# Ecuaciones Lineales de Segundo Orden no Homogéneas

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuaciones Lineales de Segundo Orden no Homogéneas.**
- **Método de coeficientes indeterminados.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

# Ecuaciones Lineales de Segundo Orden no Homogéneas

Consideremos la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\,, \qquad (1)$$

donde $p_1, p_2$ y $f$ son funciones continuas definidas sobre un intervalo $I$.

Usando el operador diferencial lineal $L$, esta ecuación toma la forma

$$L[y\ ] = f(x)\,. \qquad (2)$$

# Solución general de la EDO Lineales no Homogéneas

**Teorema:** Considere la ecuación $L[y\ ] = f(x)$, con coeficientes $p_1, p_2$ y $f$ continuos en un intervalo $I$. Si $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es la solución general de $L[y\ ] = 0$, y $y_p$ es una solución particular de $L[y\ ] = f(x)$, entonces

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

es la solución general de $L[y\ ] = f(x)$.

**Demostración** Sea $\tilde{y}$ una solución cualquiera de $L[y\ ] = f(x)$. Tenemos que demostrar que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Pero como $\tilde{y} - y_p$ es solución de la ecuación $L[y\ ] = 0$, existen constante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{y}(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad \forall x \in I\,,$$

lo que termina la demostración.

# Principio de superposición, EDO Lineales no Homogéneas

**Teorema:** Sea $y_{p_i}$ solución de $L[y\ ] = f_i(x)$, para $i = 1, \dots, k$, entonces

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}$$

es solución de

$$L[y\ ] = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x).$$

**Demostración:** Consecuencia inmediata de la linealidad del operador $L$

**Ejemplo:** Sea

- $y_{p_1} = -4x^2$ una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$,
- $y_{p_2} = e^{2x}$ una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$,
- $y_{p_3} = xe^x$ una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$.

Entonces

$$y_p(x) = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3},$$

es una solución particular de

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x.$$

# Método de Coeficientes indeterminados

Este método se aplica para encontrar una solución particular para ecuaciones del tipo

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \sum_{i=1}^{M} e^{r_i x}(P_i(x)\cos(q_i x) + Q_i(x)\mathrm{sen}(q_i x))\,, \tag{3}$$

donde $a_0, a_1, a_2, r_i$ y $q_i$ son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P_i(x), Q_i(x)$ son polinomios.

La correspondiente ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0\,. \tag{4}$$

Observe que el tipo particular de funciones que aparecen en el lado derecho de la ecuación (3) consta de términos de la forma

$$k\ (\text{constante}),\ x^n\ (n \in \mathbb{Z}^+),\ e^{rx}, \cos(qx), \mathrm{sen}(qx),$$

o bién expresiones que se pueden obtener por un número finito de adiciones, sustracciones y/o multiplicaciones de las anteriores.

Ejemplos de este tipo de ecuaciones son

$$y'' + 4y' + 5y \;=\; 2e^{3x} \qquad \text{y} \qquad y'' + 5y' + 4y \;=\; 8x^2 + 3 + 2\cos(2x)\,.$$

# Método de Coeficientes indeterminados

Consideremos la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{rx}(P(x)\cos(qx) + Q(x)\mathrm{sen}(qx))\,, \qquad (5)$$

donde $a_0, a_1, a_2, r$ y $q$ son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P(x), Q(x)$ son polinomios.

**Teorema:** Sea $n = \max\{\text{grado}\, P, \text{grado}\, Q\}$.
a) Si $r \pm iq$ no es raíz de la ecuación característica (4), entonces la ecuación (5) tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)\mathrm{sen}(qx))\,.$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ son polinomios de grado $n$.
b) Si $r \pm iq$ es raíz de multiplicidad $m$ de (4), entonces la ecuación (5) tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = x^m e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)\mathrm{sen}(qx))\,.$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ son polinomios de grado $n$.
En cada caso los coeficientes de los polinomios $R_n(x), S_n(x)$ se calculan reemplazando $y_p(x)$ en la ecuación.

# Ejemplo

**Ejemplo 1:** Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y' - 5y \;=\; 2e^{3x}\,.$$

**Solución:** Como $r \pm iq = 3$ no es raíz de la ecuación característica

$$k^2 + 4k - 5 = 0 \quad\Longrightarrow\quad k_1 = 1,\; k_2 = -5,$$

y el máximo entre los grados de $P(x) = 2$ y $Q(x) = 0$ es cero, debemos buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ae^{3x}\,.$$

Para encontrar el valor de $A$ calculamos las dos primeras derivadas de $y_p$

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x} \qquad \text{y} \qquad y_p''(x) = 9Ae^{3x}\,,$$

y reemplazamos en la ecuación diferencial obteniendo

$$9Ae^{3x} \;+\; 12Ae^{3x} \;-\; 5Ae^{3x} \;=\; 2e^{3x}\,.$$

Por lo tanto

$$16Ae^{3x} \;=\; 2e^{3x} \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{1}{8}\,,$$

y nuestra solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{8}e^{3x}\,.$$

La solución general es

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-5x} + \frac{1}{8}e^{3x}.$$

# Ejemplo

**Ejemplo 2:** Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 5y' + 4y = 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)\,.$$

**Solución:** La ecuación característica es

$$k^2 + 5k + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_1 = -1,\ k_2 = -4.$$

Escribamos la ecuación de la forma

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)\,,$$

con $f_1(x) = 3 + 8x^2$ y $f_2(x) = 2\cos(2x)$.
Para $L[y] = f_1(x)$, como $r \pm iq = 0$ no es raíz de la ecuación característica y grado de $P(x) = 3 + 8x^2$ es dos, tenemos solución particular de la forma

$$y_1(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2\,.$$

Con respecto a $L[y] = f_2(x)$, $r \pm iq = 2i$ tampoco es raíz de la ecuación característica. Además como el máximo entre los grados de $P(x) = 2$ y $Q(x) = 0$ es cero, tenemos solución particular de la forma

$$y_2(x) = A_3\cos(2x) + A_4 \mathrm{sen}(2x)\,.$$

De esta forma la ecuación inicial $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$, tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3\cos(2x) + A_4 \mathrm{sen}(2x)\,.$$

Tenemos

$$y_p'(x) = A_1 + 2A_2 x - 2A_3 \mathrm{sen}(2x) + 2A_4\cos(2x)\,,$$

y

$$y_p''(x) = 2A_2 - 4A_3\cos(2x) - 4A_4 \mathrm{sen}(2x)\,.$$

Así

$$
\begin{aligned}
L[y_p](x) &= 2A_2 - 4A_3\cos(2x) - 4A_4\,\mathrm{sen}(2x) + 5(A_1 + 2A_2x - 2A_3\,\mathrm{sen}(2x) \\
&\quad +2A_4\cos(2x)) + 4(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3\cos(2x) + A_4\,\mathrm{sen}(2x)) \\
&= (2A_2 + 5A_1 + 4A_0) + (10A_2 + 4A_1)x + 4A_2x^2 + 10A_4\cos(2x) \\
&\quad -10A_3\,\mathrm{sen}(2x)\,,
\end{aligned}
$$

y comparando con

$$f_1(x) + f_2(x) = 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)\,,$$

obtenemos las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2A_2 + 5A_1 + 4A_0 &= 3 \\
10A_2 + 4A_1 &= 0 \\
4A_2 &= 8 \\
10A_4 &= 2 \\
-10A_3 &= 0
\end{aligned}
$$

cuyas soluciones son

$$A_3 = 0\,,\ A_4 = \frac{1}{5}\,,\ A_2 = 2\,,\ A_1 = -5\,,\ A_0 = 6\,.$$

Luego

$$y_p(x) = 6 - 5x + 2x^2 + \frac{1}{5}\mathrm{sen}(2x)\,,$$

es la solución particular buscada. La solución general es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x} + 6 - 5x + 2x^2 + \frac{1}{5}\mathrm{sen}(2x).$$

**Ejemplo 3:** Busquemos una solución particular de

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x} + 2e^{-3x}\,.$$

**Solución:** La ecuación característica es

$$k^2 - k - 6 = (k+2)(k-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_1 = -2,\ k_2 = 3.\,.$$

Como $-2$ es raíz de multiplicidad uno de ella, la ecuación $L[y] = e^{-2x}$ tiene solución de la forma

$$y_1(x) = A_0 x e^{-2x}\,.$$

Por otra parte $-3$ no es raíz de la ecuación característica y luego $L[y] = e^{-3x}$ tiene solución de la forma

$$y_2(x) = A_1 e^{-3x}\,.$$

Sea entonces

$$y_p(x) = A_0 x e^{-2x} + A_1 e^{-3x}\,.$$

Derivando se tiene

$$y_p'(x) = A_0 e^{-2x} - 2A_0 x e^{-2x} - 3A_1 e^{-3x} \quad \text{y} \quad y_p''(x) = -4A_0 e^{-2x} + 4A_0 x e^{-2x} + 9A_1 e^{-3x}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= -4A_0 e^{-2x} + 4A_0 x e^{-2x} + 9A_1 e^{-3x} - (A_0 e^{-2x} - 2A_0 x e^{-2x} - 3A_1 e^{-3x}) - 6(A_0 x e^{-2x} + A_1 e^{-3x}) \\ &= -5A_0 e^{-2x} + 6A_1 e^{-3x}\,, \end{aligned}$$

y comparando con $e^{-2x} + 2e^{-3x}$, obtenemos $A_0 = -\frac{1}{5}$ y $A_1 = \frac{1}{3}$ . Por lo tanto

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} x e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x}$$

es la solución particular buscada y la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + -\frac{1}{5} x e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x}.$$