Entraînement au calcul intégral

Notions de calcul intégral

$\int$

Rappels théoriques, techniques et exercices corrigés

Benjamin Garcia

7 septembre 2025

Version 1.1

“L’erreur est facile à tous ; plus facile peut-être à celui qui croit savoir beaucoup.”

— Alain

Table des matières

À propos

Si vous lisez ceci, alors il s'agit de la première version du document ; il peut donc contenir des erreurs. De plus, la partie exercice n'est pas encore terminée : je suis en train de l'écrire !

Dans ce document, vous retrouverez toutes les notions clés pour vous entraîner au calcul intégral. Il ne s'agit pas d'un cours à proprement parler : on n'y construit pas rigoureusement l'intégrale, mais on en donne plutôt une intuition géométrique. Ce recueil est avant tout axé sur la pratique, avec de nombreux exemples et exercices corrigés.

Au départ, mon ambition était simplement de réunir dans un seul document mes exercices préférés sur le calcul intégral, en rappelant les astuces et techniques de calcul associées. Puis, au fil de l'écriture, le projet a pris de l'ampleur.

Comme indiqué sur la première page, ce document est donc un recueil de notions, et non un

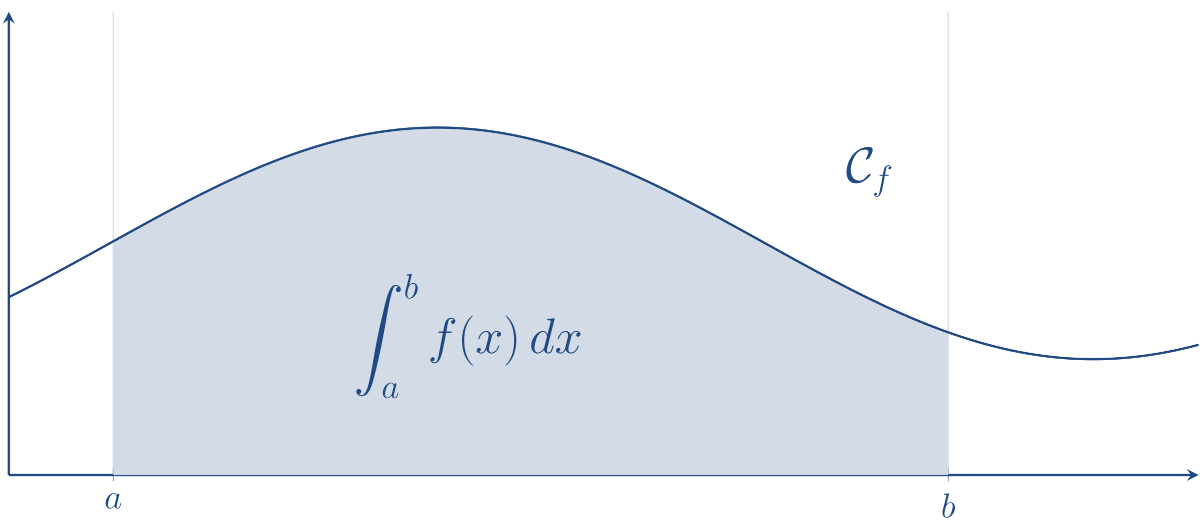
cours complet. Il n'a pas vocation à être lu de manière linéaire, ni à approfondir tous les sujets abordés. Par exemple, pour des raisons de simplicité, certaines propriétés sont démontrées à l'aide de notions présentées seulement dans des sections ultérieures.
Enfin, je vous remercie chaleureusement par avance de bien vouloir me transmettre vos corrections et remarques, quelles qu'elles soient, à l'adresse suivante : benjamin.garcia@etu.unistra.fr
Pour plus de ressources : consultez ma page

1 Théorèmes fondamentaux

Dans cette section, nous commencerons par donner une intuition géométrique et une méthode de calcul de l'intégrale à travers la notion de *somme de Riemann*. Par la suite, nous prendrons un chemin plus analytique (et pratique) pour calculer des intégrales en recherchant des primitives, dont nous rappellerons les bases.

1.1 Somme de Riemann

Géométriquement, on peut interpréter l'intégrale comme l'aire comprise entre deux points, la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses. Mais contrairement aux formes géométriques standards comme le rectangle ou le triangle, etc., il n'existe aucune formule générale triviale pour déterminer l'aire sous une courbe.



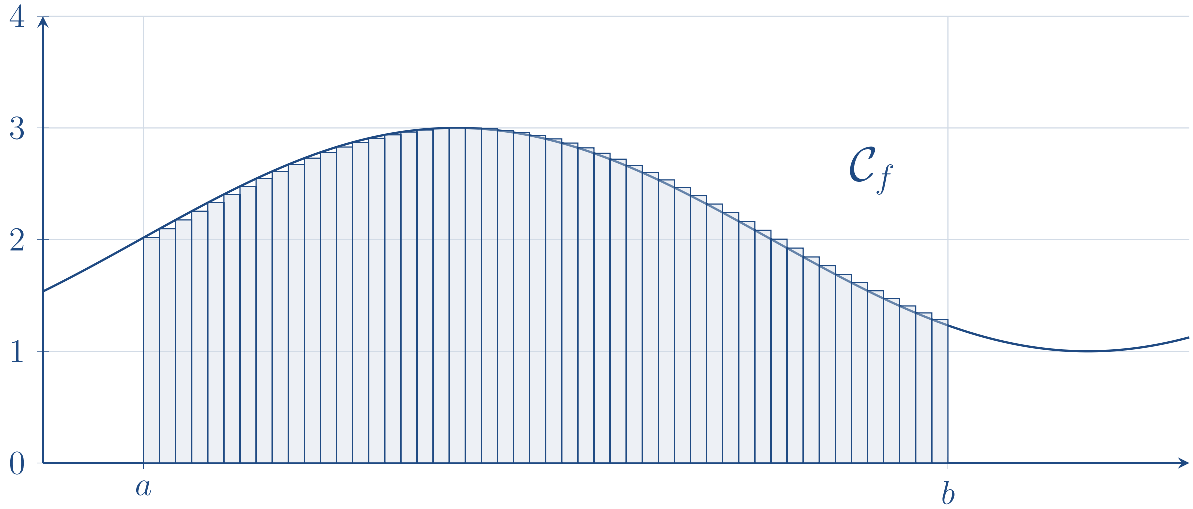
Une méthode pour calculer l'aire sous une courbe est de l'approximer à l'aide de rectangles qui, eux, ont une formule bien connue pour leur aire. Pour ce faire, on va créer une subdivision régulière $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ entre a et b de sorte que l'on puisse considérer des rectangles ayant pour base commune la longueur $\frac{b-a}{n}$ et dont la hauteur du i-ème rectangle vaut $f(x_i)$. En sommant les aires de tous les rectangles, on peut approximer l'aire sous la courbe.

Sur la figure, par exemple, on a divisé l'intervalle $[a, b]$ en 5. Notre but est de trouver l'aire de tous les rectangles. On sait déjà que leur base est commune et vaut, pour $n = 5$, $\frac{b-a}{5}$. Il ne reste qu'à trouver toutes leurs hauteurs.
La hauteur du premier rectangle est l'image du premier point par f, sa hauteur est donc $f(a)$. Pour le deuxième rectangle, il faut prendre l'image du deuxième point de la subdivision (x_1). Pour cela, remarquons que sur l'axe des abscisses, on doit partir de a et avancer d'une fois la longueur d'une base, donc de $a + \frac{b-a}{5}$. Ainsi, la hauteur du deuxième rectangle est $f\left(a + \frac{b-a}{5}\right)$. Il ne reste qu'à répéter le procédé : la hauteur du troisième est $f\left(a + 2\frac{b-a}{5}\right)$, celle du quatrième $f\left(a + 3\frac{b-a}{5}\right)$ et celle du cinquième $f\left(a + 4\frac{b-a}{5}\right)$.
Le travail est fini : la surface recouverte par tous les rectangles vaut :

$$\underbrace{\frac{b-a}{5}}_{\text{base commune}} \sum_{k=0}^{4} \underbrace{f\left(a + k\frac{b-a}{5}\right)}_{\text{hauteur du } k\text{-ième rectangle}}$$

Le problème, c'est que dans cet état, cette approximation est très mauvaise. Visuellement, cela se constate : il y a des zones où le rectangle ne couvre pas toute l'aire sous la courbe, et parfois même il en recouvre plus qu'il ne faudrait. Il nous faut plus de rectangles !

Avec cette méthode, l'approximation devient précise quand le nombre de rectangles devient "très grand". Sur la figure ci-dessous, cela se voit aisément : il y a tellement de rectangles que l'on s'imagine sans peine que désormais l'aire sous la courbe est très proche de la somme des aires de tous ces rectangles.



Et maintenant, que se passe-t-il si l'on considère des calculs de limite et faisons tendre n vers l'infini ? La somme va-t-elle exactement valoir $\int_a^b f(x)\,dx$? Oui, et c'est un théorème.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

le terme dont on prend la limite s'appelle une *Somme de Riemann*.

Exemple

Calculer :

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(0+\frac{k}{n}(1-0)\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\end{aligned}$$

Nous connaissons la formule pour la somme du carré de n entiers consécutifs : $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. En remplaçant dans l'expression on a :

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

Spoiler : on n'utilise que rarement ce théorème pour calculer des intégrales, car l'expression est très dure à manipuler.

1.2 Primitive

Par la suite, pour calculer des intégrales, nous serons amenés à chercher des primitives des fonctions à intégrer. Faisons quelques rappels.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On appelle primitive de f toute fonction $F : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I qui vérifie $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Voici quelques exemples de primitives :

- $F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto x^2$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad G : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $g : x \mapsto x^n$.
- $H : x \mapsto \ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $K : x \mapsto \sin x$ est une primitive de $k : x \mapsto \cos x$.

De manière générale, pour s'assurer qu'une fonction F est une primitive de f, il suffit de la dériver et de vérifier si cela correspond.

Attention

Vous aurez remarqué que l'on ne dit pas **LA** primitive mais **UNE** primitive. Dans l'exemple précédent on aurait pu prendre $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + C$ où C est une constante. On dira qu'une primitive, si elle existe, **est unique à une constante près**.

On finira cette courte introduction sur les primitives avec un théorème.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors f admet une primitive sur I.

À part donner des exemples, nous n'avons pas montré comment calculer des primitives ; c'est normal, c'est l'objet d'une autre section (*cf.* **Calcul de primitives**).

1.3 Théorème Fondamental de l'analyse

Aussi appelé, plus raisonnablement, *théorème fondamental du calcul intégral*, c'est celui que nous utiliserons sans doute le plus, car il établit un lien entre les primitives d'une fonction et la notion géométrique d'aire.

Théorème

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, et $a \in I$. La fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f (*i.e.* $F' = f$), qui s'annule en a.

Démonstration

La stratégie générale pour démontrer ce théorème est de montrer que F est dérivable. Pour cela, on considère la fonction τ comme le taux d'accroissement de F et on montrera que sa limite est finie.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on considère le taux d'accroissement de F en x :

$$\tau_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Comme dit précédemment, on veut montrer :

$$\tau_h(x) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x).$$

Pour ce faire, on montrera que $|\tau_h(x) - f(x)| \to 0$ en majorant ce dernier.

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\tau_h(x) - f(x)| \\
&= \left| \frac{1}{h} \big(F(x+h) - F(x) \big) - f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \Big(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \Big) - f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \Big(\int_a^{x+h} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt \Big) - f(x) \right| \\
0 &\leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right| \qquad \text{(relation de Chasles)}
\end{aligned}$$

On va maintenant exprimer $f(x)$ comme la valeur d'une intégrale. Ainsi grâce à la linéarité on pourra tout regrouper sous une seule intégrale :

$$f(x) = f(x) \cdot \frac{1}{h}(x + h - x) = f(x) \cdot \frac{1}{h} [t]_x^{x+h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\, dt$$

Ce que l'on vient de faire c'est d'exprimer $f(x)$ comme la valeur moyenne de la fonction constante $f(x)$ sur le segment de longueur h (**Théorème de la moyenne**). On remplace dans le calcul $f(x)$ par sa nouvelle expression :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt\right| \qquad \text{(Inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

Pour achever cette démonstration, il est temps d'utiliser l'hypothèse de continuité de f. Prenons ε strictement positif; comme f est continue, on peut prendre un μ strictement positif choisi de sorte que : $\forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \mu \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Soit $h \in]-\mu, \mu[\setminus\{0\}$, on a donc : $\forall t \in]x, x+h[, \quad |x-t| \leq \mu \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. On peut maintenant majorer l'intégrande.

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\tau_h(x) - f(x)| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \varepsilon\,dt\right| = \varepsilon
\end{aligned}$$

Cela montre que, quand h tend vers 0, $\tau_h(x)$ tend vers $f(x)$; cela conclut la démonstration, on a bien ce que l'on voulait :

$$\tau_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

■

Certains lecteurs ont peut-être connaissance d'une démonstration plus simple (apprise en Terminale) qui exprime $\tau_h(x)$ comme la valeur moyenne de f sur $[x, x+h]$ et qui l'encadre de sorte que $f(x) \leq \tau_h(x) \leq f(x+h)$ pour finalement conclure avec le théorème des gendarmes. Ce n'est en réalité pas la même version du théorème : cette version du théorème requiert comme hypothèse la positivité et la croissance de f ; nous avons montré la version la plus forte .

Ce qui nous intéresse, c'est surtout un corollaire du théorème qui nous amène à chercher une primitive de la fonction à intégrer :

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $a, b \in I$, et F une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration

f est continue sur I alors f admet une primitive G qui s'annule en a, donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)$$

Prenons F une primitive de f, il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que : $F(x) = G(x) + C$. En évaluant en a on trouve $F(a) = C$ et $G(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$. Ainsi on a bien :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

■

1.4 Théorème d'intégration par parties

Théorème

Soit $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et a, b deux réels de I. On a alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration

Soit $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et a, b deux réels de I.
La formule de dérivation du produit de deux fonctions nous donne :

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ uv' &= (uv)' - u'v\end{aligned}$$

On intègre entre a et b des deux côtés de l'égalité

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)v'(t)dt &= \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u'(t)v(t)dt \\ \int_a^b u(t)v'(t)dt &= [uv]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt\end{aligned}$$

■

La dernière ligne est obtenue grâce au **Théorème Fondamental de l'analyse**.

Exemple

Calculer :

$$\int_1^3 \ln x\,dx$$

Ici on peut voir $\ln x$ comme $1 \cdot \ln x$. Comme choix de la fonction à dériver, on choisira $u : x \mapsto \ln x$ et $v' : x \mapsto 1$ comme fonction à primitiver.

$$\begin{aligned} u &= \ln x & u' &= \frac{1}{x} \\ v &= x & v' &= 1 \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^3 \ln x dx &= [x \ln x]_1^3 - \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= [x \ln x]_1^3 - [x]_1^3 \\ &= 3 \ln 3 - 2 \end{aligned}$$

Astuce

ALPES est un acronyme qui vous permet de savoir quelle fonction est à dériver en priorité.

A pour Arccos, Arcsin, Arctan (à dériver en priorité)

L pour le logarithme

P pour les polynômes

E pour les fonctions exponentielles

S pour les fonctions trigonométriques (à dériver si on n'a pas le choix)

1.5 Théorème du changement de variable

Théorème

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ qui prend ses valeurs dans un intervalle J, $f \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On a alors l'égalité :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Démonstration

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction continue, donc elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi la fonction $(F \circ \varphi)'$ est continue. En utilisant la formule de la dérivée d'une composée de deux fonctions, on obtient :

$$(f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)'$$

En intégrant l'égalité sur $[a, b]$ et en utilisant le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)dt\\ &= [F(\varphi(t))]_a^b\\ &= [F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))]\\ &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\\ \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt\end{aligned}$$

■

Exemple

Calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$$

On choisit la substitution $u = 2x+1$. Commençons par calculer dx en fonction de du : $u = 2x+1 \;\Rightarrow\; du = 2dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{2}du$. Ensuite, on s'occupe de calculer les nouvelles bornes de l'intégrale, quand $x = 0$, on a $u = 1$; et quand $x = 1$, on a $u = 3$. Finalement,

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^3 \sqrt{u}\,\tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^3 = \sqrt{3} - \frac{1}{3}.$$

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Propriétés fondamentales

Positivité

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$:

$$\text{Si } a \le b \text{ et } 0 \le f \text{ alors } 0 \le \int_a^b f(x)\,dx$$

Croissance

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$:

$$\text{Si } a \le b \text{ et } f \le g \text{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Linéarité

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $a, b \in I$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. L'intégrale est un opérateur linéaire, c'est-à-dire :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

Démonstration

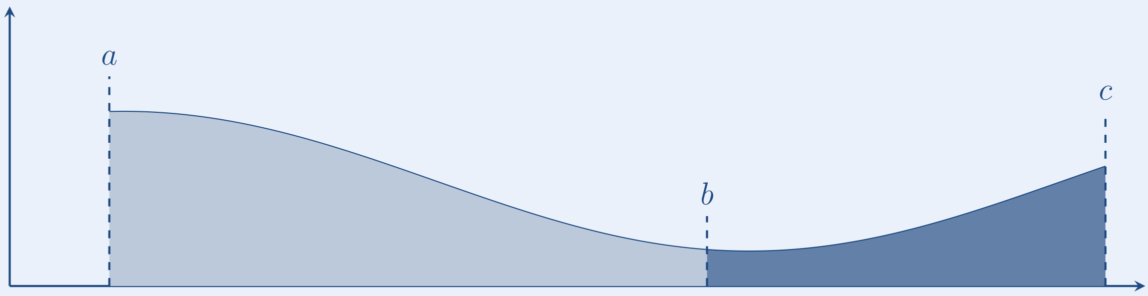
$$\begin{aligned}\lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx &= \lambda\, [F(b) - F(a)] + \mu\, [G(b) - G(a)] \\ &= [\lambda F + \mu G]\,(b) - [\lambda F + \mu G]\,(a) \\ &= \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx\end{aligned}$$

■

Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $a, b, c \in I$. L'intégrale respecte la relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$



Démonstration

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\, dx\end{aligned}$$

■

Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $a, b \in I$. L'intégrale respecte l'inégalité triangulaire :

$$\text{si } a \leq b, \qquad \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Démonstration

$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ est un nombre qui vaut $\int_a^b f(x)\, dx$ ou $\int_a^b -f(x)\, dx$; dans les deux cas on a :

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad -f(x) \leq |f(x)|$$

Ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx \quad \text{et} \quad \int_a^b -f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Dans les deux cas :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

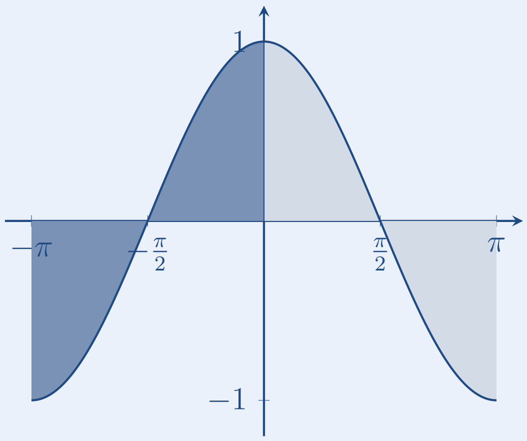
■

2.2 Fonction paire et impaire

Fonction paire

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-a,a],\mathbb{C})$, $a \geq 0$. Si f est paire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

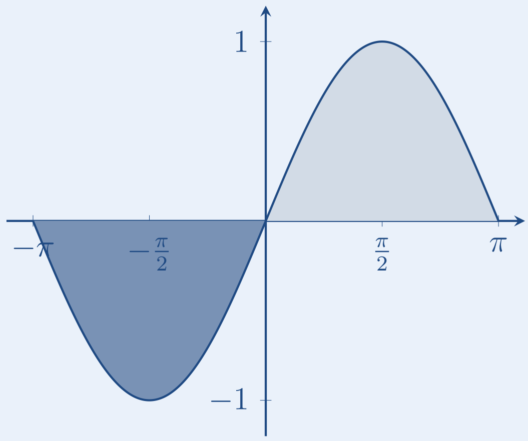


Par exemple cela se remarque sur le graphe de $\cos x$; l'aire à gauche de l'axe des ordonnées est égale à celle de droite.

Fonction impaire

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-a,a],\mathbb{C})$, $a \geq 0$. Si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$



Sur le graphe de $\sin x$ par exemple on remarque que l'aire foncée (signée négativement) compense celle en clair.

Démonstration

Si f est une fonction paire :

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \overbrace{= \int_{0}^{a} f(-t)(-dt)}^{\text{changement de variable } x=-t} = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

En utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Si f est une fonction impaire :

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \overbrace{= \int_{a}^{0} f(-t)(-dt)}^{\text{changement de variable } x=-t} = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

En utilisant la relation de Chasles, cette fois on a :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

■

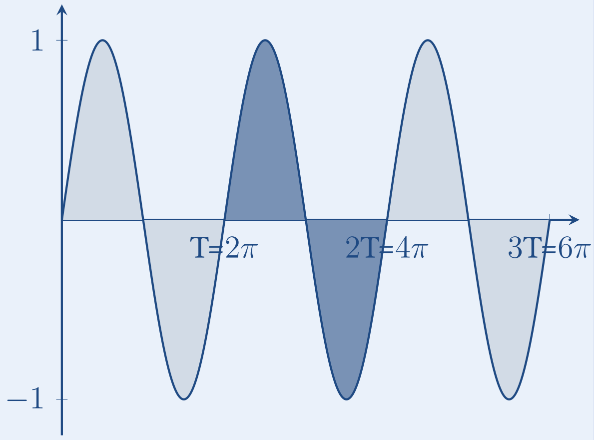
2.3 Fonction périodique

Fonction périodique

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction T-périodique alors pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

Exemple : sur le graphe a été représentée la fonction $\sin x$ qui est 2π-périodique. On se rend compte alors que l'aire sous $[0, 2\pi]$ est la même que celle sous $[2\pi, 4\pi]$ et $[4\pi, 6\pi]$.



Démonstration

La relation de Chasles nous donne :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

Dans la dernière intégrale on fait le changement de variable $u = x - T$ donc quand $x = T, u = 0$ et quand $x = a + T, u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du$$

Finalement, on peut renommer u en x, car cette variable est muette

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx \\
&= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(u)\,du \\
&= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx - \int_a^0 f(x)\,dx \\
&= \int_0^T f(x)\,dx
\end{aligned}$$

■

2.4 Inégalité de Cauchy–Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$. Alors

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

On a l'égalité si et seulement si $g = 0$, ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| = \lambda|g|$ (i.e. f et g sont colinéaires).

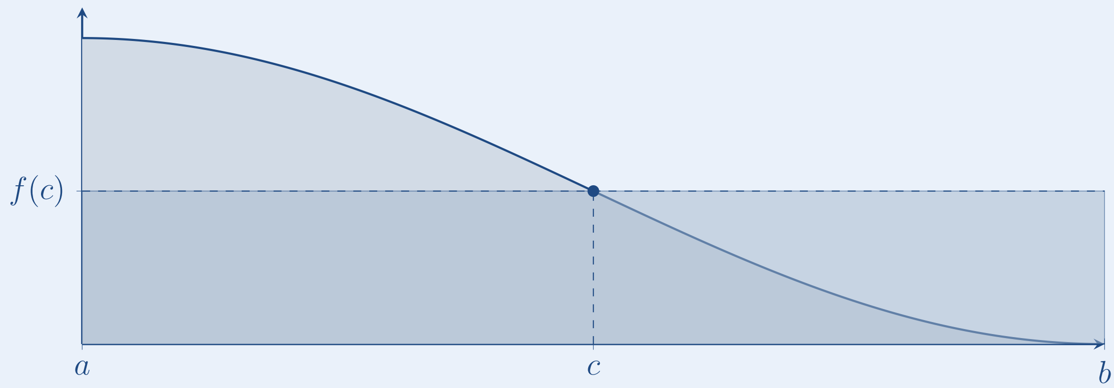
2.5 Théorème de la moyenne

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $a \leq b$ il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Géométriquement cela veut dire que l'aire sous la courbe de f entre a et b est de même valeur que l'aire du rectangle de hauteur $f(c)$ et de largeur $b-a$ pour un certain c compris entre a et b.



Démonstration

Comme f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ elle atteint son minimum global m, et son maximum global M tel que pour tout x dans $[a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

Ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Or $\int_a^b m\,dx$ et $\int_a^b M\,dx$ sont des aires de rectangle de base $(b-a)>0$ et de hauteur respective m et M. Nous avons donc

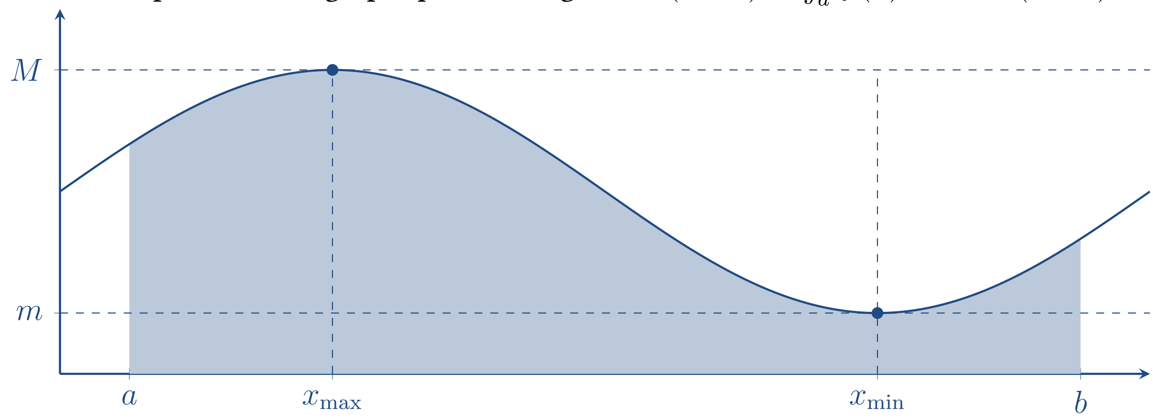
$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \\ \iff \quad m &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \end{aligned}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe au moins un antécédent c pour toutes les valeurs de f prises entre m et M. Conclusion : il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$\blacksquare$

Voici une représentation graphique de l'inégalité $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$



3 Calcul de primitives

Dans la partie **Théorèmes fondamentaux**, nous avons présenté des résultats donnant des égalités remarquables. Nous savons désormais, entre autres, que la recherche d'une primitive constitue la base du calcul d'une intégrale. Reste à savoir comment procéder : c'est ce que nous allons étudier dans cette section.

Notation

Jusqu'à présent on a toujours noté l'intégrale d'une fonction entre ses deux bornes, mais cela fait sens de ne pas les mettre. Soit f une fonction continue sur un intervalle ; si l'on écrit

$$\int f(x)\,dx$$

Cela signifie que l'on ne cherche plus une valeur comme auparavant mais un ensemble : celui des primitives de f.

3.1 Primitives usuelles

Reconnaître une primitive usuelle (quand c'est possible) pour calculer une intégrale semble être la méthode la plus évidente. Prenons un exemple :

Exemple

Calculer

$$\int_0^1 (x^3 + 2)\, dx$$

Ici, on peut aisément trouver une fonction F dont la dérivée nous donne f. On voit que $F : x \mapsto \frac{x^4}{4} + 2x$ convient. D'après le **Théorème fondamental de l'analyse** on a :

$$\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{9}{4}$$

Ce ne sera pas toujours aussi simple, mais avec de la pratique, on reconnaît, lorsque c'est possible, les primitives usuelles de certaines fonctions.
Comme le calcul d'intégrales aboutit très souvent à la recherche d'une primitive, il est nécessaire de connaître celles des fonctions usuelles, car on s'en servira en permanence ; le tableau suivant les répertorie.

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Intervalle de définition**
λ (constante)	$\lambda x + C$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
a^x $(a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x + C$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$x \in]-1, 1[$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3.2 Fraction rationnelle

Dans cette section, nous allons voir comment effectuer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, c'est-à-dire une fraction de polynômes, en une somme de fractions plus simples. À quoi cela peut-il bien servir ? Le plus simple est de le découvrir à travers un exemple.

Exemple

Calculer

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

On veut donc trouver une primitive de $\frac{2}{x^2-1}$. En l'état, ce n'est a priori pas évident, mais comme on le verra dans la suite, on a l'égalité suivante :

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Donc, par linéarité de l'intégrale, le calcul devient :

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx &= \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\
&= \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= [\ln(x-1)]_2^3 - [\ln(x+1)]_2^3 \\
&= \ln(3) - \ln(2)
\end{aligned}$$

Ici, c'était un exemple simple, mais on se doute qu'avec des fractions plus compliquées, cette méthode devient incontournable. Il faut comprendre qu'il existe une théorie complète des fractions rationnelles, mais il n'est pas dans l'intérêt de ce document de l'aborder ; nous ne verrons ici que l'aspect pratique de la question.

3.2.1 Division euclidienne de polynômes

Pour commencer à faire des décompositions en éléments simples, on aura souvent à diviser deux polynômes entre eux pour le calcul de la partie entière. Faisons quelques rappels sur la méthode.

Théorème-Définition

Soient A et B deux polynômes dans $\mathbb{K}$ [a], et B non nul. Il existe alors un unique couple (Q, R) tel que :

$$A = BQ + R$$

avec le degré de R strictement plus petit que celui de B.

- Q est appelé le quotient.
- R est appelé le reste.

a. Un corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple

Si l'on veut effectuer la division de A par B, deux choix s'offrent à nous : soit on réussit à trouver directement le couple (Q, R), soit on utilise l'algorithme de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne

Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et B non nul. On peut représenter les calculs dans un tableau afin d'y voir plus clair :

$$\begin{array}{c|c} \text{dividende} & \text{diviseur} \\ A(X) & B(X) \\ \cline{2-2} & Q(X) \\ & \text{quotient} \\ \cline{1-1} R(X) & \\ \text{reste} & \end{array}$$

On cherche à écrire
$$A = BQ + R, \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

On procède par étapes :

- À l'étape i, on choisit un monôme Q_i tel que $A - BQ_i$ (ou plus exactement le reste courant) annule le terme de plus haut degré.
- On ajoute ce monôme au quotient.
- Puis on remplace A par $A - BQ_i$.

On recommence :

« par quel monôme Q_{i+1} faut-il multiplier B pour annuler le terme dominant $A - BQ_i$? »

On s'arrête quand le reste obtenu a un degré strictement inférieur à celui de B.
Au final :
$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i, \qquad R = A - BQ.$$

Pour bien comprendre, je vous propose un exemple.

Exemple

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B avec :

$$A = X^4 - X^3 + X - 2 \text{ et } B = X^2 - 2X + 4$$

étape 1 On voit que pour supprimer X^4, il faut multiplier B par X^2 :

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 + X - 2 & X^2 - 2X + 4 \\ \cline{2-2} -(\underbrace{X^4 - 2X^3 + 4X^2}_{X^2B}) & X^2 \\ X^3 - 4X^2 + X - 2 & \end{array}$$

étape 2 On voit que pour supprimer X^3, il faut multiplier B par X :

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 + X - 2 & X^2 - 2X + 4 \\ \cline{2-2}
-(X^4 - 2X^3 + 4X^2) & X^2 + X \\
X^3 - 4X^2 + X - 2 & \\
-(\underbrace{X^3 - 2X^2 + 4X}_{XB}) & \\
-2X^2 - 3X - 2 &
\end{array}$$

étape 3 On supprime ensuite $-2X^2$ en multipliant B par -2 :

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 + X - 2 & X^2 - 2X + 4 \\ \cline{2-2}
-(X^4 - 2X^3 + 4X^2) & X^2 + X - 2 \\
X^3 - 4X^2 + X - 2 & \\
-(X^3 - 2X^2 + 4X) & \\
-2X^2 - 3X - 2 & \\
-(\underbrace{-2X^2 + 4X - 8}_{-2B}) & \\
-7X + 6 &
\end{array}$$

Ainsi,

$$X^4 - X^3 + X - 2 = (X^2 + X - 2)(X^2 - 2X + 4) + (-7X + 6).$$

Notre quotient est donc $X^2 + X - 2$ et le reste est $-7X + 6$.

3.2.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Pour commencer, nous allons définir ce qu'est un élément simple.

Définition

On appelle **élément simple** une fraction rationnelle qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{a}{(X-\lambda)^i}$$

ou bien

$$\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^j}$$

où $\lambda, a, b, p, q \in \mathbb{R}$ (avec $X^2 + pX + q$ irréductible sur $\mathbb{R}$) et $i, j \in \mathbb{N}^*$.

C'est intéressant car, comme vu dans l'exemple précédent, les éléments simples sont plus faciles à intégrer ; les éléments simples pris individuellement ont des degrés inférieurs à la fraction initiale. Pour bien comprendre la logique de la décomposition le mieux reste de voir plusieurs exemples :

— Racines simples :

$$\frac{X^2+3X+1}{(X+1)(X-3)(X+5)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-3} + \frac{c}{X+5}$$

— Racines simples avec une partie entière :

$$\frac{X^2+2X+5}{(X-1)(X-2)} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

— Racines multiples :

$$\frac{X^2+3X+1}{(X+1)(X-3)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-3} + \frac{c}{(X-3)^2}$$

— Facteur quadratique irréductible :

$$\frac{X^2+3X+1}{(X+1)(X^2+3)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+3}$$

En fait, on voit que chaque facteur du type $(X-\lambda)^m$ va engendrer dans la décomposition une somme de m termes avec un numérateur constant : $\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$.
Deuxièmement, les termes polynomiaux irréductibles du second degré de type $(X^2+aX+b)^m$ vont engendrer dans la décomposition une somme de m termes avec un numérateur de degré un : $\sum_{i=1}^{m} \frac{c_iX+d_i}{(X^2+bX+c)^i}$.
Vous comprenez bien que le but de cette section est de déterminer les coefficients intervenant dans les décompositions en éléments simples. Pour ce faire, il existe quatre techniques qui, bien combinées, nous permettront de les trouver efficacement.

Méthode

- ☞ Évaluer en un point (souvent 0 quand c'est possible).
- ☞ Multiplier par X puis passer à la limite en $+\infty$.
- ☞ Multiplier par $(X-\alpha)^m$ puis évaluer en α, où α est une racine de multiplicité m.
- ☞ Mettre au même dénominateur et identifier.

La première étape, lorsque l'on souhaite effectuer une décomposition en éléments simples, consiste à comparer le degré du numérateur et celui du dénominateur. On distingue alors deux cas : si le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur ; s'il est strictement inférieur.

Premier cas

Si le degré du polynôme au numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, alors la partie entière vaut 0. On commence ensuite par factoriser le dénominateur au maximum.

Exemple

Trouver la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{X^2+3X+1}{X^3-4X^2+5X-2}$$

étape 1 : factoriser

Pour factoriser le dénominateur, on commence souvent par vérifier s'il possède des racines évidentes. Dans ce cas, on remarque que 1 et 2 en sont. On peut donc écrire :

$$X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)(X-2)(aX+b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

En développant et en identifiant, on trouve alors que $a = 1$ et $b = -1$ ainsi :

$$\frac{X^2+3X+1}{X^3-4X^2+5X-2} = \frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)}$$

On peut maintenant écrire la décomposition a priori :

$$\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

étape 2 : chercher les coefficients

On va chercher a, b, c grâce aux techniques vues précédemment. Pour obtenir a, on multiplie des deux côtés de l'égalité par $(X-2)$ et on évalue ensuite en 2

$$\begin{aligned}
\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2} &= a + \frac{b(X-2)}{X-1} + \frac{c(X-2)}{(X-1)^2} \\
\frac{2^2+6+1}{(2-1)^2} &= a + \frac{b(2-2)}{2-1} + \frac{c(2-2)}{(2-1)^2} \\
11 &= a
\end{aligned}$$

Maintenant, pour trouver b, on peut tout multiplier par X puis prendre la limite en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{X(X^2+3X+1)}{(X-1)^2(X-2)} &= \frac{aX}{X-2} + \frac{bX}{X-1} + \frac{cX}{(X-1)^2} \\
\lim_{X\to\infty} \frac{X(X^2+3X+1)}{(X-1)^2(X-2)} &= \lim_{X\to\infty} \left(\frac{aX}{X-2} + \frac{bX}{X-1} + \frac{cX}{(X-1)^2} \right) \\
1 &= a + b \\
-10 &= b
\end{aligned}$$

Et pour finir, on peut trouver c en évaluant en 0, étant donné que l'on connaît a et b.

$$\begin{aligned}
\frac{(0^2+0+1)}{(0-1)^2(0-2)} &= \frac{a}{0-2} + \frac{b}{0-1} + \frac{c}{(0-1)^2} \\
\frac{1}{-2} &= \frac{-11}{2} + 10 + c \\
-5 &= c
\end{aligned}$$

Conclusion

Finalement, on trouve que la décomposition est :

$$\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11}{X-2} - \frac{10}{X-1} - \frac{5}{(X-1)^2}$$

Deuxième cas

Si le polynôme du numérateur est de degré supérieur ou égal à celui du dénominateur, alors la décomposition possède une partie entière qu'il faudra calculer. On aura donc une étape supplémentaire.

Exemple

Calculer la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$$

étape 1 : calculer la partie entière

Comme le degré du dénominateur n'est pas strictement supérieur à celui du numérateur, la partie entière n'est pas 0 ; il faut donc la calculer. Pour ce faire, on utilise la méthode de la division euclidienne pour **déterminer le quotient, qui sera notre partie entière**.
On trouve alors :

$$X^2+2X+5 = \underbrace{1}_{\text{partie entière}}(X^2-3X+2)+\underbrace{5X+3}_{\text{reste}}$$

étape 2 : factoriser

On factorise le polynôme du dénominateur :

$$X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$$

.
On a donc la forme de la décomposition, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

étape 3 : chercher les coefficients

Pour trouver a, on peut multiplier le tout par $X-1$ puis évaluer en 1

$$\begin{aligned} \frac{X^2+2X+5}{X-2} &= X-1+a+\frac{b(X-1)}{X-2} \\ -8 &= a \quad (\text{avec } X=1) \end{aligned}$$

Pour trouver b, et comme on connaît a, on peut évaluer en un point, 0 par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{0^2+0+5}{(0-1)(0-2)} &= 1+\frac{a}{0-1}+\frac{b}{0-2} \\ \frac{5}{2} &= 1+8-\frac{b}{2} \\ 13 &= b \end{aligned}$$

Conclusion

Finalement, $a = -8$ et $b = 13$, on trouve que la décomposition est :

$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 - \frac{8}{X - 1} + \frac{13}{X - 2}$$

Je terminerai cette section sur les fractions rationnelles en vous faisant remarquer que nous n'avons pas utilisé la dernière méthode qui consiste à mettre au même dénominateur la fraction rationnelle et sa forme décomposée, puis à identifier les coefficients.
Le problème de cette méthode est que, lorsque la fraction devient compliquée, elle demande beaucoup de calculs et conduit souvent à la résolution de systèmes.

3.3 Primitives de fonctions trigonométriques

3.3.1 Polynômes de cosinus et de sinus

Dans cette section on s'intéresse à la démarche pour trouver les primitives $\int \sin^n(x) \cos^m(x)\, dx$, où m et n sont des entiers naturels.

Méthode

- ☞ Si le cosinus a une puissance impaire ($m = 2p + 1$), alors on met un cosinus en facteur et on exprime le reste (donc avec une puissance paire) à l'aide de la relation $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Pour finir, on fait le changement de variable $t = \sin x$.
- ☞ Si c'est le sinus qui a une puissance impaire ($n = 2p + 1$), alors on met un sinus en facteur et on exprime le reste (donc avec une puissance paire) à l'aide de la relation $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Pour finir, on fait le changement de variable $t = \cos x$. Si le cosinus et le sinus ont des puissances impaires, appliquez la méthode avec le terme de votre choix.
- ☞ Si n et m sont pairs, vous pouvez utiliser les relations :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Dans tous les cas, on pourra toujours linéariser avec les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exemple

Trouver :

$$\int \sin(x)^3 \cos^2(x)\, dx$$

Dans ce cas, le terme sinus a une puissance impaire ; on écrit : $\sin^3 x = \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)$.

$$\int \cos^2 x(1 - \cos^2 x) \sin x\, dx$$

À présent on pose $t = \cos x$, donc $dt = -\sin x\, dx$. Notez que l'on n'a pas besoin d'isoler dx car, à un signe près, le terme $\sin x\, dx$ est présent dans l'intégrale ; c'est pour cette simplification qu'on veille à isoler un des termes avec la puissance impaire.

$$\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)\sin x\, dx = \int -t^2(1-t^2)\, dt = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Exemple

Trouver :

$$\int \sin^4 x\, dx$$

On exprime le sinus avec la relation $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\, dx &= \int (\sin^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\, dx\end{aligned}$$

On transforme de la même façon $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$, en remplaçant cela donne

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\, dx &= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)\, dx \\ &= \int \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C\end{aligned}$$

3.3.2 Règles de Bioche

Les règles de Bioche sont utiles pour vous aider à faire le changement de variable judicieux quand vous voulez intégrer une fonction f qui est une fraction rationnelle en sinus et cosinus.

Règles de Bioche

- ☞ Si $f(-x) = -f(x)$ on pose $t = \cos x$
- ☞ Si $f(\pi - x) = -f(x)$ on pose $t = \sin x$
- ☞ Si $f(\pi + x) = f(x)$ on pose $t = \tan x$

Si aucune des propositions n'est vérifiée, il est très souvent utile de poser $t = \tan\frac{x}{2}$ mais le raisonnement est plus long (*cf* **La substitution** $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$)

Exemple

Trouver :

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

En testant on voit que la première règle fonctionne, en effet :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = -f(x)$$

On fait donc le changement $t = \cos x$, donc $dt = -\sin x\,dx$. En regardant, on peut se rendre compte que le terme $\sin x\,dx$ apparaît dans l'intégrale, c'est à un signe près notre dt.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int -\frac{1}{1+t}\,dt = -\ln|1+t| + C = -\ln|1+\cos x| + C$$

Exemple

Trouver :

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$$

Ici la troisième règle est respectée :

$$f(\pi+x) = \frac{\sin^2(\pi+x)}{\cos^4(\pi+x)} = \frac{(-\sin(x))^2}{(-\cos(x))^4} = f(x)$$

On pose alors $t = \tan x$, pour calculer le dt on a plusieurs choix quant à la dérivée de la fonction tangente ; ici $dt = dx/\cos^2 x$ est la meilleure option, car dans le terme $\cos^4 x$ du dénominateur de notre intégrale on peut faire apparaître du $\cos^2 x$,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

3.3.3 La substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est par exemple très efficace lorsqu'on cherche des primitives d'une fonction faisant intervenir une fraction de sinus et de cosinus, et qu'aucune des règles de Bioche ne s'applique. La particularité de ce changement est que, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on peut exprimer les fonctions tangente, sinus et cosinus comme des fractions rationnelles en fonction de t.

Angle moitié de la tangente

Si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

et le terme dx de l'intégrale devient : $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Démonstration

cosinus : On commence par exprimer le cosinus avec $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1+t^2}$.

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \iff \frac{\cos x + 1}{2} = \frac{1}{1+t^2} \iff \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

sinus : Comme $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$, en prenant $a = x/2$ on a :

$$\sin x = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

tangente : Il ne reste qu'à remplacer

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $x = 2\arctan(t)$ et en dérivant des deux côtés on obtient $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Exemple

Trouver

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

Ici, les changements du type $t = \cos x$ ou $t = \sin x$ ne fonctionneront pas. Posons donc $t = \tan\frac{x}{2}$; dans ce cas $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\
&= \frac{-2}{t+1} \\
&= \frac{-2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C
\end{aligned}$$

3.4 Produit d'une exponentielle et d'un polynôme

On s'intéresse à primitiver des fonctions du type

$$f : x \mapsto e^{kx} \cdot P(x),$$

où P est un polynôme de degré n. On peut pour cela effectuer des intégrations par parties successives, mais ce n'est pas efficace : en choisissant le polynôme comme fonction à dériver, il faudrait n intégrations par parties pour faire baisser son degré.
Une meilleure méthode consiste à remarquer qu'une primitive F de f est de la même forme :

$$F : x \mapsto e^{kx}Q(x),$$

où Q est un polynôme de même degré que P.

Ainsi, comme $F'(x) = f$, il suffit de dériver F et d'identifier les coefficients de Q.

Exemple

Trouver
$$\int e^x \left(2x^3 + x^2 + 3x + 1\right) dx.$$

Une primitive F est de la forme
$$F(x) = e^x \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) + C.$$

En dérivant,
$$F'(x) = \left(e^x Q(x)\right)' = e^x \left(Q'(x) + Q(x)\right) = e^x \left(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d)\right),$$

où $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
En identifiant les coefficients avec $e^x(2x^3 + x^2 + 3x + 1)$, on obtient le système :
$$\begin{cases} a = 2, \\ 3a + b = 1, \\ 2b + c = 3, \\ c + d = 1. \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2, \\ b = -5, \\ c = 13, \\ d = -12. \end{cases}$$

Ainsi,
$$\int e^x(2x^3 + x^2 + 3x + 1)\, dx = e^x \left(2x^3 - 5x^2 + 13x - 12\right) + C.$$

4 Exercices

Exercice 1 : Bien caché ○

Calculer :
$$\int_2^3 x^{\frac{1}{\ln x}}\, dx$$

Voir la correction

Exercice 2 : Hyperbolique ! ○

Calculer :
$$\int_0^1 \frac{1}{\cosh x}\, dx$$

Voir la correction

Exercice 3 : Des exponentiels ... ◒

Calculer :
$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)\ln(e^x + 1)}\, dx$$

Voir la correction

Exercice 4 : Floor et cosinus

Calculer :

$$\int_0^{2\pi} \lfloor \cos x \rfloor \, dx$$

Voir la correction

Exercice 5 : Puissance de logarithme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ trouver :

$$\int \ln^n(x) \, dx$$

Voir la correction

5 Corrections

Bien caché

Il faut ici remarquer que pour x strictement positif : $x^{\frac{1}{\ln x}} = \exp\left(\ln(x^{\frac{1}{\ln x}})\right) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln x}\right) = e$.

$$\int_2^3 x^{\frac{1}{\ln x}} \, dx = \int_2^3 e \, dx = 3e - 2e = e$$

Hyperbolique !

Dans un premier temps on remplace $\cosh x$ par son expression avec les exponentiels :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\cosh x} \, dx &= \int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} \, dx\end{aligned}$$

Finalement on fait le changement de variable $u = e^x$ donc $du = e^x dx$, quand $x = 0$, $u = 1$ et quand $x = 1$, $u = e$. L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}2 \int_1^e \frac{u}{1+u^2} \cdot \frac{1}{u} \, du &= 2 \int_1^e \frac{1}{1+u^2} \, du \\ &= 2 \left[\arctan u\right]_0^e = 2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Des exponentiels ...

On commence par faire un premier changement de variable en posant $u = e^x + 1$, $du = e^x dx$ donc $dx = \frac{1}{u-1} \, du$. Quand $x = 0$, on a $u = 2$, et quand $x = 1$ on a $u = e + 1$.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{u-1}{u\ln u}\cdot\frac{1}{u-1}\,du$$
$$= \int_1^{e+1} \frac{1}{u\ln u}\,du$$

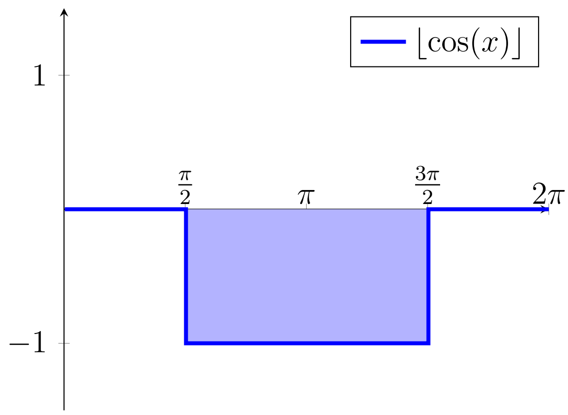
On fait finalement le changement de variable $u = e^t$ donc, $du = e^t dt$. Quand $u = 2$, on a $t = \ln 2$, et quand $u = e+1$, on a $t = \ln(e+1)$.

$$\int_1^{e+1} \frac{1}{u\ln(u)}\,du = \int_{\ln 2}^{\ln(e+1)} \frac{e^t}{e^t\ln(e^t)}\,dt$$
$$= \int_{\ln 2}^{\ln(e+1)} \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \ln\left(\frac{\ln(e+1)}{\ln 2}\right)$$

floor et cosinus

Ici on ne cherche pas de primitive. Remarquez que quand $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, alors $0 \leq \cos x \leq 1$ et donc $\lfloor \cos x \rfloor = 0$. D'autre part, quand $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, alors $-1 \leq \cos x \leq 0$ et donc $\lfloor \cos x \rfloor = -1$.
Ainsi l'aire est délimitée par le rectangle de longueur π et de hauteur -1 :

$$\int_0^{2\pi} \lfloor \cos x \rfloor\,dx = -1\cdot\pi.$$



puissance de logarithme

Notons
$$I_n(x) = \int \ln^n(x)\,dx.$$

Calculons les premiers termes par une IPP. Posons

$$u : x \mapsto \ln^n(x) \quad \text{(fonction à dériver)}, \qquad v' : x \mapsto 1 \quad \text{(fonction à primitiver)}.$$

Ainsi,
$$u' : x \mapsto n\ln^{n-1}(x), \qquad v : x \mapsto x.$$

Enfin,
$$I_n(x) = \left[x\ln^n(x)\right] - n\int \ln^{n-1}(x)\,dx = \left[x\ln^n(x)\right] - nI_{n-1}(x).$$

Pour se faire une idée, on peut refaire une IPP sur $I_{n-1}(x)$ avec

$$u : x \mapsto \ln^{n-1}(x), \qquad v' : x \mapsto 1,$$

donc

$$u' : x \mapsto (n-1)\ln^{n-2}(x), \qquad v : x \mapsto x.$$

Cette fois,

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \big[x\ln^n(x)\big] - n\big[x\ln^{n-1}(x)\big] + n(n-1)\int \ln^{n-2}(x)\,dx \\ &= \big[x\ln^n(x)\big] - n\big[x\ln^{n-1}(x)\big] + n(n-1)I_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Un schéma semble se répéter ; on peut donc conjecturer que

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,x\ln^k(x)\,\frac{n!}{k!}.$$

Pour le prouver, on va dériver notre primitive supposée $I_n(x)$ pour retrouver $\ln^n(x)$. D'une part,

$$(x\ln^k(x))' = \ln^k(x) + k\ln^{k-1}(x).$$

Par suite :

$$\begin{aligned} I_n(x)' &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\left(\ln^k(x) + k\ln^{k-1}(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\ln^k(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!}\ln^{k-1}(x). \end{aligned}$$

Remarquons que la deuxième somme peut commencer à $k = 1$, car pour $k = 0$ le facteur k annule tout. Dans l'optique de simplifier les deux sommes entre elles, on va réindicer la deuxième somme, de sorte qu'elle commence en $k = 0$ et finisse en $k = n-1$. (Posons $p = k-1$, puis remplaçons dans la somme. Finalement, comme la variable de sommation est muette, on renomme p en k.)

$$\begin{aligned} I_n(x)' &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\ln^k(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\frac{n!}{k!}\ln^k(x) \\ &= \underbrace{(-1)^0\frac{n!}{n!}\ln^n(x)}_{=\ln^n(x)} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\ln^k(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\ln^k(x) \\ &= \ln^n(x). \end{aligned}$$

On peut alors conclure :

$$\int \ln^n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,x\ln^k(x)\,\frac{n!}{k!} + C.$$