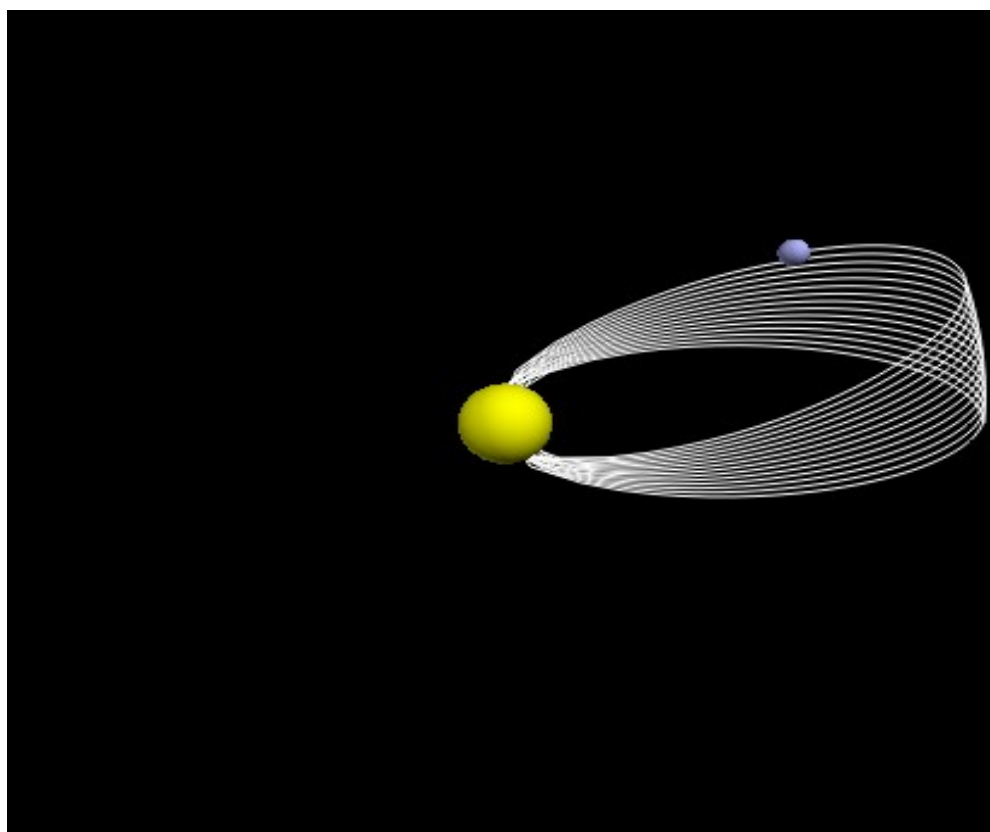


*Universidad de Chile ,Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas*

***FI3104-01***  
***MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA CIENCIA Y LA***  
***INGENIERÍA***

***TAREA #4***  
***“Diseño de software.***  
***Órbitas espaciales según Newton y Einstein”***

*Benjamín Venegas Ríos*  
*rut: 18956375-2*  
*20 de octubre de 2015*



## **Pregunta 1**

### **“ Diseño de software”**

#### **1.1 Introducción**

*En la ingeniería y en las ciencias, en general, el buen funcionamiento de los programas computacionales, principalmente, de manera eficiente, se consideran fundamentales a la hora de querer optimizar tanto el código como el mismo tiempo que un programador lleva implementando sus funciones, métodos, etc. Es por este motivo que la primera parte de este trabajo buscará entender en un mayor grado el diseño de los programas y cómo un mejor trato a ciertos algoritmos pueden hacer que las simulaciones o trabajos de software sean mucho menos complicados.*

*Es así como en esta primera parte de la tarea se estudiaron unos videos tutoriales de “Software Carpentry” con el fin de mejorar el diseño del software de los programas futuros del curso, haciéndolos más eficientes y rápidos ocupando menos tiempo de implementación.*

#### **2.1 Resultados**

***Describa la idea de escribir el main driver primero y llenar los huecos luego. ¿Por qué es buena idea?***

*La idea de escribir el main driver primero es para poder crear un esqueleto de lo que será el código. Entonces, luego de haber terminado la implementación del código se procederá a darle calidad y orden a lo hecho, de tal forma que el programa se haga más legible y rápido.*

***¿Cuál es la idea detrás de la función mark filled? ¿Por qué es buena idea crearla en vez del código original al que reemplaza?***

*La idea detrás de la función mark filled es de inspeccionar el buen funcionamiento del programa corrido, provocando que en el caso de que se levantara un error, ésta función ayudase al programador a decirle en donde se*

*podiese encontrar, ocupando ciertos mensajes de “alerta” y de esta forma, evitando que se recurra a localizar el error en un extenso código, lo cual sería nefasto en términos del tiempo perdido.*

### ***¿Qué es refactoring?***

*Consiste en alterar la estructura de un programa ( por ejemplo: creando funciones, métodos, clases , etc) sin modificar su comportamiento o funcionalidad ,con el fin de mejorar su calidad. Se prioriza éste mecanismo para así poder testear el programa y cerciorarse de sus características (rapidez,etc)*

### ***¿Por qué es importante implementar tests que sean sencillos de escribir? ¿Cuál es la estrategia usada en el tutorial?***

*Es fundamental implementar tests que sean sencillos de escribir debido a que mientras más simples sean, será menos probable que hayan errores. Es claro que mientras más complejo y extenso sea el programa la probabilidad de cometer errores se incrementará.*

*La estrategia usada por el tutorial, son los llamados “fixtures”, en donde, cada uno de ellos tendrá un resultado (correcto o incorrecto) ,que se comparará con los resultados de los tests para verificar el funcionamiento del programa.*

### ***El tutorial habla de dos grandes ideas para optimizar programas, ¿cuáles son esas ideas? Describálas.***

*La primera idea es la del trabajo humano, que se basa esencialmente en que se prioriza el desarrollo de un algoritmo más avanzado en el programa por parte del programador (ocupando más tiempo en la creación algorítmica) con la finalidad de evitar demoras exageradas al momento de correrlo. La segunda idea es la de espacio de memoria del computador a cambio de tiempo, la cual se basa fundamentalmente en que al momento de programar se eviten las redundancias, porque lo único que harán será ocupar más memoria y ralentizar el desempeño(tiempo de ejecución) del programa.*

### ***¿Qué es lazy evaluation?***

*Consiste en escribir en el código las variables del problema a resolver, si y sólo si, se necesitan, con el fin de sofisticar el programa haciéndolo más eficiente y rápido, sin embargo, este procedimiento hace que sea mucho más laborioso el programar, de ahí el nombre.*

### ***Describe la other moral del tutorial (es una de las más importantes a la hora de escribir buen código).***

*Las mayores mejoras de rendimiento provienen de cambiar los algoritmos y la estructura de datos. Other moral señala que lo que se debe hacer para escribir un buen código es en primer lugar escribir y testear una simple versión del programa primero y luego, ir cambiando y mejorando parte por parte probando el programa constantemente para ir comprobando el buen funcionamiento de lo hecho.*

## ***3.1 Conclusión***

*De esta parte se puede concluir que es muy importante a la hora de escribir un código no tan sólo el lograr resolver el problema particular, sino que, de qué forma se puede llevar a cabo este trabajo. Sea de manera eficiente o no, simple o no, rápida o no, etc. Sobre todo considerando que en muchas disciplinas de la actualidad se requieren resultados y de forma casi que inmediata, entonces, no tiene caso que un programa lo resuelva en décadas o meses. Y más allá de eso, lo que se lleva a cabo en el programa no tiene que ser lo más complejo del mundo tampoco, ya que muchas veces otros científicos o profesionales necesitarán poder interpretar lo que se ejecutó y si esto no se lleva a cabo de manera simple no servirá de mucho. De ahí la importancia de la optimización de los programas.*

## **Pregunta 2**

### **2.1 Introducción**

*Para planetas que orbitan cerca del sol el potencial se puede escribir como:*

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \alpha \frac{GMm}{r^2}$$

*donde alfa es un número pequeño. Esta corrección a la ley de gravitación de Newton es una buena aproximación derivada de la teoría de la relatividad general de Einstein. Bajo este potencial, las órbitas siguen siendo planas y además precesan ,es decir, el perihelio (punto más cercano de la órbita) gira alrededor del Sol.*

*Dicho esto, entonces, lo que se hizo fue estudiar el caso alfa cero con condiciones iniciales de ( $x=10[m]$ ,  $y=0[m]$ ,  $v_x=0[m/s]$ ,  $v_y=0.3[m/s]$ ) y luego, alfa distinto de cero (con las mismas condiciones en  $t=0$ ). Para el primer caso, se buscaba integrar las ecuaciones de movimiento del sistema mediante 3 Métodos distintos: Euler, Verlet-velocity y Runge-Kutta de orden 4.(Además se anexó un Método de Verlet alternativo para ver como se comportaba). Y después de obtener los resultados, se graficó la energía total del sistema en función del tiempo junto a la trayectoria que seguiría.*

*Para el caso de alfa distinto de cero se realizó lo mismo que antes, sólo que ocupando el Método de Verlet velocity con  $\alpha = 10^{(-2.375)}$  e integrando para 30 órbitas aproximadamente y además se calculó la velocidad de precesión del perihelio junto con la localización de éste último, para así finalmente plotear la energía total en función del tiempo y la trayectoria.*

## 2.2 Procedimiento

*Antes de continuar, enseguida se explicará la forma en la cual se trabajó la ecuación del potencial gravitatorio para calcular las aceleraciones tanto en la ordenada como en la abscisa.*

*Lo que se hizo fue definir el vector  $\vec{r}$  según las componentes  $x$  e  $y$  en coordenadas cartesianas de la siguiente forma:*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

*Posteriormente, como se tenía que en el espacio se despreciaba el roce, la única fuerza que existía en el problema era la conservativa asociada al potencial gravitacional. Por lo que se ocupó que:*

$$\vec{F} = -\nabla U$$

*quedando para cada componente la siguiente aceleración ( considerando  $GmM=1$  y  $G=m=M=1$  donde  $m$  y  $M$  están en  $[kg]$  y  $G$  en  $[Nm^2/Kg^2]$ )*

$$m\ddot{x} = \frac{-GmMx}{(\sqrt{(x^2+y^2)})^3} + 2(\alpha)GmM \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$m\ddot{y} = \frac{-GmMy}{(\sqrt{(x^2+y^2)})^3} + 2(\alpha)GmM \frac{y}{(x^2+y^2)^2}$$

*que a su vez quedaban como:*

$$\ddot{x} = \frac{-x}{(\sqrt{(x^2+y^2)})^3} + 2\alpha \frac{(x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\ddot{y} = \frac{-y}{(\sqrt{(x^2+y^2)})^3} + 2\alpha \frac{(y)}{(x^2+y^2)^2}$$

*donde  $\ddot{x}=f_x$  y  $\ddot{y}=f_y$*

Lo interesante de esto fue que se estaba formando el sistema de ecuaciones diferenciales que se utilizarían en la clase Planeta anexada en los archivos de python para poder integrarlas.

Luego, como  $\dot{x}=v_x$  y  $\dot{y}=v_y$  se formó el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\frac{d(\vec{y})}{dt} = \frac{d(x, y, v_x, v_y)}{dt} = (v_x, v_y, \frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} + 2\alpha \frac{(x)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} + 2\alpha \frac{(y)}{(x^2+y^2)^2}) = f(\vec{y})$$

...con lo cual se definió la base para poder ejecutar cada uno de los métodos.

Comenzando para el caso de  $\alpha=0$  se implementó el **Método de Euler** basado en la siguiente iteración para el vector  $\vec{y}$  :

$$y_{n+1} = y_n + (dt) * f(\vec{y}_n)$$

De esta forma es que se irían creando las 4 componentes del vector

$\vec{y}=(x, y, v_x, v_y)$  siguiendo un paso arbitrario definido  $dt$  que en este caso fue de 0.12 s.

Para el **Método de Runge-Kutta de orden 4** se calculó  $y_{n+1}$  con un paso de 0.12 s como:

$$\begin{aligned} (\vec{K}_1) &= f(\vec{y}_n) \\ (\vec{K}_2) &= f(\vec{y}_n + \frac{(\vec{K}_1)}{2} dt) \\ (\vec{K}_3) &= f(\vec{y}_n + \frac{(\vec{K}_2)}{2} dt) \\ (\vec{K}_4) &= f(\vec{y}_n + \vec{K}_3 dt) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2(\vec{k}_2) + 2(\vec{k}_3) + \vec{k}_4) dt$$

Para los 2 métodos de verlet utilizados se necesitó trabajar solo con los 2 últimos componentes del vector  $\vec{y}$ , es decir con las aceleraciones dependientes explícitamente de las posiciones e implícitamente del tiempo ( $\vec{a}_n = (f_x, f_y)$ )

En primer lugar, por el lado del **Método de Verlet velocity** se siguieron los siguientes pasos:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \vec{v}_n dt + \frac{1}{2} \vec{a}_n dt^2$$

donde  $\vec{y}_n$  y  $\vec{v}_n$  eran los vectores  $n$ ésimos de dos coordenadas para las posiciones y velocidades, respectivamente e  $\vec{y}_{n+1}$  son las posiciones  $n$ ésima más 1 tanto en x como en y.

Para el caso de las velocidades, se realizó algo similar:

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \frac{1}{2}(\vec{a}_n + \vec{a}_{n+1}) dt$$

donde  $\vec{v}_n$  eran las velocidad  $n$ ésimas en sus componentes x e y,  $\vec{a}_n$  y  $\vec{a}_{n+1}$  eran las aceleraciones  $n$ ésimas y  $n$ ésimas más 1 en su componentes x e y, y finalmente  $\vec{v}_{n+1}$  que eran las velocidades  $n$ ésimas más 1 en sus 2 componentes también. Cabe destacar que el paso utilizado también fue de 0.12 s.

Para el **Método de Verlet 2 alternativo** se necesitaban 2 “puntos” para poder iniciar la iteración. Es por eso que aparte de la condición inicial, se ocupó Runge-Kutta de orden 4 para encontrar la siguiente iteración con el fin de poder realizar este método. (pudo haberse calculado de otra forma el punto siguiente a la condición inicial de todas formas, como por ejemplo, con taylor y considerando



segundas derivadas)

Luego, se calcularon los vectores velocidad y posición de la siguiente forma con un paso  $dt$  de 0.12 s :

$$\vec{v}_n = \frac{(\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_{n-1})}{2dt}$$

$$\vec{y}_{n+1} = 2\vec{y}_n - \vec{y}_{n-1} + \vec{a}_n dt^2$$

donde  $\vec{y}_{n+1}$  y  $\vec{v}_n$  son los vectores posición  $n$ ésima más 1 y velocidad  $n$ ésima, respectivamente.

Y finalmente, para el desarrollo de la pregunta con alfa distinto de cero ( $10^{(-2.375)}$ ) se decidió ocupar el Método de Verlet velocity simplemente por probar. Para el cálculo de la velocidad angular de precesión en forma resumida lo que se realizó fue, en primer lugar, encontrar el perihelio ( punto más cercano en el que se encuentra un cuerpo de una estrella a la cual orbita en una elipse) mediante una simple resta entre el valor del radio orbital y el radio inicial en cada instante y ver que si se diferenciaban muy poco (considerando como valor de referencia  $r(t=0)=10[m]$ ) entonces tenderían a ser los perihelios de la elipse. ( no eran únicos los puntos ya que justamente la teoría predice ésta precesión de las órbitas provocando que se corran los puntos) La fórmula ocupada para esto fue:

$$r_n = \sqrt{(x_n^2 + y_n^2)}$$

y ocupamos una tolerancia para la diferencia entre los radios de  $b=0.009[m]$ . Luego, cuando se encontraron a los radios que cumplían esa condición, se logró lo que se esperaba: “ Sólo falta estudiar esos puntos en sus coordenadas y relacionar trigonométricamente éstas con los ángulos con los cuales precesa la órbita del cuerpo”. Es así finalmente, como se definió el ángulo phi en el cual variarían las órbitas :

$$\phi = \arctan(dy/dx)$$

ángulo con el cual se lograría obtener un arreglo con las velocidades angulares de precesión permitidas, y puesto que se esperaba que fuese más o menos constante a lo largo de los años, es que se estudió la moda del arreglo de las velocidades y se obtuvo un valor de 0.029 rad/s.

A modo de acotación importante, para cada Método se graficó la energía en función del tiempo también( cuando se dice energía, quiere decir energía tanto total, como cinética y potencial), donde la energía total se calculó simplemente como la suma de la energía cinética y potencial gravitatoria. El fin de esto era ver que la energía total efectivamente tendía a ser constante y negativa para un sistema de órbita elíptica. La fórmula ocupada para cada energía fue:

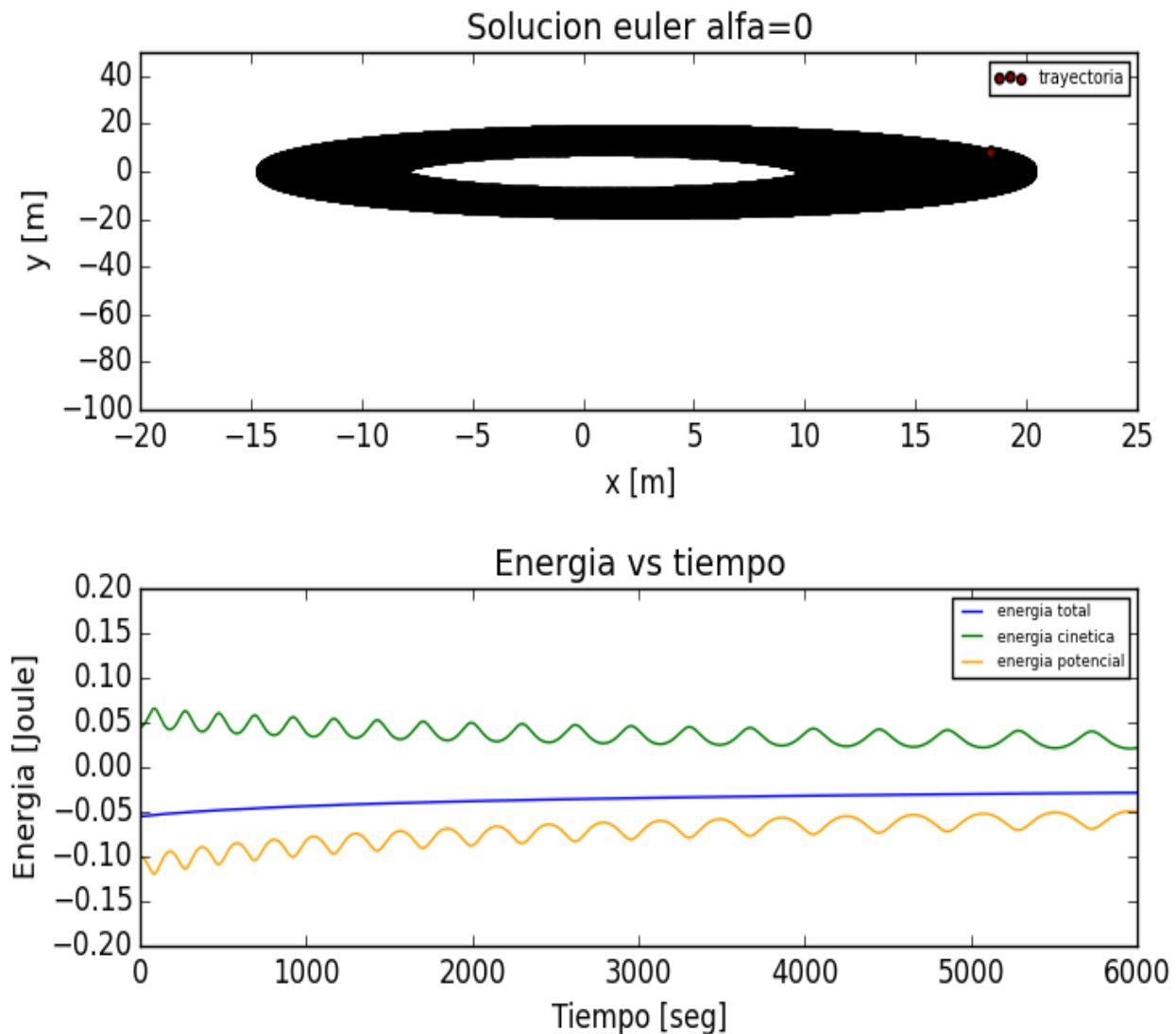
$$E_k = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$$

$$E_p = \frac{-GMm}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + (\alpha) \frac{GMm}{(x^2 + y^2)}$$

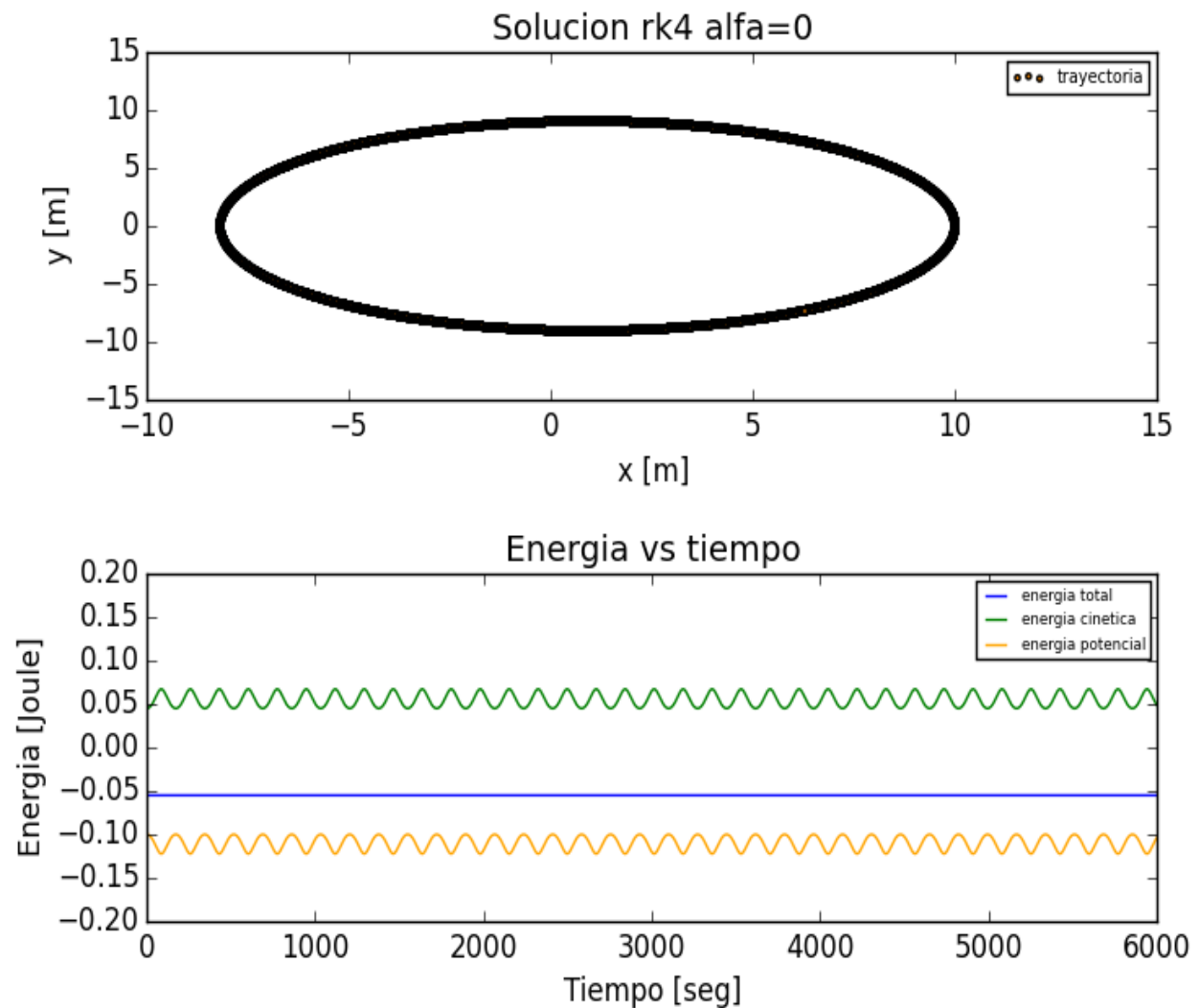
$$E_T = E_k + E_p$$

## 2.3 Resultados

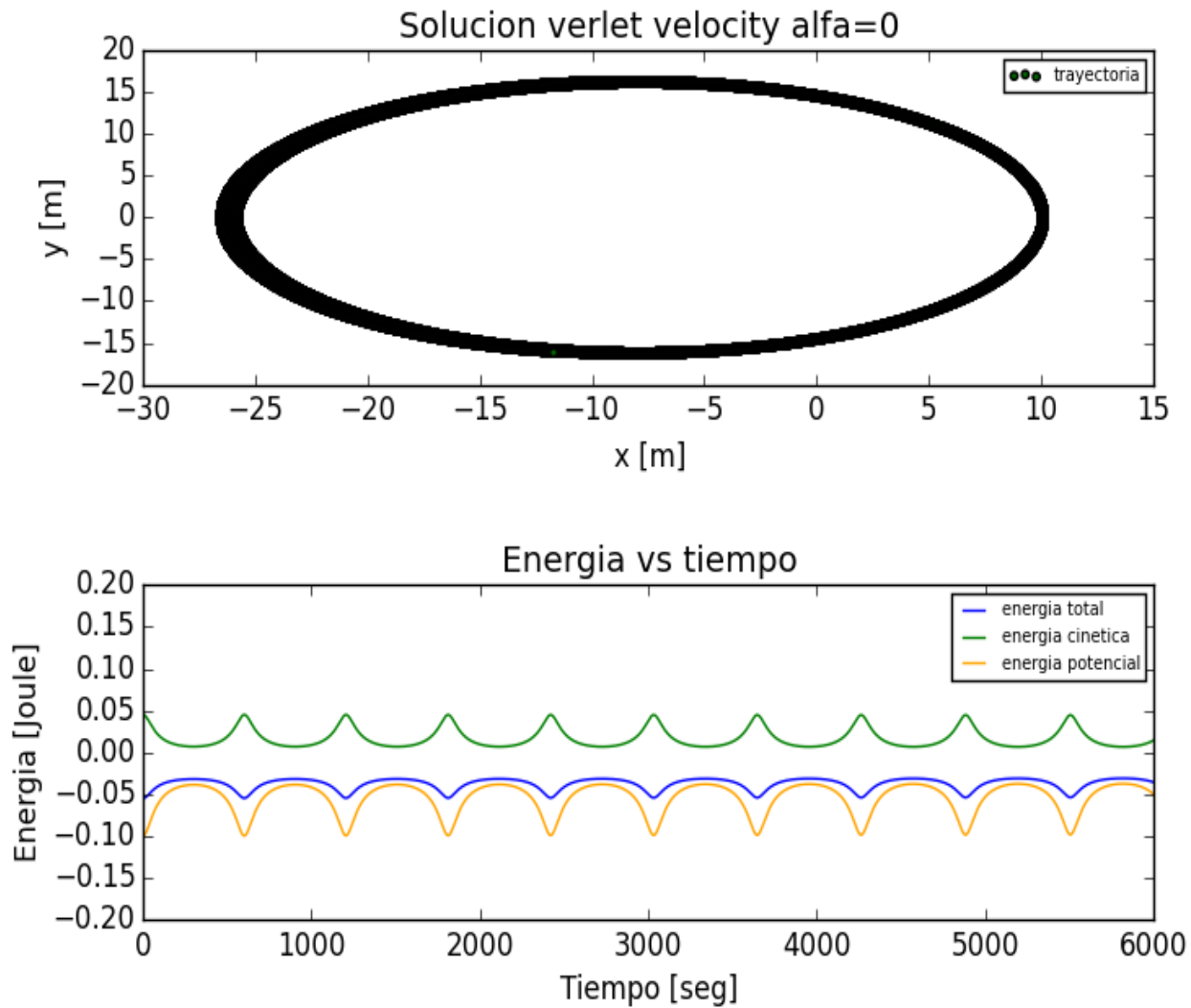
Los gráficos de los 4 Métodos que se usaron para  $\alpha=0$  se anexan a continuación, mientras que para  $\alpha$  no nulo se usó el Método de Verlet velocity al cual se le añadió la posición del perihelio aproximada.



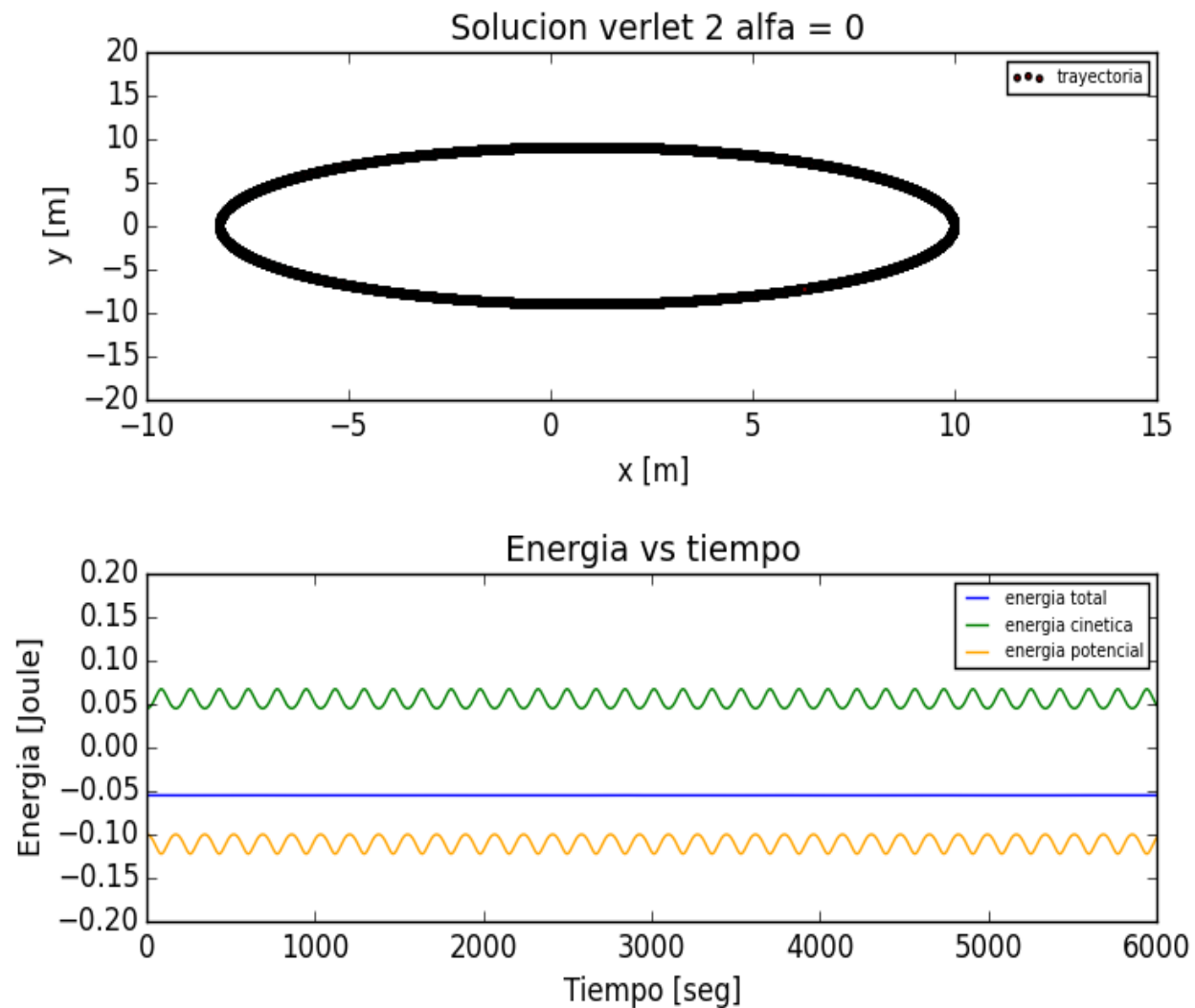
**Figura1.** Gráficos de energía v/s tiempo y de la trayectoria (y v/s x) del cuerpo de masa=1 kg alrededor del sol de  $M=1\text{kg}$  según el Método de Euler para  $\alpha=0$  y un paso de 0.12 s.



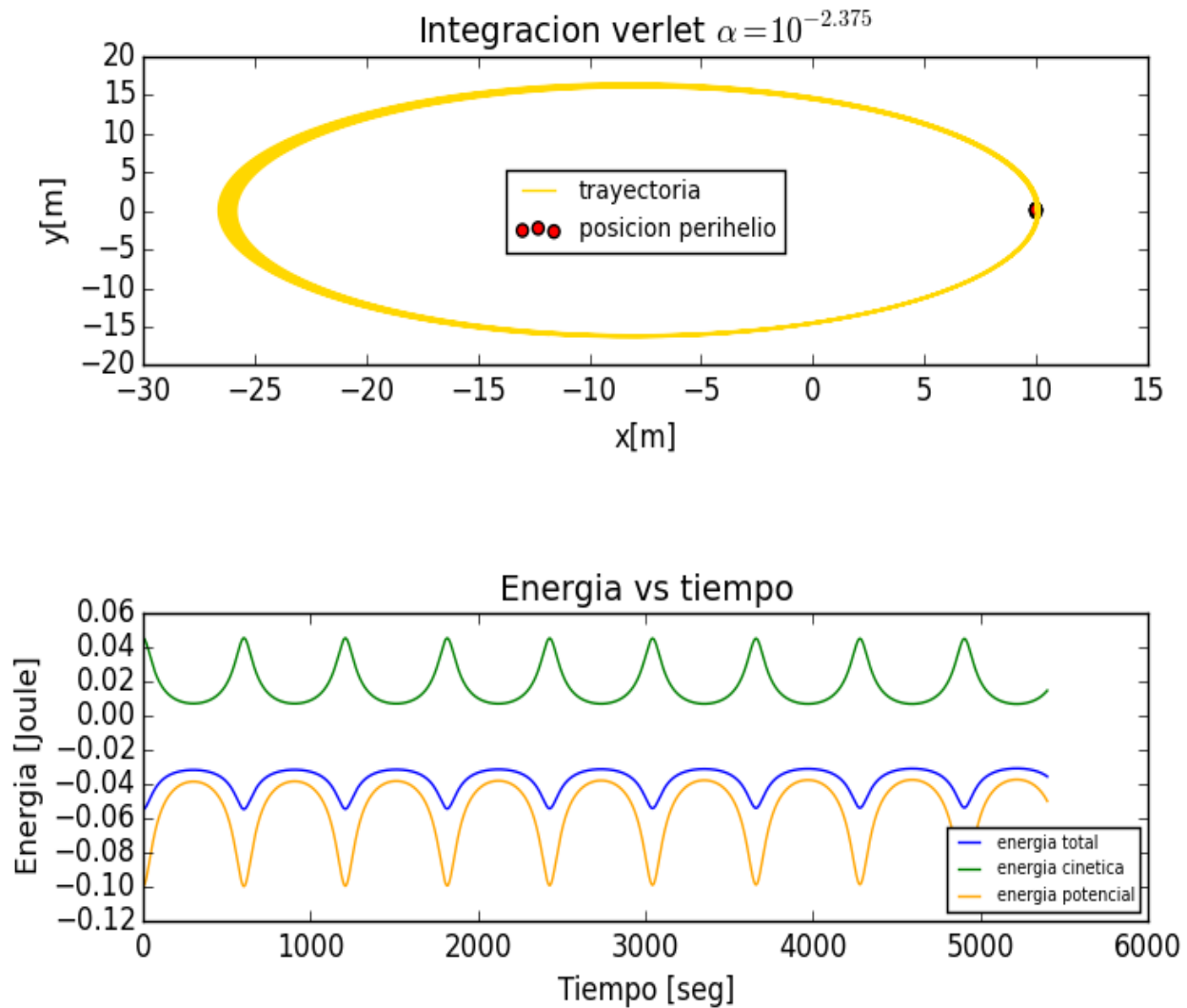
**Figura2.** Gráficos de energía v/s tiempo junto a la trayectoria (y v/s x ) del cuerpo de masa =1Kg alrededor del sol de  $M=1\text{kg}$  según el Método deRunge-Kutta de orden 4 para  $\alpha=0$  y un paso de 0.12 s.



**Figura3.** Gráficos de energía v/s tiempo y de la trayectoria (y v/s x) del cuerpo de masa=1 kg alrededor del sol de  $M=1\text{kg}$  según el Método de Verlet velocity para  $\alpha=0$  y un paso de 0.12 s.



**Figura4.** Gráficos de energia v/s tiempo y de la trayectoria (y v/s x) del cuerpo de masa=1 kg alrededor del sol de  $M=1\text{kg}$  según el Método de Verlet 2 para  $\alpha=0$  y un paso de 0.12 s.



**Figura5.** Gráficos de energia v/s tiempo y de la trayectoria (y v/s x) del cuerpo de masa=1 kg alrededor del sol de  $M=1\text{kg}$  según el Método de Verlet velocity para alfa no nulo y un paso de 0.135 s .Además se añade la posición del perihelio de la órbita del cuerpo.

## 2.4 Conclusión

Se pudo concluir de esta parte que de los 4 métodos que resolvieron el problema para  $\alpha = 0$  el que más alejado estuvo de lo teórico fue el Método de Euler, esto se produjo debido a que el método tenía muchos saltos (truncaciones, tiene error de orden 2) y eso se vio reflejado tanto en la trayectoria (aparecen demasiadas órbitas y eso no era lo que predecía la teoría newtoniana, deberían haber sido muy tenues) como en la energía a través del tiempo (debería haberse mantenido constante la energía total cercano a un valor de  $-0.05$  [J], sin embargo, incluso llegó a aumentar, demostrando que no era un método muy preciso). Por otro lado, al haber observado los otros 3 métodos: Verlet 2, Verlet velocity y Rk4 se pudo observar que en general todos convergen a unas órbitas bastante planas y con poca precesión, que era justamente lo que se esperaba.

Que la energía total fuese negativa en todos los métodos era indispensable a la comprobar la teoría y efectivamente, aunque Euler se alejó un poco en los gráficos, estos nunca hicieron a la energía positiva (lo cual hubiese significado escape de parte del cuerpo del sistema solar).

Continuando con el análisis de los resultados, se pudo apreciar que con un paso no tan chico, ya tanto Rk4 (error de orden 5) como Verlet 2 (error de orden 4 y 2) convergen a casi lo mismo, indicando que era el resultado al que se debería haber llegado. Por otro lado, el método de Verlet velocity (error de orden 4) le costó bastante converger a una energía, quizá porque el paso no fue el apropiado, pero de todas formas se acercó más que Euler. Al disminuirle el paso a cada uno de los gráficos (no se hizo en el trabajo pero si se probó) la precisión de todos, excepto de Euler, que seguiría divergiendo, aumentaría notoriamente.

Con respecto a la precesión estudiada en la última parte del trabajo, también se pudo deducir que la corrección establecida por Einstein a la ecuación newtoniana efectivamente se ajusta a lo teórico, y que los planetas como Mercurio por ejemplo, se rigen exactamente por estas ecuaciones y reglas físicas de la relatividad general.



