Formation : CPI A2 Info

Promotion : 2024-2025

Nom & Prénom : DA COSTA Argan

Date : 24/03/2025

Note : /

Sujet 1 :

1)a) La formule du rotationnel est donné par $\overrightarrow{rot} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}$

b) On sait alors que $\frac{\partial z}{\partial y} = 1; \frac{\partial y}{\partial z} = 1; \frac{\partial x}{\partial z} = 0; \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \frac{\partial y}{\partial x} = 1; \frac{\partial x}{\partial y} = 1$

$\overrightarrow{rot}(V) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(V) = 0$

2)a) La formule du gradient est donné par $\overrightarrow{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

b) On retrouve alors $\frac{\partial f}{\partial x} = y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z$

$\frac{\partial f}{\partial z} = y + 2z$

3) Afin de trouver la fonction, il nous faut simplement intégré les dérivée partielle précédente et cela nous donne :

$\int x\,dx = \int xy + c$

$\int x + z\,dy = \int xy + zy + c$

$\int y + 2z\,dz = \int xy + z^2 + c$

On retrouve bien la fonction $f(x, y, z) = xy + zy + z^2 + c$

Sujet 2 :

1) On peut exprimer le volume de la piscine avec $V = xyz$

2) a) On peut exprimer la surface intérieur totale de la piscine en fonction de x,y,z avec : $S = xy + 2xz + 2yz$

b)On exprime : $S = xy + 2z(x+y) \Longrightarrow S - xy = 2z(x+y) \Longrightarrow \frac{S-xy}{2(x+y)}$

$V = xy \times \frac{S-xy}{2(x+y)}$ avec S = 12

On retrouve donc $V = xy \times \frac{12-xy}{2(x+y)}$

3) On sait que $\overrightarrow{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u \times v$$

$$\begin{aligned} &u = xy \qquad u' = y \\ &v = \frac{S-xy}{2(x+y)} \qquad v' = \frac{u}{v} \ donc \ \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Calculons donc $v' \ avec \ u = S - xy \quad u' = -y$

$$v = 2x + 2y \quad v' = 2$$

$$\frac{-y(2x+2y) - 2(S-xy)}{(2x+2y)^2} = \frac{-2xy - 2y^2 + 2xy - 2S}{(2x+2y)^2} = \frac{-2y^2 - 2S}{(2x+2y)^2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &u = xy \qquad u' = y \\ &v = \frac{S-xy}{2(x+y)} \qquad v' = \frac{-2y^2 - 2S}{(2x+2y)^2} \end{aligned}$$

Calculons donc $\frac{\partial f}{\partial x}$: $u'v + uv' = y\left(\frac{S-xy}{2(x+y)}\right) + xy\left(\frac{-2y^2-2S}{(2x+2y)^2}\right)$

Par la suite, on intègre par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = u \times v$$

$$\begin{aligned} &u = xy \qquad u' = x \\ &v = \frac{S-xy}{2(x+y)} \qquad v' = \frac{u}{v} \ donc \ \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Calculons donc v' $avec\ u = S - xy \quad u' = -x$

$$v = 2x + 2y \quad v' = 2$$

$$\frac{-x(2x+2y) - 2(S-xy)}{(2x+2y)^2} = \frac{-2xy - 2x^2 + 2xy - 2S}{(2x+2y)^2} = \frac{-2x^2 - 2S}{(2x+2y)^2}$$

On a donc :

$$u = xy \qquad u' = x$$
$$v = \frac{S-xy}{2(x+y)} \qquad v' = \frac{-2x^2-2S}{(2x+2y)^2}$$

Calculons donc $\frac{\partial f}{\partial y}$: $u'v + uv' = x\left(\frac{S-xy}{2(x+y)}\right) + xy\left(\frac{-2x^2-2S}{(2x+2y)^2}\right)$

Pour $\overrightarrow{grad}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\left(\frac{S-xy}{2(x+y)}\right) + xy\left(\frac{-2y^2-2S}{(2x+2y)^2}\right) \\ x\left(\frac{S-xy}{2(x+y)}\right) + xy\left(\frac{-2x^2-2S}{(2x+2y)^2}\right) \end{pmatrix}$

4) Afin de montrer que (0,0) et (2,2) sont des points critiques il suffit de remplacer $x\ et\ y\ par\ 0$.
On sait en effet qu'un point critique est définir par : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ et\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Pour (0,0) :

On pose donc : $0\left(\frac{S-0}{2(0)}\right) + 0\left(\frac{-0-2S}{(0+0)^2}\right) = 0$

$$0\left(\frac{S-0}{2(0)}\right) + 0\left(\frac{-0-2S}{(0+0)^2}\right) = 0$$

Le point (0,0) est donc est un point critique de cette fonction.

Pour le point (2,2) :

On pose donc : $2\left(\frac{12-2\times2}{2(2+2)}\right) + 2\times2\left(\frac{-2\times2^2-2\times12}{(2\times2+2\times2)^2}\right) = 2-2 = 0$

$$2\left(\frac{12-2\times2}{2(2+2)}\right) + 2\times2\left(\frac{-2\times2^2-2\times12}{(2\times2+2\times2)^2}\right) = 2-2 = 0$$

Le point (2,2) est donc lui aussi un point critique de cette fonction.

5) On sait que les formules de Monge rt – s^2

Avec r = $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$

$t = \frac{\partial f^2}{\partial y^2}$

$$s = \frac{\partial f^2}{\partial xy}$$

Grâce à elles il sera possible de déterminer que le point (2,2) est un maximum local si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et que $r < 0$.

Le volume maximal de la piscine est alors 4 m^3 pour V(2,2) car $2 \times 2 \times \frac{12-2\times2}{2(2+2)} = 4 \times \frac{8}{8} = 4m^3$