

# Métodos numéricos para la ciencia e Ingeniería

Benjamín Venegas Ríos

8 de octubre de 2015

Profesor : Valentino González C.  
Auxiliar: Felipe Pesce

## 1. Pregunta 1

El oscilador de van der Pool fue propuesto para describir la dinámica de algunos circuitos eléctricos. La ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2) \frac{dx}{dt}$$

donde  $k$  es la constante elástica y  $\mu$  es un coeficiente de roce. Si  $|x| > a$  el roce amortigua el movimiento, pero si  $|x| < a$  el roce inyecta energía. Se puede hacer un cambio de variable para convertir la ecuación a:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1) \frac{dy}{ds}$$

con lo cual ahora la ecuación sólo depende de un parámetro,  $\mu^*$ . Indique cuál es el cambio de variable realizado.

Integre la ecuación de movimiento usando el método de Runge-Kutta de orden 3 visto en clase. Se pide que Ud. implemente su propia versión del algoritmo, describa la discretización usada y el paso de tiempo. Use  $\mu^* = 1.RRR$ , donde RRR son los 3 últimos dígitos de su RUT antes del guión. Integre la solución hasta  $T = 20\pi$  (aproximadamente 10 períodos) para las siguientes condiciones iniciales:

$$1) \frac{dy}{ds} = 0; y = 0.1$$

$$2) \frac{dy}{ds} = 0; y = 4.0$$

Grafique  $y(s)$  y la trayectoria en el espacio ( $y, dy/ds$ ).

## 1.1 Introducción

En esta pregunta se pedía integrar la ecuación de movimiento del oscilador de van der Pol usando el método de Runge-Kutta de orden 3 visto en clases. Además se pedía escribir el algoritmo sin usar librerías, describiendo la discretización y el paso usado. Finalmente, había que integrar la solución hasta  $T=20\pi$  para las condiciones iniciales mencionadas anteriormente, y graficar  $y(s)$  y la trayectoria  $(y, dy/ds)$

Como extra se pedía transformar la ecuación diferencial inicial en la que tiene  $y$  dependiente de  $s$ .

## 1.2 Procedimiento

Para lograr la ecuación diferencial se ocupó la regla de la cadena y los siguientes cambios de variables:

$$y(s)=x(t)/a$$

$$s=\sqrt{k}t$$

Entonces, derivando:

$$dy/ds=(dy/dt)/\sqrt{k} \rightarrow dy^2/ds^2=(dy^2/dt^2)/k \quad (1)$$

(2)  $dx^2/dt^2=ak(dy^2/ds^2) \rightarrow$  reemplazando (1) y (2) en la ecuación original quedaba:

$$ak(dy^2/ds^2)=-aky-\mu(a^2)(y^2-1)(dy/ds)a(\sqrt{k}) \rightarrow \text{dividiendo por } ak$$

$$dy^2/ds^2=-y-\mu^*(y^2-1)dy/ds \rightarrow \text{donde } \mu^*=\mu(a)/(\sqrt{k}) \text{ y se obtiene la ecuación a integrar.}$$

Ahora para lograr la integral, en primer lugar se definió la función  $f(y,w)$  donde se redujo el orden de la ecuación antes calculada a orden 1, debido a que  $w=dy/ds$ . Entonces en el fondo, quedo la siguiente función:

$$f(y,w)=(w, y-\mu^*(y^2-1)w)$$

$$d/ds(y) = w$$

$$d/ds(w) = -y-\mu^*(y^2-1)w$$

donde claramente se puede apreciar que se redujo el orden.

Después de haber hecho esto, se crean dos funciones, una para retornar el vector  $k1$  y la otra el vector  $k2$ . Se hace énfasis en que son vector y la función es independiente de la variable  $s$ , por lo cual la discretización se simplificó bastante. En el retorno de  $k1$ , para  $y$  se obtiene  $k1=h*f\_eval[0]$  (un componente del vector  $k1$ ) y para  $w$  se obtuvo  $h*f\_eval[1]$  (otro componente del vector  $k1$ ).

De forma análoga se calculó el vector  $k2$  para cada componente, sin embargo acá además se retornó  $k1$  para así por simplicidad poder ocuparlo en la función de retorno de  $k3$ . En  $k3$ , siempre guiándonos por el método de Runge kutta de orden 3, se crea la función auxiliar  $f\_eval$ , la cual tendrá dos componentes y así poder obtener un  $k3$  para cada variable, además de  $k1$  y  $k2$ .

Por lo tanto finalmente, en la función rk3\_step es en donde se utilizan todas las funciones matriciales citadas anteriormente para obtener el  $y$ -ésimo + 1 valor de  $y$ , además del  $w$ -ésimo + 1 valor de  $w$ . De esta forma se irían obteniendo los valores que se buscaban para integrar la ecuación original.

Ocupando los últimos números del rut (18956375-2), se definió  $\mu^*=1.375$  y los pasos, considerando que queríamos integrar la solución hasta  $T=20\pi$ , se creó además un paso  $h$  arbitrario. Luego, se setearon las condiciones iniciales de los vectores  $y(s)$  y  $w$ , para así hacer un for e ir guardando cada uno de los valores obtenidos por el método. Así se obtuvieron los valores para  $y$  y  $w$ .

### 1.3 Resultados

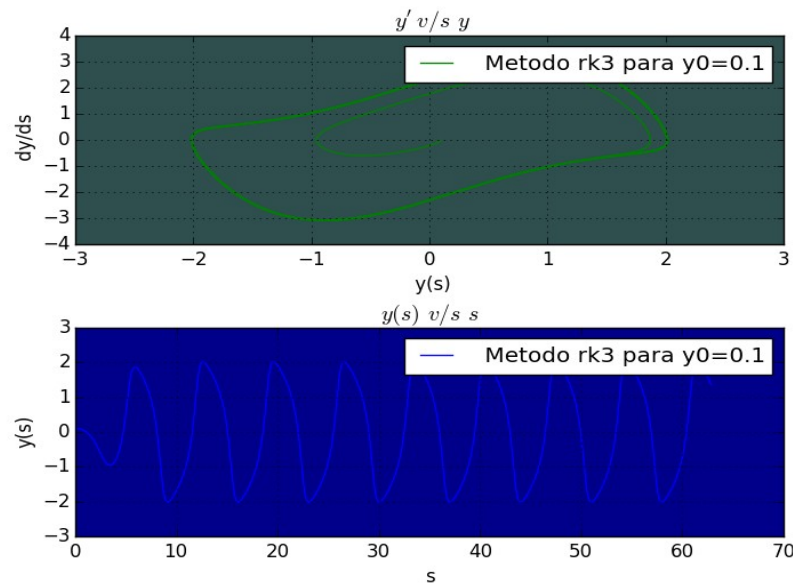


figura1. Gráfico de  $y' v/s y(s)$ , con  $y(s) v/s s$  considerando las condiciones ( $y_0=0.1, dy/ds=0$ )

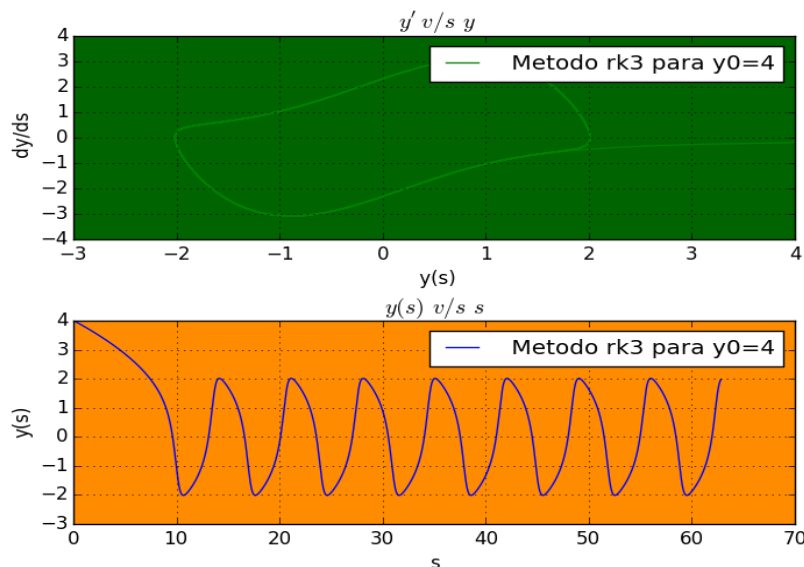


figura2. Gráfico  $y' v/s y(s)$  con  $y(s) v/s s$  más las condiciones iniciales de ( $y_0=4, dy/ds=0$ )

## 1.4 Conclusión

En vista de lo que se puede apreciar de los resultados, se puede ver que en ambos casos a partir de cierto valor de  $s$ , el sistema se estabiliza con unos 7 u 8 períodos aproximadamente. Además de eso, se pudo observar que en ambas condiciones la amplitud de las oscilaciones del caso estacionario llegaban a un valor de 2, lo cual indica que en ciertos momentos de las oscilaciones ( $y=x/a$ ) del sistema el roce inyectaba o restaba energía. Y por otra parte, interpretando la derivada con respecto a la función, se pudo apreciar que ambas curvas son cerradas en su mayoría y que tienen un máximo y un mínimo, pero mientras cambiaba la condición inicial una convergía al origen ( $y_0=0$ ) mientras que la otra divergía y se alejaba de éste. Esto también pudo haber sido producto del roce del sistema.

Aparte de todo esto, podemos ver que el método de Runge-kutta de orden 3 fue una buena medida del sistema de oscilador de van der Pol.

## 2. Pregunta 2

El sistema de Lorenz es un set de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido por tener algunas soluciones caóticas, la más famosa es el llamado atractor de Lorenz. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{ds} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{ds} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

La solución más famosa se obtiene con los parámetros  $\sigma=10$ ,  $\beta=8/3$  y  $\rho=28$ .

### 2.1 Introducción

En esta parte se pedía resolver el sistema de ecuaciones de Lorenz dados los parámetros previamente mencionados y las condiciones iniciales ( $x_0, y_0, z_0$ ) arbitrarias que se impusieran. Además, también se tenía que integrar la ecuación por un tiempo que se estimase conveniente ocupando el algoritmo `rk4` que se encontraba en librería de `scipy` y graficar en 3D la solución ( $x(t), y(t), z(t)$ ).

### 2.2 Procedimiento

Para realizar esta parte final se procedió a ocupar la librería de `scipy.integrate` y `Axes3D` para plotear. En primer lugar, se creó la función `f_to_solve` la cual retornaría las ecuaciones de Lorenz. Luego, se setearon las condiciones iniciales y se ocupó `ode` para integrarla junto con `'dopri5'`. Para seguir se creó

un arreglo con las componentes del sistema en la variable `sol_n` de tamaño dado por los pasos arbitrarios escogidos (10000000). Después se ocupó un `while` el cual fue guardando cada uno de los valores de tiempo en un arreglo `t_n[i]` y `sol_n` con las tres componentes ( $x(t), y(t), z(t)$ ). Posteriormente, se graficaron los resultados de la integración.

## 2.3 Resultados

Considerando que en todos los gráficos se fijaron los parámetros  $\sigma=10$ ,  $\beta=8/3$  y  $\rho=28$ , lo que se obtuvo fue lo siguiente para distintas condiciones iniciales:

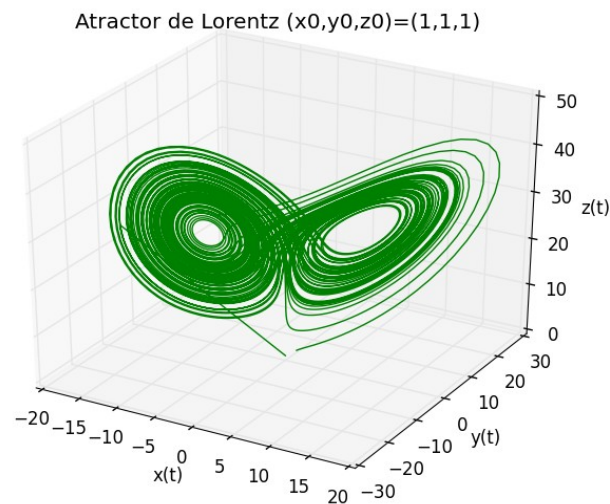


figura3. Gráfico en 3D de las coordenadas  $(x, y, z)$  en función del tiempo dadas las condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

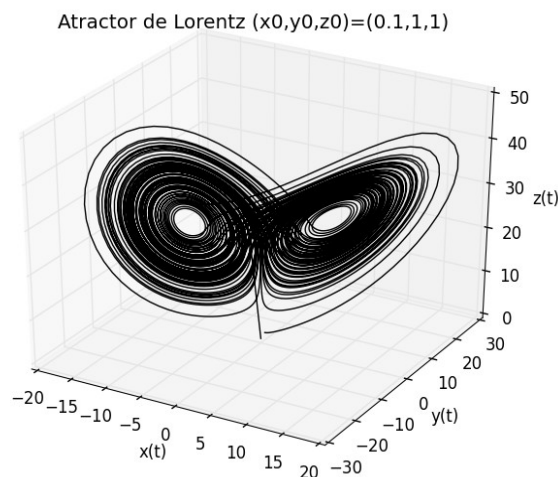


figura4. Gráfico en 3D de las coordenadas  $(x, y, z)$  en función del tiempo dadas las condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 1, 1)$

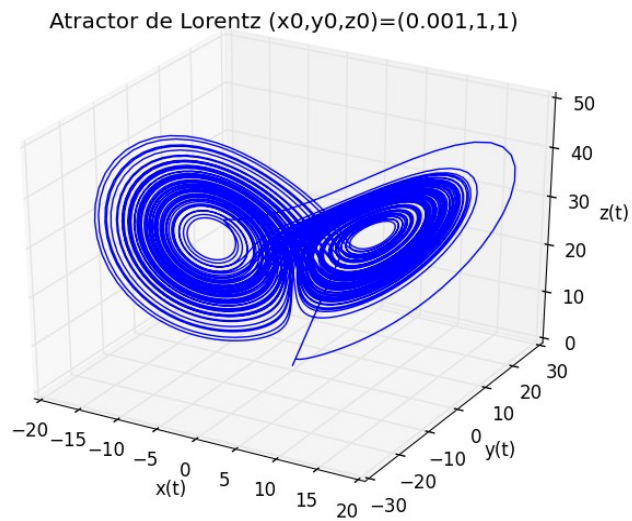


figura5. Gráfico en 3D de las coordenadas  $(x,y,z)$  en función del tiempo dadas las condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.001, 1, 1)$

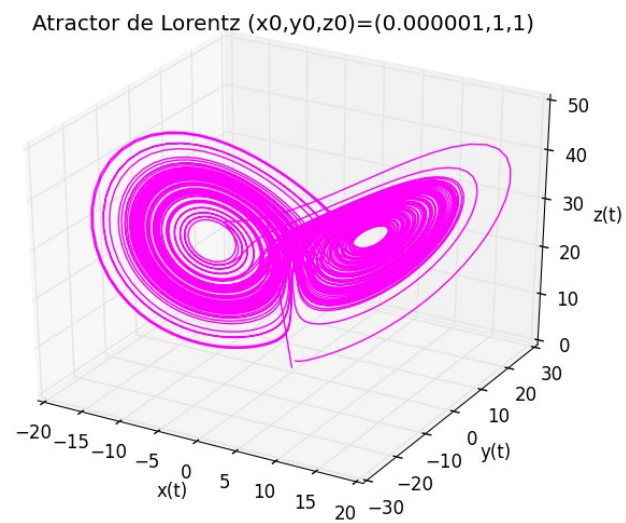


figura6. Gráfico en 3D de las coordenadas  $(x,y,z)$  en función del tiempo dadas las condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.000001, 1, 1)$

## 2.4 Conclusión

Se pudo concluir de los resultados expuestos anteriormente que el sistema de Lorenz entregaba un sistema 'caótico' el cual dependía directamente de los valores de sus parámetros (no se graficó en este informe, sin embargo, al variar uno de ellos los círculos concéntricos iban variando cada vez más, incluso en algunos casos, por ejemplo, sólo al variar  $\rho$  se generaba solo una 'ala' de la mariposa, etc) y de las condiciones iniciales. Esto último se pudo comprobar graficando el sistema en 4 condiciones iniciales distintas y lo que se observó fue elocuente, los círculos van decreciendo conforme variamos la coordenada  $x$  del sistema. (aunque, cabe destacar, que se mantuvo un cierto orden total en la fusión de las 'alas', mirando el sistema como un todo y no una trayectoria en particular). Sin lugar a dudas, podríamos haber cambiado muchos valores, pero en el fondo, lo que se pudo inferir de este 'efecto mariposa' es que dadas ciertas condiciones iniciales y parámetros toda la evolución del sistema convergerá a una en particular.