

*Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas*

# ***MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA CIENCIA Y LA INGENIERÍA***

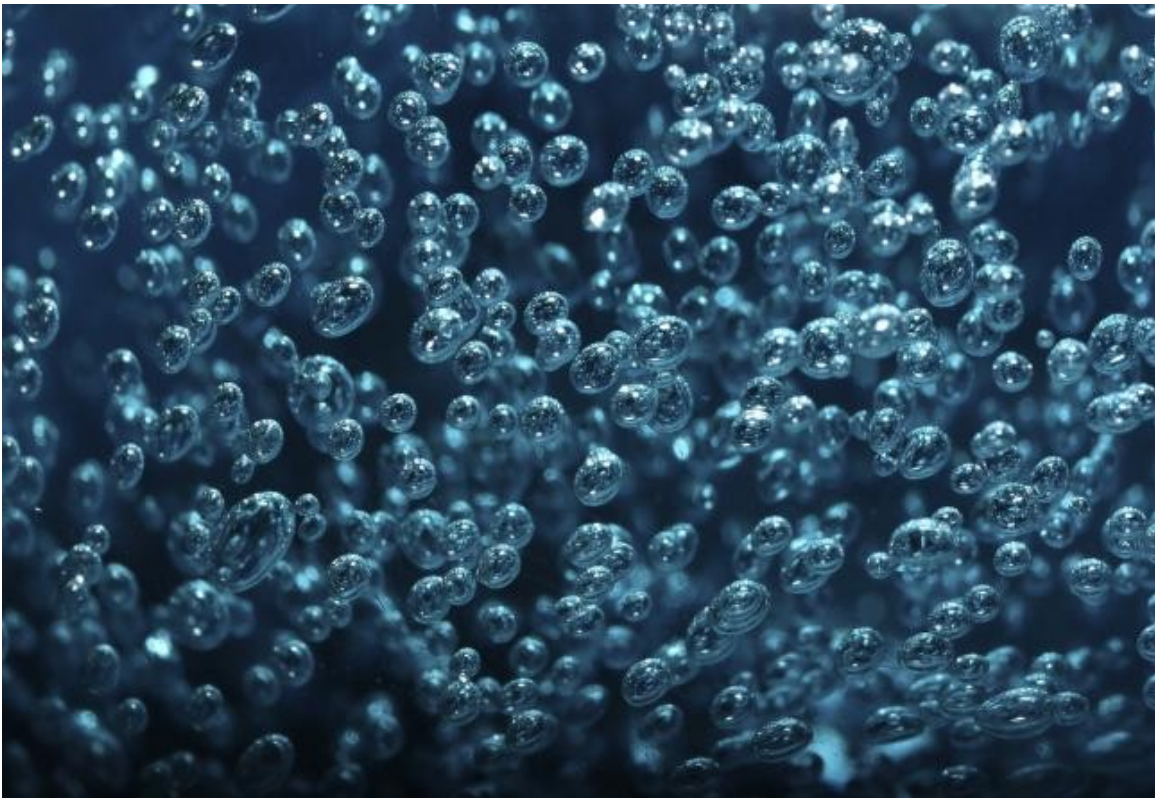
## ***TAREA # 7***

### ***“ El comportamiento de un gas ideal ”***

*Benjamín Venegas Ríos*

*Rut: 18956375-2*

*11 de noviembre de 2015*



## Resumen

*En este trabajo se estudió el comportamiento de un fluido sometido a ciertas condiciones físicas, tales como temperatura fija, gravedad nula y sin viscosidad. El estudio de un gas ideal como este, requería métodos numéricos para poder iterar e integrar las ecuaciones indispensables, las que en este caso venían dadas por la densidad  $\rho(x,t)$  y la velocidad  $v(x,t)$ . A continuación se tratan las partes trabajadas.*

### 1.1 Introducción

*Para un fluido compresible en 1 dimensión, sin gravedad ni viscosidad y con temperatura constante, las ecuaciones que lo rigen vienen dadas por las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P &= A\rho^\gamma\end{aligned}$$

*Donde la última es la ecuación de estado. Con valor  $\gamma = 5/3$  ( constante de coeficiente de dilatación adiabática para gas ideal monoatómico) con  $A(x \leq 1/3) = 4$  y  $A(x > 1/3) = 1$ .*

*Estas expresiones matemáticas definen a un fluido en las condiciones previamente mencionadas.*

*Ahora, el problema a resolver consistía en integrar las ecuaciones para  $\rho(x,t)$  y  $v(x,t)$  ocupando el método de las características visto en clase. Cabe destacar, que en  $x=1/3$  de acuerdo a la estructura de la ecuación de gas ideal, se esperaba que el flujo se reflejara y/o transmitiera provocando que cambiase sus propiedades*

esenciales como su densidad  $\rho(x,t)$  o velocidad  $v(x,t)$  promedio del fluido( la cual difiere ,en general, de la velocidad local del fluido)

Por otra parte, además de las ecuaciones anteriores se analizó el problema con condiciones de borde (para  $x$  entre 0 y 1) e iniciales. En este caso se trabajó con las siguientes:

$$v(0,t) = 0$$

$$v(1,t) = 0$$

$$\rho(x > 0.1, 0) = 1$$

$$\rho(x \leq 0.1, 0) = 1 + 0.0RRR(1 + \cos(10\pi x))$$

donde RRR son los últimos 3 dígitos del Rut (antes del dígito verificador). Con esto se pedía integrar las ecuaciones hasta que el tiempo alcance al menos un valor de 1.2 al centro del intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . Otro punto importante que se desprendía de estas condiciones era que en  $t=0$  la densidad se distribuiría de forma distinta dependiendo del intervalo de  $x$ . Esto hablaba de la sobredensidad de un sector del tubo que contenía al gas en cuestión.

Luego, el problema pedía discretizar el espacio entre 0 y 1 con 10 mil trazos iguales. Sin embargo, por temas de tiempo de ejecución se decidió rebajar considerablemente el valor a 100 para optimizar la rapidez el programa. (Se espera comprensión en este punto ya que fue un factor a considerar para los resultados obtenidos)

Dicho esto, el objetivo de este trabajo consistía en 2 partes , principalmente:

1) La primera era dibujar las funciones  $\rho$  y  $v$  como función de  $x$  para  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, \text{ y } 1.0$ . Para cada uno de esos tiempos se pedía hacer un solo plot que combinase  $\rho(x)$  y  $(1 + v(x))$

2) Para el plano  $(x, t)$ , se pedía dibujar las superficie  $\rho(x, t)$  y  $v(x, t)$  de modo que se pudiese ver la reflexión que ocurría en  $x = 1/3$ . Esto se podía hacer usando curvas de nivel o ploteos de superficie, pero para este trabajo se decidió ocupar ploteos en 2D con la función de colorbar que simularía la otra dimensión para  $\rho(x, t)$  y  $v(x, t)$ .

## 2. Procedimiento

Para resolver el problema se partió por las ecuaciones señaladas en la parte anterior. El sistema de ecuaciones se escribió de la siguiente forma matricial :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho \\ c^2/\rho & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = 0$$

y calculando los valores propios de la matriz A ( para que la solución no fuese obvia  $\rho(x, t) = v(x, t) = 0$  ) :

$$A = \begin{pmatrix} v & \rho \\ c^2 & v \end{pmatrix} \quad \text{----->} \quad \det \begin{pmatrix} v - \alpha & \rho \\ c^2/\rho & v - \alpha \end{pmatrix} = 0$$

sí y sólo si :

$$(v - \alpha)^2 = c^2$$

con lo cual, las soluciones para los valores propios quedaban de la forma:

$$\alpha = v \pm c$$

$$a = v - c$$

*Y junto con esto, se podían definir las curvas características ( las 2 familias ):*

$$\delta x = (v + c) \delta t$$

$$\delta x = (v - c) \delta t$$

*donde cada uno de las ecuaciones representaba una familia de curvas características asociadas a cada valor propio.*

*Luego, ocupando las primeras ecuaciones nuevamente se obtuvieron 2 ecuaciones más para cada familia de curvas:*

*Para*

$$\delta x = (v + c) \delta t$$

*se obtuvo:*

$$\rho \delta v + c \delta \rho = 0$$

*Mientras que para*

$$\delta x = (v - c) \delta t$$

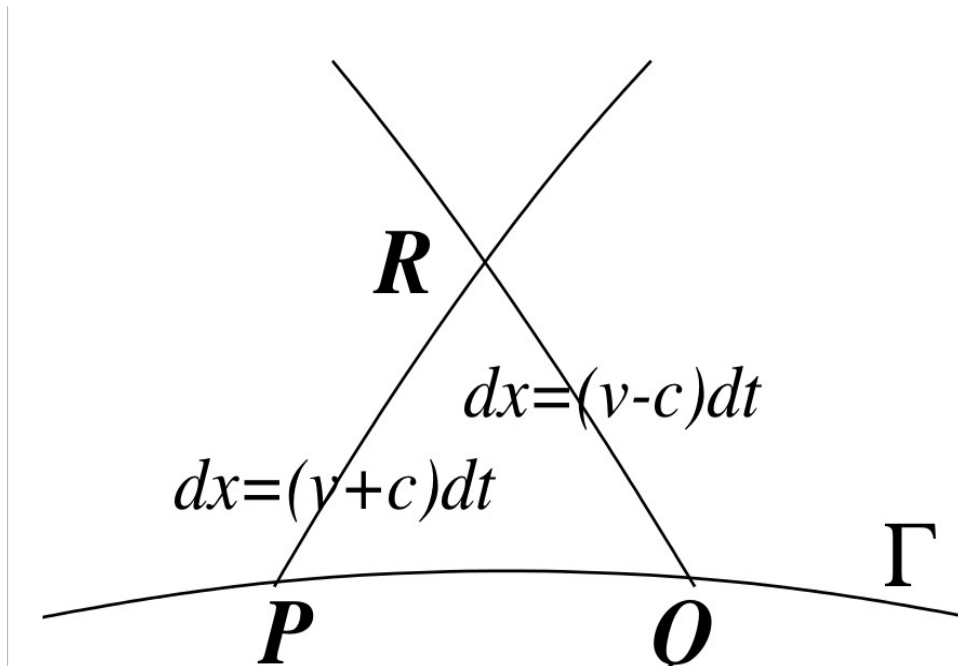
*se obtuvo:*

$$\rho \delta v - c \delta \rho = 0$$

*Con estas 4 ecuaciones es que se procedió a integrar numéricamente para así obtener los valores de  $\rho(x, t)$  y  $v(x, t)$ .*

¿ De qué forma se integró?

Tal como se mencionó en clases se trazó una recta( distinta a las curvas características) con las condiciones de borde e iniciales , de tal forma que al definir 2 puntos P y Q cualquiera de la recta con ciertos valores  $(x_p, t_p, v_p, c_p, \rho_p)$  y  $(x_q, t_q, v_q, c_q, \rho_q)$ , respectivamente, se pudiese obtener otro punto R  $(x_r, t_r, v_r, c_r, \rho_r)$  . Este proceso se realizaría una y otra vez para  $x$  entre 0 y 1. A continuación, en la figura1, se muestra una ilustración que aclara el proceso de obtener el punto R a partir de la curva que contiene a los puntos P y Q



**figura1.** Ilustración simple del proceso de iteración a realizar para ir obteniendo “puntos R” a partir de las curvas características.

De esta manera, en esta parte, resulta fundamental entender que se ocuparon las siguientes ecuaciones para calcular los “puntos R”:

$$x_r - x_p = (v_p + c_p)(t_r - t_p)$$

$$x_r - x_q = (v_q + c_q)(t_r - t_q)$$

$$\rho_p(v_r - v_p) + c_p(\rho_r - \rho_p) = 0$$

$$-\rho_q(v_r - v_q) + c_q(\rho_r - \rho_q) = 0$$

Donde se tenían 4 incógnitas ( $x_r$ ,  $t_r$ ,  $v_r$ ,  $c_r$ ,  $\rho_r$ ) y 4 ecuaciones.

**Nota :**

**Existía un procedimiento de mejor precisión en base a trabajar con el n-ésimo punto R para obtener el n-ésimo más 1 punto R ocupando convergencia, sin embargo, en este trabajo se realizó de otra manera.**

Sabiendo esto, se continuó despejando cada de las incógnitas obteniéndose los siguientes resultados:

**(a)**

$$b = 1 + \frac{(c_q - v_q)}{(v_p + c_p)}$$

$$m = x_q + (v_q - c_q)(t_p - t_q) - \frac{(v_q - c_q)x_p}{(v_p + c_p)}$$

con lo cual :

$$x_r = \frac{m}{b}$$

**(b)**

$$d = t_q(v_q - c_q) + x_p - x_q - t_p(v_p + c_p)$$

$$a = v_q - c_q - v_p - c_p$$

con lo cual:

$$t_r = \frac{d}{a}$$

**(c)**

$$f = \rho_p(v_p + c_p + c_q - v_q)$$

$$e = c_q \frac{\rho_p}{\rho_q} + c_p$$

con lo cual:

$$\rho_r = \frac{f}{e}$$



**(d)**

$$g = c_q(\rho_r) + \rho_q(v_q - c_q)$$

$$h = \rho_q$$

con lo cual:

$$v_r = \frac{g}{h}$$

**(e)**

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

con lo cual:

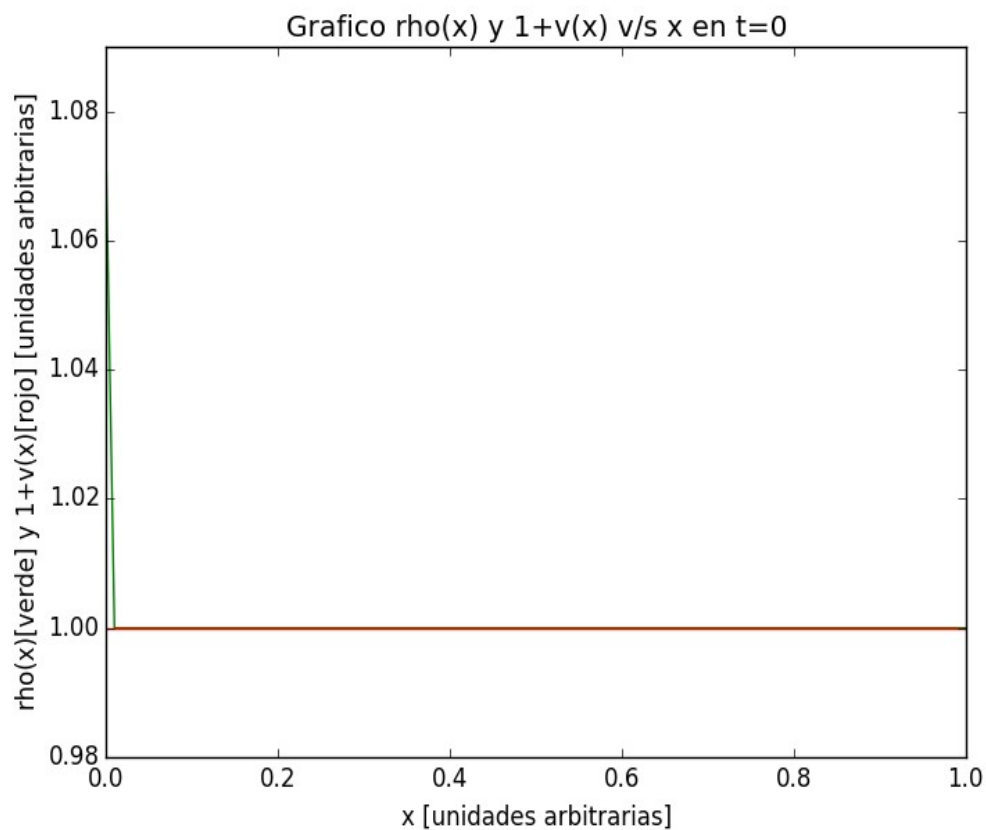
$$c = \sqrt{\left(\gamma \frac{p}{\rho}\right)}$$

**Nota:**

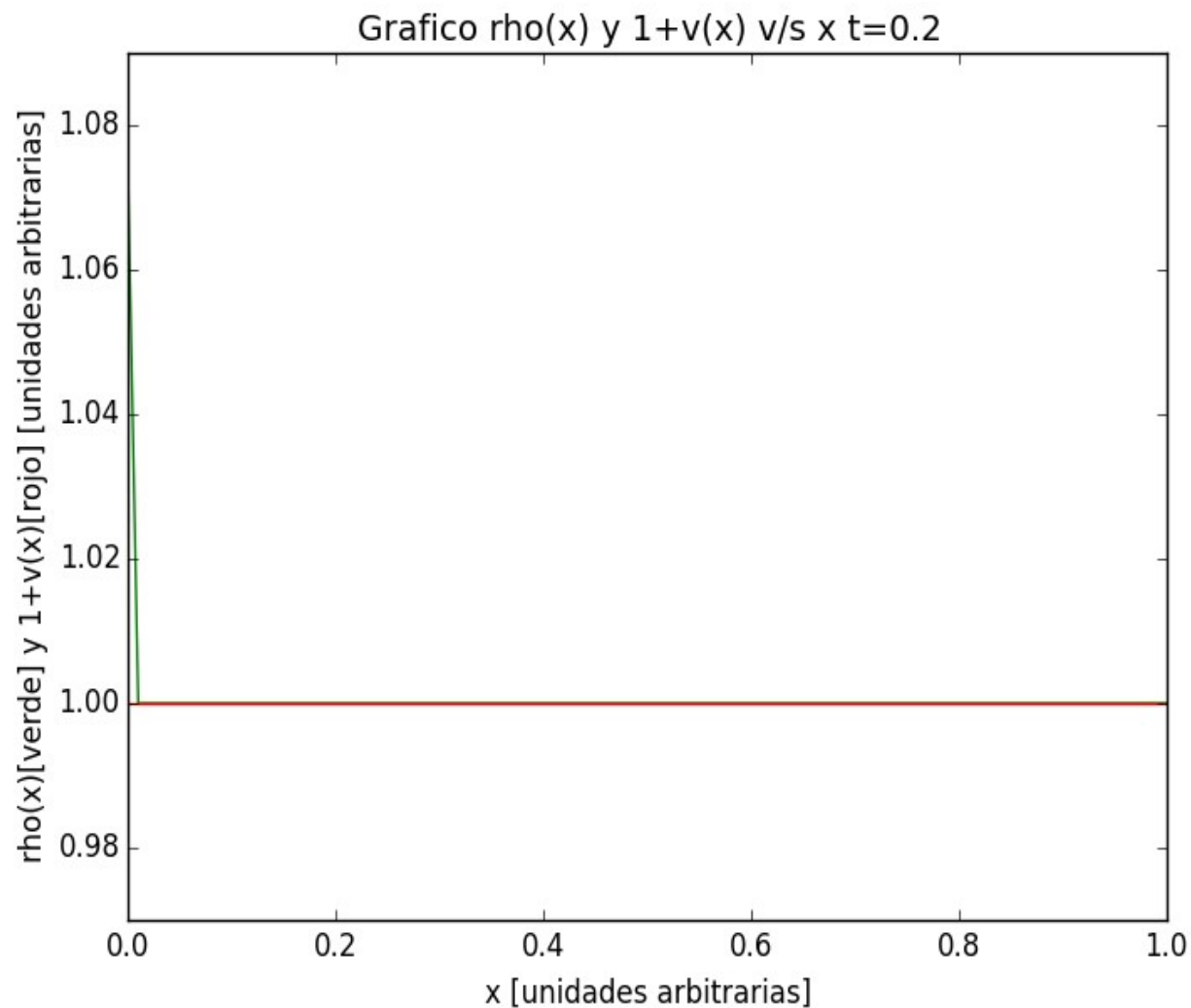
**Es importante mencionar, que en la discretización ocupada, la secuencia de puntos  $R$  obtenidos definían una curva  $\Gamma 1$  que sería la nueva curva a partir de la cual se construiría una curva  $\Gamma 2$ . Además de esto, la iteración se consideró indistinguible al pasar de tiempos pares a impares con el fin de optimizar el código y que compilara más rápido. Más adelante se explicarán las consecuencias de haber asumido esto.**

Entonces, utilizando éste método de las características, de ir escalando en las rectas formadas y añadiendo las condiciones iniciales y de borde que se indicaron al principio, es como se dio inicio al plot de los gráficos.

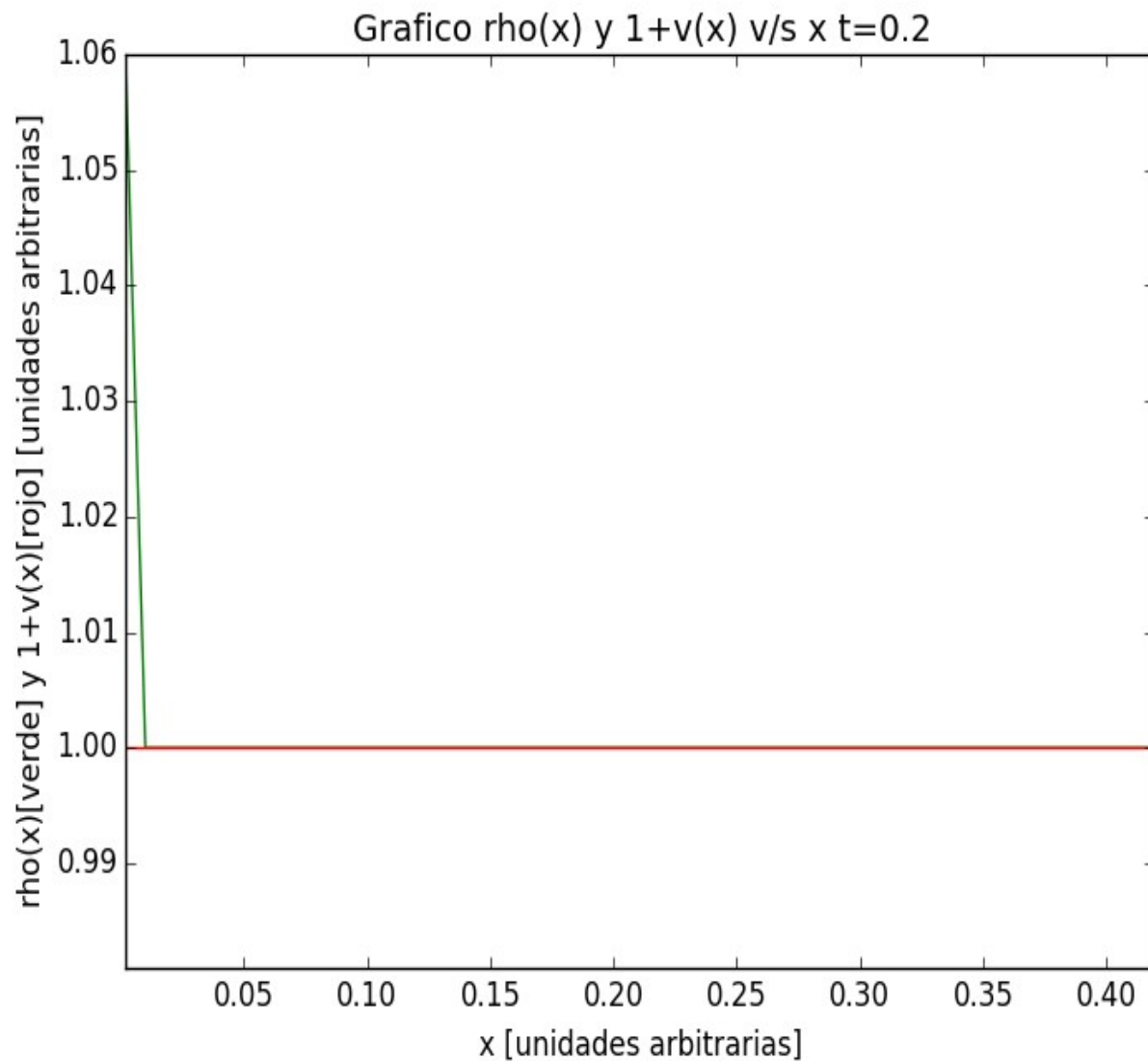
### 3.Resultados



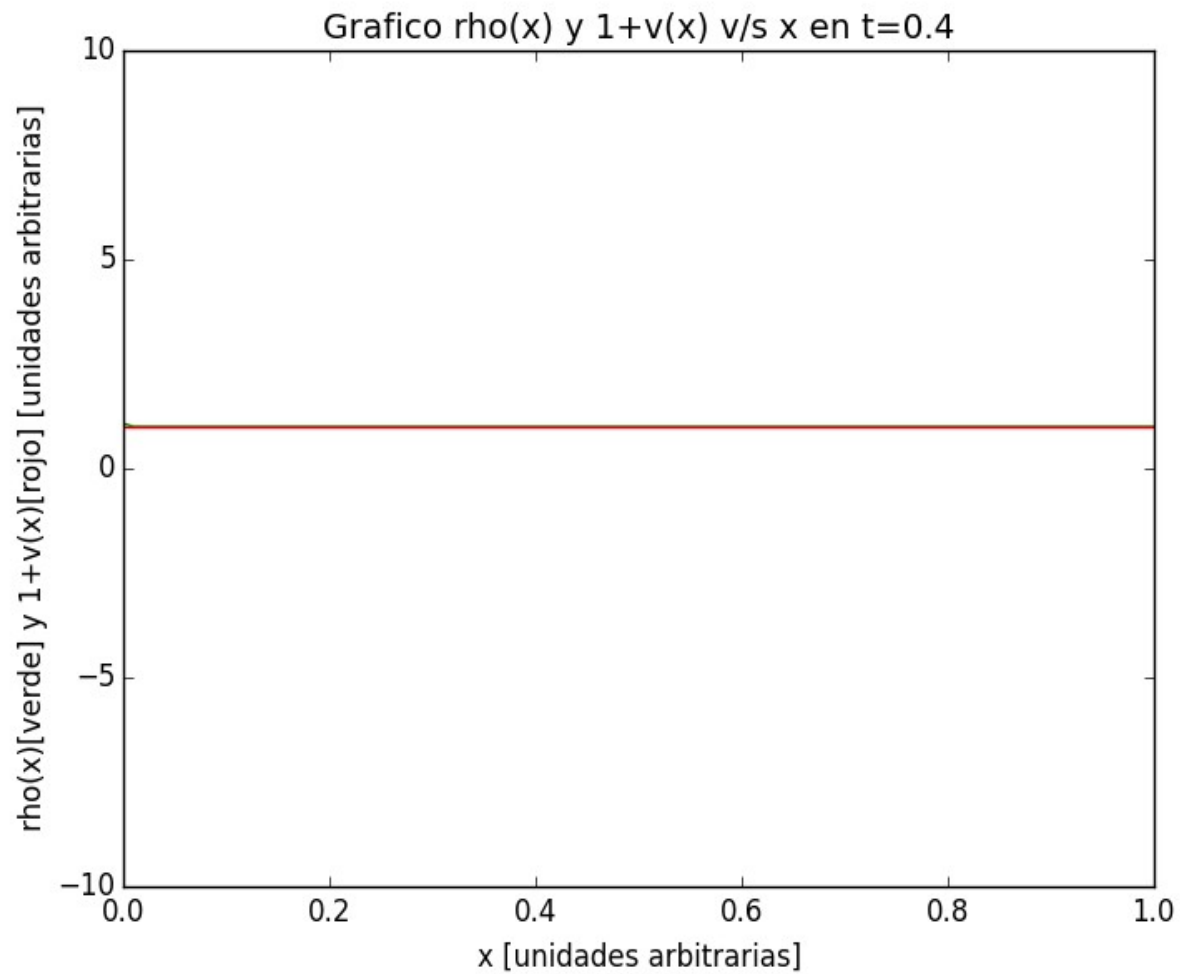
**figura2.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.0$  seg.



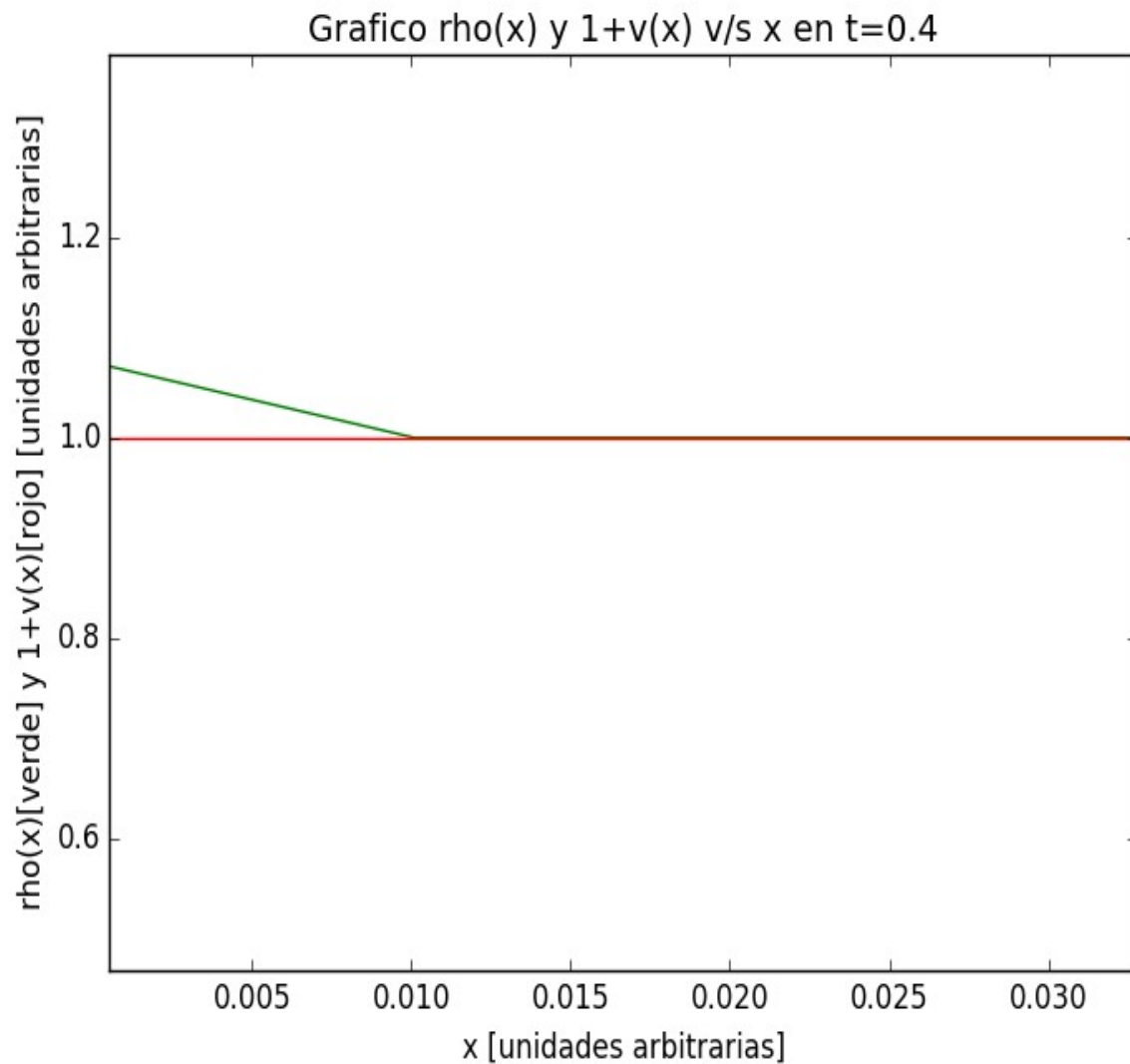
**figura3.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.2$  seg.



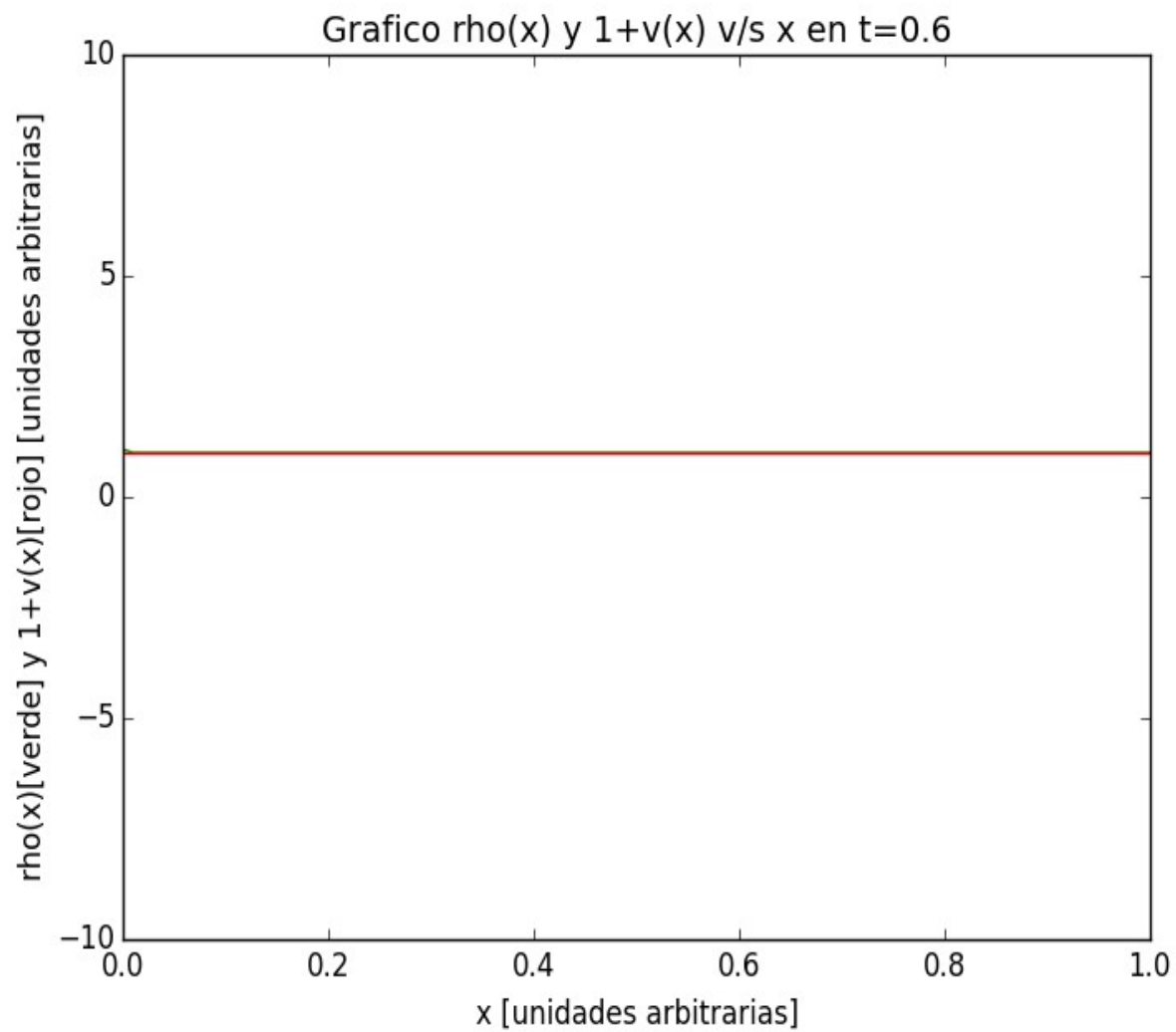
**figura4.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.2$  seg realizado con zoom en intervalo  $0 < x < 0.45$ .



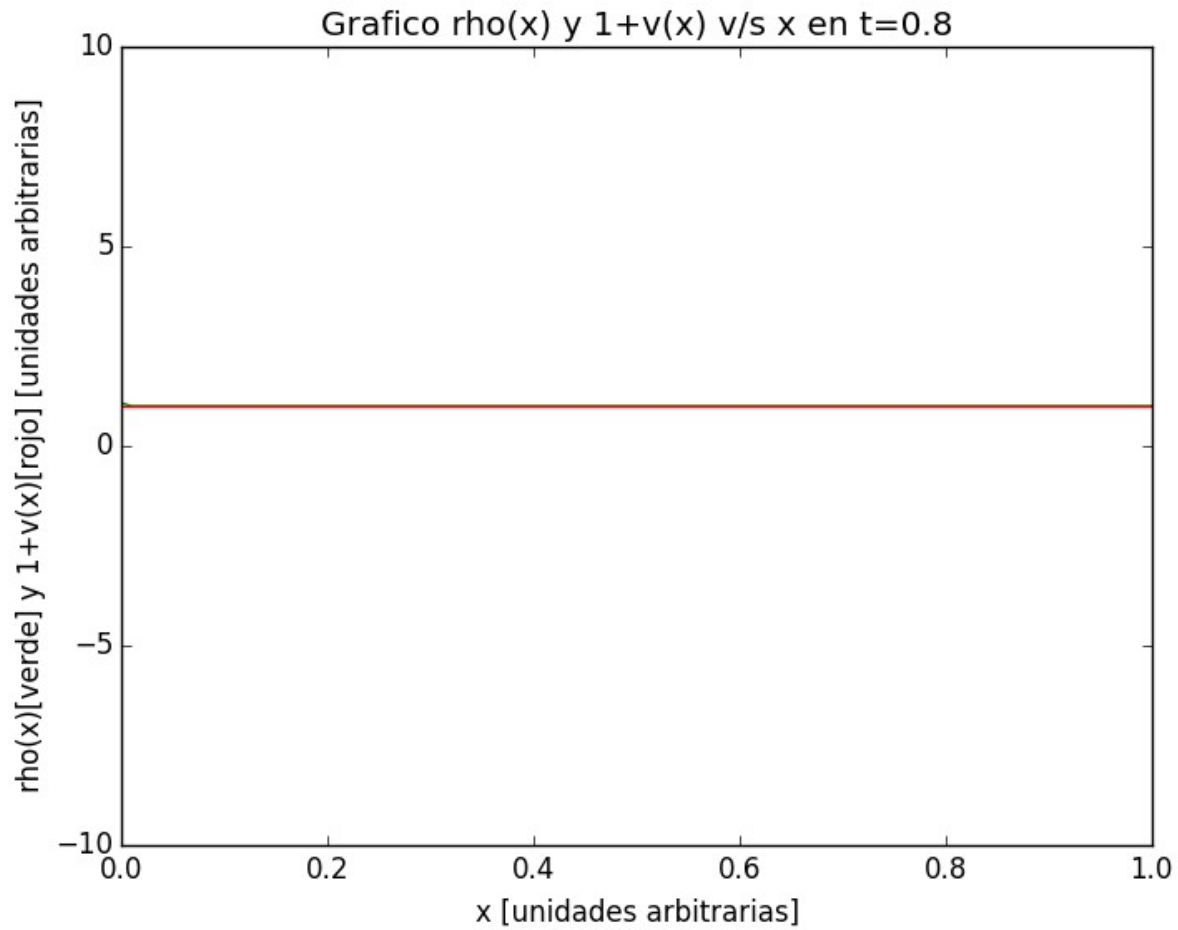
**figura5.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.4$  seg.



**figura6.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.4$  seg realizado con zoom en intervalo  $0 < x < 0.03$ .

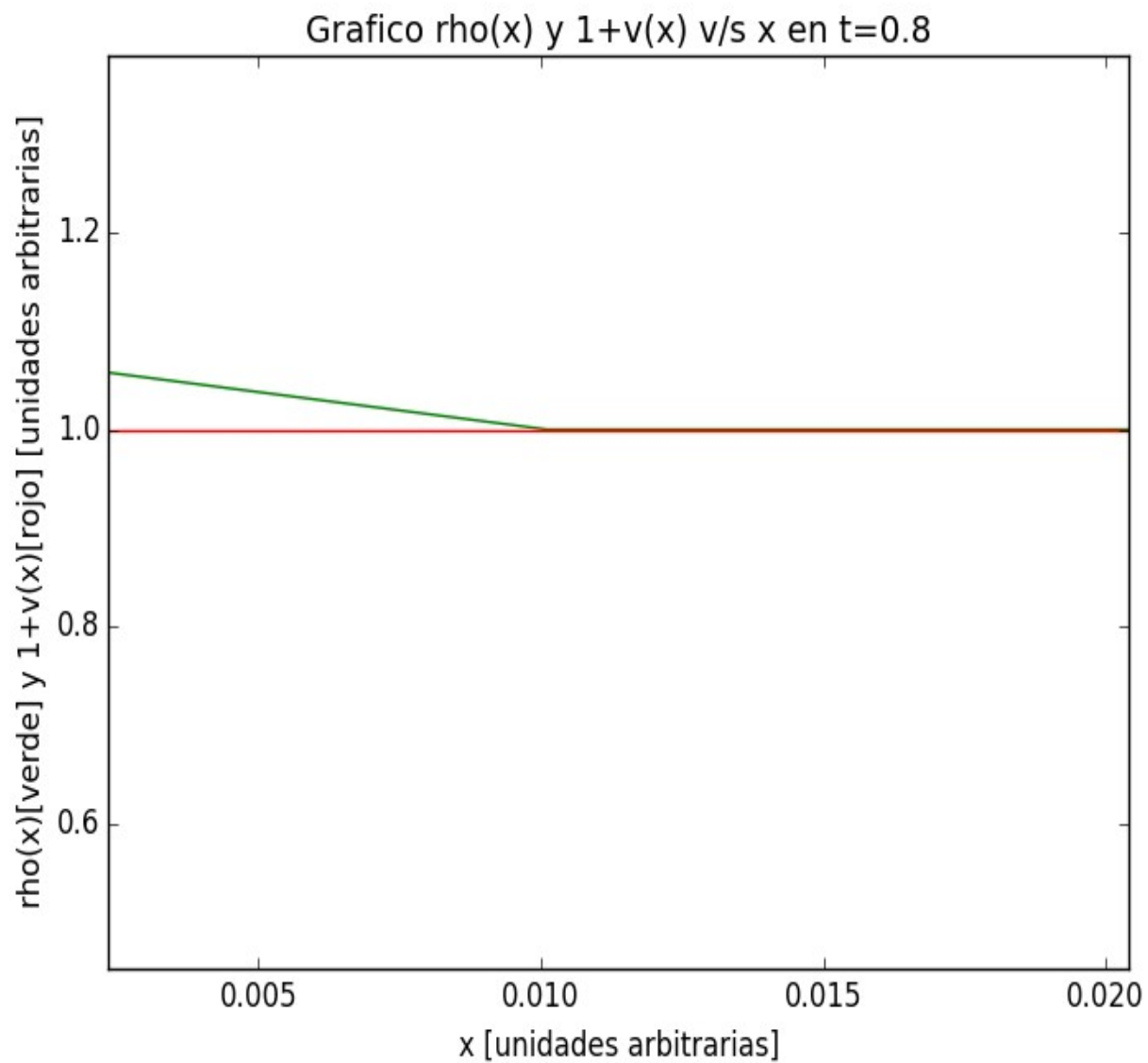


**figura7.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.6$  seg.

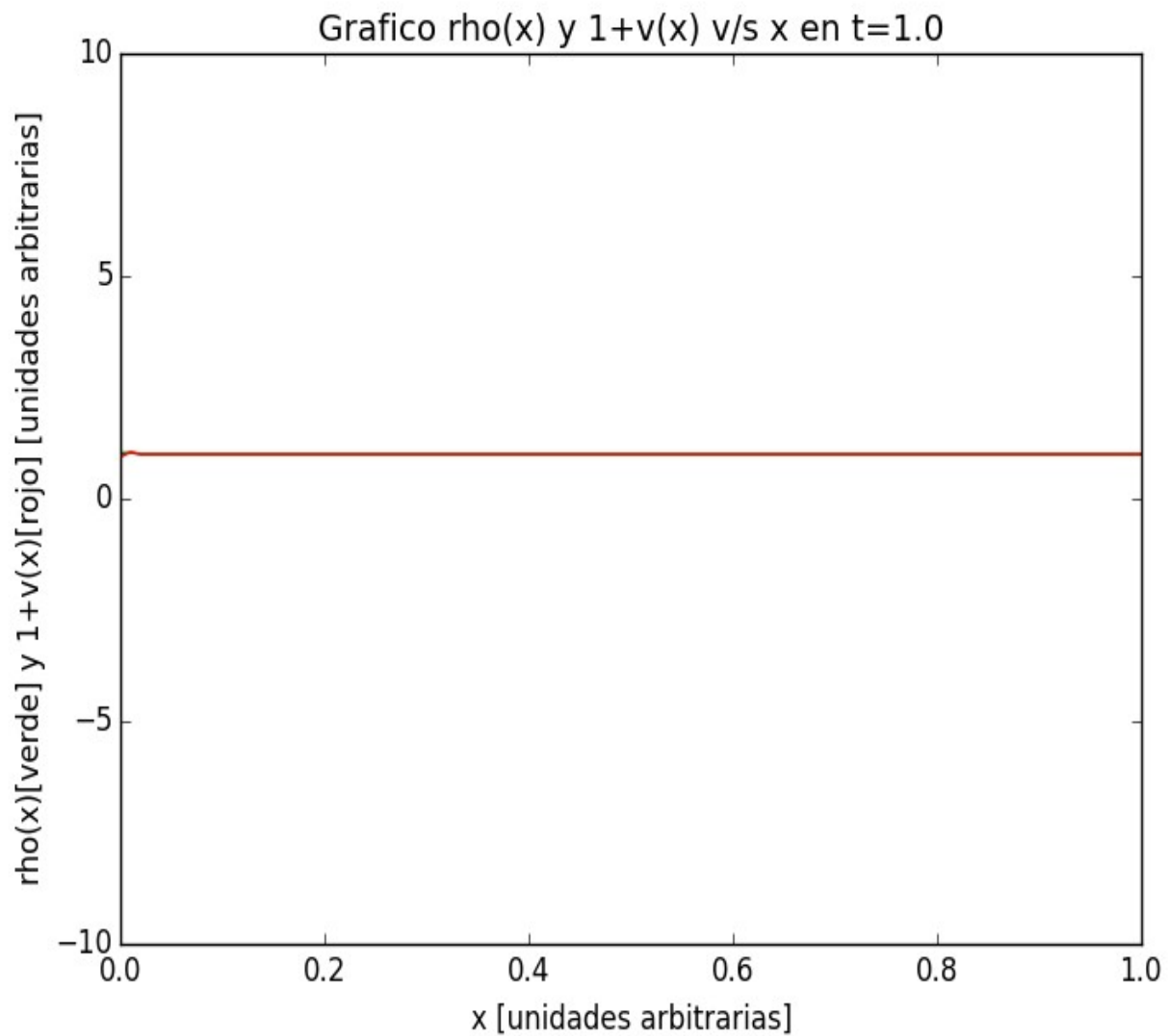


**figura8.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.8$  seg.

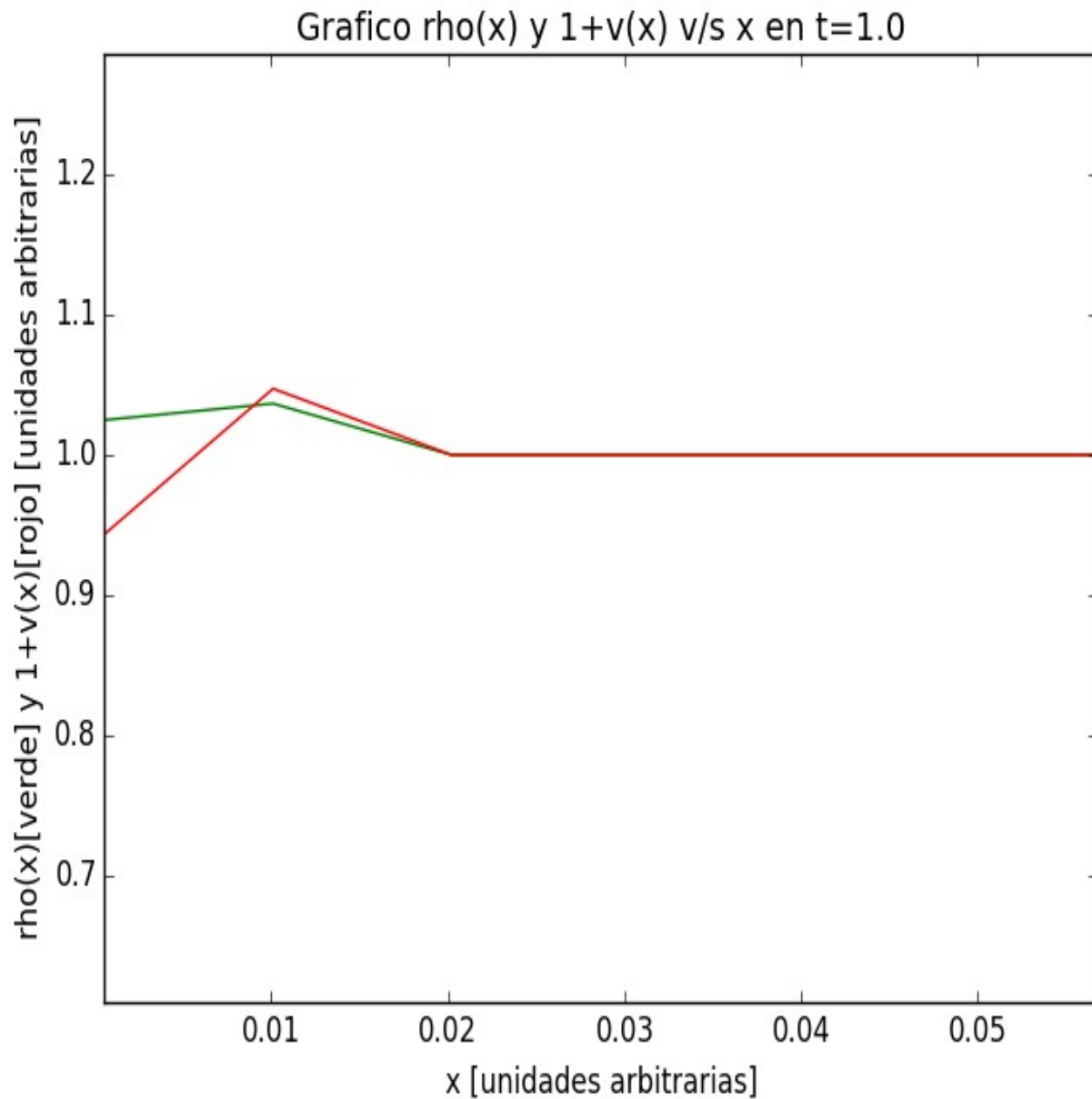




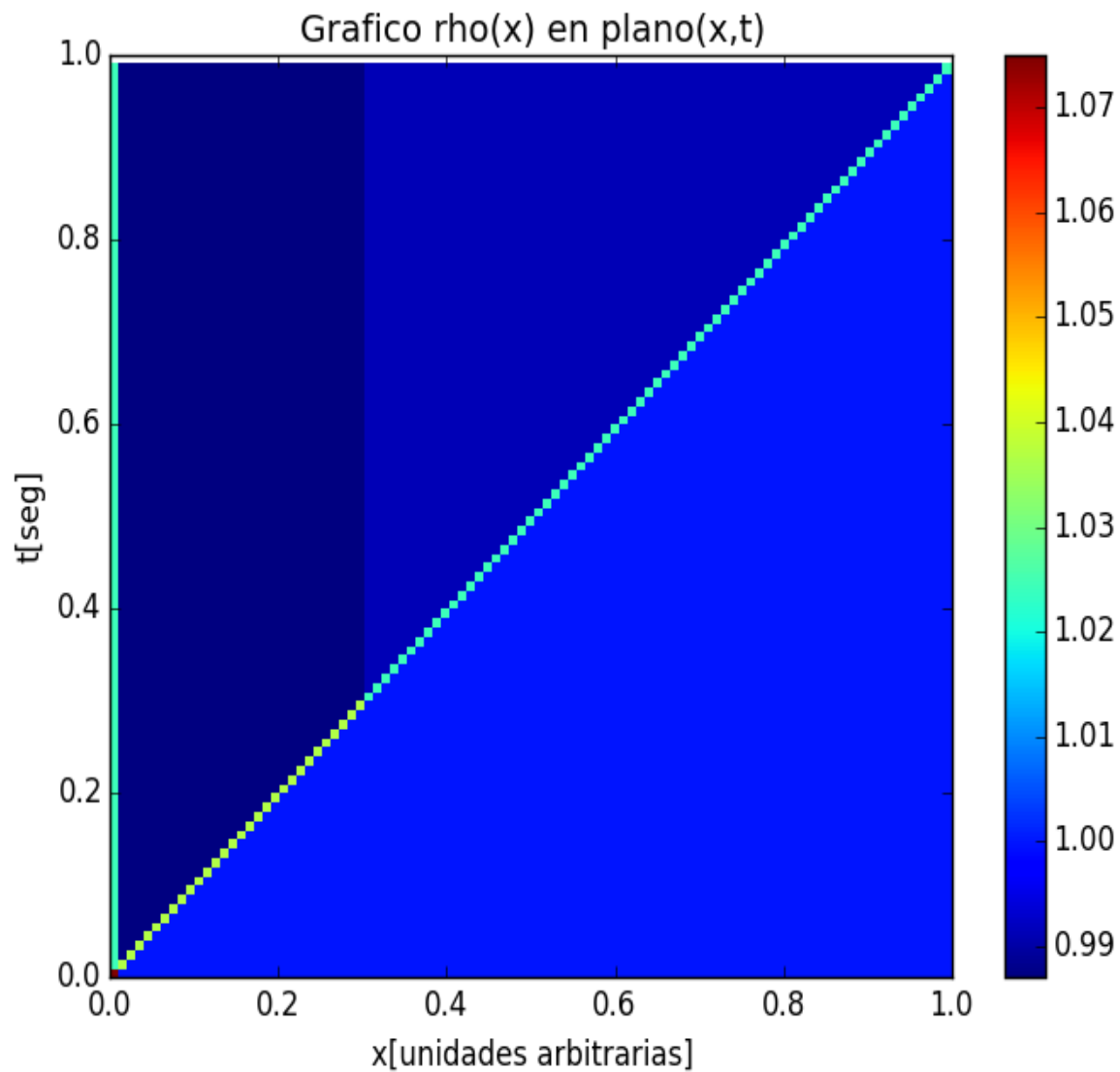
**figura9.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=0.8$  seg realizado con zoom en intervalo  $0 < x < 0.02$ .



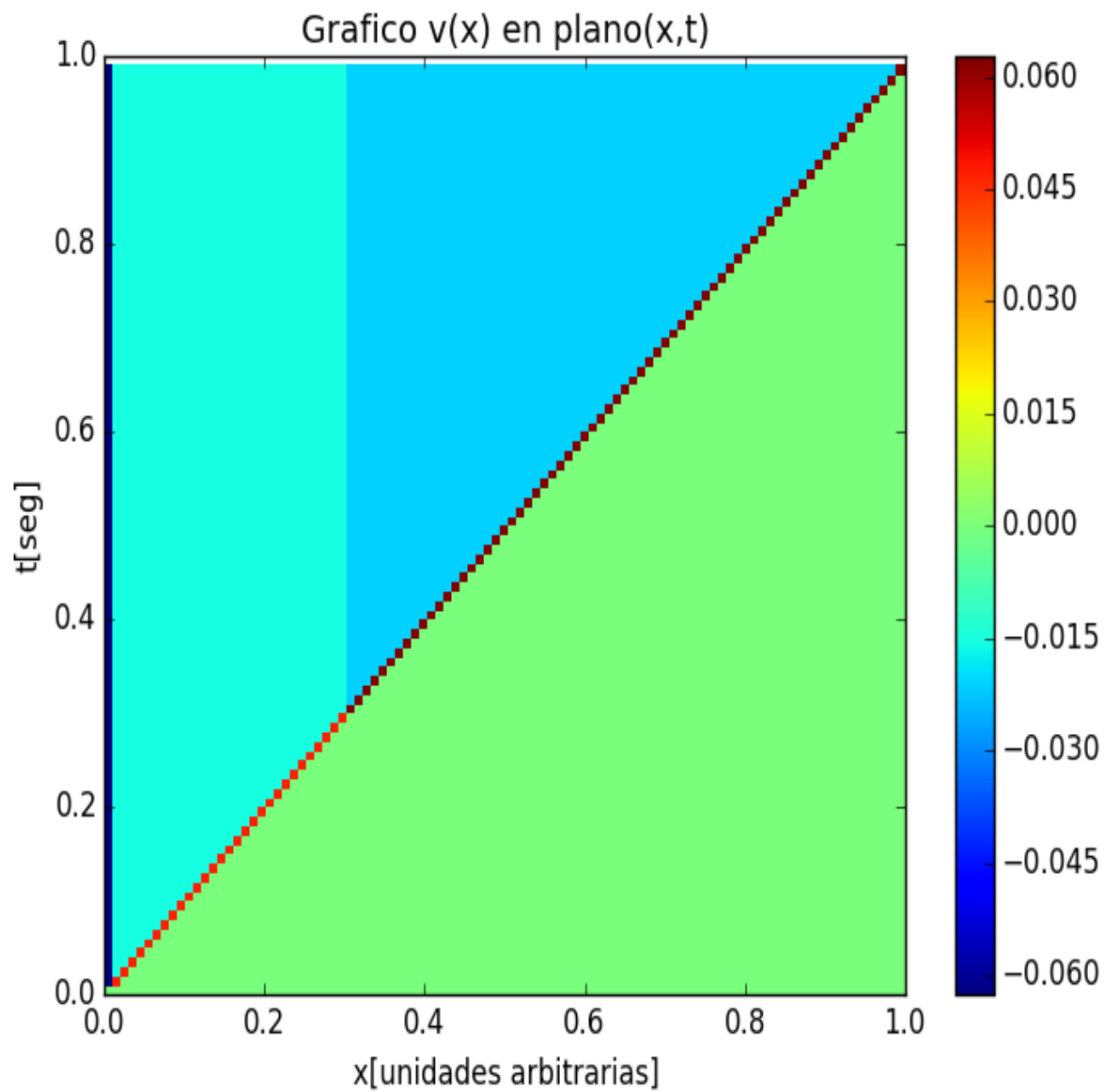
**figura10.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=1.0$  seg.



**figura11.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  (en verde) y de  $(1 + v(x, t))$  (en rojo) en función del espacio unidimensional  $x$  para  $t=1.0$  seg realizado con zoom en intervalo  $0 < x < 0.05$ .



**figura12.** Gráfico de  $\rho(x, t)$  en el plano  $(x, t)$  con colorbar representando intensidades de los campos.



**figura13.** Gráfico de  $v(x, t)$  en el plano  $(x,t)$  con colorbar representando intensidades de los campos.

## 4. Conclusión

En la figura 12 se puede apreciar que al llegar a  $x=0.3$  se produce el efecto scattering del fluido ( cambio de medio dado por el valor de  $A$ ), donde ciertas ondas se reflejaban y otras se transmitían. Sin embargo, no logra apreciarse en la figura 12 la reflexión de estas, lo más probable es que por no considerar un procedimiento de mayor precisión ni tiempos pares e impares para la iteración. Sin embargo, la intuición y también lo que mostró esta figura es que la densidad en el medio izquierdo es menor que la densidad del medio derecho ( basta con ver el valor asociado a cada color). Y justamente, es en estas diferencias de densidades en donde se permitió entender mejor el gráfico de  $v(x,t)$  en el plano para la figura 13. Aquí se obtuvo que al reflejarse y transmitirse la onda, mientras pasaba el tiempo,,pasó de una mayor velocidad, dado por un mayor valor para  $A$  ( viendo parte celeste antes de  $x=0.3$ ) a una menor velocidad, dado por un valor menor para  $A$  ( parte verde esencialmente). Cabe recordar que la velocidad del fluido era directamente proporcional a la raíz de  $A$ , con lo cual se podía inferir este comportamiento

Además de esto, se encontraron ciertas desprolijidades en los colores y eso se puede entender como que las velocidades de cada partícula sumada a otro conjunto de ondas hicieron que localmente la velocidad pudiese aumentar o disminuir ( ¡Comportamiento caótico de un gas!) No obstante, en términos globales se logró obtener lo que se intuía, que mientras más denso era el medio, menor sería la velocidad del fluido ( sumando componentes aleatorias de cada partícula), y viceversa. Físicamente, era lógico, puesto que es análogo al caso de una cuerda oscilando sometida a cierta tensión y densidad específica, donde si se dividía a la cuerda por trazos (  $x<0.3$  y  $x>0.3$ ) con distintas densidades las velocidades con la que la onda se transmitiría hubiese sido distinta para cada medio.

Para las figuras 1-11 se obtuvieron leves variaciones en las densidades y la constante  $=1$  más la velocidad ,esencialmente, por la poca precisión del procedimiento empleado para las curvas características. Sin embargo, cabe destacar que si bien, no fueron muy precisos estos gráficos, indicaban cierta tendencia a la densidad a oscilar para el valor 1 de la condición inicial, mientras que por el otro lado ,para la velocidad del fluido global se estabilizaba para el valor 0 ( viendo que la constante más la velocidad sumaban 1 aproximadamente se infería esto). Así, viendo los gráficos de las figuras 12 y 13 se puede ver que

*efectivamente el fluido en varios sectores presentaba sobredensidades pero siempre rondando el valor de 1, mientras que la velocidad global del fluido rondaría el valor de 0.*

*A la hora de optimizar el código y de evitar tiempos de ejecución extensos, es que se prefirió omitir ciertas iteraciones y número de particiones para el espacio  $x$ . Sin embargo, al haber hecho esto, probablemente, se podrían haber obtenido gráficos más representativos del fenómeno físico involucrado. Se tomará en cuenta esto para futuros trabajos.*

*De todas formas, se pudo observar que las condiciones iniciales y de borde determinaban el comportamiento del sistema y jugaban un rol primordial para estudiar el fluido y sus fluctuaciones para la densidad y velocidad.*

