Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 2: El Método de valores y vectores propios**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Método de Valores propios para sistemas homogéneos

Es un método para construir la solución general de un sistema lineal de primer orden homogéneo con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Se sabe que es suficiente encontrar n vectores soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \ \mathbf{x}_2, \ \cdots \ , \mathbf{x}_n$, de modo que la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + \ c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{2}$$

es la solución general del sistema (1).

Procedimiento

El procedimiento para determinar los n vectores solución linealmente independientes, es análogo al método de raíces características para resolver una EDO homogénea de coeficiente constantes.

- Buscamos el vector solución de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{v} e^{\lambda t} \tag{3}$$

  donde $\lambda, \ v_1, \ v_2, \ \cdots, \ v_n$ son constantes a determinar de forma apropiada.

- Sustituyendo la solución propuesta $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ en el sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

  se tiene

$$\lambda \mathbf{v} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

  donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

Procedimiento

De álgebra lineal, la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante del sistema se anula, es decir

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \tag{4}$$

donde λ se conoce como un valor propio (o valor característico) de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}$ es el vector propio (o vector característico) *no nulo* asociado a λ de modo que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Observación:

- La ecuación (4) se denomina **ecuación característica** de la matriz $\mathbf{A}$ y sus raíces son los valores propios de $\mathbf{A}$.
- La ecuación característica tiene n raíces, que pueden ser reales y distintas, reales repetidas o complejas.
- El **método de valores propios** para resolver $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, consiste en encontrar los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ es una solución no trivial del sistema.

Casos

- **Valores propios reales distintos:** Sean $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots,\ \lambda_n$ valores reales y distintos de la matriz $\mathbf{A}$, del sistema homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$, los vectores propios correspondientes. Entonces la **solución general** es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Ejemplo: En el caso del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= 4\,x - 2\,y \end{aligned} \tag{5}$$

la correspondiente matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)\,(\lambda - 2) = 0\,.$$

Luego los autovalores son $\lambda = -3$ y $\lambda = 2$.

Para encontrar un vector propio asociado a $\lambda = -3$ debemos encontrar una solución no trivial del correspondiente sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} (1-(-3))\, v_1 + 1\, v_2 &= 0 \\ 4\, v_1 + (-2-(-3))\, v_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

que se reduce a la ecuación

$$4\, v_1 + v_2 = 0\,.$$

Una solución sencilla no trivial de este sistema es $v_1 = 1$, $v_2 = -4$. Luego $\mathbf{x}_1(t) = e^{-3t}\,(1,-4)^t$ es solución de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.

Para el otro autovalor, $\lambda = 2$, tenemos la ecuación

$$(1-2)\, v_1 + v_2 = -v_1 + v_2 = 0\,,$$

la solución no trivial $v_2 = 1$, $v_2 = 1$ y la solución $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\,(1,1)^t$.

De esta forma la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1\, \mathbf{x}_1(t) + c_2\, \mathbf{x}_2(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1\, e^{-3t} + c_2\, e^{2t} \\ -4\, c_1\, e^{-3\,t} + c_2\, e^{2\,t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,, \ \ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Casos

- **Valores propios complejos:** Sea $\mathbf{v}_1$ un vector propio correspondiente al valor propio complejo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, donde α y β son números reales. Entonces los vectores

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{v}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$$

son soluciones del sistema. $(\bar{\lambda}_1, \bar{\mathbf{v}}_1)$ es el conjugado de $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$.

Usando la fórmula de Euler, los dos vectores solución pueden expresarse:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{v}_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = \mathbf{v}_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\
\bar{\mathbf{v}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} &= \bar{\mathbf{v}}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \bar{\mathbf{v}}_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)).
\end{aligned}$$

De acuerdo al principio de superposición, la combinación lineal es solución. De modo que son soluciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{\mathbf{v}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1)e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \frac{i}{2}(-\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1)e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\
\mathbf{x}_2 &= \frac{i}{2}(-\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{\mathbf{v}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{i}{2}(-\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1)e^{\alpha t}(\sin(\beta t)
\end{aligned}$$

Definamos

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1) = \mathrm{Re}(\mathbf{v}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1) = \mathrm{Im}(\mathbf{v}_1). \tag{7}$$

Notar que $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son números reales.
Luego, las dos soluciones reales linealmente independientes asociadas a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= (\mathbf{B}_1\cos(\beta t) - \mathbf{B}_2\sin(\beta t))e^{\alpha t} \\
\mathbf{x}_2(t) &= (\mathbf{B}_2\cos(\beta t) + \mathbf{B}_1\sin(\beta t))e^{\alpha t}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ejemplo: Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 5\,x - 3\,y \\ \frac{dy}{dt} &= 6\, - y\end{aligned} \tag{9}$$

La correspondiente matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} .$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\,\lambda + 13 = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0\,.$$

Luego los autovalores son $\lambda = 2 \pm 3i$. El vector propio asociado a $\lambda = 2 + 3i$ verifica

$$\begin{pmatrix} 5-(2+3i) & -3 \\ 6 & -1-(2+3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3-3i & -3 \\ 6 & -3-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1-i)v_1 - v_2 &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = (1-i)v_1 \\ 2v_1 - (1+i)v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tomando $v_1 = 1$ se obtiene el vector propio

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i$$

La correspondiente solución de valores complejos $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{(2+3i)t}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(3t) + i\sin(3t) \\ \cos(3t) + \sin(3t) + i(\sin(3t) - \cos(3t)) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix} + i\, e^{2t}\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \sin(3t) - \cos(3t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}(t)$ son las soluciones de valores reales[1]

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \sin(3t) - \cos(3t) \end{pmatrix}$$

Notar que obtuvimos los mismo resultados que (8)

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(3t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin(3t)\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(3t)\right)$$

donde

$$\mathbf{B_1} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_2} = \mathrm{Im}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solución general es

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

[1] Si el sistema admite una solución compleja $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + i\mathbf{x}_2(t)$, entonces la parte real $\mathbf{x}_1(t)$ y la parte imaginaria $\mathbf{x}_2(t)$, son soluciones reales del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Casos

- **Valores propios reales repetidos:** Sean $\lambda_1, \ \lambda_2, \cdots, \ \lambda_n$ valores reales e iguales de la matriz $\mathbf{A}$, del sistema homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, entonces se pueden dar los siguientes casos:

  i) Para algunas matrices $\mathbf{A}$ de $n \ X \ n$ sería posible encontrar m vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \cdots, \ \mathbf{v}_m$, correspondientes a un eingevalor λ_1. En este caso la solución general del sistema contiene la combinación lineal:

  $$c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m\mathbf{v}_m e^{\lambda_1 t}$$

  ii) Si sólo hay un vector propio que corresponde al valor propio λ_1 de multiplicidad m, entonces siempre se pueden encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma:

  $$\begin{aligned} \mathbf{x_1} &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{x_2} &= \mathbf{v}_1 t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ \mathbf{x_m} &= \mathbf{v}_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{v}_2 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathbf{v}_m e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

  Donde los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ cumplen con:

  $$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_1 &= 0 \\ (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \\ &\vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_m &= \mathbf{v}_{m-1} \end{aligned}$$

Ejemplo i) : Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2\,y + 2\,z \\ \frac{dy}{dt} &= -2\,x + y - 2\,z \\ \frac{dz}{dt} &= 2\,x - 2\,y + z \end{aligned} \tag{10}$$

la correspondiente matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0\,.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 5$.

Para los autovalores, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1-(-1))\,v_1 - 2\,v_2 + 2\,v_3 &= 0 \\ -2\,v_1 + (1-(-1))\,v_2 - 2\,v_3 &= 0 \\ 2\,v_1 - 2\,v_2 + (1-(-1))\,v_3 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

que se reduce a la ecuación

$$2\,v_1 - 2\,v_2 + 2\,v_3 = 0\,.$$

Encontrar una solución sencilla no trivial de este sistema puede lograrse dando valores arbitarios a 2 variables, por ejemplo $v_2 = 1$, $v_3 = 0$ dan como resultado $v_1 = 1$, otro caso podría ser donde $v_2 = 0$, $v_3 = 1$ dando como resultado $v_1 = -1$. De esta forma se pueden construir 2 vectores linealmente independientes de un único valor propio, quedando como soluciones del sistema:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\,(1,1,0)^t$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-t}\,(-1,0,1)^t$$

Para el otro autovalor, $\lambda = 5$, tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1-(5))\,v_1 - 2\,v_2 + 2\,v_3 &= 0 \\ -2\,v_1 + (1-(5))\,v_2 - 2\,v_3 &= 0 \\ 2\,v_1 - 2\,v_2 + (1-(5))\,v_3 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

la solución no trivial $v_1 = 1$, $v_2 = -1, v_3 = 1$ y la solución $\mathbf{x}_3(t) = e^{5t}\,(1,-1,1)^t$.

De esta forma la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1\,\mathbf{x}_1(t) + c_2\,\mathbf{x}_2(t) + c_3\,\mathbf{x}_3(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1\,e^{-t} - c_2\,e^{-t} + c_3\,e^{5\,t} \\ c_1\,e^{-t} - c_3\,e^{5\,t} \\ c_2\,e^{-t} + c_3\,e^{5\,t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,, \ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo ii) : Considere el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3\,x - 18\,y \\ \frac{dy}{dt} &= 2\,x - 9\,y \end{aligned} \tag{13}$$

la correspondiente matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} .$$

Los autovalores son los λ que verifican

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 = 0\,.$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

Para el autovalor, $\lambda = -3$, tenemos la ecuación:

$$v_1 - 3\,v_2 = 0 \tag{14}$$

la solución no trivial $v_1 = 3$, $v_2 = 1$ y la solución $\mathbf{x}_1(t) = e^{-3t}\,(3,1)^t$.

Para construir la segunda solución se debe utilizar la siguiente relación:

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

Que se reduce a la ecuación:

$$2\, v_1 - 6\, v_2 = 1$$

la solución no trivial más sencilla es $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = 0$ y la solución $\mathbf{x}_2(t) = te^{-3t}\,(3,1)^t + e^{-3t}\,\left(\frac{1}{2}, 0\right)^t$. De esta

forma la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1\,\mathbf{x}_1(t) + c_2\,\mathbf{x}_2(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3\,c_1\,e^{-3t} + 3c_2\,te^{-3t} + \frac{c_2}{2}e^{-3t} \\ c_1\,e^{-3\,t} + c_2\,te^{-3t} \end{pmatrix} ,\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,\;\; t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$