Newtonsche Mechanik: theoretische Konzepte

1. Def.: – Masse, Kraft, Energie ....
– Inertialsystems, beschleunigte Bezugssysteme
– konservative / dissipative, innere / äußere Kräfte

2. Bew.Gl.: N Teilchen, konservative Kräfte mit Pot. $U(r)$
$r = (r_1, \ldots, r_{3N})$

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i}$$

gewöhnliche DGL 2. Ord
i. A. nicht linear

3. Erhaltungssätze

Schwerpunkt $\vec{R}$, $\vec{P}$, $M = \sum_i m_i$

• $\frac{d}{dt}\vec{P} = M \cdot \ddot{\vec{R}} = \underbrace{\vec{F}^A}_{\text{äußere Kräfte}} \overset{\text{abgeschlossenes System}}{=} 0 \leftrightarrow \vec{P} = \text{const}$

Impulserhaltung

• $\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A = \vec{M} \longrightarrow 0 \leftrightarrow \vec{L} = \text{const}$

Drehimpulserhaltung

• $\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_i \vec{F}_i^{diss} \cdot \dot{\vec{r}}_i \xrightarrow{\text{Kräfte konservativ}} 0$ $\quad E = T + U = \text{const}$

Energieerhaltung

Alternativ:

Hamilton-Fkt mit Impuls $p = (p_1, \ldots, p_{3N})$ $\hat{=}$ Gesamtenergie

$$H(r, p) = T(p) + U(r) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$$

$$\rightarrow \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}$$

$2 \times 3N$ DGL 1. Ord.

(r, p) bilden den $2 \cdot 3N$ dim. Phasenraum

- wichtig für Übergang zur QM und statistischen Mechanik
- beschreibt Bewegung vollständig, d.h. geg. Bew. Gl mit

Anfangsbedingungen $r_i(0)$, $p_i(0)$, so ist $r(t)$ und $p(t)$ für alle Zeiten vollständig bestimmt. Man sagt, die klass. Mechanik ist deterministisch.

Nichtlineare Dynamik und Chaos

- Man kann zeigen: Existieren für ein System mit $2f$-dim Phasenraum f Erhaltungsgrößen, so heißt das System integrabel.

Bsp: 1.) Konservative Bewegung in 1D $\rightarrow f=1$
Energie ist erhalten $\rightarrow$ System ist integrabel

2.) 2-Körperproblem: $f=6$
Erhaltung von Energie, Gesamtimpuls, $\vec{L}^2$, L_z $\rightarrow$ System ist integrabel

3.) 3-Körperproblem: $f=9$
6 Erh.größen $\longrightarrow$ i.A. nicht integrabel, kann chaotisch sein (Poincaré um 1900)

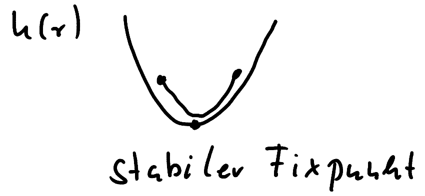
Grund: Nichtlineare Bew. Gl. können instabile Lösungen haben d.h. bei geringstfügiger Änderung der Anfangsbedingungen zeigt System für lange Zeiten eine qualitativ andere Bewegung
"Schmetterlingseffekt"
sog. deterministisches Chaos

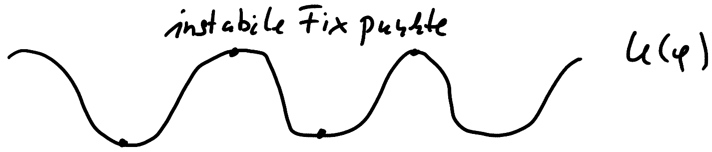
Bedingung für chaotisches Verhalten

- Anzahl der Freiheitsgrade $f \geq 2$
- Nichtlinearität der Kraft

<u>Bsp</u>: Vergleiche

harm. Oszillator $F \sim r$, $U(r) \sim r^2$; Pendel: $F \sim \sin\varphi$, $U \sim \cos\varphi$

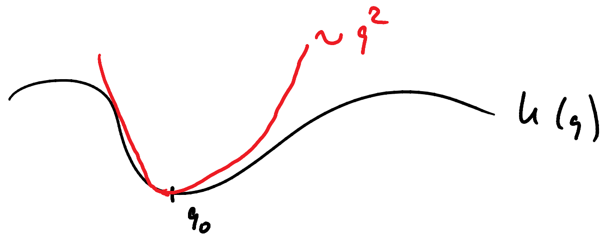




7. Schwingungen

Harm. Oszill. ist zentrales Modell der Physik

- analytisch lösbar, auch mit Reibung und Antrieb und in vielen Dimensionen
- lineares System



1D System mit Ham. Fkt.

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + u(q)$$

das bei $q = q_0$ eine stabile Gleichgewichtslage besitzt.

Idee („harmonische Näherung"): Taylor Entwicklung von u um q_0

$$u(q) = \underbrace{U(q_0)}_{\text{oEdA } = 0} + \underbrace{\left.\frac{du}{dq}\right|_{q_0}}_{= 0,\text{ da GGwslage}} (q-q_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{d^2u}{dq^2}\right|_{q_0}}_{= k} (q-q_0)^2 + \ldots\ldots$$

$$\approx \frac{1}{2} k (q-q_0)^2 \equiv \frac{k}{2} x^2$$

Bew Gl: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$

oder: $m\ddot{x} + kx = 0$

Lösung sind $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ mit $\omega^2 = k/m$

Die allg. Lösung mit Anfangsbedingungen $x_0 = x(0)$, $p_0 = p(0)$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + p_0/m\omega \, \sin \omega t$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega t - m x_0 \omega \sin \omega t$$

Mit $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $\quad (i^2 = -1)$

können wir alternativ $e^{\pm i\omega x}$ als Lösung ansetzen, z.B.

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \right)$$

Im folgenden werden Schwingungen in 1D mit

Reibung $\quad F_R = -\gamma \dot{x}(t)$

und einer zeitabhängigen externen Kraft

$F_{ext}(t)$ $\quad$ "Antrieb"

betrachtet.

Gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Grenzfälle: $-\ \gamma = 0 \rightarrow$ harm. Oszill., $\quad x \sim e^{\pm i\omega t}$

$-\ \omega = 0, \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0; \quad v = \dot{x},$

$\dot{v} = -\gamma v \quad \rightarrow \quad v \sim e^{-\gamma t}$

Ansatz: $\quad x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$

eingesetzt: $\quad (\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega^2)\, e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$ $\quad$ charakteristische Gleichung

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

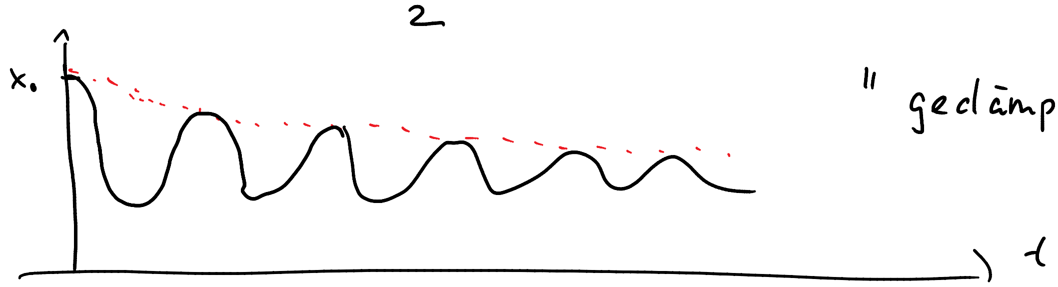
$\rightarrow$ i.A. 2 Lösungen $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

<u>$D < 0$:</u> d.h. $\gamma < 2\omega$, komplexe Lösungen

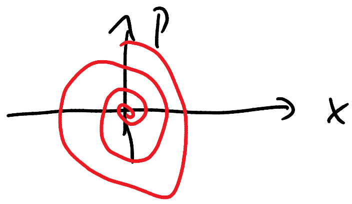
$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$$

<u>allg. Lsg:</u> $x(t) = e^{-\gamma/2\, t}\left(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{i\Omega t}\right)$

$$\Omega = \frac{\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}}{2} \xrightarrow{\gamma \to 0} \omega$$



"gedämpfte Schwingung"



γ bewirkt Dämpfung und Änderung der Frequenz.

<u>$D > 0$:</u> $\gamma > 2\omega$: "überdämpfte Schwingung"

$$\rightarrow \quad x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

<u>$D = 0$:</u> $\gamma = 2\omega$

$\rightarrow$ wir erhalten $x(t) = C\, e^{-\gamma/2\, t}$

d.h. nur eine Lsg. anstelle von 2 unabhängigen Lsgn.

<u>Variation der Konstanten:</u> $x(t) = C(t)\, e^{-\gamma/2\, t}$

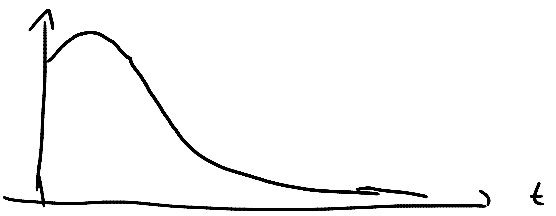
$$\dot{x} = \left(\dot{C} - \frac{\gamma C}{2}\right) e^{-\gamma/2\, t}$$

$$\ddot{x} = \left(\ddot{C} - \gamma \dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4}\right) e^{-\gamma/2\, t}$$

<u>eingesetzt:</u>
$$0 = \left(\ddot{C} - \gamma \dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4} + \gamma \dot{C} - \frac{\gamma^2 C}{2} + \omega^2 C\right) e^{-\gamma/2\, t}$$
$$= \left(\ddot{C} + C\underbrace{\left(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)}_{=0}\right) e^{-\gamma/2\, t}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{C} = 0 \quad , \quad C(t) = C_0 + C_1 t$$

$\rightarrow$ <u>allg:</u> $x(t) = C_0 e^{-\gamma/2\, t} + C_1 t\, e^{-\gamma/2\, t}$



"kritische gedämpfte Schwingung"

<u>Bem:</u>
- Allg. <u>lineare</u> DGL (mit konstanten Koeffizienten) n-ter Ordnung können durch einen Exponentialansatz
  $\rightarrow$ charakteristische Gl. ist Polynom vom Grad n

- Physikalische Bedeutung der Nullstellen von Polynomenen:

  Komplexe Nullstellen $\hat{=}$ oszillatorische Lösungen

  Reelle Nullstellen $\hat{=}$ zerfallende Lösungen