8.5.18

Dienstag, 8. Mai 2018
10:16

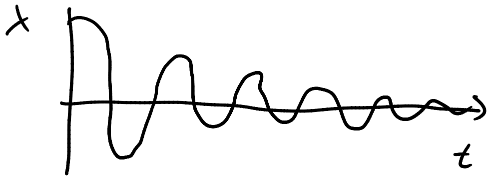
Gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

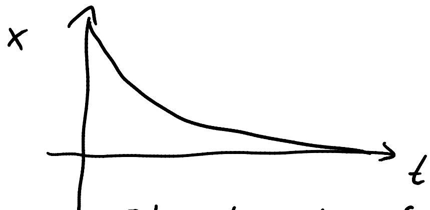
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1/2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dämpfung}}}{-\gamma/2} \pm \underbrace{\tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}$$

für $\omega > 2\gamma$ → Schwingung
sonst → Dämpfung



gedämpfte Schw.



überdämpfte Schw.

Der getriebene Oszillator

$$\underbrace{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{homogene DGL}} = f(t)$$

externer Antrieb $f(t)$
"Inhomogenität" der DGL

Lsg der DGL: $x_{tot} = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\text{bereits bekannt}} + \underbrace{x(t)}_{\text{partikuläre Lsg.}}$

Betrachten periodischen Antrieb

$$f(t) = f \cos\omega t = \frac{f}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

bzw $f(t) = f e^{\pm i\omega t}$

mit Exp. ansatz: $x(t) = A_\pm e^{\pm i\omega t}$

Eingesetzt: $\left[-\omega^2 \pm i\omega\gamma + \omega_0^2\right] A_\pm = f$ [Erweitern mit z^*]

$$\rightarrow \quad A_\pm = f \, \frac{\omega_0^2 - \omega^2 \mp i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

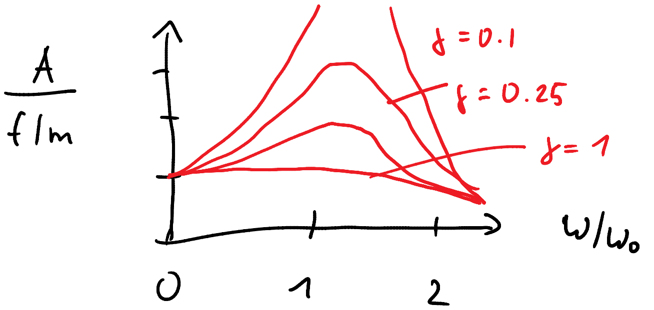
$$\rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}\left(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t} \right)$$

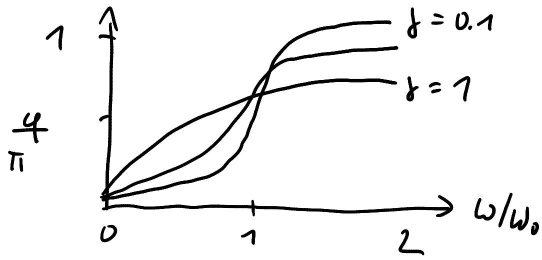
$$= f \, \frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega \sin\omega t}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad = a\cos\omega t + b \sin\omega t$$

$$= A\cos(\omega t - \varphi)$$

$A = \sqrt{a^2+b^2} \quad \rightarrow \quad A(\omega) = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$ Amplitude

$\tan\varphi = \dfrac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\dfrac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$ Phase





Resonanz bei $\omega = \omega_0$, A groß für γ klein

$\gamma \to 0$ und $\omega \to \omega_0$ "Resonanzkatastrophe"

z.B. Brücke, Tacoma Narrows Bridge 1940

Gesamtlsg $x_{tot}^{(t)} = x_{hom}^{(t)} + x(t)$

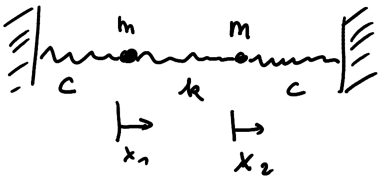
$$\xrightarrow{t\to\infty} x(t) \qquad \text{"stationäre Lösung"}$$

Resonanz wichtig: - schwingende Karosserieteile

- Schwingkreis (E-Dynamik)

- Molekülschwingungen etc

Gekoppelte Oszillatoren



x_i Auslenkungen aus Ruhelage

$$m\ddot{x}_1 = -c\,x_1 + k(x_2 - x_1) \qquad (1)$$ System von gekoppelten DGLn

$$m\ddot{x}_2 = -c\,x_2 - k(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

Mit $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$ $\qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$

ist (1) + (2) $\qquad m\ddot{y}_1 = -c\,y_1$ $\qquad \rightarrow$ entkoppelte DGLn

(1) − (2) $\qquad m\ddot{y}_2 = -(c + 2k)\,y_2$

mit Frequenzen $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$ Eigenfrequenzen

Anfangsbed.: z.B. $x_2(0) = a$, $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$y_1(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega_1 t \quad , \quad y_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega_2 t$$ Eigenschwingungen

Eingesetzt: $\qquad x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$

$\qquad x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$

Zusammenhang mit Eigenwertproblem

$$m\ddot{\vec{x}} = -V\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \quad V = \begin{pmatrix} c+k & -k \\ -k & c+k \end{pmatrix}$$

Ansatz: $x_i(t) = a_1 e^{i\omega t}$

$\ddot{x}_i(t) = -\omega^2 a_i e^{i\omega t}$

eingesetzt: $-m\omega^2 e^{i\omega t}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -V\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

mit $\lambda = m\omega^2$

$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(V - \lambda \mathbb{1})\,\vec{a} = 0}$$ Eigenwertgleichung (1)

$V\vec{a}_i = \lambda \vec{a}_i$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ Lsg für $\det(V - \lambda \mathbb{1}) = 0$ „charakteristische Gleichung"

$$(c + k - \lambda)^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2(c+k)\lambda + (c+k)^2 - k^2 = 0$$

$\rightarrow \lambda_1 = c \; ; \; \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ „Eigenfrequenzen"

$\lambda_2 = c + 2k \; ; \; \omega_2 = \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$ Eigenwerte

Lsg. der Eigenwertgl. (1) für die Eigenwerte ergibt

$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ „Eigenvektoren"

hier Eigenschwingungen

$$V \cdot \vec{a}_i = \lambda_i \vec{a}_i$$

Operator Abbildung Matrix — Eigenvektor — Eigenwert — Eigenvektor

Eigenschwingungen

z.B. betrachte Molekül mit N Atomen (nicht lineare Mol.) (für lin. Mole 3N−5 FG)

$3N - 3 - 3 = 3N - 6$ Freiheitsgrade

$$\underbrace{3N-3}_{\text{Translation}} - \underbrace{3}_{\text{Rotation}} = 3N-6 \text{ Freiheitsgrade für interne Bewegung}$$

$f = 3N-6$ interne FG $x_1 \dots x_f$

mit Gleichgewichtslage $x_i^{(0)}$, $\rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_{x_i^{(0)}} = 0$

und Potential $V(x_1, \dots, x_f)$

Entwickle V um $\vec{x}^{(0)}$

$$V(x_1,\dots,x_f) = \underbrace{V(x_1^{(0)},\dots,x_f^{(0)})}_{\text{oEdA } = 0} + \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_{x_i^{(0)}}}_{=0} (x_i - x_i^{(0)})$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}_{} \underbrace{(x_i - x_i^{(0)})}_{\equiv x_i} \underbrace{(x_j - x_j^{(0)})}_{\equiv x_j} + \dots$$

Hessematrix: $V_{ij} = V_{ji}$

$\rightarrow V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\, x_i x_j$ harmonische Näherung

Bew Gl: $m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_j V_{ij} x_j$

massenbehaftete Koordinaten: $q_i = \sqrt{m_i}\, x_i$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{q}_i + \sum_j v_{ij} q_j = 0} \qquad v_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}$$

Exp. Ansatz: $q_i(t) = a_i e^{i\omega t}$

$\rightarrow \sum_j v_{ij} a_j - \omega^2 a_i = 0$ charakteristische Gl.

$$\rightarrow \quad \sum_j V_{ij}\, a_j - \omega^2 a_i = 0$$ charakteristische Gl.

Mit

$$V = \{V_{ij}\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ist $$(V - \lambda \mathbb{1})\, \vec{a} = 0$$ Eigenwertproblem