

Modelling and solving vehicle routing problems

Benjamin Hoffmann, M.Sc.^{1,2}

¹KITE – Kompetenzzentrum für Informationstechnologie
Technische Hochschule Mittelhessen
Friedberg, Hesse, Germany

²School of Computing
Edinburgh Napier University
Edinburgh, Scotland

Operationsmanagement, 17.06.2020

Table of contents

- 1 Einleitung
- 2 Motivation
- 3 Details und Abstraktionen
- 4 Landkarten als Graph
- 5 Definition
- 6 Vokabeltraining
- 7 Literatur

Abschnitt 1

Einleitung

Zielsetzung

- Thema der nächsten Vorlesung: Vehikel-Routing-Probleme mit Zeitfenstern (engl.: Vehicle Routing Problems with Time Windows, VRPTW)
- Zunächst eine illustrative Einführung in die Thematik
- Präsentation zweier Ansätze zur Programmierung/Modellierung
 - JSprit – Java-Bibliothek zur Beschreibung einer Vielzahl von Vehikelroutingprobleme
 - Athos – domänenspezifische Sprache zur Modellierung (dynamischer) Verkehrs- und Routingprobleme
- Möglichkeit zum Testen der erworbenen Kenntnisse im Rahmen einer Studie zur Verwendbarkeit / Bedienbarkeit der beiden Ansätze

Bestellungen aus der Wetterau

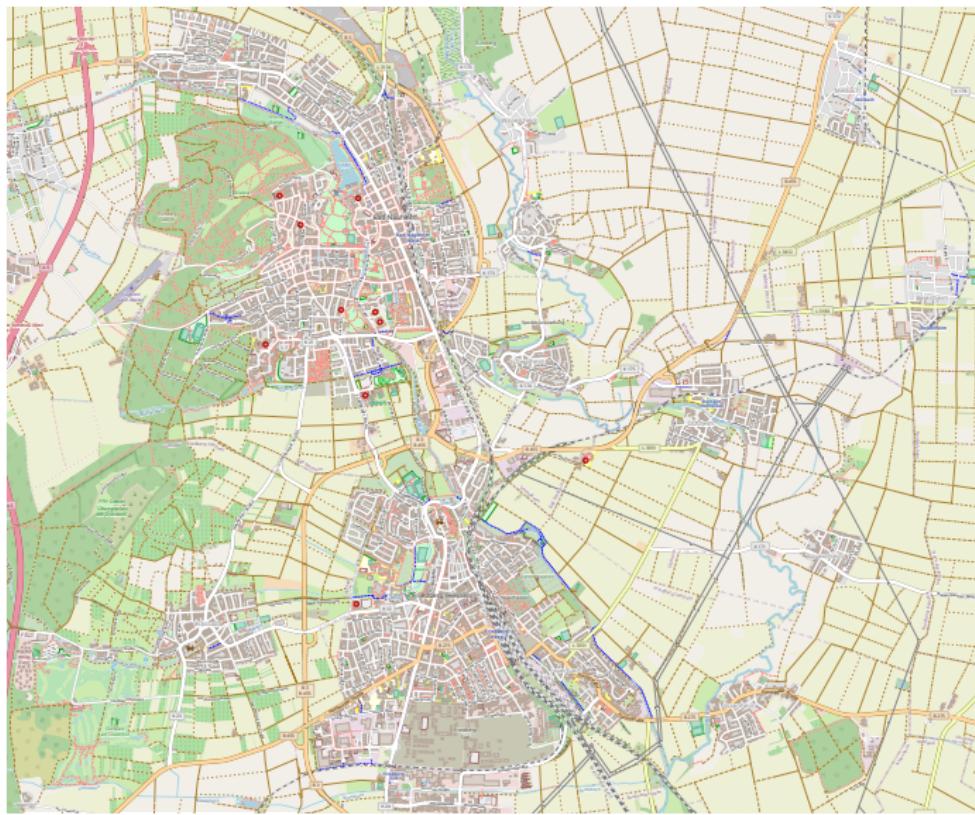


Table of contents

- 1 Einleitung
- 2 Motivation
- 3 Details und Abstraktionen
- 4 Landkarten als Graph
- 5 Definition
- 6 Vokabeltraining
- 7 Literatur

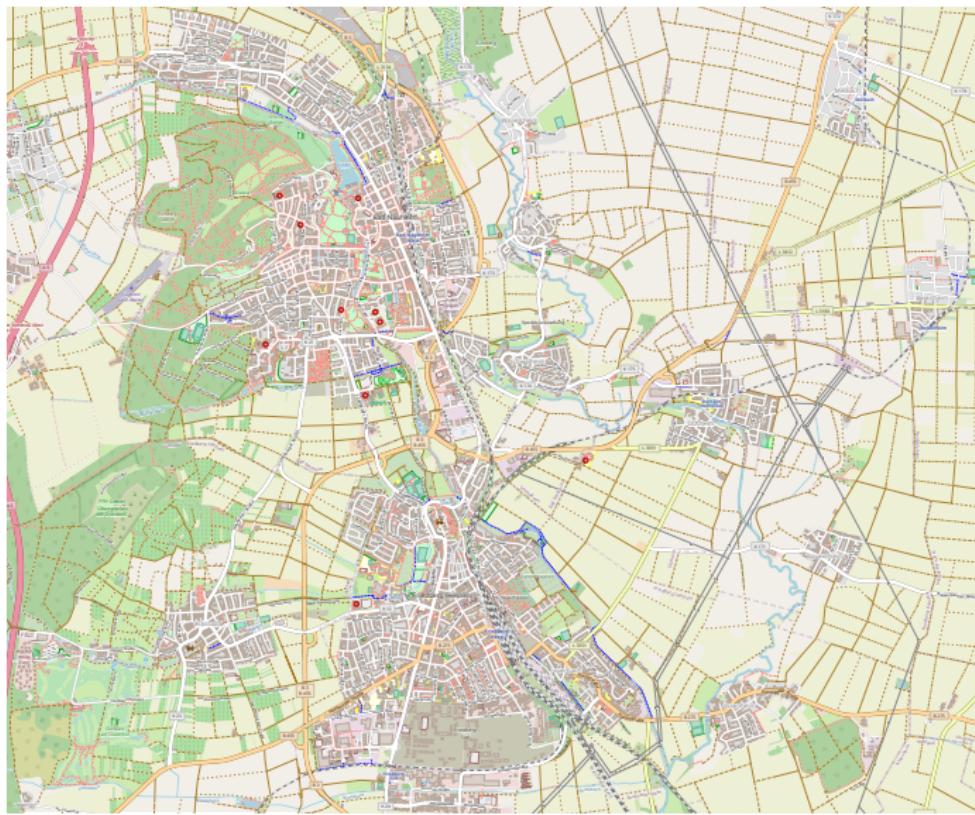
Abschnitt 2

Motivation

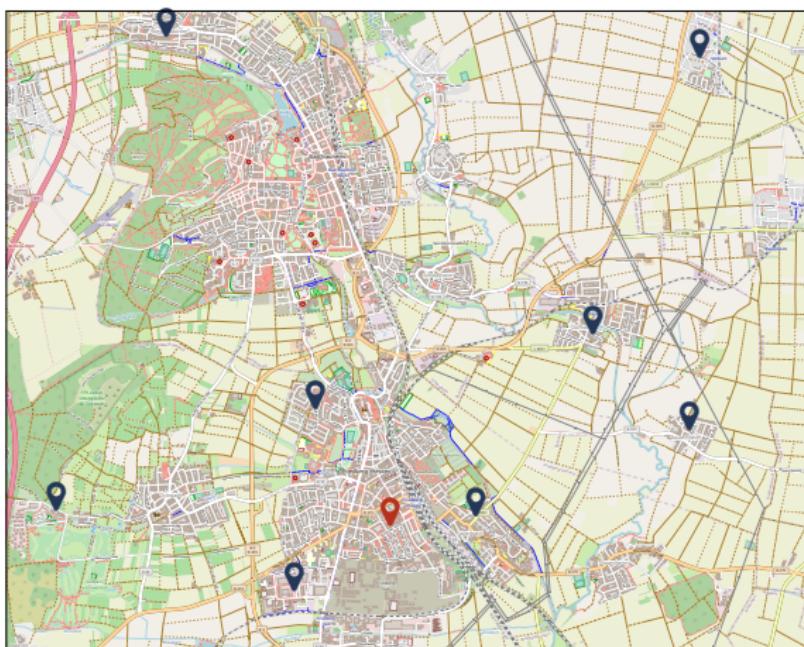
Ein einführendes Beispiel

- Herr Schmidt leitet einen Supermarkt im hessischen Friedberg.
- Im Zuge der SARS-CoV-19-Pandemie hat er sich entschlossen, seinen Kunden einen Lieferservice für Lebensmittel anzubieten.
- Die Kunden können über die Webseite des Supermarktes ein Benutzerkonto erstellen, in dem Daten wie Name, Adresse hinterlegt sind.
- Angemeldete Benutzer können dann einen Großteil des Sortiments online erwerben.
- Kunden können zusätzlich ein Zeitfenster angeben, in dem sie die Lieferung erhalten möchten.

Bestellungen aus der Wetterau



Bestellungen aus der Wetterau 2



- 📍 Lieferausgangspunkt von Herrn Schmidt
- 📍 Kundenbestellung

Der obige Kartenausschnitt zeigt exemplarisch einige der Lieferungen, die am Vormittag des folgenden Donnerstages durchzuführen sind.

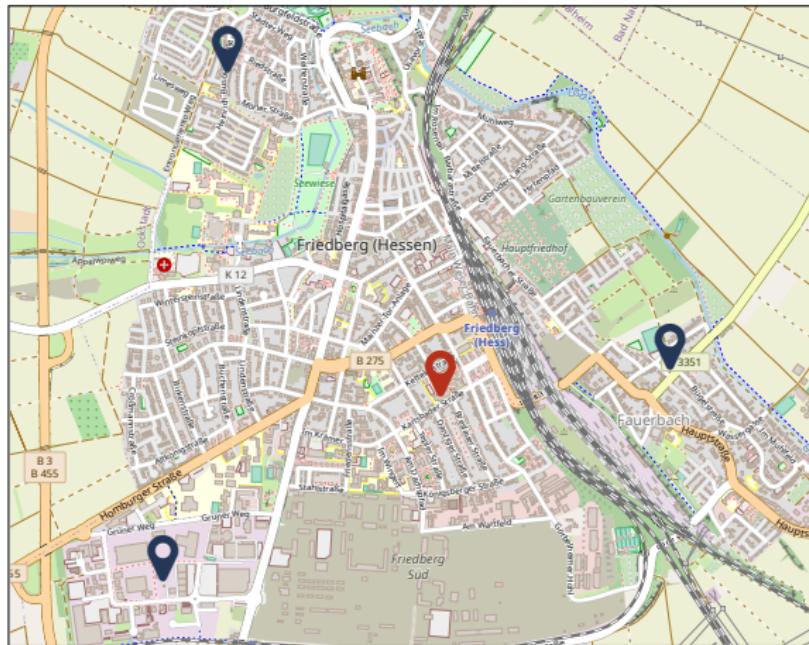
Table of contents

- 1 Einleitung
- 2 Motivation
- 3 Details und Abstraktionen
- 4 Landkarten als Graph
- 5 Definition
- 6 Vokabeltraining
- 7 Literatur

Abschnitt 3

Details und Abstraktionen

Bestellungen aus der Wetterau 3



- 📍 Lieferausgangspunkt von Herrn Schmidt
- 📍 Kundenbestellung

Bestellungen aus der Wetterau 4

Nr	Name	Adresse	Ab	Bis	Bestellung	Bemerkung
1	Anke Löhr	Heinr.-Busold-Str. 4 61169 Friedberg	09:00	09:30	2 Brote 1 Kasten Wasser 1 Sack Kartoffeln 1 Krtn Waschmttl	-
2	Ernst Lamm	Grüner Weg 9 61169 Friedberg	09:00	10:00	2 Kästen Wasser 3 Tiefkühlpizzen 1 Toilettenpapier	Einräumhilfe, Barzahlung
3	Lisa Franz	Bügelstraße 5 61169 Friedberg	08:30	09:00	2 Brote 5 Dosen Ananas 2 Kisten Cola 4 Packg. Reis	6. Stock
:	:	:	:	:	:	:

Das Problem des knappen Stauraums



- Die Fahrzeuge von Herrn Schmidt verfügen über ca. 3000 l Stauraum.
- Um das Problem mathematisch handhabbarer zu machen, setzt Herr Schmidt die **UNitfIX**-Software ein, die sowohl den Stauraum der Lieferwagen als auch den benötigten Stauraum in ein abstrakteres Einheiten-System umrechnet.
- Dadurch wird das Problem besser handhabbarer für einen algorithmischen Lösungsansatz.
- Die **UNitfIX**-Software errechnet eine Kapazität von 200 Einheiten für die Fahrzeuge von Herrn Schmidt.

Vereinfachte Bestellungstabelle

Damit vereinfacht sich die Tabelle der Bestellungen wie folgt:

Nr	Name	Adresse	Ab	Bis	Bestellung	Bemerkung
1	Anke Löhr	Heinr.-Busold-Str. 4 61169 Friedberg	09:00	09:30	15 Einheiten	-
2	Ernst Lamm	Grüner Weg 9 61169 Friedberg	09:00	10:00	10 Einheiten	Einräumhilfe, Barzahlung
3	Lisa Franz	Bügelstraße 5 61169 Friedberg	08:30	09:00	15 Einheiten	6. Stock
:	:	:	:	:	:	:

Welche weiteren Vereinfachungen sind möglich?

Vereinfachen der Zeitfenster



- Um Zeitberechnungen zu vereinfachen, setzen wir den Zeitpunkt der Ladenöffnung als Zeitpunkt 0 fest.
- Alle weiteren Zeiten ergeben sich, indem wir die Differenz zu diesem Zeitpunkt ermitteln, durch zwei teilen und ggf. aufrunden.
- Damit entspricht eine Zeitdauer in dieser Zeiteinheit 2 Minuten und alle in dieser Zeiteinheit angegebenen Zeitpunkte lassen sich ermitteln, indem man von 08:00 Uhr ausgehend die doppelte Anzahl der Zeiteinheiten in Minuten in die Zukunft rechnet.
- Die Fahrer von Herrn Schmidt wollen um 18:00 Uhr Feierabend machen, das entspricht Zeitpunkt 300.
- Weitere Beispiele:
 - 2 min \mapsto 1, 10 min \mapsto 5, 30 min \mapsto 15, 60 min \mapsto 30
 - 08:00 \mapsto 0, 08:30 \mapsto 15, 09:00 \mapsto 30, 10:00 \mapsto 60, 12:00 \mapsto 120

Vereinfachte Bestellungstabelle 2

Damit vereinfacht sich die Tabelle der Bestellungen wie folgt:

Nr	Name	Adresse	Ab	Bis	Bestellung	Bemerkung
1	Anke Löhr	Heinr.-Busold-Str. 4 61169 Friedberg	30	45	15 Einheiten	-
2	Ernst Lamm	Grüner Weg 9 61169 Friedberg	30	60	10 Einheiten	Einräumhilfe, Barzahlung
3	Lisa Franz	Bügelstraße 5 61169 Friedberg	15	30	15 Einheiten	6. Stock
:	:	:	:	:	:	:

Abschätzen der Servicezeiten

- Nun sollen auch die Dauer für die Abwicklung einer Lieferung mathematisch greifbar gemacht werden.
- Basierend auf den Erfahrungen der Mitarbeiter, wird davon ausgegangen, dass eine einfache Lieferung ohne Kisten (Wasser, Limonade etc.) 2 Zeiteinheiten benötigt.
- Für jede Kiste kommt eine halbe Zeiteinheit hinzu.
- Unterstützung beim Einräumen verdoppelt die Lieferzeit.
- Ab dem 4. Stock vervierfacht sich die Zeit.
- Je nach Zahlungsart (außer Vorkasse) erhöht sich die Zeit ebenfalls

Vorgang	Zeit
Standard	2
Kiste	+0.5
Einräumen	×2
≥ 4. Stock	×4
Zahlung vor Ort	+1
:	:

	Grundzeit	2
+1	(2 Kisten)	3
×2	(Einräumen)	6
+1	(Barzahlung)	7
	Gesamt	7

Vereinfachte Bestellungstabelle 3

Damit vereinfacht sich die Tabelle der Bestellungen wie folgt:

Nr	Name	Adresse	Ab	Bis	Bestellung	Service (t)
1	Anke Löhr	Heinr.-Busold-Str. 4 61169 Friedberg	30	45	15 Einheiten	3
2	Ernst Lamm	Grüner Weg 9 61169 Friedberg	30	60	10 Einheiten	7
3	Lisa Franz	Bügelstraße 5 61169 Friedberg	15	30	15 Einheiten	12
:	:	:	:	:	:	:

Wie können wir die Adressen
"vereinfachen"?

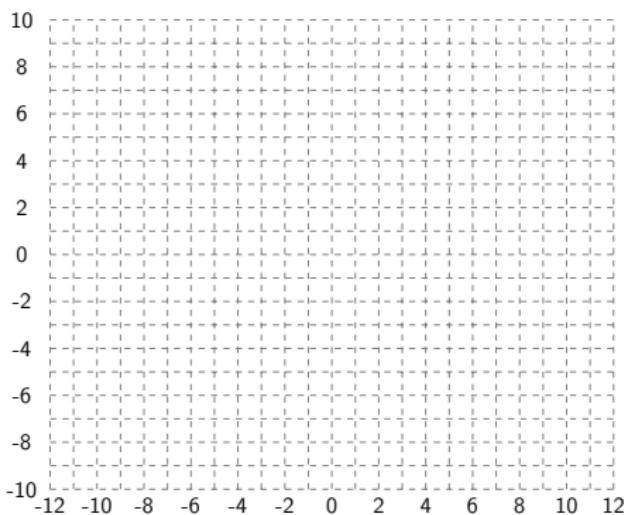
Table of contents

- 1 Einleitung
- 2 Motivation
- 3 Details und Abstraktionen
- 4 Landkarten als Graph
- 5 Definition
- 6 Vokabeltraining
- 7 Literatur

Abschnitt 4

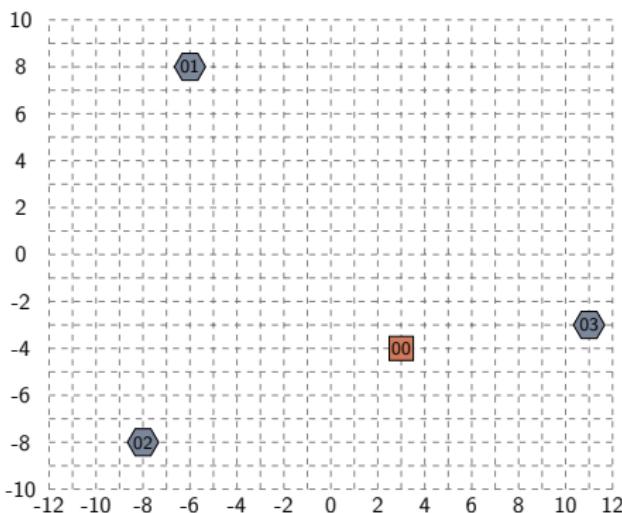
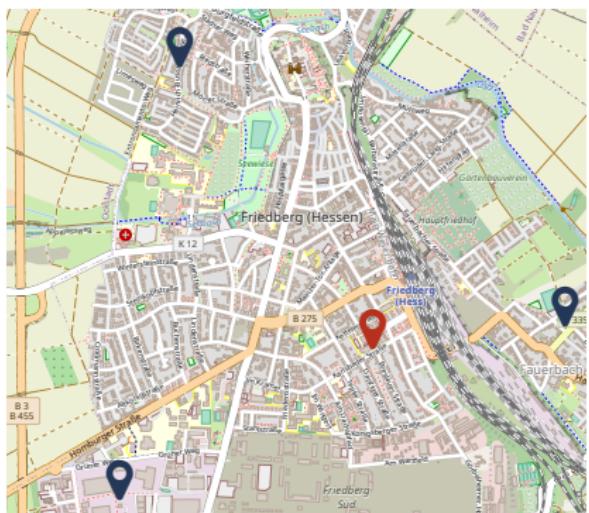
Landkarten als Graph

Vereinfachen der Adressen 1



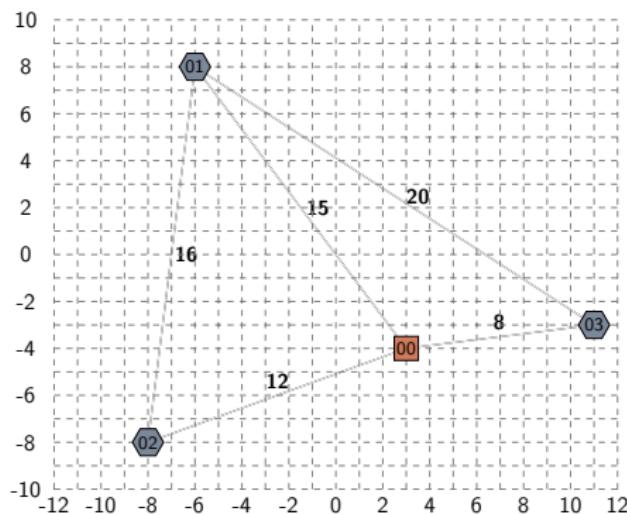
Wie kann uns das Raster beim abstrahieren der Adressen helfen?

Vereinfachen der Adressen 2



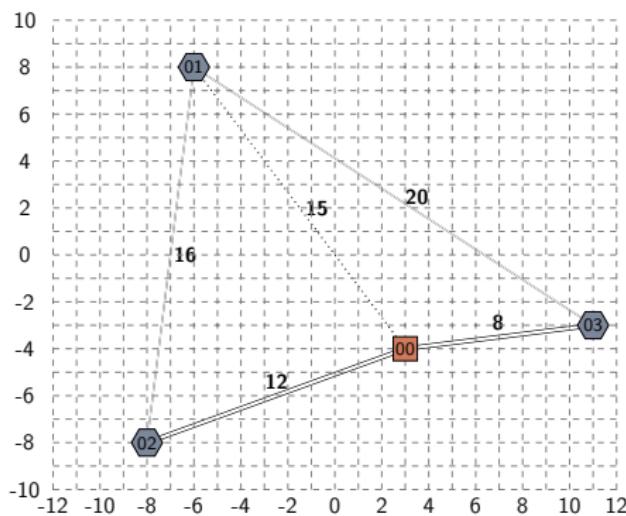
Wir bauen einen (zunächst ungerichteten) Graphen und ordnen jedem Knoten x- und y-Koordinaten zu. Dadurch können wir den Kanten die Länge (Distanz) des euklidschen Abstandes zuordnen.

Vereinfachen der Adressen 3



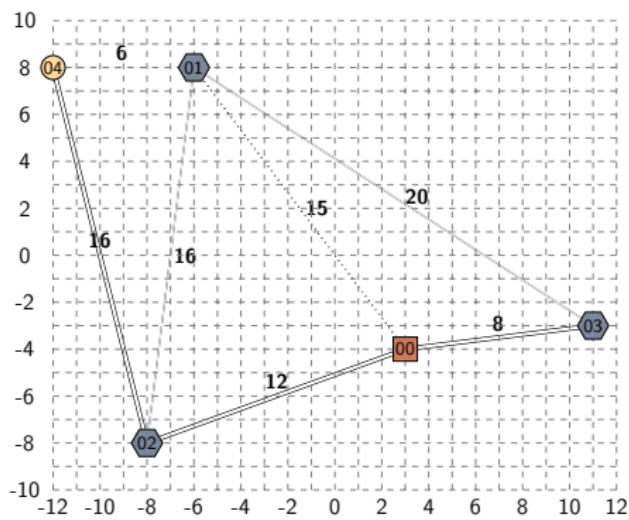
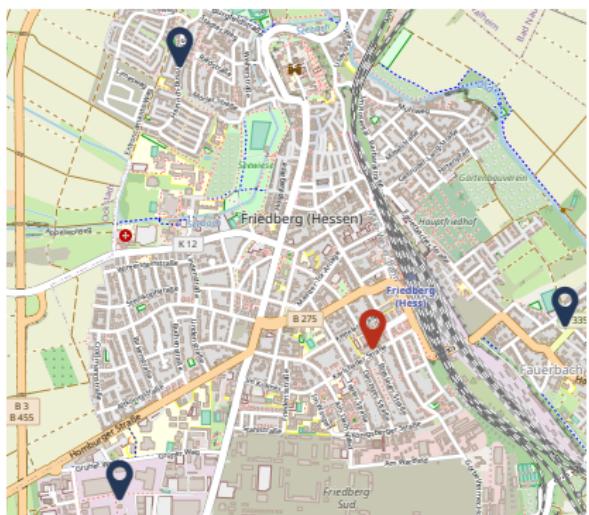
Wir bauen einen (zunächst ungerichteten) Graphen und ordnen jedem Knoten x- und y-Koordinaten zu. Dadurch können wir den Kanten die Länge (Distanz) des euklidschen Abstandes zuordnen.

Vereinfachen der Adressen 4



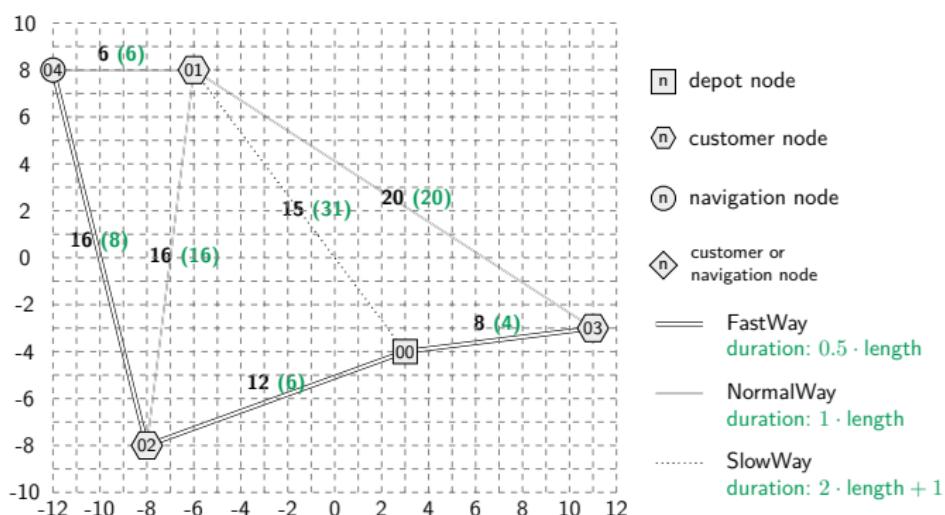
Offensichtlich sind nicht alle Verbindungen zwischen zwei Knoten mit der gleichen Geschwindigkeit zu befahren. Dies soll durch die Verwendung unterschiedlicher Kanten berücksichtigt werden.

Vereinfachen der Adressen 5



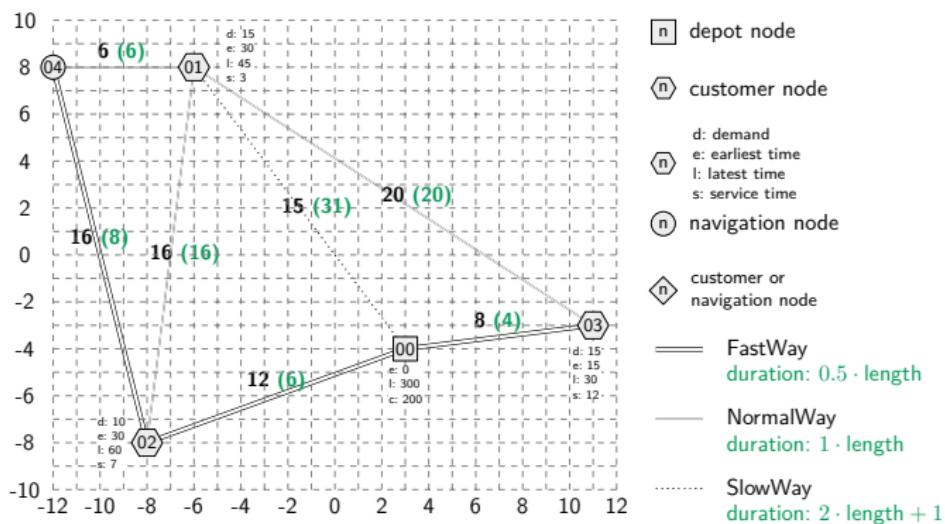
Ebenfalls sollen zunächst die beiden Möglichkeiten berücksichtigt werden, von Kunde 2 zu Kunde 1 zu gelangen.

Vereinfachen der Adressen 6



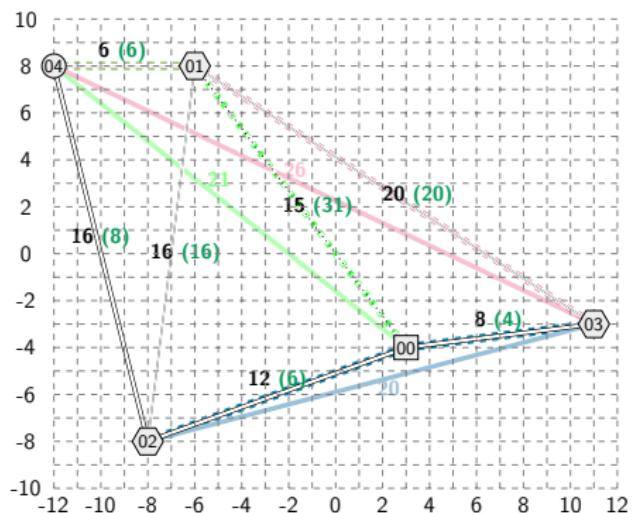
In diesem Beispiel gibt es drei verschiedene Straßen-Typen. Jedem Typ ist dabei eine Funktion zugeordnet, die die Länge der Straße auf eine Fahrtzeit abbildet.

Darstellung der Bestellbedingungen



Die Bedarfe, Zeitfenster und Servicezeiten können in der Karte ebenfalls vermerkt werden.

Vervollständigen des Graphen



0	15	11.8	8.1	21
15	0	16.1	20.2	6
11.7	16.1	0	19.8	16.5
8.1	20.2	19.8	0	26.2
21.0	6.0	16.5	26.2	0

Für eine mathematische Beschreibung und eine algorithmische Lösung des Problems ist ein sog. vollständiger Graph von Vorteil. Dieser lässt sich jedoch mithilfe des Algorithmus von Dijkstra herleiten.

Table of contents

1 Einleitung

2 Motivation

3 Details und Abstraktionen

4 Landkarten als Graph

5 Definition

6 Vokabeltraining

7 Literatur

Abschnitt 5

Definition

Vehicle routing problem with time windows

Definition (angelehnt an [BBV08], [ORH06])

Sei $G = (N, A)$ ein vollständiger gerichteter Graph mit $N = \{0, \dots, n\}$ einer Menge von $n + 1$ Knoten (Kunden) und A einer Menge von (gerichteten) Kanten (Straßen). Der Knoten mit dem Index 0 repräsentiert das Depot, die Knoten $N' = N \setminus 0$ repräsentieren die Kunden.

Jeder Kunde $i \in N'$ hat einen Bedarf von q_i Produkteinheiten, ein Zeitfenster $[a_i, b_i]$ sowie eine Servicezeit u_i .

Das Depot verfügt über beliebig viele Fahrzeuge, die zur Belieferung der Kunden eingesetzt werden. Jedes Fahrzeug der Flotte hat die gleiche Kapazität Q . Jeder Kante zwischen zwei Knoten i und j ($i, j \in N'$) sind eine Distanz $c_{ij} \geq 0$ sowie eine Fahrtzeit $t_{ij} \geq 0$ zugeordnet.

Eine Route (Tour) R ist eine Folge von Knoten $R = (i_1, i_2, \dots, i_{|R|})$, die als ersten und letzten Knoten das Depot aufweist und jeder Kunde ein oder kein Mal in der Folge enthalten ist ($i_1 = i_{|R|} = 0$ und $\{i_2, \dots, i_{|R|-1}\} \subseteq N'$).

Eine Route ist zulässig, wenn die aufsummierten Bedarfe der Kunden die Kapazität Q nicht überschreiten, d.h. $\sum_{h=2}^{|R|-1} q_{i_h} \leq Q$, und die Zeit s_{i_h} , in der das Fahrzeug den Kunden i_h erreicht, vor dem Schließen des Zeitfensters des Kunden liegt, d.h. $s_{i_h} < b_{i_h}$, ($s_{i_h} = \max\{s_{i_{h-1}}, a_{i_{h-1}}\} + u_{i_{h-1}} + t_{i_{h-1}i_h}$ und $s_0 = 0$, für $h = 0$; $u_0 = a_0 = 0$).

VRPTW

Definition (angelehnt an [BBV08], [ORH06] (Forsetz.))

Eine zulässige Lösung besteht aus einer Menge von zulässigen Routen $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$, wobei jeder Kunde Teil von genau einer zulässigen Route ist.

Die Kosten bzw. die Distanz einer Route $R = (i_0, \dots, i_{|R|})$ definieren wir als

$$c(R) = \sum_{h=1}^{|R|} c_{i_{h-1} i_h}$$

Dann lautet die Zielfunktion

$$\mu \cdot |\mathcal{R}| + \nu \cdot \sum_{R \in \mathcal{R}} c(R) \longrightarrow \min!,$$

wobei μ und ν die Gewichtungen sind, mit der die Anzahl der Routen (und damit der eingesetzten Fahrzeuge) bzw. die summierte Distanz Eingang in die Zielfunktion finden.

Beispiel

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad N' = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots\}$$

$$q_1 = 15, q_2 = 10, q_3 = 15$$

$$[a_1, b_1] = [30, 45], [a_2, b_2] = [30, 60], \dots$$

$$c_{01} = 15, c_{02} = 12, \dots$$

$$t_{01} = 31, t_{02} = 6, \dots$$

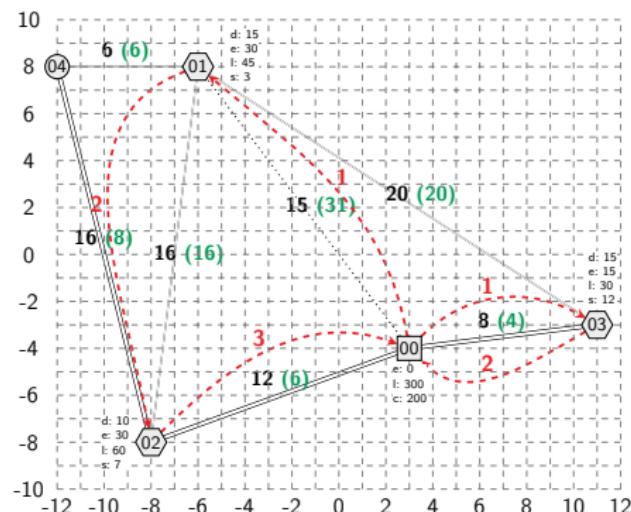
$$Q = 200$$

$$R^1 = (i_1, i_2, i_3) = (0, 3, 0) (|R^1| = 3)$$

$$R^2 = (i_1, i_2, i_3, i_4) = (0, 1, 2, 0) (|R^2| = 4)$$

$$c(R^1) = 16$$

$$c(R^2) = 43$$

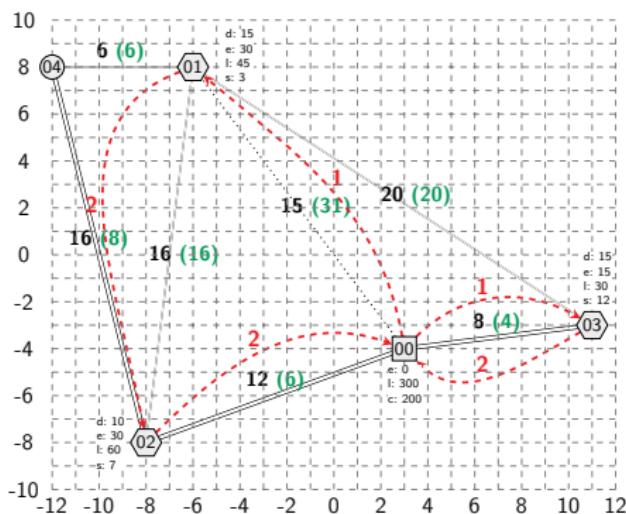


Warum wurden hier zwei Fahrzeuge entsandt? Was fehlt für die Angabe des Wertes der Zielfunktion?

Beispiel (Fortsetzung)

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 11.8 & 8.1 & 21 \\ 15 & 0 & 16.1 & 20.2 & 6 \\ 11.7 & 16.1 & 0 & 19.8 & 16.5 \\ 8.1 & 20.2 & 19.8 & 0 & 26.2 \\ 21.0 & 6.0 & 16.5 & 26.2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 20.1 & 5.9 & 4 & 14.1 \\ 20.1 & 0.0 & 14.2 & 20.2 & 6.0 \\ 5.9 & 14.2 & 0.0 & 9.9 & 8.2 \\ 4 & 20.2 & 9.9 & 0.0 & 18.1 \\ 14.1 & 6.0 & 8.2 & 18.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$



Beispiel (Fortsetzung)

$$R^1 = (i_1, i_2, i_3) = (0, 3, 0) \quad (|R^1| = 3)$$

$$s_{01}^1 = 0$$

$$\begin{aligned} s_3^1 &= \max\{s_{01}^1, a_0\} + u_0 + t_{03} \\ &= \max\{0, 0\} + 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{03}^1 &= \max\{s_3^1, a_3\} + u_3 + t_{30} \\ &= \max\{4, 15\} + 12 + 4 \\ &= 15 + 12 + 4 \\ &= 31 \end{aligned}$$

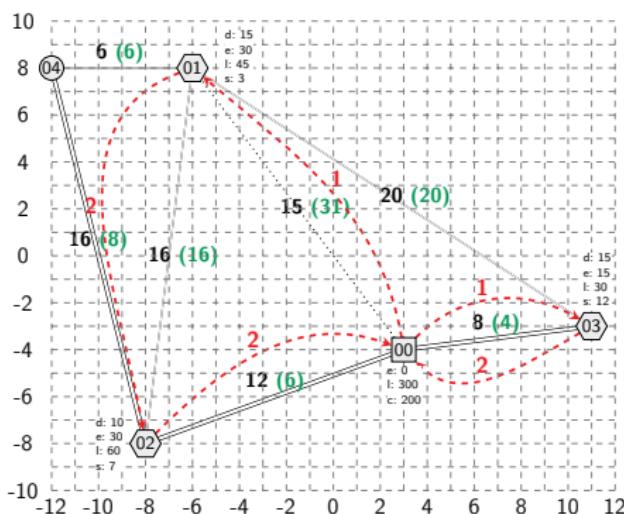


Table of contents

- 1 Einleitung
- 2 Motivation
- 3 Details und Abstraktionen
- 4 Landkarten als Graph
- 5 Definition
- 6 Vokabeltraining
- 7 Literatur

Abschnitt 6

Vokabeltraining

Wichtige Termini in Athos and JSprit

Im Beispiel	In Athos	In JSprit
Fahrtzeit ($t_{ij}, i, j \in N$)	Duration	Transportation time
Kunde ($i \in N'$)	Customer	Service / Delivery / Job
Lieferung ab ($a_i, i \in N'$)	Earliest time	1. Parameter time window
Lieferung bis ($b_i, i \in N$)	Latest time	2. Parameter time window
Bestellmenge ($q_i, i \in N'$)	Demand	Size dimension
Servicezeit ($u_i, i \in N'$)	Service time	Service time
Knoten	Node	Location
Fahrzeugtyp	Agent type	Vehicle type
Kapazität (Q)	Max weight	capacity (dimension)
Depot	Depot	Start location

Table of contents

- 1 Einleitung
- 2 Motivation
- 3 Details und Abstraktionen
- 4 Landkarten als Graph
- 5 Definition
- 6 Vokabeltraining
- 7 Literatur

Literatur



Roberto Baldacci, Maria Battarra und Daniele Vigo.
„Routing a Heterogeneous Fleet of Vehicles“. In:
The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges
Hrsg. von Bruce Golden, S. Raghavan und Edward Wasil.
Bd. 43. Operations Research/Computer Science Interfaces.
Boston, MA: Springer US, 2008, S. 3–27. ISBN:
978-0-387-77777-1. DOI:
[10.1007/978-0-387-77778-8{\textunderscore}1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-77778-8_1).



Beatrice Ombuki, Brian J. Ross und Franklin Hanshar.
„Multi-Objective Genetic Algorithms for Vehicle Routing
Problem with Time Windows“. In: Applied Intelligence 24.1
(2006), S. 17–30. ISSN: 1573-7497. DOI:
[10.1007/s10489-006-6926-z](https://doi.org/10.1007/s10489-006-6926-z).

Version 1.1.1

Ergänzungen:

- Erweiterungen der Beispiele um Zeitmatrix t_{ij} und Distanz-/ Kostenmatrix c_{ij}
- Erweiterung der Beispiele um Beispielberechnung der Ankunftszeitpunkte s_{i_h} für eine Route
- Ergänzung einer Liste wichtiger Begriffe für VRPs

Korrekturen:

- Ergänzung Mengenklammern für Knotenmenge N in VRP-Definition
- Umbenennen des Abschnitts "mathematische Formulierung" in "Definition"
- Ausschreiben des Akryoms VRPTW auf Definitionsfolie
- Korrektur kleiner Rechtschreibfehler
- Korrektur des Zeitfensters für Kunde 01 im Beispiel.