udp Escuela de Ingeniería Industrial
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

Curso: CII2750 Optimización
Profesores: Juan Pablo Cavada, Fernando Paredes
Fernando Zúñiga
Periodo: Segundo Semestre 2018
Fecha: 02 de octubre de 2018

Solemne 1 - CII2750 Optimización

Pregunta 1 (6.0 puntos)

Usted es dueño de un nuevo emprendimiento de fabricación y distribución de drones de vigilancia de alta tecnología. El gobierno de Chile requiere de sus productos para que sean utilizados por comisarías de Carabineros en la detección temprana de delitos en la vía pública.

La cadena de distribución que debe armar es la siguiente: Se disponen de I localizaciones posibles para la instalación de plantas productoras de drones. Luego de ser fabricados, los drones deben ser enviados y almacenados en bodegas, de las cuales existen J localizaciones posibles de instalación de éstas. Finalmente, los drones son transportados desde las bodegas hacia las comisarías de carabineros.

El costo de instalación de una planta en la localización i es CIP_i, y no tienen capacidad límite de producción. La producción en una planta ubicada en i tiene un costo de ω_i pesos por unidad. El costo de instalación de una bodega en la localización j es CIB_j pesos y tendrá capacidad para almacenar CAP_j unidades.

El costo unitario de envío de drones desde la planta ubicada en i a la bodega en la localización j es α_{ij} pesos. El costo unitario de envío desde la bodega j a la comisaría k es β_{jk} pesos.

Cada comisaría solicita DDA_k drones para implementar el servicio en la totalidad de sus planes cuadrante. Aunque no es imperativo abastecer las comisarias en su totalidad, cada comisaría k debe recibir como mínimo un γ_k porciento de los drones que solicita. Sin embargo, la falta de drones dificultará el servicio de vigilancia, el cual impacta en un costo social, que usted traduce en costo monetario de r_k pesos por dron faltante (asumido por usted por el fiel compromiso a su país).

Formule un problema de programación lineal entera que permita abastecer de drones a las comisarías dentro de los parámetros establecidos al mínimo costo.

Solución

$\boxed{\text{Conjuntos}}$

I = Plantas de producción de drones
J = Bodegas
K = Plantas de producción de drones

$\boxed{\text{Parámetros}}$

CIP_i = Costo de instalación de planta i
CIB_j = Costo de instalación de bodega j
ω_i = Costo unitario de producción de la planta i
α_{ij} = Costo unitario de envío desde planta i a bodega j
β_{jk} = Costo unitario de envío desde bodega j a comisaría k
DDA_k = Cantidad máxima demandada por comisaría k
γ_k = porcentaje de drones sobre DDA_k que se deben abastecer como mínimo en la comisaría k
r_k = costo unitario de demanda no cubierta de la comisaría k

$\boxed{\text{Variables}}$

x_{ij} = Número de drones a producir y enviar desde planta i a bodega j

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{; instalar planta en i} \\ 0 & \text{; EOC} \end{cases}$$

z_{jk} = Número de drones a enviar desde bodega j a comisaría k

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{; instalar bodega en j} \\ 0 & \text{; EOC} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Función Objetivo}}$

$$\text{mín} \underbrace{\sum_{i\in I} CIP_i y_i + \sum_{j\in J} CIB_j w_j}_{\text{costos instalación}} + \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(\omega_i + \alpha_{ij})x_{ij} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\beta_{jk} z_{jk}}_{\text{costos de producción y transporte}} + \underbrace{\sum_{k\in K}\left[DDA_k - \sum_{j\in J} z_{jk}\right] r_k}_{\text{costos por demandas no cubiertas}}$$

$\boxed{\text{Restricciones}}$

Si no se instala planta i, ningun dron puede ser enviado desde ahí:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \leq M \cdot y_i \;\; ; \;\; \forall i \in I$$

No sobrepasar la capacidad de almacenaje de drones en las bodegas:

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq w_j \cdot CAP_j \;\; ; \;\; \forall j \in J$$

Flujo de entrada-salida de drones por bodega:

$$\sum_{k\in K} z_{jk} \leq \sum_{i\in I} x_{ij} \;\; ; \;\; \forall j \in J$$

Abastecimiento máximo de drones por comisaría:

$$\sum_{j\in J} z_{jk} \leq DDA_k \;\; ; \;\; \forall k \in K$$

Abastecimiento mínimo de drones por comisaría:

$$\sum_{j\in J} z_{jk} \geq \frac{\gamma_k}{100} \cdot DDA_k \;\; ; \;\; \forall k \in K$$

Naturaleza de las variables:

$$x_{ij}, z_{jk} \geq 0 \;\; ; \;\; \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K$$

$$y_i, w_j \in \{0,1\} \;\; ; \;\; \forall i \in I, \forall j \in J$$

Pregunta 2 (6.0 puntos)

Sea el modelo de optimización:

$$
\begin{aligned}
(P)\, \text{mín} \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 - |x_2| \\
s.a. \quad & x_1 + (x_2 + 1)^2 \leq 0 \\
& x_1 \geq -1
\end{aligned}
$$

(a) **(3.0 puntos)** Demuestre, sin resolver, que (P) admite solución óptima.

(b) **(1.5 puntos)** Determine un modelo equivalente a (P) que sea diferenciable.

(c) **(1.5 puntos)** Considere la relajación del modelo (P) que resulta de eliminar la primera restricción. ¿Qué puede decir del valor óptimo de dicha relajación?

Solución

(a)

I) f es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser resta de funciones continuas (valor absoluto y un polinomio). Luego, f es continua en $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

II) $D \neq \emptyset$, puesto que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D$.

III) D es cerrado ya que está definido por restricciones 'amplias' (desigualdades), las cuales están definidas por funciones continuas (polinomios).

IV) D es acotado, ya que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D \Longrightarrow -1 \leq x_1 \leq 0 \wedge -2 \leq x_2 \leq 0$

Por lo tanto, por el Teorema de existencia de B-W (P) admite solución óptima.

(b) $(P) \Leftrightarrow (\widetilde{P})$, donde

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{P})\, \text{mín} \quad & \widetilde{f}(x_1, u, v) = x_1^2 - (u + v) \\
s.a. \quad & x_1 + (u - v + 1)^2 \leq 0 \\
& x_1 \geq -1 \\
& u, v \geq 0
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
(Q)\, \text{mín} \quad & x_1^2 - |x_2| \\
s.a. \quad & x_1 \geq -1
\end{aligned}
$$

El valor óptimo de (Q) es menor o igual que el valor óptimo de (P).

Pregunta 3 (6.0 puntos)

(a) **(3.0 puntos)** Resuelva gráficamente el problema (P3), indicando detalladamente la región factible, curvas de nivel de la función objetivo, punto óptimo y valor óptimo:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_a(x_1, x_2) = -3x_1 + 4x_2 \qquad (P3) \\ s.a. \quad & R_1 : x_1 + x_2 \leq 8 \\ & R_2 : -x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ & R_2 : -x_1^2 - (x_2 - 4)^2 \leq -16 \end{aligned}$$

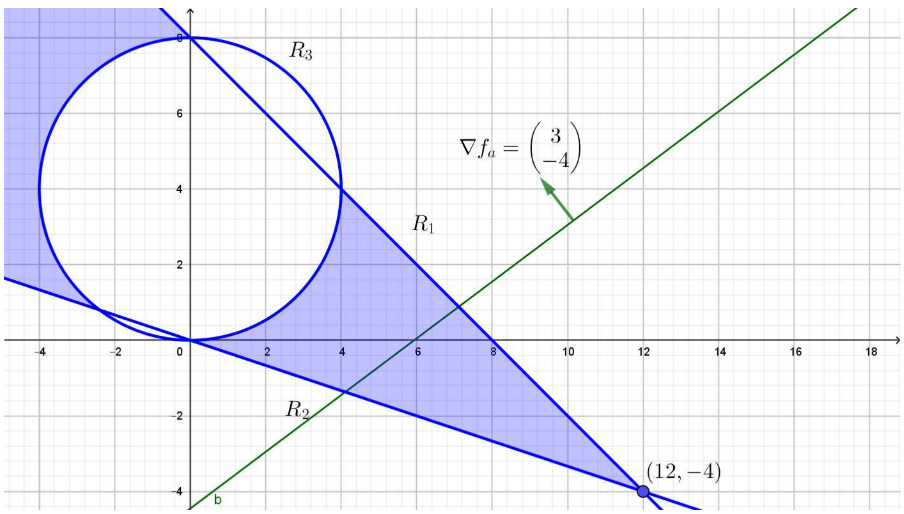
(b) **(3.0 puntos)** Considere la función $f_b(x_1, x_2)$:

$$f_b(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$$

Encuentre todos los puntos críticos de f_b. Clasifíquelos indicando si son máximos, mínimos o puntos silla, y concluyendo su optimalidad local/global.

Solución

(a) Gráficamente el problema queda:



De donde se puede ver que la función objetivo se minimiza en dirección contraria de su gradiente. Por lo tanto el mínimo del problema se alcanza en el punto $(12, -4)$, correspondiente a la intersección de las restricciones R_1 y R_2. El valor óptimo de la función objetivo es $f_a(12, -4) = -3(12) + 4(-4) = -52$.

(b) Podemos encontrar los puntos críticos imponiendo la condición de primer orden $\nabla f_a(x_1, x_2) = 0$.

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_1 - 6x_2 = 0$$
$$\frac{\partial f_a}{\partial x_2} = -6x_1 + 6x_2 = 0$$

De la segunda expresión se tiene que $x_1 = x_2$. Reemplazando en la primera y desarrollando:

$$\begin{aligned} & 3x_1^2 - 4x_1 = 0 \\ & \to x_1(3x_1 - 4) = 0 \\ & \to x_1 = 0 \text{ ó } x_1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Luego hay dos puntos críticos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Para caracterizarlos usamos la condición de segundo orden:

$$Hf_b(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Evaluando en el P_1:

$$Hf_b(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Los determiantes menores principales son: $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = (12 - 36) = -24$. Luego la matriz es indefinida y por lo tanto el punto P_1 es un punto silla.

Evaluando el punto P_2:

$$Hf_b\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Los determiantes menores principales son: $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = (60 - 24) = 36$. Luego la matriz es semifinida positiva y por lo tanto el punto P_2 es un mínimo local.