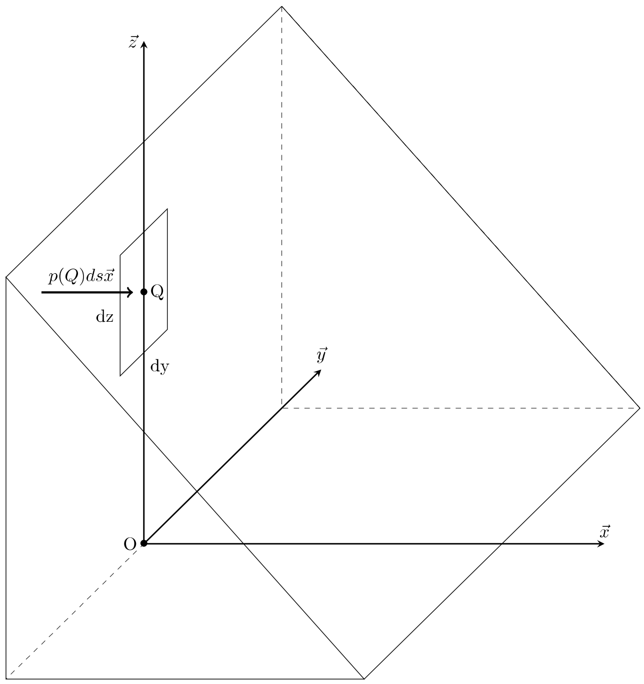
Barrage Poids

Question 1. Exprimer le torseur élémentaire due à l'action de l'eau sur la paroi au point Q puis au point O.



En un point Q(0,y,z) de la paroi exposée à l'eau, la pression est $p(Q)=\rho g(h-z)$. Si on définit une surface élémentaire ds autour du point Q, l'action générée au point Q est modélisable pas un torseur glisseur élémentaire $d\tau$ de résultante $p(Q)\cdot dS\cdot\vec{x}$.

$$d\tau = {}_Q\begin{Bmatrix} p(Q)dS\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} p(Q)dS\vec{x} \\ \overrightarrow{OQ}\wedge p(Q)dS\vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{d\tau = {}_O\begin{Bmatrix} \rho.g.(h-z)dS\vec{x} \\ z.\rho.g.(h-z)dS\vec{y} \end{Bmatrix}}$$

Question 2. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage.

Le torseur des actions mécaniques de l'eau sur le barrage est l'intégrale du torseur élémentaire $d\tau$ sur toute la surface du barrage.

$$\boldsymbol{T}(eau\rightarrow barrage)=\iint_S d\tau = {}_O\begin{Bmatrix} \iint_S \rho.g.(h-z)dS\vec{x} \\ \iint_S z.\rho.g.(h-z)dS\vec{y} \end{Bmatrix}$$

1. Calcul de la résultante :

$$\iint_S \rho.g.(h-z)dS\vec{x}=\rho.g.\vec{x}\iint_S(h-z)dy\,dz=\rho.g.\vec{x}\int_{-l/2}^{l/2}dy\int_0^h(h-z)dz=\rho g l\frac{h^2}{2}\vec{x}$$

2. Calcul du moment en O :

$$\iint_S z.\rho.g.(h-z)dS\vec{y}=\rho.g.\vec{y}\int_{-l/2}^{l/2}dy\int_0^h z.(h-z)dz=\rho.g.l.\frac{h^3}{6}\vec{y}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T}(eau\rightarrow barrage)= {}_O\begin{Bmatrix} \rho g l\frac{h^2}{2}\vec{x} \\ \rho g l\frac{h^3}{6}\vec{y} \end{Bmatrix}}$$

Question 3. : En déduire la position du centre de poussée A

On cherche A (X,Y,Z) tq $\overrightarrow{M_A}(eau\rightarrow barrage)=\vec{0}$

$$\overrightarrow{M_A}(eau\rightarrow barrage)=\overrightarrow{M_O}(eau\rightarrow barrage)+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{R}(eau\rightarrow barrage)$$
$$=\rho g l\frac{h^3}{6}\vec{x}+(X\vec{x}+Y\vec{y}+Z\vec{z})\wedge\rho g l\frac{h^2}{2}\vec{y}$$
$$=\begin{pmatrix}\rho g l\frac{h^3}{6}-Z\rho g l\frac{h^2}{2} \\ 0 \\ X\rho g l\frac{h^2}{2}\end{pmatrix}$$

De la condition $\overrightarrow{M_A}(eau\rightarrow barrage)=\vec{0}$ on tire :

- X = 0
- Z = $\frac{h}{3}$
- Y quelconque.