Probabilité

Note personnelle

Benjamin Garcia

April 19, 2025

Contents

Sources

Rappel à moi-même : Note personnelle pour CC2 probabilité (sûrement pour plus tard aussi). Presque tout vient de Bibmath et Wikipédia. Le reste vient soit du cours du prof ou de cours de d'autres universités.

1 Inégalité

1.1 Inégalité de Markov

Soit Z une V.A, alors pour tout réel a strictement positif :

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}$$

Cette inégalité et utilisée pour trouver la borne sup d'une probabilité de plus, elle sert à démontrer d'autres resultats. Elle peut être généralisée avec l'inégalité de **Tchebychev**.

1.2 Inégalité de Tchebychev

Soit X une V.A, Pour tout réel a strictement positif :

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{a^p}$$

C'est une version plus génerale que celle de **Markov**. En prenant $X = Y - \mathbb{E}(Y)$ et $p = 2$ on obtient l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**.

1.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une V.A, $\mathbb{E}(X)$ son espérance et σ son écart-type. Pour tout réel strictement positif a on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$
$$\iff \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Intuition : La probabilité que X, s'eloigne de plus que a de son espérance est majorée par le terme de droite.

1.4 Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur un intervalle réel I et X une V.A qui prend ses valeurs dans I, et si $\mathbb{E}(f(X))$ existe, on a alors :

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$$

2 Loi des grands nombres

2.1 Loi faible des grands nombres

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des V.A iid de même loi avec m leur espérance commune on note

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

On a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|S_n - m| \geq \varepsilon) = 0}$$

Intuition : Quand n est assez grand la moyenne empirique S_n tend vers l'epérance m.

2.2 Loi forte des grands nombres

Les lois fortes concernent, elles, des théorèmes dont la conclusion est une convergence presque sûre. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires intégrables mutuellement indépendantes, idd. Soit m leur espérance commune. On note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors la suite (S_n) tend vers m presque sûrement, c'est-à-dire que l'ensemble des ω tels que la suite $(S_n(\omega))$ converge vers m est de probabilité 1.

Remarque : Par rapport à la loi faible énoncée plus haut, on fait une hypothèse plus forte concernant l'indépendance, mais on obtient aussi une conclusion plus forte puisque la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité *cf* : 7.

3 Théorème limite central

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ une suite de V.A iid, de même loi D
- On note μ et σ l'espérance et l'écart-type de la loi D avec $\sigma \neq 0$
- On considère la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$
- Posons $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, où $n\mu$ est l'espérance de S_n et $\sigma\sqrt{n}$ son écart-type.

De ces conditions on a alors :

La suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ qui est la loi normale centrée réduite. Ainsi pour tout réel x:

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Remarques

- La première chose remarquable de ce théoreme est le peu de conditions sur sur (X_n) et donc sur D (la loi des X_i), En d'autre termes quelle que soit la loi de probabilité d'un événement aléatoire, si on le répète infiniment souvent, de façon indépendante, sa moyenne finit par se comporter comme une loi normale.
- En posant $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ on a créé une v.a normalisée. En effet avec ce changement l'espérance et l'écart-type de Y_n valent respectivement 0 et 1.

4 Lois Usuelles

4.1 Loi Uniforme

Soit $a < b$ deux réels. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, $i.e$ $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ si elle admet pour densité et caractéristiques :

Densité $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Espérance $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

Variance $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Fonction de répartition $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$

4.2 Loi Exponentielle

X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ $i.e$ $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors elle a pour caractéristiques:

Densité $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Fonction de répartition $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Espérance $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Variance $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Minimum de deux v.a Si les variables aléatoires X, Y sont indépendantes et suivent deux lois exponentielles de paramètres respectifs λ, μ, alors $Z = \min(X, Y)$ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

Absence de mémoire $\forall s, t \geq 0$ alors $\mathbb{P}_{T>t}(T > s + t) = \mathbb{P}(T > s)$

intuition : imaginons que T représente la durée de vie d'une ampoule à LED avant qu'elle ne tombe en panne : la probabilité qu'elle dure au moins $s+t$ heures sachant qu'elle a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale.

4.3 Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, *i.e* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

Univers $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Loi pour tout k positif ou nul : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Espérance $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Variance $Var(X) = \lambda$

En pratique : La loi de Poisson est la loi des phénomènes rares, de petite probabilité, exemple : Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps $[0, T]$: la loi de X est une loi de Poisson.

4.4 Loi Normale

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et σ^2, avec $\sigma > 0$, *i.e* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle est continue et admet pour caractéristiques :

Densité $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Espérance $\mathbb{E}(X) = m$

Variance $Var(X) = \sigma^2$

Normalisation Comme vu dans la section 3, $\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Fonction de répartition Il n'existe pas vraiment de forme pour la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale, mais quand $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ on note souvent Φ sa fonction de répartition, il faudra ensuite se référer à une table de valeurs (disponible ici : 1).

Somme Si la somme de deux variables aléatoires indépendantes est normale, alors les deux variables sont de lois normales. (Dans le cours du prof on parle plutôt de v.a gaussienne, et il donne la généralisation suivante). Cela peut se généraliser :

$$\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) + \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) + \cdots + \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) = \mathcal{N}(m_1 + \cdots + m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

En pratique : La loi normale arrive naturellement quand on regarde la distribution "limite" du résultat d'un grand nombre d'expériences identiques réalisées de manière indépendante. C'est pourquoi la loi normale est la loi des phénomènes naturels, ce qui est conforté par l'expérience qui montre qu'un grand nombre de grandeurs physiques suivent une loi normale.

5 Densité conjointe, densité marginale

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On dit que (X, Y) admet une densité conjointe s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous x et y réels :

$$F(x,y) := P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

5.1 Densité conjointe

La fonction f est alors donnée par :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Cette égalité étant valable pour presque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On l'appelle la densité conjointe de X et Y

5.2 Densité marginale

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité conjointe f. La densité marginale de X est la densité f_X de la variable aléatoire X. Elle est définie presque partout sur le corps des réels et vérifie, pour x réel :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

6 Des choses utiles

6.1 Variance et Covariance d'une densité

Soit X une variable aléatoire à densité f. Si X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a $(X - \mathbb{E}(X))$ admet elle même une espérance, alors on appelle variance de X la valeur de :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)dx$$

Pour ce qui est de la formule de la covariance de deux v.a X et Y elle reste la même qu'en probabilité discrète.

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

Pour la covariance on a quelques propriétés sympa :

- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- $cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *Remarque* : On utilise plus souvent cette formule pour calculer la covariance que celle-ci : 6.1.
- $cov(aX + b, cY + d) = ac \cdot cov(X,Y)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$ *Remarque* : La réciproqe est fausse.

Utilité : La covariance entre deux variables aléatoires est un nombre permettant de quantifier leurs écarts conjoints par rapport à leurs espérances respectives.

6.2 Max et Min d'une suite de V.A

Soient $X_1, X_2, \cdots X_n$ des v.a iid de même loi, et de fonction de répartion commune F

Max

Soit $Z_n = \max(X_1, X_2 \cdots X_n)$. En notant F_n la fonction de répartition de Z_n alors, pour tout x réel on a :

$$F_n(x) = F(x)^n$$

Min

Soit $Y_n = \min(X_1, X_2 \cdots X_n)$. En notant G_n la fonction de répartition de Y_n alors, pour tout y réel on a :

$$G_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

Remarque : Ces propositions et celle-ci 6.5, peuvent servir pour ne pas avoir à utiliser le théorème de transfert à chaque fois, pour trouver les lois (je vois pas trop pourquoi mais c'est dans le cours du prof).

6.3 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui suivent une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $np_n \to \lambda > 0$. Alors (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. C'est-a-dire, pour tout entier naturel k on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

En pratique : si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 15$, on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np.

C'est ce théorème qui justifie le fait que la loi de Poisson est utilisée c omme modèle de certaines expériences aléatoires (nombre de clients entrant dans un magasin, nombre de coquilles dans une page de journal, ...).

6.4 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un modèle mathématique modélisant des événements aléatoires qui se reproduisent au cours du temps : naissances, pannes, désintégration radioactive. Formellement, on a la définition suivante : une famille $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aléatoires à valeurs entières est appelé processus de Poisson de densité (on dit aussi d'intensité) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si elle vérifie les propriétés suivantes:

- $N_0 = 0$
- Si $0 \leq s \leq t$, alors $N_s \leq N_t$
- Le processus est à accroissements indépendants : pour toute suite croissante $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k$, les v.a $N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
- Pour tout s, t des réels positifs ou nuls la v.a $N_{t+s} - N_s$ Suit une loi de Poisson de paramètre λt, c'est-à-dire que pour tout entier n :
$$P((N_{s+t} - N_s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

6.5 Produit de convolution & somme de V.A

Motivation : Effectuer le produit de convolution de deux fonctions signifie réaliser une moyenne de ces deux fonctions. A ce titre, il intervient notamment en électronique dans l'écriture des filtres passe-bande. Il est très utilisé en mathématiques pour approximer et régulariser des fonctions. Si deux fonctions sont définie sur $\mathbb{R}$ alors, leur produit de convolution est :

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

En probabilité : Le produit de convolution de deux mesures est très utilisé en probabilité pour obtenir la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont deux v.a idépendantes de loi P_X et P_Y, alors $X + Y$ suit la loi:

$$P_{X+Y} = P_X \star P_Y$$

6.6 Théorème de Fubini

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ et qui prend ses valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, Alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

7 Définitions

Cette section regroupe des definitions.

iid : Des variables **i**ndépendantes et **i**dentiquement **d**istribuées sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes. On dit que ce sont des variables aléatoires iid ou plus simplement des variables iid.

Loi de probabilité : l'ensemble des valeurs que peut prendre X auxquelles on associe leur probabilité

Convergence presque sûre : (X_n) converge presque sûrement vers X, si, pour presque tout $\omega \in \Omega$: $X_n(\omega) \to X(\omega)$

Convergence en probabilité : (X_n) converge en probabilité vers X si : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

Convergence moyenne d'ordre p : (X_n) converge en moyenne d'ordre p, avec $p > 0$, vers X si : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0$

Convergence en loi : (X_n) converge en loi vers X si, notant F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X, en tout réel x où F est continue, on a : $F_n(x) \to F(x)$

Remarque :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Conv. en moyenne} & \Rightarrow & \text{Conv. en proba.} & \Rightarrow & \text{Conv. en loi} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{Conv. presque sûre} & & \end{array}$$

8 Images

8.1 Table des valeurs d'une loi normale

Rappel : On lit dans la table de loi ci-dessous les différentes valeurs que peut prendre $\mathbb{P}(X \leq x)$ lorsque x est positif. Dans la colonne de gauche on cherche les chiffres des unités et des dixièmes, et dans la ligne du haut les chiffres des centièmes

8.2 Graphes

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Figure 1: Table d'une loi normale centrée et réduite

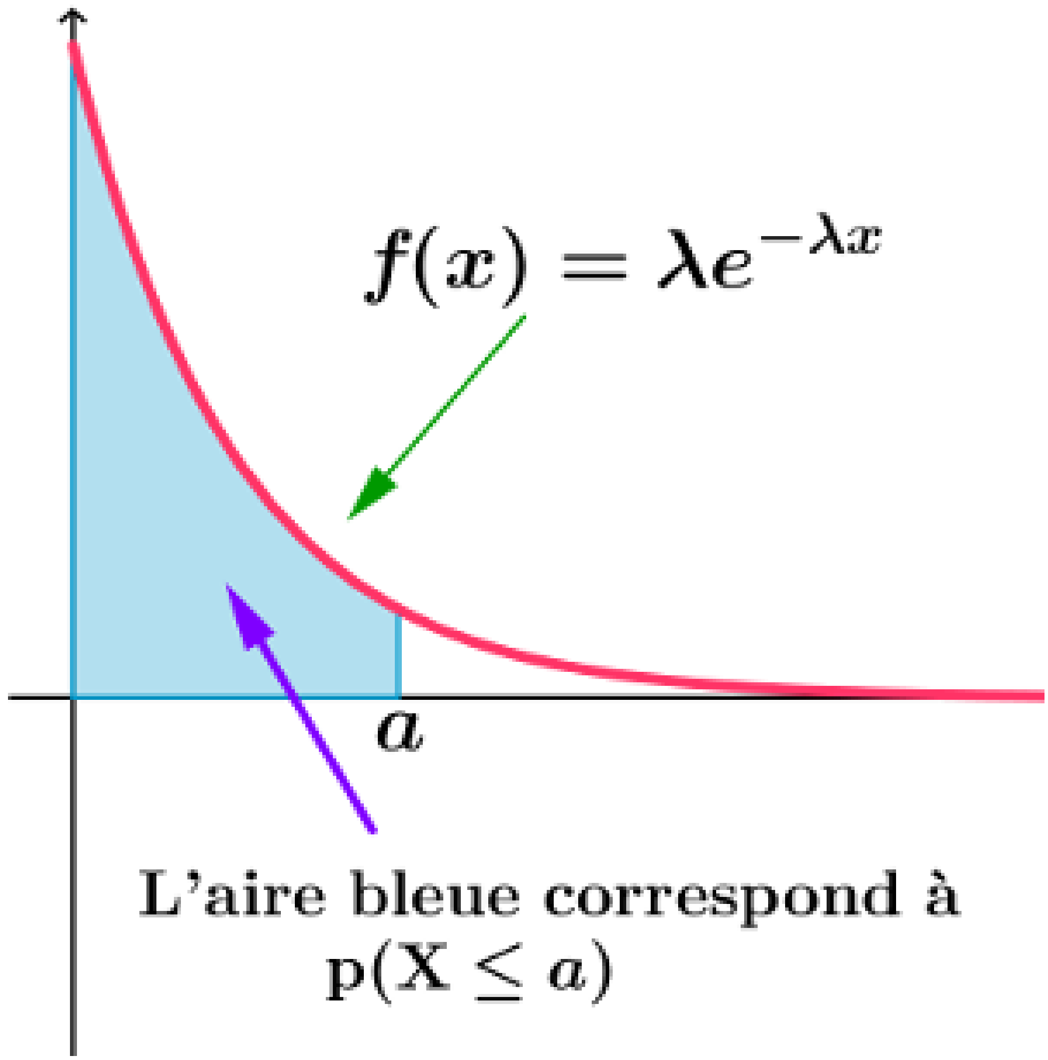

Figure 2: Loi exponentielle

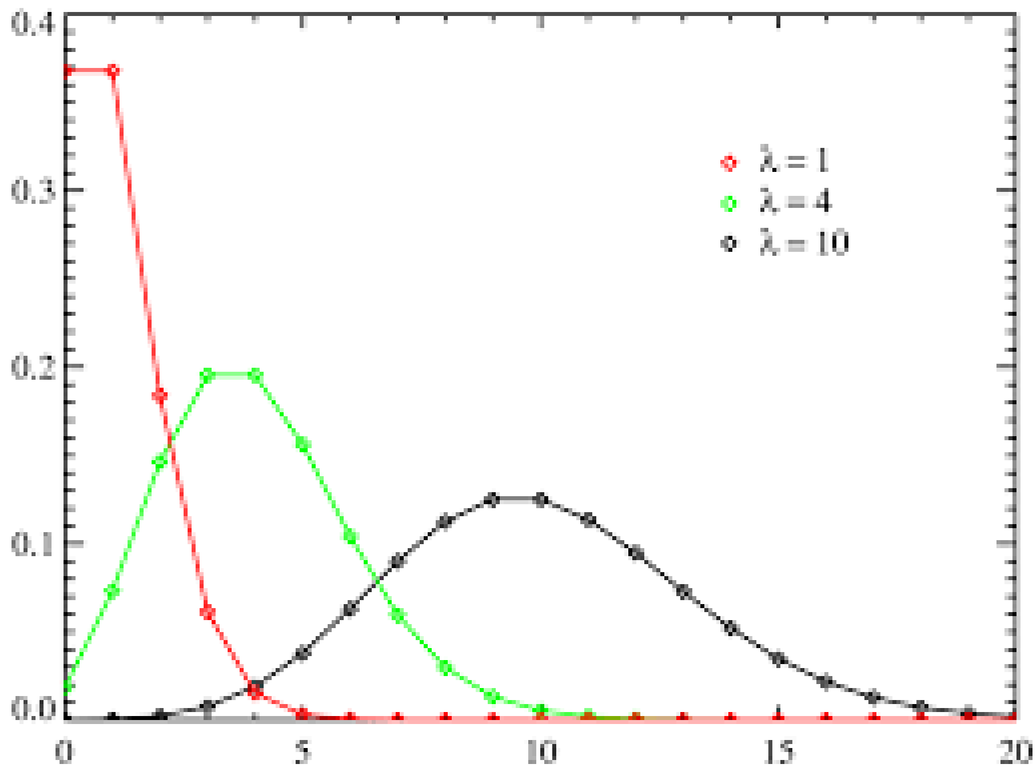

Figure 3: Loi de poisson

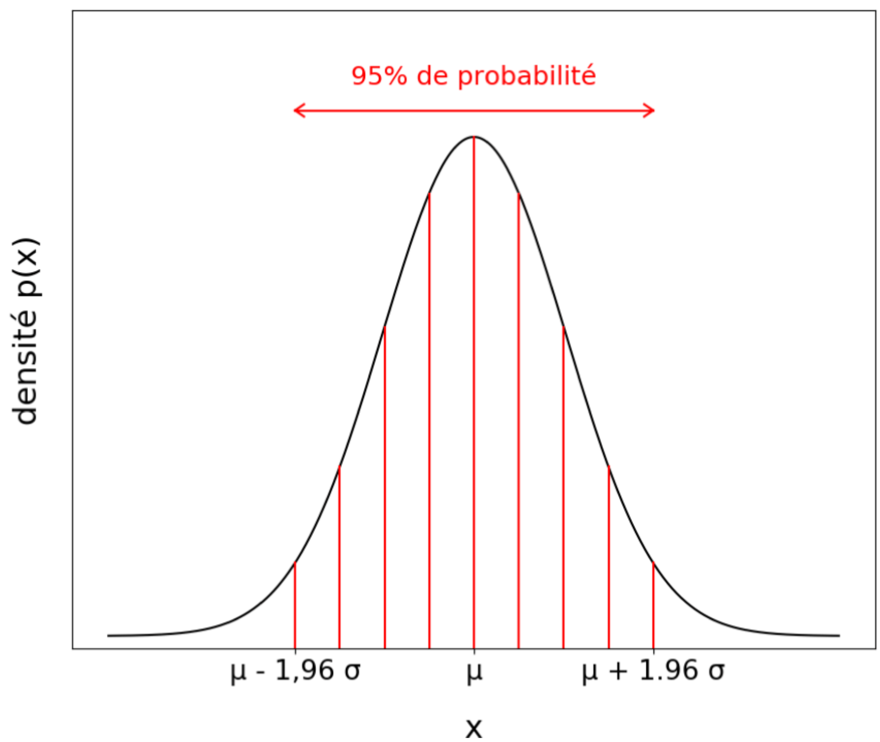

Figure 4: Loi normale