26.4.18

Donnerstag, 26. April 2018
10:13

5. Mehr-Körper-Probleme

N Teilchen bei $\vec{r}_i \qquad i = 1, \dots, N$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^A + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

äußere innere Kräfte

<u>Schwerpunkt:</u> $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad , \quad M = \sum_i m_i$

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^A + 0 = \vec{F}^A$$

bewegt sich nur aufgrund äußerer Kräfte.

Auf ein <u>abgeschlossenes System</u>

wirken keine (oder vernachlässigbare) äußeren Kräfte.

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = \text{const.}$$

abgeschlossenes System $\leftrightarrow$ Schwerpunktsimpuls ist erhalten.

<u>Drehimpuls:</u>

Vektorielle Multiplikation des 2. NG mit $\vec{r}_i$

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\downarrow \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)}_{\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A}_{\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i, j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji})$$

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec r_i \times \vec F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j\neq i} \left(\vec r_i \times \vec F_{ij} + \vec r_j \times \vec F_{ji} \right)$$

$$\overset{3.NG}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j\neq i} \underbrace{(\vec r_i - \vec r_j) \times \vec F_{ij}}_{\text{Annahme: } \vec F_{ij} \parallel \vec r_i - \vec r_j} = 0$$

d.h. innere Kräfte ergeben kein resultierendes Drehmoment.

$$\frac{d\vec L}{dt} = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i^A = \vec M$$

abgeschlossenes System $\longleftrightarrow$ Gesamtdrehimpuls $\vec L$ ist erhalten

Energie

Mult. von 2.NG mit $\dot{\vec r}_i$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec r}_i \cdot \dot{\vec r}_i = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec r}_i^{\,2}}_{T} = \frac{dT}{dt}$$

$$= \sum_i \left(\vec F_i^{kons} + \vec F_i^{diss} \right) \dot{\vec r}_i$$

wobei

$$\sum_i \vec F_i^{kons} \cdot \dot{\vec r}_i = - \frac{d\,U(\vec r_1, \dots, \vec r_N)}{dt} = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec r_i} \cdot \dot{\vec r}_i$$

mit

$$\frac{\partial U(\vec r_1, \dots, \vec r_N)}{\partial \vec r_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \vec e_x + \frac{\partial U}{\partial y_i} \vec e_y + \frac{\partial U}{\partial z_i} \vec e_z$$

Energiesatz:

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_i \vec F_i^{diss} \cdot \dot{\vec r}_i$$

Kräfte konservativ $\longleftrightarrow$ $E = T + U$ erhalten

Energieerhaltung gilt also auch bei äußeren Kräften, solange sie konservativ sind.

sind.

Aufteilung:

$$\vec{F}_i^{\,\text{aus}} = \vec{F}_i^{A}(\vec{r}_i) + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}^{I}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

$$= -\frac{\partial U^A(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial U^I(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i}$$

mit

- $U^A = \sum_i U_i(\vec{r}_i)$, $\vec{F}_i^A = -\frac{\partial U_i(\vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_i}$ äußere Kräfte wirken auf einzelne Teilchen
- $U^I = \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ Annahme: 2 Teilen WW

mit $\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \overset{\text{3.NG}}{=} -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j}$ hängt U nur von $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ab

Annahme: $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij}$ $\rightarrow$ U hängt nur von $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ ab

$$\vec{F}_{ij}^{I} = -\frac{\partial U_{ij}^{I}(r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_{ij}}$$

$$U(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

z.B.: $U_i = q_i\, \phi(\vec{r}_i)$

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Allg.: Abgeschlossene N-Teilchen Systeme ($N \geq 2$) mit ausschließlich konservativen Kräften haben also mindestens 10 Erhaltungsgrößen

- der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i$ (*) 3 Größ.

- der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$ (*) 3 Größen
- ein Vektor $M\vec{R} - \vec{P} \cdot t$ (Int. von (*))
  der die Schwerpunktsbewegung beschreibt 3 Größen
- der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ 3 Größen
- und die Gesamtenergie $E = T + U$ 1 Größe

10 Größen

Selten mehr: z.B. Lenzscher Vektor im Keplerproblem

6. Die Hamilton-Funktion (1833)

Newton: Kraft ist zentrale Größe

Hamilton: Energie —"—

O.B.d.A. sei
N-Teilchen System mit ausschließlich konservative Kräfte

$$F_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i} = \dot{p}_i \qquad (1) \qquad (3N \text{ DGL } 2.\text{Ord.})$$

$$r \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_{3N}) \qquad i = 1, \ldots, 3N$$

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_{3N})$$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \underset{p_i = m_i v_i}{=} \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}, \quad \text{Potential } U$$

Gesamtenergie $E = T + U$ wird durch die Hamilton-Funktion beschrieben "Hamiltonian"

$$\boxed{\begin{aligned} H = H(r,p) &= T(p) + U(r) \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(r) \qquad (2) \end{aligned}}$$

$r = (r_1, \ldots, r_{3N})$
$p = (p_1, \ldots, p_{3N})$

Mit

$$\frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{\partial U}{\partial r_i} \overset{(1)}{=} -\dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} = \dot{r}_i$$

$m_1 = m_2 = m_3 =$ Masse von Teilchen 1
$m_4 = m_5 = m_6 =$ " 2
⋮

äquivalent zu Newton-Gl.

Hamilton-Gl.: $\dot{r}_i = \frac{\partial H}{}$

Hamilton-Gl: sind die Bew. Gl. im Hamilton Formalismus

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} \end{aligned}} \qquad (3)$$

6N DGL 1. Ord. (Hamilton)

3N DGL 2. Ord (Newton)

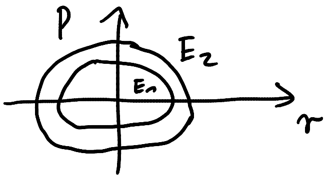
$$\frac{d}{dt} H(r(t), p(t)) = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\partial H/\partial r_i} + \frac{\partial H}{\partial r_i} \underbrace{\dot{r}_i}_{\partial H/\partial p_i} \right] = 0$$

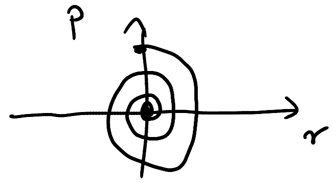
d.h. Energie ist erhalten.

Bem:

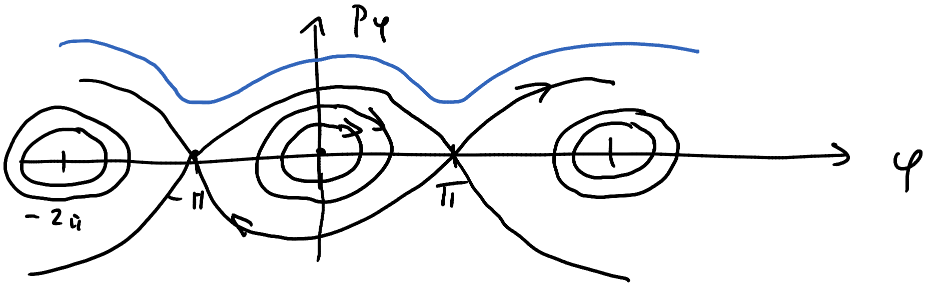
- Im Gegensatz zu vektoriellen Kräften ist Ham. Fkt ein Skalar, und damit wesentlich leichter aufzustellen.
- H kann für allg Fälle (geschw. abhängige Potentiale, zeitab. Pot) (siehe später) und hat dann nicht notwendigerweise die Bedeutung der Gesamtenergie
- (r, p) bilden den $2 \cdot 3N$ dimensionalen Phasenraum der die Bewegung vollständig beschreibt.

Bsp: harm. Oszill   gedämpter harm. Oszill





$E_2 > E_1$



ebenes Pedel