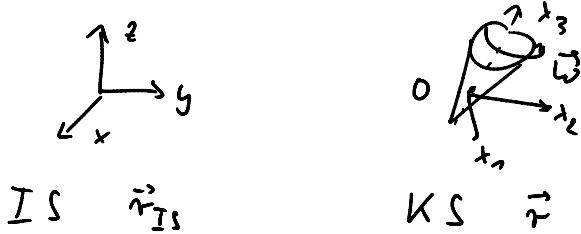


Rotation des starren Körpers



$$\frac{d\vec{r}_{IS}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i_1, k=1}^3 I_{i_1 k} \omega_i \omega_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$I_{i_1 k} = \sum_n m_n (r_n^2 \delta_{i_1 k} - x_{i_1 n} x_{k_1 n}) \quad \underline{\text{Trägheits tensor}}$$

orthogonale Trafo: $U^+ I U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ I_i: Hauptträgheitsmomente
Hauptträgheitsachsen

$$\vec{L} = \sum_n m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n)$$

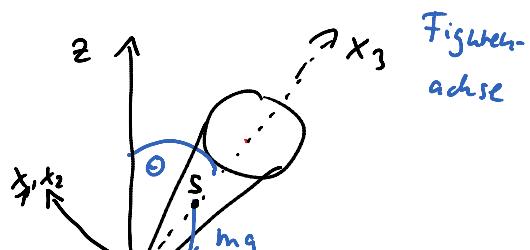
$$= \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

Mit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ folgen Euler-Gl. (in KS)

Kräftefreier Kreisel: $\vec{M} = 0 \rightarrow$ Präzession

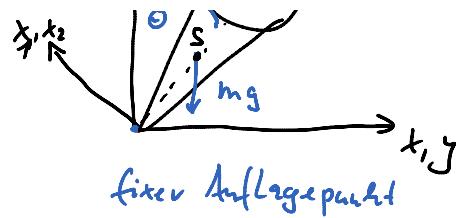
Schwerer Kreisel

Betrachte symm. Kreisel mit den



Betrachte symm. Kreisel mit den

Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$



Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{R}^2}_{=0} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\omega}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\omega}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\omega}_3^2 - mgs \cos \theta$$

Mit Eulerwinkel

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

ψ: Drehwinkel um \vec{e}_z

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

ψ: " " \vec{e}_{x_3}

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgs \cos \theta \quad (1)$$

Symmetrien:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

Erhaltungsgrößen: "erste Integrale"

$$E = T + U = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgs \cos \theta$$

$$= \text{const} \quad \text{Energieerhaltung} \quad (2)$$

$$l_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad \text{Drehimpulskomponente } l_2$$

$$l_2 = I_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \underbrace{(\cos \theta \dot{\psi} + \cos^2 \theta \dot{\phi})}_{(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta} = \text{const.} \quad (3)$$

$$l_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \quad \text{Drehimpulskomponente } l_3$$

$$= T_3 (\dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos \theta) = \text{const} \quad (4)$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) werden $\dot{\phi}$ und $\dot{\varphi}$ eliminiert.

Mit $I_2 - I_3 \cos \theta = I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ (5)

ist $\frac{(I_2 - I_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} = \frac{I_1}{2} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$ in (2)

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(I_2 - I_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{I_3^2}{2 I_3} + mgs \cos \theta = \text{const.} \quad (6)$$

Wir schreiben

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta)$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{(I_2 - I_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{I_3^2}{2 I_3} + mgs \cos \theta \quad (7)$$

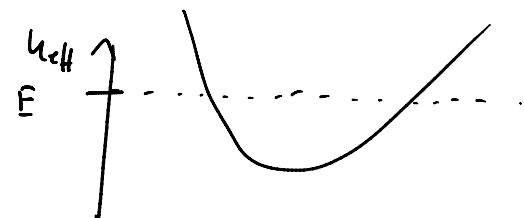
Ähnlich zum Kepler problem ergibt sich hier eine 1D Beweg. GL mit effektiven Potentiel.

Aufgelöst nach $d\theta/dt$ und integriert ist

$$t = t_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \sqrt{\frac{I_1/2}{E - U_{\text{eff}}(\theta')}} \quad (\text{nicht elementar lösbar})$$

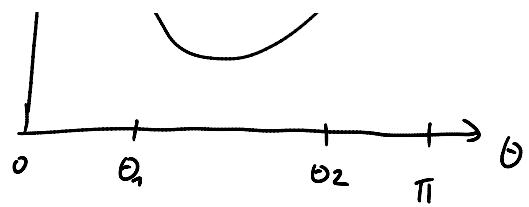
Graphische Diskussion der Lösung

• $U_{\text{eff}}(\theta)$ $\xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \infty$
 $\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} \infty$



$$\xrightarrow{\Theta \rightarrow \pi} \infty$$

- dazwischen ein Minimum



aus $E = U_{\text{eff}}$ ergeben sich Wendepunkte Θ_1, Θ_2

Während die Figurenachse zwischen Θ_1 und Θ_2 oszilliert
"Nutation", präzidiert sie mit (5)

$$\dot{\phi} = \frac{l_2 - l_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

um die raumfeste z-Achse.

Bewegung ist def durch Kreiselparameter: m, s, I_1, I_3
und Anfangsbed. E, l_2, l_3

Für $\Theta_1 = \Theta_2$ verschwindet Nutation "regulären Präzession"

Im kräftefreien Fall ($s \rightarrow 0$)

ergibt sich $\Theta = \Theta_0, \dot{\phi} = \text{const.}$

II. 9 Hamilton-Formalismus

Bereits für konservative Systeme wurden

Hamilton Funktion $H(q, p, t)$ "Hamiltonian"

und "Gleichungen" hergeleitet.

Ausgehend vom kanonischen Impuls $p = (p_1, \dots, p_f)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

lassen wir nun $H(q, p, t)$ von $L(q, \dot{q}, t)$ her.

Legendre - Trafo

$$f(x, y) \rightarrow g(u, y) \quad \text{mit } u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2)$$

Ausgehend von

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} dx}_{=: u} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} dy}_{=: v} = u dx + v dy$$

def. wir die Funktion $g = f - ux$

mit

$$dg = df - u dx - x du = v dy - x du \quad (3)$$

Folglich ist g die gewünschte Funktion

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} dy \quad (4)$$

$$V = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$