Departamento de Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE FI3104
Métodos Numéricos para la Ciencia
Álvaro Núñez, Otoño 2022

Tarea #5

Benjamín Mancilla

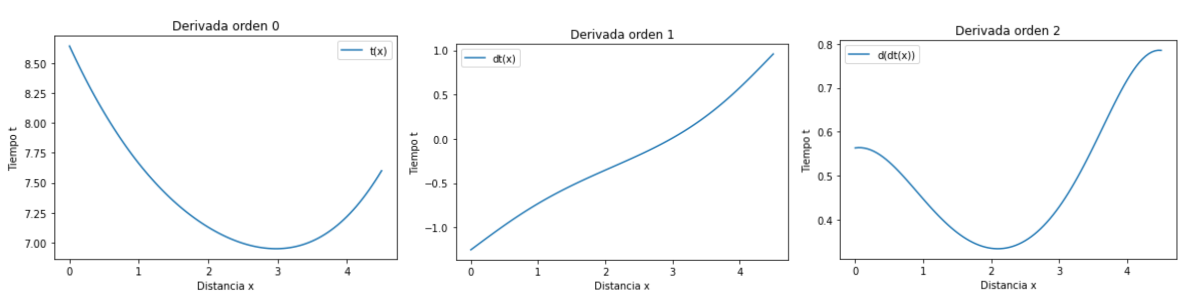
Introducción

Para esta tarea se introdujo el concepto de extremización el cual consiste en buscar los máximos o mínimos globales de una función. Existen 2 métodos para encontrar estos puntos. El primero es Newton y aplicarlo a la primera y segunda derivada de la función en cuestión. El segundo consiste en una interpolación de un polinomio cuadrático, básicamente es intersecar una parábola en 3 puntos de una función, calcular el punto mínimo entre esta y el polinomio, y luego repetir considerando el mínimo encontrado, iterando y con cierta tolerancia se llegará al mínimo de la función.

Pregunta 1

Se pide calcular el tiempo que le tomara a un fotón ir de un punto A hasta un punto B bajo dos medios de índices de refracción distintos. Por el principio de Fermat el tiempo que debe pasar tiene que ser el mínimo posible, por lo que el problema se reduce a uno de minimización. Se tiene a x como variable, que consiste en la coordenada horizontal de la distancia entre el punto A y la intersección del fotón con la frontera de los medios.

Primero que todo se estudia la forma de la función para asegurarnos de que no existan otros puntos críticos que intervengan con el cálculo, para esto simplemente graficamos.



En el grafico de Derivada de orden 0 se puede apreciar que solo hay un mínimo, aproximadamente para un x igual a 3, gracias a esto podemos estar seguros de que el método Newton-Rhapson nos calculara un mínimo global.

Luego simplemente aplicamos el método ya mencionado a la función del grafico Derivada de orden 1 y a su respectiva derivada.

Cabe destacar que las derivadas son calculadas analíticamente ya que manejar funciones es mucho más fácil que simplemente datos.

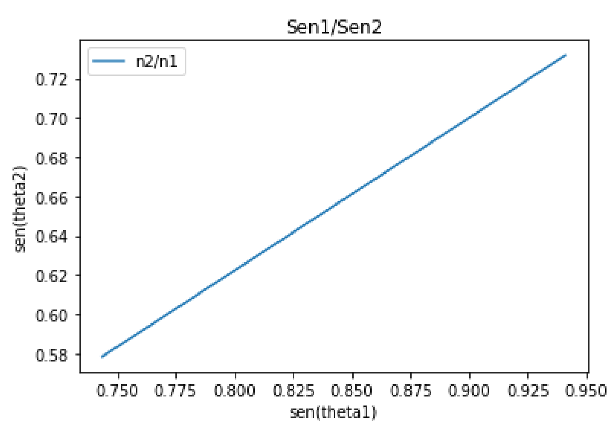
El resultado es 2.9779909682014933, ósea esta es la distancia que recorrería la luz en el eje horizontal antes de cambiar de medio.

Luego, para comprobar si este x es efectivamente el camino que tomaría la luz, se debe aplicar la ley de Snell. Pasando los senos a medidas cartesianas se llega a la expresión:

$$n_1 sen(\theta_1) - n_2 sen(\theta_2) = n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}} - n_2 \cdot \frac{x_2 - x_1 - x}{\sqrt{(x_2 - x_1 - x)^2 + {y_2}^2}}$$

Remplazando el x calculado se obtiene que la resta es igual a -1.1102230246251565e-16, lo cual es prácticamente 0, por lo tanto, la ley se cumple.

Por último, para un arreglo de distintos x_1 se calculan los distintos senos, por ley de Snell la división de senos es igual a la división de coeficientes de refracción, por esto mismo si graficamos el seno del primer ángulo vs el segundo la pendiente debería ser n_2/n_1.



La pendiente en este caso es 0.777777777777778 mientras que 1.05/1.35 es igual a 0.7777777777777778, es decir son casi iguales.

Pregunta 2

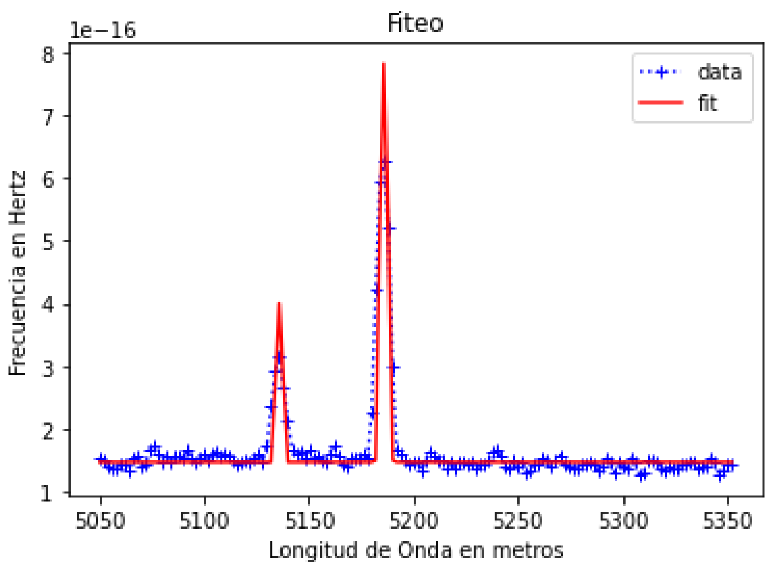
Para esta pregunta se nos pide hacer un fiteo a un espectro, este consiste en rectas y Gausseanas dependiendo en que intervalo se está midiendo.

Para esto debemos minimizar el error de la recta con respecto a los datos, al igual que las gausseanas.

Esto lo hacemos minimizando las funciones error mediante una interpolación de polinomios cuadráticos, en Python existe una librería capaz de hacer esto, por lo que la implementamos.

Esta función llamada *fmin(function,[initial parameters])* minimiza una curva considerando ciertos valores iniciales, por lo que el *bracketing* lo hace automático, ya que parte del punto más cercano al mínimo. Su iteración es similar a la de los polinomios, ya que va considerando parábolas con una intersección más cercana al mínimo, y claramente va remplazando este punto a medida que avanza en los pasos iterativos.

Con esto podemos minimizar el error para ambas funciones, al minimizar la gausseana los valores que están a más de 1 sigma quedan debajo de las rectas, para resolver esto ploteamos el máximo entre los 2 fiteos, con esto nos quedan rectas en el ruido y gausseanas en los peaks, que es justo lo que se está buscando.



Parámetros	Valor	Error
a Gauss	2.58147842	3.304638862845147e-30
b Gauss	1.61314982	3.304638862845147e-30
a Recta	0.00e+00	8.100741896512404e-31
b Recta	1.47e-16	8.100741896512404e-31