udp Escuela de Ingeniería Industrial
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

Curso:	CII2750 Optimización
Profesor:	Fernando Zúñiga
Periodo:	Primer Semestre 2020
Fecha:	06 de abril de 2020

Control 1 (Pauta) - CII2750 Optimización (Grupo 1: Equipos 1, 2 y 3)

Problema (Grupo 1)

Usted es dueño/a de una PYME que fabrica un conjunto de I productos que deben ser despachados a un cliente. La oferta de producción y la demanda del producto i es O_i y D_i respectivamente.

Los productos deben ser enviados en camiones. La PYME no cuenta con esta flota de transporte, por lo cual los arrienda dentro de un conjunto de J camiones posibles. La capacidad (volumen) del camión j es CAP_j. El volumen que ocupa el producto i es VOL_i.

El costo de arriendo del camión j es f_j. El costo unitario de fabricación y el precio unitario de venta del producto i es c_i y p_i respectivamente.

1. Realice un modelo de programación lineal entera mixta que maximice las utilidades (ingresos - costos), asegurando satisfacer las demandas del cliente.
2. Suponga que si se arriendan α o más camiones, el estado le entrega a la PYME un bono fijo de valor B. Modifique el modelo incorporando esta información.
3. Suponga ahora que el estado entrega el bono anterior sólo si se arriendan todos los camiones. Modifique el modelo incorporando esta información.

Solución Pregunta 1

- Conjuntos
  - $I = \{\text{Productos}\}$
  - $J = \{\text{Camiones}\}$
- Parámetros
  - O_i = Oferta del producto i
  - D_i = Demanda del producto i
  - CAP_j = Capacidad del camión j
  - VOL_i = Volumen del producto i
  - f_j = Costo de arriendo del camión j
  - c_i = Costo unitario de fabricación del producto i
  - p_i = Precio unitario de venta del producto i
- Variables
  - x_{ij} = Cantidad de producto i a ingresar al camión j
  - $y_j = \begin{cases} 1 & ; \text{ si se arrienda el camión } j \\ 0 & ; \text{ eoc} \end{cases}$
- Función Objetivo
  - Maximizar las utilidades (ventas − fabricaciones − arriendos)
$$\max \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(p_i - c_i)x_{ij} - \sum_{j\in J} f_j y_j$$
- Restricciones
  - Ofertas de producción
$$\sum_{j\in J} x_{ij} \leq O_i \ \ ; \ \ \forall i \in I$$
  - Capacidad de los camiones arrendados
$$\sum_{i\in I} VOL_i x_{ij} \leq CAP_j y_j \ \ ; \ \ \forall j \in J$$

- Satisfacción de la demanda
$$\sum_{j\in J} x_{ij} \geq D_i \;\; ; \;\; \forall i \in I$$
- Naturaleza de las variables
$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, y_j \in \{0,1\} \;\; ; \;\; \forall i \in I, \forall j \in J$$

Solución Pregunta 2

Se agregan dos parámetros:

- $\alpha =$ número de camiones mínimos a arrendar para obtener el bono B del estado
- $B =$ Bono del estado por arrendar α o más camiones

Se agrega una variable:
$$z = \begin{cases} 1 & ; \;\; \text{si se arriendan } \alpha \text{ o más camiones} \\ 0 & ; \;\; \text{eoc} \end{cases}$$
Se modifica la función objetivo:
$$\text{máx} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(p_i - c_i)x_{ij} - \sum_{j\in J} f_j y_j + Bz$$
Se agregan una restricción y la naturaleza de la nueva variable

- Control del número de camiones para la obtención del bono
$$\alpha z \leq \sum_{i\in J} y_j$$
- Naturaleza de la nueva variable
$$z \in \{0,1\}$$

Solución Pregunta 3

Se modifica la variable z
$$z = \begin{cases} 1 & ; \;\; \text{si se arriendan todos los camiones} \\ 0 & ; \;\; \text{eoc} \end{cases}$$
Se modifica la restricción de la pregunta anterior
$$|J|z \leq \sum_{i\in J} y_j$$
donde $|J|$ es la cardinalidad del conjunto J.

Control 1 (Pauta) - CII2750 Optimización (Grupo 2: Equipos 4, 5 y 6)

Problema (Grupo 2)

Usted es dueño/a de una fábrica que transforma un conjunto I de productos de papel, a través de J máquinas disponibles, en un conjunto K de productos de papel reciclado.

Cada tonelada de papel i pasa por alguna máquina j para ser transformada en toneladas de pulpa. El costo por tonelada de papel i que se procesa en la máquina j es c_{ij}. El porcentaje de rendimiento de papel i al ser procesado en máquina j para obtención de pulpa es r_{ij}. (Por ejemplo, si el rendimiento es $90\,\%$ significa que procesar 1 tonelada de dicho papel, se obtendrá $0,9$ toneladas de pulpa).

La pulpa producida en cada máquina es utilizada para transformarla en papel reciblable. El costo por tonelada de pupla que se transforma en papel reciblable k en la máquina j es q_{kj}. El porcentaje de rendimiento de pulpa para fabricar papel reciclable k en la máquina j es s_{kj}.

La fábrica dispone de O_i toneladas de producto de papel i para procesar.

El papel reciclable se debe enviar a un conjunto L de clientes. La demanda de toneladas de papel reciclable k del cliente l es D_{kl}. El costo de envío por tonelada de papel reciclable k al cliente l es v_{kl}.

Realice un modelo de programación lineal que permita satisfacer las demandas de papel reciclable de cada cliente al mínimo costo total (producción y transporte).

Problema (Grupo 2)

- Conjuntos
  - $I = \{\text{Productos de papel}\}$
  - $J = \{\text{Máquinas}\}$
  - $K = \{\text{Papeles reciclados}\}$
  - $L = \{\text{Clientes}\}$
- Parámetros
  - c_{ij} = Costo/ton de papel i a procesar en máquina j para hacer pulpa
  - R_{ij} = % rendimiendo de papel i al ser procesado en máquina j para hacer pulpa
  - q_{kj} = Costo/ton de pulpa a transformar en papel reciclable k por la máquina j
  - S_{kj} = % rendimiendo de pulpa al ser procesada en máquina j para hacer papel reciclable k
  - O_i = Toneladas de papel i disponibles para reciclar
  - D_{kl} = Demanda de papel reciclable k del cliente l
  - V_{kl} = Costo/ton de envío de papel reciclable k al cliente l
- Variables
  - x_{ij} = Toneladas de papel i a procesar en máquina j para hacer pulpa
  - y_{kj} = Toneladas de pulpa a procesar en máquina j para hacer papel reciclado k
  - z_{kl} = Toneladas de papel reciclado k a enviar al cliente l
- Función Objetivo
  - Minimizar costos (producción pulpa + producción papel reciclable + transporte)

$$\min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} q_{kj}y_{kj} + \sum_{k\in K}\sum_{l\in L} V_{kl}z_{kl}$$

- Restricciones
  - Ofertas de cada producto de papel

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \leq O_i \;\; ; \;\; \forall i \in I$$

- Control de flujo de pulpa en cada máquina

$$\sum_{i \in I} R_{ij} x_{ij} \geq \sum_{k \in K} y_{kj} \;\; ; \;\; \forall j \in J$$

- Control de flujo de cada papel reciclado

$$\sum_{j \in J} S_{ij} y_{kj} \geq \sum_{l \in L} z_{kl} \;\; ; \;\; \forall k \in K$$

- Satisfacción de la demanda

$$z_{kl} \geq D_{kl} \;\; ; \;\; \forall k \in K, \forall l \in L$$

- Naturaleza de las variables

$$x_{ij}, y_{kj}, z_{kl} \geq 0 \;\; ; \;\; \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L$$

Curso: CII2750 Optimización
Profesor: Fernando Zúñiga
Periodo: Primer Semestre 2020
Fecha: 06 de abril de 2020

Control 1 (Pauta) - CII2750 Optimización (Grupo 3: Equipos 7, 8 y 9)

Problema (Grupo 3)

Un laboratorio médico que produce vacunas para generar inmunidad de un nuevo tipo de virus, está planeando la producción para los próximos T periodos.

El número de días laborales del periodo t es n_t, y la demanda estimada de vacunas en el periodo t es d_t.

El costo unitario de producción de vacunas en el periodo t es p_t pesos.

Es posible producir más vacunas de la demandada en un cierto periodo, de modo de ser aprovechadas para satisfacer demandas de periodos siguientes. Estas vacunas se mantienen en inventario. El costo de mantener una vacuna en inventario es q pesos por unidad.

En la actualidad, el laboratorio cuenta con e empleados, pero en cada periodo se puede contratar o despedir empleados. El costo de contrar un empleado es α pesos, y el costo de despedirlo es β pesos. El salario diario de cada empleado es γ pesos. Cada empleado produce μ vacunas diariamente.

Realice un modelo de programación lineal entera que permita conocer la cantidad de vacunas a producir y a mantener en inventario en cada periodo, así como también el número de empleados a contratar y despedir en cada periodo, de modo de minimizar los costos totales (de producción, de inventario, salarios, contratos y despidos).

Solución

- Conjuntos
  - $T = \{\text{Periodos}\}$
- Parámetros
  - n_t = Días laborales del periodo t
  - d_t = Demanda de vacunas del periodo t
  - q = Costo unitario de mantención de vacunas en inventario
  - p_t = Costo unitario de producción de vacunas del periodo t
  - e = Númeroinicial de empleados
  - α = Costo unitario de contrato de empleados
  - β = Costo unitario de despido de empleados
  - γ = Salario diario
  - μ = Número de vacunas diarias que produce cada empleado
- Variables
  - X_t = Número de vacunas a producir en el periodo t
  - I_t = Número de vacunas a mantener en inventario en el periodo t
  - E_t = Número de empleados que trabajan en el periodo t
  - C_t = Número de empleados a contratar en el periodo t
  - H_t = Número de empleados a despedir en el periodo t
- Función Objetivo
  - Minimizar costos (producción + inventario + salarios + contratos + despidos)

$$\text{mín} \sum_{t \in T} (p_t X_t + q \cdot I_t + \gamma \cdot n_t \cdot E_t + \alpha C_t + \beta H_t)$$

- Restricciones
  - Niveles de producción de cada periodo. Se considera I_0 como el número de vacunas iniciales (por ejemplo $I_0 = 0$)

$$I_t = I_{t-1} + X_t - d_t \;\; ; \;\; \forall t \in T$$

- Número inicial de empleados
$$E_0 = e$$
- Vacunas producidas por los empleados en cada periodo
$$X_t = \mu \cdot n_t \cdot E_t \;\; ; \;\; \forall t \in T$$
- Número de empleados que trabajan en cada periodo
$$E_t = E_{t-1} + C_t - H_t \;\; ; \;\; \forall t \in T$$
- Naturaleza de las variables
$$X_t, Y_t, E_t, C_t, H_t \in \mathbb{Z}^+ \;\; ; \;\; \forall t \in T$$

Control 1 (Pauta) - CII2750 Optimización (Grupo 4: Equipos 10, 11)

Problema (Grupo 4)

Usted trabaja en una Clínica de Santiago, y debe planificar la asignación de un conjunto de I médicos en J box de atención en los diferentes T bloques de horarios.

Cada médico i entrega dos informaciones: el número de bloques de horarios que está dispuesto a trabajar (dado por n_i), y el valor de preferencia de trabajar en el box j (dado por a_{ij}).

No pueden haber box vacíos, es decir siempre tiene que haber un (y sólo un) médico asignado en cada box en todo bloque de horario. Obviamente cada médico en cada hora puede trabajar en un solo box (no puede trabajar en 2 o más box al mismo tiempo). Por último, todo doctor asignado en algun box debe trabajar siempre en el mismo box.

Realice un modelo de programación binaria que permita conocer la asignación de médicos en cada box y en cada bloque de horario, de modo de maximizar los valores de preferencia de todos los médicos.

Solución

- Conjuntos
  - $T = \{\text{Bloques de Horarios}\}$
  - $I = \{\text{Médicos}\}$
  - $J = \{\text{Boxes de Atención}\}$
- Parámetros
  - n_i = Número de bloques de horarios que está dispuesto a trabajar el médico i
  - a_{ij} = Valor de preferencia del médico i para trabajar en el box j
- Variables
  - $x_{ijt} = \begin{cases} 1 & ; \text{ si el médico } i \text{ trabaja en el box } j \text{ en el bloque t} \\ 0 & ; \text{ eoc} \end{cases}$
  - $y_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ si el médico } i \text{ trabaja en el box } j \text{ en algun momento} \\ 0 & ; \text{ eoc} \end{cases}$
- Función Objetivo
  - Maximizar los valores de preferencia de los médicos

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} y_{ij}$$

- Restricciones
  - No pueden haber box vacíos (siempre hay 1 médico en cada box en cada bloque de horario)

$$\sum_{i \in I} x_{ijt} = 1 \ ; \ \forall j \in J, \forall t \in T$$

  - Cada médico trabaja a lo más en 1 box en cada bloque de horario

$$\sum_{j \in J} x_{ijt} \leq 1 \ ; \ \forall i \in I, \forall t \in T$$

  - Los médicos, si trabajan, atienden siempre en un mismo box (no pueden cambiarse)

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq 1 \ ; \ \forall i \in I$$

  - Respetar el número de bloques de horarios que cada médico está dispuesto a trabajar en su box correspondiente

$$\sum_{t \in T} x_{ijt} \leq n_i y_{ij} \ ; \ \forall i \in I, \forall j \in J$$

  - Naturaleza de las variables

$$x_{ijt}, y_{ij} \in \{0,1\} \ ; \ \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T$$