Hamiltonsche Mechanik

Ausgehend von $L = L(q, \dot{q}, t)$ $\qquad q = (q_1, \dots, q_f)$

und $\quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1)$

def. wir Hamiltonian $H = H(q, p, t)$

über Legendre Trafo:

$f(x,y) \longrightarrow g(u,y)$ mit $u = \frac{\partial f}{\partial x}$

mit $g = f - ux$

Ansatz: Löse Gl. (1) nach

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$$

und def. Ham. H als Legendre-Transformierte von L

$$\boxed{H(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i(q,p,t)\, p_i - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)}$$

Mit

$$dH = \sum_i \Big[d\dot{q}_i\, p_i + \dot{q}_i\, dp_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i \Big] - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left[\dot{q}_i\, dp_i - \dot{p}_i\, dq_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Verifizieren wir, dass H von q, p, t abhängt.

Das totale Differential von H

$$dH = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

liefert durch Koeffizientenvergleich

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \qquad (1) \quad (i = 1, \dots, f)$$

Hamilton-Gleichungen

und $$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (2)$$

Bem:

- Gl. (1) werden wegen Einfachheit und Symmetrie auch <u>kanonische</u> Gl. genannt.
- Die $2f$ Variablen q_i und p_i sind völlig <u>gleichberechtigt</u>,
  - p_i heißt auch zu "<u>q_i konjugierter Impuls</u>"
  - q_i, p_i heißt "<u>Paar konjugierter Variablen</u>"
- Wichtig: H darf keine Geschwindigkeiten enthalten
- In Kapitel I.6 wurde bereits gezeigt, dass Energie erhalten ist für $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ als H nicht explizit von der Zeit abhängt.
- <u>Zyklische Koordinaten</u>:

  Hängt $H(p, q)$ nicht von q_i ab, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$

$\rightarrow p_i = \text{const.}$ Erhaltungsgröße

Für ein konservatives System mit

$$L = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(q)$$

mit den kanonischen Impulsen $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i$

entspricht $H = \sum_i \frac{p_i^2}{m_i} - \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q)$

$$\boxed{H(p,q) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q) = T + U} \qquad (2)$$

also der Gesamtenergie.

Hier ist der kanonische Impuls $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ gleich dem kinetischen Impuls $m_i \dot{q}_i$

Gilt für zeitunabhängige, holonome Zwangsbedingungen ruhenden Koord. und konservative Kräften

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

[Bsp: harm. Oszill $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -m\omega^2 q = F$$

$$F = \dot{p} = m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$]

- Geht aber nicht, z.B. bei
  - geschw. abhängigen Kräften (Lorentz-Kraft)
  - zeitabhängigen Zwangsbed.

Standardfall von f Freiheitsgraden q_i

- erhalten durch die Elimination von zeitunabh. holonomen Zwangskräften (oder ohne diese)
- die nicht explizit zeitabhängig sind (z.B. externen Antrieb)
- die konservativen Kräften genügen

ist
$$L(q,\dot q) = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot q_i^2 - U(q)$$
$$H(q,p) = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q)$$
mit

Beweg.gleichungen sind äquivalent

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = m_i \ddot q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$
- $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i}$, $\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ $\rightarrow m_i \ddot q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$
- $F_i = m_i \ddot q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$

Mechanik nach

- <u>Newton:</u> · über Def. der Kraft
  · einfach und anschaulich
- <u>Lagrange:</u> · über Def. von $L(q,\dot q,t)$

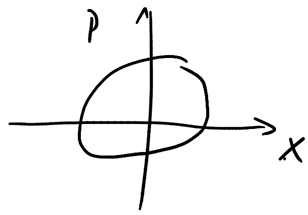
- Berücksichtigung von Zwangsbedingungen
- Zwangskräfte (Lag. Gl. 1. Art)
- Konzept von verallg. Koord. q_i
- Konzept von zyklischen Variablen, $\partial L / \partial q_i = 0$
  $\rightarrow$ Erhaltung von $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$
- Hamilton - Prinzip
- Ableitung von Feldtheorien

- <u>Hamilton</u> - über Def von $H(q,p,t)$
  - Zwangsbedingungen nur implizit
  - Konzept des Phasenraum

  $\rightarrow$ Ausgangspunkt für <u>statistische Mechanik</u>
  " für <u>QM</u>

II. 10 Phasenraum

harm. Oszill



- (q, p) bilden einen $2f$-dim. Phasenraum (PR)
- Zustand ist im Phasenraum eindeutig beschrieben, d.h. $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$ schneiden sich Bahnen im Phasenraum nicht.

- $H(p, q) = E = \text{const.}$ entspricht einer $2f-1$ dim Fläche im PR, welche das $2f$-dim. <u>Phasenraumvolumen</u>

$$V_{PR}(E) = \int\limits_{H(p,q) < E} dq_1 \dots dq_f \int dp_1 \dots dp_f$$

- Klassisch entspricht ein endliches Phasenraumvolumen ∞ Systemzustände
- QM — 〃 — endlich viele Systemzustände

<u>Bsp:</u> $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = H(q, p)$

$\hat{=}$ Ellipse mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad b = \sqrt{2mE}$$

d.h. PR-Volumen ist Fläche der Ellipse

$$V_{PE}(E) = \pi a b = \frac{2\pi E}{\omega}$$

Der QM Oszillator hat die diskrete Energiezustände [siehe TheoPhy III]

$$E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

Damit ist Anzahl der Zustände mit Energie $< E$

$$N_E = \sum_{E_n < E} 1 \approx \frac{E}{\hbar\omega} = \frac{V_{PR}(E)}{2\pi\hbar} \qquad (N_E \gg 1)$$

d.h. wir messen das PR Volumen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantum $2\pi\hbar = h$ und erhalte somit die Anzahl der energetisch erreichbaren Zustände

Für f Freiheitsgrade ist

$$N_E \approx \frac{V_{PE}(E)}{(2\pi\hbar)^f}$$

Durch Einführung von <u>abzählbaren</u> Zuständen liefert die PR-Beschreibung die Grundlage für die

<u>Statistische Mechanik.</u>