24.4.18

Dienstag, 24. April 2018
10:15

Erhaltungsätze

Impuls: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{F} = 0 \longleftrightarrow \vec{p}$ erhalten

Drehimpuls: $\vec{M} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$; $\vec{M} = 0 \longleftrightarrow \vec{\ell}$ erhalten

Energie: $m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ ($\hat{=}$ Leistung P)

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{T} = \frac{dT}{dt} = \left(\vec{F}_{kons} + \vec{F}_{diss}\right) \cdot \dot{\vec{r}}$$

mit $\vec{F}_{kons} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{d\,U(\vec{r})}{dt} = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + U(\vec{r})\right) = \vec{F}_{diss}\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\rightarrow \quad \vec{F} = \vec{F}_{kons} \quad \longleftrightarrow \quad E = T + U = \text{const.}$$

$$\rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{F} = 0$$

<u>allg:</u> $\vec{F}_{kons} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{z.B. Lorentz-Kraft}}$

da $P_L = \dot{\vec{r}}\cdot\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right) = 0$

<u>Anwendung:</u> Vereinfachung von Bewegungsgleichungen

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(x)$$

DGL 2. Ord.

<u>Bsp:</u> 1D System mit Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E$$

$$\rightarrow \quad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)} \qquad \text{DGL 1. Ordn.}$$

"erstes Integral" (da eine Integration bereits vollzogen)

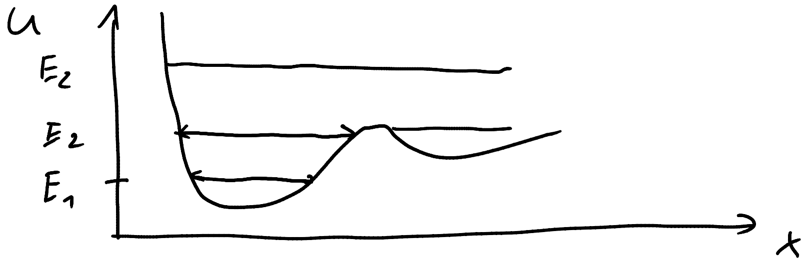
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2/m\,\left(E - U(x)\right)}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\ldots}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{2/m\,(E - U(x'))}}$$

Qualitative Diskussion der Bewegung:

$$E = T + U \geq U$$



Numerische Integration der BewGL

<u>1 D:</u> $\quad f(t) = m\,\ddot{x}(t) = m\,\dot{v}(t)$

<u>Idee:</u> Taylor-Entwicklung von x zur Zeit t

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} \underbrace{\big((t+\Delta t) - t\big)}_{\Delta t} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{f/m}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$= x(t) + v(t)\Delta t + \frac{f(t)}{2m}\Delta t^2 + \frac{\Delta t^3}{3!}\dddot{x} + O(\Delta t^4)$$

Lösung z.B. durch Abbruch in 2. Ord. (Euler-Algorithmus)

<u>Besser:</u>

$$x(t-\Delta t) = x(t) - v(t)\Delta t + \frac{f(t)}{2m}\Delta t^2 - \frac{\Delta t^3}{3!}\dddot{x} + O(\Delta t^4)$$

$$x(t+\Delta t) + x(t-\Delta t) = 2x(t) + \frac{f(t)}{m}\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

bzw

$$x(t+\Delta t) \approx 2x(t) - x(t-\Delta t) + \frac{f(t)}{m}\Delta t^2 \qquad (*)$$

Geschwindigkeit über

$$x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t) = 2\,v(t)\,\Delta t + O(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\,\Delta t} \qquad (2)$$

Gl. (1) und (2) bestimmen den Verlet-Algorithmus

4. Beschleunigte Bezugssysteme

Newton Gesetze gelten für Inertialsysteme (IS).

Bezugssystem, das relativ zu IS beschleunigt ist, ist kein IS

$\rightarrow$ es treten sog. Scheinkräfte auf

z.B. Beschleunigung bei linearer Bewegung

Rotierendes Bezugssystem

Geg: IS S mit $\vec{r}(t)$

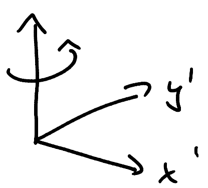
und nicht-IS S' mit $\vec{r}\,'(t)$, das gegenüber S

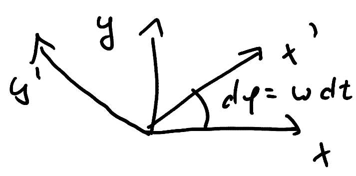
mit der Winkelgeschw.

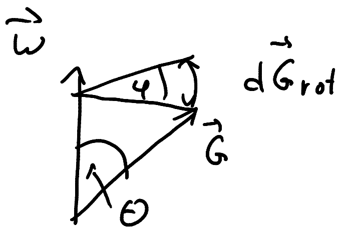
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1)$$

rotiert, $\vec{\varphi}, \vec{\omega}$ zeigen in Richtung der Drehachse

oEdA: $\vec{\varphi} \sim \vec{e}_z$







Betrachte Vektor $\vec{G}$, der in S' ruht.

Änderung $d\vec{G}_{rot}$ aufgrund Rotation

$|d\vec{G}_{rot}| = |d\vec{\varphi}|\,|\vec{G}| \cdot \sin\Theta$ $\qquad \rightarrow d\vec{G}_{rot} = d\vec{\varphi} \times \vec{G}$ $\qquad (2)$

$d\vec{G}_{rot} \perp \vec{\omega}$, $d\vec{G}_{rot} \perp \vec{G}$ $\qquad = (\vec{\omega}\, dt) \times \vec{G}$

$= (\omega\, dt) \times G$

Beliebiger Vektor $\vec{G}(t)$, der sich in S' während dt um $d\vec{G}_{S'}$ ändert, ändert sich damit in S um

$$d\vec{G}_S = d\vec{G}_{S'} + d\vec{G}_{rot}$$

Damit:

$$\boxed{\frac{d\vec{G}_S}{dt} = \frac{d\vec{G}_{S'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}} \qquad (3)$$

Für $\vec{G} = \vec{r}$ ist:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \qquad (4)$$

Für $\vec{G} = \dot{\vec{r}}$ ist: $\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) + \vec{\omega} \times \left(\dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,' + \dot{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Für $\omega = \text{const}$ erhalten wir

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,' + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Für ein in S kräftefreies Teilchen mit

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

erhalten wir

$$m\ddot{\vec{r}}\,' = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

$$m\ddot{\vec r} = -2m\,\vec\omega \times \dot{\vec r} - m\,\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r)$$

Corioliskraft $\vec F_C$ Zentrifugalkraft $\vec F_Z$

$F_Z \sim \omega^2 r$, zeigt von Drehachse weg

$F_C \sim \omega \dot r$, steht $\perp$ zur Bewegungsrichtung

Bsp: - Erddrehung, Foucault-Pendel

- Ball auf Drehscheibe

Dienstag, 24. April 2018
11:31

5. Mehr-Körper-Probleme

Betrachte N Teilchen (Massenpunkte) mit

Ort $\vec{r}_i$, Masse m_i, und die auf sie wirkende Kraft $\vec{F}_i$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

Unterscheidung:

<u>innere Kräfte:</u> Kräfte der Teilchen aufeinander
z.B. Coulomb-Kräfte $\vec{F}_{ij}$ von (geladenen) Teilchen i und j

<u>äußere Kräfte:</u> wirken von außen
z.B. Schwerkraft oder externes e.m. Feld

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^A + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

Schwerpunktsbewegung und Impuls

Ortsvektor des Schwerpunkts:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_i m_i$$

Bew. Gl. für $\vec{R}$:

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^A + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij}}_{3NG:\ F_{ij} = -F_{ji}}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^A \equiv \vec{F}^A$$

<u>Schwerpunktssatz:</u> Schwerpunkt bewegt sich nur gemäß äußerer Kräfte

→ Vgl. Münchhausen-Trick

→ Rechtfertigung der Idealisierung realer Körper durch Massenpunkte