Lagrange-Gleichungen

N Teilchen, $x = (x_1, \dots, x_{3N}) = \{x_n\}$ $\quad n = 1 \dots 3N$

R Zwangsbedingung $\quad g_\alpha(x,t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$

Lagrange-Gl. 1. Art: $\quad m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}$

Verallg. Koord: $\quad q = (q_1, \dots, q_f) = \{q_k\} \quad k = 1, \dots, f \quad f = 3N - R$

mit $x_n = x_n(q,t)$, $\quad g_\alpha = g_\alpha(q,t) = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_k} = 0$$

Eliminierung der Zwangskräfte

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{Q_k} \qquad k = 1, \dots, f \quad \text{Gl. ohne Zwangskräfte}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k}$$

Lagrange-Fkt: $\quad L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q,t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \qquad \text{Lagrange-Gl. (2. Art)} \qquad (18)$$

Diskussion:

1.) Gl. (18) stellt ein System von $f = 3N - R$ DGLn 2. Ord. dar d.h. eine Vereinfachung der Lagrange-Gl. 1. Art, aber diese explizit geg. Zwangskräfte

2.) Da es i. A. unterschiedliche verallg. Koord. q_k für geg Problem gibt, ist L nicht eindeutig. Weiterhin sind Zusatzterme zu L möglich, die die Bew. Gl nicht ändern (Siehe Übung)
Daher ist L eine theoretische Größe, im Vergleich zu direkt messbaren Größen wie T und U.

Die allg. Form der Lagrange-Gl. bleibt aber gleich
"Forminvarianz"

[Nicht so bei Newton-Gl. z.B. in Polarkoord gilt

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{und} \quad m r^2 \ddot{\varphi} \neq -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$
]

3.) L ist eine <u>skalare</u> Größe → leichter aufzustellen als vektorielle Kräfte im $\mathbb{R}^{3N}$. Zudem ist L eine einfache Funktion der Variablen.

4.) Liegen keine Zwangskräfte vor, sind die q_k einfach die kartesischen Koord x_n und mit

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n^2 - U(x)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = m_n \ddot{x}_n$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = -\frac{\partial U}{\partial x_n}$$

$$\rightarrow \quad m_n \ddot{x}_n = -\frac{\partial U}{\partial x_n}$$

Newton Bew Gl.

5.) Bei geschwindigkeitsabhängigen Potential muss die Def.

der verallg. Kraft erweitert werden, $U = U(q, \dot q, t)$

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_k}$$

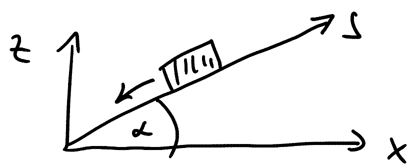
$\rightarrow$ führt wieder auf Lagrange-Gl.

Wichtigstes Bsp ist Lorentzkraft mit Potential

$$U(\vec r, \dot{\vec r}, t) = \underbrace{e\,\phi(\vec r,t)}_{\text{el. Pot.}} - \frac{e}{c}\underbrace{\vec A(\vec r,t)}_{\text{Vektorpotential}}\cdot\dot{\vec r}$$

6. Wesentlich ist die Wahl der verallg. Koord. q_k, die das betrachtete "System" definieren. Restliche Freiheitsgrade werden vernachlässigt oder über Reibungsterme oder externe zeitabhängige Funktionen berücksichtigt.

<u>Bsp 1:</u> Schiefe Ebene



s ist verallg. Koord.

$$x(t) = s(t)\cos\alpha$$
$$z(t) = s(t)\sin\alpha$$

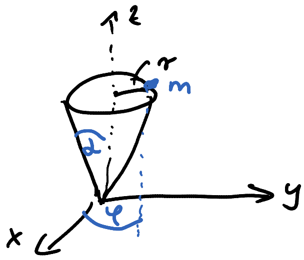
Mit $T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot z^2)$ und $U = mgz$

ist $L(s,\dot s) = T - U = \frac{m}{2}\dot s^2 - mg\sin\alpha\, s$

mit Lagrange-GL $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s} = \frac{\partial L}{\partial s} = -mg\sin\alpha$

mit Lösung: $\quad s(t) = -\frac{g}{2}\sin\alpha\, t^2 + v_0 t + s_0$

<u>Bsp. 2:</u> Kreiskegel



<u>kart. Koord:</u> $\quad L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$

<u>Zylinderkoord:</u>

$$x = r\cos\varphi, \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$y = r\sin\varphi, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$z = r\cot\alpha, \quad \dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$$

$\rightarrow$ verallg. Koord z.B. r, φ

$$L = \frac{m}{2}\left[r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2(1+\cot^2\alpha)\right] - mgr\cot\alpha = L(r,\dot{r},\varphi,\dot{\varphi})$$

<u>Lagrange-GL:</u>

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \boxed{\frac{m}{2}(1+\cot^2\alpha)\,2\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg\cot\alpha = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[2r^2\dot{\varphi}\right] = \boxed{m\left[2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}\right] = 0}$$

<u>Reibungskräfte</u>

z.B. Stokessche Reibungskraft

$$F_n^R = -\gamma_n \dot{x}_n \qquad n = 1,\dots,3N$$

Reibungskräfte kann kein Potential zugeordnet werden

Daher zurück zu Gl. (15)

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = Q_k$$

mit verallg. Kräfte $Q_k^R = \sum_n F_n^R \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$

<u>Rayleighsche Dissipationsfunktion</u>

$$D(\dot{x}) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2$$

$$\rightarrow D(q, \dot{q}, t) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2(q, \dot{q}, t)$$

$$Q_k^R = -\sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \overset{(7)}{=} -\sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial D(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\left[(7): \quad \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right]$$

$\rightarrow$ Lagrange-Gl. mit Reibung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0$$