

Métodos numéricos para la Ciencia y la Ingeniería

Tarea #2

Benjamín Venegas Ríos
1 de octubre de 2015

1. Pregunta 1

1.1 Introducción

En esta pregunta se pedía escribir una rutina que permitiera calcular (y_{n+1}, v'_{n+1}) dados (y_n, v'_n) : la posición y velocidad luego del n-ésimo choque. Para eso se pedía calcular los tiempos para cada choque buscando una función y sacando sus ceros, analizando cuando la partícula de masa m pasaba a estar debajo del suelo y comparando, de esta manera, el instante previo y posterior al choque para así calcularlos.

1.2 Procedimiento

Para realizar esta pregunta, en primer lugar, se crearía la función “down”, que retornaría los puntos $(m, m-\delta)$ en el caso de que fueran puntos que hiciesen cambiar de signo a la función a estudiar más adelante. En el caso contrario, entregaría la información de que no se encontró un punto negativo. Luego, se crearía otra función denominada “then”, la cual recibiría una posición y velocidad del choque n-ésimo, para así posteriormente entregar un vector con los valores del tiempo, posición y velocidad del choque siguiente. Fue en esta parte donde se estudiaría la función cero, que se definió como:

$$Y_{\text{partícula}}(t') - Y_{\text{suelo}}(t') - f_{\text{cero}} = 0$$

donde ,

- t' es el tiempo del choque previo, con lo cual el seno se vería desplazado añaniedo el tiempo de choque t_n , que es el tiempo que ha transcurrido para que el suelo tenga una posición y_n (en el choque n-ésimo) , es decir, $t_n = \arcsin(y_n/w)$ (considerando $A=1$ por enunciado)

$$- Y_{\text{partícula}}(t') = y_0 + v_0 * t' - (1/2)g * (t')^2$$

$$- Y_{\text{suelo}}(t') = A \sin w(t' + t_n)$$

Con lo cual la ecuación final para sacar el tiempo de choque n-ésimo más 1 de la partícula con el suelo quedaba:

$$y_n + v_n * t' - (1/2)g*(t'^2) - n\pi \cdot \sin w(t' + t_n) = 0 = f_{\text{cero}}$$

donde se reemplazaba y_0 y v_0 por y_n y v_n , respectivamente, ya que con cada choque éstas variaban.

Entonces, cuando ya se tuviese el tiempo t^* de choque, (mediante el método de bisección importado desde scipy y ocupando la función “down” para cerciorarse de que los signos de las funciones evaluados en los 2 puntos efectivamente eran distintos), se podría calcular la velocidad del choque siguiente v_{n1_p} como:

(Simplemente derivando la posición de la partícula y del suelo, además de reemplazar en fórmula del enunciado y evaluando en punto t^*)

$$v_{n1_p} = (1+\eta)*A*w*\cos w*(t_1+t_n) - \eta*(v_{n_p} - g*t_1)$$

donde

η = coeficiente de restitución [adimensional]

g = módulo de la aceleración de gravedad [m/s²]

A = amplitud de movimiento del suelo ($A=1$ para este caso) [m]

w = frecuencia angular de suelo [rad/seg]

$t_1 = t^*$

Además, la posición luego del siguiente choque se calcularía como:

$$y_{n1} = y_n - (t_1^2)*g/2 + t_1*v_{n_p}$$

donde

v_{n_p} = velocidad de la partícula justo después del choque n-ésimo con el suelo

y_n = posición luego del n-ésimo choque

Por otro lado, se incluyó otra función, llamada “collision”, la cual lo que en resumidas cuentas haría sería trabajar con cierta cantidad de choques y condiciones iniciales de la partícula para ir creando los arreglos de los tiempos, posición y velocidad de choques de ésta.

1.3 Resultados

Graficando un caso elástico y semi-elástico se obtuvo:

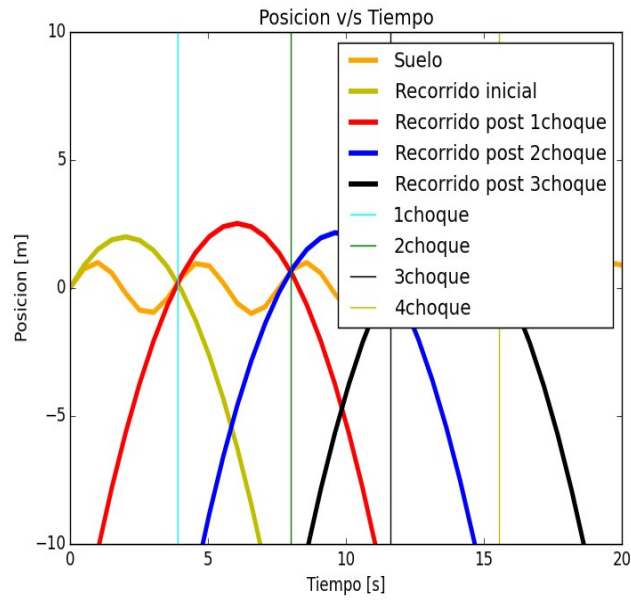


figura 1. Gráfico de Posición v/s Tiempo para el recorrido de la partícula de $m=1$ luego de 4 choques agregando al suelo.

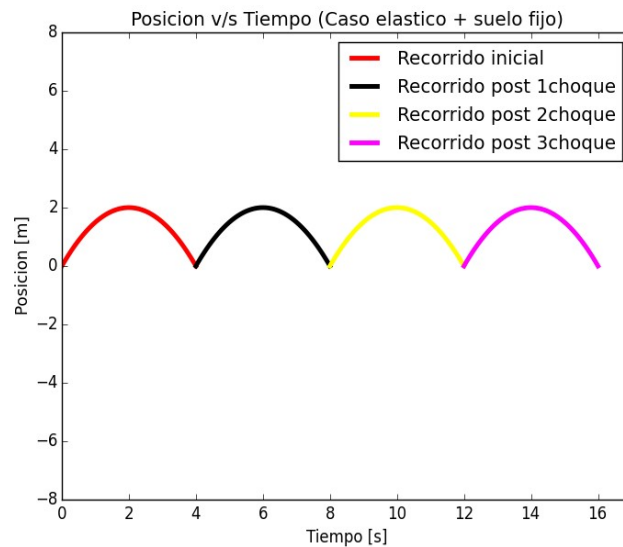


figura 2. Gráfico Posición v/s Tiempo para el choque elástico de una partícula de $m=1$, luego de 4 choques considerando al suelo fijo. En este caso la partícula tiene una $y_0=0[m]$, $v_0=2[m/s]$ y $g=1[m/s^2]$.

1.4 Conclusión

Como se pudo observar en los resultados, en primer lugar, en la figura 1, se pudo obtener una buena aproximación del cero de la función antes mencionada mediante el método de la bisección y también el hecho de que la función “down” haya sido eficiente en cuánto a la elección de un delta adecuado, provocó que el punto de intersección entre la posición de la partícula y el suelo fuese encontrado con bastante exactitud. Otro punto importante a rescatar de la figura 1, es el hecho de que la partícula al chocar con el suelo sujeta a esos parámetros ($w=1.66$, $A=1$, $g=1$, $m=1$, $\eta=0.15$, $v_0=2$), después del primer choque llega más lejos, lo cual se puede interpretar como que el suelo le da un impulso extra para luego volver a enlentecerla, y así sucesivamente. En este caso no tenemos un choque elástico.

Por otro lado, la figura 2, era el caso ideal, donde no había roce y, por ende, existía conservación de energía, la velocidad con la cual llegaba al suelo (fijo) era la misma en valor a la que tenía luego del choque. Esto era lo esperado para un choque elástico. Sin embargo, en el problema con el suelo vibrando, se generaban variaciones en estas velocidades de la partícula, que era lo que se pudo apreciar en la figura 1.

2. Pregunta 2 y 3

2.1 Introducción

En estas preguntas se pedía usar $\eta=0.15$ para *estimar* N , el número de botes necesarios para relajar el sistema, dado distintos valores de w . El primero que se pide para $w=1.66$ y los otros dos valores entre 1.66 y 1.7. El método más sencillo que se recomendaba era el de graficar V_n vs. n y chequear para qué valor de n V_n se había estabilizado. Finalmente, se pedía una comparación entre los N_{relax} obtenidos.

2.2 Procedimiento

Para realizar esta parte se graficó V_n vs n , donde V_n era la velocidad de la partícula luego del choque n -ésimo y n la cantidad de choques, para así poder observar algún valor específico de n en donde la velocidad se estabilizara. Lo que se usó fue esencialmente la función collision, la cual como se mencionó anteriormente, dadas las condiciones iniciales y cantidad de choques que recibía, retornaba los arreglos de t_n , V_n e y_n . Hecho esto, se graficó de dos formas (un gráfico con líneas y el otro con círculos) lo pedido dado 3 valores particulares de w , para así obtener un mejor análisis de cada gráfico.

2.3 Resultados

Graficando lo pedido de 2 formas se obtuvo:

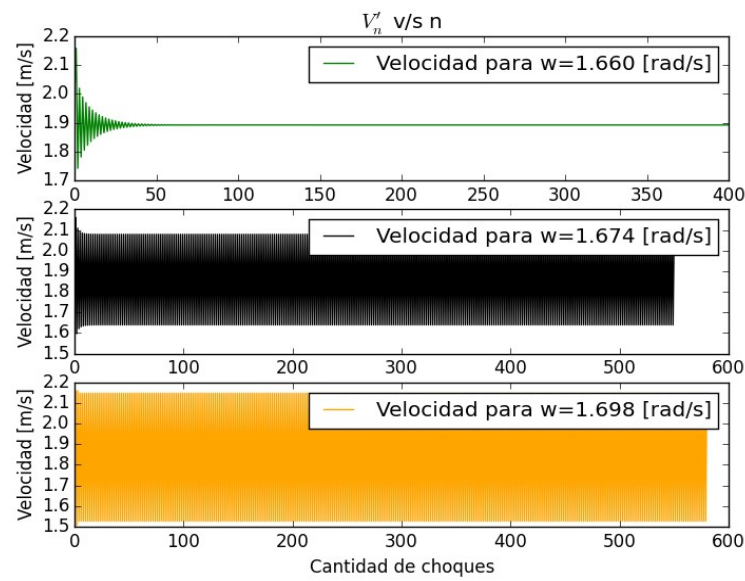


figura 3. Gráfico líneas V'_n v/s n donde V'_n es la velocidad de la partícula luego del n -ésimo choque en m/s y n es la cantidad de choques. Son 3 casos: $w=1.660, 1.674$ y 1.698 .

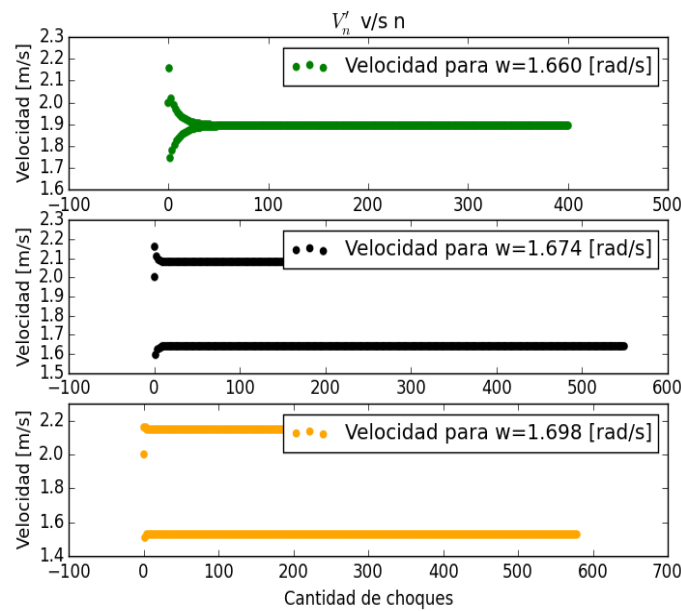


figura 4. Gráfico Círculos V'_n v/s n de la partícula para los mismos 3 casos de w .

	$w=1.660$ [rad/s]	$w=1.674$ [rad/s]	$w=1.698$ [rad/s]
Estimación N_{relax}	50	20	20

Tabla1. Comparación de N_{relax}

2.4 Conclusión

Para valores cercanos a $w=1.660$ [rad/s] la velocidad se estabiliza más rápido cerca de los 50 choques con el suelo. Esto se ve representado en la figura 3 y 4, donde se puede ver que la velocidad converge a un valor a medida que empieza a sobrepasar los 50 choques. Para el caso de $w=1.674$ [rad/s] ocurre que viendo tanto la figura 3 como 4, la estabilidad se genera más o menos a los 20 choques, sin embargo no es un valor estricto al que tenderá la velocidad de estabilidad de la partícula, sino que oscilará entre 2 valores. Y por último vemos que para el caso de $w=1.698$ [rad/s], al igual que para $w=1.674$ [rad/s], a los 20 choques aproximadamente la partícula tendrá 2 valores de estabilidad para su velocidad en los cuales oscilará. Podemos predecir que mientras más cerca de 1.66 [rad/s], la velocidad tenderá a estabilizarse en un valor en particular pero demorará más (más choques), mientras que más cercano a 1.7 [rad/s] (en dirección a la derecha), la estabilidad se reducirá a oscilar alrededor de dos velocidades en particular y demorará menos en hacerlo (menos choques).

4. Pregunta 4

4.1 Introducción

En esta pregunta se pedía hacer un gráfico de V_n versus w con w entre 1.660 y 1.790 para ver como variaba cada V_n dependiendo de los valores que tomara w . Muy importante es que cada n venía relacionado directamente con N_{relax} por lo que todos los V_n serían estables.

4.2 Procedimiento

Para realizar esta parte se realizó un linspace para 20 valores de w entre 1.660 y 1.675 , luego se ocupó la función “collision” para poder encontrar los V_n (estables) y se siguió el hint de ocupar la última condición de un w para el comienzo del otro valor de w dentro del for. Cabe destacar que por cada w se optó por graficar 50 valores de V_n . Luego, se hizo lo mismo para 50 valores de w ahora entre 1.675 y 1.790 . En ambos intervalos se decidió graficar mediante scatter (círculos) para poder distinguir mejor el comportamiento del gráfico.

4.3 Resultados

Graficando lo pedido se obtuvo:

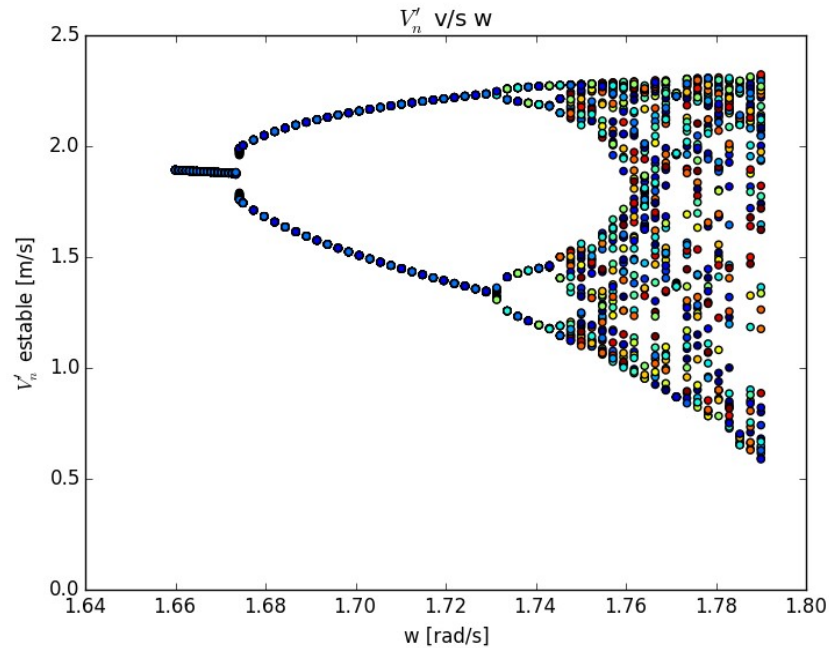


figura 5. Gráfico V'_n v/s w para la partícula donde los círculos en línea vertical representan el espectro de 50 velocidades estables para cada w elegido.

4.4 Conclusión

Se puede apreciar de la figura 5 que para w entre 1.66 y 1.68 existe sólo una velocidad estable, mientras que a medida que nos acercamos a 1.68 hasta 1.73, se inicia lo que se llama “ramificación”, ya que la velocidad estable que adquiere la partícula oscila entre 2 puntos periódicamente. Finalmente, para w entre 1.74 y 1.79 el sistema ya empieza a comportarse caóticamente, variando mucho las velocidades. El solo hecho de que existan muchos puntos en una línea vertical imaginaria es indicio de que a esa frecuencia angular del suelo, la partícula no convergerá a una velocidad de estabilidad, de hecho, divergirá.