

# Theoretische Physik I

Vorlesung von Prof.Dr. Gerhard Stock im Sommersemester  
2018

Markus Österle  
Andréz Gockel

17.04.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
Einführung . . . . .	4
Bedeutung der Mechanik . . . . .	4
<b>1 Newtonsche Mechanik</b>	<b>6</b>
1.1 allgemeine Begriffe . . . . .	6
1.1.1 Bezugssystem . . . . .	6
1.2 Die Newtonsche Gesetze (1687) . . . . .	7
1.2.1 Bem: . . . . .	8
1.2.2 Beispiele: . . . . .	9
1.3 Erhaltungssätze . . . . .	9
1.3.1 Impulserhaltung . . . . .	10
1.3.2 Drehimpulserhaltung . . . . .	10
1.3.3 Energieerhaltung . . . . .	10
1.4 Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	13
1.4.1 Rotierendes Bezugssystem: . . . . .	13
1.5 Mehr-Körper-Probleme . . . . .	14
1.6 Die Hamilton-Funktion (1833) . . . . .	17
Newtonsche Mechanik: theoretisches Konzept . . . . .	18
1.7 Schwingungen . . . . .	20
1.7.1 Gedämpfte Schwingungen . . . . .	21

1.7.2	Der getriebene Oszillator . . . . .	23
1.7.3	gekoppelte Oszillatoren . . . . .	24
1.7.4	Eigenschwingungen . . . . .	26
1.8	Das Zweikörperproblem . . . . .	28
1.8.1	Diskussion des Zweikörperproblems . . . . .	30
1.8.2	Keplerproblem . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Lagrange-Formalismus</b>	<b>35</b>
2.1	Zwangsbedingungen . . . . .	35
2.2	Lagrange-Gl 1.Art . . . . .	36
2.3	Lagrange-Gl. 2. Art . . . . .	39
2.3.1	Lagrange Formalismus . . . . .	45
2.3.2	Energieerhaltung . . . . .	45
2.4	Symmetrie und Erhaltungsgrößen . . . . .	45
2.4.1	Noether-Theorem . . . . .	48
2.5	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	51
2.5.1	Funktionale und Variationsrechnung . . . . .	51
2.5.2	Euler-Lagrange-Gl. . . . .	52
2.5.3	Variationsrechnung . . . . .	53
2.6	3. Hamiltonsche Prinzip . . . . .	54
2.6.1	Schwingung einer Seite . . . . .	55
2.6.2	Der Starre Körper . . . . .	58
2.6.3	Rotation des Starren Körpers . . . . .	63
2.7	9 Hamilton-Formalismus . . . . .	66
2.8	Hamiltonsche Mechanik . . . . .	67
2.9	Phasenraum . . . . .	70
2.9.1	Zeitentwicklung im Phasenraum (PR) . . . . .	71

2.9.2	<u>PR-Dichte</u> . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>73</b>
3.1	Relativistische Mechanik . . . . .	74
3.1.1	<u>Einsteinsches Relativitätsprinzip</u> (1905) . . . . .	74
3.1.2	Gleichzeitigkeit . . . . .	75
3.2	Lorenz-Trafo . . . . .	76
3.3	Längenkontraktion und Zeitdilatation . . . . .	79
3.3.1	Längenkontraktion . . . . .	79
3.3.2	Zeitdilatation . . . . .	80
3.3.3	Eigenzeit . . . . .	82
3.3.4	Zwilingsparadoxon . . . . .	83
3.3.5	Ursprung des Asymmetrie . . . . .	84
3.4	Vierdimensionale Entfernungen . . . . .	84
3.5	Relativistische Dynamik . . . . .	87
3.5.1	1.) Vierervektoren . . . . .	87

# Einleitung - Theoretische Physik

## Einführung

- geht von **grundlegenden Naturgesetzen** aus, die als Postulate (=Axiome)
- benutzt mathematische Methoden um daraus physikalische Aussagen herzuleiten (z.B.  $E_{kin} \sim v^2$ )
- Eine **Theorie** basiert auf definierten (Def.) Annahmen
  - gilt innerhalb eines Anwendungsbereiches und muss hier experimentell (Exp.) **verifizierbare** Ergebnisse liefern
  - z.B. klassische Mechanik funktioniert für
    - $v \ll c$
    - $\int(p)dx \gg \hbar$
- Ein **theoretisches Modell** macht oft **idealisierende Annahmen** um **explizite** Lösungen zu erlauben z.B. harmonischer Oszillator
- Computational Physics  
löst theoretische Ansätze **numerisch**

## Bedeutung der klassischen Mechanik

- zentrale Rolle, da anschauliche Theorie
- Einführung:
  - zentrale Größen (z.B. Energie, Drehimpuls, Wirkung)
  - Methoden (z.B. Variationsrechnung, Störungstheorie)
  - Modelle (z.B. harmonischer Oszillator, wichtig in Quantenmechanik (QM), Feldtheorie, ...)
- praktische Bedeutung:
  - Himmelsmechanik

- Statik
  - Molekül-
  - Chemie- und Biophysik
- nicht lineare Dynamik (z.B. Chaostheorie, Strukturbildung) sind Beispiele aktueller Forschung

# Kapitel 1

## Newtonsche Mechanik

### 1.1 allgemeine Begriffe

- Statik (ruhende Körper)
- Kinematik (Bewegung, ohne Beschreibung der Wechselwirkungen (WW))
- Dynamik (Bewegung **mit** Beschreibung der WW)

#### 1.1.1 Bezugssystem

Ursprung  $O$

Basisvektoren  $\vec{e}_i = \begin{cases} x, y, z \\ 1, 2, 3 \end{cases}$

- **Ort:**  $\vec{r}$  eines Teilchens (Massenpunkte) (Bahnkurve, Trajektorie)  $\vec{r}(t) = \sum_i \vec{x}_i(t) \vec{e}_i$
- **Geschwindigkeit:**  $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$
- **Impuls:**  $\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$
- **Beschleunigung:**  $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$

z.B. geradlinige - gleichmäßige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = 0$$

## 1.2 Die Newtonsche Gesetze (1687)

### NG1: Trägheitsgesetz

Kräftefreie Bewegung ist gleichförmig, d.h.  $v = \text{const.}$

### NG2: Grundgesetz der Mechanik

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = ma \quad m = \text{const.}$$

def. Kraft und Masse, Bewegungsgleichung

### NG3: Action = Reactio

$$F_{12} = -F_{21}$$

Kraft von 1 auf 2 = Kraft von 2 auf 1 **Voraussetzung (Annahme):**

- „absoluter“ Raum
- „absolute“ Zeit
- „absolute“ Masse

→ nur gültig für  $\frac{v}{c} \ll 1$   
( $c$  = Lichtgeschwindigkeit)

### Diskussion NG1:

Macht nur Sinn bei Angabe von Bezugssystem z.B. Vergleich rotierendes vs. ruhendes Bezugssystem

→ Ein Bezugssystem, in dem das NG1 gilt heißt „Inertialsystem“ (IS)

Bsp: Hörsaal, relativ zum Fixsternhimmel Näherung, z.B. wegen Erdrotation → Foucaultsches Pendel

→ physikalische Gesetze nehmen in IS eine besonders einfache Form an.

### NG1:

In einem IS ist die kräftefreie Bewegung durch  $\vec{r}(t) = \text{const.}$  beschrieben **Relativitätsprinzip** (Galilei)

Geg. sei IS S mit Bahnkurve  $\vec{r}(t)$

und IS  $\bar{S}$  mit Bahnkurve  $\bar{\vec{r}}(t)$

worin  $\bar{S}$  um  $\vec{r}_0$  zu S verschoben sei und sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_0 = \text{const.}$  dazu bewege:

Dann gilt die **Galilei Transformation** (Trafo)

$r \rightarrow \bar{r}$  mit

$$\bar{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) + \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (1)$$

→ **Relativitätsprinzip** Alle IS sind gleichwertig.



## NG2:

$$F = \dot{p} = m \cdot \vec{a}$$

- setzt ebenfalls ein IS voraus
- beschreibt Bewegung mittels **Wirkung**  $m \cdot a$  und **Ursache** Kraft  $F$
- Definition der Kraft und der (trägen) Masse  $m$
- **grundlegendes Postulat** der klassischen Mechanik:  
sind alle Kräfte  $F_i$  bekannt, so beschreibt

$$m \cdot a = \sum_i F_i$$

**vollständig** die Bewegung.

Für gegebene Kraft  $\vec{F}$  ergibt sich **vollständig** die Bewegung.

## NG3:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

d.h die Kraft ergibt sich als WW zwischen Körpern.

$$\rightarrow \frac{d}{dt}p_1 = -\frac{d}{dt}p_2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

→ Impulserhaltung

eigentlich auf Grund der „Homogenität des Raumes“.

**Zusatz:** Kräfte addieren sich wie Vektoren

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$$

### 1.2.1 Bem:

- vorher Aristotelesche Mechanik: unterschied
  - Bewegung auf der Erde
  - Bewegung der Gestirne
- Newton vereinheitlichte beide Bereiche: Theorie gilt sowohl für Bewegung der Planeten als auch für fallenden Apfel

→ immense Abstraktionsleistung!

allg. Ansatz: Vereinheitlichung von z.B. elektrischer und magnetischer WW Maxwell

- Wesentliches Axiom ist das 2.NG. (das 1.NG definiert IS, 3.NG entspricht Impulserhaltung)

**2.NG:**

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

DGL 2.Ord, Lösung ergibt Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  „Bewegungsgleichung“

Integrationskonstanten gegeben durch Anfangsbedingungen: z.B.  $\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0)$

### 1.2.2 Beispiele:

1.) **Konstante Kraft:**  $\vec{F} = \vec{F}_0$

z.B.  $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

2.) **Lineare Kraft:**  $\vec{F} \sim \vec{r}$

z.B. bei Federpendel mit  $r = |\vec{r}|$

$$m\ddot{r} = -kr$$

$$\text{mit } r(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

3.) **Zentrale Kraft:**  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$

z.B. Gravitation  $\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

4.) **Lorenzkraft:** (geschwindigkeitsabhängig)

$\vec{F} = \vec{r}(t) = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e[\hat{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)]$  Ladung  $e$  im elektrischen Feld  $\vec{E}$  und magnetischen Feld  $\vec{B}$

5.) **Reibungskräfte:**

– Stokesche Reibung  $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$

– Luftreibung:  $\vec{F} \sim \vec{v}^2 \frac{\vec{v}}{v}$

## 1.3 Erhaltungssätze

- spielen Zentrale Rolle in der Physik
- sind allg. gültig, z.B. auch in der QM
- reflektieren **Symmetrie** des Systems

allg Form eines erhaltungssatzes der Größe  $A(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

$$\frac{d}{dt}A = 0 \leftrightarrow A \text{ ist erhalten}$$

### 1.3.1 Impulserhaltung

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

### 1.3.2 Drehimpulserhaltung

Vektorielle Multiplikation von NG2 mit  $\vec{r}(t)$  ergibt:

$$m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}$$

Mit Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ist

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}})}_{=0} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} \text{ erhalten}$$

### Bsp: Zentralkraft

$\vec{F} \parallel \vec{r} \rightarrow \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const.}$  legt man oEdA  $\vec{L}$  in z - Richtung

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

liegen  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  in x - y - Ebene.

### 1.3.3 Energieerhaltung

Ein Teilchen, das sich unter  $\vec{F}$  von  $\vec{r}$  nach  $\vec{r} + d\vec{r}$  bewegt, verrichtet die Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Längs eines eges C von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  ist die geleistete Arbeit

$$W = \int_C dW = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

die von  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  und i.h. auch von der Wegführung abhängt-

Die pro Zeit verrichtete Arbeit heißt **Leistung**

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$[\oint_C = \text{geschlossenes Wegintegral}]$$

Multiplikation von NG2 mit  $\dot{\vec{r}}$  gibt:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\hat{=} \text{ Leistung } P)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2}}_{=T} = \frac{dT}{dt} = P = (\vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Kinetische Energie T

konservative Kräfte  $\vec{F}_{\text{kons}}$  und dissipative Kräfte  $\vec{F}_{\text{diss}}$ , wobei  $\vec{F}_{\text{kons}}$  alle Anteile mit:

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}}$$

erhält, wobei k das Potential oder die potentielle Energie ist. Minuszeichen ist Konvention.

Zusammen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) \right) = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (2)$$

Konservative Kraft  $\Leftrightarrow E = T + U = \text{const.}$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} &= -\frac{dU(\vec{r})}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -\text{grad}(U(\vec{r})) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}} \\ \vec{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^\top \\ \text{grad}(U(\vec{r})) &= \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)^\top \end{aligned}$$

folgt :

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\text{grad}(U(\vec{r})) \quad (3)$$

**Bsp: Der gedämpfter harmonischer Oszillator**

$$F = -kx - \gamma\dot{x} = F_{\text{kons}} + F_{\text{diss}}$$

mit

$$F_{\text{kons}} = -\frac{dk}{dx} \rightarrow k(x) = \frac{k}{2}x^2$$

Da  $F_{\text{diss}} \cdot \dot{x}$  quadratisch in  $\dot{x}$ ,  $\frac{dk(x)}{dt}$  aber linear in  $\dot{x}$  kann  $F_{\text{diss}}\dot{x}$  nicht in der Form  $\frac{dk}{dt}$  geschrieben werden.

**Bedingung** für konservative Kraft ist

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}k(\vec{r})$$

Dann ist das Wegintegral:

$$W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

**Wegunabhängig**, verschwindet also für jeden geschlossenen Pfad :

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

**allg.:**

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)}_{\text{z.B. Lorentz-Kraft}}$$

da:

$$P_L = \dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{R}) = 0$$

**Anwendung:** Vereinfachung von Bewegungsgleichungen

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U(x)$$

DGL 2. Ordnung

**Bsp:** 1 Dimensionales System mit Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

$$\rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad \text{DGL 1. Ordnung}$$

„erstes Integral“ ( da eine Integration bereits vollzogen)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}$$

Qualitative Diskussion der Bewegung:

$$E = T + U \geq U$$

**Numerische Integration der Bewegungsgleichung:**

**Bsp:**

$$f(t) = m\ddot{x}(t) = m\dot{v}(t)$$

**Idee:** Taylor Entwicklung von  $x$  zur Zeit

$$\begin{aligned}
 x(t + \Delta t) &= x(t) + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v \underbrace{((t + \Delta t) - t)}_{\Delta t} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{F/m=a} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3x}{dt^3} \Delta t^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\
 &= x(t) + v(t) \Delta t + \frac{f(t)}{2m} \Delta t^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta t^4)
 \end{aligned}$$

z.B. Lösung durch Abbruch in 2.Ordnung (Euler-Algorithmus)

**Besser:**

$$\begin{aligned}
 x(t - \Delta t) &= x(t) - v(t) \Delta t + \frac{f(t)}{2m} \Delta t^2 - \frac{\Delta t^3}{3!} \ddot{x} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\
 x(t + \Delta t) + x(t - \Delta t) &= 2x(t) + \frac{f(t)}{m} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)
 \end{aligned}$$

bzw.

$$x(t + \Delta t) \approx 2x(t) - x(t - \Delta t) + \frac{f(t)}{m} \Delta t^2 \quad (1)$$

Geschwindigkeit über:

$$\begin{aligned}
 x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t) &= 2v(t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
 \Rightarrow v(t) &\approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Gl. (1) und (2) bestimmen den Verlet-Algorithmus

## 1.4 Beschleunigte Bezugssysteme

Newton Gesetze gelten für Inertialsysteme (IS), Bezugssystem, das relativ zu IS beschleunigt ist, ist kein IS  $\rightarrow$  es treten sogenannte Scheinkräfte auf.

z.B. Beschleunigung bei linearer Bewegung

### 1.4.1 Rotierendes Bezugssystem:

**Geg:** IS  $S$  mit  $\vec{r}(t)$

und nicht-IS  $S'$  mit  $\vec{r}'(t)$ , das gegenüber  $S$  mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1)$$

rotiert,  $\vec{\varphi}, \vec{\omega}$  zeigen in Richtung der Drehachse.

oEdA:  $\vec{\varphi} \sim \vec{e}_z$

Berechne Vektor  $\vec{G}$ , der in  $S'$  ruht. Änderung  $d\vec{G}_{\text{rot}}$  aufgrund Rotation

$$\begin{aligned}
 |d\vec{G}_{\text{rot}}| &= |d\vec{\varphi}| |\vec{G}| \sin \theta \\
 d\vec{G}_{\text{rot}} &\perp \vec{\omega} \quad d\vec{G}_{\text{rot}} \perp \vec{G}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow d\vec{G}_{\text{rot}} = d\vec{\varphi} \times \vec{G} = (\vec{\omega} dt) \times \vec{G} \quad (2)$$

Beliebiger Vektor  $\vec{G}(t)$ , der sich in  $S'$  während  $dt$  um  $d\vec{G}_{S'}$  ändert, ändert sich damit in  $S$  um:

$$d\vec{G}_S = d\vec{G}_{S'} + d\vec{G}_{\text{rot}}$$

Damit:

$$\boxed{\frac{d\vec{G}_S}{dt} = \frac{d\vec{G}_{S'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}} \quad (3)$$

Für  $\vec{G} = \dot{\vec{r}}$  ist:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4)$$

$$\vec{G} = \dot{\vec{r}} : \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Für  $\omega = \text{const.}$  erhalten wir:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Für ein in  $S'$  kräftefreies Teilchen mit:

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

erhalten wir dann:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{-2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

$$F_z \sim \omega^2 r, \text{ zeigt von Drehachse weg}$$

$$F_c \sim \omega \dot{r}, \text{ steht } \perp \text{ zur Bewegungsrichtung}$$

**Bsp:**

- Erddrehung, Foucaultsches Pendel
- Ball auf Drehscheibe

## 1.5 Mehr-Körper-Probleme

Betrachte  $N$  Teilchen (Massenpunkte) mit:

Ort:  $\vec{r}_i$ , Masse  $m_i$  und die auf sie wirkende Kraft  $\vec{F}_i$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

Unterscheidung:

**Innere Kräfte:** Kräfte der Teilchen aufeinander. z.B. Coulomb-Kräfte  $\vec{F}_{ij}$  von (geladenen) Teilchen  $i$  und  $j$

**Äußere Kräfte:**  $\vec{F}_i^A$  wirken von außen. z.B. Schwerkraft oder externes elektromagnetisches Feld.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^A + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

**Schwerpunktbewegung und Impuls** Ortsvektor des Schwerpunktes

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad M = \sum_i m_i$$

Bewegungsgleichung für  $\vec{R}$ :

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij}}_{\text{3. NG: } F_{ij} = -F_{ji}}$$

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^A + 0 = \vec{F}^A$$

**Schwerpunktsystem:**

**Schwerpunkt bewegt sich nur gemäß äußerer Kräfte**

⇒ vergleiche Münchhausen-Trick

→ Rechtfertigung der Idealisierung realer Körper durch Massepunkte

Auf ein **abgeschlossenes System** wirken keine (oder vernachlässigbare) äußeren Kräfte

$$\rightarrow \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} = 0 \quad \rightarrow \vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = \text{const}$$

abgeschlossenes System ↔ Schwerpunktsystem ist erhalten

**Drehimpuls:** Vektorielle Multiplikation des 2. NG mit  $r \vec{r}_i$

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)}_{\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^k}_{\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\ &\stackrel{\text{3. NG}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{\text{Annahme: } \vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j} = 0 \end{aligned}$$



d.h. innere Kräfte ergeben kein resultierendes Drehmoment.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A = \vec{M}$$

abgeschlossenes System  $\leftrightarrow$  Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  ist erhalten

**Energie:** Mult. von 2.NG mit  $\dot{\vec{r}}_i$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_i^2}_T = \frac{dT}{dt} \\ &= \sum_i (\vec{F}_i^{\text{kons}} + \vec{F}_i^{\text{diss}}) \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

wobei

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \frac{dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{dt} = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

mit

$$\frac{\partial U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_i} \vec{e}_z$$

**Energiesatz:**

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Kräfte konservativ  $\leftrightarrow E = T + U$  erhalten

Energieerhaltung gilt also auch bei äußeren Kräften, solange sie konservativ sind.

**Aufteilung:**

$$\begin{aligned} \vec{F}_i^{\text{kons}} &= \vec{F}_i^A(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} F_{ij}^I(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \\ &= - \frac{\partial U^A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial U^I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} \end{aligned}$$

mit

$$U^A = \sum_i U_i(\vec{r}_i), \quad \vec{F}_i^A = - \frac{\partial U_i(\vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_i} \quad \text{äußere Kräfte wirken auf einzelne Teilchen}$$

$$U^I = \sum_{i < j} U_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad \text{Annahme: 2 Teilchen WW.}$$

mit  $\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \stackrel{3.NG}{=} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j}$  hängt U nur von  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  ab

Annahme:  $\vec{F}_{ij}^I \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij} \rightarrow$  hängt nur von  $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$  ab

$$\vec{F}_{ij}^I = - \frac{\partial U_{ij}^I(r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_{ij}}$$

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i < j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

z.B.:

$$U_i = q_i \Phi(\vec{r}_i)$$

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

**Allgemein:** Abgeschlossene N-Teilchen System ( $N \geq 2$ ) mit ausschließlich konservativen Kräften haben also mindestens 10 Erhaltungsgrößen:

• der Gesamtimpuls	$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$ (*)	3 Größen
• ein Vektor, der die Schwerpunktsbewegung beschreibt	$M \vec{R} - \vec{P} \cdot t$ (Int. von (*))	3 Größen
• der Gesamtdrehimpuls	$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$	3 Größen
• und die Gesamtenergie	$E = T + U$	1 Größe
		<hr/> 10 Größen

Selten mehr: z.B. Lenzscher Vektor im Keplerproblem

## 1.6 Die Hamilton-Funktion (1833)

**Newton:** Kraft ist zentrale Größe

**Hamilton:** Energie ist zentrale Größe

Gegeben sei N-Teilchen System mit ausschließlich konservativen Kräften

$$F_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i} = \dot{p}_i \quad (3 \text{ DGL 2. Ordnung}) \quad (1)$$

$$r \equiv (r_1, r_2, \dots, r_{3N}) \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_{3N}) \quad i = (1, \dots, 3N)$$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \quad p_i \equiv m_i v_i \quad \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \quad , \text{ Potential } U$$

Gesamtenergie  $E = T + U$  wird durch die Hamilton-Funktion beschrieben: „Hamiltonian“:

$$H = H(r, p) = T(p) + U(r)$$

$$= \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(r) \quad (2)$$

Mit

$$\frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{\partial U}{\partial r_i} \stackrel{(1)}{=} -\dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} = \dot{r}_i$$

$m_1 = m_2 = m_3 =$  Masse des ersten Teilchens

$m_4 = m_5 = m_6 =$  Masse des zweiten Teilchens

$\vdots$

äquivalent zu den Newton Gleichungen: Hamilton-Gleichungen: Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

$$\begin{aligned}\dot{r}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i}\end{aligned}\tag{3}$$

6N DGL 1. Ordnung (Hamilton)

3N DGL 2. Ordnung (Newton)

$$\frac{d}{dt}H(r(t), p(t)) = \sum_i \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\partial H / \partial r_i} + \frac{\partial H}{\partial r_i} \underbrace{\dot{r}_i}_{\partial H / \partial p_i} \right] = 0$$

d.h. Energie ist erhalten.

**Bem:**

- Im Gegensatz zu vektoriellen Kräften ist der Hamiltonian (die Hamilton Funktion) ein **Skalar**, und damit wesentlich leichter aufzustellen.
- Hamilton-Funktion kann für allgemeine Fälle (z.B. geschw. abhängige Potentiale oder zeitabhängige Potentiale (siehe später)) und hat dann nicht notwendigerweise die Bedeutung der Gesamtenergie.
- $(r, p)$  bilden den 2.3N dimensional **Phasenraum** der die Bewegung **vollständig** beschreibt.

**Bsp: harmonischer Oszillator**

**gedämpfter harm. Oszillator**

**ebenes Pendel mit überschlag**

## Newtonsche Mechanik: theoretisches Konzept

**1.Def:**

- Masse, Kraft, Energie
- Inertialsystem, beschleunigte Bezugssysteme
- konservative/ dissipative, innere/ äußere Kräfte

**2. Bew. Gl.:** N Teilchen, konservative Kräfte mit Pot  $U(r)$

$$r = (r_1, \dots, r_{3N})$$

$$m_i \ddot{r}_i = - \frac{\partial U(r)}{\partial r_i}$$

gewöhnlich = DGL 2. Ord i. A. nicht linear

**3. Erhaltungssätze** Schwerpunkt  $\vec{R}, \vec{P}, M = \sum_i m_i$

- $\frac{d}{dt} \vec{p} = M \cdot \ddot{\vec{R}} = \underbrace{\vec{F}^A}_{\text{äußere Kraft}} \stackrel{\text{abgeschlossenes System}}{=} 0 \leftrightarrow \vec{p} = \text{const.} \quad \textbf{Impulserhaltung}$
- $\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A = \vec{M} \rightarrow 0 \leftrightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad \textbf{Drehimpulserhaltung}$
- $\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i \stackrel{\text{Kräftegleichgewicht}}{\rightarrow} 0$   
 $E = T + U = \text{const.} \quad \textbf{Energieerhaltung}$

**Alternativ:** Hamilton Funktion mit Impuls  $p = (p_1, \dots, p_{3N}) \hat{=}$  Gesamtenergie

$$H(r, p) = T(p) + U(r) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$$

$$\rightarrow \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial r_i} \quad 2 \times 3N \text{ DGL 1. Ord}$$

$(r, p)$  bilden den  $2 \times 3N$  dim Phasenraum

- Wichtig für Übergang zur QM und statistischen Mechanik
- Beschreibt Bewegung vollständig, d.h. geg. Bew. Gl. mit Anfangsbedingungen  $r_i(0), p_i(0)$ , so ist  $r(t)$  und  $p(t)$  **für alle Zeiten vollständig** bestimmt. Man sagt die klassische Mechanik ist **deterministisch**.

## Nichtlineare Dynamik und Chaos

- Man kann zeigen: Existieren für ein System mit  $2f$ -dim Phasenraum  $f$  Erhaltungsgrößen, so heißt das System Integrabel.

**Bsp.:**

- 1) Konservative Bewegung in 1D  $\rightarrow f = 1$   
Energie ist erhalten  $\rightarrow$  System ist Integrabel
- 2) 2-Körperproblem:  $f = 6$   
Erhaltung von Energie, Gesamtimpuls,  $\vec{L}^2, L_z \rightarrow$  System ist integrabel
- 3) 3-Körperproblem:  $f = 9$   
6 Erhaltungsgrößen  $\rightarrow$  i.A. nicht integrabel, **kann chaotisch** sein (Poincare' um 1900)

- **Grund**

Nichtlineare Bwe. Gl. können instabile Lösungen haben d.h. bei **geringstfügiger** Änderung der Anfangsbedingungen zeigt System für **lange Zeiten** eine qualitativ andere Bewegung: „**Schmetterlingseffekt**“ sog. **deterministisches Chaos**

- **Bedingung** für chaotisches Verhalten

- Anzahl der Freiheitsgrade  $f \geq 2$
- Nichtlinearität der Kraft
- **Bsp:** Vergleiche  
 harm Oszillator  $F \sim r, U(r) \sim r^2$   
 mit stabilem Fixpunkt und  $U(r)$   
 Pendel:  $F \sim \sin \varphi, U \sim \cos \varphi$  und  $U(\varphi)$   
 mit stabilen Fixpunkten in sinus Tälern und instabilen Fixpunkten auf den sinus Bergen

## 1.7 Schwingungen

Harm. Oszillator ist ein zentrales Modell der Physik

- analytisch lösbar, auch mit Reibung und Antrieb und in vielen Dimensionen
- lineares System

1D System mit Harm. Fkt.

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

das bei  $q = q_0$  eine stable Gleichgewichtslage besitzt.

Idee („harmonische Näherung“) : Taylor Entwicklung von  $k$  um  $q_0$

$$U(q) = \underbrace{U(q_0)}_{\text{oEdA} = 0} + \underbrace{\frac{dU}{dq}\bigg|_{q_0}}_{= 0, \text{ da GGW-Lage}} (q - q_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2U}{dq^2}\bigg|_{q_0}}_{=k} (q - q_0)^2 + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2} k (q - q_0)^2 \equiv \frac{k}{2} x^2$$

**Bew Gl:**

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

oder:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Lösungen sind  $\sin \omega t, \cos \omega t$  mit  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  Die allg. Lösung mit Anfangsbedingungen  $x_0 = x(0), p_0 = p(0)$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega t - mx_0 \omega \sin \omega t$$

Mit

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (i^2 = -1)$$

können wir alternativ  $e^{\pm i\omega x}$  als Lösung ansetzen, z.B.

$$x(t) = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t})$$

Im folgenden werden Schwingungen in 1D mit Reibung:

$$F_R = -\gamma \dot{x}(t)$$

und einer Zeitabhängigen externen Kraft:

$$F_{\text{ext}}(t) \quad \text{„Antrieb“}$$

bezeichnet.

### 1.7.1 Gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

**Grenzfälle:**

- $\gamma = 0 \rightarrow$  harm. Oszillator,  $x \sim e^{\pm i\omega t}$
- $\omega = 0, \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0, \quad v = \dot{x}$   
 $\dot{v} = -\gamma v \quad \rightarrow \quad v \sim e^{-\gamma t}$

**Ansatz:**

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad , \quad \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$$

**eingesetzt:**

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$  charakteristische Gleichung

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$\rightarrow$  i.A. 2 Lösungen  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

**D < 0** d.h.  $\gamma < 2\omega$ , komplexe Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$$

**allg. Lösung:**

$$x(t) = e^{-\gamma \frac{1}{2} t} (c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{i\Omega t})$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \xrightarrow{\gamma=0} \omega$$

$\gamma$  bewirkt Dämpfung und Änderung der Frequenz

**D > 0**:  $\gamma > 2\omega$ : „Überdämpfte Schwingung“

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

**D = 0**:  $\gamma = 2\omega$

$\rightarrow$  wir erhalten

$$x(t) = C e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

d.h. nur eine Lsg. anstelle von 2 unabhängigen Lsg.

**Variation der Konstanten:**

$$x(t) = C(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x} = (\dot{C} - \frac{\gamma C}{2}) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\ddot{x} = (\ddot{C} - \gamma \dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4}) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

**eingesetzt:**

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{C} - \gamma \dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4} + \gamma \dot{C} - \frac{\gamma^2 C}{2} + \omega^2 C) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ &= (\ddot{C} + \underbrace{C(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4})}_{=v}) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \ddot{C} = 0 \quad , \quad C(t) = C_0 + C_1 t$$

$\rightarrow$  **allg:**

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + C_1 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

„kritische gedämpfte Schwingung“

**Bem:**

- Allg. **lineare** DGL (mit konstanten Koeffizienten) n-ter Ordnung können durch einen Exponentialansatz gelöst werden.  
 $\rightarrow$  charakteristische Gl. ist Polynom vom Grad n
- Physikalische Bedeutung der Nullstellen von Polynomen:  
 Komplexe Nullstellen  $\hat{=}$  oszillatorische Lösungen  
 Reelle Nullstellen  $\hat{=}$  zerfallende Lösungen

## Gedämpfte Schwingungen (Wiederholung)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1/2} = \underbrace{-\gamma/2}_{\text{Dämpfung}} \pm \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}_{\substack{\text{für } \omega > \gamma/2 \rightarrow \text{Schwingung} \\ \text{sonst Dämpfung}}}$$

## 1.7.2 Der getriebene Oszillator

$$\underbrace{\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \omega_0^2 x}_{\text{homogene DGL}} = f(t) \quad \begin{array}{l} \text{externer Antrieb } f(t) \\ \text{„Inhomogenität“ der DGL} \end{array}$$

**Lösung der DGL:**

$$\underbrace{x_{\text{tot}}}_{\text{bereits bekannt}} = \underbrace{x_{\text{hom}}(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} + x(t)$$

Betrachten periodischen Antrieb

$$f(t) = f \cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

bzw.

$$f(t) = f e^{\pm i\omega t}$$

mit **Exp. ansatz:**  $x(t) = A \pm e^{\pm i\omega t}$

**Eingesetzt:**  $[\omega \pm i\omega\gamma + \omega_0^2] A \pm = f$  [Ermitteln mit  $z^*$ ]

$$\rightarrow A \pm = f \frac{\omega_0^2 - \omega^2 \mp i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t})$$

$$= f \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$= A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \quad \text{Amplitude}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{a}{b} \rightarrow \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{Phase}$$

Resonanz bei  $\omega = \omega_0$ ,  $A$  groß für  $\gamma$  klein  $\gamma \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \omega_0$  „Resonanzkatastrophe“  
z.B. Brücke, Tacoma Narrows Bridge 1940

Gesamtlösung

$$x_{\text{tot}}^{(t)} = x_{\text{hom}}^{(t)} + x(t)$$

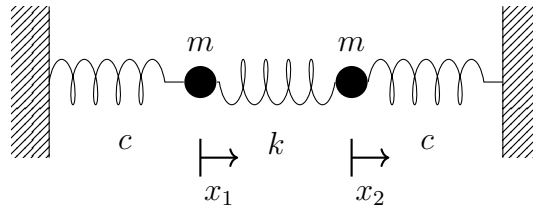
$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} x(t) \quad \text{„stationäre Lösung“}$$

Resonanz wichtig:

- Schwingende Karrosserieteile
- Schwingkreis (E-Dynamik)
- Molekülschwingungen etc.



### 1.7.3 gekoppelte Oszillatoren



$m_1$  und  $m_2$  sind aneinander und an zwei Wänden mit Federn gekoppelt (äußere Federn mit Federkonstante  $c$  und innere Feder mit  $k$ )

$x_1, x_2$  die jeweiligen Auslenkungen aus der Ruhelage

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 + k(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -cx_2 - k(x_2 - x_1) \quad (2)$$

System von gekoppelten DGL. Mit

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

ist (1) + (2):

$$m\ddot{y}_1 = -cy_1$$

(1) - (2):

$$m\ddot{y}_2 = -(c + 2k)y_2$$

→ entkoppelte DGL  
mit Frequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2k}{m}}$$

Anfangsbedingungen: z.B.  $x_2(0) = a, \quad x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$y_1(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 t \quad , \quad y_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t \text{ Eigenschwingungen}$$

eingesetzt:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

**Zusammenhang mit Eigenwertproblem**

$$m\ddot{\vec{x}} = -V\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} c + k & -k \\ -k & c + k \end{pmatrix}$$

**Ansatz:**

$$x_1(t) = a_1 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_i(t) = -\omega^2 a_i e^{i\omega t}$$

eingesetzt:

$$-m\omega^2 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -V \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

mit  $\lambda = m\omega^2$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwertgleichung	$\Leftrightarrow$	charakteristische Gleichung
$(V - \lambda 1)\vec{a} = 0$	$\Leftrightarrow$	$V\vec{a}_1 = \lambda_i \vec{a}_i$ (1)

Lösung für

$$\det(V - \lambda 1) = 0$$

$$(c + k - \lambda)^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2(c + k)\lambda + (c - k)^2 - k^2 = 0$$

„Eigenfrequenzen“ Eigenwerte

$$\rightarrow \lambda_1 = c \quad ; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\lambda_2 = c + 2k \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2k}{m}}$$

Lösung der Eigenwertgleichung (1) für die Eigenwerte ergibt die „Eigenvektoren“ hier Eigenschwingungen

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{V}_{\substack{\text{Operator} \\ \text{Abbildung} \\ \text{Matrix}}}$	$\cdot$	$\underbrace{\vec{a}_i}_{\text{Eigenvektor}}$	$=$	$\underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwert}}$	$\cdot$	$\underbrace{\vec{a}_i}_{\text{Eigenvektor}}$
--	---------	---	-----	---	---------	---

## Eigenschwingungen

z.B. betrachte Molekül mit N Atomen (nicht lineare Mol)(für lineare Mol.  $3N - 5$  FG)

$$3N - 3 - 3 = 3N - 6 \quad \text{Freiheitsgrade}$$

-3 Translation -3 Rotation also  $3N - 6$  Freiheitsgrade für innere Bewegung  $f = 3N - 6$  innere FG  $x_1, \dots, x_f$

mit Gleichgewichtslage  $x_1^{(0)}, \dots, x_f^{(0)} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i} \big|_{x_i^{(0)}} = 0$

und Potential  $V(x_1, \dots, x_f)$

Entwickle V um  $\vec{x}^{(0)}$

$$V(x_1, \dots, x_f) = \underbrace{V(x_1^{(0)}, \dots, x_f^{(0)})}_{\text{oEdA} = 0} + \sum_i \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{x_i^{(0)}}}_{=0} (x_i - x_i^{(0)}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0}_{V_{ij}} \underbrace{(x_i - x_i^{(0)})}_{\equiv x_i} \underbrace{(x_j - x_j^{(0)})}_{\equiv x_j} + \dots$$

Hessematrix:  $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j$  harmonische Näherung

**Bew. GL:**

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = - \sum_j V_{ij} x_j$$

massenbehaftete Koordinaten:  $q_i = \sqrt{m_i} x_i$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{q}_i + \sum_j V_{ij} q_j = 0} \quad V_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}$$

**Exp. Ansatz:**  $q_i(t) = q_i e^{i\omega t}$

$$\rightarrow \sum_i V_{ij} a_j - \omega^2 a_i = 0 \text{ charakteristische Gl.}$$

Mit

$$\mathcal{V} = \{V_{ij}\} \quad , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ist  $(\mathcal{V} - \lambda 1) \vec{a} = 0$  Eigenwertproblem

### 1.7.4 Eigenschwingungen

$$\mathcal{V} = \{v_{ij}\} \quad i, j = 1, \dots, N \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$$

$$\text{Eigenwertproblem: } \boxed{\mathcal{V} \vec{a} = \lambda \vec{a}} \quad \lambda = \omega^2$$

**Eigenwerte**  $\lambda_k$

$$\det(\mathcal{V} - \lambda 1) \vec{a} \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$

charakteristische Gleichung., Polynom N-ter Ordnung

**Eigenvektoren**  $\vec{a}_k$ :

Lösungen (1) mit  $\lambda = \lambda_k$  orthogonal (bzw. Orthonormal)

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow$  Eigenwertproblem  $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N)$  ist orthogonal

$$A^\top = A^{-1} \rightarrow AA^\top = 1 = A^\top A$$

A ist diagonalisierbar die Hessematrix V

$$A^T V A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \Lambda$$

→ **Lösungen:**  $q_i(t) = a_{ik} e^{i\omega_k t} \quad (k = 1, \dots, N)$

**Allg. Lsg.:**

$$q_i(t) = \sum_k C_k q_{ik} e^{i\omega_k t}$$

mit Koeffizienten  $C_k$  aus Anfangsbedingungen

$$q_i(t) = \sum_k a_{ik} Q_k(t)$$

$$\leftrightarrow \quad \vec{q} = A \vec{Q}$$

$$Q_k(t) = C_k e^{i\omega_k t}$$

„Eigenschwingung“ oder Normalmoden

**Pot.Energie:**

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \vec{q}^T V \vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \vec{Q}^T \underbrace{A^T V A}_{\Lambda} \vec{Q} = \frac{1}{2} \vec{Q}^T \Lambda \vec{Q} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \omega_k^2 Q_k^2 \quad \text{pot. Energie in } \vec{Q}_k \text{ ist diagonal} \end{aligned}$$

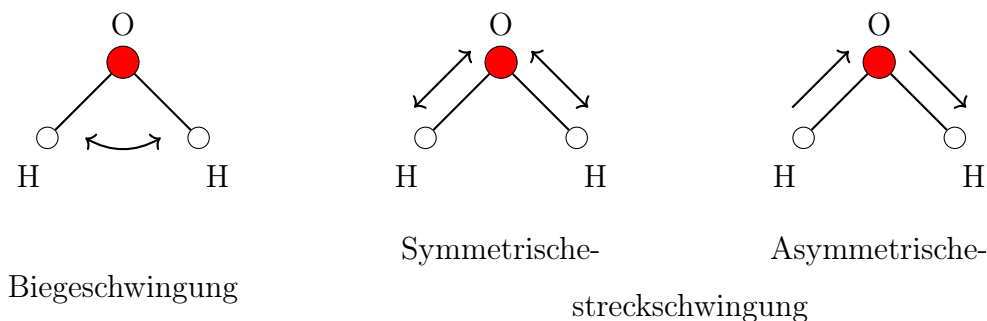
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \dot{\vec{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \underbrace{A^T A}_{=1} \dot{\vec{Q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \dot{\vec{Q}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \dot{Q}_k^2 \quad \text{kin. Energie ist auch Diagonal} \end{aligned}$$

Mit  $P_k = \dot{Q}_k$  ist damit der Hamiltonian

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2)$$

der in ein System **unabhängiger** Oszillatoren **seperiert**.

### Bsp: Normalmoden von Wasser



**Bilder:** Wasser Molekül mit Biegeschwingung und symmetrischer oder asymmetrischer Streckschwingung.

**Anwendung:** Wasser absorbiert (infrarot) Licht mit den Eigenfrequenzen:  $\omega_k$  **sind exp. observable Größen**

→ Schwingungsspektroskopie

## 1.8 Das Zweikörperproblem

- beschränkt z.B. das Keplerproblem (Erde,Sonne) das H-atom, das 2-atomige Molekül
- analytisch lösbar
- Anwendung von Symmetrieüberlagerungen

2 Körper mit Massen  $m_i$ , Orten  $\vec{r}_i$ , Impulsen  $\vec{p}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Wechselwirken durch ein Zentralpotential  $U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$ . abgeschlossenes, konservatives System mit Energie

$$H = T + U = \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \quad (1)$$

**Vorgehen:**

- Separation der Schwerpunktsbewegung (Impulserhaltung)  
→ Reduktion auf Einkörperproblem (3 statt 6 Freiheitsgrade)
- Drehimpulserhaltung → 1D Problem
- Diskussion des Keplerproblems,  $k \sim 1/r$

### (1.) Trafo in Schwerpunkts- und Relativbewegung

Schwerpunktskoordinaten:  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

Relativkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ T &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 \\ &\stackrel{(2)}{\rightarrow} \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2}}_{M/2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu/2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu}\end{aligned}\quad (3)$$

Gesamtmasse:  $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \begin{cases} m_1 \text{ für } \frac{m_1}{m_2} \ll 1 & \text{Sonne Erde} \\ \frac{m}{2} \text{ für } m_1 = m_2 = m & \text{2-atom Modell} \end{cases}$$

Da Gesamtimpuls erhalten ist

$$\vec{P} = M\vec{R} = \vec{P}_0 = \text{const.}$$

ist schwerpunktsbewegungs, die unabhängig von Relativbewegung ist

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}(0)}{M} t$$

→ Separation von SP- und Relativbewegung

oder Entkopplung → Einkörperproblem mit 3 (statt 6) Freiheitsgraden

Beobachte Relativbewegung

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla k(|\vec{r}|)$$

(2.) Drehimpulserhaltung Das Zentralproblem, d.h.

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.} \quad \text{also auch Richtung konstant}$$

oEdA sei  $\vec{L} = l\vec{e}_z$

Mit  $\vec{L} \perp \vec{r}$ , ist  $\vec{r} \perp \vec{e}_z$  und damit  $z(t) = \text{const.} \stackrel{\text{oEdA}}{=} 0$

d.h. Bewegung findet in x-y-Ebene statt. (nur noch 2 FG)

Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

mit:

$$l = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - \mu r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

ergibt sich für die Gesamtenergie

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (7)$$

effektives Potential  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$  hat neben dem „normalen“ Radialterm  $U(r)$  noch den sogenannten Zentrifugalterm  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$  oder Zentrifugalbarriere

→ 1D Systeme, Bewegungsgleichung ist lösbar

Lösung durch

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

ist:

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r'))}}$$

was  $r = r(t, E, l, r_0)$  ergibt die Bahnkurve  $r(\varphi)$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{r}(\varphi) &= \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \\ \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}}{\frac{l}{\mu r^2}} \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \frac{l}{\sqrt{\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{(E - U_{\text{eff}}(r'))}} \end{aligned}$$

$r_0, p_0, E, l$  sind dann Anfangsbedingungen

### 1.8.1 Diskussion des Zweikörperproblems

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}}}$$

$r_0, \varphi_0, E, l \hat{=}$  Anfangsbedingungen des 3D Problems

$(z(0) = \dot{z}(0) = 0)$  Anfangsbedingungen des 3D Problems)

- wegen  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$  kann  $\dot{\varphi}$  nicht das Vorzeichen wechseln → Drehung immer in selbe Richtung d.h. für  $E = U_{\text{eff}}$  ist  $r' = 0$  → Umkehrpunkte
- Bsp: Sei  $U_{\text{eff}}(r) = \alpha r^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$   
 $\alpha > 0, l \neq 0, E = E_0$
- $r$  oszilliert zwischen  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$
- Form der Bahnkurve zwischen je 2 Umkehrpunkten gleich  
→ Bahn ist durch Teilschleife festgelegt
- Bahn ist nicht notwendigerweise geschlossen  $\Delta\varphi$  zwischen zwei Umkehrpunkten

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

→ geschlossen, wenn nach  $n$  Umläufen  $n\Delta\varphi = m\pi$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ )

- Bsp:  $r^2$  oder  $\frac{1}{r}$  Potential  $\Delta\varphi = \pi$
- Für  $E = E_{\text{kin}}$  ist  $r = r_0 = \text{const.} \rightarrow$  Kreisbahn mit  $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu r_0^2} t$
- Für  $l = 0$  verschwindet Zentrifugalbarriere
- $\dot{\varphi} = 0, \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}} \rightarrow$  Bewegung zentral
- je nach Potential wird auch  $N \rightarrow 0$  möglich (unelastisch, wegen endlicher Größe der Teilchen)
- Standartfall  $l \neq 0$

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty && \text{(endliche grÖÖße)} \\ U_{\text{eff}} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 && \text{WW nicht „gebundener Zustand“} \\ U_{\text{eff}} &= \min. && \text{„gebundener Zustand“} \end{aligned}$$

$E < 0$ : gebundene Bewegung (auch bei H-Atomen, Elektronenstruktur,  $\text{H}_2$ -Molekül, Kernbewegung)

$E > 0$ : Streuung d.h. Teilchen kommt aus dem Unendlichen fliegt bis zum Umkehrpunkt  $r_0$  und verschwindet wieder Abstoßung bei  $r_0$  wegen Zentrifugalbarriere  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$

bilder zu anziehendem-/abstoßendem Potential

## 1.8.2 Keplerproblem

d.h.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  ( $\alpha > 0$ )

$\alpha = Gm_1m_2$  Gravitations-Potential

$\alpha = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$  Coulomb-Potential

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(r) &= -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \\ \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} &= \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2l^2}{2\mu r^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad r_0 = \frac{l^2}{\alpha\mu} \end{aligned}$$

Mit:

$$q = \int dr \frac{\frac{l}{r^2}}{\sqrt{2\mu E + 2\mu \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{r^2}}}$$

mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{s} \quad s = \frac{1}{r} \quad \frac{ds}{dr} = -\frac{1}{r^2} \\ q &= - \int ds (2\mu \frac{E}{l^2} + 2\mu \alpha \frac{s}{l^2} - s^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\int dx (c + 2bx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\arccos \frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}$$



ist

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\mu^2 \frac{\alpha^2}{l^4} 2p \frac{E}{l^2}}} = \arccos \frac{\frac{l^2}{\alpha\mu} \left(\frac{1}{r}\right) - 1}{\sqrt{1 + 2l^2 \frac{E}{\mu\alpha^2}}}$$

Mit  $p = \frac{l^2}{\alpha p}$  Abstand  $r_0$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2 \frac{E}{\mu\alpha^2}} \quad \text{„Exzentrizität“}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\text{folgt } \varphi = \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{\epsilon}$$

oder:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

Polar-Gleichung für Kegelschnitte:

$\epsilon > 1$   $E > 0$  Hyperbolen

$\epsilon = 1$   $E = 0$  Parabel

$\epsilon < 1$   $E < 0$  Ellipse

Bsp:

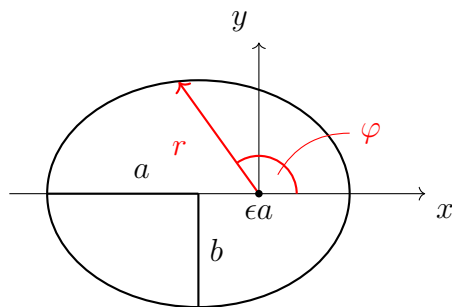
Merkur:  $\epsilon = 0,206$  (schwer zu beobachten)

Erde:  $\epsilon = 0,017$

Mars:  $\epsilon = 0,043$  (an ihm entdeckt)

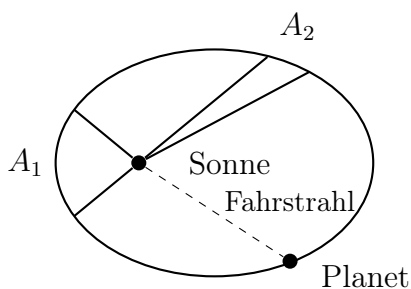
gebundene bewegung  $\rightarrow$  Keplersche Gesetze

1) Planetenbewegung sind Ellipsen mit Sonne in einen Brennpunkt



$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Flächensatz



Die vom Fahrstrahl pro Zeit  $dt$  überstrichene Fläche  $dA = r^2 \frac{d\varphi}{2}$  ist konstant  
Also  $A_1 = A_2$  wurden vom Fahrstrahl in der gleichen Zeit überfahren.

3) Umlaufzeit T und die große Halbachse a verhalten sich wie

$$T^2 = \text{const.} \cdot a^3$$

- Kepler (1571-1701): aufgrund von Beobachtungen der Planeten
- Newton leitete Gravitationsgesetz aus Keplerschen Gesetzen ab
- KG3:  $\frac{r^3}{T^2} = \text{const.}$   
Kreisbahn:  $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow r^3 \omega^2 = \text{const.} \rightarrow r \omega^2 = \text{const.} \cdot \frac{1}{r^2}$

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}(t) \sim \omega^2 \vec{r}(t) \quad |F| \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{Gravitationsgesetz}$$

Streuung:

- $\epsilon = 1, E = 0 \rightarrow$  Parabel als Grenzfall
- $\epsilon > 1, E > 0 \rightarrow$  Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi$$

attraktives Potential:  $\alpha > 0$

$$\rightarrow p = \frac{l^2}{\mu\alpha} > 0$$

Asymptoten: def Richtung durch  $\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon}$

repulsives Potential:  $\alpha < 0 \rightarrow p < 0$

# Kapitel 2

## Lagrange-Formalismus

nach J-L Lagrange (1736-1813)  
1788, „Mechanique Analytique“  
section 0. Motivation

- Newtonsche Mechanik: alle Kräfte müssen bekannt sein

$$m\ddot{r} = \sum_i \vec{F}_i$$

- Aber oft nur Wirkung, nicht Kraft selbst bekannt  
bsp: Pendel (Abstand fest)  
oder Gas im geschlossenen Gefäß (Moleküle „gefangen“)

### 2.1 Zwangsbedingungen

→ schränken Bewegung des Systems auf einen Unterraum ein (z.B. Achterbahn, Bewegung in 2D)

Bsp.: Fadenpendel

- Gravitationskraft  $\vec{F}_a$  wirkt nach unten aber Faden der Länge  $l$  hat Masse  $m$  auf Kreisbahn (allg. Kugelschale)

$$\rightarrow \text{ZB } y = 0 \quad x^2 + z^2 = l^2 \quad (1)$$

- übersetzen der ZB Newtonschen Bew. Gl.  
→ Zwangskraft  $\vec{Z}$

$$m\ddot{r} = \vec{F}_G + \vec{Z} \quad (2)$$

- $\vec{Z}$  nicht von vornherein bekannt, nur Wirkung (1)

## Lösungsansätze

- $\vec{Z}$  bestimmen: Lagrange-Gln 1. Art
- Zwangsbedingungen durch Wahl geeigneter Koordinaten eliminieren (Bsp:  $\varphi(r)$  anstatt  $r(t)$ )  
→ Bew.-Gl. für neue Koordinaten  
→ Lagrange-Gln 2. Art

## Klassifizierung von ZB

- System mit  $f$  Freiheitsgraden ( $N$  Massenpkt  $f = 3N$ )  
 $x_1, \dots, x_f \rightarrow$  Anzahl ZB  $R < f$
- Formulierung der ZB:

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_f, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R \quad (3)$$

Bsp:  $f = 3$

$$g_\alpha(x, y, z, t) = y = 0$$

$$g_\alpha(x, y, z, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

- jede ZB reduziert Anzahl der Freiheitsgrade  
1 Massenpunkt:  
keine ZB: Bew. 3D  
erste ZB: Bew. auf Fläche  
zweite ZB: Bew. auf Schnitt 2-er Flächen
  - ZB der Art (3) heißen holonom
  - ZB die Zeit  $t$  explizit enthalten  $\rightarrow$  rheonom
  - ZB die Zeit  $t$  nicht explizit enthalten  $\rightarrow$  skleronom
- Bsp für nicht-holonom:  
 $g_k(\vec{r}) = r - R < 0$  (Inneres einer Kugel)  
 $g_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0$  (Geschw. benötigt)

## 2.2 Lagrange-Gl 1. Art

- Eine holonome ZB: Beschränkung der Bewegung eines Teilchens auf eine Fläche  
 $g_1(\vec{r}, t) = y = 0$  ( $xz$  – Ebene)  
oder  
 $g_2(\vec{r}, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$  (Kugelschale mit Radius  $l$ )
- keine weitere Einschränkung der Bew. innerhalb dieser Fläche durch die ZB  
→  $\vec{Z}$  kann keiner Komponente tangential zur Fläche haben  
→  $\vec{Z}$  ist orthogonal zur Fläche, die durch  $g$  gegeben ist

→ wird erfüllt durch Ansatz

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \quad \nabla g(\vec{r}, t) \quad (4)$$

mit zeitabhängigem Parameter  $\lambda(t)$

$$\text{Bsp: } \nabla g_1(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla g_2(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

- Ansatz (4) zwar plausibel, kann aber nicht bewiesen werden  
→ (4) ist eigenständiges Axiom der Mechanik

### Bemerkung

1. Skalare Fkt 2er Variablen  $f(x, y) \rightarrow$  „Gebirge“ in 3D  
→ partielle Abl. zeigen in Richtung des maximalen Anstiegs  
Bsp: Kreiskegel  
 $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$   
„Höhenlinien“
  2. Implizit durch holonome ZB  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$   
Bsp:  $F = z^2 - x^2 - y^2 = 0$   
 $\vec{\nabla} F = - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \rightarrow$  senkrecht auf Kugel
  3. Kraft  $\sim \vec{\nabla} g$  legt nahe, dass ZB  $g$  als Art „Potential“ verstanden werden kann
- Aus (4) und (2) → Lagrange-Gln 1. Art  
für 1 Teilchen unter einer ZB:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda(t)\vec{\nabla} g(\vec{r}, t) \quad (5)$$

$$g(\vec{r}, t) = 0$$

(4 Gln für 4 Unbekannte  $x, y, z, \lambda$ )

- Zwei holonome ZB Beschränken die Bewegung auf Raumkurve  
→  $\vec{\nabla} g_1$  und  $\vec{\nabla} g_2$  unabhängig voneinander, senkrecht auf Kurve  
→  $\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda_1(t)\vec{\nabla} g_1(\vec{r}, t) + \lambda_2(t)\vec{\nabla} g_2(\vec{r}, t)$   
→ Senkrecht (häckchen)
- Verallgemeinerung auf R ZB und N Teilchen ( $f = 3N$ )  $x \equiv (x_1, \dots, x_{3N})$

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial g_{\alpha}(x, t)}{\partial x_n} \quad n = 1, \dots, 3N$$

$$g_\alpha(x, t) = g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$$

Lagrange-Gln 1. Art für  $3N$  Variablen und  $R$  holonome ZB ( $3N + R$  Gln für  $3N + R$  unbekannte  $x_n, \lambda_\alpha$ )

Bsp: 2 Teilchen, 1ZB  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$

$$\begin{aligned} - g &= g(\vec{r}_1, t) \rightarrow \vec{Z}_1 = \lambda(t) \vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1, t) \\ - g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) &= g(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l = 0 \\ &\rightarrow \vec{Z}_1 = -\vec{Z}_2 \end{aligned}$$

### Bemerkungen

1. Zusätzliches Axiom (4)  $\rightarrow$  nichttriviale Verallgemeinerung der Newton-Axiome
2. d'Alembertsche Prinzip (virtuelle Verrückungen)
3. LG 1 insbesondere in technischer Mechanik. Physik hauptsächlich LG 2. Art
4. Erhaltung von Impuls, Energie, Drehimpuls wenn Zwangsbedingungen entsprechende Symmetrie erhalten

## Lagrange Formalismus

Beispiele Zwangsbedingungen:

- Körper auf Tisch  $\rightarrow z = 0$
- Fadenpendel  $\rightarrow y = 0 \rightarrow g_1 = y = 0 \quad x^2 + z^2 = l^2 \rightarrow g_2 = x^2 + z^2 - l^2 = 0$

allgemein:  $R$  ZB  $g_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$

holonome ZB

Zwangskräfte:  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{Z}$

- bechränkt Bewegung auf eine Fläche
- innerhalb Fläche keine Einschränkung

$\rightarrow \vec{Z}$  ist orthogonal zur Fläche (zu Beweisendes axiom)

Ansatz:  $\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \text{grad} g(\vec{r}, t)$

hier fehlt was vielleicht was

Bsp: Tisch:  $g = z = 0$

hier fehlt was noch mehr

Lagrange-Gl. 1. Art  $3N + R$  Gl.

Bsp: Atwoodsche Fallmaschine (1784)

massenlose Rolle (Radius  $R$ ), über die 2 Massen (reibungslös) verbunden sind, d.h. 2 Massen  $\rightarrow$  6 Freiheitsgrade

ZB

$$y_1 = 0 = y_2$$

$$x_1 = -R, x_2 = R$$

$$g(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + l = 0 \quad l = L - \pi Rl = \text{Seillänge}$$

$\rightarrow$  keine Dynamik in  $x_i$  und  $y_i$

$\rightarrow$  es reicht, Bewegungs-Gl. für  $z_i$  zu betrachten

Zwangskräfte:  $z_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial z_i} = \lambda$  in Richtung  $z_i$

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda$$

$$\frac{d^2}{dt^2} g(z_1, z_2) = \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -g + \frac{\lambda}{m_1} - g + \frac{\lambda}{m_2} = 0 \Rightarrow \lambda 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\ddot{z}_1 = -g + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = g \frac{2m_2 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0)t + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{2} t^2$$

## 2.3 Lagrange-Gl. 2. Art

Ausgangspunkt: Lag. Gl. 1. Art. (1)

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_n + \sum_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}(x)}{\partial x_n} \quad (1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_{3N}) \quad n = 1, \dots, 3N \quad g_{\alpha}(x) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f = 3N - R$

Idee: Führe „generalisierte“ (oder verallgemeinerte) Koordinaten ein  $q = (q_1, \dots, q_t)$

- die die Lage aller Teilchen festlegen, d.h.

$$x_n = x_n(q, t) = x_n(q_1, \dots, q_t, t) \quad n = 1, \dots, 3N \quad (2)$$



- ZB  $q_\alpha$  sollen für beliebige  $q_i$   
hier fehlt was

$$g_\alpha(x_1(q, t), \dots, x_{3N}(q, t), t) = 0 \quad (3)$$

→ ZB schränken Bewegung der  $q_i$  nicht ein

Bsp: Ebenes Pendel mit variabler Länge  $l(t)$

$$x = l(t) \sin \varphi = x(\varphi, t)$$

$$z = -l(t) \cos \varphi = z(\varphi, t)$$

$$y = 0 = y(\varphi, t)$$

d.h.  $\varphi$  ist verallg. Koord., die die ZB

$$\begin{aligned} g(\vec{r}, t) &= x^2(\varphi, t) + y^2(\varphi, t) - l^2(t) \\ &= l^2 \cos^2 \varphi + l^2 \sin^2 \varphi - l^2 = 0 \end{aligned}$$

für alle Werte  $\varphi$  erfüllt.

2. Bsp: Teilchen im Kreiskegel → general. Koord.  $r, \varphi$

Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r \cot \alpha \quad \alpha \text{ Azimutalwinkel } \varphi \text{ Himmelsrichtungs Winkel}$$

Eliminierung der Zwangskräfte

Ausgangspunkt: Gl. (1)

Nach (3) hängen ZB  $g_\alpha$  nicht von  $q_i$  ab

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, f \quad (4)$$

Gl. (1) multipliziert mit  $\partial x_n / \partial q_n$  ergibt:

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n \left[ F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right]$$

$$\sum_n \left[ m_n \ddot{x}_n - F_n \right] \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0 \quad (5)$$

$$n = 1, \dots, 3N \quad k = 1, \dots, f$$

Bem:

- (5) enthält keine Zwangskräfte, nur f Gl. aber die Transformation  $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$
- Durch Einführung der Lagrange-Funktion  $L = T - U$  kann (5) wesentlich vereinfacht werden

Dazu betrachten wir:

$$\dot{x}_n = \frac{d}{dt}x_n(q, t) = \sum \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} = \dot{x}_n(q, \dot{q}, t) \quad (6)$$

mit general. Geschw.  $\dot{q}_i$  Es gilt:

$$\frac{\partial \dot{x}_n(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n(q, t)}{\partial q_k} \quad (7)$$

Mit

$$T = T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 \quad (8)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} T = T(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \left[ \sum_k \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \left[ \sum_i \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \underbrace{\sum_k \sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial t}}_{=m_{ik}} \dot{q}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_n m_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^2 \\ T(q, \dot{q}, t) &\equiv \sum_{i,k} m_{ik}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_k b_k(q, t) \dot{q}_k + c(q, t) \end{aligned} \quad (9)$$

Bem:

- Die Größe T in (8) und (9) bezeichnet verschiedene Funktionen der Argumente, stellt aber die gleiche physikalische Größe dar.
- Da  $x_n$  linear in  $\dot{q}_k$  ist (7), ist die kin. Energie maximal quadratisch in den  $\dot{q}_k$
- Hängen die  $x_n$  nicht explizit von der Zeit ab,  $x_n = x_n(q)$  so wird Gl. (9)

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i,k} m_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Wir bilden die Ableitung

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \stackrel{(8)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{(7)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_n n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_n m_n x_n \frac{\partial \ddot{x}_n}{\partial q_k} \quad (12)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} - \sum_l \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_n}{\partial t \partial q_k} \right] = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_l \frac{\partial x_n}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dx_n}{dt}$$

Beachte: Der erste und der zweite Term von (12) kommt auch in (5)

Def: verallgemeinerung der Kräfte:

hier fehlt was

Beachte konservative Kräfte

$$F_n = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}$$

Mit Trafo  $x_n = x_n(q, t)$  ist  $U(q, t) = U(x_q(q, t), \dots, x_{3N}(q, t))$

Damit ergibt sich die verallgemeinerte Kraft:

$$Q_k = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \sum_n \frac{\partial U(x)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \frac{\partial U(q, t)}{\partial q_k} \quad (15)$$

Damit wird (14) (da  $\partial U / \partial \dot{q}_k = 0$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} \quad (16)$$

Def der sogenannten Lagrange Funktion:

Lagrange-Gleichungen

N Teilchen,  $x = (x_1, \dots, x_{3N}) = \{x_n\} \quad k = 1, \dots, 3N$

R Zwangsbedingungen  $g_\alpha(x, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$

Lagrange-Gl- 1. Art:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}$$

Verallg. Koord.:  $1 = (q_1, \dots, q_f) = \{q_k\} \quad k = 1, \dots, f \quad f = 3N - R$   
mit  $x_n = x_n(q, t) \quad , \quad g_\alpha = g_\alpha(q, t) = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_k} = 0$$

Eliminierung der Zwangskräfte

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{Q_k} \quad k = 1, \dots, f \text{ Gl. ohne Zwangskräfte}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = - \frac{\partial U(q, t)}{\partial q_k}$$

Lagrange-Fkt.:  $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Lagrange-Gl (2. Art)

Diskussion:

- 1.) Gl: (18) stellt ein System von  $f = 3N - R$  DGLn 2. rd. dar d.h. eine Vereinfachung der Lagrange-Gl. 1. Art, aber ohne explizit gegebene Zwangskräfte
- 2.) Da es i.a. unterschiedliche verallg. Koord.  $q_k$  für gegebene Probleme gibt, ist  $L$  nicht eindeutig. Weiterhin sind Zusatztherme zu  $L$  möglich, die die Bew. Gl. nicht ändern (siehe Übungen).  
Daher ist  $L$  eine theoretische Größe, im Vergleich zu direkt messbaren Größen wie  $T$  und  $U$ .  
Die allg. Form der Lagrange-Gl. bleibt aber gleich „Forminvarianz“  
(Nicht so bei den Newton-Gl. z.B. in Polar Koord. gilt  $m\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$  und  $mr^2\ddot{\varphi} \neq -\frac{\partial U}{\partial r}$ )
- 3.)  $L$  ist eine Skalare Größe  $\rightarrow$  Leichter aufzustellen als vektorielle Kräfte im  $\mathbb{R}^{3N}$ .  
Zudem ist  $L$  eine einfache Funktion der Variablen.
- 4.) Liegen keine Zwangskräfte vor, so sind die  $q_k$  einfach die kartesischen Koordinaten  $x_n$  und mit

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_n^{3N} m_n \dot{x}_n^2 - U(x)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = m_n \ddot{x}_n$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = -\frac{\partial U}{\partial x_n}$$

$$\rightarrow m_n \ddot{x}_n = -\frac{\partial U}{\partial x_n} \quad \text{Newton Bwe- Gl.}$$

- 5.) Bei geschwindigkeitsabhängigem Potential muss die Def. der allg. Kraft erweitert werden,  $U = U(q, \dot{q}, t)$

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$

$\rightarrow$  führt wieder auf Lagrange-Gl.

wichtigstes Bsp. ist Lorenz Kraft mit Potential

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \underbrace{e\Phi(\vec{r}, t)}_{\text{el. Pol}} - \underbrace{\frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}}_{\text{Vektorpotential}}$$

- 6.) Wesentlich ist die Wahl der verallg. Koord.  $q_k$ , die das betrachtete „System“ definieren.  
Restliche Freiheitsgrade werden vernachlässigt oder über Reibungstherme oder externe zeitabhängige Funktionen berücksichtigt.

Bsp 1: Schiefe Ebene mit Steigung  $\alpha$ . Achse  $s$  liegt in der schiefen Eben ist also die verallg. Koord

$$x(t) = s(t) \cos \alpha \quad z(t) = s(t) \sin \alpha$$

Mit  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$  und  $U = mgz$   
ist

$$L(s, \dot{s}) = T - U = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - mg \sin \alpha s$$

mit Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s} = \frac{\partial L}{\partial s} = -mg \sin \alpha$$

mit Lösung:

$$s(t) = -\frac{g}{2} \sin \alpha t^2 + v_0 t + s_0$$

Bsp 2: Kreiskegel [bild]

kart. Koord:  $L = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

Zylinder Koord:

$$x = r \cos \varphi \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y = r \sin \varphi \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$z = r \cot \alpha \quad \dot{z} = \dot{r} \cot \alpha$$

→ verallg. Koord. z.B.  $r, \varphi$

$$L = \frac{m}{2} \left[ r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 (1 + \cot^2 \alpha) \right] - mgr \cot \alpha = L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$$

Lagrange-Gl.:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m}{2} (1 + \cot^2 \alpha) 2\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg \cot \alpha = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[ 2r^2 \dot{\varphi} \right] = m \left[ 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} \right] = 0$$

Reibungskräfte

z.B. Stokessche Reibungskraft

$$F_n^R = -\gamma_n \dot{x}_n$$

Reibungskräften kann kein Potential zugeordnet werden

Daher zurück zu Gl.(15)

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n F_n^R \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = Q_k$$

mit verallg. Kräften

$$Q_k^R = \sum_n F_n^R \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

Rayleisghsche Dissipationsfunktion

$$D(\dot{x}) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2$$

$$\rightarrow D(q, \dot{q}, t) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2} x_n(q, \dot{q}, t)$$

$$Q_k^R = - \sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \stackrel{(7)}{=} - \sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial D(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(7) : \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

→ Lagrange-Gl. mit Reibung

### 2.3.1 Lagrange Formalismus

verallgemeinerte Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$   $f = 3N - R$

n beschw.  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad K = 1, \dots, F$$

### 2.3.2 Energieerhaltung

Wir betrachten

$$\frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\partial L / \partial q_k} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

→ Erhaltungssatz

wenn  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  ist  $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$  erhalten.

→  $k = U(q) \neq U(q, t)$

Hängen zB nicht explizit von der Zeit ab,  $x_n = x - n(q) \neq x_n(q, t)$  sowie das Potential  $U$  nicht explizit von den geschwind.  $U = U(q)$

ist

$$T = \sum_{k,l} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = T(q, \dot{q})$$

und

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T(q, \dot{q})$$

Damit folgt mit:  $\partial L / \partial t = 0$

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = -L = T + U = E = \text{const.} \quad \text{Energieerhaltung}$$

## 2.4 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Lagrange-Formalismus erleichtert das Finden von Erhaltungsgrößen

**Def:** 1) Zyklische Koordinate  $q_k$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

2) Verallgemeinerte (oder "kanonisch konjugierter") Impuls

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Mit  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

Wenn  $q_k$  zyklisch, ist  $p_k$  erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \rightarrow p_k = \text{const.}$$

Bsp: freies Teilchen

$$L = T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \text{ hängt von } \vec{r} \text{ ab} \rightarrow \vec{r} \text{ ist zyklisch Koord.}$$

$\rightarrow$  damit  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$  erhalten

Bem: Bezeichnung verallg. Impuls  $p$

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(r) \rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ kinematischer Impuls}$$

Die Äquivalenz zwischen verallg. Impuls (2) und kinematischen Impuls  $m\dot{r}$  gilt für Geschw.-unabhängige Potentiale.

(gegen)- Bsp: elektromagnetisches Potential mit Vektorpotential  $\vec{A}$

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad \text{kan. Impuls}$$

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - q\vec{A} \quad \text{kinem. Impuls}$$

Gl. (3) beschreibt Zusammenhang zwischen

- Symmetrie oder Invarianz  
zB System verändert sich nicht bei Translation in  $q_k$  d.g.  $L$  kann nicht von  $q_k$  abhängen  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$  und
- Erhaltung  
zugehöriger verallg. Impuls  $p_k$  ist erhalten:  $\frac{dp_k}{dt} = 0$

allg. Idee:

geg. Erhaltungsgröße  $f$ , mit  $\frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t) = 0$  bildet eine "Konstante der Bewegung oder erstes Integral"

$\rightarrow$  erleichtert Lösung der Lagrange-Gl.

$\rightarrow$  Wähle verallg. Koord. so, da möglichst viele Erhaltungsgrößen aufgestellt werden, da

- jede Erhaltungsgröße (zB  $E, \vec{p}, \vec{L}$ ) verringert die Anzahl der Integrationen der Bew.Gl unter 1.
- Erhaltungsgrößen sind nützlich bei Interpretation zB Drehimpulserhaltung  $\rightarrow$  2. Keplersche Gesetz

- geg. genügende Anzahl von Erhalt. Größen  
→ System kann nicht chaotisch sein

Bsp: Kreiskegel: verallg. Koord.  $r, \varphi$

$$L = \frac{m}{2} [r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 (1 + \cot^2 \alpha)] - mg \cot \alpha r$$

Bew. Gl:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

$$(1 + \cot^2 \alpha)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \cot \alpha = 0 \quad (2)$$

L hängt nicht von  $\varphi$  ab →  $\varphi$  ist zykl. Koord.

$$\rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (3)$$

- Erhaltung der  $z$ -Komp. der Drehimpulses
- Energieerhaltung

$$E = T + U = \text{const.} \quad (4)$$

(3) und (4) sind DGL 1. Ord. während Gl. (1), (2) DGL 2. Ord. sind.

→ leite (3), (4) aus (1), (2) her:

$$1. \text{ Multiplikation: (1), } r: 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 \\ \rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

$$2. \text{ Multiplikation von (2) mit } \dot{r}: (1 + \cot^2 \alpha)\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}\frac{p_{\varphi}^2}{m^2 r^3} + g \cot \alpha \dot{r} = 0 \text{ und Gl. (3)}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left[ (1 + \cot^2 \alpha) \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{m^2 r^2} p_{\varphi}^2 + g \cot \alpha r \right] = 0 \\ = \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{m} \right) = 0$$

Integration von (4) mit

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \left[ E - \frac{m}{2} \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 r^2} - mg \cot \alpha r \right] \frac{2}{m} \frac{1}{(1 + \cot^2 \alpha)}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{a \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 / \sin^2 \alpha$$

Separation der Variablen:

$$t = \pm \int \frac{dr}{\frac{2}{m} \left[ E - \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2} - mg \cot \alpha r \right] \sin \alpha} \quad (5)$$



und damit  $r(t)$

Damit kann Gl. (3) integriert werden

$$\varphi(t < 9) = \frac{p_\varphi}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} \quad (6)$$

Vgl mit Zentralproblem: effektives Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{mg \cot \alpha r}{\gamma} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

minimum bei:  $\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = \gamma \frac{p_\varphi^2}{2mr^3} = 0$

## 2.4.1 Noether-Theorem

Emmi Noether (1882 - 1935), deutsche Mathematikerin

Verallg. des Zusammenhangs zwischen Invarianz und Erhaltung

Geg:  $L = L(q, \dot{q}, t)$  mit Lösung  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$

### „Noether Theorem“

Ist  $L$  invariant unter der Trafo

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t, \alpha) \quad (1)$$

also

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2)$$

so ist die gröÙe

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (3)$$

erhalten.

Bsp. für Trafos sind:

- Transformation  $q_i = q_i + \alpha$
- Rotation um geg. Achse mit Winkel  $\alpha$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \Big|_{\alpha=0} &\stackrel{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t) \Big|_{\alpha=0} = 0 \\ 0 &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_i \underbrace{\left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{=0, \text{ wenn } q_i \text{ Lösung}} \Big|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{=0} \Big|_{\alpha=0} = 0 \end{aligned}$$

**Bem:** Beweis gilt für alle  $\alpha$ , also auch für  $\alpha = 0$ . Mit  $\alpha = 0$  werden oft Ausdrücke einfacher.

## Invarianz

Zyklische Variable  $q_a$  mit  $\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \leftrightarrow$  verallg. Impuls  $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \text{const.}$

zB:  $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \rightarrow p = m\dot{x} = \text{const.}$

Allg: Ist  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  invariant bzgl.  $q_i(t) \rightarrow q_i(t, \alpha)$  ist die Größe

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \text{ erhalten}$$

**Verallg.:** Falls  $L$  nicht invariant bzgl. Trafo, aber gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \Big|_{\alpha=0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t)}_{=0} + \frac{d}{dt} F(q(t), \dot{q}(t), t)$$

mit beliebiger Funktion  $F$ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{dF}{dt} \\ &= \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + F \right]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + F(q, \dot{q}, t) \quad (*)$$

ist erhalten.

**Translation:** Lagrange Funktion  $L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$  sei invariant unter Trafo

$$\vec{r}_i(t) \rightarrow \vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}$$

wobei  $\vec{e}$  ein beliebiger (aber konst.) Einheitsvektor ist.

Gilt zB wenn Pot.  $U$  nur von Differenzvektoren abhängt

$$\vec{r}_i(t, \alpha) - \vec{r}_j(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$$

Damit ist

$$\frac{\partial \vec{r}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \vec{e}$$

und

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \vec{e} = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{e} = \vec{p} \cdot \vec{e} \quad \text{ist die erhaltene GröÙe}$$

Da  $\vec{e}$  beliebig ist, ist Gesamt Impuls erhalten. Bei speziellen Vektor  $\vec{e}_0$  ist nur  $\vec{p} \cdot \vec{e}_0$  Komponente erhalten d.h.

Invarianz bzgl. Translation um  $\vec{e} \leftrightarrow$  Impuls  $p_e$  ist erhalten.  
Symmetrie: „Homogenität der Raumes“

anschaulich: keine Hindernisse im Raum

**Rotationsinvarianz** Sei

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x^2 + y^2 + z^2)$$

in Zylinderkoord:

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r^2, z)$$

ist bzgl. der Trafo  $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$  invariant

Folglich ist

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\alpha=0} = mr^2 \dot{\varphi} \frac{\partial(\varphi + d)}{\partial \alpha} = mr^2 \dot{\varphi} = L_z$$

erhalten

Invarianz bzgl. Drehung um  $\vec{e} \leftrightarrow$  Drehimpuls  $L_e$  ist erhalten.  
Symmetrie: Isotropie des Raumes

d.h. keine Richtung ausgezeichnet.

**Translation in der Zeit**

$$t \rightarrow t + \alpha. \text{ d.h. } q_i(t, \alpha) = q_i(t + \alpha)$$

Damit

$$\left. \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \bigg|_{\alpha=0} = \dot{q}_i$$

$$\left. \frac{\partial \dot{q}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \ddot{q}_i$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t + \alpha), \dot{q}(t + \alpha), t) \right|_{\alpha=0} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(t + \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(t + \alpha)}{\partial \alpha} \right) \bigg|_{\alpha=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \end{aligned}$$

und

$$\frac{dL(q(t), \dot{q}(t), t)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$
$$\rightarrow \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{dL}{dt} \text{ falls } L \text{ nicht explizit von Zeit abhängt d.h. } \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

mit (\*) und  $F(q, \dot{q}, t) = -L(q, \dot{q}, t)$ , somit ist erhalten

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) \text{ Formel hergeleitet bei Energieerhaltung}$$
$$= T + U = E = \text{const. d.h. Energieerhaltung}$$

Invarianz unter Zeittranslation  $\leftrightarrow$  Energieerhaltung  
Symmetrie: Homogenität der Zeit

anschaulich: Experiment verläuft heute genauso wie morgen

**Bem:**

- Die durch das Noether Theorem beschriebene Beziehung

Invarianz/Symmetrie  $\leftrightarrow$  Erhaltung

ist fundamental und allg. gültig. Gilt also auch in QM und relativistischer Mechanik.

- zB: liefert die Erhaltung von Ladung, Isospin,...  
Konstruktionsbedingungen für entsprechende Theorien.

## 2.5 Hamiltonsches Prinzip

### 2.5.1 Funktionale und Variationsrechnung

- Funktion  $x \rightarrow y = f(x)$  ordnet jeder Zahl  $x$  eine Zahl  $y$  zu.  
Extrema durch Nullstellen der Ableitung  $\frac{df}{dx}$
- Funktional  $y = f(x) \rightarrow J[y]$  ordnet einer Funktion  $f(x)$  eine Zahl  $J$  zu.

**Bsp1: Kürzeste Wegstrecke** Wegstrecke:

$$J = J[y] = \int_1^2 ds$$
$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

kürzeste Wegstrecke:  $J[y] = \min.$   
(Ergebnis aus Kurvenintegral)

**Bsp2: Brachistochrone** Bernulli (1696)

Masse  $m$  gleitet reibungslos wegen Schwerkraft auf Kurve  $y(x)$ . Für welcher  $y(x)$  ist die Zeit  $T$  minimal?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mit } v = \frac{ds}{dt} \quad dt = \frac{ds}{v} \\ ds = \sqrt{1+y'^2} dx \\ \frac{1}{2}mv^2 = mgy \rightarrow v = \sqrt{2gy} \end{array} \right\} \rightarrow T = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy(x)}}$$

**2.5.2 Euler-Lagrange-Gl.**

Problem: Welche Funktion  $y(x)$  macht Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \quad (1)$$

minimal, wobei differentierter Funktion  $F$  und  $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$  bekannt sind.

Sei  $y(x)$  die gesuchte Funktion mit  $J[y] = \min$ .

Die Variation

$$y(x) \rightarrow y(x) + \epsilon \eta(t) \quad (2)$$

mit infinit.  $\epsilon$  und beliebigen diff. baren Funktion  $\eta(x)$  die die Randbeding.  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$J[y + \epsilon \eta] \text{ ist minimal bei } \epsilon = 0 \quad \forall \eta \quad (3)$$

Die Bestimmung von  $y$  über (3) wird als Variationsrechnung bezeichnet.

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon \eta] &= \int_{x_1}^{x_2} dx F(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y', x) \epsilon \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(y, y', x) \epsilon \eta'(x) \right] \end{aligned}$$

Damit

$$0 = \frac{dJ(y + \epsilon \eta)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right]$$

[Par. Int:  $\int uv' = \int uv - \int vu'$  für 2. Term]

$$\underbrace{\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(t) \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0, \text{ da } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(t)$$

Da  $\eta$  beliebig sein kann, muss Klammer verschwinden

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y}} \quad (4)$$

## Euler-Lagrange-Gl.

- Hängt nicht von  $\eta(x)$  ab
- notwendige Bedingung für Extremum

Mit variation  $\delta y = \epsilon \eta(x)$  können wir (3) schreiben

$$\begin{aligned}\delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = 0 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\delta F}{\delta y} \right) \delta y = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta F(y, y', t)\end{aligned}\tag{5}$$

wobei

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \text{ als } \underline{\text{Funktionalableitung}} \text{ bezeichnet wird}$$

Gl. (4) und (5) sind äquivalent

### „Variationsprinzip“

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \leftrightarrow \delta J = 0$$

## 2.5.3 Variationsrechnung

Funktional:  $y = f(x) \rightarrow J[y]$

z.B. Weglänge  $s$  der Kurve  $y(x)$

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

allg:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$$

Extrema über Variation  $\delta y = \epsilon \eta(x)$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = 0 \leftrightarrow \text{Extrema von } J$$

äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gl

## Extremalbedingungen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \leftrightarrow \quad \delta J = 0$$

Bsp: Kürzeste Verbindung

$$J = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_F = \min$$

Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dx} \frac{2y'(x)}{2\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \int_{x_1}^{x_2} &= \frac{y'(x_2)}{\sqrt{1+y'(x_2)^2}} - \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1+y'(x_1)^2}} = 0 \\ &\rightarrow y' = \text{const.} \quad , \quad y(x) = ax + b \end{aligned}$$

$a, b$  aus  $x_1, x_2$

## Verallgemeinerung:

- (1) Hängt  $F$  von mehreren Funktionen  $y_i$  ( $i = 1, \dots, f$ ) ab, so erhalten wir  $\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon_i=0} = 0$  und damit f Euler-Lag-Gl.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

- (2) Hängt  $y$  von mehreren Argumenten ab,  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  so erhalten wir

$$J[y] = \int dx_1 \cdots \int dx_n F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, x\right)$$

Mit  $\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$

Euler-Lagrange-Gl:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y / \partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

## 2.6 3. Hamiltonsche Prinzip

Die Korrespondenz

$$\begin{aligned} y_i(x) &\leftrightarrow q_i(t) \\ F(y, y', x) &\leftrightarrow L(q, \dot{q}, t) \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y} &\leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

$$y = (y_1, \dots, y_f) \quad q = (q_1, \dots, q_f)$$

→

- Lösungsverfahren der Lagrange-Gl. (z.B. über Erhaltungssätze) können in Variationsrechnung verwendet werden
- physikalische Bedeutung der Variationsrechnung

Wir ordnen jeder Bahnkurve  $q(t)$  ein Wirkungsfunktional

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q, \dot{q}, t)$$

$S$  wird oft Wirkung genannt

Gemäß dem Variationsprinzip sind damit die Lagrange-Gleichungen äquivalent zu der Formulierung, dass die Variation der Wirkung gleich Null ist:

**„Hamiltonsche Prinzip“**

$$\delta S[q] = 0$$

Bewegung verläuft so, dass Bahnkurve  $q(t)$  die Wirkung  $S$  minimiert: „Prinzip der kleinsten Wirkung“

Bem:

- Anstelle von DGL (wie Newton, Lagrange) kann das Grundgesetz der Mechanik also auch als Variationsprinzip formuliert werden
- andere Bsp:
  - Optik: Fermatsche Prinzip  
Licht nimmt seinen Weg so, dass die Laufzeit  
 $t[x] = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx \, n(x) \stackrel{!}{=} \min \quad n(x)$ : Brechungsindex
  - Thermodynamik: 2. Hauptsatz  
Entropie  $S$  nimmt immer zu
  - auch die QM kann durch ein Variationsprinzip beschrieben werden

## 2.6.1 Schwingung einer Seite

Seite zwischen zwei Wänden mit Abstand  $l$  auf der  $x$ -Achse Auslenkung  $n(x, t) \hat{=}$  Feld

- Bsp für Kontinuumsmechanik, d.h. Dynamik elastischer Körper inklusive Balkenbiegung und Hydrodynamik



- Bsp für einfache klassische Feldtheorie
- führt auf Wellengleichung
- Analogie zu QM

Bsp für Felder: el. Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , Temperaturfeld  $T(\vec{r}, t)$ , Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t)$  zentrale Größe in Feldtheorie  
Bewegungsgleichung für Felder, sogenannte Feldgleichung, sind partielle DGL

## Herleitung der Wellengleichung

Ansatz:

- Saite  $\hat{=}$   $N$  Massenelemente  $\Delta m$  durch Federn verbunden
- zuletzt:  $N \rightarrow \infty$  „Kontinuumslimit“
- $l = N\Delta x$   $N \gg 1$
- Massen  $\Delta m_i$  bei  $x_i - (i - \frac{1}{2})\Delta x$  ( $i = 1, \dots, N$ ) Auslenkung  $u_i(t) = u(x_i, t)$

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \frac{\rho \Delta x}{2} \dot{u}_i^2 \quad (1)$$

mit Massendichte  $\rho = \text{Masse/Länge}$   
Abstand zwischen  $i$ -ten und  $(i + 1)$ -ten Massenpunkt

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

für kleine Auslenkungen

$$\approx \Delta x \left[ 1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\Delta x^2} \right]$$

(keine Wurzel mehr wegen 1. Ordnung Entwicklung ...)

In Ruhelage  $\Delta s = \Delta x$  existiert eine Vorspannkraft  $P$  der Saite  
Beitrag zur pot. Energie  $\sim P \cdot (\Delta s - \Delta x)$

$$U = \sum_i P \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\Delta x^2} \quad (2)$$

$N \rightarrow \infty$ :  $u_i(t) \rightarrow u(x, t)$

$$\begin{aligned} T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2} \sum_i \Delta x \left( \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2}_{=:\dot{u}^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u'$$

$$\begin{aligned} U &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2} \sum_i \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta^2 x} \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2}_{=: u'^2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$L(\dot{u}, u') = \int_0^l dx \underbrace{\left[ \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} u'^2 \right]}_{\substack{\text{Lagrange-Dichte} \\ \mathcal{L}(\dot{u}, u')}} \quad (3)$$

Hamilton Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(\dot{u}, u') = 0$$

Euler-Lagrange-Gl.

für 2 Argumente  $x_1 = x, x_2 = t$

und  $F = \mathcal{L}, y = u$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= 0 \\ \rho \ddot{u} + P u'' - 0 &= 0 \end{aligned}$$

mit  $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$  „Wellengeschwindigkeit“

### Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Randbedingungen:  $U(0, t) = u(l, t) = 0$

Anfangsbedingungen:  $U(x, t_0) = u_0, \dot{u}(x, t_0) = \dot{u}_0$

**Lösung der Wellengleichung:** Ansatz:

$$u(x, t) = u_0 e^{\pm i(kx - \omega t)}$$

Amplitude  $u_0$ , Wellenvektor  $k$ , Frequenz  $\omega$

eingesetzt:  $u'' = \frac{1}{c^2} \ddot{u} \rightarrow -uk^2 = -\frac{1}{c^2} \omega^2 u$

Lösung, falls  $\omega = ck$  Dispersionsrelation

allg. Lösung durch Linearkombination im Kontinuumslimit erhalten

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk u(k) e^{\pm i(kx - \omega t)} \quad \text{Fourier-Trafo}$$

Bsp: Stehende Welle

Superposition zwischen rechtslaufenden und linkslaufenden Wellen

$$\begin{aligned}u &= \cos(kx - \omega t) - \cos(-kx + \omega t) \\&= \operatorname{Re} e^{ikx} \underbrace{\left( e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} \right)}_{2i \sin \omega t} \\&= 2 \operatorname{Im} e^{ikx} \sin \omega t = 2 \sin kx \sin \omega t\end{aligned}$$

d.h. unabhängig von  $t$  erhält man „Knoten“ (Nullstellen) für  $\sin kx = 0$

Randbedingung:  $u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0$

$\sin kl = 0 \rightarrow k = \pi \frac{n}{l}$

s.h. es können nur Wellen mit bestimmten Wellenlängen  $\lambda_n$  auftreten

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2l}{n}$$

$$\omega_n = ck = \frac{n\pi c}{l}$$

$n = 1, 2, 3 \dots$

ein Wellenbauch  $\rightarrow$  „Grundschiwingung“

zwei Bäuche (doppelte Frequenz) „1. angeregte Schwingung“ 1. Oberton

drei Bäuche (1,5 fache Frequenz) „2. angeregte Schwingung“ 2. Oberton

Analogie zum QM Teilchen im Kasten

$\rightarrow$  Quantisierung

## 2.6.2 Der Starre Körper

- System von Massenpunkten mit  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$   
z.B.
  - starres Molekül
  - Näherung für kontinuierliche Massenverteilung
- Bewegung besteht aus
  - Translation, d.h. alle Teilchen haben gleiche Geschwindigkeit
  - Drehung um einen körperfesten Koordinaten Ursprung 0 $\rightarrow 2 + 3 = 6$  Freiheitsgrade

Raumfestes Inertialsystem (IS) mit  $x, y, z$  und

Körperfestes Koord.system (KS)  $x_1, x_2, x_3$

KS: Ursprung bei 0  $\hat{=}$  im IS  $\vec{r}_0(t)$

(z.B. der Schwerpunkt)  $\rightarrow \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$

KS dreht sich relativ zum IS mit

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$\vec{r}_n$  seien die Orte des n-ten Teilchens im KS  
 $\vec{r}_{n,\text{IS}}$  seien die Orte des n-ten Teilchens im IS

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n,\text{IS}} - \vec{r}_0$$

Geschwindigkeit im IS:

$$\frac{d\vec{r}_{n,\text{IS}}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{=v_0} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

Mit I.4 Beschleunigte Bezugssysteme:  
für beliebigen Vektor  $\vec{G}$  ist

$$\frac{d\vec{G}_{\text{IS}}}{dt} = \frac{d\vec{G}_{\text{KS}}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}_{\text{KS}} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{z.B.} \quad \frac{d\vec{r}_{\text{IS}}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{v}_{n,\text{IS}} &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n \end{aligned} \quad (1)$$

## Kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{v}_{n,\text{IS}}^2 = \sum_n \frac{m_n}{2} [\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n]^2 \quad n = 1, \dots, N \\ &= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{v}_0^2 + \underbrace{\sum_n m_n \vec{v}_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)}_{\downarrow \text{Spatprodukt}} + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &= \frac{M}{2} \vec{v}_0^2 + (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \sum_n m_n \vec{r}_n + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot-trans}} + T_{\text{rot}} \end{aligned} \quad (2)$$

## 2 Fälle:

- Körper wird in keinem Punkt festgehalten  
Mit  $\vec{0} = \vec{R}$  (Schwerpunkt) ist  $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$

$$\rightarrow T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

- Körper wird in mindestens einem Punkt festgehalten  
Mit  $\vec{0} = \vec{P}$  ist  $\vec{v}_0 = 0$  (z.B. bei Kreisel)

$$\rightarrow T = T_{\text{rot}}$$

Mit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$   $\vec{r}_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$

Und der Identität

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 r^2 - \sum_{i,k} \omega_i x_i - \omega_k x_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \\ &= \sum_{i,k} \omega_i \omega_k (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \omega_i \omega_k \end{aligned}$$

mit dem Trägheitstensor

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 \delta_{ik} - x_{in} x_{kn}) \quad (3)$$

Im Matrixschreibweise  $I = \{I_{ik}\}$  ist

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega} \quad (4)$$

**Bem:**

- Begriff Tensor: ursprünglich von Spannungstensor (Physik)  
Mathe: Tensor
  1. Stufe  $\hat{=}$  Vektor
  2. Stufe  $\hat{=}$  Matrix
- (4) ist eine Bilinearform
- Dreht sich Körper um eine körperfeste Achse (z.B.  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$ )

so geht (4) über in

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_z}{2} \omega_z^2$$

$I_z$ : Trägheitsmoment des Körpers bzgl.  $\vec{e}_z$

- Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Dichte  $\rho(\vec{r})$  ist

$$I_{ij} = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)$$

Trägheitstensor ist symm.,  $T_{ij} = T_{ji}$  und kann daher mit einer orthogonalen Trafo  $U$  ( $U^+ = U^{-1}$ ,  $U^+ U = 1 = U U^+$ ) auf Diagonalform gebracht werden

$$U^+ I U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eigenwert Problem „Hauptachsen-Trafo“}$$

wobei die Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen und die Eigenwerte  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Hauptträgheitsmomente sind.

Symmetrie des Körpers legt die Achse fest z.B. bei Kreisel

- „Kugelkreisel“; wenn alle  $I_i$  gleich sind  
(Kugel, Würfel, Zylinder mit  $h = \sqrt{3}r$ )
- Symmetrischer Kreisel;  $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$
- asymmetrischer Kreisel; alle  $I$  verschieden

## Drehimpuls:

in KS ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_n m_n (\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \\ &= \sum_{i,k=1}^3 (r^2 \delta_{ij} - x_i x_n) \omega_k \vec{e}_i \end{aligned}$$

ist

$$\vec{L} = \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \omega_k \vec{e}_i = \sum_i L_i \vec{e}_i$$

oder

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

(5)

## Eulersche Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{L} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) \\ &= \vec{M} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_n^A\end{aligned}$$

Mit Gl. (\*) ist dann

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega})_{\text{IS}} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega})_{\text{KS}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) = \vec{M} \quad (6)$$

Ist KS das Haupsachsensystem mit

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

so ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(I\vec{\omega})_{\text{KS}} &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) \\ \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) \\ \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und damit

### Eulersche Gleichungen

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= M_3\end{aligned} \quad (7)$$

I.A. Schwer zu Lösen, da nicht linear und M zeitabhängig

### Bsp: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Körper steht auf Schwerpunkt (wie falschrumer Blumentopf) ( $x_3$  in der Kreiselsymmetrieachse: „Figurenachse“)

$I_1 = I_2 \quad I_3 \neq I_1 \rightarrow$  relationssymm. bzgl.  $x_3$  Achse

$\vec{M} = 0$  Damit:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0 \quad (a)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \quad (b)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = \text{const.} \equiv \omega_0$$

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0$$

$$\frac{d}{dt}(a) \text{ mit } (b) : \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\rightarrow \omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} \rightarrow \omega_2(t) = a \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

$$\omega_3 = \omega_0$$

Mit

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2 = \text{const.}$$

hat die Projektion von  $\vec{\omega}$  auf  $x_1$ -  $x_2$ -Ebene die konst. Länge  $a$  und rotiert mit  $\Omega$ .  
D.h. im KS rotiert Kreisel auf einem Polkegel (mit  $\omega_0$  um die eigene symm. Achse)

$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_0} = \text{const.}$$

Zur Betrachtung im IS brauchen wir verallg. Koord. um die Beziehung zwischen KS und IS zu beschreiben

$\rightarrow$  Eulersche Winkel  $\Phi, \Psi, \Theta \rightarrow$  siehe Übung

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \omega_2 = \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi + \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \omega_3 = \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \end{cases} \quad (9)$$

Einsetzen von (9) in (8), ergibt nach Lösung von (9)

$$\Psi(t) = \Omega t + \Psi_0 \quad \Phi(t) = \frac{q}{\sin \Theta_0} + \Phi_0$$

$$\tan \Theta_0 = \frac{q}{\omega_0} \frac{I_1}{I_2}$$

## 2.6.3 Rotation des Starren Körpers

IS  $\vec{r}_{IS}$  und KS  $\vec{r}$

$$\frac{d\vec{r}_{IS}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \omega_i \omega_k \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega} \end{aligned}$$



$$I_{ik} = \sum_n m_n \left( r_n^2 \delta_{ik} - x_{in} x_{kn} \right) \quad \underline{\text{Trägheitstensor}}$$

$$\text{orthogonale Trafo : } U^+ I U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

$I_i \hat{=}$  Hauptträgheitsmomente, Hauptträgheitsachse

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_n m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) \\ &= I \omega \end{aligned}$$

Mit  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$  folgen Euler-Gl. (in KS)

Kräftefreier Kreisel:  $\vec{M} = 0 \rightarrow$  Präzession

### Schwerer Kreisel

Betrachte symm. Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten  $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$   
(fixer Auflagepunkt Rotation um  $x_3$  Präzession um z mit Winkel  $\theta$  zwischen z und  $x_3$  und der Schwerpunkt S auf  $x_3$  höhe s des Kegelkreisels wird mit  $mg$  in Richtung -z gezogen)

### Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - U = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{R}^2}_{=0} + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - mgs \cos \theta$$

Mit Eulerwinkel

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \omega_2 &= \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \omega_3 &= \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \end{aligned}$$

$\Phi$  : Drehwinkel um  $\vec{e}_z$ ,  $\Psi$  : Drehwinkel um  $\vec{e}_{x_3}$

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} \left( \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \right)^2 - mgs \cos \Theta \quad (1)$$

### Symmetrien:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = 0$$

## Erhaltungsgrößen „erste Integrale“

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{I_1}{2} \left( \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \right)^2 + mgs \cos \Theta = \text{const.} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} l_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \quad \text{Drehimpulskomponente } l_z \\ &= I_1 \sin^2 \Theta \dot{\Phi} + I_3 \underbrace{\left( \cos \Theta \dot{\Psi} + \cos^2 \Theta \dot{\Phi} \right)}_{(\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta) \cos \Theta} = \text{const.} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} l_3 &= \frac{\partial l}{\partial \dot{\Psi}} \quad \text{Drehimpulskomponente } l_3 \\ &= I_3 \left( \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta \right) = \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) werden  $\dot{\Phi}$  und  $\dot{\Psi}$  eliminiert. Mit:

$$l_z - l_3 \cos \Theta = I_1 \sin^2 \Theta \dot{\Phi} \quad (5)$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{(l_z - l_3 \cos \Theta)}{2I_1 \sin^2 \Theta} &= \frac{I_1}{2} \sin^2 \Theta \dot{\Phi}^2 \quad \text{in (2)} \\ E &= \frac{I_1}{2} \dot{\Theta}^2 + \frac{(l_z - l_3 \cos \Theta)}{2I_1 \sin^2 \Theta} + \frac{l_3^2}{2I_3} + mgs \cos \Theta = \text{const.} \end{aligned} \quad (6)$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1}{2} \dot{\Theta}^2 + U_{\text{eff}}(\Theta) \\ U_{\text{eff}} &= \frac{(l_z - l_3 \cos \Theta)}{2I_1 \sin^2 \Theta} + \frac{l_3^2}{2I_3} + mgs \cos \Theta \end{aligned} \quad (7)$$

Ähnlichkeit zum Keplerproblem ergibt sich hier eine 1D Bewegungsgleichung mit effektive, Potential.

Aufgelöst nach  $\frac{d\Theta}{dt}$  und integriert ist:

$$t = t_0 + \int_{\Theta_0}^{\Theta} d\Theta' \sqrt{\frac{I_1/2}{E - U_{\text{eff}}(\Theta')}} \quad (8)$$

nicht elementar lösbar aber Graphisch diskutierbar

## Graphische Diskussion der Lösung

- $U_{\text{eff}}(\Theta) \xrightarrow{\Theta \rightarrow 0} \infty$  und  $\xrightarrow{\Theta \rightarrow \pi}$

- dazwischen ein Minimum

(Parabel mit 2 Schnittpunkten mit E Energie des Systems an den Winkeln  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  und dazwischen Minimum) aus  $E = U_{\text{eff}}$  ergeben sich Umkehrpunkte  $\Theta_1, \Theta_2$  Während die Figurenachse zwischen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  oszilliert „Notation“, präzediert sie mit (5)

$$\dot{\Phi} = \frac{l_z - l_3 \cos \Theta}{I_1 \sin^2 \Theta} \quad \text{um die raumfeste z-Achse}$$

Bewegung ist definiert durch Kreiselparameter  $m, s, I_1, I_2$  und Anfangsbedingungen  $E, l_z, l_3$

Für  $\Theta_1 = \Theta_2$  verschwindet Notation „reguläre Präzession“

Im kräftefreien Limes (Grenzfall) ( $g \rightarrow 0$ ) ergibt sich  $\Theta = \Theta_0, \dot{\Phi} = \text{const.}$

## 2.7 9 Hamilton-Formalismus

Bereits für konservative Systeme wurde

Hamilton Funktion  $\mathcal{H}(q, p, t)$  „Hamiltonian“

und Hamilton Gleichungen hergeleitet.

Ausgehend vom kanonischen Impuls  $p = (p_1, \dots, p_f)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

leiten wie nun  $\mathcal{H}(q, p, t)$  von  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  her.

### Legendre-Trafo

$$d(x, y) \rightarrow g(u, y) \quad \text{mit} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2)$$

Ausgehend von

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{:=u} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{:=v} dy = u dx + v dy$$

definierten wir die Funktion  $g = f - ux$  mit:

$$dg = df - u dx - v du = v dy - x du \quad (3)$$

Folglich ist g die gewünschte Funktion

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} dy \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad , \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

## 2.8 Hamiltonsche Mechanik

Ausgehend von  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$   $q = (q_1, \dots, q_f)$  und

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

def. wir den Hamiltonian  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$  über Legendre Trafo: Ansatz: Löse Gl. (1) nach  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$  und def. Hamiltonian  $\mathcal{H}$  als Legendre-Transformation von  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t) p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

Mit

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_i \left[ d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left[ \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Verifizieren wir, dass  $\mathcal{H}$  von  $q, p, t$  abhängt. Das Totale Differential von  $\mathcal{H}$ :

$$d\mathcal{H} = \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right] - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

liefert durch Koeffizientenvergleich

### Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (1)$$

$i = 1, \dots, f$  und:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2)$$

### Bemerkung:

- Gl. (1) wegen Einfachheit und Symmetrie auch kanonische Gl. genannt
- Die  $2f$  Variablen  $q_i$  und  $p_i$  sind völlig gleichberechtigt,
  - $p_i$  heißt auch zu „ $q_i$  konjugierter Impuls“
  - $q_i, p_i$  heißt „Paar konjugierter Variablen“

- Wichtig:  $\mathcal{H}$  darf keine Geschwindigkeit enthalten
- In Kapitel I.6 wurde bereits gezeigt, dass Energie erhalten ist für  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$  da  $\mathcal{H}$  nicht explizit von der Zeit abhängt.
- Zyklische Koordinaten:  
Hängt  $\mathcal{H}(p, q)$  nicht von  $q_i$  ab,  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0$   
→  $p_i = \text{const.}$  Erhaltungsgröße

Für ein konservatives System mit

$$\mathcal{L} = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(t)$$

mit den kanonischen Impulsen  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i$  entspricht

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(t)$$

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(t) = T + U \quad (3)$$

also der Gesamtenergie.

Hier ist der kanonische Impuls  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  gleich dem kinetischen Impuls  $m_i \dot{q}_i$ . Gilt für zeitunabhängige, holonome Zwangsbedingungen ruhenden Koordinaten und konservativen Kräften

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Bsp: harm. Oszillator: } \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \\ \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -m\omega^2 q = F \\ F = \dot{p} = m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \end{array} \right]$$

- Geht aber nicht, z.B. bei:
  - geschw. abhängigen Kräften (Lorenz-Kraft)
  - zeitabhängigen Zwangsbedingungen

### Standardfall von f Freiheitsgraden $q_i$

- erhalten durch die Elimination von zeitunabhängigen holonomen Zwangsbedingungen (oder ohne diese)
- die nicht explizit zeitabhängigen sind (z.B. externer Antrieb)

- die konservativen Kräften genügen ist:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(q)$$

$$\mathcal{H}(q, p) = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q)$$

mit: Bewegungsgleichungen sind äquivalent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \quad , \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \rightarrow m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$F_i = m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

### **Mechanik nach:**

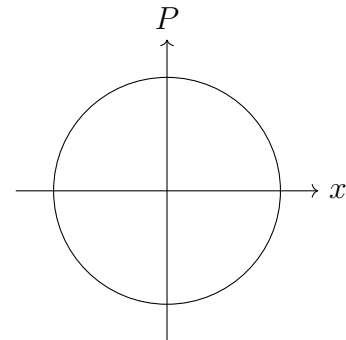
- Newton:
- über Def. der Kraft
  - einfach und anschaulich

- Lagrange:
- über Def. von  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$
  - Berücksichtigung von Zwangsbedingungen
  - Zwangskräfte (Lag. Gl. 1. Art)
  - Konzept von verallg. Koord.  $q_i$
  - Konzept von zyklischen Variablen,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$   
→ Erhaltung von  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
  - Hamilton-Prinzip
  - Ableitung von Feldtheorien

- Hamilton:
- über Def. von  $\mathcal{H}(q, p, t)$
  - Zwangsbedingungen nur implizit
  - Konzept des Phasenraums
- Ausgangspunkt für statistische Mechanik und QM

## 2.9 Phasenraum

- $(q, p)$  bilden einen  $2f$ -dim. Phasenraum (PR)
- Zustand ist im Phasenraum eindeutig beschrieben, d.h. (  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$  ) schneiden sich Bahnen im Phasenraum nicht.
- $\mathcal{H}(p, q) = E = \text{const.}$  entspricht einer  $2f - 1$  - dim. Fläche im PR, welche das  $2f$ -dim. *Phasenraumvolumen*



Harm. Oszill.

$$V_{PR}(E) = \int dq_1 \dots dq_f \int dp_1 \dots dp_f$$

$$\mathcal{H}(p, q) < E$$

- Klassisch entspricht ein endliches Phasenraumvolumen  $\infty$  System zustände
- QM entspricht ein endliches Phasenraumvolumen endlich viele System zustände

**Bsp:**

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \mathcal{H}(q, p)$$

$\cong$  Ellipse mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad , \quad b = \sqrt{2mE}$$

d.h. PR-Volumen ist Fläche der Ellipse

$$V_{PR}(E) = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}$$

Der WM Oszillator hat die diskrete Energiezustände [siehe Theo Phys III]

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Damit ist Anzahl der Zustände mit Energie  $< E$

$$N_E = \sum_{E_n < E} 1 \simeq \frac{E}{\hbar\omega} = \frac{V_{PR}(E)}{2\pi\hbar} \quad (N_E \gg 1)$$

d.h. wir messen das PR Volumen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantum  $2\pi\hbar = h$  und erhalten somit die Anzahl der energetisch erreichbaren Zustände

Für  $f$  Freiheitsgrade ist

$$N_E \simeq \frac{V_{PE}(E)}{(2\pi\hbar)f}$$

Durch Einführung von abzählbaren Zuständen liefert die PR-Beschreibung die Grundlage für die Statische Mechanik

## 2.9.1 Zeitentwicklung im Phasenraum (PR)

### Poissonklammer

Zeitentwicklung von  $A(q(t), p(t), t)$  ist gegeben

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(q(t), p(t), t) &= \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) - \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}\end{aligned}$$

Def: Poissonklammer zweier PR-Funktion  $f(p, q, t)$  und  $g(p, q, t)$  ist

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (1)$$

Ist A explizit zeitabhängig  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ , gilt

$$\frac{d}{dt}A(q(t), p(t)) = \{A, \mathcal{H}\} \quad (2)$$

D.h. wenn  $\{A, \mathcal{H}\} = 0 \leftrightarrow A$  ist erhaltene Größe

Bsp:

- für radialsymmetrisches Potential ist Drehimpuls  $l_i$  erhalten  
 $\{l_i, \mathcal{H}\} = 0$
- Bewegungs-Gleichung:

$$\begin{aligned}\{q_j, \mathcal{H}\} &= \sum_i \left( \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \\ \{p_j, \mathcal{H}\} &= \sum_i \left( \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_i}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \dot{p}_j \\ \{q_i, p_i\} &= \sum_k \left( \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij}\end{aligned}$$

### Korrespondenz zur QM

$$\underbrace{[g, f]}_{\text{klass. Poissonklammer}} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{i\hbar}[g, f]}_{\text{QM kommutator}} = \frac{1}{i\hbar}(gf - fg) \quad (4)$$



Aus Gl (3) folgt, dann die QM Unschärferelation.  
 Zeitentwicklung einer QM Größe A

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \mathcal{H}] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

## 2.9.2 PR-Dichte

Bsp: gedämpfter harmonischer Oszillator.

(Ortsraum  $p, t$  Graph abklingende Cosinus Schwingung, im Phasenraum  $p, q$  kleiner werdende Spirale)

Wir betrachten viele Teilchen ( $N \gg 1$ ) mit kontinuierlich verteilten Anfangsbedingungen  $q_i(t_0)$ ,  $p_i(t_0)$  wie z.B. in exp. Messung eines Ensembles von Teilchen

Def: PR Dichte  $\rho(q, p, t)$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass sich zur Zeit t am Phasenraumpunkt  $(p, p)$  ein Teilchen befindet. Ist die Teilchenzahl erhalten, gilt:

$$\int dq dp \rho(q, p, t) = N \quad \text{„Normierungsbedingung“}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

d.h. die Phasenraumdicke ist Zeitlich konstant. „Liouville Theorem“

Wir erhalten die Liouville-Gl.

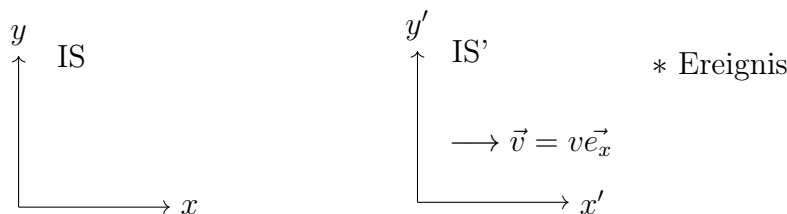
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \rho\}} \quad (6)$$

Mit Ersetzung (4) wird daraus in der Quantenmechanik die Liouville von Neumann Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (7)$$

# Kapitel 3

## Relativistische Mechanik



IS stillstehend und IS' in Bewegung  $\vec{v} = v\vec{e}_x$

Galilei Trafo:

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1)$$

Def: Ein Ereignis ist definiert durch Raum-Zeit-Koord.  $(x, y, z, t)$  und hat in IS und IS' verschiedene Koordinatenwerte.

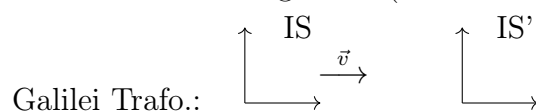
Bsp: Schallwellen

Luft ist Träger für Schallwellen. Bewegt sich die Luft mit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , dann breitet sich der Schall

- bei ruhender Luft ( $v = 0$ ) mit  $\frac{dx}{dt} = c$  aus
- in Richtung von  $\vec{v}$  mit  $\frac{dx}{dt} = v + c$  aus
- in Richtung entgegen  $\vec{v}$  mit  $\frac{dx}{dt} = c - v$  aus

Bsp: Elektromagnetische Wellen

Photon wird bei  $t = t' = 0$ ,  $x = x' = 0$  in x-Richtung ausgesendet und bewegt sich in IS mit der Geschwindigkeit  $c$ . (hier IS mit  $v$  in  $x$  und IS' stillstehend)



Galilei Trafo.:

$$\frac{dx}{dt} = c \longrightarrow \frac{dx'}{dt'} = c + v$$

## Michelson Experiment (1885)

Interferenz Exp zum Nachweis des „Äthers“ als Träger der Lichtwellen, gemessen mit und gegen die Erdbewegung

→ Lichtgeschwindigkeit ist konstant !

## 3.1 Relativistische Mechanik

Michelson: (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit  $c = \text{const.}$

- die von Galilei-Trafo vorhergesagte Addition von Geschwindigkeiten gilt nicht allg, obwohl gut bestätigt für  $v \ll c$
- Naturgesetze hängen nicht von der Wahl des Inertialsystems ab  
→ es können nur relative Bewegungen gemessen werden also keine absoluten Geschwindigkeiten
- Maxwell-Gl. enthalten Lichtgeschw. als Konstante  $c$ , e.m. Wellen breiten sich (im Vakuum) immer mit  $c$  aus
  - Mit Galilei-Trafo wären damit Maxwell-Gl. in unterschiedlichen IS verschieden
  - Gemäß Michelson-Exp wären Maxwell-Gl. in allen IS gültig „relativistische Gl.“

### 3.1.1 Einsteinsches Relativitätsprinzip (1905)

- Konzept von Äther falsch
- Mechanik und Edynamik sollen unter gleiche Trafos form-invariant sein

→ 1.) Alle IS sind gleichwertig

2.) Licht breitet sich in allen IS mit Geschw.  $c$  aus

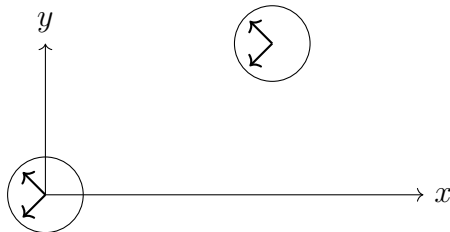
→ Dann muss Galilei Trafo (1) in eine allgemeine Form bringen: „Lorentz Trafo“ (1904)  
Für  $v \ll c$  muss Gl.(1) als Grenzfall enthalten sein

**Bem:**

- Einsteinsche Rel. prinzip und die daraus folgende Lorentz-Trafo sind unschwer nachzuvollziehen
- Die Konsequenzen daraus, insbesondere die Relativität von Raum und Zeit sind auch heute nicht leicht zu verstehen, da sie alltäglich Erfahrungen widersprechen und zu Paradoxien führen.

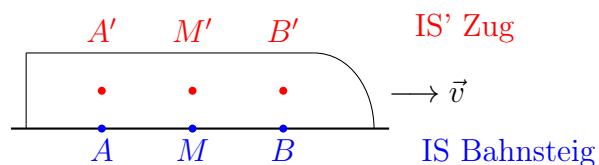
**Def: Längenmessung** Länge eines in IS ruhenden Objekts kann durch ruhende geeichte Maßstäbe bestimmt werden. Die sogenannte Eichlänge hängt nicht vom IS ab, ist also Lorenz-invariant.

**Def: Zeitmessung: Synchronisierte Uhren**



- Standartuhr ist im Ursprung
- synchronisierte Uhr an andrem Ort soll gleiche Zeit anzeigen  
Synchronisation erfolgt durch Austausch von Signalen  
d.h. zur Zeit  $t$  sendet Standartuhr ein Signal zur anderen Uhr, das sofort wieder zurückgeschickt wird und zur Zeit  $t + \Delta t$  ankommt  $\rightarrow$  Bei Empfangen des Signals von der anderen Uhr war Zeitpunkt  $t + \frac{\Delta t}{2}$

### 3.1.2 Gleichzeitigkeit



Betrachte Bahnsteig „IS“ und Zug mit konstanter Geschw.  $\vec{v}$  „IS“

A und B sind zwei Punkte im IS, in der Mitte M steht der Beobachter. Dazu gehören die gleichen Punkte im IS' A', B' und M'

- 1.) Zur Zeit  $t_1$  werden bei A und B gleichzeitig 2 Lichtquellen eingeschaltet.
- 2.) Im Zug haben Lichtquellen zu  $t_1$  die Position A' und B'. Ein Zugreisender bei M' sieht zuerst das von B' kommende Licht (der fahrende Zug verkürzt die Strecke  $\overline{M'B}$ ). Er weiß, dass A' und B' gleich weit entfernt sind und dass Licht isotrop ausbreitet.  
 $\rightarrow$  Für ihn wurde das Licht in B' früher eingeschaltet als in A' und damit nicht gleichzeitig.
- 3.) Etwas später erreichen Beobachter M gleichzeitig die beiden Lichtsignale.
- 4.) Zuletzt sieht M' das von A ausgesandte Lichtsignal.

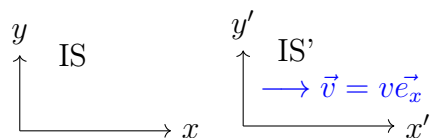
Gleichzeitigkeit hängt vom Bezugssystem ab, es ist also ein relativer Begriff.

Dieser Effekt verschwindet, wenn Lichtgeschw.  $c \rightarrow \infty$ , also bei instantaner Signalübertragung.

## 3.2 Lorenz-Trafo

Zur Konstruktion verwenden wir die Symmetrien

- Relativitätsprinzip
- Homogenität von Raum und Zeit  
d.h. alle Raumzeitpunkte sind äquivalent, man kann also seinen Ursprung beliebig Wählen
- Isotropie des Raumes  
d.h. alle Raumrichtungen sind äquivalent



O.B.d.A. betrachten wir Bewegung entlang x-Achse (IS' in x-Richtung mit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ) d.h. am Anfang  $y = y' \quad z = z'$

Zur Zeit  $z = 0$  fallen IS und IS' zusammen.

Wegen Homogenität von Raum und Zeit muss Trafo linear sein

- sonst könnte Koord. Ursprung nicht beliebig gewählt werden
- sonst wäre ein gleichförmig bewegter Körper in IS beschleunigt in IS'

Ansatz:

$$x' = a_{11}x + a_{12}t + b_1$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z$$

$$z' = a_{21}x + a_{22}t + b_2$$

Aufgrund der Anfangsbed. für  $t = 0$  ist:

$$x_0 = x'_0 = 0 \quad , \quad t_0 = t'_0 = 0$$

ist:  $b_1 = b_2 = 0$  , d.h. :

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \tag{1}$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t \tag{2}$$

wobei  $a_{ij} = a_{ij}(v)$

Betrachte Bewegung des Ursprungs in IS' im IS d.h.  $x' = 0$ . Gl. (1) ergibt:

$$0 = a_{11}x + a_{12}t \rightarrow -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{x}{t} = v \quad (3)$$

Eingesetzt in (1):

$$x' = a_{11}(v)(x - vt) \quad (4)$$

Analog: Bewegung von Ursprung von IS in IS':  $x = 0$

$$x = a_{11}(-v)[x' - (-v)t'] \quad (5)$$

Wegen Isotropie des Raumes ist

$$a_{11}(v) = a_{11}(-v) \text{ oder } a_{ij} = a_{ij}(v^2)$$

Betrachten wir nun eine Lichtquelle, die in IS bei  $x = 0$  ruht und sich daher in IS' mit  $-\vec{v}$  bewegt, und zur Zeit  $t_0 = t'_0$  einen kurzen Lichtblitz aussendet.

Wegen  $c = c'$  gilt für den Ort des Photons:

$$x = ct \quad x' = ct' \quad (6)$$

Setze  $t = \frac{x}{c}$  und  $t' = \frac{x'}{c}$  in (4) und (5) ein:

$$x' = a_{11}(v^2)x(1 - \frac{v}{c}) \quad (7)$$

$$x = a_{11}(v^2)x'(1 + \frac{v}{c}) \quad (7)$$

Ineinander eingesetzt und geteilt durch  $x'$ :

$$1 = a_{11}^2(a - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c}) \quad (3.1)$$

$$a_{11}^2 = \frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2} \quad (3.2)$$

Da Galilei-Trafo als Grenzfall sein soll, nur positive Wurzel

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Mit (3) ist

$$a_{12} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(2) : t' = a_{21}x + a_{12}t$$

$$(5) : x = a_{11}x' + a_{11}vt'$$

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{x}{a_{11}v} - \frac{a_{12}}{a_{11}v} \frac{(x-vt)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{x}{v} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x-vt)}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{x(1-\frac{v^2}{c^2}) - x + vt}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{t - \frac{v^2}{c^2}x}{1-\frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

## Lorentz trafo

Mit dem Lorentz faktor  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  erhalten wir für

$y' = y$  ,  $z' = z$ :

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x-ct) \\
t' &= \frac{t-\frac{v^2}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(t-\frac{v}{c^2}x)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$a_{11} = a_{22} = \gamma = \coth \psi$$

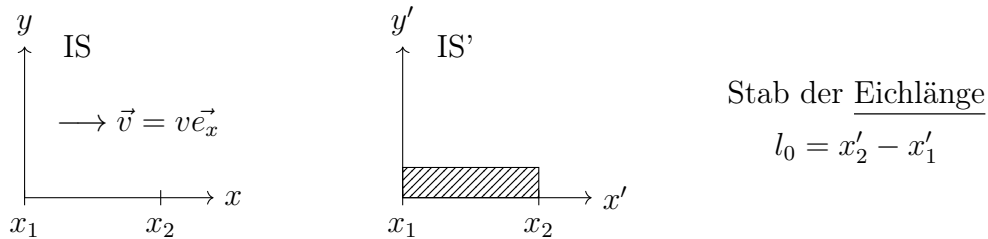
$$a_{12} = a_{21} = \gamma \frac{v}{c} = -\sinh \psi$$

mit dem sog. Rapidity  $\psi = \operatorname{arctanh} \frac{v}{c}$

- Für  $c \rightarrow \infty$ , oder  $v \ll c \rightarrow$  Galilei-Trafo  $x' = x - vt$   $t' = t$
- relativistische Effekte für  $\frac{v}{c} \geq 0.1$
- Lorentz-Trafo auch ohne Annahme  $c = \text{const.}$  herleitbar  
→ man erhält konst. Parameter, der  $c$  entspricht.
- es gibt in der Physik Geschw.  $v > c$   
(z.B. rotierender Laserstrahl auf Mond)  
aber keine Transportgeschwindigkeit für Signale, Energie oder Körper

## 3.3 Längenkontraktion und Zeitdilatation

### 3.3.1 Längenkontraktion



Welche Stablänge wird in IS gemessen ?

Dazu müssen 2 Beobachter in IS zur gleichen IS-Zeit, z.B.  $t = 0$  die Position von Stab-  
 anfang ( $x = x_1$ ) und Stabende ( $x = x_2$ ) messen.

→ 2 Ereignisse

- 1) Stabende passiert einen Beobachter in IS bei  $x_1 = 0$  und  $t_1 = 0$

E1:

$$x_1 = 0 \quad t_1 = 0$$

$$x'_1 = 0 \quad t'_1 = 0$$

- 2) Stabanfang passiert einen Beobachter in IS bei  $x_2$  zur Zeit  $t_2 = 0$

E2:

$$x_2 \quad t_1 = 0$$

$$x'_2 \quad t'_2$$

Für Beobachter in IS ist Stablänge

$$l = x_2 - x_1 \stackrel{x_1=0}{=} x_2$$

Lorenz-Trafo:  $x' = \gamma(x - vt)$       $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

für E2:

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) = l_0$$

$$\stackrel{t_2=0}{=} \gamma x_2$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{l_0}{\gamma}$$

Länge  $l$  des Stabes in IS

#### Längenkontraktion

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1)$$



d.h. der Stab ist kürzer als seine Eigenlänge  $l_0$ . Sogenannte Längenkontraktion oder Lorenz Kontraktion.

Verallgemeinerung:

(1) gilt, wenn Stab parallel zu  $\vec{v}$ . Andernfalls, z.B. bei  $l_0^\perp$  in  $\vec{e}_y$ ,  $l_0^\parallel = \vec{e}_x$ ,  $l_0^2 = (l_0^\perp)^2 + (l_0^\parallel)^2$  ändern sich wegen  $y' = y$  die Länge senkrecht zu  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  nicht.

$$\rightarrow l_\parallel = l_0^\parallel \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$l_\perp = l_0^\perp$$

- Bewegt sich Stab mit  $v = v(t)$ , so ergibt Messung in IS zur Zeit  $t_0$  ebenfalls Gl.(1) mit  $v = v(t_0)$

Bem:

- Ruht der Stab in IS mit Eigenlänge  $l_0$ , so wird in IS' ebenfalls  $l = \frac{l_0}{\gamma} < l_0$  gemessen. Die Kontraktion (1) hängt nicht vom Vorzeichen von  $v$  ab.
- Die Asymmetrie von IS und IS', also ob die Kontraktion die Maßstäbe in IS oder IS' betrifft, wird durch die Messung verursacht.

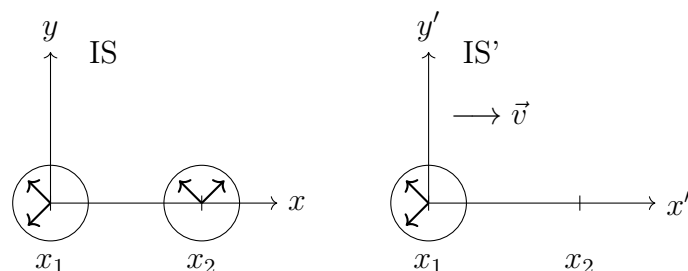
Im IS sind die Ereignisse  $x_1 = 0$ ,  $t_1 = 0$  und  $x_2$ ,  $t_2 = 0$  gleichzeitig  
in IS' sind die Ereignisse  $x'_1 = 0$ ,  $t'_1 = 0$  und  $x'_2 = l_0$ ,  $t'_2$  nicht  
mit:  $t_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{l_0}{\gamma}$

$$\text{da } t'_2 \stackrel{LT}{=} \gamma(t_2 - \frac{x_2 v}{c^2})$$

$$= -\frac{l_0 v}{c^2} \neq 0$$

$\rightarrow$  Gleichzeitigkeit ist ein relativer Begriff.

### 3.3.2 Zeitdilatation



Wir betrachten den Gang einer Uhr in IS' vom IS aus.

Ereignisse:

1) IS' Uhr passiert Beobachter in IS bei  $x_1 = 0$  ,  $t_1 = 0$

E1:

$$x_1 = 0 \text{ , } t_1 = 0$$

$$x'_1 = 0 \text{ , } t'_1 = 0$$

2) IS' Uhr passiert Beobachter in IS bei  $x_2 = vt_2$  und  $t = t_2$

E2:

$$x_2 = vt_2 \text{ , } t_2$$

$$x'_2 = 0 \text{ , } t'_2$$

Lorenz-Trafo:

$$ct' = \frac{ct - x \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

für E2:

$$t'_2 = \frac{t_2 - x_2 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \stackrel{x_2=vt_2}{=} t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

IS' zeigt für das Zeitintervall zwischen E1 und E2:

$$t_0 = t'_2 - t'_1 \stackrel{t'_1=0}{=} t'_2$$

Diese Anzeige wird der IS' Uhr wird vom Beobachter in IS bei  $x_2$  abgelesen zur IS Zeit

$$t = t_2 - t_1 \stackrel{t_1=0}{=} t_2$$

Was der IS Zeitdifferenz zwischen E1 und E2 entspricht.

### Zeitdilatation

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Wegen  $t_0 < t$  geht die bewegte Uhr in IS' gegenüber den IS-Uhren nach „Zeitdilatation“

Eigenzeit  $t_0$ :

Eine Zeit, die von einer einzelnen Uhr, die sich mit einem Körper bewegt (also relativ dazu ruht) heißt Eigenzeit. „Lorenzinvariante Größe“

Bem:

Die Kurzfassung „bewegte Uhren gehen langsamer“ ist problematisch, da man mit den Aussagen:

- die IS' Uhr geht langsamer als die IS Uhr
- die IS Uhr geht langsamer als die IS' Uhr

(da sich von IS' aus IS bewegt und andersherum) einen Widerspruch konstruiert.

- Die Asymmetrie zwischen IS und IS' in (2) resultiert von der Messung, die zwei Uhren in IS benötigt an denen sich eine Uhr in IS' vorbeibewegt.

## Bsp: Myonenzerfall

Myonen  $\mu^\pm$  werden in der Atmosphäre durch kosmische Strahlung erzeugt, in  $\approx 10$  km Höhe. Sie zerfallen gemäß

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma_e + \nu_\mu$$

Im Ruhesystem der Myonen gilt das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

mit der mittleren Lebensdauer  $T = 2.19 \mu s$

In 9 km Höhe werden  $8 \cdot 10^7$  Myonen gezählt.

Gegeben  $v = 0.918 c$ , wieviele Teilchen kommen in Meereshöhe an?

**Nichtrelativistisch beträgt die Flugzeit**

$$t_f = \frac{9 \text{ km}}{0.918 c} \approx 30 \mu s$$

$$N(t_f) = 8 \cdot 10^7 e^{-\frac{30}{2.19}} \approx 90$$

### Relativistisch über Zeitdilatation

In IS Erde ist Flugzeit  $t_f = 30 \mu s$

Die Eigenzeit der Myonen  $\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_f$

$$\tau = \frac{t_f}{15.8} \approx 1.9 \mu s$$

$$N(\tau) = N_0 e^{-\frac{2}{1.9}} \approx 3.4 \cdot 10^7$$

### Relativistisch über Längenkontraktion

Im Bezugssystem Myon fliegt die Erde  $v = 0.998 c$  und legt kontrahierte Strecke  $\frac{9 \text{ km}}{15.8} = 0.57 \text{ km}$  zurück

Dabei vergeht die Eigenzeit

$$Z = \frac{0.57 \text{ km}}{0.998 c} \approx 1.9 \mu s$$

### 3.3.3 Eigenzeit

Uhr, die sich mit  $\vec{v}(t)$  relativ zu IS bewegt kann wegen  $v \neq \text{const.}$  nicht zum Ursprung eines IS' gemacht werden. Dennoch kann die tatsächlich angezeigte Zeit dieser Uhr berechnet werden.

Für einen Zeitpunkt  $t_0$  bewegt sie sich mit konst.  $\vec{v}(t_0)$  ruht also in IS', das sich mit  $\vec{v}(t_0)$  bewegt.

Zeitintervall  $d\tau = t_0 + d\tau - t_0$  ist:

$$d\tau = dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t_0)}{c^2}}$$

zwischen 2 Ereignissen bei  $t_1$  und  $t_2$  ist:

## Eigenzeit

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}$$

$$\xrightarrow{v = \text{const.}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (t_2 - t_1)$$

wird von einer einzigen Uhr gemessen, die sich mit dem Körper bewegt. Eigenzeit ist Lorentzinvariant, hängt also nicht vom Bezugssystem ab

z.B. schalte Uhr bei  $t_1$  an und bei  $t_2$  aus, so ergibt sich einer Zeigerstellung (also  $\tau$ ), die von jedem Beobachter unabhängig vom Bewegungszustand abgelesen werden kann.

### 3.3.4 Zwillingsparadoxon

Astronaut Alex altert auf Weltraumreise weniger als sein Zwillingsbruder Erwin, der auf der Erde bleibt. Paradox, da Bezugssysteme Raumschiff und Erde gleichwertig erscheinen, und deshalb wegen Relativitätsprinzip kein Unterschied sich ergeben dürfte.

- 1) Alex startet zu  $l = 8$  LJ entfernten Sonnensystem Raumschiff beschleunigt in kurzer Zeit auf  $v = 0.8$  c d.h.  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{0.6}$
- 2) Alex fliegt mit  $v = 0.8$  c  
Erwin misst die Flugzeit  $T_E = \frac{l}{v} = 10$  Jahre
- 3) Raumschiff bremst bei Ankunft in kurzer Zeit auf  $v = 0$  ab. Rückflug erfolgt sofort und in gleicher Weise.

Zeit, die in Phase 2 im Raumschiff verstreicht, ist die Eigenzeit:

$$T_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} T_E = 0.6 \cdot 10 \text{ J} = 6 \text{ J}$$

Alternativ über Längenkontraktion:

Für Alex ist die Flugstrecke

$$l_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l = 0.6 \cdot 8 \text{ LJ} = 4.8 \text{ LJ}$$

für die er  $T_A = \frac{l_A}{v} = 6$  J braucht.

- Nach Erwins Zeitrechnung dauert die Reise 20 J  
Nach Alex Zeitrechnung dauert die Reise nur 12 J
- Erwin ist 8 Jahre älter als sein Zwillingsbruder

### 3.3.5 Ursprung des Asymmetrie

In beschleunigten Bezugssystemen laufen Uhren zwar langsamer, aber bei relativ kurzen Beschleunigungszeiten kann dieser Effekt nicht Jahre betragen.

Aber: Zustände der beiden Zwillinge sind unterschiedlich

- die Erde ist ein IS
- das Raumschiff ist wegen Beschleunigungsphasen 1 und 3 **kein** IS
- im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie können wie nur physikalische Gesetze in IS formulieren.  
Dies wurde oben gemacht, d.h. Berechnung von  $T_E$  dann  $T_A = \frac{1}{\gamma} T_E$ .  
Diese Analyse kann man nicht im Ruhesystem Raumschiff machen, da es mehrfach das IS wechselt.

#### Allg.: Gedanken Exp.

- 1) 2 Uhren werden am selben Ort gestartet.
- 2) 2 Uhren werden relativ zueinander bewegt.
- 3) 2 Uhren werden zusammen gebracht und verglichen.

→ mindestens 1 Uhr bewegt sich in einem beschleunigten Bezugssystem

→ nicht allg. zu sagen

Aber: durch Messung der Lorentzinvarianz Eigenzeit ist klar, welche Uhr schneller/langsamer ging.

## 3.4 Vierdimensionale Entfernungen

Drehung eines 3D Vektors  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  ändert die Länge  $\sqrt{\vec{a}^2}$  nicht d.h.  $\vec{a}^2 = a^2$  ist eine Invariante unter Drehungen.

→ welche Invariant gibt es bei Lorentz-Trafos ?

**Gegben:** IS und IS' mit konstanter Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  und Anfangsbedingungen:

$$t_1 = t'_1 = 0$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}'_1 = 0$$

Zu  $t_1 = t'_1 = 0$  wird ein Lichtpuls in alle Richtungen abgestrahlt, der sich Kugelförmig in beiden IS mit gleicher Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Für Ereignisse an der Wellenfront gilt:

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct)^2 - \vec{r}^2 = 0$$

$$(ct')^2 - \vec{r}'^2 = 0$$

folglich ist die Größe  $(ct)^2 - \vec{r}^2$  Lorentzinvariant für alle Ereignisse, die durch ein Lichtsignal verbunden sind.

**Def:**

- Raumzeitpunkt oder **Weltpunkt**  $(ct, \vec{r})$  def. ein Ereignis
- Die Größe

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}$$

heißt **Abstand** oder Intervall oder **4D Entfernung** zwischen 2 Weltpunkten  $(ct_1, \vec{r}_1)$  und  $(ct_2, \vec{r}_2)$

- Das Abstandsquadrat

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$$

zwischen 2 **beliebigen** Ereignissen ist Lorentzinvariant.

**Beweis:** Verschiebung um  $-t_1$  und  $-\vec{r}_1$  und erhalten die Ereignisse

$$E_1 = (0, \vec{0}) \quad , \quad E_2 = (c(t_2 - t_1), \vec{r}_2 - \vec{r}_1) =: (ct, \vec{r})$$

$$s^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

**LT:**

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z'$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \left[ c\gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \right]^2 - \left[ \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \right]^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= (ct')^2 \underbrace{\left( \gamma^2 \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right) \right)}_{=1} + 0 + x'^2 \underbrace{\gamma^2 \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}_{=1} - Y'^2 - Z'^2 \\ &= (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Zur Eigenzeit:**

$$(ds^2)_{\text{Uhr}} = (c^2 dt^2 - d\vec{r}^2)_{\text{Uhr}} \stackrel{d\vec{r} = \vec{v} dt}{=} c^2 \left( 1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2} \right) dt$$

Mit Eigenzeit  $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = c^2 d\tau^2$

$\tau$  ist Lorentzinvariant

**geg:** Ereignisse  $E_i$  mit Weltpunkt  $(ct_i, \vec{r}_i)$

Das Abstandsquadrat

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$$

ist Lorentzinvariant (folgt aus LT)

Für Uhr, die sich mit  $\vec{v}$  bewegt, ist

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = c^2 \left( 1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right) dt^2 = c^2 dz^2$$

$$\text{Eigenzeit } d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad \text{ist Lorentzinvariant}$$

### Kausalität und Minkowski-Diagramm

Gleichzeitigkeit ist relativ.

So ist es auch die zeitliche Reihenfolge, und damit das Prinzip der Kausalität (Ursache und Wirkung). In der Relativitätstheorie willkürlich?

Der kausale Zusammenhang zweier Ereignisse wird durch Vorzeichen von  $s^2$  bestimmt.

Sei oBdA:

E1:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & t_1 &= 0 \\ x'_1 &= 0 & t'_1 &= 0 \end{aligned}$$

E2:

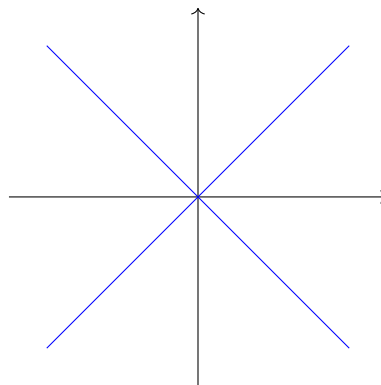
$$\begin{aligned} x_2 &= x & t_2 &= t \\ x'_2 &= x' & t'_2 &= t' \end{aligned}$$

Diese Ereignisse seien durch ein Objekt verbunden, das mit  $v = \frac{x}{t} > 0$  entlang der x-Achse bewegt.

Wegen:  $s_{12}^2 = c^2 t^2 - x^2$  ist

$$\begin{aligned} s_{12}^2 = 0 & : & v &= c & \text{lichtartig} \\ s_{12}^2 > 0 & : & v &< c & \text{zeitartig} \\ s_{12}^2 < 0 & : & v &> c & \text{raumartig} \end{aligned}$$

### Minkowski-Diagramm



$s_{12}^2 > 0$ : „zeitartig“, da Zeit-Term größer.

Die Ereignisse liegen räumlich so nah zusammen bzw, zeitlich so weit auseinander, dass ein kausaler Zusammenhang möglich ist (aber nicht sein muss).

$s_{12}^2 < 0$ : „raumartig“

Die Ereignisse liegen soweit auseinander, dass kein kausaler Zusammenhang möglich ist.

$s_{12}^2$ : „lichtartig“

kausaler Zusammenhang ist möglich (mit Lichtgeschwindigkeit).

Da  $s_{12}^2$  Lorentzinvariant ist, so ist es auch die Klassifizierung und damit die Kausalität.

## 3.5 Relativistische Dynamik

- Grenzfall der Newtonschen Mechanik muss für  $\frac{v}{c} \ll 1$  in Relativitätstheorie enthalten sein.
- Relativ. Gleichungen müssen Lorentzinvariant sein.
- Typischerweise ist man an Impuls- und Energieerhaltung vor und nach der Wechselwirkung mit anderen Teilchen interessiert, weniger an der expliziten Bahnkurve.

### 3.5.1 1.) Vierervektoren

Raumzeitpunkt  $(ct, \vec{r})$  wird als Vierervektor (4-Vektor) geschrieben:

$$\underline{X} = (ct, \vec{r}) \quad (1)$$

(alle Komponenten haben die gleiche Einheit)

**Eigenschaften:**

1)

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{und z-Achse}]{\text{Drehung um } \varphi} \underline{X}' = \begin{pmatrix} ct \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

2) Bei Lorentz-Trafo mit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  ist:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LT}} \underline{X}' = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \\ \gamma(c - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Def: Vierervektoren**

$$\underline{A} = (\underline{A}_0, \underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3)$$

Die sich räumlichen Drehungen und bei Lorentz-Trafos wie

$$\underline{X} = (ct, \vec{r}) \quad \text{Transformieren}$$

$\underline{A}_0$ : zeitliche Komponente

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ : räumliche Komponenten transformieren sich wie  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$

**Quadrat**

$$\underline{A}^2 := \underline{A}_0^2 - \underline{A}_1^2 - \underline{A}_2^2 - \underline{A}_3^2$$

**Beachte:**  $\underline{A}^2 = 0$  folgt nicht  $\underline{A} = 0$

Vektorraum heißt Minkowski-Raum oder pseudoeuklidischer Raum.



### Skalarprodukt:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A}_0 \underline{B}_0 - \underline{A}_1 \underline{B}_1 - \underline{A}_2 \underline{B}_2 - \underline{A}_3 \underline{B}_3$$

Da Abstandsquadrat  $s^2 = \underline{X} \cdot \underline{X} = c^2 t^2 - \vec{r}^2$  lorentzinvariant und sich alle 4-Vektoren wie  $\underline{X}$  transformieren, ist das Quadrat aller 4-Vektoren  $\underline{A}^2$  lorentzinvariant.

Wie bei Drehung von  $\vec{r}$  in 3D, kann man die Lorenz-Trafo von  $\underline{X}$  als Drehung im Minkowski-Raum auffassen. Wegen:

$$(\underline{A} + \underline{B})^2 = \underline{A}^2 + 2\underline{A}\underline{B} + \underline{B}^2$$

ist skalarprodukt  $\underline{A} \cdot \underline{B}$  lorentzinvariant, da alle anderen Terme lorentzinvariant sind.

### Ansatz:

Ersetze 3D Vektoren der Newtonschen Mechanik  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{p}, \vec{F}$  durch lorentzinvariante 4-Vektoren  $\underline{X}, \dots$

→ relativistische Form des 2. Newtonschen Axioms.

→ keine mathematische Ableitung, sondern neue Theorie mit neuen Annahmen oder Axiomen. Muss von Exp. bestätigt werden.

Offenbar sind

$$\underline{X} = (ct, \vec{r}) \quad \text{Raumzeitkoordinaten} \quad (1)$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad \text{Eigenzeit} \quad (2)$$

Lorentzinvariant:

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = (c, \vec{v})$$

ist **kein** 4-Vektor, da sich  $dt$  bei Lorenz-Trafo ändert.

### Def: Vierergeschwindigkeit

$$\underline{u} := \frac{d\underline{X}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} (ct, \vec{r}) = \gamma(c, \vec{v}) \quad (3)$$

Wegen

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 > 0 \quad (4)$$

Vierergeschwindigkeit ist zeitartig.

### Def: Viererbeschleunigung

$$\underline{a} := \frac{d^2 \underline{X}}{d\tau^2} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma(c, \vec{v}))$$

$$\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$$

$$\underline{a} := \gamma \left[ \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{-2\vec{v}\vec{a}}{c^2} \right) \right) (c, \vec{v}) + (0, \vec{a}) \right]$$

$$\underline{a} := \gamma^2(v) \left[ \gamma^2(v) \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} (c, \vec{v}) + (0, \vec{a}) \right] \quad (5)$$

Wegen

$$\frac{d}{d\tau} \underline{u} \cdot \underline{u} = 2\underline{u} \cdot \underline{a} \stackrel{(4)}{=} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0$$

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = 0 \quad (6)$$

4 Geschwindigkeit und 4 Beschleunigung stehen Senkrecht aufeinander.

**Def: Viererimpuls**

$$\underline{p} := m_0 \underline{u} = m_0 \gamma(c, \vec{v}) \quad (7)$$

$m_0$  ist die Masse des ruhenden Körpers, sogenannte Ruhemasse, da  $\underline{p}$  für  $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$  in nichtrelativ Impuls  $\vec{p}$  übergehen soll.

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = \frac{m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 > 0 \quad (8)$$

Viererimpuls ist somit also zeitartig.

Da 4 Quadrate lorentzinvariant, ist auch die Ruhemasse lorentzinvariant. Im Ruhesystem ist  $\underline{p} = (m_0 c, \vec{0})$

**Def: Relativistische oder dynamische Masse**

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9)$$

Damit ist:

$$\underline{p} = m_0 \underline{u} = m(v)(c, \vec{v})$$

d.h. Masse nimmt mit Geschwindigkeit  $v$  zu. Masse wird mit steigender Geschwindigkeit immer schwerer zu beschleunigen.

Wegen  $m(v) \xrightarrow{\frac{v}{c} \rightarrow 1} \infty$  können massive Körper nicht auf  $c$  beschleunigt werden. Dies ist vielfach experimentell bestätigt.

**Def Viererkraft** (oder Minkowski-Kraft)

$$\underline{K} = \frac{d}{dt} \underline{p} = m_0 \frac{d}{dt} \underline{u} = m_0 \underline{a} = (K_0, \vec{K}) \quad (10)$$

Vergleich von  $\vec{K}$  mit der Newton-Kraft  $\vec{F}$

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{d}{dt} (m(v) \vec{v}) = \frac{d}{dt} \vec{p} \stackrel{\text{Newton Postulat}}{=} \vec{F} \\ \rightarrow \vec{K} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{F} = \gamma(v) \vec{F} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rightarrow \vec{F} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \stackrel{(5)}{=} m_0 \gamma(v) \left[ \gamma^2(v) \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \vec{a} \right] \quad (12)$$

Beachte, dass  $\vec{F}$  und  $\vec{a}$  i.A. verschiedene Richtungen haben.  
Wegen:

$$\begin{aligned}\underline{K} \cdot \underline{u} &= m_0 \underline{a} \cdot \underline{u} \stackrel{(6)}{=} 0 \\ &= K_0 u_0 - \vec{K} \cdot \vec{u} = K_0 \gamma(v) c - \gamma(v) \vec{F} \cdot \gamma(v) \vec{v}\end{aligned}$$

ergibt sich für die zeitliche Komponente

$$\begin{aligned}K_0 &= \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \\ \rightarrow \underline{K} &= \gamma(v) \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right)\end{aligned}\tag{13}$$

### Masse und Energie

$$K_0 = \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} p_0 &= m_0 \frac{d}{dt} u_0 = m_0 \gamma(v) \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= \vec{F} \cdot \vec{v} = P\end{aligned}\tag{14}$$

P ist die Leistung, die die Kraft  $\vec{F}$  am Körper mit  $\vec{v}$  verrichtet. Integration ergibt mit  $m(t) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}$

$$m(t)c^2 - m(0)c^2 = \int_0^t P(t') dt = W$$

wobei W die Arbeit ist, die die Kraft  $\vec{F}$  zwischen 0 und t am Körper verrichtet,  
Für freien Körper (K = 0) ist dies die Änderung der kinetischen Energie T

$$m(t)c^2 - m(0)c^2 = T(t) - T(0)$$

Für  $v(0) = 0 \rightarrow T(0) = 0$ ,  $m(0) = m_0$

$$T = mc^2 - m_0 c^2\tag{15}$$

Für kleine Geschwindigkeiten  $\frac{v}{c} \ll 1$  ist

$$\begin{aligned}T &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) m_0 c^2 \quad \text{mit } (1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha \epsilon + \dots \\ &\approx \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) m_0 c^2 = \frac{m_0}{2} v^2\end{aligned}$$

die korrekte nicht-relativistische kinetische Energie.  
Relativistische Energie (15) hat 2 Terme

- $m(v)c^2 = m_0\gamma c^2$  ist Gesamtenergie, die mit  $v$  wächst
- $m_0c^2$  ist die Energie eines Ruhenden Teilchens, die Ruheenergie

Gesamtenergie  $E$  (ohne Pot. U) ist kinetische Energie  $T$  + Ruheenergie

$$E = T + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m(v)c^2$$

oder kurz:

$$E = mc^2 \quad (16)$$

Die „Einsteinsche Formel“ beschreibt die Äquivalenz von Masse und Energie. Ruhemasse kann in Energie und Energie in Ruhemasse umgewandelt werden.

**Bem:**

- Gesamtmasse  $E$  bzw. die dynamische Masse  $m(v)$  ist in abgeschlossenem System erhalten.  
In Newtonscher Mechanik gibt es je einen Erhaltungssatz für Masse und Energie
- dynamische Masse  $m(v)$  ist Erhaltungsgröße, aber nicht Lorentzinvariant  
Ruhemasse  $m_0$  ist keine Erhaltungsgröße, aber Lorentzinvariant

**Bsp:** Massenverlust der Sonne

Fusionsreaktion der Sonne  $2p + 2n \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$

$E_\gamma \approx 2,8 \text{ MeV}$  wird in Wärme umgewandelt

$\rightarrow 5700 \text{ K}$  auf Oberfläche

Die Energie  $E = \Delta m_0 c^2$  mit sogenanntem Massendefekt  $\Delta m_0$  resultiert daraus, dass Heliumkern leichter als die 4 Bausteine ist.

$$\rightarrow P \approx 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad \text{Leistung}$$

Damit verliert die Sonne pro Sekunde die Masse

$$m = \frac{P \cdot 1\text{s}}{c^2} = 4.3 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

was wenig zur Sonnenmasse  $\approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  ist.

Mit Gl. (16) können wir für 4 Impuls schreiben:

$$\underline{P} = m(v)(c, \vec{v}) = \left( \frac{E}{c}, m(v)\vec{v} \right) \quad (17)$$

$\underline{P}$  beschreibt also Energie und räumlichen Impuls.

Beacht, dass klassische Energie eines freien Teilchens

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \underline{\text{nicht}} \text{ mehr gilt.}$$

$$\underline{p} \cdot \underline{p} \stackrel{(8)}{=} m_0^2 v^2 \stackrel{(17)}{=} \frac{E^2}{c^2} - m^2(v) v^2$$

und damit (mit  $\vec{p} = m(v)\vec{v}$ )

$$\begin{aligned} E^2 &= (m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2 \\ \rightarrow E &= \pm \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2} \end{aligned} \tag{18}$$

klassische Mechanik: + Vorzeichen

QM Relativistik: – Vorzeichen beschreibt Antiteilchen.  
(Dirac-Gl.)