Lineare Algebra II

Vorlesung von Prof. Dr. Amador Martin - Pizarro im Sommersemester 2018

Markus Österle
Andréz Gockel

17.04.2018

Inhaltsverzeichnis

I Wiederholung **8**

I.0.1 Def: Ringe 8
I.0.2 Def: Integritätsbereich 8
I.0.3 Def: Körper 8
I.0.4 Bew: 8
I.0.5 Bew: 9
I.0.6 Def: Polynomring 9
I.0.7 Satz:(Division mit Rest) 10
I.0.8 Def: Teiler 11
I.0.9 Def: Nullstelle 11
I.0.10 Bew: 12
I.0.11 Def: Vielfachheit der Nullstellen 12
I.0.12 Def: Algebraische Abgeschlossenheit 12
I.0.13 Frage: 12
I.0.14 Warum?: 13
I.0.15 Bew: 13
I.0.16 Def: Vektorraum 13
I.0.17 Def: Lineare Unabhängigkeit 14
I.0.18 Def: Basis = min. Erz. System 15
I.0.19 Satz: Basisergänzungssatz 15
I.0.20 Basisauswahlsatz 15
I.0.21 Def: Direkte Summe 15
I.0.22 Bsp: 16
I.0.23 Def: Lineare Abbildungen 16
I.0.24 Def: Rang 17
I.0.25 Satz: Basismatrix 17
I.0.26 Bew: 18
I.0.27 Def: Invertierbarkeit 18
I.0.28 Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit 21
I.0.29 Def: Determinante 21

I.0.30 Def: Darstellungsmatrix 22
I.0.31 Def: Adjunkte 23

II Lineare Algebra II **24**
II.0.1 Def: Diagonaliserbarkeit 24
II.0.2 Def: Eigenvektor 24
II.0.3 Def: Eigenraum 25
II.0.4 Def: Diagonalisierbarkeit 25
II.0.5 Satz: Zu Eigenwerten 26
II.0.6 Def: Charakteristisches Polynom 26
II.0.7 Bsp: 26
II.0.8 Kor: Anzahl der Eigenwerte 27
II.0.9 Kor: Diagonalisierbarkeit 27
II.0.10 Bew: 27
II.0.11 Kor: Geometrische Vielfachheit 28
II.0.12 Bsp: 28
II.0.13 Def: Algebraische Vielfachheit 29
II.0.14 Bew: 29
II.0.15 Lemma: Quotientenraum Endomorphismus 30
II.0.16 Bew: 30
II.0.17 Satz: Diagonalisierbarkeit 31
II.0.18 Bew: 32
II.0.19 Def: Trigonalisierbarkeit und ähnlichkeit 33
II.0.20 Def: Trigonalisierbarkeit 33
II.0.21 Satz: Trigonalisierbarkeit 33
II.0.22 Kor: Trigonalisierbarkeit 34
II.0.23 Bew: (Satz) 34
II.0.24 Beh: 35
II.0.25 Bew: 35
II.0.26 Frage: 35
II.0.27 Lemma: F^r & Polynome 35
II.0.28 Bew: 36
II.0.29 Satz: (Calay - Hamilton) 38
II.0.30 Bew: 38
II.0.31 Kor: 38
II.0.32 Satz: Minimalpolynom 39
II.0.33 Wiederholung: 39
II.0.34 Bew: 40
II.0.35 Lemma: Nullstellen von χ_F und m_F 42
II.0.36 Bew: 42
II.0.37 Satz: Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom 42

II.0.38 Bew: 43

III Die Jordansche Normalform **47**
III.0.1 Lemma: Invarianzen 47
III.0.2 Bsp: 47
III.0.3 Def: Hauptraum 47
III.0.4 Bew: 48
III.0.5 Lemma: Haupträume sind disjunkt 48
III.0.6 Bew: 49
III.0.7 Bem: Invarianzen 50
III.0.8 Lemma: Ordnung 50
III.0.9 Bew 50
III.0.10 Def: Nilpotenz 52
III.0.11 Lemma: Nilpotenz 53
III.0.12 Bew: 53
III.0.13 Satz: Jordan-Charelley Zerlegung 54
III.0.14 Bew: 55
III.0.15 Def: F-adaption 56
III.0.16 Bew: 56
III.0.17 Def: Index 57
III.0.18 Satz: Index 57
III.0.19 Bew: 57
III.0.20 Satz: F-adaptierte Basis 58
III.0.21 Kor: 58
III.0.22 Bew: 59
III.0.23 Folgerung 59
III.0.24 Kor: Jordansche Normalform 60
III.0.25 Bew: 60

IV Dualität **63**
IV.0.1 Def: Dualraum 63
IV.0.2 Def: Duale Basis 63
IV.0.3 Bew: 63
IV.0.4 Lemma: kanonischer Monomorphismus 64
IV.0.5 Bew: 64
IV.0.6 Korollar: 64
IV.0.7 Bew: 64
IV.0.8 Lemma: Duale Transformation 65
IV.0.9 Bew: 65
IV.0.10 Def: duale Abbildung 65
IV.0.11 Bew: 66

IV.0.12 Bew: . . . 67
IV.0.13 Bew: . . . 68
IV.0.14 Korrolar: zu Duale Basen . . . 68
IV.0.15 Bew: . . . 69
IV.0.16 Lemma: V und V^* . . . 69
IV.0.17 Lemma: Duale Endomorphismen . . . 70
IV.0.18 Bew: . . . 70
IV.1 Duale Paarung . . . 72
IV.1.1 Def: Bilinearität . . . 72
IV.1.2 Def: Duales Paar . . . 73
IV.1.3 Lemma: . . . 73
IV.1.4 Wiederholung . . . 74
IV.1.5 Bew: . . . 74
IV.1.6 Kor: Ausartung . . . 75
IV.1.7 Bew: . . . 76
IV.1.8 Kor: duale Basen . . . 76
IV.1.9 Bew: . . . 77
IV.1.10 Def: Orthogonales Komplement . . . 77
IV.1.11 Bew: . . . 77
IV.1.12 Lemma: zu Quotientenräumen . . . 78
IV.1.13 wiederholung . . . 78
IV.1.14 Def: Adjungierte . . . 79
IV.1.15 Bew: Eindeutigkeit . . . 79
IV.2 Euklidische Räume . . . 80
IV.2.1 Def: Symmetrie . . . 80
IV.2.2 Bew: . . . 80
IV.2.3 Def: Quadratische Form . . . 81
IV.2.4 Def: Definitheit . . . 82
IV.2.5 Def: Skalarprodukt . . . 82
IV.2.6 Def: Euklidischer Raum . . . 83
IV.2.7 Def: Norm . . . 83
IV.2.8 Def: Norm über Skalarprodukt . . . 83
IV.2.9 Lemma: . . . 83
IV.2.10 Bew: . . . 84
IV.2.11 Bew: . . . 84
IV.2.12 Def: Winkel zwischen Vektoren . . . 85
IV.2.13 Wiederholung . . . 85
IV.2.14 Satz: (des Pythagoras) . . . 86
IV.2.15 Bew: . . . 86
IV.2.16 Def: Orthogonal- und Orthonormalbasis . . . 86
IV.2.17 Satz: φ symmetrisch $\Rightarrow$ diagonalisierbar . . . 87

IV.2.18 Kor: . . . 88
IV.2.19 Bew: . . . 88
IV.2.20 Kor: (Sylvester) . . . 89
IV.2.21 Bew: . . . 90
IV.2.22 Bew: falsch: . . . 90
IV.2.23 Def: Signatur . . . 91
IV.2.24 Wiederholung . . . 91
IV.2.25 Bew: Kor Sylvester . . . 91

V Unitäre Räume **92**
V.0.1 Def: unitärer Raum . . . 92
V.0.2 Bew: . . . 92
V.0.3 Def: Orthonormalbasis . . . 93
V.0.4 Bew: . . . 93
V.0.5 Lemma: Orthonormalbasen . . . 94
V.0.6 Bew: . . . 94
V.0.7 Satz: (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren) . . . 94
V.0.8 Bew: . . . 95
V.0.9 Kor: Orthonormalsysteme . . . 96
V.0.10 Def: Orthogonale Teilmengen . . . 96
V.0.11 Def: Orthogonale Teilmenge . . . 96
V.0.12 Bew: . . . 97
V.0.13 Satz: Orthogonales Komplement . . . 97
V.0.14 Bew: . . . 97
V.0.15 Lemma: . . . 98
V.0.16 Bew: . . . 98
V.0.17 Def: orthogonale Projektion . . . 98
V.0.18 Satz: Projektion . . . 99
V.0.19 Bew: . . . 99

VI Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen **100**
VI.0.1 Def: adjungierte Matrix . . . 101
VI.0.2 Lemma: adjungierte Abbildung . . . 103
VI.0.3 Bew: . . . 103
VI.0.4 Def: Normale Homomorphismen . . . 103
VI.0.5 Prop: . . . 103
VI.0.6 Bew: . . . 104
VI.0.7 Def: Normale Matrix . . . 105
VI.0.8 Lemma: adjunkte Eigenwerte . . . 105

VI.0.9 Bew: . . . 105
VI.0.10 Satz: zu char. Polynomen und adjunkten . . . 105
VI.0.11 Bew: (Satz) . . . 106
VI.0.12 Bew: . . . 106
VI.0.13 Def: Selbsadjungierte . . . 108
VI.0.14 Kor: Spektralsatz . . . 108
VI.0.15 Bew: . . . 108
VI.0.16 Lemma: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 109
VI.0.17 Bew: . . . 109
VI.0.18 Satz: Hauptachsentransformation . . . 109
VI.0.19 Lemma 1: . . . 110
VI.0.20 Bew: . . . 110
VI.0.21 Lemma 2: . . . 110
VI.0.22 Bew: . . . 110
VI.0.23 Bew: Hauptachsentransformationssatz . . . 110
VI.0.24 Korollar: . . . 111
VI.0.25 Satz: Sylvester . . . 112
VI.0.26 Bew: . . . 112
VI.0.27 Bew: . . . 113
VI.0.28 Bew: Satz von Sylvester . . . 114
VI.1 Orthogonale Abbildungen und Drehungen . . . 115
VI.1.1 Def: Orthogonale Abbildung . . . 115
VI.1.2 Lemma: . . . 116
VI.1.3 Bew: . . . 116
VI.1.4 Wiederholung: . . . 117
VI.1.5 Bew: . . . 118
VI.1.6 Satz: Bijektive Orthogonale Abbildung . . . 118
VI.1.7 Bew: . . . 118
VI.1.8 Kor: F Bijektiv $\Rightarrow F^{-1} = F^{\top}$ . . . 119
VI.1.9 Bew: . . . 119
VI.1.10 Satz: Orthogonale Abbildung . . . 119
VI.1.11 Bew: . . . 119
VI.1.12 Def: Orthogonalität von A . . . 120
VI.1.13 Kor: Zeilen-/Spalten-orthonormalbasis . . . 120
VI.1.14 Bew: . . . 120
VI.1.15 Kor: zu Satz VI.1.11 . . . 120
VI.1.16 Bew: . . . 120
VI.1.17 Def: Orthogonal diagonalisierbar . . . 121
VI.1.18 Prop: Orthogonal diagonalisierbar . . . 121
VI.1.19 Bew: . . . 121
VI.1.20 Kor: Symmetrie und diagonalisierbarkeit . . . 122

VI.1.21 Bew: 122
VI.1.22 Def: Drehung 122
VI.1.23 Satz: Drehung 122
VI.1.24 Wid: 123
VI.1.25 Bew: Satz 123
VI.1.26 Satz: Drehung 123
VI.1.27 Bew: 124
VI.2 Multilineare Algebra 125
VI.2.1 Def: 125
VI.2.2 Satz: 125
VI.2.3 Bew: 125
VI.2.4 Bew: 126
VI.2.5 Kor: 127
VI.2.6 Kor: 127
VI.2.7 Bew: 127
VI.2.8 Bew: 128
VI.2.9 Beh: 128
VI.2.10 Lemma: 128
VI.2.11 Bew: 128
VI.2.12 Lemma: 129
VI.2.13 Bew: 129

Kapitel I

Wiederholung

I.0.1 Def: Ringe

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen + und *, sodass:

- $(R, +, 0_R)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, *, 1_R)$ ist eine kommutative Halbgruppe
- $(R, +, 0_R)$ die distributiven Gesetze:
  $x(y + z) = xy + xz$
  $(x + y)z = xz + yz$ gelten

I.0.2 Def: Integritätsbereich

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler

$$\forall x, y \in R : \quad (x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0)$$

I.0.3 Def: Körper

Ein Körper K ist ein Ring derart, dass:

- $1_K \neq 0_K$
- $\forall x \in K \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_K$

I.0.4 Bew:

Körper sind Integritätsbereiche

Bem: Ring Homomorphismus

Sei R ein nichttrivialer Ring ($0_R \neq 1_R$),

$$\varphi : \mathbb{Z} \to R, n \mapsto \begin{cases} \quad 1_R + \cdots + 1_R & n \geq 0 \\ - \quad (1_R + \cdots + 1_R) & n < 0 \end{cases}$$

φ ist ein Ring Homomorphismus:

$$\ker(\varphi) = \{n \in Z | \varphi(n) = 0\}$$

2 Möglichkeiten

a) $\ker(\varphi) = 0$ R hat Charakteristik 0

b) $\ker(\varphi) \neq 0$

$\rightarrow$ es existiert ein kleinstes positives Element $p > 0$ in $\ker(\phi)$

I.0.5 Bew:

R Integritätsbereich $\Rightarrow$ p eine Primzahl z.B.

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

hat Charakteristik n.
Insbesondere enthält jeder Körper der Charakteristik p eine „Kopie" von $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$
K Charakteristik p $\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \overset{\text{injektiv}}{\to} K$
$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ist ein Körper: $a \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$
$\Rightarrow$ a und p sind teilerfremd

$$1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow 1 = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

I.0.6 Def: Polynomring

Sei K ein Körper. Der Polynomring K[T] in einer Variable T über K ist die Menge formeller Summen der Form

$$g, f := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i, \qquad a_i \in K$$

$\text{grad}(f) := \max\{i | a_i \neq 0\}$
$\text{grad}(0) := -1$

Bem:

K[T] ist ein Integritätsbereich

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i) + (\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot T^j) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) \cdot T^k$$

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i) \cdot (\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot T^j) = \sum_{k=0}^{n \cdot m} c_k \cdot T^k$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

f, g beide $\neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$$

$f \cdot g \neq 0$

$$\operatorname{grad}(f + g) \leq \max\{\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\}$$

I.0.7 Satz:(Division mit Rest)

Gegeben $f, g \in K[T]$
$\operatorname{grad}(g) > 0$

Dann existieren eindeutige $q, r \in K[T]$
sodass $f = g \cdot q + r$
wobei $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$ eindeutig
$f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r'$
$g \cdot (q - q') = r' - r$
$g \neq g'$

$$\operatorname{grad}(g \cdot (q - q')) = \operatorname{grad}(r' - r) = \max\{\operatorname{grad}(r'), \operatorname{grad}(r)\} < \operatorname{grad}(g)$$

$$\operatorname{grad}(g \cdot (q - q')) \overset{q \neq q'}{=} \operatorname{grad}(g) + \operatorname{grad}(q - q')$$

$\Rightarrow$ Widerspruch (Wid)!
$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$

Existenz Beweis: Induktion auf grad(f)

I.A.: $\mathrm{grad}(f) = 0 \to f = g \cdot 0 + f$
„n+1“ $\mathrm{grad}(f) = n + 1$

$$\mathrm{grad}(f) < \mathrm{grad}(g) = m$$

$$\to f = g \cdot 0 + f$$

OBdA $n + 1 = \mathrm{grad}(f) \geq \mathrm{grad}(g) = m > 0$
$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \tilde{f}$
$\mathrm{grad}(\tilde{f}) \leq n$
$a_{n+1} \neq 0$
Sei

$$f' := f - b_m^{-1} \cdot a_{n+1} \cdot T^{n+1-m} \cdot g$$

$\Rightarrow \mathrm{grad}(f') \leq n$

$$g = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot T^i$$

$\overset{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f' = g \cdot q' + r'$

$$f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g$$

$\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(g)$

$$\to f = g(\underbrace{b_m^{-1} a_m T^{n+1-m} + q'}_{q}) + r'? = \mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(g)$$

$(r' = r)$

I.0.8 Def: Teiler

$f, g \in K[T]$
$\mathrm{grad}(g) > 0$

$$g \text{ teilt } f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

$(g|f)$ $(r = 0)$

I.0.9 Def: Nullstelle

$f \in K[T]$ besitzt eine Nullstelle $\lambda \in K$
gdw (genau dann wenn) $(T - \lambda)|f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$
$f = (T - \lambda)q + r$

Bem: Anzahl Nullstellen

$$f \in K[T], \qquad f \neq 0, \mathrm{grad}(f) = n$$

Dann besitzt f höchstens n viele Nullstellen in K.

I.0.10 Bew:

$n = 0, f = a_0 \neq 0$
$n > 0$ Falls f keine Nullstellen in K besitzt $\Rightarrow$ Ok !
Sonst, bei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f.

$$f = (T - \lambda) \cdot g$$

$\mathrm{grad}(g) = n - 1 < n$
$\overset{\text{I.A.}}{\rightarrow}$ besitzt g höchstens $n - 1$ viele Nullstellen.
Jede Nullstelle von f ist λ oder eine Nullstelle von g $\Rightarrow$ f hat höchstens n viele Nullstellen.

I.0.11 Def: Vielfachheit der Nullstellen

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$ Nullstellen von f

$$\rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, \quad (g(\lambda) \neq 0)$$

(K_λ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ in f)

I.0.12 Def: Algebraische Abgeschlossenheit

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen falls jedes Polynom über K positiven Grades eine Nullstelle in K besitzt.

I.0.13 Frage:

Ist $\mathbb{R}$ algebraisch abgeschlossen ?
Nein: $T^2 + 1$

Bem:

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen

Bem: Unendlichkeit

Jeder alg. abg. Körper muss unendlich sein!

I.0.14 Warum?:

(Beweis läuft wie unendlichkeit der Primzahlen)
$K = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$
$f = (T - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (T - \lambda_n) + 1$

Bem: Algebraische Abgeschlossenheit

K ist genau dann alg. abg. wenn jedes Polynom f positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt:

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (T - \lambda_n) \in K$$

I.0.15 Bew:

„$\Leftarrow$“ Trivial
„$\Rightarrow$“grad$(f) = n > 0$
$\rightarrow f = (T - \lambda_n) \cdot g$
(grad$(g) \leq n - 1 < n$)
$\overset{\text{I.A.}}{\rightarrow} g = c(T - \lambda_2) \cdot \cdots \cdot (T - \lambda_n)$
$\Rightarrow f = c(T - \lambda_2) \cdot \cdots \cdot (T - \lambda_n)$ ✓

I.0.16 Def: Vektorraum

Vektorraum V über K ist eine ablesche Gruppe $(V, +, 0_V)$ zusammen mit einer verknüpgung

$$K \times V \mapsto V$$
$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

sodass:

1.) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

2.) $\lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

3.) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

4.) $1_K \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist eine Untergruppe, welche unter Skalarmultiplikation, abg. ist.

Bem: Untervektorräume

$\{U_i\}_{i\in I}$ Unterräume von V
$\to \bigcap_{i\in I} U_i$ ist auch ein Unterraum.
Insbesondere gegeben $M \subset V$ existiert :

$$\text{span}(M) = \langle M \rangle = \text{ der kleinste Untervektorram von V, welcher M enthält}$$

$$\text{span}(M) = \{\sum_{i\in I}^{n} \lambda_i m_i, n \in M, \lambda \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

M ist also ein erzeugenden System für span(M)
$\{U_i\}_{i\in I}$ Unterräume von V

$$\to \sum_{i\in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i\in I} U_I)$$

$$M_i \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

I.0.17 Def: Lineare Unabhängigkeit

$V : VR/K$

$$v_1, \dots, v_n \in V \text{ lin. unabh. falls } \forall \lambda_1, \dots, \forall \lambda_n \in K :$$

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$M \subset V$ ist lin. unabh. falls jede endliche Teilmenge von M lin. unabh. oder äquivalent dazu sind. Falls kein Element m aus M sich schreiben lässt als linear kombination von $M \setminus \{m\}$. $\lambda_i \neq 0$

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n = 0 \Rightarrow m = \sum -(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}) m_i$$

I.0.18 Def: Basis = min. Erz. System

Eine Basis $\mathcal{B}$ von V ist ein lin. unabh. erzeugendensystem von V, äquivalent dazu, wenn jedes Element von V sich eindeutig schreiben lässt als lin. kombi. von Elementen aus $\mathcal{B}$. Aquivalent dazu: $\mathcal{B}$ ist min. Erzeugenden System , max. lin. unabh.

I.0.19 Satz: Basisergänzungssatz

$M \subset V$ lin. unabh. $\Rightarrow \exists \mathcal{B} \subset V$ Basis welche M enthält
Insbesondere hat jeder VR eine Basis „Je zwei Basen sind eine Bijekktion“
V ist endlichdimensional, falls V eine endliche Basis besitzt. Sonst ist V unenlichdimensional.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

($\mathcal{B}$ eine Basis)

I.0.20 Basisauswahlsatz

$M \subset V$ erzeugendensystem $\rightarrow \exists \mathcal{B} \subset M$ Basis von V

Bem: Dimensions Addition

$U \overset{UR}{\subset} V$, $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$ dim ist modular:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

I.0.21 Def: Direkte Summe

$$V = U_1 \oplus U_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad V = U_1 + U_2 \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$\oplus = direkteSumme$

$$V = \oplus_{i \in I} U_i \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und } \forall i \in I$$

Die Familie

$$\{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap \left(\sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} U_j \right) = \{0\}$$

ist konversal.

I.0.22 Bsp:

K^2 ist ein $K - VR$.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e_1, e_2$$

$U = \text{Span}(e_1) \to K^2 = U \oplus \text{ Span}(e_2) = U \oplus \text{ Span}(e_1, e_2)$

I.0.23 Def: Lineare Abbildungen

$F : V \to W$ ist <u>linear</u>, falls

$$F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$$

(F UR von V)

$$Ker(F) = \{v \in V | F(v) = 0\}$$

(F UR von W)

$$Im(F) = \{w \in W | \exists v \in V, F(v) = w\}$$

Bem: Dimensionssatz

Falls $\mathcal{B}$ eine Basis von v ist $\Rightarrow F(\mathcal{B})$ ist ein erzeugendensystem von $Im(F)$

$$\text{F injektiv} \Leftrightarrow Ker(F) = \{0\}$$

V endlich

$$\to dim(V) = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$$

$$^{v}/_{Ker(F)} \cong Im(F)$$

Bem: Isomorphie

V, W endlich $\{r_1, \ldots, r_n\}$ eine Basis von V

$$V \cong K^n$$

$$v_i \mapsto e_i$$

$$F : V(dim = n) \to W(dim = m)$$

$$\begin{array}{ccc} \{v_1, \dots, v_n\} & & \{w_1, \dots, w_m\} \\ V & \stackrel{F}{\rightarrow} & W \\ R & & R \\ K^n & & K^m \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \rightarrow & A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Wie bekommt man die Matirx A ?

$$F(v_j) = \sum_{i=a}^{m} a_{ij} w_i$$

$$F(v_1) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix

I.0.24 Def: Rang

$Rg(A) = dim(\text{Span(Spaltenvektorraum)}) = dim(\text{Span(Zeilenvektorraum)})$
$F : V \rightarrow W$ linear

$$Rg(F) = Rg(A) = dim(Im(F))$$

I.0.25 Satz: Basismatrix

V, W endlichdim.
Es existieren Basen $\{v_1, \dots, v_n\}\text{von}V, \quad \{w_1, \dots w_m\}\text{von}W$, sodass die Darstellungsmatrix von F die From :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

hat.

I.0.26 Bew:

Sei $U = Ker(F)$ und wähle $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von U.
Sei U' ein Komplement von U in $V \to V = U \oplus U'$
Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von U'
$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V
$Im(F)$ hat $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ als Basis

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i F(vi) = 0$$

$$F(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i vi) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i vi \in U \cap U' = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0 \qquad \Rightarrow \underline{\lambda_i = \dots = \lambda_r = 0}$$

Ergänze $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ zu einer Basis $\mathcal{B}' = w_1, \dots, w_m$Basis von W

$$F(v_1) \dots F(v_r), F(v_{r+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

I.0.27 Def: Invertierbarkeit

$A \in M_{n\times n}(K)$ ist <u>invertierbar</u>, falls es eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ gibt, sodass:

$$B \cdot A = A \cdot B = E_n$$

$$GL(n, K) = GL_n(K) = \{A \in M_{n\times n}(K)\text{invertierbar}\}$$

$GL_n(K)$ ist eine Gruppe

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow rg(A) = n$$

also invertierbar $\Leftrightarrow$ regulär

Bem: Eindeutige Lösung

Wenn A regulär ist, dann besitzt ein Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Bem: Zeilenoperationen

A ist regulär gdw. A sich durch elementare zeilenoperationen in E_n überführen lässt.
$E_{ij} \leftarrow$ Die Matrix die 1 an der Stelle (i,j) hat und 0 sonst.
Multiplizieren der i-ten Zeile mit λ
Addieren λ mal j-te Zeile zur i-ten Zeile $= E_n + \lambda E_{ij}$
Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile: $E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ji} + E_{ij}$

$$\begin{pmatrix} A & | & E_n \end{pmatrix}$$

$$\Lsh Zeilenoperationen \rightarrow \quad \begin{pmatrix} E_n & | & A^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B_n \cdot \dots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A}_{A^{-1}} = E_n$$

Übergangsmatrizen: $dim(V) = n$
$\{v_1, \dots, v_n\}$
$\{v'_j, \dots, v_n\}$

$$v'_i = \sum S_{ij} v_{ji}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{1j} \\ S_{i1} & S_{ij} \end{pmatrix}$$

Vektorraum V/K $\to \mathcal{B}$ Basis
V ist endlich,falls es eine endliche Basis besitzt.

$$dim(V) = |\mathcal{B}|$$

$$F : V \to W$$

F: lineare Abbildung

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Basis von V

$$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Basis von W

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$F(v_j) = \sum_{ij} w_i$$

sind lin. unabh. von der Basis von W F hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$V \mapsto V$$

$$v_i \mapsto v'_i$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$S = (s_{ij}) \to v'_j = \sum s_{ij} v_i \in K$$

Transformationsmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

S^{-1} ist die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$

$$V \xrightarrow{F} W$$

$$\begin{array}{ccc} \{v_1,\dots,v_n\} & \xrightarrow{A} & \{w_1,\dots,w_n\} \\ \uparrow S & & \uparrow T \\ \{v'_1,\dots,v'_n\} & \xrightarrow{D} & \{w'_1,\dots,w'_n\} \end{array}$$

Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bzgl. diesen Matritzen aus? Darstellungsmatrix von F bzgl. $\{v'_1,\dots v'_n\},\{w'_1,\dots,w'_n\}$ ist $T^{-1}\cdot A\cdot S$.

I.0.28 Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit

Zwei (mxn)-Matritzen A, A' sind <u>äquivalent</u>, falsls es regulare Matritzen $T\in GL_m(K),\quad S\in GL_n(K)$ gibt, sodass:

$$A'=T^{-1}\cdot A\cdot S$$

A, A' $\in M_{n\times n}(K)$ sind <u>ähnlich</u>, falls es $S\in GL_n(K)$ gibt, sodass:

$$A'=S^{-1}\cdot A\cdot S$$

Bem: Ähnlichkeit

Ähnlichkeit (Än) auf $M_{n\times n}(K)\Rightarrow$ Äquivalenz (Äq) auf $M_{m\times n}(K)$

I.0.29 Def: Determinante

Die Determinante

$$\det(K^n)\mapsto K$$

multilineare alternierende Abbildung derart, dass $\det(e_1,\dots e_n)=1$.

$$A\in M_{n\times n}(K)$$

$$A=\left(a_1\middle|a_2\middle|\dots\middle|a_n\right)$$

$$\det(A)=\det(a_1,\dots,a_n)$$

$$A=(a_{ij})$$

$$\det(A)=\sum_{\pi\in\underbrace{S_n}_{B_{ij}(\{1,\dots,n\})}}\operatorname{sign}(\pi)\cdot\prod_{i=1}^{n}a_{\pi(i)i}$$

sign(π) (-1) Anzahl von Fehlständen $\{(ij) | i < j \pi(i) > \pi(j)\}$,
(-1) Anzahl von Faktoren von π als Produkt von Transpositionen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

derlineEigenschaften

1) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
2) A invertierbar geanu dann wenn $\det(A) \neq 0$
3) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
4) $\det(\underset{\substack{\parallel \\ (a_{ji})}}{A^T}) = \det(A)$

$E_n + (-E_n)$ ist nicht invertierbar.

<u>Laplascher Enwicklungssatz</u>
<u>Sei j_0 ein Spaltenindex, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0})$</u>

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)$$

Cramersche Regel

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Falls A regulär ist, dann gibt es eine einzige Lösung zum System:

$$x_j = \frac{\det(a_i, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

I.0.30 Def: Darstellungsmatrix

$\det(F) = \det(a)$, Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$

I.0.31 Def: Adjunkte

Sei A $(= a_{ij})$ eine n×n-Matrix
definiere die Adjunkte von A,

$$\operatorname{adj}(A) = (\gamma_{ij})^{\top}$$

wobei

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Bem: Determinante und Adjunkte

Sei c_j die j-te Zeile von $\operatorname{adj}(A)$.
Sei a_i die i-te Spalte von A

$$\overbrace{(\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jn})}^{c_i} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}}_{a_i} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ki} \det(A_{jk})$$

$$= \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

(Laplacesche Entwicklung) $= \begin{cases} det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

A regulär:

$$\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot E_n$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)} \cdot A = E_n = A^{-1} \cdot A$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n$$

Kapitel II

Lineare Algebra II

II.0.1 Def: Diagonaliserbarkeit

V Vektorraum
$\{U_i\}_{i=1}^k$ Unterräume von V

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i \Leftrightarrow \begin{cases} V = \sum_{i=1}^{n} U_i & 1 \leq i \leq k \\ U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} U_j = \{0\} \end{cases}$$

Äquivalent dazu, wenn jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig schreiben lässt als Linearkombination von den Vektoren

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_j$$

$\mathcal{B}$ ist Basis von v_j

II.0.2 Def: Eigenvektor

Ein Endomorphismus

$$F : V \to V$$

besitzt einen Eigenvektor, falls es $v \in V \setminus \{0\}$ derart gibt, dass $F(v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K$
Falls $F(v) = \lambda \cdot v$
λ ist eindeutig bestimmt von F und v $\Rightarrow$ λ ist Eigenwert von F

$$F(v) = \mu \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow (\lambda \cdot \mu) \cdot v = 0$$

II.0.3 Def: Eigenraum

$\lambda \in K \quad F: V \to V$ Endomorphismus

$$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda \cdot v\}$$

$V(\lambda)$ ist Eigenraum zum Wert λ
und ist ein Unterraum

Bem: Eigenwert

λ ist ein Eigenwert von F gdw. $\dim(V(\lambda)) \geq 1$.

Bem: Eigenwerte

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von F

$$\to V(\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V(\lambda_j) = \{0\}$$

II.0.4 Def: Diagonalisierbarkeit

V endlich VR / K $F: V \to V$ Endomorphismus (bzw. eine Matrix $A = K^n \to K^n$) ist diagonalisierbar, falls

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von F
Äquivalent dazu, wenn V eine Basis von Eigenvektoren von F besitzt. Äquivalent dazu, wenn F bzgl. einer Basis von V die
Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat.

<u>Für Matrizen:</u>
A ist diagonlaisierbar genau dann wenn es eine reguläre Matrix S gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

II.0.5 Satz: Zu Eigenwerten

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$
$\lambda \in K$
λ ist ein Eigenwert von A genau dann wenn
$\lambda E_n - A$ nicht regulär ist $\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$

II.0.6 Def: Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$$

ist

$$\chi_A(T) = det(T \cdot E_n - A)$$

Bem: Eigenwerte als Nullstellen

λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

II.0.7 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(T) = T^2 + 1 = \det(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix} ((= T \cdot E_2 - A))$$

Bem: Spur

A und A' ähnlich $A' = S^{-1}AS$

$$\Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$$

Insbesondere, können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

$$\chi_F(T) \qquad F : V \to V$$

sagen:

$$(a_{ij}) = A \in M_{n\times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \cdots + b_0$$

wobei

$$b_0 = (-1)^n \det(A)$$

$$b_{n-1} = -Tr(A) = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Tr = Trace = Spur von A

II.0.8 Kor: Anzahl der Eigenwerte

dim(V) = n
Ein Endomorphismus

$$F : V \to V$$

kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

II.0.9 Kor: Diagonalisierbarkeit

$$F = V \to V$$

mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$ ist diagonalisierbar gdw.

$$n = \sum_{i=1}^{k} d_i$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i)) = \{v \in V | F(v) = \lambda \cdot v\}$$

d_i = geometrische Vielfachheit von λ_i

II.0.10 Bew:

$\Rightarrow$
F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus

$$n = |B| = \bigcup_{i=1}^{n} |\mathcal{B}_i| \qquad \mathcal{B}_i = \text{Basis von} V(\lambda)$$

$|\mathcal{B}_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$

$\Leftarrow$
$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^{k} V(\lambda_i)) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$
Da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension $\dim(V)$ hat, sich selbst.

$\square$

Bem: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

$F : V \to V$ Endomorphismus $0 \neq v \in V$ ist ein Eigenvektor für F

$$F(v) = \lambda v, \lambda \in K$$

$$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$$

λ ist Eigenwert $\Leftrightarrow \dim(V(\lambda)? = 1)$
$V(\lambda) = \ker(F - \lambda Id_v)$ F ist diagonalisierbar wenn V eine Basis von Eigenvektoren besitzt.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$
$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(k) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \cdots + b_0$ normiert
$\lambda \in K$ ist $\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$ Eigenwert von A

II.0.11 Kor: Geometrische Vielfachheit

$F : V \to V$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ geometrische vielfache von Eigenwert $n = \dim(V) = \sum_{i=1}^{k} \dim(V(\lambda_i)) = \lambda_1 \dots \lambda_k$ sind die Eigenwerte von F

II.0.12 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix} = T^2$$

0 ist der einzige Eigenwert von A,
A ist diagonalisierbar gdw.

$$2 = \dim(\ker(A))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad 2 \neq 1 \Rightarrow \text{A ist nicht diagonalisierbar}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 1$$

II.0.13 Def: Algebraische Vielfachheit

$\dim(V) < \infty \quad F : V \to V$ Endomorphismus
$\lambda \in K$ Eigenwert

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

algebraische Vielfachheit von $\lambda \quad K = \mathrm{ord}_\lambda(F)$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda)^K \cdot G(T) \qquad G(T) = 0$$

Bem:

$$\mathrm{ord}_\lambda(F) \geq \dim V(\lambda)$$

II.0.14 Bew:

Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ Basis von $V(\lambda)$ und erweitern sie zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1,\ldots,v_n}\}$ von V.
Die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathcal{B}$

$$F(v_1)\ldots F(v_k), F(v_{k+1})\ldots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 0 & & C_2 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & C_1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$C_1(\text{vllt}.C_2) \in \mathrm{Mat}_{n-k\times k}(K)$

$$\chi_{F(\text{vllt}|U)}(T) = \det(TE_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \underbrace{\det(TE_{n-k} \cdot C_1)}_{H(\lambda)}$$

$$\Rightarrow k = \mathrm{ord}_\lambda(F)$$

(weil es sein könnte, dass $H(\lambda) = 0$)

$\square$

II.0.15 Lemma: Quotientenraum Endomorphismus

Sei V endlichdim. $F : V \to V$ Endomorphismus
$U \subset V$ F-invarianter Unterraum ($F(U) \subset U$)

$$\tilde{F} : V/U \to V/U \quad \text{lineare Abbildung}$$
$$\bar{v} \mapsto \overline{F(v)}$$

$\tilde{F}$ ist wohldefiniert und ferner

$$\chi_F(T) = \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T)$$

II.0.16 Bew:

$\tilde{F}$ ist wohldefiniert:

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \overset{\text{zu zeigen}}{\Rightarrow} \overline{F(v)} = \tilde{F}(v_1) = \tilde{F}(v) = \overline{F(v)}$$

$$\Rightarrow v_1 = v + \underbrace{(v_1 - v)}_{\in U}$$
$$F(v_1) = F(v) + \underbrace{F(v_1 - v)}_{\in U}$$
$$\Rightarrow \overline{F(v_1)} = \overline{F(v)}$$

Restklassen sind linear und $\tilde{F}$ ist linear $\Rightarrow$ $\tilde{F}$ ist linear Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U und erweitere sie zu einer Basis $\{u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ von V.

Bem:

$\{\overline{v_{k+1}}, \ldots, \overline{v_n}\}$ ist eine Basis von V/U

Bem: Darstellungsmatrizen

Einfach Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathcal{B}$.

$$F(u_1)\dots F(u_k), F(v_{k+1})\dots F(v_n)$$

$$\begin{array}{cc} u & \to \\ \vdots & \\ u_k & \to \\ v_{k+1} & \to \\ \vdots & \\ v_n & \to \end{array}
\begin{pmatrix} & A & & C_2 \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & C_1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\chi_F(T) &= \det(T\cdot E_n - H) \\
&= \det\left(T\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1\end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} TE_k - A & -C_2 \\ 0 & TE_{n-k} - C_1\end{pmatrix} \\
&= \det(TE_k - A)\cdot\det(TE_{n-k} - C_1)
\end{aligned}$$

A ist die Darstellungsmatrix von $F \mid U$ bzgl. $\{u_1, \dots, u_k\}$

$$\Rightarrow \det(TE_k - A) = \chi_{F_1\restriction U}(T)$$

C_j ist die Darstellungsmatrix von $\tilde{F}$ bzgl. $\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$

$$\Rightarrow \det(TE_{n-k} - A) = \chi_{\tilde{F}}(T)$$

II.0.17 Satz: Diagonalisierbarkeit

$\dim(V) < \infty$ $\quad K$ Körper
$F : V \to V$ Endomorphismus
F ist diagonalisierbar gdw. $\chi_F(T)$ in linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T-\lambda_1)^k \dots (T-\lambda_r)^{k_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ = Nullstellen (verschwinden) und für jeden Faktor $T - \lambda_i$ gilt:

$$\mathrm{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$$

II.0.18 Bew:

$\Rightarrow$ Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschwindenden Eigenwerte.

$$v_1, \dots, v_{\alpha_1} \in V(\lambda_2)$$

$$v_{\alpha+1}, \dots, v_{\alpha,\alpha_2} \in V(\lambda_2)$$

$$v_{d_1} + \dots + v_{d_{r-1}}, \dots, \underbrace{v_{d_1} + \dots + d_r}_{n}\ d_i = \dim(V(\lambda_i)) \text{ Die Darstellungsmatrix}$$

von F bzgl. $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{c} F(v_1) \dots F(v_d), F(v_{d+1}) \dots F(v_n) \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}d_1 \\ \\ \}d_2 \\ \\ \}d_r \end{array}$$

Wobei d_i viele λ_i auf der Diagonalen liegen

$$\chi_F(T) = \det(TE_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \underbrace{\dots (T - \lambda_r)^{d_r}}_{a(T)}$$

$$a_q(\lambda_1) \neq 0 \quad (\lambda \neq \lambda_i, i \neq 1)$$

$\Leftarrow$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$(\mathrm{Grad}(\chi_F) = n)$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i)$$

F ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$

II.0.19 Def: Trigonalisierbarkeit und ähnlichkeit

Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

endlichdim VR / K $F : V \to V$ Endomorphismus
A Dartellungsmatrix bzw. B

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

normiert

$$\chi_F(\lambda) = 0 \leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwerte von F } \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda \cdot v$$

$U \subset V$ Untervektorraum F-invariant $(F(U) \subset U)$

$$\chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}}$$

$$\tilde{F} : V/U \to V/U$$

$$\bar{v} \mapsto \overline{F(v)}$$

F ist dia/tri ? gonalisierbar $\Leftrightarrow$ χ_A in linearfaktoren zerfällt und $\forall \lambda_1, \dots \lambda_k$ Eigenwerte

$$\dim(V(\chi)) = \operatorname{ord}_{\lambda_i}(\chi_F)$$

II.0.20 Def: Trigonalisierbarkeit

$F : V \to V$
F trigonalisierbar ist, falls es eine Darstellungsmatrix von F gibt, welche in oberer Dreiecksform ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

II.0.21 Satz: Trigonalisierbarkeit

$F : V \to V$ ist trigonalisierbar, gdw χ_F in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

(eventuell mit wiederholungen)

II.0.22 Kor: Trigonalisierbarkeit

Jeder Endomorphismus eines endlichdim VR über einem alg. abg. Körper (z.B.$\mathbb{C}$) ist trigonalisierbar.

II.0.23 Bew: (Satz)

$\Rightarrow$
F ist Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A) = \prod_{i=1}^{n} (T - a_{ii})$$

$\Leftarrow$
Induktion über $n = \dim(V)$
$n = 1 \rightarrow$ Jede 1×1 Matrix ist in oberer Dreiecksform $\rightarrow a_n$!
$n \geq 2$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)$$

λ_1 ist ein Eigenwert

$$\rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} \quad F(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$$

$$U = \text{span}(v_1) \subset V$$

ist F-invariant

$$\underset{(T-\lambda_1)\prod_{i=2}^{n}(T-\lambda_i)}{\underset{||}{\chi_F(T)}} = \underset{(T-\lambda_1)}{\underset{||}{\chi_{F|U}}} \cdot \chi_{\tilde{F}}$$

$K[T]$ ist ein Integritäsbereich

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = \prod_{i=2}^{n} (T - \lambda_i)$$

$$\dim(V/U) < \dim(V)$$

$\Downarrow$ I.A. Es gibt eine Basis $\bar{v_2}, \ldots, \bar{v_n}$ vonV/U derart, dass $\tilde{F}$ bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$$

II.0.24 Beh:

Seien $v_i \in V \quad \overline{v_i} = \overline{v_i} \quad 2 \leq i \leq n$
$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ it eine Basis von V

II.0.25 Bew:

(Übungsaufgabe)

II.0.26 Frage:

Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus?

$$\tilde{F}(\bar{v_j}) = \overline{F(v_j)}$$

$$\Rightarrow \sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij}\bar{v_i} = \overline{\sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij}v_i}$$

$$\Rightarrow \mu_{ij} \in K|_{F(v_j)} = \mu_{2j}v_1 + \sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij}v_j = \sum_{1\leq i\leq j} \mu_{ij}v_j$$

$$F(v), F(v_2) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

II.0.27 Lemma: F^r & Polynome

V endlichdim / K
$v \in V \setminus \{0\} \quad \exists r \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\begin{matrix} F^r(v) \\ \| \\ F \circ F \circ \dots \circ F \end{matrix}}_{r\text{-Mal}} = \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v)$$

Insb. ist

$$U = \mathrm{Span}(v, F(v), \dots, F^{n-1}(v))$$

ist F-invariant, hat Basis $\{v_1, \dots, F^{n-1}(v)\}$
$F \mid U$ hat Darstellungmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ & 1 & 0 & \dots & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} \cdots - a_0$$

II.0.28 Bew:

$n = \dim(V)$ $v, F(v), \dots, F^r(v)$ lin. unabh.
Sei $r > 0$ kleineste rat. Zahl, sodass: $v, F(v), \dots, F^r(v)$ lin. abh.
$v, F(v), \dots, f^{r-1}(v)$
lin. unabh. (aus der Minimalität von r)
$\Downarrow$ Austauschprinzip:

$$F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig}\\\text{bestimmt}}} F^i(v)$$

$$U = \operatorname{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)) \quad \text{ist F-invariant}$$

$$v \in U \quad v = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$$

$$F(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v)}_{\in U} + \underbrace{\mu_{r-1} \overbrace{F^r(v)}^{\substack{\sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)\\ \|}}}_{\in U}$$

$\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$ ist eine Basis von U.

$$F(v), \dots, \overbrace{F(F^{r-1}(v))}^{F^r(v)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & a_1 \\ & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{F|U}(T) &= \det(T \cdot E_n - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} T & 0 & & \dots & a_0 \\ -1 & T & & 0 & \\ & -1 & T & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & T - a_{r-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Laplacescher Entwicklungssatz nach der r-ten Spalte)

$$\begin{aligned} &= (-1)^{r+1}(-a_0) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \\ &\quad + (-1)^{r+2}(-a_1) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \dots + \\ &\quad + (-1)^{2r}(T - a_{r-1}) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix} \\ &= (-1)^r a_0 (-1)^{r-1} a_1 + (-1)^{r+1} a_1 T (-1)^{r-1} + \dots + (-1)^{2r}(T - a_{r-1}) T^{r-1} \\ &= -a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r \end{aligned}$$

<u>**Notation**</u>

$$\underset{\sum_{i=0}^m a_i T^i}{\overset{P(T)}{\parallel}} \quad \in K[T]$$

$F: V \to V$ Endomorphismus
$P(F): V \to V$
$v \mapsto \sum_{i=0}^{m} a_i F^i(v)$
Mit dieser Notation haben wir, das im vorherigen Lemma

$$\chi_{F|U}(v) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$$

II.0.29 Satz: (Calay - Hamilton)

$F: V \to V$ Endomorphismus endlichdim. $\chi_F(F)$ ist der 0 Endomorphismus auf V

II.0.30 Bew:

Zu Zeigen: $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$
$\underline{v = 0} \to$ ok
sonst $v \neq 0 \to \exists r \in \mathbb{N}$

$$U = \operatorname{Span}(v, F(v), \ldots, F^{r-1}(v))$$

ist F in V U F-invariant

$$\Rightarrow \chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} = \chi_{\tilde{F}} \cdot \chi_{F|U}$$

$\tilde{F}: V/U \to V/U$
$\bar{w} \mapsto \bar{F(w)}$
Aufgabe
$R(T) = P \cdot C$ allg. Polynom $\Rightarrow R(F) = P \cdot (G(F))$ als Endomorphismen

$$\chi_F(F)(v) = \overbrace{\chi_{\tilde{F}} \cdot (\underbrace{\chi_{F|U}(v)}_{\substack{\parallel \\ 0}})}^{\substack{0 \\ \parallel}}$$

II.0.31 Kor:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot T^i$$

$$\Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$$

da $n \times n$ Matrix

II.0.32 Satz: Minimalpolynom

$F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim. /K
Dann existiert genau ein normierter Polynom kleinsten Grades m_F derart, dass $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(T) = 0 \quad \text{als Endomorphismus von F}$$

Insb. gilt $m_F(F) = 0$
Das Polynom $m_F(= \mu_F)$ heißt das Minimalpolynom von F.

II.0.33 Wiederholung:

Satz: Trigonalisierbarkeit

$F : V \to V$ Endomorphismus V eindlich dim. und trigonalisierbar falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass F Darstellungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Falls $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt dann ist F trigonalisierbar (Insb. falls K alg. abg. ist z.B. $\mathbb{C}$)

$$F^0 = Id_{iv}$$
$$F^i = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{\text{i mal}}$$

$P \in K[T] \quad P = \sum_{i=0}^{m} T^i$

$$P(F) : \sum a_i F^i : V \to V, v \mapsto \sum a_i F^i(v)$$

Aufgabe:
Komposition des Endomorphismus ... Produkt im Polynom

$$P(F) \circ f(F) = (P \cdot G)(F)$$

Satz: (Caley-Hamilton)

$$\chi_F(F) = 0_{iv}$$

als Endomorphismus

Kor: Charakteristische Polynome

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$$

$$\Rightarrow A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_0 E_n = 0$$

Satz: normiertes Polynom

Vendlichdim/$KF : V \to V$ Endomorphismus Dann existiert genau ein normiertes und minimales Polynom $m_F(T)$ kleinsten gradesb derart, dass $\forall P \in K[T]$:

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

Def: minimal Polynom

Das Polynom $m_F(T)$ heißt das Minimalpolynom von F. Insb. $m_F(F) = 0$

ende Wiederholung

II.0.34 Bew:

Sei

$$\mathcal{F} = \{P \in K[T] \text{ normiert } | P(F) = 0 \text{ als Endomorphismus}\}$$

Caley.Hamilton

$$\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \varnothing$$

Sei $m_F(T) \in \mathcal{F}$ Polynom kleinsten Grades.
Zu Zeigen: $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

$\Rightarrow$

$$m_F|_P \Leftrightarrow \exists G \in K[T] \quad P = G \cdot m_F$$

$$P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{=0(m_F(F)\in\mathcal{F}} = 0$$

$\Leftarrow$
Sei $P \in K[T] | P(F) = 0$
Division mit Rest $\rightarrow \exists G \overset{r}{\in} K[T]\ P = G \cdot m_F + r \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = \underbrace{G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{\underset{0}{\parallel}}}_{\underset{0}{\parallel}} + r(F)$$

$\Rightarrow r(F) = 0$ als Endomorphismus
$\Rightarrow r = 0$ (Sonst $\frac{1}{a_{(\text{grad}(r))}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$) <u>Eindeutigkeit</u>
Angenommen m'_F ist normiert. wäre auch so:

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Rightarrow m_F|_{m'_F} \quad \& \quad m'_F|_{m_F}$$

$\left.\begin{array}{ll} m_F = & Q \cdot m'_F \\ m'_F = & H \cdot m_F \end{array}\right\} \rightarrow Q, H$ sind beide <u>normiert</u>

Zu zeigen: $\underline{Q = H = 1}$

$$m_F = Q \cdot m'_F = Q \cdot H \cdot m_F$$

$K[T]$ <u>Integritätsbereich</u>

$$\Rightarrow 1 = Q \cdot H$$

$\text{grad}(G \cdot H) = \text{grad}(1) = 0$
$\text{grad}(G) + \text{grad}(H) \Rightarrow G, H \in K$ und normiert
(als Polynom) $\Rightarrow Q = H = 1$ $\square$

Bsp: Minimalpolynom mit Hauptraum

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m_A ?

$$\chi_A(T) = T^2 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$$m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ \\ T^2 \end{cases}$$

$$m_A = 0 \to m_A(T) \neq T (A \neq 0)$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to m_A(T) = T^2$

II.0.35 Lemma: Nullstellen von χ_F und m_F

Gegeben $F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim / K , dann haben χ_F und m_F dieselben Nullstellen in K.

II.0.36 Bew:

$$m_{F|\chi_F} \Rightarrow \chi_F = G \cdot m_F$$

$\forall \lambda \in K$, falls $m_F(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

Sei $\lambda \in K | \chi_F(\lambda) = 0$
$\Rightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von F
$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} | F(v) = \lambda \cdot v$
Sei $m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$

$$\begin{aligned} 0 &= m_F(F)(v) \\ &= (F^d + \sum c_i F^i)(v) \\ &= F^d(v) + \sum c_i F^i(v) \\ &= \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i \cdot v \\ &= \underbrace{(\lambda^d + \sum c_i \lambda^i)}_{\substack{\| \\ m_F(\lambda)}} \cdot v \end{aligned}$$

$v \neq 0 \quad m_F(\lambda) = 0$ $\square$

II.0.37 Satz: Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom

$F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim. / K ist diagonalisierbar gdw m_F in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

$$m_F(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i) : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j$$

Die λ_i sind die Eigenwerte von F

II.0.38 Bew:

$\boxed{\Rightarrow}$

Sei F diagonalisierbar. Dann gilt

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i)^{d_i}$$

wo die λ_i Eigenwerte von F sind

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad \chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - \tilde{F})$$

Außerdem ist $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V\lambda_i$

Sei $v \in V$beliebig. Dann gilt $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$, wobei $v_i \in V(\lambda_i)$

Setze

$$p(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i) \quad (\stackrel{?}{=} m_F(T))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(F)v &= \prod_{i=1}^{k} (F - \lambda_i)v \\ &= \prod_{i=1}^{k} (F - \lambda_i)\left(\sum_{j=1}^{k} v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\prod_{i=1}^{k} (F - \lambda_i)v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (F - \lambda_1 \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_i \cdot Id) \circ \dots \\ &\qquad \dots \circ (F - \lambda_{i+1} \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_j \cdot Id)(v_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da $v_j \in V(\lambda_i)$.
v war beliebig $\Rightarrow P(F) = 0 \in \mathrm{end}(V)$
also $m_F|_p \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$
Aber $m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i} \quad s_i \geq 1$

$$P(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i) = Q(T) \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i)^{s_i}$$

$\Rightarrow s_i = 1$ für $i = 1, \ldots, k$
sonst wäre Grad (rechte Seite) $>$ Grad(linke Seite)

$$\Rightarrow m_F(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i)$$

Dies war zu zeigen ($\Rightarrow$).

$\boxed{\Leftarrow}$
Sei $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \cdots \circ (T - \lambda_k) \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j)$
zu zeigen ist F ist diagonalisierbar ($\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von F)
Es genügt zu zeigen,dass $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$
Beweis erfolgt durch Induktion über $\dim(V)$
<u>Sonderfälle:</u>

(1) Sei $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ ist Eigenwert von F

$$\exists v \in V: \ Fv = \lambda_1 v \Rightarrow V = \mathrm{span}\{v\} = V(\lambda_1)$$

$(v \neq 0)$

(2) Sei nun $\dim(V) = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \geq 2$ und $k = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$
Nach definition von m_F gilt: $m_F(F) \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \mathrm{end}(V)$
für jeden Vektor $v \in V$ gilt: $(E - \lambda_1)v = 0 \Rightarrow Fv = \lambda_1 v$
$\Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsannahme (für den allgemeinen Fall):
Unser Satz gilt für $\dim(V) < n (n \in \mathbb{N})$ fest
Also sei $\dim(V) = n \geq 2$ & $k \geq 2$
$(*)$ <u>Beh:</u>

$$V = \underbrace{\ker(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{V(\lambda_i) \\ (\dim(V(\lambda_i)) \geq 1!)}} \oplus \underbrace{\mathrm{im}(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{\text{zu zeigen:} \\ (= V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k))}}$$

Bew: Sei $R(T) := \prod_{i=2}^{k}(T-\lambda_i) \quad \Big[\Rightarrow m_f(T) = R(T)(T-\lambda_1)\Big]$
Division mit Rest: $\exists Q(T) \& r \in K$, sodass: $R(T) = Q(T)(T-\lambda 1) + r$
$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$
Sei $v \in V$ beliebig $R(F)^v = Q(F)(F-\lambda_1)v + r \cdot v$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)r \neq (F-\lambda_1)}_{\in\ \ker(F-\lambda_1)} \circ \underbrace{(-\frac{1}{r}Q(F)r)}_{\in\ \mathrm{im}(F-\Lambda_1)}$$

$$(F-\lambda_1)R(F)v = \underbrace{m_F(F)}_{0}v = 0 \quad \Rightarrow V = \ker(F-\lambda_1) + \mathrm{im}(F-\lambda_1)$$

Wir wollen zeigen, dass die Summe direkt ist $\Leftrightarrow \ker(F-\lambda_1) \cap \mathrm{im}(F-\lambda_1) = \{0\}$
Sei $v \in \ker(F-\lambda_1) \cap \mathrm{im}(F-\lambda_1) \quad \Rightarrow v = (F-\lambda_1)w \quad w \in V$
$R(F)v = Q(F)(F-\lambda \cdot I_d)v + r \cdot v$

$$\underbrace{R(F) \circ (F-\lambda_1)}_{m_F(F)=0}w = \underbrace{Q(F)(F-\lambda_1 \cdot I_d)}_{=0}v + r \cdot v \quad \Rightarrow r \cdot v = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{v} \in V$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\ker(F-\lambda_1 I_d)}_{V(\lambda_1)} \oplus \mathrm{im}(F-\lambda_1 I_d)$$

$\square(*)$

Beweis durch Induktion $\cdot$ Fortsetzung $\cdot$ $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$
Setzte $W = \mathrm{im}(F-\lambda_1)$ (W ist UVR von V mit $\dim(W) \subset \dim(V)$)
$(**)$ Beh: W ist F-invariant
Bew: Sei $v \in W$ beliebig $\Rightarrow v = (F-\lambda_1)w \quad w \in W$
$\Rightarrow F(v) = F \circ (F-\lambda_1)w = (F-\lambda_1) \circ \underbrace{F(w)}_{\in V} \in W$

$\square(**)$

$(***)$ Beh: (setzte $F' = F|_W \in \mathrm{end}(w)$)

$$m_F(T) = \prod_{i=2}^{k}(T-\lambda_i) \ (:= R(T))$$

Bew: Sei $v \in W$ beliebig $\Rightarrow v = (F-\lambda_1)w \quad w \in V$
$R(F')(v) = R(F) \circ \underbrace{(F-\lambda_1)}_{m_F(F)=0}w = 0$
$\Rightarrow R(F') = 0 \in \mathrm{end}(W)$

$m_{F'}(T)|_{R(T)} \Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$
Es gilt auch

$$0 = \underbrace{m_{F'}(F')}_{=0} \circ (F - \lambda_1)) \quad \underbrace{(V)}_{v \in V \text{ beliebig}}$$

$$m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1) = 0 \in \mathrm{end}(V)$$

$$m_F(T)|_{m_{F'}(T)\cdot(T-\lambda_1)}$$

$$\Rightarrow m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1) = Q(T) \cdot m_F(T) = Q(T) \cdot R(T) \cdot (T - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T) \cdot R(T) = Q(T) \cdot H(T) \cdot m_{F'}(T) \Rightarrow Q(T) = H(T) = 1$$

$\Rightarrow R(T) = m_{F'}(T) \Rightarrow$ Induktionsannahme: $W = \bigoplus_{i=1}^{k} W(\lambda_i)$ Eigenraum von F' zu λ_i
$\Rightarrow V = V(\lambda_1) \bigoplus_{i=2}^{k} W(\lambda_i)$ zu zeigen: $W(\lambda_i) = V(\lambda : i)$
dann gilt: $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$
Es gilt: $W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(w) = \lambda_i w\} \subseteq \{v \in V : F(v) = \lambda_i \cdot v\} := V(\lambda_i)$
Sei $v \in \underbrace{V(\lambda_i)}_{(i>1)} \Rightarrow F(v) = \lambda_i v$ Setze: $w = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_1)} \cdot v \in V(\lambda_i)$
$\Rightarrow F(w) - \lambda_i w = v \Rightarrow v \in \mathrm{im}(F - \lambda_i) = W$
$\Rightarrow v \in \bigoplus_{j=2}^{k} W(\lambda_j) \Rightarrow v \in W(\lambda_{ioder1})$ Warum?
$v = \sum \alpha_j w_j$ für $w_j \in W(\lambda_i) \quad \alpha_j \in K \quad (\subseteq V(\lambda_j))$ Also nur $\alpha_i \neq 0$
Aber $+V(\lambda_j) = \oplus V(\lambda_j)$ oder $v \in V(\lambda_i)) \Rightarrow v = \alpha_i w_i \in W(\lambda_i)$

$\square$

Bem:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ $A^2 = E_n$

$$\Rightarrow A \text{ ist diagonalisierbar}$$

da $A^2 = E_n \Rightarrow (T^2 - 1)(A) = 0$
$m_F|_{T^2-1}$

$$m_F = \begin{cases} T^2 - 1 & = (T-1)(T+1) \\ T - 1 \\ T + 1 \end{cases}$$

Kapitel III

Die Jordansche Normalform

III.0.1 Lemma: Invarianzen

$F : V \to V$ Endomorphismus $\quad U \subset V$ Untervektorraum:
Dann ist U F-invariant gdw U $(F - \lambda\, Id)$- invariant ist für $\forall \lambda \in K$

III.0.2 Bsp:

$F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim. derart, dass $F^m = 0$ als Endomorphismus) und $m > 0$ minimal („ F ist nilpotent“)
$F^{m-1} \neq 0 \to \exists v \in V | F^{n-1}(v) \neq 0$ $\{v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)\}$ ist linear unabh.
Ergänze das Systme zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V: $\{v, \ldots, F^{n-1}(v), \ldots, v_n\}$

$$F^{n-1}(v) F^{n-2}(v) \ldots, v, v_{mn}, \ldots, v_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \\ & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

III.0.3 Def: Hauptraum

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim.

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda)$$

Eigenraum von F bzgl. λ

$$\ker(F - \lambda) \subset \ker(F - \lambda)^2 \subset \ker(F - \lambda)^3 \subset \ldots$$

$$V_\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(F-\lambda)^n$$

ist ein *Hauptraum* von F bzgl. λ

Bem:

V_λ ist ein Unterraum und V_λ ist F-invariant.
Warum ? Weil V_λ $(F-\lambda)$-invariant ist.

Bem:

Falls $(\ker(F-\lambda)) = V(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(F-\lambda)^n = 0$$

III.0.4 Bew:

Sei $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F-\lambda)^n$

$$\Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} \mid (F-\lambda)^n(v) = 0$$

$n = 0$
$\rightarrow \underbrace{Id(v)}_{=V} = 0$ sonst:

$$(F-\lambda)((F-\lambda)^{n-1}(v)) = 0$$

$$\Rightarrow (F-\lambda)^{n-1}(v) \in \ker(F-\lambda) = 0$$
$$\Rightarrow (F-\lambda)^{n-1}(v) = 0$$

III.0.5 Lemma: Haupträume sind disjunkt

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Elemente aus K (Eigenwerte)

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} V_{\lambda_j} = \{0\}$$

III.0.6 Bew:

V_{λ_j} ist $(F - \lambda_j)$.invariant
$\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist F-invariant
$\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist $(F - \lambda_i)$-invariant
Wir wollen zuerst zeigen, dass $F - \lambda_i | V_{\lambda_j}$ ein Automorphismus ist $(i \neq j)$
$\Rightarrow$ Es genügt zu zeigen, dass $F - \lambda_i$ injektiv auf V_{λ_j} ist.
Sei $w \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ kleinstes } (F - \lambda_i)^m(w) = 0$$
$$\overset{(m>0(w\neq 0)}{\Rightarrow} (F - \lambda_j)^{m-j}(w) \neq 0$$
$$\Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(\underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0}(w)) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{So} 0 &\neq (F - \lambda_j)^{n-1}([F(w) - \lambda_j w] - (F(w) - \lambda_i w)) \\ &= \underbrace{(F - \lambda_j)^m(w)}_{=0} + (F - \lambda_j)^{m-1}(F - \lambda_i)(w) \\ &\Rightarrow (F - \lambda_i)(w) \neq 0 \text{ OK!} \end{aligned}$$

Insb. ist jede Potenz $(F - \lambda_i)^k$ ein Automorphismus von V_{λ_i}

$$V_{\lambda_i} \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j} = \{0\}$$

$$v \in V_{\lambda_i} \bigcap \sum_{j \neq i}^{k} V_{\lambda_j}$$
$$v = \sum_{j \neq i} \underbrace{v_j}_{\in V_{\lambda_j}}$$

$\Rightarrow \exists\ m_j$ kleinstes
$$(F - \lambda_j)^{m_j}(v_i) = 0$$
$$M = (F - \lambda_i)^{m_1} \circ \cdots \circ (F - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \circ (F - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \circ \cdots \circ (F - \lambda_K)^{m_k}$$
ist ein Automorphismus von V_{λ_i}

Wiederholung:

$F : V \to V$ Endomorphismus $\quad \dim_k V = n \qquad \lambda \in K$

$$V_\lambda = \bigcup \underset{\underset{(F-\lambda)\circ\cdots\circ(F-\lambda)}{||}}{\ker(F-\lambda)^n}$$

$V(\lambda) = \ker(F-\lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \chi_F(\lambda) \neq 0 \Rightarrow V_\lambda = \{0\}$
$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte
$\Rightarrow V_{\lambda_i} \bigcap \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} V_{\lambda_i} = \{0\}$

III.0.7 Bem: Invarianzen

V_λ ist $(F-\lambda)$-invariant
$\Rightarrow V_\lambda$ ist F-invariant

III.0.8 Lemma: Ordnung

Sei $\lambda \in K$
$\dim V_\lambda = \operatorname{ord}_\lambda(\chi_F)$

Ferner hat $F \upharpoonright V_\lambda$ Matrixdarstellung der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

III.0.9 Bew

Sei $K = \operatorname{ord}_\lambda(\chi_F(T)) \Rightarrow \chi_F(T) = (T-\lambda)^K \cdot Q(T)$ wobei: $Q(T) \neq 0$

Behauptung:

Es gibt einen F-inv. Unterraum $U \subset V$ der dimension K, so dass $F \upharpoonright U$ matrix darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Falls $n = 0 \to$ Ok!
OBdA ist $k \geq 1$ Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf $n = \dim V$
n=1 $\Rightarrow$
$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$

$\Rightarrow V = \underbrace{\text{span}(v)}_{\substack{\| \\ U_0}}$

$n \geq 2$

λ ist ein Eigenwert

$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$

$U = \text{span}(v) \rightarrow \dim 1 \quad F$-invariant $\Rightarrow \tilde{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0; \bar{\omega} \mapsto \overline{F(\omega)}$

$$\underset{\substack{\| \\ (T-\lambda)(T-\lambda^{k-1})\cdot Q(T)}}{\chi_F(T)} \qquad = \underset{\substack{\| \\ (T-\lambda)}}{\chi_{F\restriction U}(T)} \cdot \chi_{\tilde{F}}(T)$$

da K[T] Integritätsbereich:

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = (T-\lambda)^{k-1} \cdot Q(T)$$

$$Q(\lambda) \neq 0$$

Nach I.A. existiert einen $\tilde{F}$- Invarianten Unterraum $\tilde{U} \subset V/U$ der Dimension $n-1$, so dass die Matrixdarstellung von $\tilde{F}$ der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

besitzt. Sei $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_K$ eine Basis von $\bar{U}$ so dass die Darstellungsmatrix von $\tilde{F}$ bzg $\{\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_K\}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Die Vektoren $\underbrace{\{v, v_2 \ldots, v_K\}}_{\text{Vektoren aus } \underline{\text{V}}}$ sind linear unabhängig.

$U = \text{span}(v, v_2 \ldots, v_K)$ hat Dimension K.

U ist F-Invariant

$$F(\sum_{i=1}^{K} \mu_i v_i) = \sum \mu_i F(v_i)$$

$$= \underbrace{\mu_1 \lambda v_1 + \sum_{i=2}^{k} \mu_i F(v_i)}_{\in U}$$

da: $F(v_i) \overset{\text{nach} U_0}{=} \sum_{j\leq i} a_j = v_j \; F \restriction U$

$$F(v_1), F(v_2), \dots F(v_k)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & * \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Zu Zeigen: $U = V_\lambda$
$U \subset V_\lambda$:

$$\chi_{F\restriction U} = (T-\lambda)^k$$

$$\Downarrow \text{Caley Hamilton}$$

$$(F-\lambda)^k = 0 \quad \text{auf } U$$

$\Rightarrow U \subseteq \underbrace{\ker(F-\lambda)^k}_{\subset V_\lambda}$
Falls $U \subsetneq V_\lambda$
$\Rightarrow \dim V_\lambda / U \geq 1$

$$\underset{(T-\lambda)\cdot Q(T)}{\underset{\parallel}{\chi_F(T)}} = \underset{(T-\lambda)^k}{\underset{\parallel}{\chi_{F\restriction U}(T)}} \cdot \chi_{\tilde{F}}(T)$$

$\tilde{F} : V/U \to V/U$

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}(T)} = Q(T)$$

aber $Q(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda$ ist kein Eigenwert von $\tilde{F}$!!
$\Rightarrow$ Der Hauptraum für λ von $\tilde{F} : V/U \to V/U$ ist <u>trivial</u>
Sei $\omega \in V_\lambda$
$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$
$(F-\lambda)^s(\omega) = 0 \Rightarrow (F-\lambda)^s(\overline{\omega}) = 0$
$\Rightarrow \overline{\omega} = 0 \Rightarrow \omega \in U$

III.0.10 Def: Nilpotenz

$F : V \to V$ Endomorphismus heißt nilpotent falls es eine feste Zahl m existiert, so dass $\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{m} = F^m = 0$ auf V ist.

III.0.11 Lemma: Nilpotenz

Sei $F : V \to V$ Endomorphismus $\dim V = n$ Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) F ist nilpotent
2) $\forall v \in V \; \exists \; m_v \in \mathbb{N} : F^{m_v}(v) = 0$
3) Es existiert eine Basis von V, so dass F Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

   hat
4) $\chi_F(T) = T^n$

III.0.12 Bew:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Trivial
$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Induktion auf $n = \dim V$ $n = 1 : Sei v \in V \setminus \{0\}$
$\exists m_v \in \mathbb{N}$ kleinstes
$F^{m_v}(v) = 0$
$\Rightarrow m_v \neq 0$
$\Rightarrow F^{m-1}(v) \neq 0$
$\Rightarrow V = \operatorname{span}(F^{m-1}(v))$ Ferner $F(F^{m_v-1}(v)) = 0$
$\quad \to$ Darstellungsmatrix bzgl. $\{F^{m_v-1}(v)\}$ ist (0)
$n \geq 2$
Sei $v_i \in V \setminus \{0\}$, so dass $F(v_i) = 0$
$\Rightarrow U = \operatorname{span}(v_i)$ ist F-invariant
$\Rightarrow \tilde{F} : \underbrace{V/U}_{\substack{\dim < n \\ \| \\ n-1}} \to V/U$
$\Rightarrow$ I.A. es existiert eine Basis $\{\overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ von V/U, so dass $\tilde{F}$ Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Familie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V und hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & * \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

$$\chi_F(T) = \det\left(T \cdot E_n - \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} T & & * \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} = T^n$$

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Caley-Hamilton

$$F^n = \chi_F(F) = 0$$

□

III.0.13 Satz: Jordan-Charelley Zerlegung

$F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim.

Falls $\chi_F(T)$ in linearfaktoren zerfällt dann ist $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und F lässt sich als Blockmatrix darstellen

$$F = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_k \end{pmatrix} \qquad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

insb. ist $F = \underbrace{G}_{\text{diagonalisierbar}} + \underbrace{H}_{\text{nilpotent}}$

$G \circ H = H \circ G$

Sei $G : V \to V \quad G_{V_{\lambda_i}}$ = Multiplikation mit λ_i. E hat diagonale Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

setzt $H = F - G$ die Darstellungsmatrix von H bzgl. $\mathcal{B}$ ist:

$$\begin{array}{l}\begin{pmatrix} 0 & & * & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & \\ & & & 0 & & * & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} V_{\lambda_1} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} V_{\lambda_2} \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} \end{array}\end{array} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent}$$

III.0.14 Bew:

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda)^{d_i}$$

$\dim V = \text{grad} \chi_F(T) = n \sum_{i=1}^{k} \underset{\dim V_{\lambda_i}}{\underset{\|}{d_i}}$

$$\dim(\sum_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}) \overset{V_{\lambda_i} \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j} = \{0\}}{=} \sum d_i = n = \dim V$$

$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$
V besitzt eine Basis $\mathcal{B}$, welche aus der Vereinigung der Basen jedes V_{λ_i} besteht.

F wird durch $\quad \underset{\underset{A_1}{\|}}{\underset{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}}{\underset{\|}{F \restriction V_\lambda}}}, \quad \ldots, \quad \underset{\underset{A_k}{\|}}{\underset{\begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}}{\underset{\|}{F \restriction V_{\lambda_k}}}} \quad$ bestimmt

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K \end{pmatrix}$$

zu Zeigen: $G \circ H = H \circ G$ Beachte, dass jedes V_{λ_i} G-Invariant.
$\Rightarrow V_{\lambda_i}$ ist H-Invariant.
Es genügt zu zeigen, dass $G \circ H = H \circ G$ auf $\underline{\underline{V_{\lambda_i}}}$
$w \in V_{\lambda_i}$
$H \circ G(w) = H(\lambda \cdot w)$

$$G \circ H(w) \overset{W(w) \in V_{\lambda_i}}{=} \lambda_1 H(w)$$

III.0.15 Def: F-adaption

$F : V \to V$ Endomorphismus V endlichdim.
Eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist F-adaptiert, falls:

$$F(v_1) = 0$$
$$2 \leq j \leq n \quad F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$$

Bem:

Falls V eine F-adaptierte Basis besitzt, dann ist $F : V \to V$ Endomorphismus nilpotent.

III.0.16 Bew:

Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ F-adaptiert
Es genügt zu zeigen, dass $F^n = 0$ (als Endomorphismus)

$$F^n(\underset{\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j}{\underset{\|}{v}}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{F^n(v_j)}_{=0} = 0$$

Notation:

$$\mathcal{N}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$$

$\mathcal{N}_j = (0)$

$$\mathcal{N}_m^m = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

III.0.17 Def: Index

$F : V \to V$ Endomorphismus nilpotent. Es gibt $m \leq n$ kleinste Zahl, sodass

$$\ker(F^m) \subsetneq \dots \ker(F^m) \subsetneq \ker(F^{m+1}) \subsetneq \dots \subsetneq V$$

m heißt der Index von F

$$V = \ker(F^m) \bigoplus F^m(V)$$

III.0.18 Satz: Index

Sei $F : V \to V$ Endomorphismus $\dim(V) = n$ und $\mathcal{B}$ eine F-adaptierte Basis von F. Dann hat F Matrixdarstellung der Form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{N}_{k_r} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{r} k_j = n \qquad \mathrm{Index}(F) = \max\{k_j\}_{1\leq j\leq r \ oder \ n}$$

III.0.19 Bew:

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ F-adaptiert
Sei $k \leq i_1 < \dots < i_r < n$ eine Aufzählung der Menge $\{j | F(v_{j+1}) = 0\}$

$$v_1, v_2, \dots, v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, \dots$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{i_1} & v_{i_{j+1}} \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}\right\} i_1 \\ \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}\right\} i_2 - i_1 \end{matrix}
\end{array}$$

III.0.20 Satz: F-adaptierte Basis

Sei $F : V \to V$ nilpotent mit Index k. Gegeben einen Unterraum $U \subset V$ derart, dass $U \cap \ker(F^{k-1}) = \{0\}$. Dann lässt sich jede Basis von U zu einer F-adaptierten Basis von V ergänzen.

III.0.21 Kor:

Jeder nilpotente Endomorphismus besitzt eine F-adaptierte Basis

$$\ker F \subsetneq \ker F^2 \subset \dots \ker F^{k-1} \subsetneq \ker F^k = \dots = V$$

$$B_1 \quad \subset \quad B_2 \quad \subset \quad \dots B_{k-1} \quad \subset \quad B_k$$

$$\Big(F(U_1) \dots F(U_2) \to B_{k-1} \qquad U_1, \dots U_r \in B_k \setminus \ker(F^{k-1}) \Big)$$

$\ker F^{K-1}$ hat ein Komplement $\underset{\substack{\| \\ U_1 \\ \vdots \\ U_j}}{U}$ in $\ker F^k$

Behauptung:

$\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$ sind lin. unabh.
$\to$ sie bilden die Basis von $F(w)$

III.0.22 Bew:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda F(U_i) = 0 = F\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i\Big)$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i \in \ker(F)$$

$$\Downarrow W \cap V = \{0\}$$

$$\sum \lambda_i U_i = 0$$

$$\Downarrow \{U_1, \dots, U_i\} \text{ sind lin. unabh.}$$

$$\underline{\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = 0}$$

Aus unserer Induktionsannahme

$$F(w) \text{ und } F \restriction V' : V' \to V'$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine adaptive Basis $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ von V',
welche $\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$ ergänzt.
$F(U_j) = v'_{i_j}$ wobei $i_1 < \cdots < i_r$ (sonst ordne v'_j 's um !)

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 \\ v_2 &= v'_2 \\ &\vdots \\ v_{i_1} &= v'_{i_1} \\ v_{i_1+1} &= U_1 \qquad \to \text{ Basis } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ von } V(W \cap V' = \alpha_i) \\ v_{i_1+2} &= v'_{i_1+1} \\ &\vdots \\ v_{i_2} &= v'_{i_2-1} \\ v_{i_2+1} &= v'_{i_2} \\ v_{i_2+2} &= U_2 \end{aligned}$$

III.0.23 Folgerung

Jeder nilpotente Endomorphismus lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix darstellen:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{pmatrix}
$$

III.0.24 Kor: Jordansche Normalform

Jeder Endomorphismus eines endl. dimensionalen VR, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen:

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_2 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda_2 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 &
\end{pmatrix}
$$

III.0.25 Bew:

Induktion auf n
$\boxed{k=1}$
$F=0$ als Endomorphismus $\rightarrow$ Jede Basis ist F-adaptiert
$\boxed{k\geq 2}$
Sei $V' = \ker(F^{k-1}) \subsetneq V$
Sei $\{u_1, \dots, u_j\}$ eine Basis von U. $U \cap V' = \{0\}$ $\quad U + V' = U \oplus V'$ hat eine

Basis: $\{u_1, \ldots, u_j, \overbrace{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n}^{\text{Basis von } V'}\}$
Ergänze diese Basis zu einer Basis von V $\{u_1, \ldots, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_r, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$
$U \subset \mathcal{W} = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_j)$
$W \cap V' = \{0\}$
$F(W) \subset \ker(F^{k-1}) = V'$ (Weil $F^k = 0$), V' ist F-invariant und
$F \restriction V' = V' \to V'$ hat Index $\underline{\underline{k-1}}$.

Beh:

$\{0\} = F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$
Sei $u \in F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$
$\Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$
es existiert ein $w \in \mathcal{W} | u = F(w)$
$0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w) \to w \in \ker(F^{k-1} = V')$
$\Rightarrow w = 0 \Rightarrow U = F(w) = 0$
$W \cap V' = \{0\}$

Es genügt zu zeigen, dass die Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ <u>F-adaptiert</u> ist.
z.B.

$$F(v_{j+1}) = V'_{i_1} = F(u_1)$$

$\Rightarrow u_1 - \underbrace{v_i + 1}_{\in V'} \in \ker(F) \subset V'$
$\Rightarrow u_1 \in V' \cap W = \{0\}$ <u>Widerspruch !</u>
$F : V \to V$ Endomorphismus nilpotent Index K. $\square$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= \det \begin{pmatrix} T-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & T-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & T-3 \end{pmatrix} \\ &= (T-2)\det \begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\chi_A(T) = (T-2)^4 \to 2 \text{ ist der einzige Eigenwert.}$$

$A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\underline{\underline{\underline{\text{Nilpotent}}}}$

$\ker(A - 2E_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$

Kapitel IV

Dualität

IV.0.1 Def: Dualraum

Sei V ein K-VR Der Dualraum V^* ist die Kollektion aller linearen Abbildungen $V \to K$.

Bem:

V^* ist ein K-Vektorraum.
$F + G : V \to K,\ v \mapsto F(v) + G(v)$ ist linear.
$\lambda \in K,\ \lambda \cdot F : V \to K,\ v \mapsto \lambda \cdot F(v)$ ist linear.

IV.0.2 Def: Duale Basis

Sei V endlichdim und wählte eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V.
Die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ ist eine Kollektion linearer Abbildungen derart, dass $b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Insbesondere:

$$b_i^*(v) = b_i^*(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j) = \lambda_i$$

Bem:

Falls V endlichdim. ist, dann ist $\mathcal{B}^*$ eine Basis von V^* und sonst $V \simeq V^*$

IV.0.3 Bew:

$$b_i^* \dots b_n^* \quad \text{sind linear unabhängig.}$$

warum?

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0 \quad \text{(als lin. Abbildung)}$$

$$\sum \lambda_i \underset{\lambda_j \text{ für } 1\leq j\leq n}{\underset{\|}{b_i^*}} (b_j) = 0$$

$\lambda_i \cdots = \lambda_n = 0 \rightarrow$ OK!

$$\operatorname{span}(b_i^* \dots b_n^*) = V^*$$

Sei $F : V \rightarrow K$ beliebig

$$F(b_i) = \lambda_i \in K \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(F - \sum \lambda_i b_i^*)(b_j) = 0 = \underset{\lambda_j}{\underset{\|}{F(b_j)}} - \underbrace{\sum \lambda_i b_i^*(b_j)}_{\lambda_j} \quad 1 \leq j \leq n$$

Insb. $V \rightarrow V^*$ ist ein Isomorphismus $b_i \mapsto b_i^*$
<u>Achtung:</u> Der Isomorphismus $V \simeq V^*$ hängt von der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ ab!
NICHT KANONISCH □

IV.0.4 Lemma: kanonischer Monomorphismus

kanonischer Monomorphismus $V \overset{\varphi}{\hookrightarrow} (V^*)^*, v \mapsto \varphi_v : \quad V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$

IV.0.5 Bew:

φ ist wohldefiniert

$$\varphi_v(F+G) = (F+G)(v) = F(v) + G(v) \quad \text{Ok!}$$

Zu zeigen: φ ist injektiv (Übungsaufgabe !)

IV.0.6 Korollar:

Wenn V endlichdim. ist, $V \simeq V^*$ *kanonisch*

IV.0.7 Bew:

$$\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \rightarrow (V^*)^* \text{ ist surjektiv}$$

$\Rightarrow$ ein Isomorphismus □

IV.0.8 Lemma: Duale Transformation

Sei V endlich und wähle Basen $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_i\}$ und $\mathcal{B}' = \{b'_1 \dots b'_i\}$ von V.

Seien $\mathcal{B}^*$ und $(\mathcal{B}')^*$ die entsprechenden dualen Basen in V^*. Wenn A die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist, dann ist die Transformationsmatrix $\mathcal{B}^*$ nach $(\mathcal{B}')^*$: $\quad (A^\top)^{-1}$

IV.0.9 Bew:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix}$$

Sei X die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $(\mathcal{B}')^*$

$$\begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots b_n \end{pmatrix} = E_n \qquad \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_1 & \dots b'_n \end{pmatrix} = E_n$$

$$\begin{aligned} E_n &= \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_1 & \dots b'_n \end{pmatrix} \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \left(A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)^\top \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots b_n \end{pmatrix} \cdot A^\top \end{aligned}$$

$$E_n = X \cdot E_n \cdot A^\top = X \cdot A^\top \Rightarrow X = (A^\top)^{-1}$$

□

IV.0.10 Def: duale Abbildung

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung $F^* : W^* \to V^*, \psi \mapsto \psi \circ F$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ & \searrow & \downarrow \Psi \\ \Psi \circ F & & K \\ \| & & \\ {\scriptstyle F^*(\Psi)} & & \end{array}$$

Bem:

F^* ist linear.

$$F^*(\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F = F^*(\psi_1) + F^*(\psi_2)$$

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$$
$$W^* \xrightarrow{F^*} V^* \xrightarrow{G^*} U^*$$

von W^* nach U^*:

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

IV.0.11 Bew:

$\Psi \in W^* \quad \Psi \circ W \to K$

$$(F \circ G)^*(\Psi) = \underbrace{\Psi \circ F}_{F^*(Psi)} \circ G = G^* \circ F^*(\Psi)$$

Eigenschaften:

a) $(Id_{I_V})^* = Id_{I_{V^*}}$

b) $(F + G)^* = F^* + G^*$

c) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

d) $(\mu F)^* = \mu F^*$

$$(Id_{iv})^*(\psi) = \psi \circ Id_{iv} = \psi$$

Bem:

Falls $F^* = 0$ dann ist $\underline{F = 0}$. Feiner, falls V und W endlich dimensional sind.

$$G : W^* \to V^* \text{ lin. Abbildung}$$

dann gilt es

$$F : V \to W \text{ so dass } F^* = G$$

IV.0.12 Bew:

$$F^* = 0$$

Sei $v \in V$ fest.

Zu Zeigen: $F(v) = 0$

Definiere

$$W^* \to \psi \mapsto \underset{\substack{\| \\ F^*(\psi)(v)}}{\psi(F(v))}$$

Erinnerung: $W \overset{\varphi}{\hookrightarrow} (W^*)^*,\ w \mapsto \underset{\substack{\| \\ \varphi(wi)}}{\varphi_{wi}} \quad W^* \to K,\ \psi \mapsto \psi(w)$

$$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v) = \underbrace{F^*(\psi)}_{=0}(v) \underline{\underline{= 0}}$$

Aber: φ ist ein Monomorphismus
$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0$ als Homomorphismus $V \to W$
Die Operation:

$$* :\ \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto\ \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$

Falls V, W endlichdim. sind:
($V \approx K^n \approx V^*$ und $W \approx K^m \approx W^*$)

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}\ (V, W) &= \dim V \cdot \dim W \\ & \qquad\ \ \| \qquad\quad \| \\ \dim \mathrm{Hom}\ (W^*, V^*) &= \dim V^* \cdot \dim W^* \end{aligned}$$

Aber $* :\mathrm{Hom}\ (V, W) \to \mathrm{Hom}\ (W^*, V^*)$ ist injektiv $\Rightarrow$ Surjektiv

$$\dim V = n, \quad \dim W = m$$

$\square$

Bem:

$F : V \to W$ hat Darstellungsmatrix A bezüglich $\mathcal{B} = \{b_i \dots b_n\}$ von V und $\mathcal{B}' = \{b'_i \dots b'_m\}$ von W. Seien $\mathcal{B}^*$ und $(\mathcal{B}')^*$ die entsprechenden dualen Basen aus V^*, und W^*.

Dann hat F^* Darstellungsmatrix $A^\top$ bzgl $(\mathcal{B}')^*$ und $\mathcal{B}^*$.

IV.0.13 Bew:

$$F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}$$

$$F^* \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_m \end{pmatrix} \circ \underbrace{F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{A \cdot \vec{x}}$$

Die Darstellungsmatrix von F^* ist:

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_m \end{pmatrix} \cdot A$$

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \left(A^\top \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \right)^\top$$

$\rightarrow$ Die Darstellungsmatrix von F^* ist $A^\top$

IV.0.14 Korrolar: zu Duale Basen

$$\det(F^*) = \det(F)$$

Wid: $VK - VR, V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ ist ein $K - VR$, V endlich dimensional $\rightarrow V \simeq V^*$, $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \rightarrow \underset{\{b_1^* \dots b_n^*\}}{\underset{\|}{\mathcal{B}^*}}$ duale Basis.

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ (kronecker delta)}$$

$$\varphi : V \hookrightarrow (V^*)^* \text{Monomorphismus}, \ v \mapsto \varphi_v : \ V^* \rightarrow K, \ F \mapsto F(v)$$

Folgerung

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists F : V \rightarrow K \text{ linear } F(v) \neq 0$$

$* : \mathrm{Hom}(V, W) \rightarrow \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

$$F : V \rightarrow W \rightarrow F^* \rightarrow V^*$$

$$\underbrace{\Psi}_{W \rightarrow K} \mapsto \underbrace{\Psi \circ F}_{V \rightarrow K}$$

$(F \circ G)^* G^* \circ F^*$
$(Id_{IV})^* = Id_{IV^*}$
V, W endlichdim $\to *$ $\underline{\underline{\text{Isomorphismus}}}$

Bem

$F : V \to V$ Endomorphismus lineare Abb. mit Darstellungsmatrix $A = (a_{ij})$ bzgl. der Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}, \mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$

$$F^* : W^* \to V^*$$
$$\mathcal{C}^* = \{c_1^*, \ldots, c_m^*\}(\ \to)\mathcal{B}^* = \{b_1^* \ldots, b_n^*\}$$

Darstellungsmatrix von F^* bzgl. $\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*$ ist $A^\top$

IV.0.15 Bew:

$$F^*(c_k^*) = \sum_{1 \le \varphi \le n} \lambda_{\varphi k} b_\varphi^* \quad (1 \le k \le m)$$

$$F(b_i) = \sum_{1 \le j \le m} a_{ij} c_j$$

$$\begin{array}{ccccc}
F^*(c_k^*)(b_i) & = & (\sum \lambda_{\varphi k} b_\varphi^*)(b_i) & & \\
\| & & & & \\
C_k^*(F(b_i)) & = & \lambda_{ik} & & \to A^\top \text{ist die Darstellungs matrix} \\
\| & & & & \\
C_k^*(\sum a_{ji} c_j) & = & a_{ki} & &
\end{array}$$

□

IV.0.16 Lemma: V und V^*

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

$$\Rightarrow V^* \simeq \bigoplus_{i=1}^n V_i^*$$

$F : V \to K$ ist eindeutig bestimmt durch $F \restriction V_1, \ldots, F \restriction V_n$

IV.0.17 Lemma: Duale Endomorphismen

$F : V \to V$ Endomorphismus linear

a) F injektiv $\Leftrightarrow F^*$ surjektiv

b) F surjektiv $\Leftrightarrow F^*$ injektiv

c) F Isomorphismus $\Leftrightarrow F^*$ isomorphismus

IV.0.18 Bew:

a) $\boxed{\Rightarrow}$ $F : V \hookrightarrow W$ injektiv.

Zu Zeigen:

$$F^* W^* \to V^* \ni \psi : V \to K \text{ surjektiv ist}$$

$$\exists \Theta : W \to K,\ \underset{\substack{\| \\ \Theta\circ F}}{F^*(\Theta)} = \psi$$

$$\forall v \in V,\ \Theta(F(v)) = \psi(v)$$

$$\underbrace{\mathrm{Im}(F)}_{\simeq V} \subset W \quad (\forall v \in \mathrm{Im}(F)\ \exists! v \in V,\ w = F(v))$$

Sei Z ein Komplement von $\mathrm{Im}(F)$ in $W \Rightarrow W = \mathrm{Im}(F) \oplus Z$

$$\forall w \in W : \quad w = \underbrace{w'}_{\in \mathrm{Im}(F)} + \underbrace{\tilde{w}}_{\in Z} \text{ eindeutig}$$

Definiere $\Theta : W \to K$

$$W = F(v) + \tilde{w} \mapsto \Psi(v) \qquad \tilde{w} \in Z$$

Zu Zeigen: Θ ist linear

$$\Theta(\underset{\substack{\| \\ F(v_1)+\tilde{w}_1}}{w_1} + \underset{\substack{\| \\ F(v_2)+\tilde{w}_2}}{w_2}) = \Theta(\underset{\substack{\| \\ F(v_1+v_2)}}{F(v_1) + F(v_2)} + \underbrace{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2}_{\in Z})$$

$$\Theta(w_1) + \Theta(w_2) = \Psi(w_1) + \Psi(w_2) = \Psi(v_1 + v_2)(= F(v_1 + v_2))$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $F^* : W^* \twoheadrightarrow V^*$ surjektiv
Zu Zeigen: $F : V \to W$ injektiv
$v \in V \ / \ F(v) = 0$

$v \neq 0 \Rightarrow \exists \Psi : V \to K \quad \Psi(v) \neq 0$
$\overset{F^* \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists \Theta : W \to K$

$$\Theta \circ F = F^*(\Theta) = \Psi$$

$\Rightarrow \underbrace{\Theta(F(v))}_{=0} = \Psi(v)$ Wid !

b) $\boxed{\Rightarrow}$ $F : V \twoheadrightarrow W$ surjektiv.

Zu Zeigen:

$$F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

Sei $\Theta \in W^*/F^*(\Theta) = 0$ als lineare Abbildung $V \to K$

$$F^*(\Theta) = \Theta \circ F$$

Zu Zeigen:

$$\forall w \in W,\ \Theta(w) = 0$$

$$w \in W \to \ni v \in V/F(v) = w$$

$$F \text{ surjektiv} \quad \Theta(w) = \Theta(F(v)) = F^*(\Theta)(v) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $F^* : W^* \hookrightarrow V^*$ injektiv

Zu Zeigen:

$$F : V \twoheadrightarrow W \text{ surjektiv}$$

Sei Z ein Komplement von $\mathrm{Im}(F)$ in $W = \mathrm{Im}(F) \oplus Z$

Zu Zeigen:

$$Z = \{0\}$$

Sonst sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Z.

$$G : W \mapsto K \text{ linear der art}$$

$G \restriction \mathrm{Im}(F) = 0$ und $G(b) = 1,\ \forall b \in \mathcal{B}$
$\Rightarrow G \in W^*$
$F^*(G) = G \circ F : V \to K$
Sei $v \in V$

$$G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$$

$\Rightarrow F^*(G)$ ist die triviale Abbildung
$\overset{F^* \text{ inj.}}{\Rightarrow} G = 0$ als lineare Abbildung
$\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow F$ surjektiv

IV.1 Duale Paarung

IV.1.1 Def: Bilinearität

Seien V, W K-VR
Eine Abbildung $\varphi : V \times W \mapsto K$ ist bilinear, wenn φ linear in jeder Koordinate ist.

a) $\varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$

b) $\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) \ = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$

Bem: !!!

Falls V, W endlich dimensional mit Basen $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$ von V und $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$ von W. Dann ist φ eindeutig bestimmt durch die $(n \times m)$-Matrix $A = (\varphi(b_i, c_j))$

$$\begin{aligned}
\varphi(v, w) &= \varphi\left(\sum_{i \leq n} \lambda_i b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\
&= \sum_{i \leq n} \lambda_i \varphi\left(b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\
&= \sum_{i \leq n} \lambda_i \sum_{j \leq m} \mu_j \varphi(b_i, c_j) \\
&= (\lambda_1, \dots \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bem:

Falls wir Basen $\mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{C}'$ von W gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von φ

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top \cdot A \cdot \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \vdots \\ \mu_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda'_1 & \dots\lambda'_n\end{pmatrix} \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top$$

Folgerung Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab $\Rightarrow \mathrm{Rg}(\varphi)$ ist <u>wohldefiniert.</u>

IV.1.2 Def: Duales Paar

Ein Tripel (V, W, φ) ist ein duales Paar, falls $\dim V = \dim W < \infty$

$$\varphi : V \times W \to K \text{ ist bilinear und } \mathrm{Rg}(\varphi) = \dim(V) = \dim(W)$$

Bem:

Falls $\varphi : V \times W \to K$ bilinear ist, dann ist $\varphi' : W \times V \mapsto K \quad (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$ auch bilinear.

Aufgabe:

(V, W, φ) duales Paar $\Rightarrow (W, V, \varphi')$ auch!

IV.1.3 Lemma:

V, W fest

$$\underbrace{\{\varphi : V \times W \to K\}}_{\text{bilinear}} \overset{\text{Bijektion}\Phi}{\longleftrightarrow} \underbrace{\{F : V \to W^*\}}_{\text{linear}}$$

$$\begin{array}{lcll}
\varphi : V \times W \to K & \overset{\Phi}{\longmapsto} & F_\varphi : V \to W^* & \\
 & & v \mapsto F_\varphi(v) : & W \to K \\
 & & & w \mapsto \varphi(v, w) \\
\varphi_F : V \times W \to K & \overset{\Phi^{-1}}{\longleftarrow} & F : V \to W^* & \\
(v, w) \mapsto F(v)(w) & & &
\end{array}$$

Ferner, falls $\dim V, \dim W < \infty$:

$$(V; W; \varphi) \text{ duales Paar} \quad \Leftrightarrow \quad F_\varphi : V \to W^* \text{ Isomorphismus}$$

$$\Phi^{-1} \circ \Phi(\varphi)(v, w)$$

$$\Phi^{-1}\Big(F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v, w)\Big) = \varphi(v, w)$$

IV.1.4 Wiederholung

$$\varphi : V \times W \to K \text{ Bilinearform}$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \text{ von V}$$

$$\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\} \text{ von W}$$

$$\varphi \text{ hat eine Darstellungsmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(b_1, c_1) & \dots & \varphi(b_1, c_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(b_n, c_1) & \dots & \varphi(b_n, c_m) \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j \right) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) A_\varphi \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}(\varphi) \text{ ist eindeutig bestimmt.}$$

$$(V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar, falls } \text{Rg}(\varphi) = \dim V = \dim W < \infty$$

$$\varphi : V \times W \to K \text{ duales Paar}$$

$$\to \varphi' = W \times V \to K,\ (w, v) \mapsto \varphi(v, w) \ \underline{\text{dual}}$$

$$\varphi'(w, v) \mapsto \varphi(v, w)$$

IV.1.5 Bew:

Φ ist Wohldefiniert
$F_\varphi(v) \in W^*$, weil $\varphi(v, ???-)$ linear in der Koordinate ist F_φ ist linear weil φ linear in der ersten Koordinate ist (da es Wohldefiniert ist)

$$\Phi^{-1} \circ \Phi = Id_\chi$$

$$\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_y$$

Falls V, W endlich dimensional sind, mit Basen $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$, $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$, A_φ die Darstellungsmatrix von φ bzg. dieser <u>Basen</u>

$$A_\varphi = \underset{\varphi(b_i, c_j)}{\underset{\parallel}{(a_{ij})}}$$

Sei $\mathcal{C}^* = \{c_1^* \dots c_m^*\}$ die duale Basis zu C in W^*

$$c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$$

Die Darstellungsmatrix von

$$F_\varphi \text{ bzg. } \mathcal{B}, \mathcal{C}^*$$

$$(\lambda_{kl}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$$

$$F_\varphi(b_k) = \sum \lambda_{lk} c_l^*$$

$$\underset{\underset{(\sum \lambda_{lk}c_l^*)(c_r)}{\parallel}}{F_\varphi(b_k)}(c_r) = \varphi(b_k, c_r)$$

$$= \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots \\ \lambda_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^\top$$

Wobei $\lambda_{12} = \varphi(b_2, c_1) = a_{21}$, und $\lambda_{21} = a_{12}$

$$\mathrm{Rg}(A_\varphi^\top) = \mathrm{Rg}(A_\varphi)$$

$$(V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar} \Leftrightarrow \dim V = \underset{\underset{\dim W^*}{\parallel}}{\dim W} = \underset{\underset{\mathrm{Rg}(A_\varphi^\top)}{\parallel}}{\mathrm{Rg}(A_\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi \text{ Isomorphismus.}$$

IV.1.6 Kor: Ausartung

Seien V, W endlich dimensional, $\varphi : V \times W \to K$ Bilinearform. Dann ist (V, W, φ) duales Paar, genau dann wenn φ nicht-ausgeartet ist d.h.

$$a) \forall v \in V: \ \varphi(v, w) = 0 \ \forall w \in W \Rightarrow v = 0$$
$$b) \forall w \in W: \ \varphi(v, w) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow w = 0$$

oder:

$$a) \forall v \in V \setminus \{0\}: \ \exists w \in W : \varphi(v, w) \neq 0$$
$$b) \forall w \in W \setminus \{0\}: \ \exists v \in V : \varphi(v, w) \neq 0$$

IV.1.7 Bew:

$\boxed{\Rightarrow}$

a) Sei $v \in V$ fest $\varphi(v,w) = 0 \qquad \forall w \in W$
   $\varphi(v,w) = F_\varphi(v)(w) \Rightarrow F_\varphi(v) = 0$ als Abbildung $\Rightarrow v = 0$
   (V,W,φ) duales Paar $\Rightarrow F_\varphi$ Isomorphismus

b) (V,W,φ) duales Paar $\Rightarrow (W,V,\varphi')$ auch dual $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \to V^*$ Isomorphismus
   $v \in V, \varphi(v,w) = 0 \quad \forall v \in V$
   $\varphi(v,w) = 0 \quad = \varphi'(w,v) = F_{\varphi'}(w)(v) \quad \Rightarrow F_\varphi(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Es genügt zu zeigen, dass $F_\varphi : V \to W^*$ Isomorph ist:
Eigenschaft:

a) $\Rightarrow F_\varphi$ Isomorph (bijektiv)
   $\Rightarrow \dim V \leq \dim W^{=} \dim W$
   es genügt zu zeigen, dass $\dim V = \dim W^*$ (da F_φ injektiv) und, dass daraus folgt: $(W,V,\varphi') \quad (\varphi' =$ bilinearform $)$

b) $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \to V^*$ injektiv $\Rightarrow \dim W = \dim V^* = \dim V$
   $\Rightarrow \dim V = \dim W$

$\square$

Beispiel:

$$(\mathbb{R}^2, <,>)$$

$$< x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n >= \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

$$< (x_1 \dots x_n), (1, 0 \dots 0) >= x_1 = 0$$

IV.1.8 Kor: duale Basen

Sei (V,W,φ) ein duales Paar. Für jede Basis $\{c_1 \dots c_n\}$ aus W gibt es eine Basis $\{b_1 \dots b_n\}$ aus V, welche „dual“ zu $\{c_1 \dots c_n\}$ ist:

$$\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$$

IV.1.9 Bew:

Für $\{c_1 \dots c_n\}$ aus W eine Basis. Sei $\{c_1^* \dots c_n^*\}$ die duale Basis aus W^*

$$F_\varphi : V \to W^* \text{ Iso}$$

Sei $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*),\ \{b_1 \dots b_n\}$ ist eine duale Basis von V

$$\varphi(b_i, c_j) = \underbrace{F_\varphi(b_i)}_{\substack{\shortparallel \\ c_i^*}}(c_j) = \delta_{ij}$$

$\square$

IV.1.10 Def: Orthogonales Komplement

Sei (V, W, φ) ein duales Paar. $U \subset V$ Unterraum von V.
Definiere

$$U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0\ \forall u \in U\}$$

$U^\perp$ ist ein UVR von W

Bem:

$U^\perp$ ist ein Unterraum von W.

$$(0)^\perp = V$$

$$V^\perp = \{0\},\ \text{weil } \varphi \text{ nicht-ausgeartet ist!}$$

$$U \subset V$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ U}}{(U^\perp)^\perp} = \{v \in V \mid \forall w \in U^\perp\ \varphi(v, w) = 0\} = U$$

IV.1.11 Bew:

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$u \in U \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow \forall w \in U^\perp,\ \varphi(u, w) = 0$$

Sei $v \notin U$.
z.zeigen: $v \notin (U^\perp)^\perp$
Es gibt $G : V \to K$ derart, $G \restriction U = 0,\ G(v) = 1$

$$G \in V^* \simeq W\ F_{\varphi'} \text{ (Isomorphismus)}$$

$$\Rightarrow \exists w \in W \ F_{\varphi'}(w) = G$$

D.h. $\forall z \in V \ G(z) = \varphi'(w,z) = \varphi(z,w)$
$u \in U$
$0 = G(u) = \varphi(u,w) \to w \in U^{\perp}$
$1 = G(u) = \varphi(u,w) \to u \notin (U^{\perp})^{\perp}$ $\square$

IV.1.12 Lemma: zu Quotientenräumen

Sei (V, W, φ) ein duales Paar $U \subset V$ ein UVR
Dann ist $(V/U, U^{\perp}, \tilde{\varphi})$ duales Paar, wobei $\tilde{\varphi}(v+u, w) = \varphi(u,w)$
Insbesondere gilt
$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$

Bew:

Übungsaufgabe
$$(V/U, U^{\perp}, \varphi^{\perp}) \quad \text{ein duales Paar}$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\dim V/U}_{\dim V \ - \ \dim U} = \dim U^{\perp}$$

IV.1.13 wiederholung

$$V, W \text{ endlich, } (V, W, \varphi) \text{ duales Paar}$$
$$\Leftrightarrow \dim V = \dim W = \operatorname{Rg}(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow F_{\varphi} : V \to W^{*} \text{ Isom.}$$
$$v \mapsto F_{\varphi}(v), \ W \to K, \ w \mapsto \varphi(v,w)$$
$$\Leftrightarrow \varphi \text{ nicht-ausgeartet ist: } \varphi(v, -) : W \to K \text{ die Null Abbildung} \Rightarrow v = 0$$
$$\varphi(-, w) : V \to K \text{ die Null Abbildung} \Rightarrow w = 0$$
$$U \subset V \text{ UR, } U^{\perp} = \{w \in W \setminus \varphi(u,w) = 0\} \text{ UR}$$
$$\to (U^{\perp})^{\perp} = U \to \dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$
$$\mathcal{B} = \{b1 \dots b_n\} \text{ Basis von V}$$
$$\text{ist dual zu der Basis von W } \{c1 \dots c_n\} \text{ falls } \varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$$

IV.1.14 Def: Adjungierte

Sei (V, W, φ) duales Paar und $G : W \to W$ Endomorphismus.
Der *adjungierte Endomorphismus* $G^\top : V \to V$ wird definiert als

$$G^\top : F^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi$$

$$\begin{tikzcd} V & W^* \arrow[l, "F_\varphi^{-1}"'] & W \arrow[d, "G"] \\ V \arrow[u, "G^\top"] \arrow[r, "F_\varphi"'] & W^* \arrow[u, "G^*"'] & W \end{tikzcd}$$

$G^*(\Phi) = \Phi \circ G \qquad \Phi : W \to K$

Bem:

G^* ist eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi(G^\top(v), w) \overset{(*)}{=} \varphi(v, G(w)) \qquad \forall v \in V,\ \forall w \in W$$

IV.1.15 Bew: Eindeutigkeit

Falls $G : V \to V$ die selbe Eigenschaft erfüllt

$$\begin{aligned} \varphi(G_1(v) - G^*(v), w) = \ & \varphi(G(v), w) \quad - \quad \varphi(G^\top(v), w) \\ & \quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ & \varphi(v, G(w)) \quad - \quad \varphi(v, G(w)) \quad = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow G_1(v) = G_1^\top \Rightarrow G_1 = G^\top\ \forall v \in V,\ \forall w \in W\ \varphi$ nicht-ausgeartet

zu Zeigen: $G^\top$ die Eigenschaft (x) besitzt.
Seien $\underline{v \in V,\ w \in W}$

$$\varphi(v, G(w)) = F_\varphi(v)(G(w))$$

$$\varphi(v, G(w)) = \underbrace{\overbrace{F_\varphi(v)}^{\in W^*} \circ G}_{G^*(F\varphi(v))}(w)$$

$$\begin{matrix} G^\top(v) = v_1 \\ \| \\ F_\varphi^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi(v) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow G^* \circ F_\varphi(v) = F_\varphi(w)$$

$\rightarrow \forall w \in W:$

$$\begin{array}{ccc} F_\varphi(v_1)(w) & = & \overset{\varphi(G^*(v),w)}{\overset{\|}{\varphi(v_1, w)}} \\ \| & & \\ \underbrace{G^* \circ F_\varphi(v)(w)}_{\in W^*} & = & \underline{\varphi(v, G(w))} \end{array}$$

$\square$

IV.2 Euklidische Räume

IV.2.1 Def: Symmetrie

Eine Bilinearform $\varphi : V \times V \rightarrow K$ ist symmetrisch, falls $\varphi = \varphi'$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in V : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

Bem:

Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V und A die Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

$$\varphi \text{ symmetrisch } \Leftrightarrow A = A^\top = (\varphi(b_i, c_j))$$

IV.2.2 Bew:

$\boxed{\Rightarrow}$ Siehe <u>Übungsblatt</u>
$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= u^\top \cdot A \cdot v \\ &= (A^\top \cdot u)^\top \cdot v \\ &= v^\top \cdot \left((A^\top \cdot u)^\top\right)^\top \\ &= v^\top \cdot \underset{\underset{A}{\|}}{A^\top} \cdot u \qquad = \varphi(v, u) \end{aligned}$$

Bem:

φ symmetrisch
$\Rightarrow$ Der Begriff der Orthogonalität ist wohldefiniert und vor allem symmetrisch

$$\begin{array}{c} u \perp v \Leftrightarrow \varphi(u,v) = 0 \\ \Updownarrow \\ v \perp u \Leftrightarrow \varphi(v,u) = 0 \end{array}$$

Beispiel

$\mathbb{R}^n$

$$\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ smmetrisch}$$

$$\varphi(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

IV.2.3 Def: Quadratische Form

Sei $\varphi : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform.
Die zugehörige quadratische Form:

$$\begin{aligned} g : V &\to K \\ v &\mapsto \varphi(v,v) \end{aligned}$$

Anmerkung:

$\dim V = n$
Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis $\to \varphi$ hat Darstellungsmatrix $\underline{\underline{A}}$ bzgl. $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} g(v) \text{ auch } q(v) &= \varphi(v,v) - \varphi(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_j b_j) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j \end{aligned}$$

Folgerung:

(char $K \neq 2$)
Jede symmetrische Bilinearform ist durch ihre quadratische Form eindeutig

bestimmt.

$$\begin{aligned} q(u+v) &= \varphi(u+v, u+v) \\ &= \varphi(u,u) + \varphi(v,u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,v) \\ &= \underbrace{\varphi(u,u)}_{q(u)} + \underbrace{\varphi(v,v)}_{q(v)} + 2\varphi(u,v) \\ q(u-v) &= \cdots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u,v) \end{aligned}$$

Insb:

$$\varphi(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$$

IV.2.4 Def: Definitheit

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-VR. und $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ Symmetrische Bilinearform. Wir sagen, φ ist:

1. positiv semidefinit, falls $\varphi(u,u) \geq 0 \ \forall u \in V$
2. negativ semidefinit, falls $\varphi(u,u) \leq 0 \ \forall u \in V$
3. positiv definit, falls φ pos. semidefinit ist und $\varphi(v,v) > 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$
4. negativ definit, falls φ neg. semidefinit ist und $\varphi(v,v) < 0 \ \forall v \neq 0$
5. indefinit sonst.

Beispiele:

(a) Standard Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist positiv def.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1$ ist positiv semidefinit aber nicht pos.def. $\varphi((0,1),(0,1)) = 0$

(c) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$ indefinit

Bem:

$$\varphi \text{ ist posit (semi)-def.}, \ -\varphi \text{ ist neg (semi)-def.}$$

IV.2.5 Def: Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-VR V ist eine *positiv definite symmetrische Bilinearform*: $\varphi(u,v) \xrightarrow{\text{bijektion ???}} \langle u, v \rangle$

IV.2.6 Def: Euklidischer Raum

$(V, \langle\ ,\rangle)$ ist ein euklidischer Raum, wenn V ein $\mathbb{R}$-VR endlichdimensional und $\langle\ ,\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

IV.2.7 Def: Norm

Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-VR V ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ derart, dass:

1. $||v|| \geq 0, \ = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\lambda \cdot v|| = |\lambda|\ ||v||$
3. Dreiecksungleichung $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

$(V, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{R}$-VR <u>ist</u>

Beispiele: $\mathbb{R}^n$

(a) Euklidische Norm $||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

(b) $||\vec{x}||_{\infty\downarrow} = \sum |x_i|$

(c) $||\vec{x}||_{\infty\geq} = \underbrace{\max}_{1\leq i\leq n} |x_i|$

IV.2.8 Def: Norm über Skalarprodukt

Sei $(V, <,>)$ ein euklidischer Raum und definiere $||\ || : V \to \mathbb{R}$,
$v \mapsto \sqrt{< v, v >}$ wohldefiniert. Wir wollen Zeigen, dass es eine Norm auf V <u>induziert</u>.

IV.2.9 Lemma:

(Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

$$\forall v, w \in V$$

$$| < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$$

IV.2.10 Bew:

Falls $w = 0 \to$ ok!
OBdA ist $w \neq 0 \to ||w|| > 0$
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

$$0 \leq < v - \lambda w, v - \lambda w > = ||v||^2 + \lambda^2 ||w||^2 - 2\lambda < v, w >$$

Insb:

$$2\lambda < v, w > \leq ||v||^2 + \lambda^2 ||w||^2$$

Falls

$$\lambda = \frac{< v, w >}{\underbrace{||w||^2}_{\neq 0}} \in \mathbb{R}$$

$$2\frac{< v, w >^2}{||w||^2} \leq ||v||^2 + \frac{< v, w >^2}{||w||^2} \Rightarrow \frac{< v, w >^2}{||w||^2} \leq ||v||^2$$

$$\to < v, w >^2 \leq ||v||^2 \cdot ||w||^2$$

$$\to | < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$$

$\square$

Folgerung:

$(V, <,>)$ euklidischer Raum

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{< v, w >} \end{aligned}$$

ist eine Norm.

IV.2.11 Bew:

1) klar

2) $||\lambda \cdot v|| = \sqrt{< \lambda v, \lambda v >} = \sqrt{\lambda^2 < v, v >} = |\lambda| \sqrt{< v, v >} = |\lambda| \cdot ||v||$

3) Es genügt zu zeigen, dass $||u+v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2$

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= < u+v, u+v > \\ &= < u,u > + < v,v > + 2 < u,v > \\ &\leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||\,||v|| \\ &\leq (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

IV.2.12 Def: Winkel zwischen Vektoren

$(V, <,>)$ euklidischer Raum

$$-1 \leq \underbrace{\frac{< u,v >}{||u||\,||v||}}_{\substack{|| \\ \cos\theta}} \leq 1$$

$\theta \in [0, \pi]$ eindeutig <u>bestimmt</u>.
θ ist der Winkel zwischen u und v

Bem:

$u \perp v \Leftrightarrow < u,v >= 0 \Leftrightarrow$ der Winkel $\frac{\pi}{2}$<u>ist</u> $\quad u \uparrow\!\rightarrow v$

IV.2.13 Wiederholung

$\varphi : V \times V \to K$ symmetrisch gdw $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$
$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V
$A = (\varphi(b_i, b_j))$ Darstellungsmatrix von φ
φ symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^\top$
$g(v) = g(\sum(\lambda_i b_i)) = \sum a_{ij}\lambda_i\lambda_j$
char $k \neq 2 \to q$ bestimmt φ
$\varphi(u,v) = \frac{q(u+v)-q(u-v)}{4}$
φ symmetrisch ist positiv definit, falls $\varphi(u,u) = q(u) \geq 0 \leftarrow$ Körper ist $\mathbb{R}$
$q(u) = \varphi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$
Ein Skalarprodukt auf einen $\mathbb{R}$-VR V ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\varphi(u,v) \to < u,v >$
$||v|| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{< v,v >}$ Norm.

1) $||v|| \geq 0 (= 0 \Leftrightarrow v = 0)$

2) $||\lambda v|| = |\lambda|\,||v||$

3) $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $| < v, v > | \leq ||v|| \cdot ||w||$

$$-1 < \underbrace{\frac{< v, w >}{||v|| \ ||w||}}_{\substack{|| \\ \cos\theta,\ \theta\in[0,\pi]}} < 1$$

θ ist winkel zwischen v und w.

$v \perp w$ (orthagonal)

$\Leftrightarrow < v, w >= 0$

$\Leftrightarrow$ Der Winkel ist $\frac{\pi}{2}$

IV.2.14 Satz: (des Pythagoras)

$(V, < . >)$ endlichdimensionaler Raum

$v \perp w \Leftrightarrow ||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$

IV.2.15 Bew:

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= < v+w, v+w > \\ &= < v, v > + < w, w > +2 < v, w > \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 + 2 < v, w > \\ &\text{mit: } v \perp w \Leftrightarrow < v, w >= 0 \Leftrightarrow \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 \end{aligned}$$

IV.2.16 Def: Orthogonal- und Orthonormalbasis

$\varphi : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform
Ein orthogonales System bzgl. φ ist eine Kollektion M von Vektoren $0 \notin M \quad u, v \in M$ verschieden $\varphi(u, v) = 0$
Ein orthonormales System M ist eine Kollektion von Vektoren
$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & v \neq u \\ 1 & u = v \end{cases}$

Dementsprechend definieren wir Othogonalbasis und Orthonormalbasis (ONB)

Beispiel: Standardbasis $\{o_1, \dots o_k\}$ $\underbrace{(\mathbb{R}^n, < . >)}_{\text{standard skalarprodukt}}$

IV.2.17 Satz: φ symmetrisch $\Rightarrow$ diagonalisierbar

(Char$(K) \neq 2$)

Jede Symmetrische Bilinearform φ auf einem endlich dimensionalen K-VR V läßt sich bei einer geeigneten Basisauswahl durch eine Diagonalmatrix darstellen. Ferner ist φ nicht-ausg. $\Leftrightarrow$ kein Eigenwert der Matrix null ist.

Bem:

Es genügt zu zeigen, dass (V, φ) eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ besitzt welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.
Dann ist die Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\{b_1, \ldots, b_n\}$

$$\begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi(b_2, b_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

Sei $q : V \to K \ v \mapsto \varphi(u, v)$ die zugehörige quadratische Form
Falls $q(v) = 0 \ \forall v \in V$
$\to \varphi(u, v) = 0 \ \forall u, v \in V$
$\to$ Jede Basis von V besteht aus paarweise orthogonalen Vektoren.

Sonst, existiert $b_1 \in V \setminus \underset{\substack{\| \\ \varphi(b_1,b_1)}}{g(b_1)} \neq 0, \quad F : V \to K, \ v \mapsto \varphi(v, b_1)$

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ \dim\ker(F)=n-1}}{\mathrm{Im}(F)} \quad = K \text{ als } \underline{K\text{-VR}}$$

$$\ker(F) = \{v \in V \setminus \varphi(v_1, b_1) = 0\} = \{v \in V \setminus v \perp b_1\} = \ \mathrm{Span}(b_1)^{\perp}$$

Induktion auf die Dimension von $V \Rightarrow$ Es existiert eine Basis $b_1 \ldots b_n$ von $\ker(F)$ welches aus paarweise orthogonal Vektoren besteht.

Die Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist eine orthogonale Basis von $\underline{\underline{V}}$.

Bem:

Die Eigenwerte der Matrix hängen nicht von der Basis ab
$\to$ Eigenwerte sind $\underset{\substack{\| \\ \mu_1}}{\varphi(b_1, b_1)}, \ldots, \underset{\substack{\| \\ \mu_n}}{\varphi(b_n, b_n)}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Angenommen, dass

$$\mu_j = \varphi(b_j, b_j) = 0$$

wäre

$$\varphi(b_j, b_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

i beliebig

$$\varphi(b_j, -) : V \to K \text{ ist die triviale Abbildung } \Rightarrow \text{ Wid! } b_j \neq 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig.

Zu Zeigen: $\varphi(v, -) : V \to K$ nicht trivial ist

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \to \exists i / \lambda_i \neq 0$$

$$\varphi(v, b_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(b_j, b_i) = \underset{\overset{0}{\nparallel}}{\lambda_i}\,\underset{\overset{0}{\nparallel}}{\varphi}(b_i, b_i) \neq 0$$

IV.2.18 Kor:

(char $k \neq 2$)
Falls in K jedes Element ein Quadrat ist, dann lässt sich jede symmetrische Bilinearform durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ darstellen.

IV.2.19 Bew:

Es existiert eine Orthogonalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ für $\varphi : V \times V \to K$.

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) \neq 0 \\ b_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\{c_1, \ldots, c_n\}$ ist immer noch eine Basis.
OBdA können wir annehmen, dass $c_1, \ldots, c_n$ ist so umgeordnet, dass

$$\begin{aligned} \varphi(c_i, c_i) &= 1 \qquad i \leq k \\ \varphi(c_j, c_j) &= 0 \qquad j > k \end{aligned}$$

Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\{c_1, \ldots, c_n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}}\right\} k \text{ mal} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \ddots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n-k \text{ mal} \end{array}$$

IV.2.20 Kor: (Sylvester)

Jede Symm. Bilinearform φ auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-VR läßt sich bei geeigneter Basisauswahl durch eine Matrix der form

$$\begin{pmatrix} p = \left\{ \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \right. & & \\ & q = \left\{ \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \right. & \\ & & r = \left\{ \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \right. \end{pmatrix}$$

darstellen. Ferner hängen die Zahlen p, g und r nur von φ ab.

IV.2.21 Bew:

Sei $\{b_1 \dots b_n\}$ eine Orthogonalbasis für φ

$$c := \begin{cases} \frac{b_1}{\sqrt{\varphi(b_i,b_i)}} & \text{falls } \varphi(b_i,b,i) > 0 \\ \frac{b_i}{\sqrt{-\varphi(b_i,b_i)}} & \text{falls } \varphi(b_i,b_i) < 0 \\ b_i & \underline{\text{sonst}} \end{cases}$$

Nach Umordnen der Darstellungsmatrix

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\right\}p \\ \\ \left.\right\}q \\ \\ \left.\right\}r \end{array} \end{array}$$

$\square$

Bem:

$\varphi \restriction \operatorname{Span}(c_1, \dots, c_p) \times \operatorname{Span}(c_1, \dots, c_p)$ ist positiv definit.

IV.2.22 Bew: falsch:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \varphi(c_i, c_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$$

Sei $U \subset V$ der größte UR von V derart, dass $\varphi \restriction U \times U$ positiv definit ist.
$\operatorname{span}(c_1, \dots, c_p) \subset U$
zu zeigen $\boxed{p = \dim U}$ ✓
Sonst $U \cap \operatorname{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \neq 0$
Sei

$$0 \neq v \in U \cap \operatorname{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \quad v = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i c_i$$

da $v \in U \varphi \restriction_{U\times U}$ positiv definit

$$0 \leq \varphi(v,v) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i^2 \overbrace{\varphi(c_i,c_i)}^{\leq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow v = 0 \rightarrow$ <u>Wid</u>.
g, r <u>bestimmen</u>
$\mathrm{Rg}(\varphi) = \underline{p} + q \rightarrow$ ist eindeutig <u>bestimmt</u>
$r = n - \mathrm{Rg}(\varphi) \rightarrow$ eindeutig <u>bestimmt</u>

IV.2.23 Def: Signatur

Signatur $(\varphi) = \underline{\underline{q - p}}$

IV.2.24 Wiederholung

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
$((x_1, y_1), x_2, y_2)) \mapsto 2x_1x_2 - y_1y_2$
φ ist positiv definit auf span$((1,0))$ $\varphi((\lambda,0),(\lambda,0)) = 2\lambda^2 \geq 0$
φ ist positiv definit auf span$((1,1))$ $\varphi((\lambda,\lambda),(\lambda,\lambda)) = \lambda^2 \geq 0$
φ ist nicht positiv definit auf span$((1,0)) +$ span$((1,1)) = \mathbb{R}^2$
$\varphi((0,1),(0,1)) = -1$

IV.2.25 Bew: Kor Sylvester

Wir wollen p eindeutig bestimmen.
φ ist positiv definit auf span$(c_1, \ldots, c_p)$
Sie

$$h = \max\{\dim(U)/U \subset V \varphi \restriction U \times U \text{ pos. definit ist}\}$$

Sei

$$U \subset V \text{ UR der Dimension h sodass } \varphi \restriction U \times U \text{ pos. definit ist.}$$

Wir zeigen: $U \cap \mathrm{span}(c_{p+1}, \ldots, c_n) = \{0\}$

$$\rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ 0}}{\dim(U)} + \overset{\substack{\dim \mathrm{span}(c_{p+1},\ldots,c_n) \\ \|}}{n - p} = \underbrace{\dim \underbrace{U + \mathrm{span}(c_{p+1}, \ldots, c_n)}_{\subset V}}_{\leq n}$$

$\Rightarrow h \leq p$

Kapitel V

Unitäre Räume

V.0.1 Def: unitärer Raum

Ein unitärer Raum V ist ein $\mathbb{C}$-VR zusammen mit einem komplexen **Skalarprodukt** $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, wobei $\overline{a + bi} = a - bi$
2. $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$
3. $\langle \lambda \cdot v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$
4. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$ und ferner $\langle v, v\rangle > 0$ für $v \neq 0$

Beispiel $\mathbb{C}^n$ $\quad \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$

Bem:

Die Abblidung $\langle\ ,\ \rangle$ ist nicht bilinear sondern **hermitesch sesquilinear**

$$\langle v, \lambda w + \mu w'\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \overline{\mu}\langle v, w'\rangle$$

V.0.2 Bew:

$$\begin{aligned}\langle v, \lambda w + \mu w'\rangle &= \overline{\langle \lambda w + \mu w', v\rangle} \\ &= \overline{\lambda}\overline{\langle w, v\rangle} + \overline{\mu}\overline{\langle w', v\rangle} = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \overline{\mu}\langle v, w'\rangle\end{aligned}$$

Bem:

Für einen unitären Raum V ist

$$|| \ \ || : V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \sqrt{< v, v >}$$

1) $||v|| \geq 0 \quad = 0 \leftrightarrow v = 0$

2) $||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \quad \lambda \in \mathbb{C}$

3) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Bem:

$(V, \langle \ , \ \rangle)$ unitärer Raum $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Orthogonalität}\\ \text{Orthogonales System}\\ \text{Orthonormales System}\\ \text{Orthogonalbasis}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{Wir können die Begriffe hier \underline{verwenden}.}$$

V.0.3 Def: Orthonormalbasis

Sei $(V, \langle \ , \ \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Eine Orthonormalbasis von V ist eine Basis $\mathcal{B} = \{b_i\} \quad | \quad b_i \perp b_j \quad i \neq j \quad ||b_i|| = 1$

Bem:

Jedes orthogonales System ist linear unabhängig.

V.0.4 Bew:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$$

$$\langle \sum \lambda_i b_i, b_j \rangle \qquad = 0$$
$$||$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle = \sum \lambda_i \underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{\langle b_i, b_j \rangle}$$

$\square$

V.0.5 Lemma: Orthonormalbasen

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum und $\{b_1, \dots b_n\}$ eine ONB. Dann

1. $$\forall v \in V \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i$$

2. $$\begin{matrix} v = \sum \lambda_i b_i \\ w = \sum \mu_i b_i \end{matrix} \Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum \lambda_i \overline{\mu_i}$$

3. $F : V \to V$ Endomorphismus. Dann ist die Darstellungsmatrix A von F bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$ gegeben durch $a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$

V.0.6 Bew:

1) $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \qquad \langle v_i, b_j \rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle}_{\substack{\| \\ \lambda_j}}$

2) $\langle \sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\mu}_j \overbrace{\langle b_i, b_j \rangle}^{\substack{\delta_{ij} \\ \|}} = \sum \lambda_i \overline{\mu}_i$

3) $A = (\underbrace{\quad a_{ij} \quad}_{F(b_1) \dots F(b_n)})$ a_{ij} ist die Koordinate von $F(b_j)$ bzgl. b_i

$\Downarrow$ 1)
$a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$

V.0.7 Satz: (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum. Gegeben $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. dann gibt es ein orthonormalsystem $\{e_1, \dots, e_n\}$ derart, dass

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$$

Insb., falls V endlichdim ist, besitzt V eine ONB.

V.0.8 Bew:

Zwei Schritte:

- Aus $v_1 \dots v_n$ konstruieren wir eine Basis welche aus orthogonalen Vektoren besteht
- Dann normalisieren: $e_1 \dots e_n$ werden rekursiv definiert

$$e_1' = v_1 \xrightarrow{v_1 \neq 0} e_1 = \frac{e_1'}{||e_1'||}$$

Angenommen $e_1 \dots e_n$ wurden konstruiert, so dass

$$e_i \perp e_j \quad i \neq j \quad ||e_1'|| = 1$$

und $\text{span}(e_1 \dots e_n) = \text{span}(v_1 \dots v_n)$ Wir wollen

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

$e_{k+1}' \neq 0 \to$ sonst ist $v_{k+1} \in \text{span}(e_1, \dots, e_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ Wid! □

Setze

$$e_{k+1} = \frac{e_{k+1}'}{||e_{k+1}'||}$$

zu zeigen:

$$e_{k+1} \perp e_{j_{j \leq k}} :$$

$$\begin{aligned}
< e_{k+1}, e_j > &= \frac{1}{||e_{k+1}'||} < v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, e_i >, e_j > \\
&= \frac{1}{||e_{k+1}'||} \left(< v_{k+1}, e_j > - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, e_i >< e_i, e_j >}_{< v_{k+1}, e_j >} \right) = 0 \checkmark
\end{aligned}$$

$$\text{span}(e_1 \dots e_{k+1}) = \text{span}(v_1 \dots v_{k+1})$$

$$e_{k+1} \in \text{span}(v_{k+1}, e_1 \dots e_k) = \text{span}(v_{k+1}, v_1 \dots v_k)$$

$$v_{k+1} = ||e_{k+1}|| \; e_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_j \rangle \in \text{span}(e_1 \dots e_{k+1})$$

V.0.9 Kor: Orthonormalsysteme

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidisch oder unitär endlichdimensional und $D \subset V$ ein Orthonormalsystem. Dann $\exists$ ONB $B \supset D$

Bem:

Sei $D = \{v_1, \dots, v_k\}$ und ergänze zu einer Basis $\{v_1 \dots, v_n\}$ von V. $\rightarrow$ Konstruiere eine ONB $\{e_1, \dots, e_n\}$
zu zeigen: $e_i = v_i \quad i \leq k$

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1|| = 1} = v_1$$

Annahme $e_j \equiv v_j \qquad j \leq i$

$$e_{i+j} \frac{e'_{i+1}}{||e'_{i+1}||} = v_{i+1} \qquad e'_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \underbrace{\langle v_{i+1}, e_j \rangle}_{\substack{|| \\ 0}} \overset{\substack{v_j \\ ||}}{e_j}$$

V.0.10 Def: Orthogonale Teilmengen

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidisch und unitär
Zwei Teilmengen A,B von V sind Orthogonal, $A \perp B$ falls $v \perp w \quad \forall v \in A,\ \forall w \in B$

Bem:

$A \perp B \Leftrightarrow \mathrm{span}(A) \perp \mathrm{span}(B)$
in Blatt 7 Aufgabe 3 schon gezeigt

V.0.11 Def: Orthogonale Teilmenge

$A \subset V$ Teilmenge

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \{v \in V \mid \{v\} \perp A\} \\ &= \{v \in V \mid \forall w \in A\ :\ v \perp w\} \end{aligned}$$

Bem:

$A^{\perp}$ ist ein Unterraum von V

Bem:

$$A^\perp = \mathrm{span}(A)^\perp$$

V.0.12 Bew:

$\boxed{\subset}$

$$A^\perp \perp A \qquad \Downarrow$$
$$A^\perp \subset \mathrm{span}(A)^\perp \Leftarrow A^\perp \perp \mathrm{span}(A)$$

$\boxed{\supset}$

$$v \in \mathrm{span}(A)^\perp \Rightarrow \forall w \in \overbrace{\mathrm{span}(A)}^{\supset A}$$
$$v \perp w \Rightarrow \forall w \in A \quad v \perp w$$
$$\Rightarrow v \in A^\perp$$

V.0.13 Satz: Orthogonales Komplement

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidisch oder unitär und $U \subset V$ endlichdim. UR

$$\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$$

V.0.14 Bew:

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ nicht ausgeartet !
Es genügt zu zeigen, dass $V = U + U^\perp$
<u>1. Fall</u> $U = \{0\} \to$ ok!
<u>2. Fall</u> $U \neq \{0\}$
$\Downarrow$ U endlichdim. Gram-Schmidt

$$\exists\{b_1, \ldots, b_n\} \quad \text{ONB von } U$$

Sei $v \in V$ beliebig.

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i\rangle b_i}_{\in U} + \overbrace{\left(v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i\rangle b_i\right)}^{w}$$

Wir müssen zeigen, dass $w \in U^\perp$

Es genügt, wenn wir zeigen, dass $w \perp b_i \quad 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
\langle w, b_i \rangle &= \langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i \rangle b_i, b_j \rangle \\
&= \langle v, b_i \rangle - \sum_{i=1}^{k} \overbrace{\langle v, b_i \rangle}^{\in K} \quad \underbrace{\begin{matrix} \langle b_i, b_j \rangle \\ \| \end{matrix}}_{\begin{matrix} 0 & 1 \\ i \neq j & i = j \end{matrix}} \\
&= \langle v, b_i \rangle \quad - \quad \begin{matrix} \| \\ \langle v, b_j \rangle \end{matrix} = 0
\end{aligned}$$

V.0.15 Lemma:

$(V, \langle \ , \ \rangle)$ euklidisch oder unitär
$U \subset V$ endlichdim. UR

$$(U^\perp)^\perp = U$$

V.0.16 Bew:

$\boxed{\supset}$

$$U \perp U^\perp \Rightarrow U \subset (U^\perp)^\perp$$

$\boxed{\subset}$
Sei $v \in (U^\perp)^\perp$

$$\text{mit } V = U \oplus U^\perp \Rightarrow v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

Es genügt zu zeigen, dass $w = 0 \Rightarrow v = u \in U$

$$w = \underbrace{v}_{\in (U^\perp)^\perp} - \underbrace{u}_{\in U \subset (U^\perp)^\perp} \in \underbrace{(U^\perp)^\perp \cap U^\perp}_{=0} \Rightarrow \text{ ok !}$$

V.0.17 Def: orthogonale Projektion

Sei $U \subset V$ UR
Wir definieren die orthogonale Projektion von v auf U als den Vektor $u \in U$ derart, dass $v = u + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

Bem:

Falls u existiert $\Rightarrow$ ist er eindeutig bestimmt.

$$\underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in U^\perp} = v = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in U^\perp} \;\Rightarrow\; u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in \underbrace{U \cap U^\perp}_{=\{0\}}$$

Bem:

Falls $U \subset V$ endlichdim. $\Rightarrow$ ist die Projektion auf U wohldefiniert
$\forall v \in V$ existiert $Pr|_u(v)$ derart, dass $v = Pr|_u(v) + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

V.0.18 Satz: Projektion

Sei $U \subset V$ Unterraum, $v \in V\ u \in U$
sind folgende Aussagen äquivalent

a) $Pr|_u(v) = u$

b) $\forall u_1 \in U \setminus \{0\} \quad ||v - u_1|| > ||v - u||$

V.0.19 Bew:

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Es kommt.
$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ $\quad v = u + (v - u)$
Es genügt zu zeigen, dass $v - u \in U^\perp$
Sonst, $\exists u' \in U \mid \lambda = \langle v - u, u' \rangle \neq 0 \Rightarrow u' \neq 0 \Rightarrow$ OBdA $||u'|| = 1$
Sei $u + \lambda \cdot u' \in U \setminus \{u\}$

$$||v - u||^2 < ||\underbrace{v - (u + \lambda u')}_{||}||^2$$

$$\langle v - u - \lambda u', v - u - \lambda u' \rangle$$

$$= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \langle u', v - u \rangle}_{=\overline{\lambda}} - \underbrace{\overline{\lambda} \langle v - u, u' \rangle}_{=\lambda} + \lambda\overline{\lambda} \underbrace{||u'||^2}_{=1}$$

$$= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{||\lambda||^2} - \lambda\overline{\lambda} + \lambda\overline{\lambda} < ||v - u||^2 \quad \text{Wid !}$$

Kapitel VI

Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen

Bem:

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endlichsim. euklidischer Raum
$\to (V, V, \langle , \rangle)$ ein duales Paar.
Sei $v \in V \quad \langle v, - \rangle : V \to \mathbb{R}$ ist nichttrivial, falls $v \neq 0$

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0 \ , \quad \text{falls } v \neq 0$$

Falls V endlichdim. unitärer Raum ist, dann ist

$$\langle v, - \rangle : V \to \mathbb{C} \qquad \text{nichttrivial !!}$$

$$\begin{aligned} &\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle \neq \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle v, w' \rangle \\ &\text{aber } = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle + \overline{\mu} \langle v, w' \rangle \end{aligned}$$

Lösung:
Wir definieren eine neue Struktur auf V als $\mathbb{C}$-VR

$$\lambda *_{\text{konj}} \cdot v = \overline{\lambda} \cdot v$$

Somit ist $(V, V_{\text{konj}}, \langle , \rangle)$ ein Duales Paar weil

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0 \text{ für } v \neq 0$$

Folgerung:
Sei V endlichdim. unitärer oder euklidischer Raum. Jeder Endomorphismus

$F: V \to V$ besitzt einen *adjungierten Endomorphismus* $F^t : V \to V$, sodass $\forall v, w \in V$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^t(v), w \rangle$$

Alternative Beschreibung:
Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB von V.
Seien $v, w \in V \to w = \sum_{i=1}^{n} \underset{\langle w, b_i \rangle}{\underset{\parallel}{\lambda_i}} \ = b_i$

$$\begin{aligned}
\langle v, F(w) \rangle &= \langle v, \sum_{i=1}^{n} \langle w, b_i \rangle b_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle w, b_i \rangle} \langle v, F(b_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle v, F(b_i) \rangle \langle bi, w \rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, F(b_i) \rangle \cdot b_i, w \rangle = \langle F^t(v), w \rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F^t(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, F(b_i) \rangle b_i$$

VI.0.1 Def: adjungierte Matrix

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$a_{ij} = \mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Die adjungierte Matrix $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ ist die Matrix

$$\mathcal{A}^* = (\overline{a_{ji}})$$

Bem:

$\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$
$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^t$
Leicht zu zeigen:
$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

$(\lambda \cdot \mathcal{A})^* = \overline{\lambda} \cdot \mathcal{A}^*$
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \cdot \mathcal{A}^*$

Widerholung:

$$(V, \langle\ \cdot\ \rangle)\text{unitärer/euklidischer Raum}$$

$$A \subset V \text{ Teilmenge}$$

$$A^{\perp} = \{v \in V \mid \forall w \in A\ \langle v, w\rangle = 0\}$$

Unterraum

$$U \text{ UR von } V \to U \cap U^{\perp} = \{0\}$$

Insbensondere falls U endlich dim. $\Rightarrow V = U \oplus U^{\perp}$
Orthogonale Projektion auf U

$$Pr|_U : V \to U,\ v \mapsto u \mid v = u + w \in U^{\perp}$$

$$\forall u \in U \mid u_1 \neq Pr|_U(v) \Leftrightarrow ||v - u_1|| > ||v - u||$$

$$F : \underbrace{V}_{\text{endlichdim.}} \to V \text{ Endomorphismus,}$$

dann existiert. $F^t : V \to V$ adjungierter Endomorphismus

$$\underline{\langle v, F(w)\rangle = \langle F^t(v), w\rangle} \quad \forall v, w \in V$$

Def: adjungierte Matrix

$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$
Die adjungierte Matrix A^* ist $A^* = (\overline{a_{ji}})$
$K = \mathbb{R} \to A^* = A^{\top}$
$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$
$(\lambda \cdot A)^* = \overline{\lambda} \cdot A^*$

Bem:

Falls A regulär ist, dann ist $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ weil $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b} \quad \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

VI.0.2 Lemma: adjungierte Abbildung

Sei $F : V \to V$ Endomorphismus eines euklidischen bzw. unitären endlichdim. Raumes V und A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der orthonormalen Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_n\}$
Dann hat $F^t : V \to V$ die Darstellungsmatrix A^* bzgl. $\mathcal{D}$ und $\mathcal{B}$.

VI.0.3 Bew:

$$F^t(d_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle F^t(d_i), b_j \rangle \cdot b_j$$

$$F^t \to C = (c \cdot j) \quad F^t(d_j) = \sum c_{ij} b_j \qquad \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (c_{ij}) \to F(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\langle F(b_j), d_i \rangle}{\underset{||}{a_{ij}}} \quad d_i$$

$$\overline{a_{ij}} = \langle \overline{F(b_j), d_i} \rangle = \langle d_i, F(b_j) \rangle \overset{\text{Def. von } F^t}{=} \underline{\langle F^t(d_i), b_j \rangle} = c_{ji}$$

□

VI.0.4 Def: Normale Homomorphismen

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ endlichdim., euklidisch, unitär
$F : V \to V$ ist <u>normal</u>, falls

$$F \circ F^t = F^t \circ F$$

VI.0.5 Prop:

Folgende Aussagen sind Äquivalent:

a) $F : V^t$ ist normal

b) $\forall v, w \in V \quad \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^t(v), F^t(w) \rangle$

($F^\top = F^t$ ab hier ist meist F^t gemeint nicht $F^\top$ was ja transformation war)

VI.0.6 Bew:

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$

$$
\begin{aligned}
\langle F(v), F(w)\rangle &\overset{\text{Def von } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w\rangle \overset{\text{Normalität}}{=} \\
&= \langle F(F^\top(v)), w\rangle \\
&= \overline{\langle w, F(F^\top(v))\rangle} \\
&\overset{\text{Def von } F^\top}{=} \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v)\rangle} \\
&= \langle F^\top(v), F^\top(w)\rangle
\end{aligned}
$$

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$

Zu Zeigen: $F \circ F^\top(v) = F^\top \circ F(v) \quad \forall v \in V$
Oder Äquivalent dazu, dass

$$F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall w \in V \quad \langle F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v), w\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad\qquad \langle F \circ F^\top(v), w\rangle = \langle F^\top \circ F(v), w\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\langle F^\top \circ F(v), w\rangle & = & \langle F(v), F(w)\rangle \\
\| & & \| \\
\langle F \circ F^\top(v), w\rangle & & \langle F^\top(v), F^\top(w)\rangle \\
\| & & \| \\
\overline{\langle w, F \circ F^\top(v)\rangle} & = & \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v)\rangle}
\end{array}
$$

Bem:

$F : V \to V$

mit Darstellungsmatrix A bzg. der ONB $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von $\underline{V}$

$F^\top : V \to V$ hat Darstellungsmatrix A^*

$$
\begin{array}{ccc}
F^\top \circ F & \to & A^* \cdot A \\
\| & & \| \\
F \circ F^\top & \to & A \cdot A^*
\end{array}
$$

VI.0.7 Def: Normale Matrix

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ ist normal, falls $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

Folgerung:

F ist normal gdw. F eine normale Darstellungsmatrix bzgl JEDER ONB besitz.

VI.0.8 Lemma: adjunkte Eigenwerte

$F : V \to V$ Endomorphismus normal.
$v \in V$ ist ein Eigenvektor von F bzgl λ gdw v ein Eigenvektor von F^t bzgl. $\overline{\lambda}$

VI.0.9 Bew:

der Abstand von $F(v)$ und $\lambda \cdot v$

$$
\begin{aligned}
||F(v) - \lambda \cdot v||^2 &= \langle F(v) - \lambda v, F(v) - \lambda v\rangle \\
&= \underset{\substack{\| \\ \langle F^\top(v), F^\top(v)\rangle}}{\langle F(v), F(v)\rangle} - \overline{\lambda}\underset{\substack{\| \\ \langle F^\top(v), v\rangle}}{\langle F(v), v\rangle} - \lambda\underset{\substack{\| \\ \langle F^\top(v), v\rangle}}{\langle v, F(v)\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle \\
&= \langle F^\top(v), F^\top(v)\rangle - \overline{\lambda}\overline{\langle F^\top(v), v\rangle} - \langle F^\top(v), \overline{\lambda}\cdot v\rangle + \langle \overline{\lambda}v, \overline{\lambda}v\rangle \\
&= \langle F^\top(v), F^\top(v)\rangle - \overline{\lambda}\langle v, F^\top(v)\rangle - \langle F^\top(v), \overline{\lambda}v\rangle + \langle \overline{\lambda}v, \overline{\lambda}v\rangle \\
&= \langle F^\top(v) - \overline{\lambda}v, F^\top(v) - \overline{\lambda}v\rangle \\
&= ||F^\top(v) - \overline{\lambda}\cdot v||^2
\end{aligned}
$$

VI.0.10 Satz: zu char. Polynomen und adjunkten

Sei $F : V \to V$ derart, dass $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) F ist normal

b) Es existiert eine ONB $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V, welche aus Eigenvektoren von F besteht.

Folgerung:

Jeder normaler Endomorphismus eines unitärem/euklidischen Raumes ist diagonalisierbar

VI.0.11 Bew: (Satz)

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Induktion auf $\dim(V)$

$$\underline{\dim V = 1} \rightarrow F \text{ besitzt einen Eigenvektor } o \neq v \text{ zum Eigenwert } \lambda$$

$$||v|| \neq 0 \rightarrow \frac{v}{||v||} \text{ ist auch ein Eigenvektor tu } \lambda$$

$$\left\{ \frac{v}{||v||} \right\} \text{ ist eine ONB von } V!$$

$\boxed{\dim V \geq 2}$

$$\chi_F(T) \text{ zerfällt in Linearfaktoren } (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

Sei $\underset{0}{\underset{\not\Vdash}{b_i}} \in V$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1.

OBdA $\underline{||b_i|| = 187}$

$$V = \operatorname{span}(b_i) \oplus \underset{\operatorname{span}(b_i)^\perp}{\underset{||}{U}} \qquad \dim U = \underline{n-1}$$

$\square$

Beh:

U ist F-invariant
Beweis: Nächste Woche

$$F \restriction_U : U \rightarrow U \quad \text{ ist ein Endomorphismus}$$

Beh:

U ist $F^\top$-invariant und:

$$(F \restriction_U)^\top = F^\top \restriction_U$$

VI.0.12 Bew:

Wenn U $F^\top$-invariant ist wie oben:

$$\forall v_1, v_2 \in U \quad \langle u_1, \underset{F\restriction_U(u_2)}{\underset{||}{F(u_2)}} \rangle = \langle \underset{F^\top\restriction_U(u_1)}{\underset{||}{F^\top(u_1)}}, u_2 \rangle$$

$$\Downarrow$$

Aus der Eindeutigkeit von adjungierten Endomorphismus folgt
$F^\top \restriction_U = (F \restriction_U)^\top$
Insb ist $F \restriction_U$ normal

$$\Downarrow \text{ Induktion}$$

$\exists\{b_2, \ldots, b_n\}$ eine ONB von U welche aus Eigenvektoren von $F \restriction_U$ besteht.
$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ ist eine ONB von Eigenvektoren.
$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB von Eigenvektoren von F

$$F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$$

Setze $G : V \to V,\ b_i \mapsto \overline{\lambda_i} \cdot b_i \to G$ ist eindeutig <u>bestimmt</u>

$$\begin{aligned} G \circ F(b_i) &= G(\lambda_i b_i) = \lambda_i G(b_i) \\ &= \lambda_i \overline{\lambda_i} b_i = \overline{\lambda_i}(\lambda_i b_i) \\ &= \overline{\lambda_i}(F(b-i)) = F(\overline{\lambda_i} b_i) = F(G(b_i)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G \circ F = F \circ G \ \underline{\text{auf } V}$$

Aber $G = F^\top$!! weil b_i Eigenvektor von $F^\top$ zum Eigenwert $\overline{\lambda_i}$<u>ist</u>.

$$\Downarrow$$

$$F^\top(b_i) = \overline{\lambda_i} b_i = G(b_i) \Rightarrow G = F^\top$$

Widerholung:

$F : V \to V$ Endomorphismus endlichdim. euklidisch, unitär
$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^\top(w)\rangle$ $\exists F^\top : V \to V$ adjungierter Endomorphismus zu F, derart:
$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ONB von $V \to F^\top$ hat Darstellungsmatrix
$A = a_{ij}$ Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathcal{B}$ $\quad A^* = (\overline{a_{ji}})$ bzgl. $\mathcal{B}$
F ist normal, falls

$$F \circ F^\top = F^\top \circ F$$

$$\Leftrightarrow A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

$$\Leftrightarrow \langle F(v), F(w)\rangle = \langle F^\top(v), F^\top(w)\rangle$$

$$\longrightarrow v \in V \setminus \{0\} \text{ ist Eigenvektor von } F \text{ bzg. } \lambda$$

$$\Leftrightarrow v \text{ Eigenvektor von } F^\top \text{ bzg. } \overline{\lambda}$$

Satz

$F : V \to V$ Endomorphismus | $\chi_F(T)$ zerfällt in Linearfaktoren
F ist normal $\Leftrightarrow$ Es existiert eine ONB von V, welche aus Eigenvektoren von F besteht.

ende Wiederholung.

VI.0.13 Def: Selbsadjungierte

$F : V \to V$ ist selbstadjungiert, falls $F = F^\top$ oder äquivalent dazu,

$$\langle v, F(w)\rangle = \langle F(v), w\rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ ist **hermitesch**, falls $A^* = A$

Wid:

V euklidischer untärer endlichedim. Raum $F : V \to V$ selbst adjungiert falls $F = F^*$
F selbstadj. $\Leftrightarrow$ Die darstellungsmatrix bzg. $\begin{pmatrix}\text{einer}\\ \text{jeder}\end{pmatrix}$ ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.
A symmetrisch reelle $(n \times n)$-Matrix $\to \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren über $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$
A ist dann diagonalisierbar $\to$ Hauptachsentransformationssatz.
V euklidischer endlidim. Raum, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische bilinearform $\to$ Hauptachsen von φ sind die Elemente einer ONB von V sodass φ Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

VI.0.14 Kor: Spektralsatz

$F : V \to V$ selbstadjungiert $\to \exists$ ONB von V welches aus Eigenvektoren von F besteht.

VI.0.15 Bew:

V unitär $\to$ ok, weil χ_F in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ zerfällt
V euklidisch $\to$ Die Darstellungsmatrix von F ist symmetrisch $\to$ diagonalisierbar $\to \chi_F$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ $\square$

Bem

Falls $K = \mathbb{R}$ ist , dann ist hermitesch = symmetrisch

Bem

Sei $\mathcal{B}$ eine ONB von V

$$F : V \to V \text{ ist selbstadjungiert}$$

$\Leftrightarrow$ Die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\mathcal{B}$ hermitesch ist.

Bem:

Selbstadjungierte Endomorphismen sind normal.

VI.0.16 Lemma: Eigenwerte und Eigenvektoren

Falls V euklidisch, unitär, endlichdim. ist $F : V \to V$ selbstadjungiert, dann gilt:

a) Alle Eigenwerte von F reell sind

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind

VI.0.17 Bew:

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von F und besteht $v \in V \setminus \{0\}$ / $F(v) = \lambda \cdot v$

$$\underset{\lambda\cdot||v||^2\neq 0}{\underset{||}{\langle \lambda \cdot v, v\rangle}} = \langle F(v), v\rangle \overset{F=F^\top}{=} \langle v, F(v)\rangle = \underset{\overline{\lambda}\cdot||v||^2}{\underset{||}{\langle v, \lambda \cdot v\rangle}}$$

$$\Rightarrow \langle v, w\rangle = 0$$

b) Seien $\underbrace{\lambda \neq \mu}_{\to\in\mathbb{R}}$ derart, dass $F(v) = \lambda \cdot v \quad F(w) = \mu \cdot w \quad v, w \in V \setminus \{0\}$

$$\underset{\mu\langle v,w\rangle\Rightarrow\langle v,w\rangle=0}{\underset{||}{\langle v, \mu \cdot w\rangle}} = \langle v, F(w)\rangle \overset{F=F^\top}{=} \langle F(v), w\rangle = \underset{\lambda\langle v,w\rangle}{\underset{||}{\langle \lambda \cdot v, w\rangle}}$$

$\square$

VI.0.18 Satz: Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer endlichdim. Raum und $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Es existiert eine ONB $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V derart, dass φ durch eine Diagonalmatrix bzgl $\{b_1, \ldots, b_n\}$ dargestellt wird.

Zuerst zwei Hilfslemmata:

VI.0.19 Lemma 1:

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch
$\to$ A ist Diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell

VI.0.20 Bew:

A hermitesch, $\chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C} \to F_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ F_A ist selbstadjungiert und normal $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte sind reell

VI.0.21 Lemma 2:

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ ist diagonalisierbar.

VI.0.22 Bew:

Wir betrachten A als Matrix über $\mathbb{C}$. A ist hermitesch $\to$ A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Alle Eigenwerte von A sind reell $\Rightarrow$ A ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar

VI.0.23 Bew: Hauptachsentransformationssatz

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB von V.
Definiere:

$$F : V \to V, \quad e_i \mapsto \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) \cdot e_j$$

$$\langle e_i, F(e_i)\rangle = \langle e_i, \sum_{n=1}^{n} \varphi(e_j, e_n) \cdot e_n\rangle = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_j, e_n)\langle e_i, e_k\rangle = \varphi(e_j, e_i)$$

$v = \sum \lambda_i e_i \quad w = \sum \mu_j e_j$ beliebig.
Zu Zeigen: $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \Rightarrow F$ ist selbstadj.

$$\begin{aligned}\langle v, F(w)\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n}\mu_j F(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_i \underbrace{\langle e_i, F(e_j)\rangle}_{\varphi(e_i,e_j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(e_i, \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\mu_j e_j}_{w}) = \varphi(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i}_{v}, w) = \varphi(v, w)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}\langle v, F(w)\rangle & = & \varphi(v,w) \\ \parallel & & \parallel \\ \scriptstyle\langle F^\top(v),w\rangle & & \scriptstyle\varphi(w,v) \text{ da } \varphi \text{ symm.} \\ \Downarrow & & \\ \scriptstyle F=F^\top & & \\ \Downarrow & & \\ \scriptstyle F \text{ ist } \underline{\text{selbsadjungiert}} & & \end{array}$$

$$\langle F(v), w\rangle = \langle w, F(v)\rangle$$

Die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist symmetrisch Aus dem lemma 2 folgt, dass F diagonalisierbar ist $\to$ χ_F zerfällt in Linearfaktoren
$\Downarrow$ F selbstadj.
$\exists\{b_1, \ldots, b_n\}$ ONB von Eigenvektoren von F
Es genügt zu zeigen, dass die Darstellungsmatrix von φ bzg. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ in Diagonalform ist.

$$\varphi(b_i, b_j) = \langle b_i, \underset{\substack{\parallel \\ \lambda_j b_j}}{F(b_j)}\rangle = \lambda_j\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases}\lambda_i & i = j \\ 0 & \underline{\text{sonst}}\end{cases}$$

□

VI.0.24 Korollar:

Jede symmetrische $(n \times n)$ Matrix über $\mathbb{R}$ ist diagonalisierbar.
Jede hermitesche Matrix über $\mathbb{C}$ ist diagonalisierbar.

<u>Zurück zu positiv definite Matrizen</u>

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \qquad v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a > 0 \quad ac - b^2 > 0$$

VI.0.25 Satz: Sylvester

Eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix A über $\mathbb{R}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A echt positiv sind.

VI.0.26 Bew:

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standartskalarprodukt auf $\mathbb{R}$ und betrachte die von A definierte Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^\top Aw$ Aus dem Hauptachsentransformationssatz folgt, dass es eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ diagonalisierbar ist.

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \overset{\varphi(b_1,b_1)}{\overset{\parallel}{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \underset{\varphi(b_n,b_n)}{\underset{\parallel}{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sind die Eigenwerte von A}$$

Insb. ist $0 < \varphi(b_i, b_i) = \lambda_i$ weil $b_i \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB, do dass A bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$ in Diagonalform ist:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_i > 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n > 0 \end{pmatrix}$$

$$v \to \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \left(S^{-1}AS\right) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 \geq 0 \quad = 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0 \Rightarrow v = 0$$

$\square$

Korrolar (Sylvester)

Für eine symm. $(n \times n)$-$\mathcal{M}$atrix $\underset{}{\overset{(a_{ij})}{\overset{\parallel}{A}}}$ über $\mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- A ist positiv definit
- Alle Eigenwete von A sind echt positiv
- Alle Hauptminoren

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad \forall\, 1 \leq v \text{ oder } k \leq n$$

Wiederholung:

V euklidischer untärer endlichedim. Raum $F : V \to V$ selbst adjungiert falls $F = F^*$
F selbstadj. $\Leftrightarrow$ Die darstellungsmatrix bzg. $\begin{pmatrix}\text{einer} \\ \text{jeder}\end{pmatrix}$ ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.
A symmetrisch reelle $(n \times n)$-Matrix $\to \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren über $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$
A ist dann diagonalisierbar $\to$ Hauptachsentransformationssatz.
V euklidischer endlidim. Raum, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische bilinearform $\to$ Hauptachsen von φ sind die Elemente einer ONB von V sodass φ Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

Kor: Spektralsatz

$F : V \to V$ selbstadjungiert $\to \exists$ ONB von V welche aus Eigenvektoren von F besteht.

ende Wiederholung

VI.0.27 Bew:

V unitär $\to$ ok, weil χ_F in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ zerfällt
V euklidisch $\to$ Die Darstellungsmatrix von F ist symmetrisch $\to$ diagonalisierbar $\to \chi_F$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch

$$A \text{ positiv definit } \Leftrightarrow v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = 0$$

$$A \text{ positiv defnit } \Leftrightarrow \text{ Alle Eigenwerte von } A \text{ sind echt positiv}$$

$\square$

VI.0.28 Bew: Satz von Sylvester

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ ok!
$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto v^\top A w$ ist positiv definit

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwerte}} > 0$$

$\forall\ U \subset \mathbb{R}$ UR $\to \varphi\restriction_U : U \times U \to \mathbb{R}$ auch positiv definit.

Sei $U = \text{span}(e_1, \ldots, e_k)$

$$\varphi\restriction_U : U \times U \to \mathbb{R}\ ,\ (v,w) \mapsto v^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot w$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Induktion auf n
$\underline{n=1}$,$A = (\lambda) \to \lambda > 0$

$$\left.\begin{aligned} x^\top \lambda x = \lambda x^2 &\geq 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{smallmatrix} A \text{ ist} \\ \text{positiv} \\ \text{defnit} \end{smallmatrix}$$

Für $A = \text{span}(e_1 \ldots e_{n+1})$ Die Darstellungmatrix von $\varphi_{\restriction U}$ hat auch alle Hauptminoren echt positiv $\Rightarrow \varphi_{\restriction U}$ <u>positiv definit</u>

$\xrightarrow{\text{Hauptachsen.}}$ Es gibt eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V sodass φ Diagonalform bzg. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ hat

$$\begin{pmatrix} \overset{\varphi(b_1,b_1)}{\overset{\|}{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \underset{\varphi(b_n,b_n)}{\underset{\|}{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

Falls φ nicht positiv definit wäre, gäbe es: $\underset{\varphi(b_i,b_i)}{\underset{\|}{\lambda_i}} < 0$

$$\Downarrow \det(A) = \prod \lambda_i > 0$$

$$\exists j \neq i \qquad \underset{\varphi(b_i,b_i)}{\underset{\|}{\lambda_i}} < 0$$

$\left.\begin{array}{l} b_i = \sum_{k=1}^n \mu_k^i \epsilon_k \\ b_j = \sum_{k=1}^n \mu_k^j e_k \end{array}\right\} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht beide Null,

sodass $v = \alpha b_i + \beta b_j \in \underset{U}{\underset{\|}{\operatorname{span}(e_1 \dots e_{n+1})}}$

$$\mu_n' = 0 \to \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}$$

$$0 = \mu_n^j \text{ genau so sonst } \begin{array}{l} \alpha = \mu_n^j \\ \beta = \mu_n^i \end{array}$$

$$b_i \to (\mu_1^i, \dots \mu_n^i)$$
$$b_j \to (\mu_1^j, \dots \mu_n^j)$$
$$\alpha b_i + \beta b_j \to (\dots, \alpha\mu_n^i + \beta\mu_n^j)$$

$$\varphi(v,v) = \underbrace{(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n - 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\geq 0}$$

Weil $\varphi \restriction_U$ positiv aus der Induktion

$$\varphi(v,v) = \varphi(\alpha b_i + \beta b_j, \alpha b_i + \beta b_j) = \underbrace{\alpha^2 \lambda_i + \lambda \beta^2}_{<0} + 0$$

$$\Rightarrow \text{ Widerspruch !}$$

VI.1 Orthogonale Abbildungen und Drehungen

VI.1.1 Def: Orthogonale Abbildung

V euklidischer bzw. unitär. $F : V \to V$ ist orthogonal, falls $\forall v, w \in V$: $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

VI.1.2 Lemma:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.) $F : V \to V$ orthogonal

2.) $\forall v \in V \quad ||v|| = ||F(v)||$

3.) Für jedes Orthonormalessystem $\{e_1, \dots, e_k\}$ ist $\{F(e_1) \dots F(e_k)\}$ auch ein Orthonormalessystem

VI.1.3 Bew:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

$$||v||^2 = \langle v, v \rangle = \langle F(v), F(v) \rangle = ||F(v)||^2$$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Es genügt zu zeigen, dass $F(e_i) \perp (F(e_j) \quad \forall\ i \neq j$

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ Fall:}}$ V ist euklidisch

$$\langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle = ||F(e_i + e_j)||^2 = ||e_i + e_j||^2 = \langle e_i + e_j, e_i + e_j \rangle = 2$$

$$\begin{aligned}&\langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle \\ &= \underset{\substack{\shortparallel \\ ||F(e_i)||^2 \\ \shortparallel \\ 1}}{\langle F(e_i), F(e_i) \rangle} + \underset{\substack{\shortparallel \\ ||F(e_i)||^2 \\ \shortparallel \\ 1}}{\langle F(e_j), F(e_j) \rangle} + \langle F(e_i), F(e_j) \rangle + \underset{\substack{\shortparallel \\ \langle F(e_i), F(e_j) \rangle}}{\langle F(e_j), F(e_i) \rangle}\end{aligned}$$

Insb: $\underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{2} \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad F(e_i) \perp F(e_j)$

$\boxed{2^{\text{er}} \text{ Fall:}}$

<u>V unitär</u>

$$\begin{array}{ccc} ||e_i + \overset{\substack{F_1 \\ \shortparallel}}{i}\, e_j||^2 & = & ||F(e_i + ie_j)||^2 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 = \underbrace{||e_i||^2}_{1} + \underbrace{||ie_j||^2}_{1} & & \langle F(e_i) + iF(e_j), F(e_i) + F(e_j) \rangle \\ & & \shortparallel \end{array}$$

$$\underbrace{||F(e_i)||^2}_{1} + \underbrace{||F(e_j)||^2}_{1} + i\,(\langle F(e_j), F(e_i) \rangle - \langle F(e_i), Fe_j) \rangle$$

$$\langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \underset{\shortparallel}{\langle F(e_j), F(e_i) \rangle}$$

Wir machen wie im ersten Teil $\quad \Leftarrow \quad \overline{\langle F(e_i), F(e_j)\rangle} \in \mathbb{R}$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ $v, w \in V$
Zu Zeigen: $\langle v, w\rangle = \langle F(v), F(w)\rangle$
$V = 0 \to$ ok!
Sonst, $v \neq 0 \to 1^{\text{er}}$ Fall $\{v, w\}$ lin. abh. $\overset{v\neq 0}{\to} \lambda v \quad \lambda \in \mathbb{K}$
$v \neq 0 \to \frac{v}{||v||}$ orthonormal $\Rightarrow F(\frac{v}{||v||})$ auch
$||F(\frac{v}{||v||})|| = 1 \Rightarrow ||v|| = ||F(v)||$

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \\
&= \overline{\lambda}||v||^2 = \overline{\lambda}||F(v)||^2 \\
&= \overline{\lambda}\langle F(v), F(v)\rangle = \langle F(v), \lambda F(v)\rangle \\
&= \langle F(v), F(w)\rangle
\end{aligned}$$

$\boxed{2^{\text{er}} \text{ Fall:}}$ v,w lin. unabh.

$G - S \to \exists\, b_1, b_2$ orthonormalsystem $\text{span}(v, w) = \text{span}(b_1, b_2)$

$$\begin{aligned}
v &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\
w &= \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2
\end{aligned}$$

$$\langle v, w\rangle = \underbrace{\lambda_1\overline{\mu_1}\, \underset{\substack{\| \\ ||F(b_1)||^2}}{||b_1||^2} + \lambda_2\overline{\mu_2}\, \underset{\substack{\| \\ ||F(b_2)||^2}}{||b_2||^2}}_{\substack{\| \\ \langle F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2), F(\mu_1 b_1) + F(\mu_2 b_2)\rangle}}$$

(letzter schritt weil $F(b_1) \perp F(b_2)$)

VI.1.4 Wiederholung:

Orthogonale Endomorphismen $F : V \to V \quad \forall v, w \in V$ V euklidisch oder unitär
$\langle v, w\rangle = \langle F(v), F(w)\rangle$
F orthogonal gdw $||v|| = ||F(v)||\ \forall v \in V$ dann bildet F Orthonormalsysterme zu Orthonormalsysteme ab
Frage:
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 2 \cdot x \to$ Orthogonale Abbildungen (für euklidische Räume) erhalten den Winkel zwischen Vektoren

Satz: Orthogonale Abbildungen

Jede orthogonale Abbildung ist injektiv.

ende Wiederholung

VI.1.5 Bew:

$F : V \to V \quad v \in \ker(F)$

$$0 = F(v) \to 0 = ||F(v)|| = ||v|| \to v = 0$$

VI.1.6 Satz: Bijektive Orthogonale Abbildung

Sei V endlichdim. euklidischer oder unitärer Raum und $F : V \to V$ eine Bijektive lineare Abbildung.
Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1) F it orthogonal

2) Der adjunkte Endomorphismus $F^\top$ von F ist F^{-1}

VI.1.7 Bew:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
$\forall v, w \in V$:

$$\langle \underset{\underbrace{F(F^{-1}(w))}_{=}}{\overset{w}{\|}}, F(v)\rangle = \langle F^\top(w), v\rangle$$

$$\| \leftarrow F \text{ orthogonal}$$

$$\langle F^{-1}(w), v\rangle \overset{\substack{\text{Eindeutigkeit} \\ \text{von } F^\top}}{\Rightarrow} F^{-1} = F^\top$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$
F $\underline{\text{orthogonal}}$

$$\langle F(v), F(w)\rangle \overset{\text{Definition} F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w\rangle \overset{F^\top = F^{-1}}{=} \langle F^{-1}(F(v)), w\rangle = \langle v, w\rangle$$

VI.1.8 Kor: F Bijektiv $\Rightarrow F^{-1} = F^{\top}$

$F : V \to V$ endlichdim. euklidisch oder unitäre orthogonale Abbildung
$\Rightarrow$ F ist bijektiv und normal, mit $F^{-1} = F^{\top}$

VI.1.9 Bew:

F orthogonal $\Rightarrow$ F injektiv $\overset{\dim(V)<\infty}{\Rightarrow}$ F bijektiv ist $\Rightarrow F^{\top} = F^{-1}$

$$F \circ F^{\top} = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = F^{\top} \circ F \Rightarrow \quad \text{normal}$$

VI.1.10 Satz: Orthogonale Abbildung

Sei V endlichdim, euklidisch oder unitär $F : V \to V$ orthogonale Abbildung.
Dann haben alle Eigenwerte von F Absolutbetrag 1. Form ist $\det(F) = 1$

VI.1.11 Bew:

Beachte, dass 0 kein Eigenwert von D ist. (weil F injektiv ist !)
Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F und $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenwert zu λ

$$\begin{array}{ll} ||F(v)|| = ||v|| \neq 0 & \\ \quad \shortparallel & \to |\lambda| = 1 \\ ||\lambda v|| \; = |\lambda| \; ||v|| & \end{array}$$

Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der ONB

$$\begin{aligned} |\det(F)| &= |\det(A)| = |\overline{\det(A)}| = |\det(\overline{A})| = |\det(\overline{A^{\top}})| \\ &= |\det(\underbrace{\overline{A^{\top}}}_{A^*})| \overset{F \text{ orthogonal}}{=} |\det(F^{\top})| = |\det(F^{-1})| = |\det(F)|^{-1} \end{aligned}$$

$F \circ F^{-1} = Id_{IV}$

$$|\det(F)|^2 = 1 \Rightarrow |\det(F)| = 1$$

Bem:

Sei B eine ONB von V
A die Darstellungsmatrix von F bzgl. B
A^* die Darstellungsmatrix von $F^{\top}$ bzgl. B
A^{-1} die Darstellungsmatrix von F^{-1} bzgl. B

$$F^{-1} = F^{\top} \Leftrightarrow A^{-1} = A^*$$

VI.1.12 Def: Orthogonalität von A

Sei $A \in \mathcal{M}_{(n\times n)}(K)$ $\quad K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ regulär

$$A \text{ ist Orthogonal, falls } A^{-1} = A^*$$

Bem:

F ist orthogonal $\Leftrightarrow$ Die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\begin{pmatrix}\text{einer}\\ \text{jeder}\end{pmatrix}$ ONB orthogonal

VI.1.13 Kor: Zeilen-/Spalten-orthonormalbasis

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ regulär ist orthogonal $\Leftrightarrow$ die Zeilenvektoren (bzw die Spaltenvektoren) ein Orthonormalsystem in K^n bilden (und somit eine ONB)

VI.1.14 Bew:

$$\begin{aligned} A \text{ orthogonal } &\Leftrightarrow A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A \cdot A^* = E_n = A \cdot A^{-1} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \overline{a_{jk}}}_{\substack{\| \\ \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle \in K^n}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$$\langle \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{i-te Zeile}}, \underbrace{\vec{a}_j}_{\text{j-te Zeile}} \rangle \in K^n \text{ mit dem Standartskalarprodukt}$$

VI.1.15 Kor: zu Satz VI.1.11

Sei $F : V \to V$ normale Abbildung eines endlichdimensionalen unitären Raumes V derart, dass alle Eigenwerte von F Absolutbetrag 1 haben. Dann ist F orthogonal.

VI.1.16 Bew:

$$\chi_F(T) \in \mathbb{C}[T] \text{ zerfällt in Linearfaktoren}$$

$$\Downarrow F \text{ normal}$$

Es existiert eine ONB $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von Eigenvektoren von F $F(b_i) = \lambda \cdot b_i$

F hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ bzgl $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\Rightarrow 0 \neq |\det(F)| = |\prod \lambda_i| = \prod |\lambda_i| = 1$$

F hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$ bzgl $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2 = 1 \Rightarrow \overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$$

$F^\top$ $(= F^{-1})$ hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ bzgl $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\Rightarrow F^{-1} = F^\top \rightarrow F \text{ ist orthogonal}$$

VI.1.17 Def: Orthogonal diagonalisierbar

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ ist orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale (reguläre) Matrix S gibt, sodass $S^{-1}AS$ $(= S^*AS)$ in Diagonalform ist.

VI.1.18 Prop: Orthogonal diagonalisierbar

Jede normale Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist orthogonal diagonalisierbar.

VI.1.19 Bew:

Sei $F_A : K^n \rightarrow K^n$ die zugehörige lineare Abbildung $\Rightarrow$ F_A ist normal $\Rightarrow$ $\chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren.
Es gibt eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ von Eigenvektoren von F(d.h. von A)
Sei $S = (b_1|\dots|b_n)$ $\quad$ b_i als Spaltenvektoren

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{in Diagonalform}$$

Es genügt zu zeigen, dass S eine orthogonale Matrix ist.
Aber die Spaltenvektoren von S bilden ein orthonormales System.

$$\Rightarrow S \text{ ist orthogonal}$$

VI.1.20 Kor: Symmetrie und diagonalisierbarkeit

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ bzw. jede hermitesche Matrix über $\mathbb{C}$ ist orthogonal diagonalisierbar.

VI.1.21 Bew:

A ist normal, $\chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren.

VI.1.22 Def: Drehung

Sei V ein endlichdim euklidischer Raum.
$F : V \to V$ orthogonale Abbildung ist eine <u>Drehung</u>, falls $\det(F) = 1$.

Bem:

Die Kollektion aller Drehungen bilden eine <u>Gruppe</u>.

VI.1.23 Satz: Drehung

Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Standartskalarprodukt als euklidischer Raum.
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung, gdw F Darstellungsmatrix bzgl $\{e_1, e_2\}$ der Form:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

hat, für ein $\alpha \in [0, 2\pi]$. Wobei α der Winkel der Drehung ist. <u>Bsp:</u>

$$\alpha = \frac{\pi}{2}: \qquad \curvearrowleft = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{llll} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (\rightarrow) \xrightarrow{\curvearrowleft} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (\uparrow) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (\uparrow) \xrightarrow{\curvearrowleft} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (\leftarrow) \end{array}$$

VI.1.24 Wid:

V euklidischer Raum

$$\text{Dreh}(V) = \{F : V \to V \text{ Drehung}\}$$

Drehung $\leftrightarrow$ orthogonale Abbildung mit $\det(F) = 1$
eins Gruppe

VI.1.25 Bew: Satz

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ und die Darstellungsmatrix von F:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F(e_1) & F(e_2) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} \langle F(e_1), e_1 \rangle & \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_1), e_2 \rangle & \langle F(e_2), 2_2 \rangle \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Spaltenvektoren bilden ein orthonormales System.

$$\begin{array}{c} ||F(e_1)||^2 = 1 \\ \parallel \\ \langle F(e_1), e_1 \rangle^2 + \langle F(e_1), e_2 \rangle^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi] \quad \cos\alpha = \langle F(e_1), e_1 \rangle \quad \sin\alpha = \langle F(e_1), e_2 \rangle$$

$$\left. \begin{array}{r} \det(A) = 1 \\ 0 = \langle F(e_1), e_2 \rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} \to \quad 1 = \cos\alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle - \sin\alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \to \quad 0 = \cos\alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle + \sin\alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\square$

VI.1.26 Satz: Drehung

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Drehung, wenn F Darstellungsmatrix bzgl. einer geeigneten ONB $\{b_1, b_2, b_3\}$ der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{hat.} \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$

VI.1.27 Bew:

$\boxed{\Leftarrow}$ ✓

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der kanonischen Basis $\{a_1, a_2, a_3\}$

$$\Rightarrow \text{ A ist orthogonal}$$

$\Rightarrow$ Als Matrix über $\mathbb{C}$ haben alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A Absolutbetrag 1.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$\chi_F(T) = \chi_A(T)$ ist ein <u>normiertes</u> Polynom Grades 3 über $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$
$\rightarrow$ Es muss eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ haben $\rightarrow$ OBdA $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1$
$1 = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
1er Fall: $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \rightarrow$ Für ein i muss $\lambda_i = 1 \;\Rightarrow$ OBdA $\lambda_1 = 1$
2er Fall: Sonst. $\lambda_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$$

hat Koeffizienten in $\mathbb{R}$
Insb. $\overline{\lambda_2} = \begin{cases} \cancel{\lambda_1} \\ \lambda_3 \end{cases}$ nicht λ_1 da es Reell ist.
$|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$
$\lambda_2 = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha} = \frac{1}{\lambda_2}$
$\det(F) = 1 = \lambda_1 \cdot \underbrace{\lambda_2 \cdot (\lambda_2)^{-1}}_{=1}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$
Sei $b_1 \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor zum Wert $\underline{\lambda_1 = 1}$
Sei $U = \text{span}(b_1)^\perp \rightarrow \dim(U) = 2$

Frage: $F(U) \perp \text{span}(b_1)$?

$$\Leftrightarrow F(U) \subset U?$$

$$u \in U \qquad \langle F(u), \underset{\substack{\| \\ F(b_1)}}{b_1} \rangle \Rightarrow F(u) \in U$$

$$\|$$

gleich da F orthogonal

$$\langle u, b_1 \rangle = 0$$

Aus dem Gram-Schmidt'schen Verfahren wähle eine ONB $\{b_2, b_3\}$ von U. (aus dem Eulersatz) $\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^3$.

$F\restriction_U$ hat auch eine Drehung ! $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$

$\to$ F hat Darstellungsmatrix bzgl. $\{b_1, b_2, b_3\}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\square$

VI.2 Multilineare Algebra

Sei K ein beliebiger Körper

VI.2.1 Def:

Das Tensorprodukt von zwei K-VR U und V ist ein K-VR T zusammen mit einer (universellen) bilinearen Abbildung: $\otimes : U \times U \to T$ derart, dass jede bilineare Abbildung $g : U \times V \to W$ sich schreiben läßt als eine Komposition.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f \circ \otimes = g"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & T \arrow[dl, "\exists! f"] \\
W
\end{tikzcd}$$

für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : T \to W$. Formel ist $(T; \otimes)$ bis auf Isomorphi eindeutig bestimmt.

VI.2.2 Satz:

Je zwei K-VR U und V besitzen ein Tensor-Produkt $(T; \otimes)$, dass bis auf Isomorphi eindeutig bestimmt ist. Schreibe $U \otimes V$.

VI.2.3 Bew:

Seien $\{a_I\}_{i \in I}$ Basis von U. $\{b_j\}_{j \in J}$ Basis von V.
Wähle Elemente $(c_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ K-linear unabh.

Setze

$$\begin{aligned} T &= \operatorname{span}(\{c_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}) \\ &= \left\{ \sum_{\text{endliche}} \lambda_{i',j'} c_{i,j} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes : U \times V &\to T \\ (a_i, b_i) &\mapsto c_{i,j} \end{aligned}$$

Erweitern wegen Bilinearität:

$$\otimes(\sum \lambda_i a_i, \sum \mu_j b_j) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j a_{ij}$$

Sei nun $g : U \times V \to W \quad , \quad (a_i, b_j) \mapsto g(a_i, b_j)$ bilinear

$$\begin{aligned} f : T &\to W \\ c_{i,j} &\mapsto g(a_i, b_j) \end{aligned}$$

erweitere f aus <u>linearität</u> $\to$ f ist eindeutig <u>bestimmt</u>

$$f \circ \otimes(a_i, b_j) = g(a_i, b_j)$$

$$\to f \circ \otimes = g$$

$$a_i \otimes b_j := c_{i,j}$$

$$\cancel{\otimes(a_i, b_j)}$$

$\square$

VI.2.4 Bew:

Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ Basis von U, $\{b_j\}_{j \in J}$ Basis von V

$$\forall i \in I, j \in J \to T_{ij}$$

$$T = \Big\{ \sum_{\text{endliche}} \underset{\substack{\| \\ \in K}}{\lambda_j} T_{ij} \Big\}$$

$$\begin{aligned} \otimes : U \times V &\to T \quad \to \text{ Erweitere sie um Bilinearität} \\ (a_i, b_j) &\to T_{ij} \end{aligned}$$

$F(T_{ij}) = g(a_i, b_j)$ ist eindeutig bestimmt!

Eindeutigkeit:
Sei T' auch ein Tensorprodukt von U,V $\quad \otimes' : U \times V \to T'$

VI.2.5 Kor:

Für jede Basis $\{a_i\}_{i\in I}$ von U und jede Basis $\{b_j\}_{j\in J}$ von V ist: $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j)\in I\otimes J}$ eine Basis von $U \otimes V$.
Isbesondere falls $\dim U, \dim V = \infty$ ist $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$

VI.2.6 Kor:

Jedes Element w von $U \otimes V$ lässt sich schreiben als $\sum_{k=1}^{n} a_{i_k} \otimes v_k$ für $v_k \in V$ eindeutig bestimmt.

VI.2.7 Bew:

$$w \in U \otimes V$$

$$\underset{\otimes(a_i,b_j)}{\underset{||}{\{a_i \otimes b_j\}}} \quad \text{Basis}$$

$$\begin{aligned} w &= \sum \lambda_{ij} a_i \otimes b_j \\ &= \sum a_i \otimes \lambda_{ij} b_j \\ &= \sum_i \sum_j a_i \otimes \lambda_{ij} b_j \\ &= \sum_i a_i \otimes \underbrace{\sum_j \lambda_{ij} b_j}_{v_i \in V} \end{aligned}$$

Frage: Warum sind die v_i' s eindeutig bestimmt?

$$w = \sum a_i \otimes v_i' \quad \longrightarrow \quad v_i' = \sum \mu_{ij} b_j$$

$$w = \sum a_i \otimes \left(\sum \mu_{ij} b_j \right) = \sum_i \sum_j \mu_{ij} a_i \otimes b_j$$

$$\Rightarrow \lambda_{ij} = \mu_{ij} \Rightarrow v_i = v_i'$$

$\{a_i \otimes b_j\}$ eine Basis von $U \otimes V$ $\square$

<u>**Achtung!**</u>
Nicht jedes Element von $U \otimes V$ lässt sich als ein rein Tensor $u \otimes v$ schreiben!

VI.2.8 Bew:

$U = V = \mathbb{R}^2$ mit der Standartbasis $\{e_1, e_2\}$ $\square$

VI.2.9 Beh:

$$w = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

angenommen:

$$w = u \otimes v \qquad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$u = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2) \qquad v = (\mu_1 e_1, \mu_2 e_2)$$

$$u \otimes v = \lambda_1\mu_1 e_1 \otimes e_1 + \lambda_1\mu_2 e_1 \otimes e_2 + \lambda_2\mu_1 e_2 \otimes e_1 + \lambda_2\mu_2 e_2 \otimes e_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\mu_1 = 0 \\ \lambda_2\mu_2 = 0 \\ \lambda_1\mu_2 = 1 \\ \lambda_2\mu_1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{cc} \to \mu_1 = 0 & \\ \uparrow & \to \mu_2 = 0 \\ \to \lambda_1 \neq 0 & \uparrow \\ & \to \lambda_2 \neq 0 \end{array}$$

$$\to v = 0 \Rightarrow u \otimes v = 0 \neq e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

VI.2.10 Lemma:

V K-VR

$$K \otimes V \simeq V$$

VI.2.11 Bew:

Wir wollen zuerst eine Abbildung von $K \otimes V \to V$ konstruieren

$$\begin{aligned} G: & V \to K \otimes V \qquad \text{ist linear} \\ & v \ \mapsto \ 1 \otimes v \end{aligned}$$

G ist surjektiv

$$\begin{array}{c} \lambda \cdot (1 \otimes v) \\ \| \\ 1 \otimes \lambda \cdot v \\ \| \\ G(\lambda v) \end{array}$$

Weil 1 eine Basis von K über K ist!
Zu zeigen: $F : K \otimes V \to V$ Isomorphismus

$$\begin{aligned} G \circ F(\lambda \otimes v) &= G(\lambda v) \\ &= 1 \otimes \lambda \cdot v \\ &= \lambda(1 \otimes v) \\ &= \lambda \otimes v \end{aligned}$$

$$F \circ G(v) = F(1 \otimes v) = 1 \cdot v = v$$

F und G sind Inverse voneinander $\square$

VI.2.12 Lemma:

a) $F : U \to U' \quad G : V \to V'$ lineare Abbildungen
$\Rightarrow \exists\ F \otimes G : U \otimes V \to U' \otimes V' \quad u \otimes v \mapsto F(u) \otimes G(v)$ lineare Abbildung

b) $Id_{Iu} \otimes Id_{Iv} = Id_{u \otimes v}$

c) $(F_1 + F_2) \otimes G = F_1 \otimes G + F_2 \otimes G$

d) $(\lambda F) \otimes G = \lambda(F \otimes G)$

e) $(F_2 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ G_1) = (F_2 \otimes G_2) \circ (F_1 \otimes G_1)$

VI.2.13 Bew:

a) Sei
$$U \times V \to U' \otimes V' \quad (u, v) \mapsto F(u) \otimes G(v) \quad \text{bilinear}$$

b) trivial

c) einfach:

d) einfach:

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \otimes G(u \otimes v) &= (F_1 + F_2)(u) \otimes G(v) \\ &= (F_1(u) + F_2(v)) \otimes G(v) \\ &= \underset{(F_1 \otimes G)(u \otimes v)}{\underset{\parallel}{F_1(u) \otimes G(v)}} + \underset{(F_2 \otimes G)(u \otimes v)}{\underset{\parallel}{F_2(u) \otimes G(v)}} \end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
&(F_2 \circ F_1) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\
&= F_2 \circ F_1(u) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\
&= F_2(F_1(u)) \otimes G_2(G_1(v)) \\
&= F_2 \otimes G_2(\underbrace{F_1(u) \otimes G_1(v)}_{\substack{\| \\ (F_1 \otimes G_1)(u \otimes v)}}) \qquad \text{ok !}
\end{aligned}
$$

$\square$