Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

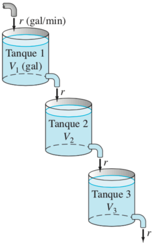
Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 5: Aplicaciones**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Aplicación: Problema de mezcla

La figura muestra tres tanques de salmuera conteniendo V_1, V_2 y V_3 galones de la solución, respectivamente. Agua fresca fluye hacia el tanque 1, mientras que la salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hasta el tanque 2, desde éste hacia el tanque 3 y sale finalmente de este último. Sea $x_i(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque i en el tiempo t para i =1, 2 y 3.
(a) Si cada razón de flujo es de r gal/min, obtenga el sistema de primer orden que modela las concentraciones de sal en cada tanque.



Solución: Las ecuaciones que modelan la variación de las concentraciones en cada tanque son:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -k_1 x_1, \\ x_2'(t) &= k_1 x_1 - k_2 x_2, \\ x_3'(t) &= k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{aligned}$$

donde $k_i = \dfrac{r}{V_i}$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Si $V_1 = 20$, $V_2 = 40$, $V_3 = 50$, $r = 10$ (gal/min) y las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera, en lb, son

$$x_1(0) = 15, x_2(0) = x_3(0) = 0,$$

encuentre la cantidad de sal en cada uno de los tanques en el tiempo $t \geq 0$.

Solución: Sustituyendo los valores dados, se obtiene el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^t$.

Primero encontremos los valores propios, para eso calculamos

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -0.5-\lambda & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25-\lambda & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2-\lambda \end{vmatrix} = (-0.5-\lambda)(-0.25-\lambda)(-0.2-\lambda) = 0.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.25$ y $\lambda_3 = -0.2$.

Caso 1. $\lambda_1 = -0.5$. Sustituyendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dividiremos entre 0.25 y 0.05, la segunda y tercera fila, respectivamente, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2a + b &= 0, \\ 5b + 6c &= 0. \end{aligned}$$

Si consideramos $b = -6$ y $c = 5$, entonces de la primera ecuación se obtiene $a = 3$. Así, el vector propio es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Caso 2. $\lambda_1 = -0.25$. Sustituyendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De las dos primeras filas se obtiene $a = 0$, dividiendo por 0.05 la tercera fila, se tiene

$$5b + c = 0,$$

tomando $b = 1$ y $c = -5$, el vector propio asociado a λ_2 es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Caso 3. $\lambda_1 = -0.2$. Sustituyendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La primera y la tervera fila implica que $a = b = 0$ y tomamos un valor arboitrario para c, así

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución general es

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t},$$

sustituyendo

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-0.5t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-0.25t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.2t},$$

por componentes

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1 e^{-0.5t}, \\ x_2(t) &= -6c_1 e^{-0.5t} + c_2 e^{-0.25t}, \\ x_2(t) &= 5c_1 e^{-0.5t} - 5c_2 e^{-0.25t} + c_3 e^{-0.2t}. \end{aligned}$$

Al imponer las condiciones iniciales $x_1(0) = 15$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$ se obtienen las ecuaciones

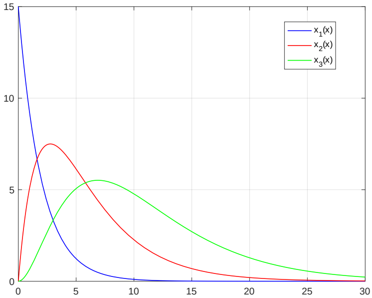
$$\begin{aligned} 15 &= 3c_1, \\ 0 &= -6c_1 + c_2, \\ 0 &= 5c_1 - 5c_2 + c_3, \end{aligned}$$

donde $c_1 = 5$, $c_2 = 30$ y $c_3 = 125$. Luego las concentraciones de sal en el instante de tiempo t en los tres tanques de salmuera están dadas por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 15e^{-0.5t}, \\ x_2(t) &= -30e^{-0.5t} + 30e^{-0.25t}, \\ x_2(t) &= 25e^{-0.5t} - 150e^{-0.25t} + 125e^{-0.2t}. \end{aligned}$$

(c) Analizar el comportamiento de las concentraciones de sal cuando $t \to \infty$.

Solución: En la figura se puede observar el comportamiento de las concentraciones de sal. En el tanque 1 la concentración de sal tiende rápidamente a cero por la entrada de agua pura ($x_1(t) \to 0$). Las cantidades $x_2(t)$ y $x_3(t)$ de sal en los tanques 2 y 3 alcanzan su máximo y luego tienden a cero cuando $t \to \infty$.



Ejercicio propuesto: Usar el método de Newton Raphson para determinar en que instante de tiempo t, las concentraciones de sal $x_2(t)$ y $x_3(t)$ alcanzan su valor máximo.