Departamento de Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE FI3104
Métodos Numéricos para la Ciencia
Álvaro Núñez, Otoño 2022

Tarea #6

Benjamín Mancilla

Introducción

Para esta tarea se introdujo el método de eliminación de Gauss y factorización LU para sistemas de ecuaciones lineales. Básicamente consiste en trabajar la forma matricial de estos para invertir la matriz que define los coeficientes de los polinomios (con excepción del termino libre, el cual se define en la matriz b) y así calcular la solución multiplicando estas matrices. Todo esto se logra mediante librerías debido a motivos que se desarrollaran en la pregunta 1.

Pregunta 1

Se calcula el tiempo necesario para calcular la solución de un sistema lineal utilizando la matriz de Hilbert mediante ambos métodos. El objetivo es analizar los pros y los contras de cada uno a la vez que evaluar el rendimiento de la maquina ante estos casos extremos. Personalmente el computador es extremadamente lento a partir de N = 200, debido a esto el espacio para los resultados se encuentra entre N = 10 y N = 100.

Cabe destacar que se programó ambos algoritmos a mano para entender como funcionan estos. Se utiliza exclusivamente la definición analítica, por ello toma mucho más tiempo cada cálculo, pero es extremadamente preciso, prácticamente tiene error nulo por lo menos hasta N = 100. Estos serán adjuntados en un archivo llamado *P1Anexa* además de un algoritmo personal para calcular la matriz de Hilbert. Este ultimo llena la matriz mediante diagonales para disminuir el numero de divisiones y además el de movimientos (en vez de ir uno por uno se llena de a varios).

El método de gauss consiste en invertir la matriz mediante restas de filas, estas son multiplicadas por un factor el cual depende del cociente entre el término de la columna a restar y el que esta siendo evaluado. Este ultimo va siguiendo la diagonal de la matriz, por lo cual es de suma importancia que esta se cuadrada y que sus términos diagonales sean distintos de 0 (problemas los cuales no presenta la matriz de Hilbert). Con esto se puede visualizar que el método avanza por la diagonal y resta todo lo que tiene debajo de la fila donde está evaluando, como si fuera algún tipo de descarte (como los que se hacen en las preguntas por alternativa).

Por otro lado, el método por factorización Lower-Upper utiliza las matrices diagonales, las cuales presentan muchas propiedades útiles y son fáciles de operar. Lo que hace este algoritmo es que a partir de una matriz identidad y la cual se quiere invertir se calculan las dos matrices triangulares. Esto se realiza mediante "rellenos" a la matriz identidad desde el termino diagonal de la columna hasta el último al mismo tiempo, mientras que a la "copia" de la matriz original se le aplican restas sucesivas siguiendo cierto factor, esto se hace para dejar en 0 cualquier termino debajo de la diagonal.

El factor es calculado con el cociente entre la diagonal y el termino a restar (para que este ultimo se anule) al igual que en el método anterior. Una vez recorridas todas las filas se obtienen 2 matrices, las cuales son triangulares. Para calcular la inversa se despejan n sistemas lineales con n igual al numero de columnas de la matriz, para estos la matriz b seria igual a una columna de 0 exceptuando un 1, la posición de este depende del numero del sistema lineal, en otras palabras, se va despejando columna a columna la matriz inversa, ya que cada una de estas representa las soluciones de un sistema lineal. Cabe destacar que este calculo es muy simple debido a que las matrices son triangulares (el calculo de cada término de la solución es directo), lo que hace este ultimo paso rápido, sin embargo, la suma de este mas el anterior pesa en el tiempo requerido para la máquina.

Nótese que todo esto es una definición analítica, la cual discierne del proceso que hace la librería Sympy, debido a las grandes cantidades de información y a la forma de la matriz de Hilbert en particular. Esta diferencia ocurre debido a que Python hace aproximaciones para los cálculos, es decir, ocurren errores de truncamiento en el proceso. La razón de este comportamiento se debe a que la memoria necesaria para almacenar un *float* aumenta drásticamente a medida que se consideran mas decimales. Estas aproximaciones se hacen cada vez peores a medida que el determinante de la matriz se acerca a 0, la matriz de Hilbert tiene la peculiaridad de que a medida que crece, su determinante se acerca rápidamente al origen. Esto se puede observar en la expresión 1 como la productoria tiende a infinito, lo que significa que el determinante tiende a 0.

$$\mathrm{det}\mathrm{H_n}^{-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) \cdot \left(\frac{(2k)!}{k!\,k!}\right)^2 \qquad (1)$$

Para observar estos comportamientos y además comparar ambos métodos se calcula la inversa de la matriz de Hilbert para tamaños desde N = 10 hasta N = 100. Los resultados se muestran en la figura 1 y figura 2.

Se puede observar como los tiempos aumentan de forma logarítmica dependiendo de N, además de como ambas curvas comienzan a separarse, es decir, cada vez a LU le toma mas tiempo relativamente a GE.

Luego para el error cuadrático se observa un patrón errático debido a los errores de truncamiento de la maquina (varían por cada intento que se haga), además la curva de LU siempre esta por debajo que de GE, exceptuando para los N debajo de 20.

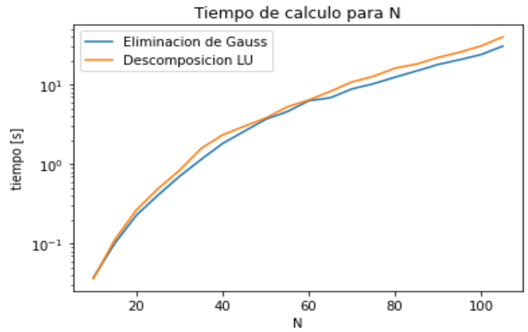

Figura 1

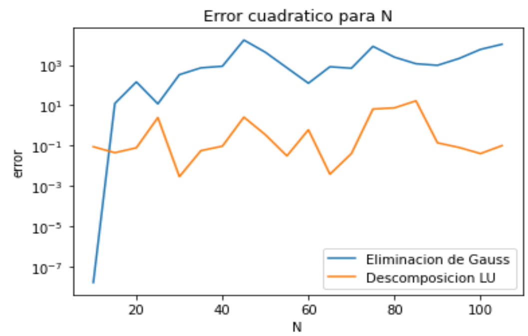

Figura 2

Conclusión, para valores aproximadamente menores a 20 el método de Gauss Jordan es superior en todo aspecto, sin embargo, este se vuelve muy impreciso a medida que crece N; LU es mas lento para todo el espectro de valores, pero entrega resultados mas fiables, mientras que GE es más rápido, pero con un error mucho mayor.

Además, se puede decir que estos métodos numéricos no son de fiar para matrices cerca de estar mal definidas (con una diagonal o determinante nulos), pero son bastantes efectivos para matrices comunes y corrientes.

Pregunta 2

Se resuelve matricialmente un problema físico lineal, donde las incógnitas son las tensiones, pero se conocen los ángulos de las cuerdas y la fuerza que estas transmiten (fuerza peso). Para esto podemos describir 12 ecuaciones, ya que se tienen 6 subsistemas (los nodos) y cada uno de estos 2 coordenadas (X e Y).

Como existen 12 tensiones, se tienen 12 incógnitas, por lo tanto, se tiene una matriz de 12 x 12. La solución para los sistemas siempre será 0 (ya que se necesita que la fuerza neta sea 0 para que el sistema este en equilibrio), exceptuando las tensiones que cargan directamente las masas, es decir las tensiones que van desde el 7 hasta el 12.

Utilizando DCL y Newton para cada nodo se obtiene la matriz de la figura 3.

$$\begin{pmatrix}
\cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\frac{\pi}{6}) & -\cos(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 & -\cos(\frac{\pi}{12}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) & 0 & -\cos(\frac{\pi}{12}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{12}) & \cos(\frac{\pi}{12}) \\
-\sin(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) & 0 & 0 & \sin(\frac{\pi}{12}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) & 0 & -\sin(\frac{\pi}{12}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\frac{\pi}{12}) & \sin(\frac{\pi}{12})
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix}$$

Figura 3

Este multiplicación de matrices tiene que ser igual a la traspuesta de la matriz
(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, M1g, M2g, Mg)

Una vez definido esto, se invierte la matriz de 12 x 12. Finalmente basta hacer el producto punto entre esta matriz invertina y b, el cual varía dependiendo M1, para calcular las soluciones en cada situación. Se muestra la máxima tensión dependiendo a la magnitud de la Fuerza 1, es decir M1g, en la figura 4.

Se puede apreciar que la tensión máxima se encuentra al lado donde esta la masa 2 y se mantiene hasta que ambas masas se igualan, luego se ejerce cada vez mas peso en el lado de la masa 1, por ello el sistema "se inclina" (no se inclinan las cuerdas, sino que las fuerzas) hacia el lado de la masa 1, aumentando la tensión general del sistema y focalizando estas.

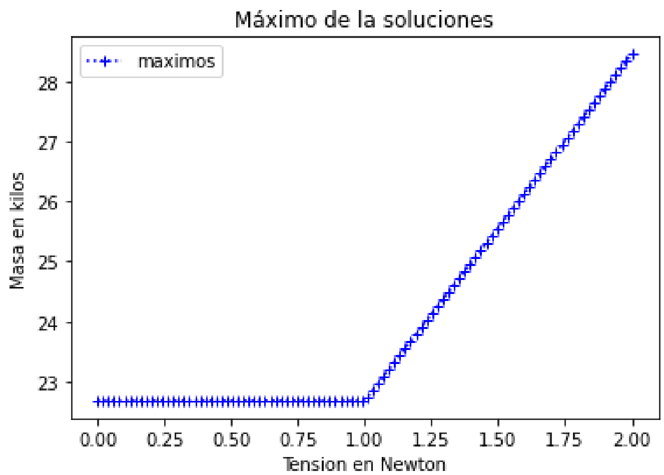
Máximo de la soluciones
maximos
Masa en kilos
28
27
26
25
24
23
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Tension en Newton

Figura 4