $z(t) = \phi(x(t))$. Determine la solución de la ecuación diferencial que encontró.

c) Obtenga $x(t)$ (la solución de (2)) sabiendo que $\phi(x(t)) = z(t)$.

iv. Pruebe que $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ es igual a uno de los estados estacionarios encontrados en ii.

v. Deduzca de lo anterior, una condición sobre la tasa de extracción h de modo que el recurso natural nunca se extinga.

P3) (2 ptos.) El siguiente problema tiene por objetivo encontrar la solución general de la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\frac{d}{dx}y(x) = y^2 - \frac{2}{x^2}. \tag{3}$$

Para ello, siga los siguientes pasos:

1. Pruebe que la función $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ es una solución particular de (3).
2. Si $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{z(x)}$, encuentre la ecuación diferencial que satisface $z(x)$.
3. Encuentre la solución de la ecuación diferencial ordinaria que satisface $z(x)$, **describiendo todo el desarrollo**.
4. A partir de lo anterior, deduzca la solución general de (3).