Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Tema 4: El Método de Variación de parámetros**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

El Método de Variación de parámetros

Dado el sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t), \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz no necesariamente con entradas constante de $n \times n$ y $\mathbf{F}$ es una función vectorial continua dada. Si $\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ son soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo, podemos buscar una solución particular del sistema no homogéneo de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = c_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n(t)\mathbf{x}_n(t)$$

o en forma matricial

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

donde $\Phi(t)$ es la correspondiente matriz fundamental. Entonces

$$\mathbf{x}_p'(t) = \Phi'(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Por otra parte

$$\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{F}(t) = \mathbf{A}(t)\,\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} + \mathbf{F}(t).$$

Como $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\,\Phi(t)$, debemos tener la igualdad

$$\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(t).$$

El Método de Variación de parámetros

Podemos despejar el vector incognita

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1}\,\mathbf{F}(t).$$

Por lo tanto,debemos tener

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = \int \Phi(t)^{-1}\,\mathbf{F}(t)\,dt\,.$$

Sustituyendo se obtiene la solución particular deseada

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}\,\mathbf{F}(t)\,dt\,.$$

La solución general sería

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}\,\mathbf{F}(t)\,dt\,.$$

donde $\mathbf{c}$ representa el vector columna cuyas entradas son los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si agregamos una condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, se puede calcular el valor de $\mathbf{c} = \Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0$, luego se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t)^{-1}\,\mathbf{F}(t)\,dt\,.$$

Ejemplo

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x - y - 5\,t + 2 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y + 8\,t - 8\end{aligned} \tag{2}$$

Solución
Primero resolvemos el correspondiente sistema homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{3}$$

donde $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^t$. Para encontrar los valores propios calculamos

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & -1 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$.

Caso 1. $\lambda_1 = 3$. Sustituyendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seleccionamos $a = b = 1$, entonces el vector propio asociado a λ_1 es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Caso 2. $\lambda_2 = 2$. Sustituyendo se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seleccionamos $a = 1$ y $b = 2$, entonces el vector propio asociado a λ_2 es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Su matriz inversa es

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{e^{5t}} \begin{pmatrix} 2\,e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} &= \int \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} -5\,t + 2 \\ 8\,t - 8 \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} (12 - 18\,t)\,e^{-3t} \\ (-10 + 13\,t)\,e^{-2t} \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} (6\,t - 2)\,e^{-3t} \\ \frac{(7-26\,t)}{4}\,e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego tenemos la solución particular

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2\,e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (6\,t - 2)\,e^{-3t} \\ \frac{(7-26\,t)}{4}\,e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2\,t-1}{4} \\ \frac{-14\,t+3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Entonces la solución general de nuestro sistema es

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \mathbf{x}_p(t),$$

sustituyendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} \frac{-2\,t-1}{4} \\ \frac{-14\,t+3}{2} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{2t} - \frac{2\,t+1}{4} \\ c_1\, e^{3t} + 2\, c_2\, e^{2t} + \frac{3-14\,t}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por componentes

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{2t} - \frac{2\,t+1}{4} \\
y(t) &= c_1\, e^{3t} + 2\, c_2\, e^{2t} + \frac{3-14\,t}{2}.
\end{aligned}$$