Lagrange Formalismus

verallg. Koord. $q = (q_1, \dots, q_f)$ $\quad f = 3N - R$

" Geschw. $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

$L(q, \dot{q}, t) = T - U$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad k = 1, \dots, f$$

Energieerhaltung

Wir betrachten

$$\frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\partial L / \partial q_k} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$\rightarrow$ Erhaltungssatz

Wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ erhalten.

$\hookrightarrow U = U(q) \neq U(q, t)$

Hängen zB nicht explizit von der Zeit ab, $x_n = x_n(q) \neq x_n(q, t)$

sowie das Potential U nicht explizit von den Geschwind., $U = U(q)$

ist $T = \sum_{k,l} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = T(q, \dot{q})$ $\rightarrow$ Gl. (9) Vorlesung letzter Mo und $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2\, T(q, \dot{q})$

Damit folgt mit $\partial L / \partial t = 0$

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = T + U = E = \text{const.}$$ Energie-erhaltung

4. Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Lagrange-Formalismus erleichtert das Finden von Erhaltungsgrößen.

Def: 1.) Zyklische Koordinate q_k

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (1)$$

2.) Verallgemeinerte (oder "kanonisch konjugierter") Impuls

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (2)$$

Mit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

Wenn q_k zyklisch, ist p_k erhalten

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad p_k = \text{const.}} \qquad (3)$$

Bsp: freies Teilchen

$L = T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$ hängt nicht von $\vec{r}$ ab

$\rightarrow$ $\vec{r}$ ist zyklische Koord.

$\rightarrow$ damit $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ erhalten

Bem: Bezeichnung verallg. Impuls p

$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - U(r) \quad \rightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ "kinematische Impuls"

Die Äquivalenz zwischen verallg. Impuls (2) und kinematischen Impuls mir gilt für Geschw.-unabhängige Potentiale

(Gegen-) Bsp: elektromagn. Pot mit Vektorpot. $\vec{A}$

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \qquad \text{kan. Impuls}$$

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - q\vec{A} \qquad \text{kinem. "}$$

Gl. (3) beschreibt Zusammenhang zwischen

- Symmetrie oder Invarianz
  z.B. System verändert sich nicht bei Translation in q_k
  d.h. L kann nicht von q_k abhängen $\quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$
  und

- Erhaltung
  zugehöriger verallg. Impuls p_k ist erhalten: $\frac{d p_k}{dt} = 0$

allg. Idee:

geg: Erhaltungsgröße f, mit $\frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t) = 0$

bildet eine "Konstante der Bewegung"

oder "erstes Integral"

→ erleicht Lösung der Lagrange-Gl.

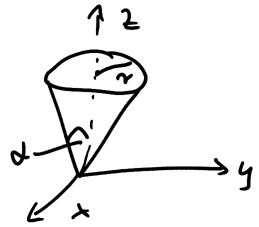
→ Wähle verallg. Koord. so, da möglichst viele Erhaltungsgrößen aufgestellt werden, da

- jede Erhaltungsgröße (z.B. E, $\vec{p}$, $\vec{L}$) verringert die Anzahl der Integrationen der Bew. GL um 1.

- Erh. größen sind nützlich bei Interpretation
  z.B. Drehimpulserh. $\longrightarrow$ 2. Keplersche Gesetz

- geg. genügende Anzahl von Erhalt. größen
  $\rightarrow$ System kann nicht chaotisch sein

<u>Bsp</u>: <u>Kreiskegel</u>:



verallg. Koord. r, φ

$$L = \frac{m}{2}\left[r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2(1+\cot^2\alpha)\right] - mg\cot\alpha\, r$$

<u>Bew. GL</u>: $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \qquad (1)$

$(1+\cot^2\alpha)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + g\cot\alpha = 0 \qquad (2)$

L hängt nicht von φ ab $\rightarrow$ φ ist zykl. Koord.

$$\rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \qquad (3)$$

- Erhaltung der z-Komp. des Drehimpulses
- Energieerhaltung

$E = T + U = \text{const.} \qquad (4)$

(3) und (4) sind DGL 1. Ord.
während Gl. (1), (2) DGL 2. Ord. sind.
$\rightarrow$ Leite (3), (4) aus (1), (2) her:

1) Multiplikation (1) $\cdot\, r$: $\quad 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(r^2 \dot\varphi\right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \dot\varphi = \text{const.}$$

2.) –"– von (2) mit $\dot r$ und Gl. (3):

$$(1+\cot^2\alpha)\,\dot r\,\ddot r - \dot r \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^3} + g \cot\alpha\, \dot r = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[(1+\cot^2\alpha)\frac{\dot r^2}{2} + \frac{1}{2m^2r^2}p_\varphi^2 + g\cot\alpha\, r\right] = 0$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{m}\right) = 0$$

Integration von (4) mit

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left[E - \frac{m}{2}\frac{p_\varphi^2}{m^2r^2} - mg\cot\alpha\right]\frac{2}{m}\frac{1}{(1+\cot^2\alpha)}$$

$$1+\cot^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1/\sin^2\alpha$$

Separation der Variablen:

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - mg\cot\alpha\, r\right]}\ \sin\alpha} \qquad (5)$$

und damit $r(t)$

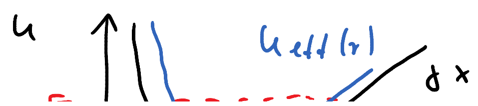
Damit kann Gl. (3) integriert werden

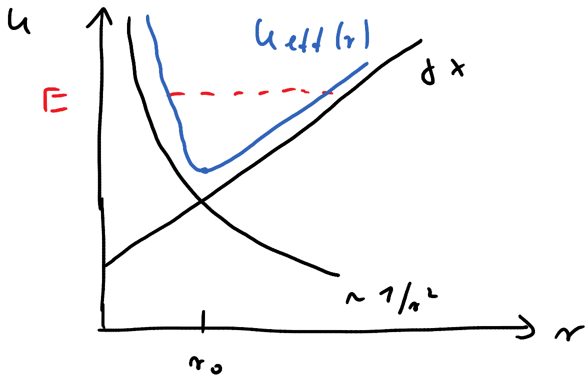
$$\varphi(t) = \frac{p_\varphi}{m}\int \frac{dt}{r^2(t)} \qquad (6)$$

<u>Vgl mit Zentralproblem:</u> effektives Potential

$$U_{eff}(r) = \underbrace{mg\cot\alpha}_{\gamma}\, r + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

Zentrifugalterm





Minimum bei $\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = \gamma - \frac{p_\varphi^2\, 2}{2m\, r^3} = 0$

$$r_0 = \left(\frac{p_\varphi^2}{m\gamma}\right)^{1/3}$$

Noether - Theorem

Emmi Noether (1882- 1935), deutsche Mathematikerin

Verallg. des Zusammenhangs zwischen Invarianz und Erhaltung

geg: $L = L(q, \dot{q}, t)$ mit Lösung $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$

Ist L invariant unter der Trafo

$$q_i(t) \to q_i(t, \alpha) \qquad (1)$$

also $$L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) \qquad (2)$$

so ist die Größe

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Bigg|_{\alpha=0} \qquad (3)$$

erhalten. "Noether Theorem"

Bsp für Trafos sind

- Translation $q_i = q_i + \alpha$
- Rotation um geg. Achse mit Winkel α

Beweis:
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)\Big|_{\alpha=0} \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$0 = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \Bigg|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_i \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]}_{} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Bigg|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Bigg|_{\alpha=0}}_{} = 0$$

$= 0$, wenn q_i Lösung $\qquad\qquad\qquad\qquad = 0$ ✓

<u>Bem:</u> Beweis gilt für alle α, also auch für $\alpha = 0$

Mit $\alpha = 0$ werden oft Ausdrücke einfacher.