Departamento de Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE FI3104
Métodos Numéricos para la Ciencia
Álvaro Núñez, Otoño 2022

Tarea #3

Benjamín Mancilla

Introducción

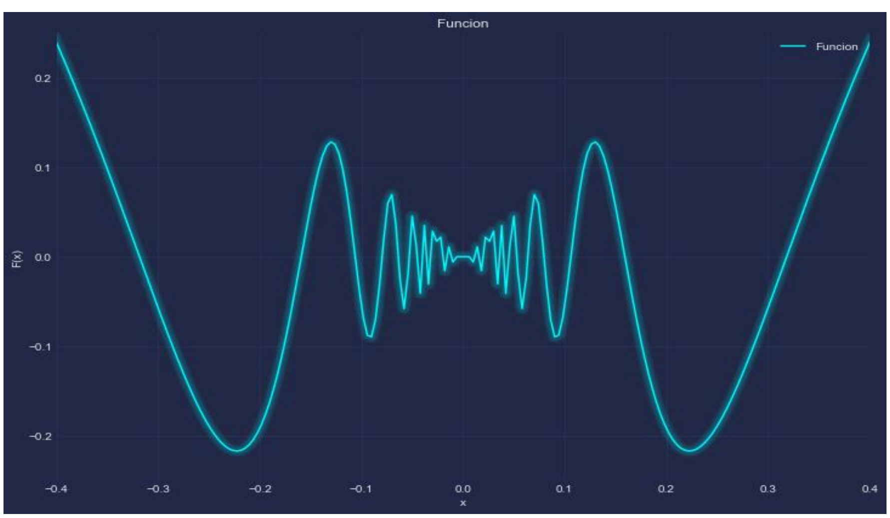
Para esta tarea se introdujo el concepto de soluciones de ecuaciones no lineales y sus métodos, además de explayando la lógica, precisión, velocidad y estabilidad de cada uno de estos. A continuación, el alumno presentara su metodología y lógica utilizadas para la realización de los problemas otorgados, además de como se usaron los conceptos vistos en clases para la resolución de estos.

Pregunta 1

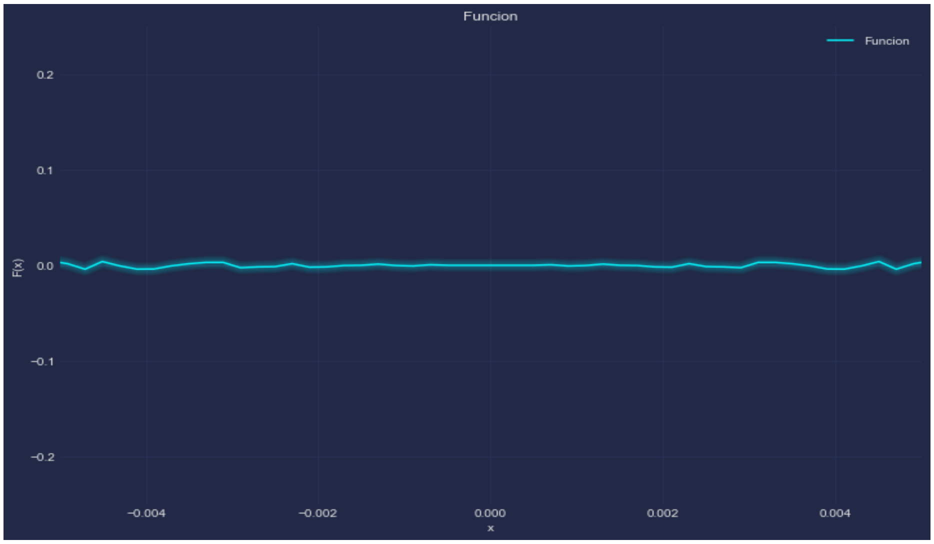
Se nos pide calcular una integral, primero que todo podemos notar que esta integral se indefine en 0. Para arreglar esto definimos esta integral como la suma de otras 2, las cuales estas compuestas del mismo integrando, pero los limites van de -2 a épsilon y de épsilon a 2 de la siguiente forma.

$$\int_{-2}^{2} xsen\left(\frac{1}{x}\right)dx \cong \int_{-2}^{-\varepsilon} xsen\left(\frac{1}{x}\right)dx + \int_{\varepsilon}^{2} xsen\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Este arreglo no solo arregla la indefinición de a integral, sino que otorga un resultado bastante acertado, ya que la función en esa región es equivalente a 0, ósea, no aporta (o aporta, pero despreciablemente) al valor final de la integral, esto se puede observar en el siguiente gráfico.

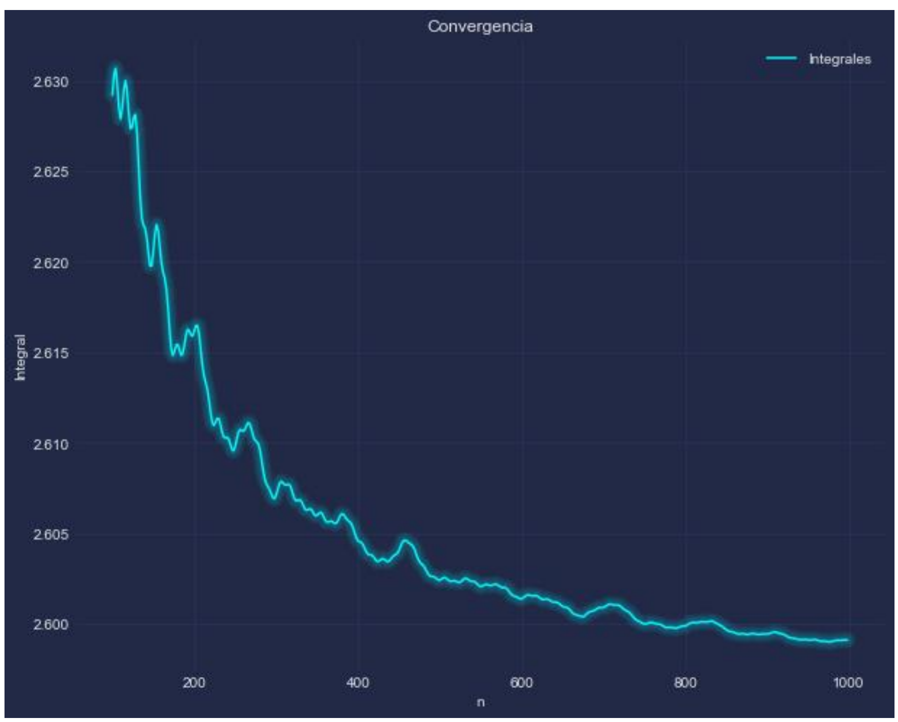


Como se puede observar, la función se asemeja a una recta de pendiente 0 ubicada en el eje x en la región cercana a 0, sin embargo, para que nuestra aproximación tenga sentido debemos escoger un épsilon suficientemente pequeño. En el siguiente grafico se aprecia como para valores entre -0.005 y 0.005 la función ya se asemeja a la recta dicha anteriormente.



Una vez analizado esto, podemos finalmente integrar usando el método de Simpson, este ya lo hemos estudiado en clases pasadas a si que obviara la explicación. Sumando las integrales, obtenemos finalmente nuestra integral total, solo falta repetir esto para distintos n y graficar la convergencia de valores.

El valor de la integral con un n igual a 10^6 entrega un numero igual a 2.5951822193404133, se puede ver como la integral converge efectivamente a este valor a medida que aumenta el n.



Pregunta 2

Para esta pregunta se nos pide que usemos el método Newton-Raphson, primero hay que entender la teoría detrás de este. Lo que hace es este método es generar una tangente en el punto inicial elegida de la función, luego se evalúa donde interseca con el eje x, después se busca el valor que entrega la función en este punto, y luego vuelve a definir a tangente sobre ese punto, esto se hace reiteradamente hasta que la diferencia entre el x anterior y el actual es muy pequeña, lo que significa que ya se esta bastante cerca de la raíz. Un importante detalle de esta función es que es muy rápida y precisa, pero es inestable, se debe escoger un punto inicial adecuado y cercano a la raíz, además, la forma de la función puede hacer este método prácticamente inutilizable para algunos casos.

Dentro del código tenemos una función que define la integral del problema, sin embargo, para poder utilizar esta dentro del método de forma cómoda debemos dejarla dependiente a una sola variable y además que esta sea α. Para esto definimos los parámetros como el x inicial o el final como variables con valores definidos fuera o dentro de la función, dependiendo de la necesidad de cada uno. También se calcula la derivada, en este caso se hizo numéricamente simplemente para aplicar los contenidos pasados, pero se comprobó con el resultado analítico para no tener errores de cálculo.

Con todo esto ya planificado, podemos aplicar el método de Newton, nótese que se solicita que a la integral sea igual a 0.5, esto se arregla simplemente definiendo una función igual a la anterior, pero restando este valor, ya que con el cambio queda una ecuación igualada a 0 y el método puede funcionar correctamente.

Otro detalle es el x inicial para el método, este se estimó simplemente evaluando la función para α arbitrarios, se comenzó con $\alpha = 1$ por simplicidad, con este valor se entregaba un resultado bastante parecido a 0.5, luego evaluando un poco mas se concluyo que 1.2 era un valor bastante cercano a la raíz buscada.

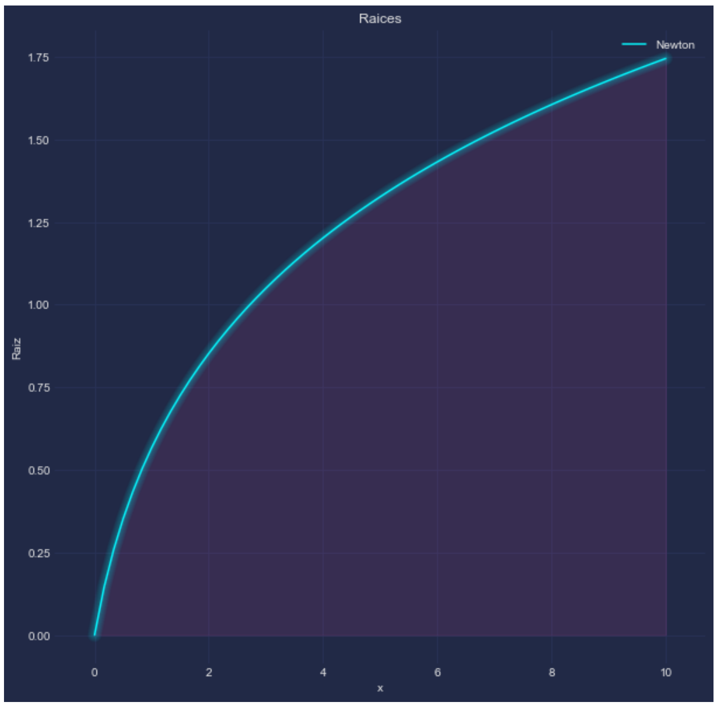
Luego de todo esto el cálculo numérico entrega que la raíz debe ser $\alpha = 3.7418947848242046$, si remplazamos esto en la función nos da 0, lo cual es lo buscado.

.

Pregunta 3

En esta pregunta se nos propone una función la cual no sabemos su forma, sin embargo, conocemos su inversa. Bajo esta condición, podemos definir el resultado de la función como la raíz que cumple que la inversa sea igual a x. Esto lo podemos desarrollar como una solución de ecuación numérica, por ende, tenemos que definir una función $\widehat{W}(x) = ye^y - x = 0$ y luego calcular sus raíces numéricamente, siendo x variable (nosotros entregamos ese valor).

Una vez impregnado todo esto en el código junto a la derivada de $\widehat{W}(x)$ (se varían los y), se grafican los resultados:



Luego para calcular la integral simplemente debemos usar la función $\widehat{W}(x)$ e ir integrando el x evidentemente. En este caso se usa el método de los Trapecios ya que el limite inferior es un 0, por como esta definido Simpson, esto genera problemas ya que entrega valores negativos en el primer termino (cuando debe ser simplemente evaluado en 0), en cambio Trapecio no tiene esta falla.

Luego, se define la integral analítica, que es simplemente usar la función del enunciado. Sin embargo, hay un problema con esta función, ya que se tiene que evaluar en 0 para el limite inferior y esto dará una indefinición que la maquina no detectara ya que está siendo multiplicada por 0. A pesar de esto último, si afecta gravemente al resultado numérico de la integral, para arreglarlo simplemente se evalúa en un épsilon bastante pequeño en el limite inferior. Esto modifica en una unidad el resultado, concluyendo así con dos resultados bastantes parecidos, lo cual es lo esperado.

Para la integral numérica se calcula un resultado igual a 12.184196865096474, por otro lado, la integral analítica nos entrega un valor igual 12.185585693852175. Según una calculadora confiable (WolframAlpha) el resultado numérico se acerca mas al valor real de la función.

El error entre las funciones es de 0.0013888287557008994.