Noether Theorem

Invarianz | **Erhaltung**

zyklische Variable q_k mit $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ $\longleftrightarrow$ verallg. Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \text{const.}$

z.B.: $L = \frac{m}{2}\dot x^2 \rightarrow p = m\dot x = \text{const.}$

Allg.:

Ist $L(q(t), \dot q(t), t)$ invariant bzgl. $q_i(t) \rightarrow q_i(t,\alpha)$

ist die Größe $\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$ erhalten.

Verallg.: Falls L nicht invariant bzgl Trafo, aber gilt

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L(q(t,\alpha), \dot q(t,\alpha), t)\Big|_{\alpha=0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha} L(q(t), \dot q(t), t)}_{=0} + \frac{d}{dt} F(q(t), \dot q(t), t)$$

mit beliebiger Funktion F, so folgt

$$0 = \frac{\partial L}{\partial\alpha} + \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{dF}{dt}$$

$$= \sum_i \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]}_{=0} \frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + F\right]}_{=0} = 0$$

und damit $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + F(q, \dot q, t)$ ist erhalten. $(*)$

Translation:

Lagrange Fktn $L(\vec r_1, \dots, \vec r_N, \dot{\vec r}_1, \dots \dot{\vec r}_N, t)$

Sei invariant unter Trafo

$$\vec{r}_i(t) \to \vec{r}_i(t,\alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha\,\vec{e}$$

wobei $\vec{\varepsilon}$ ein beliebiger (aber konst.) Einheitsvektor ist.

Gilt z.B. wenn Pot. U nur von Differenzvektoren abhängt

$$\vec{r}_i(t,\alpha) - \vec{r}_j(t,\alpha) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$$

Damit ist $$\left.\frac{\partial \vec{r}_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \vec{e}$$

und $$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\vec{e} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{e} = \vec{p}\cdot\vec{e}$$ ist die erhaltene Größe

Da $\vec{e}$ beliebig ist, ist Gesamtimpuls erhalten.
Bei speziellen Vektor $\vec{\varepsilon}_0$ ist nur $\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}_0$ Komponente erhalten

d.h.

Invarianz bezgl. Translation um $\vec{e}$ $\Leftrightarrow$ Impuls p_e ist erhalten

Symmetrie: "Homogenität des Raumes"

anschaulich: keine Hindernisse im Raum

Rotationsinvarianz

Sei $$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x^2+y^2, z)$$

in Zylinderkoord.

$$L(r,\varphi,z,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(r^2, z)$$

ist bzgl der Trafo $\varphi \to \varphi + \alpha$ invariant

Folglich ist $\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = m r^2 \dot\varphi \frac{\partial(\varphi+\alpha)}{\partial \alpha} = m r^2 \dot\varphi = L_z$

erhalten.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Invarianz bzgl. Drehung um } \vec{e} \leftrightarrow \text{Drehimpuls } L_e \text{ ist erhalten.}\\ \text{Symmetrie: Isotropie des Raumes}\end{array}}$

d.h.: keine Richtung ausgezeichnet.

Translation in der Zeit

$t \to t+\alpha$, d.h. $q_i(t,\alpha) = q_i(t+\alpha)$

Damit $\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial q_i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \dot q_i$

$$\frac{\partial \dot q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \ddot q_i$$

Betrachte

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t+\alpha), \dot q(t+\alpha), t)\Big|_{\alpha=0} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i(t+\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i(t+\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i$$

und

$$\frac{dL(q(t), \dot q(t), t)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\right)$$

$\to \frac{\partial L}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{dL}{dt}$ falls L nicht explizit von Zeit abhängt d.h. $\partial L/\partial t = 0$

mit (*) und $F(q,\dot{q},t) = -L(q,\dot{q},t)$, somit ist erhalten

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q,\dot{q})$$ (Formel hergeleitet bei Energieerhaltung)

$$= T + U = E = \text{const.}$$ d.h. Energieerhaltung

Invarianz unter Zeittranslation $\leftrightarrow$ Energieerhaltung

Symmetrie: Homogenität der Zeit

anschaulich: Experiment verläuft heute genauso wie morgen

Bem.:

- Die durch das Noether theorem beschriebene Beziehung

  Invarianz / Symmetrie $\leftrightarrow$ Erhaltung

  ist fundamental und allg. gültig.

  gilt also auch in QM und relativistischen Mechanik

- z.B. liefert die Erhaltung von Ladung, Isospin, ...
  Konstruktionsbedingungen für entsprechenden Theorien.

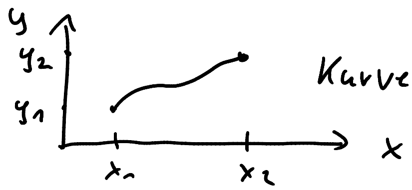
5. Hamiltonsches Prinzip

1.) Funktionale und Variationsrechnung

- Funktion: $x \to y = f(x)$ ordnet jeder Zahl x eine Zahl y zu.
  Extrema durch Nullstellen der Ableitung df/dx

- Funktional: $y = f(x) \longrightarrow J[y]$
  ordnet einer Funktion $f(x)$ eine Zahl J zu.

<u>Bsp 1:</u> Kürzeste Wegstrecke

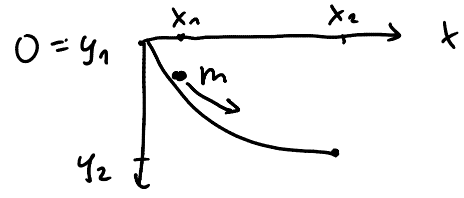


Wegstrecke: $J = J[y] = \int_1^2 ds$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$$ (Ergebnis aus Kurvenintegral)

kürzeste Wegstrecke: $J[y] = \text{min.}$

<u>Bsp 2:</u> <u>Brachistochrone</u> Bernoulli (1696)



Masse m gleitet reibungslos wegen Schwerkraft auf Kurve $y(x)$. Für welches $y(x)$ ist die Zeit T minimal?

Mit $v = \frac{ds}{dt}$ $\quad dt = \frac{ds}{v}$

$$T = \int^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$dt \qquad\qquad v$$

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{1+y'^2}\; dx \\ \frac{1}{2} m v^2 &= m g y \;\rightarrow\; v = \sqrt{2gy} \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\,y(x)}}$$

2. Euler-Lagrange-Gl.

Problem: Welche Funktion $y(x)$ macht Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\; F(y, y', x) \qquad (1)$$

minimal,

wobei differenzieren Funkt. F und $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$ bekannt sind.

Sei $y(x)$ die gesuchte Fkt. mit $J[y] = \min$.

Die Variation $\quad y(x) \rightarrow y(x) + \varepsilon \eta(x) \qquad (2)$

mit infinit. ε und beliebigen diff.baren Funktion $\eta(x)$

die die Randbeding. $\quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$J[y + \varepsilon\eta] \text{ ist minimal bei } \varepsilon = 0 \quad \forall \eta \qquad (3)$$

Die Bestimmung von y über (3) wird als

Variationsrechnung bezeichnet.

$$J[y + \varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\; F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y', x)\, \varepsilon\, \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(y, y', x)\, \varepsilon\, \eta'(x) \right] + O\varepsilon^2$$

Damit

$$0 = \left. \frac{dJ(y + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) \right]$$

[par. Int: $\int uv' = uv - \int vu'$ für 2. Term]

$$= \underbrace{\left. \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x) \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0\text{, da } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x)$$

Da η beliebig sein kann, muss Klammer verschwinden

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \qquad (4)$$

<u>Euler-Lagrange-Gl.</u>

- hängt nicht von $\eta(x)$ ab
- notwendige Bedingung für Extremum

Mit Variation $\delta y = \varepsilon\eta(x)$ können wir (3) schreiben

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = 0 \qquad (5)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y$$

$$\equiv \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\delta F}{\delta y} \right) \delta y = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta F(y, y', x)$$

wobei $\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$ als Funktionalableitung bezeichnet wird

Gl. (4) und (5) sind äquivalent

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \longleftrightarrow \delta J = 0}$$

"Variationsprinzip"