Ecuaciones Diferenciales de variables separables

Coordinación de Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos, DMCC

- **Ecuaciones Diferenciales de variables separables.**
- **Ecuaciones que se reducen a EDO de variables separables.**

DMCC, Facultad de Ciencia, USACH

Ecuaciones Diferenciales de variables separables

La **ecuaciones diferencial de variables separables** tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1}$$

donde g y h son funciones dadas. En este caso las variables x e y pueden *separarse* escribiendo, de manera informal, la ecuación

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx,$$

integrando indefinida la expresión anterior, se tiene

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c,$$

donde c es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.

La ecuación

$$y' = 3x^2 y, \tag{2}$$

es una ecuación de variables separables. En este caso, $g(x) = x^2, h(y) = y$.

- Primero *separemos las variables*

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx.$$

(Notar que, no sabemos si $y = y(x)$ toma el valor cero para algún x)

- Integrando indefinidamente la expresión anterior, concluimos que

$$\ln|y| = x^3 + c, \tag{3}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante indeterminada, producto de la integración indefinida. Aplicando exponencial, concluimos que

$$|y| = e^{x^3+c} = e^c e^{x^3},$$

de donde, tenemos que

$$|y(x)| = Ce^{x^3}, \tag{4}$$

donde la última constante indefinida C corresponde a la exponencial de la constante indefinida en (3), y por lo tanto es no negativa.

Ejemplo 1.

A esta expresión se le denomina *solución general de la EDO*,

$$|y(x)| = Ce^{x^3}, \qquad y(x) = \pm Ce^{x^3} \tag{5}$$

Supongamos que además de la ecuación (2), disponemos del valor de la solución buscada en un punto x particular. Por ejemplo, supongamos que además de (2) sabemos que

$$y(1) = 2, \tag{6}$$

es decir, sabemos que el gráfico de la función y pasa por el punto $(1, 2)$. Entonces,

$$2 = y(1) = Ce \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2e^{-1}.$$

Luego la solución del PVI es la función

$$y(x) = 2e^{x^3 - 1}. \tag{7}$$

Estados (soluciones) estacionarias

En la ecuaciones de variables separables de la forma

$$y' = g(x)h(y),$$

qué pasa si no es posible dividir por $h(y)$?. Por ejemplo, resolver el PVI:

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y, & x \in \mathbb{R}, \\ y(1) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

En este caso, esta dificultad nos lleva al concepto *estado estacionario (o solución estacionaria) de una ecuación diferencial*

Por ejemplo, $y(x) = 0$ es un estado estacionario para la EDO

$$y' = 3x^2 y, \quad x \in \mathbb{R},$$

pues es una solución constante de ella (anula ambos lados de la igualdad, para todo $x \in \mathbb{R}$). En particular, éste estado estacionario es solución del PVI (8).

Nota: antes de resolver una EDO de variables separables (y en general, cualquier EDO), debemos identificar los estados estacionarios asociados.

Ecuaciones que se reducen a EDO de variables separables

Ecuaciones que se reducen a EDO de variables separables

1. Ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

se reducen a variables separables haciendo el cambio de variables $z = ax + by + c$.
En efecto

$$z = ax + by + c \implies \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

y reemplazando en nuestra ecuación se obtiene

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.

Encontrar la solución de
$$\frac{dy}{dx} = 2y - x + 3.$$

Solución: El cambio de variables $z = 2y - x + 3$, implica $\frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dx} - 1$. Luego, en las nuevas variables
$$\frac{dz}{dx} = 2z - 1.$$

Separando variables obtenemos
$$\frac{dz}{2z-1} = dx\ ,$$

e integrando
$$\frac{1}{2}\ln(2z-1) = x + \ln(c)\ , \quad c > 0.$$

Luego
$$|2z-1| = e^{2x+2\ln(c)} \quad \Longrightarrow \quad z(x) = \frac{c^2}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\ ,$$

y volviendo a la variable original, tenemos
$$2y - x + 3 = \frac{c^2}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{x}{2} + Ce^{2x} - \frac{5}{4},$$

donde $C = \frac{c^2}{4}$.

Ecuaciones que se reducen a EDO de variables separables

2. Ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reducen a variables separables haciendo el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$.
En efecto

$$z = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}x - y}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x},$$

que es de variables separables.

Ejemplo 3.

Resolvamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

Solución: Esta ecuación la podemos escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \,.$$

Notar que, $z = y/x$, implica $y = zx$, y por lo tanto $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Luego tenemos

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{1+z}{1-z} \implies x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2}{1-z} \implies \frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x} \,.$$

Integrando obtenemos

$$\arctan(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) - \ln(x) = c \,,$$

y volviendo a nuestra variables originales

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = c \,.$$

Observe que nuestra solución general está dada en forma implícita.

Ecuaciones que se reducen a EDO de variables separables

3. Ecuaciones del tipo

$$M(x,y)\,dx \;+\; N(x,y)\,dy \;=\; 0\,, \tag{9}$$

donde M, N son *funciones homogéneas de grado n*.

Definición: Una función $F(x,y)$ se dice *homogénea de grado n* si

$$F(tx,ty) \;=\; t^n\,F(x,y)\,, \tag{10}$$

para todo x, y, t. tales que los puntos (x,y) y (tx,ty) están en el dominio de F.

La ecuación (9) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} \;=\; F(x,y)\,,$$

donde $F(x,y) \;=\; -M(x,y)/N(x,y)$ es claramente homogénea de grado 0. Entonces

$$F(x,y) \;=\; F\left(x, x\frac{y}{x}\right) \;=\; x^0\,F\left(1, \frac{y}{x}\right) \;=\; F\left(1, \frac{y}{x}\right)\,.$$

De esta forma nuestra ecuación es del tipo anterior

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f\left(\frac{y}{x}\right)\,,$$

con $f\left(\frac{y}{x}\right) \;=\; F\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Ejemplo 4.

La ecuación

$$(x^2 - 2y^2)\,dx \;+\; xy\,dy \;=\; 0,$$

se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{x^2 - 2y^2}{xy},$$

es una ecuación homogénea, ya que $F(x, y) = -\frac{x^2 - 2y^2}{xy}$ satisface la propiedad (10).

Factorizando por x, se tiene que

$$y' = -\frac{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}},$$

siempre que $x \neq 0$. Haciendo el cambio de variable $z = y/x$ tenemos

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} \;-\; \frac{y}{x^2} \;=\; -\frac{1}{x}\left(\frac{1 - 2z^2}{z} \;+\; z\right) \;=\; -\frac{1}{x}\,\frac{1 - z^2}{z}.$$

Separando variables y multiplicando por 2 obtenemos

$$\frac{2z}{z^2 - 1}\,dz \;=\; \frac{2}{x}\,dx\,, \quad \Longrightarrow \quad \ln|z^2 - 1| \;=\; 2\,\ln|x| \;+\; \ln(c)\,, \quad \Longrightarrow \quad z^2 \;=\; 1 \;+\; c\,x^2\,.$$

Finalmente volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general

$$y \;=\; \pm x\,\sqrt{1 \;+\; c\,x^2}\,.$$