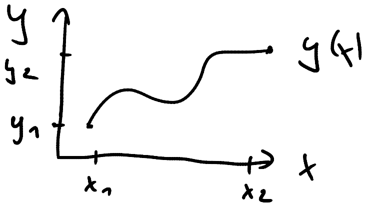
Variationsrechnung

Funktional: $y = f(x) \longrightarrow J[y]$



z.B. Weglänge s der Kurve y(x)

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

allg.: $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x)$

Extrema über Variation $\delta y = \varepsilon \eta(x)$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = 0$$

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = 0 \longleftrightarrow \text{Extrema von } J$$

äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gl

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \longleftrightarrow \quad \delta J = 0}$$ Extremalbedingung

Bsp.: Kürzeste Verbindung

$$J = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{F} = \min$$

Euler-Lag. Gl: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{2y'(x)}{2\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

<u>Integration:</u> $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{y'(x_2)}{\sqrt{1+y'(x_2)^2}} - \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1+y'(x_1)^2}} = 0$

$\rightarrow y' = \text{const.} \quad , \quad y(x) = ax + b$

a, b aus x_1, x_2

<u>Verallgemeinerung:</u>

① Hängt F von mehreren Fkt y_i $(i = 1, \dots, f)$ ab,

so erhalten wir $\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i = 0} = 0$

und damit f Euler-Lagrange-Gl.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i}}$$

② Hängt y von mehreren Argumenten ab,

$y = y(x_1, \dots, x_n)$ so erhalten wir

$$J[y] = \int dx_1 \dots \int dx_n \; F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}, x\right)$$

Mit $\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = 0$

<u>Euler-Lagrange-Gl:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{(\partial y / \partial x_i)} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\sum_{i=1} \quad \partial x_i \quad (\partial y / \partial x_i) \quad \quad \partial y$$

3. Hamiltonsche Prinzip

Die Korrespondenz

$$y_i(x) \longleftrightarrow q_i(t) \qquad y = (y_1, \dots, y_f)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad q = (q_1, \dots, q_f)$$

$$F(y, y', x) \longleftrightarrow L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y} \longleftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$\rightarrow$
- Lösungsverfahren der Lagrange-Gl. (z.B. über Erhaltungssätze) können in Variationsrechnung verwendet werden
- phys. Bedeutung der Variationsrechnung

Wir ordnen jeder Bahnkurve $q(t)$ ein Wirkungsfunktional

$$\boxed{S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q, \dot{q}, t)}$$

S wird oft Wirkung genannt

Gemäß dem Variationsprinzip sind damit die Lagrange-Gl äquivalent zu

$$\boxed{\delta S[q] = 0}$$

"Hamiltonsche Prinzip"

Bewegung verläuft so, dass Bahnkurve $q(t)$ die Wirkung S minimiert: "Prinzip der kleinsten Wirkung"

Bem:

- Anstelle von DGL (wie Newton, Lagrange) kann das Grundgesetz der Mechanik also auch als Variationsprinzip formuliert werden
- andere Bsp:
  - Optik: Fermatsche Prinzip

    Licht nimmt seinen Weg so, dass die Laufzeit

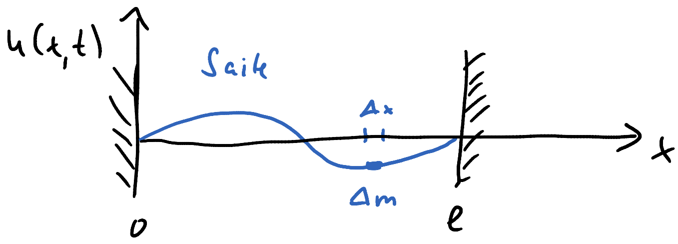
    $$t[x] = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx \; n(x) \overset{!}{=} \min \qquad n(x): \text{Brechungsindex}$$

  - Thermodynamik: 2. Hauptsatz

    Entropie S wird maximiert $S = \max.$

- Auch die QM kann durch ein Variationsprinzip beschrieben werden.

Schwingung einer Saite



- Auslenkung $u(x,t) \mathrel{\hat{=}}$ Feld
- nur vertikale Auslenkungen

- Bsp für Kontinuumsmechanik, d.h. Dynamik elastischer Körper inklusive Balkenbiegung und Hydrodynamik
- Bsp für einfache klassische Feldtheorie
- führt auf Wellengleichung
- Analogie zu QM

Bsp für Felder: el. Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$, Temperaturfeld $T(\vec{r},t)$

Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t)$

zentrale Größe in Feldtheorien

Bewegungsgl. für Felder, sog. Feldgleichungen, sind partielle DGL

Herleitung der Wellengleichung

Ansatz:
- Saite $\mathrel{\hat{=}}$ N Massenelemente Δm durch Federn verbunden
- zuletzt: $N \to \infty$ "Kontinuumslimes"

- $\ell = N \Delta x \quad , N \gg 1$
- Massen Δm_i bei $x_i = (i - 1/2)\, \Delta x \qquad (i = 1, \ldots, N)$

Auslenkung $\quad u_i(t) = u(x_i, t)$

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \frac{\varrho \Delta x}{2} \dot{u}_i^2 \qquad (1)$$

mit Massendichte ϱ = Masse/Länge

Abstand zwischen i-ten und $(i+1)$-ten Massenpunkt

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

für kleine Auslenkung $\quad \approx \Delta x \left[1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2 \Delta x^2} \right]$

In Ruhelage $\Delta s = \Delta x$ existiert eine Vorspannkraft P der Saite

Beitrag zur pot. Energie $\sim P \cdot (\Delta s - \Delta x)$

$$U = \sum_i P \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2 \Delta x^2} \qquad (2)$$

$N \to \infty : \quad u_i(t) \to u(x, t)$

$$T = \lim_{N \to \infty} \frac{\varrho}{2} \sum_i \Delta x \left(\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2$$

$$= \frac{\varrho}{2} \int_0^\ell dx \underbrace{\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2}_{=: \dot{u}^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u'$$

$$U = \lim_{N\to\infty} \frac{P}{2} \sum_i \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{P}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}_{=:\, u'^2}$$

Damit ist

$$L(\dot{u}, u') = \int_0^l dx \underbrace{\left[\frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} u'^2 \right]}_{\text{Lagrange-Dichte } \mathcal{L}(\dot{u}, u')} \tag{3}$$

Hamilton Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx\, \mathcal{L}(\dot{u}, u') = 0$$

Euler-Lagrange-Gl.

für 2 Argumente $x_1 = x$, $x_2 = t$

und $F = \mathcal{L}$, $y = u$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

$$\rho \ddot{u} + P u'' - 0 = 0$$

mit $c = \sqrt{P/\rho}$ "Wellengeschwindig"

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t} = 0}$$ Wellengleichung

Randbedingung: $u(0,t) = u(l,t) = 0$

Anfangsbedingung: $u(x,t_0) = u_0$, $\dot{u}(x,t_0) = \dot{u}_0$

Lösung der Wellengleichung:

Ansatz: $u(x,t) = u_0 \, e^{\pm i(kx - \omega t)}$

Amplitude u_0, Wellenvektor k, Frequenz ω

eingesetzt: $u'' = \frac{1}{c^2}\ddot{u} \rightarrow -u k^2 = -\frac{1}{c^2}\omega^2 u$

Lösung, falls $\boxed{\omega = c k}$ Dispersionsrelation

allg. Lösung durch Linearkombination

im Kontinuumlimit erhalten

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; u(k) \; e^{\pm(kx - \omega t)}$$ Fourier-Trafo

Bsp: Stehende Wellen

Suposition zwischen rechtslaufenden und linkslaufenden Wellen

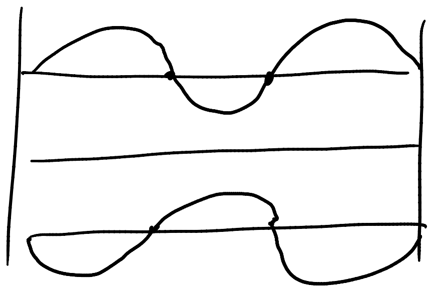
$$u = \cos(kx - \omega t) - \cos(-kx + \omega t)$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{ikx} \underbrace{\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} \right)}_{2i \sin\omega t}$$

$$= 2\, \mathrm{Im}\, e^{ikx} \sin\omega t = 2 \sin kx \sin\omega t$$

d.h. unabhängig von t erhält man "Knoten" (Nullstellen)

für $\sin kx = 0$



$t = -T/4$

$t = 0$

$t = T/4$

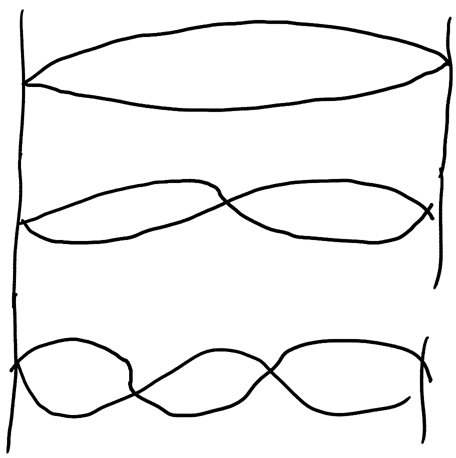
Randbed: $u(x=0,t) = u(x=l,t) = 0$

$$\sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad k = \pi n / l$$

d.h. es können nur Wellen mit bestimmten Wellenlängen λ_n auftreten

$$\lambda_n = 2\pi/k = 2l/n \qquad n = 1, 2, 3$$

$$\omega_n = ck = n\pi c/l$$



$\lambda = 2l$ "Grundschwingung"

$\lambda = l$ "1. angeregte Schwingung"

1. Oberton

$\lambda = \frac{2}{3} l$

2. ang. Schwingung

2. Oberton

Analogie zum QM Teilchen im Kasten

$\rightarrow$ Quantisierung.