Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
FI3104-1 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

TAREA N° 7

Sistema de ecuaciones Lineales

Integrantes: Benjamin Mancilla
Profesor: Álvaro Núñez Vásquez
Fecha de entrega: 6 de mayo de 2022
Santiago, Chile

Introducción

Se implementan sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial para resolver problemas físicos de gran magnitud. Para esto se debe plantear el problema de forma analítica considerando los valores conocidos y los buscados, luego se traduce esto a matrices en forma de código, se plantea el sistema matricial es decir $A\vec{x} = \vec{b}$, se calcula numéricamente la inversa de A y se obtiene la solucion.

Para ciertos casos A tiene un gran tamaño y se debe definir por medio de algoritmos, en cambio para otros el cálculo de A no es directo y se deben aplicar leyes y propiedades físicas para llegar a al sistema que despeje la solución.

Se quiere comparar los resultados numéricos con la intuición física para ambos casos mediante análisis de resultados y gráficos.

Pregunta 1

Se tienen 100 partículas de masas iguales conectadas por resortes iguales, es decir, misma constante y largo natural. La primera partícula está conectada a un borde fijo mediante un resorte de mismas características, la última varía dependiendo el caso, puede estar conectada a un borde de la misma forma que la primera o puede estar libre.

Luego a ambos sistemas se les aplica 3 fuerzas distintas, la primera es una constante, es decir, todas las partículas sienten la misma fuerza; la segunda es una fuerza lineal, va creciendo proporcionalmente con el índice de la partícula, y por último una fuerza cuadrática, crece proporcionalmente al índice al cuadrado.

Notemos que las condiciones de borde determinan las forma de la matriz A mientras que las fuerzas definen la forma del vector $\vec{b}$.

Para calcular $\vec{b}$ simplemente se calcula término a término dependiendo del término, es decir para la posición i se utiliza ese índice para calcular la respectiva fuerza para la partícula i.

Calcular A es un problema físico, ya que implica conocer la ecuación de movimiento de cada partícula. Este caso en específico es uno típico en vibraciones y ondas, ya que es la representación más simple de un medio donde viaja una onda. Sin embargo, para esto último se utiliza una *onda plana*, en cambio, se usan fuerzas que se aplican a todas las partículas simultáneamente. A pesar de esta diferencia, la representación se hace análogamente mediante *Newton* o *Euler-Lagrange*.

Se prefiere usar el Lagrangeano debido a su simpleza, este equivale a la expresión 1, mediante Euler-Lagrange podemos llegar a las ecuaciones de movimiento. Para todas las masas, excepto la de los bordes, su ecuación sería la de la expresión 2, para la primera seria 3, la última sería la expresión 4 cuando hay borde y 5 cuando no.

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{k}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 \tag{1}$$

$$m\ddot{x_i} = k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) \tag{2}$$

$$m\ddot{x_1} = k(x_2 - 2x_1) \tag{3}$$

$$m\ddot{x_N} = k(x_{N-1} - 2x_N) \tag{4}$$

$$m\ddot{x_N} = k(x_{N-1} - x_N) \tag{5}$$

Se puede notar que el lado izquierdo es la fuerza que siente la masa, como se sabe cuál será esta se considera este lado como el vector $\vec{b}$. Luego en el lado derecho se ve un algoritmo para los coeficientes que acompañan los desplazamientos, este forma una matriz *Triagonal*, donde la diagonal principal representa la posición de la masa de la ecuación y las 2 secundarias las masas vecinas.

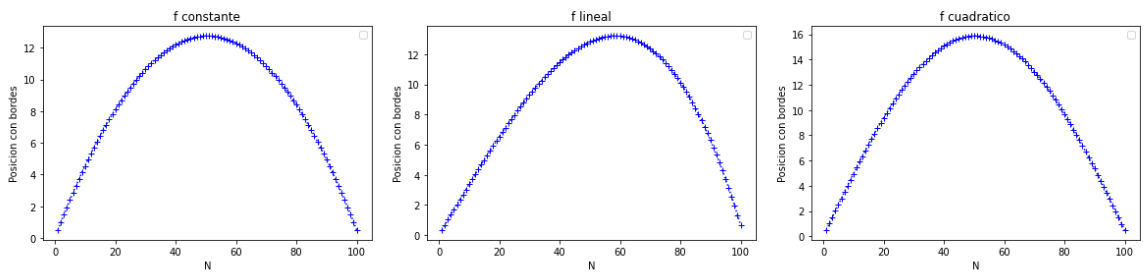
Notar que se puede factorizar k de la matriz y dejarlo como una constante afuera, en este caso no afecta esto, ya que k es igual a 1. Como consideramos el centro de coordenadas, el borde de la izquierda, se nos factoriza un -1 también, lo cual entrega la matriz de la expresión 6 para el caso con bordes y la 7 para el caso sin.

$$k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Nótese que el último término cambia debido a la ausencia del último resorte, esto provoca que la fuerza que siente la última partícula solo dependa de la elongación del resorte que conecta está con la penúltima.

$$k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Como se conoce la forma de A y de $\vec{b}$ basta solucionar el sistema invirtiendo la matriz A y calculando $A^{-1} \cdot \vec{b}$ para obtener la solución. Esto último se repite para los 6 casos posibles y se grafican los resultados.



(a) (b) (c)

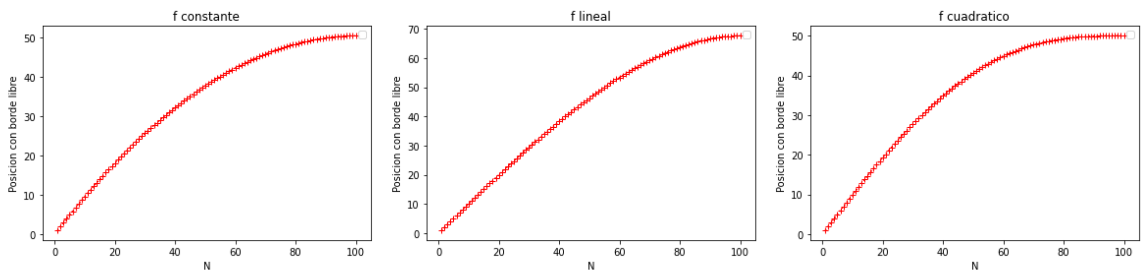
Figura 1: Desplazamientos con borde

Se puede observar en la figura 1 las soluciones cuando el sistema tiene 2 bordes, en la sub figuras 1a, 1b y 1c se encuentran los resultados para fuerza constante, lineal y cuadratica respectivamente.

Nótese que la forma de la solución se mantiene en las 3 situaciones, en el primero caso es totalmente simétrica, luego las soluciones tienden lentamente a 12 y luego decaen rápidamente y por último se mantiene la misma forma, pero se alcanzan valores más alto.

En la figura 2 se puede observar el arreglo de soluciones para el borde libre, se tiene fuerza constante, lineal y cuadrática en las figuras , y respectivamente.

Nuevamente, la forma se mantiene, los desplazamientos aumentan monótonamente con la posición, en cambio, la derivada disminuye de la misma forma. El caso constante es parecido al cuadratico, con la diferencia que este último comienza con una pendiente más pronunciada y termina con una más atenuada, ambos convergen a 50. El caso lineal converge a 70 de una forma más lenta.



(a) (b) (c)

Figura 2: Desplazamientos sin borde

En la figura 2 se puede observar el arreglo de soluciones para el borde libre, se tiene fuerza constante, lineal y cuadrática en las figuras , y respectivamente.

Nuevamente, la forma se mantiene, los desplazamientos aumentan monótonamente con la posición, en cambio, la derivada disminuye de la misma forma. El caso constante es parecido al cuadratico, con la diferencia que este último comienza con una pendiente más pronunciada y termina con una más atenuada, ambos convergen a 50. El caso lineal converge a 70 de una forma más lenta.

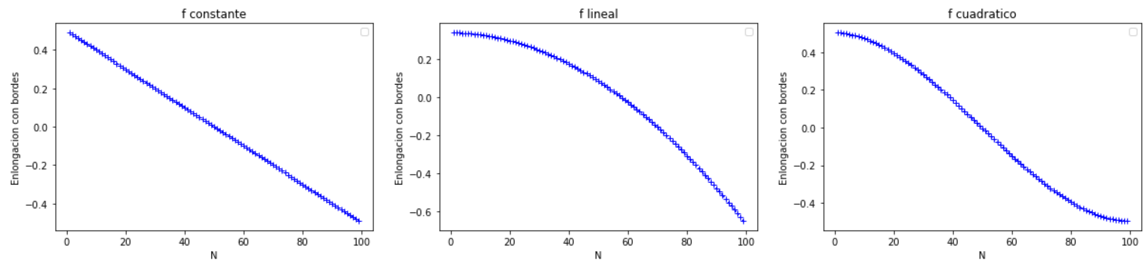
Estos comportamientos se reflejan en las derivadas de las curvas de los gráficos, es decir, en las elongaciones. El caso con borde se aprecia en la figura 3 mientras que el caso sin en la figura 4.

Con bordes, para el caso constante se observa que elongación disminuye hasta llegar a 0, luego se invierte esta, ya que se vuelve negativa, esto quiere decir que las partículas pasan de estar ordenadas de la forma $x_i \to x_{i+1}$ a $x_{i+1} \to x_i$.

Lo mismo ocurre para el resto de casos pero la evolución es distinta, en el caso lineal existe poca elongación en el primer extremo, luego este aumenta proporcionalmente a la distancia con este, en el caso cuadrático existe poca elongación en ambos extremos y mucha en el centro.

Este resultando contradice la intuición física, ya que nos está diciendo los resortes se curvan en 180^o grados, o sea en cierto punto las partículas están superpuestas y luego (en el 0) y luego se distribuyen hacia el lado contrario.

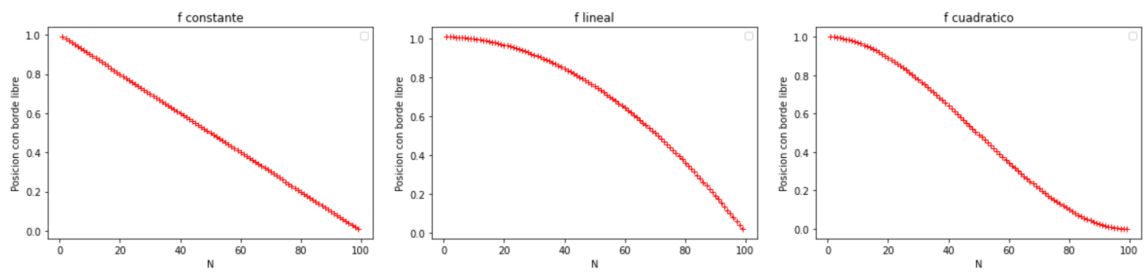
Misma contradicción se presenta en el caso lineal y cuadrático, ya que la interpretación de los datos sugiere que la gran mayoría de resortes estan invertidos para el primero y se presenta un caso semejante que el constante en el segundo.



(a) (b) (c)

Figura 3: Enlongaciones con borde

Por otro lado, las elongaciones en el caso sin borde coinciden parcialmente con la intuición física, ya que no presentan el extraño comportamiento de *“inversion”* que ocurre en el caso con borde.



(a) (b) (c)

Figura 4: Enlongaciones sin borde

Los resultados sugieren que en el caso lineal las partículas se encuentran muy separadas al principio, y luego se juntan cada vez más a medida que nos alejamos del borde. Para los otros casos la dinámica es similar, simplemente las elongaciones disminuyen de forma distinta.

Este comportamiento de los resortes se debe a que los que están más cerca del borde son sometidos a mayor tensión, ya que el este mismo es el que permite la existencia de un equilibrio entre la fuera externa y la elástica, es decir, el aporte del primer resorte afecta a todas las partículas, el segundo a $N-1$ partículas, y así sucesivamente. Por esto último parece razonable que el primer resorte se estire más, ya que al aplicar la fuerza a la primera partícula se estira ese resorte, luego con la segunda partícula se estira este mismo y el segundo, así sucesivamente, por esto se observa este comportamiento en los resultados.

Cabe destacar que estos resultados no consideran el largo natural de los resortes, esto último solo cambia la magnitud de los resultados en los desplazamientos, pero la dinámica se mantiene.

Pregunta 2

A un cubo compuesto de resistencias se le aplica un voltaje de 9 V en una de sus esquinas, la corriente avanza a través de sus aristas hasta llegar a la esquina opuesta. Es conocido el valor de las resistencias en los cables, las cuales equivalen a 2 Ω.

Para calcular la intensidad de corriente que recorre el cubo se requiere implementar leyes de Kirchhoff y de Ohm. Primero usaremos la definición de voltaje para expresar este en términos de potencial. Con esto se puede llegar a varias ecuaciones, podemos expresar la relación entre $\vec{u}$ y $\vec{V}$ como una matriz. Esta tiene la forma de la expresión 8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Nótese que las filas representan los voltajes y las columnas los potenciales, el potencial u_8 no está en la matriz debido a que está conectado a tierra, por lo que su potencial es siempre nulo.

Luego mediante la ley de las corrientes se llega a una relación entre las corrientes y los nodos, esta se representa mediante la matriz M y relaciona las corrientes entre sí para que cumplan la ley antes dicha. En la expresión 9 se aprecia la forma de la matriz.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Luego debemos determinar la matriz que relaciona las corrientes con los voltajes. Esta es directamente la identidad 12×12 multiplicada por la inversa de la resistencia, esto se obtienen simplemente de la ley de Ohm. En la expresión 10 se encuentra el valor de la matriz C.

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Finalmente, se llega a 3 relaciones clave, en la expresión 11 se tiene la relación entre potenciales y voltaje, en la 12 para las corrientes entre sí y en la 13 con la para corrientes con los voltajes.

$$\vec{V_{Int}} = A\vec{u} \tag{11}$$

$$M\vec{J_{Ext}} = -M\vec{J_{Int}} \tag{12}$$

$$\vec{J_{Int}} = C\vec{V_{Int}} \tag{13}$$

$$\vec{J_{Ext}} = C\vec{V_{Ext}} \tag{14}$$

$$MCA\vec{u} = -MC\vec{V_{Ext}} \tag{15}$$

$$\vec{J_{Tot}} = C(\vec{V_{Int}} + \vec{V_{Ext}}) \tag{16}$$

Nótese $\vec{V_{Ext}}$ es conocido, ya que es el voltaje introducido al cubo. Por esto $\vec{J_{Ext}}$ es conocido debido a la expresión 14. Luego se puede utilizar la expresión 12 para despejar $\vec{J_{Int}}$. Después se usa este resultado en la expresión 13 para despejar el $\vec{V_{Int}}$. Finalmente, tenemos una expresión para $\vec{u}$, ya que conocemos el valor de $\vec{V_{Int}}$. Multiplicando matrices llegamos a la expresión 15, donde se tiene un sistema lineal para $\vec{u}$.
Luego usamos este resultado para obtener un valor de $\vec{V_{Int}}$, gracias a la expresión 11, esto se remplaza en la expresión 16 y se obtiene lo pedido.