Diskussion des Zweikörperproblems

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - u_{eff}(r')}}$$

$r_0, \varphi_0, E, \ell \;\hat{=}\;$ Anfangsbedingungen des 2D Problems

$(\; z(0) = \dot{z}(0) = 0 \qquad \longrightarrow$ 3D „ $)$

- Wegen $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}$ kann $\dot{\varphi}$ nicht das Vorzeichen wechseln

$\longrightarrow$ Drehung immer in selbe Richtung

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + u_{eff}(r) \geq u_{eff}(r)$$

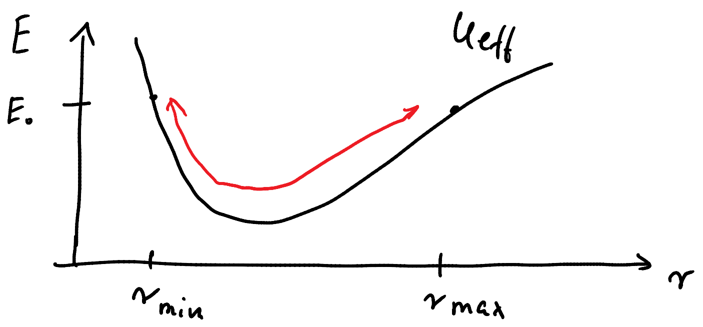
d.h. für $E = u_{eff}$ ist $\dot{r} = 0 \longrightarrow$ Umkehrpunkte

- Bsp: Sei $u_{eff}(r) = \alpha r^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$

$\alpha > 0$

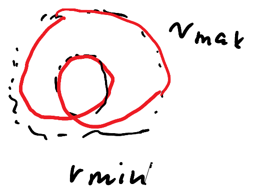
$\ell \neq 0$

$E = E_0$



- r oszilliert zwischen r_{min} und r_{max}
- Form der Bahnkurven zwischen je 2 Umkehrpunkte gleich

$\longrightarrow$ Bahn ist durch eine Teilschleife festgelegt



- Bahn ist nicht notwendigerweise geschlossen

$\Delta\varphi$ zwischen 2 Umkehrpunkten

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l^2/r^2 \, dr}{\sqrt{2\mu\,(E - U_{eff}(r))}}$$

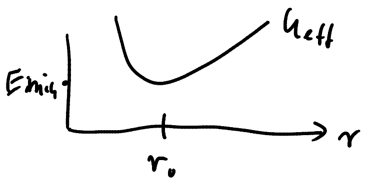
$\to$ geschlossen, wenn nach n Umläufen

$$n\,\Delta\varphi = m\pi \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

<u>Bsp:</u> r^2 Potential $\quad \Delta\varphi = \pi$

$1/r$ " $\quad \Delta\varphi = 2\pi$

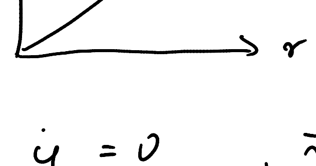
- Für $E = E_{min}$



ist $r = r_0 = const$

$\to$ Kreisbahn mit $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu r_0^2} t$

- Für $l = 0$ verschwindet Zentrifugalbarriere

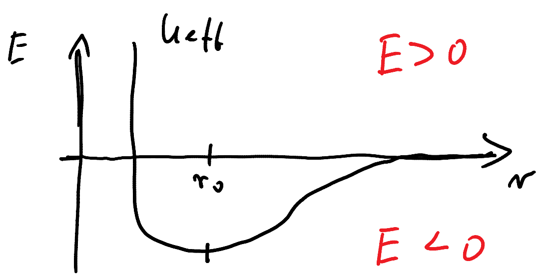


- $\dot\varphi = 0$, $\dot{\vec r} \parallel \vec r$ $\to$ Bewegung zentral

- je nach Potential wird auch $r \to 0$ möglich

(unrealistisch, wegen endlicher Größe der Teilchen)

• <u>Standardfall</u> $l \neq 0$



$u_{eff} \xrightarrow{r \to 0} \infty$ (endliche Größe)

$u_{eff} \xrightarrow{r \to \infty} 0$ (WW nicht)

$u_{eff}(r_0) = \min.$ "gebundener Zustand"

$E < 0$: gebundene Bewegung (auch bei H-Atom, Elektronenstruktur, H_2-Molekül, Kernbewegen)

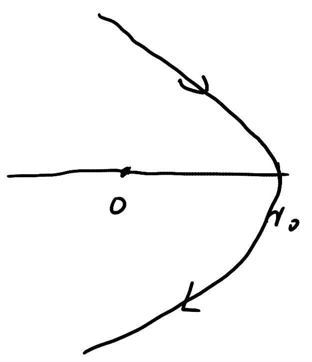
$E > 0$: Streuung

d.h. Teilchen kommt aus dem Unendlichen,

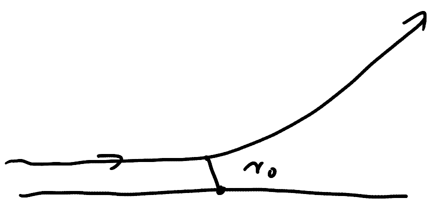
fliegt bis zum Umkehrpunkt r_0

und verschwindet wieder

Abstoßung bei r_0 wegen Zentrifugalbarriere $\frac{l^2}{2\mu r^2}$



anziehendes Pot.



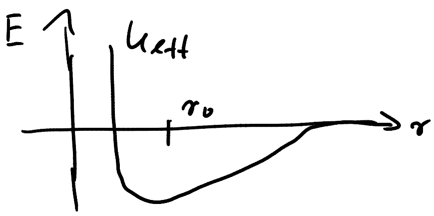
abstoßendes Pot.

Keplerproblem

d.h. $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ $\quad (\alpha > 0)$

$\alpha = G m_1 m_2$ Gravitation-Potential

$\alpha = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ Coulomb - "



$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\,l^2}{2\mu r^3} \overset{!}{=} 0 \qquad r_0 = \frac{l^2}{\alpha\mu}$$

Mit:

$$\varphi = \int dr \, \frac{l/r^2}{\sqrt{2\mu E + 2\mu\alpha/r - l^2/r^2}}$$

mit $r = 1/s$, $s = 1/r$, $\frac{ds}{dr} = -\frac{1}{r^2}$

$$\varphi = -\int ds \left(2\mu E/l^2 + 2\mu\alpha s/l^2 - s^2\right)^{-1/2}$$

und $\int dx \, (c + 2bx - x^2)^{-1/2} = -\arccos \frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}$

ist

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \arccos \frac{1/r - \mu\alpha/l^2}{\sqrt{\mu^2\alpha^2/l^4 + 2\mu E/l^2}}$$

$$= \arccos \frac{l^2/\alpha\mu \left(\frac{1}{r}\right) - 1}{\sqrt{1 + 2l^2 E/\mu\alpha^2}}$$

$$= \arccos \frac{[illegible]}{\sqrt{1 + 2\ell^2 E/\mu\alpha^2}}$$

Mit $p = \frac{\ell^2}{\alpha\mu}$ (Abstand r_0)

$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\ell^2 E/\mu\alpha^2}$ "Exzentrität"

$\varphi_0 = 0$

folgt $\varphi = \arccos \frac{p/r - 1}{\varepsilon}$

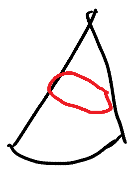
oder $\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}}$

Polar-Gl. für <u>Kegelschnitte</u>:

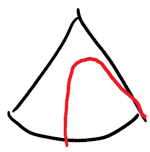
$\varepsilon > 1$ $E > 0$ Hyperbeln

$\varepsilon = 1$ $E = 0$ Parabel

$\varepsilon < 1$ $E < 0$ Ellipse



Ellipse



Hyperbel

<u>Bsp:</u>

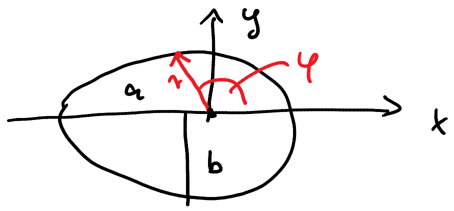
Merkur: $\varepsilon = 0.206$ (schwer zu beobachten)

Erde: $\varepsilon = 0.017$

Mars: $\varepsilon = 0.093$ (an ihm entdeckt)

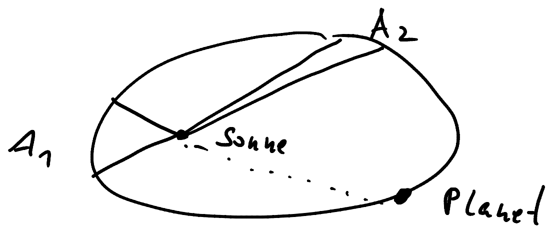
<u>gebundene Bewegung → Keplerschen Gesetze</u>

1.) Planetenbahnen sind Ellipsen mit Sonne in einem Brennpunkt



$$\frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. <u>Flächensatz</u>



Die vom Fahrstrahl pro Zeit dt überstrichene Fläche
$dA = r^2 \, d\varphi / 2$ ist konstant

3. Umlaufzeit T und die große Halbachse a
verhalten sich wie

$$T^2 = \text{const } a^3$$

- Kepler (1571–1601): aufgrund von Beobachtungen der Planeten

- Newton leitete Gravitationsgesetz aus Keplerschen Gesetzen ab

- KG3: $r^3 / T^2 = \text{const}$

<u>Kreisbahn</u>: $\omega = 2\pi / T \rightarrow r^3 \omega^2 = \text{const}$

$$r \, \omega^2 = \text{const} \, \frac{1}{r^2} \quad (*)$$

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}(t) \sim \omega^2 \vec{r}(t) \qquad |\vec{F}| \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{Gravitationsgesetz}$$

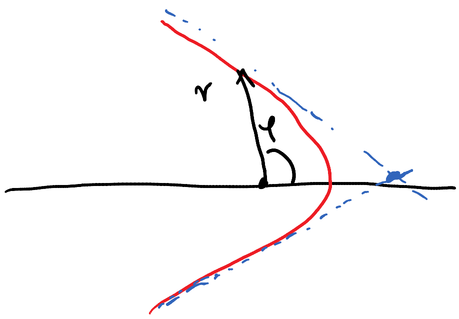
Streuung

- $\varepsilon = 1,\ E = 0 \rightarrow$ Parabel als Grenzfall
- $\varepsilon > 1,\ E > 0 \rightarrow$ Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \longleftrightarrow \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi$$

attraktives Potential: $\alpha > 0$

$$\rightarrow \quad p = \frac{\ell^2}{\mu \alpha} > 0$$



Richtung
Asymptoten: def durch $\cos\varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$

repulsives Potential: $\alpha < 0 \rightarrow p < 0$