Ecuaciones Diferenciales Exactas

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuaciones Diferenciales Exactas.**
- **Ecuaciones que se reducen a EDO exactas: Factor integrante.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Diferencial Total

Definición: Si $f = f(x, y)$ es una función con primeras derivadas continuas en una región del plano XY, se define su **Diferencial Total o Exacto** por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (1)$$

Observación:

1. Se deduce que si:
$$df = 0 \Rightarrow f(x, y) = C$$

2. Dada una familia de curvas $f(x, y) = C$, la ecuación diferencial asociada a esta familia es una ecuación de la forma diferencial total igual cero, es decir: $df = 0$

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Consideremos ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0\,. \tag{2}$$

Definición: Diremos que la ecuación (2) es una **ecuación diferencial exacta** en $D \subset \mathbb{R}^2$, si existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;=\; M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; N(x,y) \quad \forall (x,y) \in D\,.$$

En tal caso

$$df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \;=\; M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0\,,$$

y (2) es equivalente a

$$df \;=\; 0\,.$$

Luego

$$y = y(x)\,, \quad x \in I \quad \text{es solución de (2)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x,y(x)) = c\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Criterio para una ecuación diferencial exacta:

Sean M, N funciones con derivadas parciales continuas de primer orden en $B \subset \mathbb{R}^2$. Entonces

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0 \quad \text{es exacta en } B \iff \quad \frac{\partial M}{\partial y} \;\equiv\; \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{en } B\,.$$

Demostración: $\Longrightarrow$ Supongamos existe f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ en B. Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

$\Longleftarrow$ Sabemos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en B. Debemos encontrar f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.
Integremos, por ejemplo, $M(x,y)$ con respecto a x, manteniendo y constante:

$$f(x,y) \;=\; \int M(x,y)dx \;+\; g(y)\,, \tag{3}$$

donde $g(y)$ es la "constante" de integración a determinar, tal que se cumpla $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \;+\; g'(y).$$

Por lo tanto debemos tener

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Por último, se integra con respecto a y y se sustituye en (3) para obtener la función buscada.

Ejemplo 1:

Encontrar la solución de

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0\,.$$

Tenemos $M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ y $N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$. Comprobemos si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 12xy = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{Es Exacta!!}$$

Luego existe f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Comencemos por integrar $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ con respecto a x

$$f(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + g(y) = x^3 + 3x^2y^2 + g(y)\,.$$

Usemos la otra condición $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, para eso derivemos con respecto a y la expresión anterior e igualamos a N:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 6x^2y + g'(y)\,, \quad \text{y como} \\ N(x,y) &= 6x^2y + 4y^3\,, \quad \text{debemos tener} \\ g'(y) &= 4y^3 \\ \Longrightarrow \quad g(y) &= y^4\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4\,.$$

Así, las curvas soluciones $(x, y(x))$ de la ecuación satisfacen $(f(x,y) = c)$

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ecuaciones que se reducen a EDO exactas: Factor integrante.

Factor integrante

Definición: Si la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

no es exacta en D, se llama **factor integrante** a toda función $u = u(x, y)$ definida en D tal que

$$u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación exacta en D.

Ejemplo: La ecuación

$$y(1 + xy)dx - xdy = 0 \qquad \text{No es exacta!!} \tag{4}$$

En efecto, si $M(x, y) = y(1 + xy)$ y $N(x, y) = -x$, se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy \quad \neq \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Factor integrante

Sin embargo para $y \neq 0$ la ecuación multiplicada por $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$

$$\frac{y(1 + xy)}{y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0\,,$$

es decir

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0\,, \qquad \text{Es exacta!!} \tag{5}$$

Así $u(x,y) = \frac{1}{y^2}$ es factor integrante de (4) en el conjunto $D = \{(x,y)/y \neq 0\}$.
Para resolver (5) ponemos

$$f(x,y) = \int \left(\frac{1}{y} + x\right)dx + g(y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + g(y)\,.$$

Pero como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + g'(y) = -\frac{x}{y^2}\,,$$

tenemos

$$g'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = c\,.$$

Por lo tanto, toda solución $y = y(x)$ de (5) verifica la ecuación implícita

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c\,, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}\,.$$

Despejando y obtenemos

$$y(x) = \frac{2x}{2c - x^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,, \text{para } x \text{ tal que } 2c - x^2 \neq 0\,.$$

Factor integrante

Observación: Para que $u = u(x,y)$ sea factor integrante de $Mdx + Ndy = 0$, debemos tener

$$\frac{\partial}{\partial y}(uM) = \frac{\partial}{\partial x}(uN). \tag{6}$$

Casos en que es fácil encontrar el factor integrante

1) Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \quad \text{(depende sólo de } x\text{)},$$

entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de x.

En efecto si $u = u(x)$ la ecuación (6) queda de la forma

$$u\frac{\partial M}{\partial y} = u'(x)N + u\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u'(x)}{u} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x),$$

lo que implica

$$\ln(u(x)) = \int f(x)dx \qquad \text{o bien} \qquad u(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Factor integrante

2) Si

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y) \quad \text{(depende sólo de y)},$$

entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de y.

En efecto si $u = u(y)$ la ecuación (6) queda de la forma

$$u'(y)M + u\frac{\partial M}{\partial y} = u\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u'(y)}{u} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y),$$

lo que implica

$$\ln(u(y)) = \int g(y)dy \qquad \text{o bien} \qquad u(y) = e^{\int g(y)dy}.$$

Ejemplo 2

Encuentre la solución del problema de valores iniciales:

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln(x))dy = 0 \qquad y(1) = 1.$$

Solución: Sea

$$M(x,y) = \frac{y}{x}, \quad \text{y} \quad N(x,y) = y^3 - \ln(x),$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-1}{x}, \qquad \text{No es exacta!!}$$

Pero

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{x}{y}\cdot\frac{2}{x} = -\frac{2}{y},$$

implica que el factor integrante es

$$u(y) = e^{-2\int \frac{1}{y}dy} = e^{-2\ln(y)} = e^{\ln(\frac{1}{y^2})} = \frac{1}{y^2}.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$\frac{1}{xy}dx + \left(y - \frac{\ln(x)}{y^2}\right)dy = 0 \qquad \text{Es exacta!!}$$

En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{\ln(x)}{y^2}\right) = -\frac{1}{xy^2}.$$

Ejemplo 2

Luego, existe existe f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y - \frac{\ln(x)}{y^2},$$

integrando con respecto a x la primera relación se tiene:

$$f(x,y) \;=\; \int \frac{1}{xy}\,dx \;+\; g(y) \;=\; \frac{1}{y}\ln(x) \;+\; g(y)\,.$$

Usando la segunda relación

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; -\frac{\ln(x)}{y^2} + g'(y) = y - \frac{\ln(x)}{y^2},$$

lo que implica

$$g'(y) \;=\; y \quad\Longrightarrow\quad g(y) \;=\; \frac{y^2}{2}\,.$$

Por lo tanto

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2}\,,$$

y la solución general satisface la ecuación implícita

$$\frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2} \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar la solución que verifica la condición inicial $y(1) = 1$, se sustituye esta en la expresión anterior para obtener $c = 1/2$, luego la solución del PVI es

$$\frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2} \;=\; \frac{1}{2}.$$