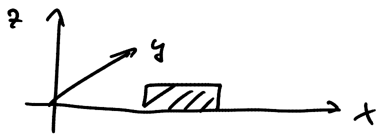
II. Lagrange Formalismus

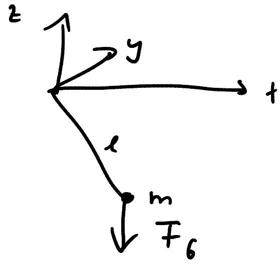
Zwangsbedingungen: (ZB)

Bsp 1: Körper auf Tisch



ZB: $z = 0$

Bsp 2: Fadenpendel



ZB:

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad g_1 = y = 0$$

$$x^2 + z^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad g_2 = x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

allg: R ZB $\quad g_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, R$

holonome ZB

Zwangskräfte: $\quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{Z}$

- beschränkt Bewegung auf eine Fläche
- innerhalb Fläche keine Einschränkung

$\rightarrow$ $\vec{Z}$ ist orthogonal zur Fläche

Ansatz: $\quad \vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \text{ grad } g(\vec{r}, t)$

Bsp: Tisch: $\quad g = z = 0$

$$\text{grad } g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun: $x = (x \ldots x)$ N Teilchen

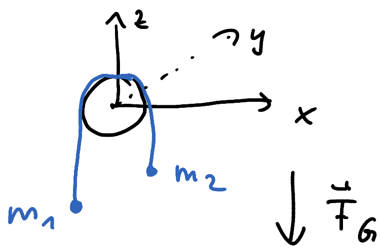
Allg: $x = (x_1, \dots, x_{3N})$ N Teilchen

$$\boxed{\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= F_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_n} & n &= 1, \dots, 3N \\ g_\alpha(x,t) &= 0 & \alpha &= 1, \dots, R \end{aligned}}$$

Lagrange-Gl. 1. Art

$3N + R$ Gl.

Bsp: Atwoodsche Fallmaschine (1784)



massenlose Rolle (Radius R), über die 2 Massen (reibungslos) verbunden sind, d.h. 2 Massen $\longrightarrow$ 6 Freiheitsgrade

ZB: $y_1 = 0 = y_2$

$x_1 = -R \;,\; x_2 = R$

$g(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + \ell = 0$ $\qquad \ell = L - \pi R$

Seil Länge

$\rightarrow$ keine Dynamik in x_i und y_i

$\rightarrow$ es reicht, Beweg. Gl für z_i zu betrachten

Zwangskräfte: $Z_i = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z_i} = \lambda$

in Richtung z_i

$$\rightarrow \quad \left.\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= -m_1 g + \lambda \\ m_2 \ddot{z}_2 &= -m_2 g + \lambda \\ \frac{d^2}{dt^2} g(z_1, z_2) &= \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-g + \frac{\lambda}{m_1} - g + \frac{\lambda}{m_2} = 0 \\ &\lambda = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$\ddot{z}_1 = -g + \frac{2g\, m_2}{m_1 + m_2} = g\,\frac{2m_2 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0)\, t + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,\frac{g}{2}\, t^2$$

3. Lagrange-Gl. 2 Art

Ausgangspunkt: Lag. Gl. 1 Art. (1)

Die Anzahl der Freiheitsgrade

$$f = 3N - R$$

Idee: Führe "generalisierte" (oder verallgemeinerte) Koordinaten ein

$$q = (q_1, \dots, q_f)$$

- die die Lage aller Teilchen festlegen, d.h.

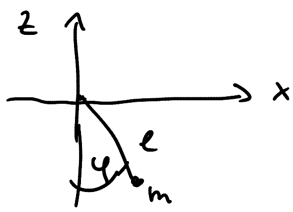
$$x_n = x_n(q,t) = x_n(q_1, \dots, q_f, t) \qquad n = 1, \dots, 3N \qquad (2)$$

- ZB g_α sollen für beliebige q_i erfüllt werden

$$g_\alpha\big(x_1(q,t), \dots, x_{3N}(q,t)\big) = 0 \qquad (3)$$

→ ZB schränken Bewegen der q_i nicht ein

Bsp: Ebenes Pendel mit variabler Länge $l(t)$



$$x = l(t)\sin\varphi = x(\varphi,t)$$

$$z = -l(t)\cos\varphi = z(\varphi,t)$$

$$y = 0 = y(\varphi,t)$$

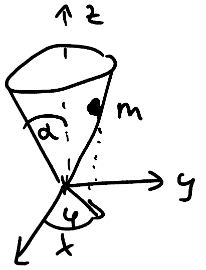
d.h. φ ist verallg. Koord., die die ZB

$$g(\vec{r},t) = x^2(\varphi,t) + y^2(\varphi,t) - l^2(t)$$

$$= l^2 \cos^2\varphi + l^2 \sin^2\varphi - l^2 \qquad = 0$$

für alle Werte φ erfüllt.

2. Bsp: Teilchen im Kreiskegel



Zylinderkoordinaten: $\longrightarrow$ gen. Koord. r, φ

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$
$$z = r \cot\alpha$$

Eliminierung der Zwangskräfte

Ausgangspunkt: Gl. (1)

Nach (3) hängen zB g_α nicht von q_i ab

$$\frac{d g_\alpha}{d q_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, f \qquad (4)$$

Gl. (1) multipliziert mit $\partial x_n / \partial q_k$ ergibt:

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n \left[F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right]$$

$$\boxed{\sum_n \left[m_n \ddot{x}_n - F_n \right] \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0} \qquad (5) \qquad \begin{array}{l} n = 1, \dots, 3N \\ k = 1, \dots, f \end{array}$$

Bem.: • (5) enthält keine Zwangskräfte, nur f Gl.
aber die Trafo $\partial x_n / \partial q_k$

- Durch Einführung der Lagrange-Funktion $L = T - U$ kann (5) wesentlich vereinfacht werden

Dazu betrachten wir:

$$\dot{x}_n = \frac{d}{dt} x_n(q,t) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$= \dot{x}_n(q, \dot{q}, t) \qquad (6)$$

mit general. Geschw. $\dot{q}_i$. Es gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_n(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n(q,t)}{\partial q_k} \qquad (7)$$

Mit

$$T = T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 \qquad (8)$$

ergibt sich

$$T = T(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2} \sum_n m_n \left[\sum_k \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \left[\sum_i \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

$$+ \sum_k \underbrace{\sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial t}}_{m_{ik}} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_n m_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^2$$

$$\equiv \sum_{i,k} m_{ik}(q,t) \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_k b_k(q,t) \dot{q}_k + c(q,t) \qquad (9)$$

<u>Bem:</u> • Die Größe T in (8) und (9) bezeichnet

verschiedene Funktionen der Argumente,
stellt aber die gleiche phys. Größe dar.

- Da $\dot{x}_n$ linear in $\dot{q}_k$ ist (7), ist die kin. Energie maximal quadratisch in den $\dot{q}_k$

- Hängen die x_n nicht explizit von der Zeit ab, $x_n = x_n(q)$ so wird Gl. (9)

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i,k} m_{ik}(q)\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k$$

Wir bilden die Ableitungen

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} \overset{(8)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} \overset{(7)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \qquad (12)$$

$$\Big[\ \frac{d}{dt}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_l \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_l\, \partial q_k}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_n}{\partial t\, \partial q_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_l \frac{\partial x_n}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial x_n}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d x_n}{dt}\ \Big]$$

<u>Beachte</u>: Der erste und zweite Term von (12) kommt auch in (5) und (10) vor!

Def: Verallgemeinerten Kräfte

$$Q_k = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \qquad (13) \qquad k = 1, \dots, f$$

Damit wird aus (5) mit (10), (12)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (14)$$

Betrachte konservative Kräfte

$$F_n = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}$$

Mit Trafo $x_n = x_n(q,t)$ ist

$$U(q,t) = U(x_1(q,t), \dots, x_{3N}(q,t))$$

Damit ergibt sich die verallg. Kraft

$$Q_k = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\sum_n \frac{\partial U(x)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k} \qquad (15)$$

Damit wird (14) (da $\partial U / \partial \dot{q}_k = 0$)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} \qquad (16)$$

Def der sog Lagrange Funktion

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,t)} \qquad (17)$$

Damit

Damit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k}} \qquad (18)$$

Lagrange-Gl. (2. Art)