Der starre Körper

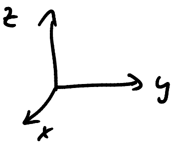
- System von Massenpunkten mit $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$

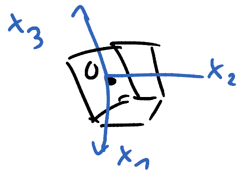
  z.B. - starres Molekül
  - Näherung für kontinuierliche Massenverteilung

- Bewegung besteht aus
  - Translation, d.h. alle Teilchen haben gleiche Geschwindigkeit
  - Drehung um einen körperfester Koord. ursprung O

  $\longrightarrow$ $2 \times 3 = 6$ Freiheitsgrade

raumfestes Inertialsystem (IS) | körperfestes Koord. system (KS)





KS: Ursprung bei O $\hat{=}$ im IS $\vec{r}_0(t)$
(z.B. der Schwerpunkt)

$$\rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

KS dreht sich relativ zum IS mit

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$\vec{r}_n$ seien die Orte des n-ten Teilchens im KS

$\vec{r}_{nIS}$ — " — IS

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n,IS} - \vec{r}_0$$

Geschw. im IS: $\vec{V}_{nIS}$ $\dfrac{d\vec{r}_{n,IS}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_0}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_n}{dt}$

Geschw. im IS: $\vec{V}_{n,IS}$ $\frac{d\vec{r}_{n,IS}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{=\vec{v}_0} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}$

Mit I.4 Beschleunigte Bezugssysteme:
für beliebigen Vektor $\vec{G}$ ist

$$\frac{d\vec{G}_{IS}}{dt} = \frac{d\vec{G}_{KS}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}_{KS} \qquad (*)$$

z.B. $\frac{d\vec{r}_{IS}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{V}_{n,IS} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n \qquad (1)$$

Kinetische Energie

$$T = \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{V}_{n,IS}^2 = \sum_n \frac{m_n}{2} \left[\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n \right]^2 \qquad n = 1, \dots, N$$

$$= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{V}_0^2 + \sum_n m_n \vec{V}_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2$$

$\downarrow$ Spatprodukt

$$= \frac{M}{2} \vec{V}_0^2 + (\vec{V}_0 \times \vec{\omega}) \sum_n m_n \vec{r}_n + \sum_n \frac{m_2}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2$$

$$= T_{trans} + T_{rot-trans} + T_{rot} \qquad (2)$$

2 Fälle:

- Körper wird in keinem Punkt festgehalten

Mit $\vec{O} = \vec{R}$ (Schwerpunkt) ist $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$

$\rightarrow T = T_{trans} + T_{rot}$

$\rightarrow \quad T = T_{trans} + T_{rot}$

- Körper wird in mindestens einem Punkt $\vec{P}$ festgehalten

  Mit $\vec{O} = \vec{P}$ ist $\vec{V}_0 = 0$ (z.B. bei Kreisel)

  $\rightarrow \quad T = T_{rot}$

Mit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$\vec{r}_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$

und der Identität

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \omega_k^2 r^2 - \sum_{i,k}^{3} \omega_i x_i \omega_k x_k \qquad i,j,k = 1,2,3$$

$$= \sum_{i,k} \omega_i \omega_k \left(r^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$$

wird $T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_n \right)^2$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik}\, \omega_i \omega_k$$

mit dem Trägheitstensor

$$\boxed{I_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(r_n^2 \delta_{ik} - x_{in} x_{kn} \right)} \qquad (3)$$

In Matrixschreibweise $I = \{ I_{ik} \}$ ist in Matrixschreibweise I – [illegible] ist

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}\, I\, \vec{\omega}} \qquad (4)$$

Bem:

- Begriff Tensor: ursprünglich vom Spannungstensor (Physik)

  Mathe: Tensor 1. Stufe $\hat{=}$ Vektor

  2 Stufe $\hat{=}$ Matrix

- (4) ist eine Bilinearform

- Dreht sich Körper um eine körperfeste Achse (z.B. $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$)

  so geht (4) über in

  $$T_{rot} = \frac{I_z}{2} \omega_z^2$$

  I_z: Trägheitsmoment des Körpers bzgl. $\vec{e}_z$

- Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Dichte $\rho(\vec{r})$

  ist $I_{ij} = \int d\vec{r}\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^{\,2} \delta_{ij} - r_i r_j \right)$

Trägheitstensor ist symm., $I_{ij} = I_{ji}$

kann daher mit einer orthogonalen Trafo U

$(U^+ = U^{-1},\ U^+ U = 1 = U U^+)$

auf Diagonalform gebracht werden

$$U^+ I\, U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

→ Eigenwert-Problem

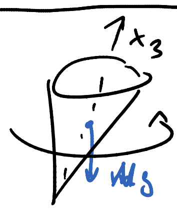
[illegible]

$$u^{+} I u = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Eigenwert-Problem "Hauptachsen-Trafo"

wobei die Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen und die Eigenwerte I_i $(i=1,2,3)$ die Hauptträgheitsmomente

Symmetrie des Körpers legt die Achsen fest. z.B. bei Kreisel

- "Kugelkreisel", wenn alle I_i gleich sind (Kugel, Würfel, Zylinder mit $h=\sqrt{3}r$)
- symmetrischer Kreisel; $I_1 = I_2$, $I_3 \neq I_s$



- asymm. Kreisel: alle I_i verschieden

Drehimpuls:

in KS ist $$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n \right)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_n m_n \left(\vec{r}_n \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_n \right) \right)$$

Mit $$\vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) = \vec{\omega} r^2 - \vec{r} \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r} \right)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3} \left(r^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right) \omega_k \vec{e}_i$$

ist
$$\vec{L} = \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik} \omega_k \vec{e}_i = \sum_i L_i \vec{e}_i$$

oder $\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}}$ (5)

Eulersche Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} m_n\left(\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n\right) = \frac{d}{dt}\left(I\cdot\vec{\omega}\right)$$

$$= \vec{M} = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{A}$$

Mit Gl. (*) ist dann $\frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right)_{IS} =$

$$\frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right)_{KS} + \vec{\omega}\times\left(I\vec{\omega}\right) = \vec{M} \qquad (6)$$

Ist KS das Hauptachsensystem mit

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

so ist $\frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right)_{KS} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) \\ \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) \\ \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) \end{pmatrix}$$

und damit

und damit

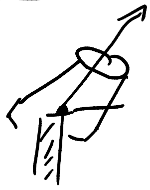
$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_2 \omega_1 &= M_3 \end{aligned}} \qquad (7)$$

Eulerschen Gleichungen

I.A. schwer zu lösen, da nicht linear und M zeitabhängig

Bsp: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

z.B.



$I_1 = I_2$, $I_3 \neq I_1$ → rotationssymm. bzgl. x_3 Achse

$\vec{M} = 0$, Damit

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2 \omega_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_1 - \Omega\,\omega_2 = 0 \qquad (a)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1 \omega_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_2 + \Omega\,\omega_1 = 0 \qquad (b)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = \text{const} \equiv \omega_0$$

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\,\omega_0$$

$\frac{d}{dt}$ (a) mit (b) : $\quad \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$

$$\rightarrow \omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \varphi_0)$$

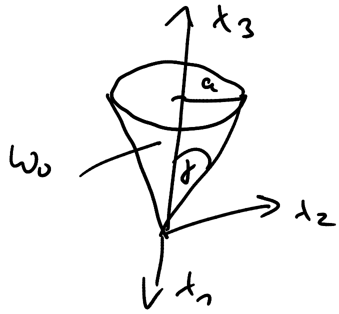
$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} \qquad \rightarrow \omega_2(t) = a \cos(\Omega t + \varphi_0) \qquad (8)$$

$$\omega_3 = \omega_0$$

Mit $\vec{\omega}^2 = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2 = \text{const}$

hat die Projektion von $\vec{\omega}$ auf x_1-x_2-Ebene die konst. Länge a und rotiert mit Ω.

D.h. <u>im KS</u> rotiert Kreisel auf einem Polkegel



$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_0} = \text{const}$$

Zur Betrachtung im IS brauchen wir verallg. Koord. um die Beziehung zwischen KS und IS zu beschreiben

→ Eulerschen Winkel ϕ, ψ, θ → siehe Übung

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}} \qquad (9)$$

Einsetzen von (9) in (8), ergibt nach Lösung von (9)

$$\psi(t) = \Omega t + \psi_0 \qquad \tan\theta_0 = \frac{a}{\omega_0}\frac{I_1}{I_2}$$

$$\phi(t) = \frac{a}{\sin\theta_0} + \phi_0$$