Análisis y Visualización de Datos

Diplomatura CDAAyA 2020

Varias Variables

En un mismo experimento o análisis podemos tomar en cuenta varios aspectos o medidas relevantes a la vez, así como combinación de situaciones, etc.

Sean **X**: $\Omega \to R$ **e Y**: $\Omega \to R$ **variables aleatorias**.
tendrán asociadas una función de **densidad/probabilidad conjunta**:

- $f(x,y)$ p/ X e Y v.a. continuas, densidad, y
- $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ p/discretas, prob. o densidad puntual

Notación: P(X=x,Y=y)=P((X=x)∩(Y=y)). la coma significa intersección

Varias Variables, numéricas

X: $\Omega \rightarrow R$ **e Y**: $\Omega \rightarrow R$ **variables aleatorias**

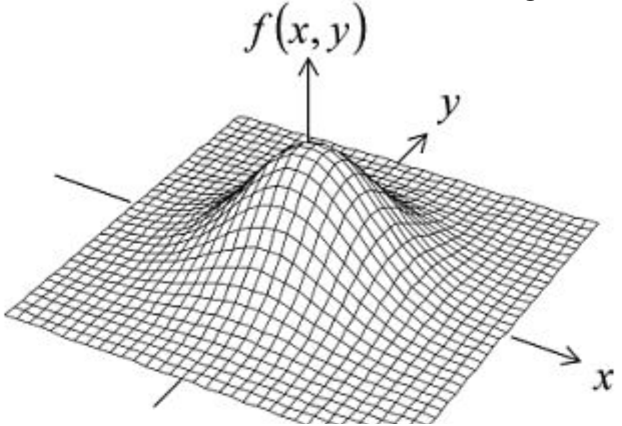
Se define la **Covarianza** y el **Coeficiente de Correlación** entre ellas como:

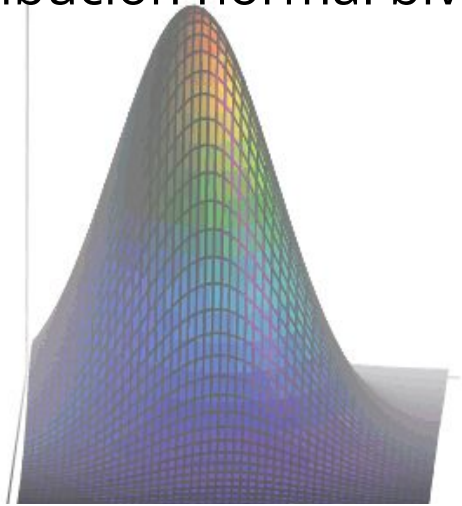
$$Cov(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}, \text{ para } \mu_X=E(X) \text{ y } \mu_Y=E(Y).$$

$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \text{p/ } \sigma_1^2=Var(X) \text{ y } \sigma_1^2=Var(Y)$$

Ejemplo: distribución Normal bivariada

Diremos que el par (X, Y) de v.a. tiene distribución normal bivariada si función de densidad conjunta es:





f(x,y)= $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}(\sigma_2^2(x-\mu_1)^2+\sigma_1^2(y-\mu_2)^2-2\sigma_1\sigma_2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2))\}$

μ_1= E(X), μ_2= E(Y) , σ_1^2= Var(X), σ_2^2= Var(Y),

$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$$

Varias Variables, categóricas

In [9]:
```
# Tabla de contingencia class / survived
pd.crosstab(index=titanic['survived'],
            columns=titanic['class'], margins=True)
```

Out[9]:

class	1st class	2nd class	3rd class	All
survived				
no	122	167	528	817
yes	203	118	178	499
All	325	285	706	1316

Varias Variables

X: $\Omega \to R$ **e Y**: $\Omega \to R$ **variables aleatorias** con función de densidad o probabilidad conjunta ***f(x,y)***.
Se cumple que las **densidades marginales** son:

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$ p/ X discreta (numérica o categórica)

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$$ p/ Y discreta (numérica o categórica)

para continuas se reemplaza la sumatoria por integral

Varias Variables

X: $\Omega \rightarrow R$ **e Y**: $\Omega \rightarrow R$ **variables aleatorias** con función de densidad o probabilidad conjunta ***f(x,y)***.
Se definen las **densidades condicionales como**:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ si } f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \text{ si } f_X(x) > 0$$

Percentiles

Los percentiles de crecimiento son percentiles de distribuciones condicionadas por edad. Ver: el siguiente link curvas de crecimiento

Varias Variables: propiedades

X: $\Omega \rightarrow R$ **e Y**: $\Omega \rightarrow R$ **variables aleatorias**

Se pueden combinar v.a. numéricas.
Por ejemplo, se puede definir la v.a. suma:
$X+Y: \Omega \rightarrow R$ es una nueva v.a. $(X+Y)(\omega)=X(\omega)+Y(\omega)$ p/c/ $\omega \in \Omega$.
Y así con cualquier combinación de dos o más variables.
se cumple que:

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$,
- $Var(X+Y)=Var(X)+Vay(Y)-Cov(X,Y)$.

Independencia entre Variables

X e Y v.a. se dicen **independientes** si $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Para más variables:
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variables aleatorias se dicen mutuamente **independientes** si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

Varias Variables: independencia

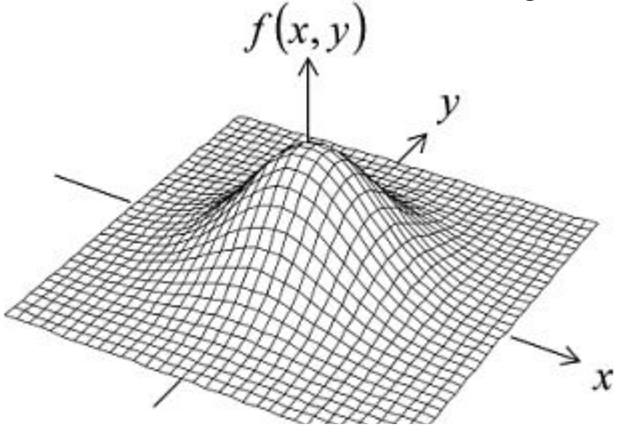
X: $\Omega \rightarrow R$ **e Y**: $\Omega \rightarrow R$ **variables aleatorias**

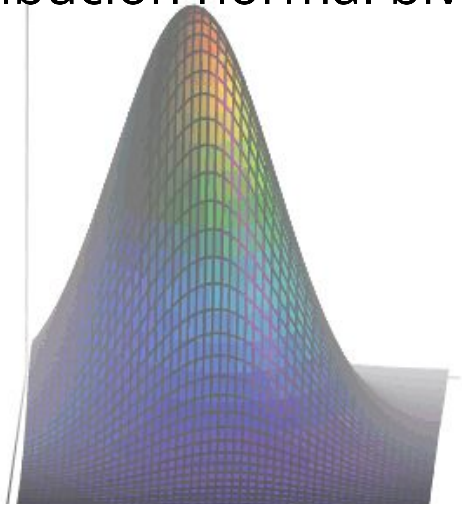
Si X e Y son independientes se cumple:

- E(X.Y)=E(X).E(Y),
- Cov(X,Y)=0
- ρ=Corr(X,Y)=0
- Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y).
- P(X=x, Y=y)=P(X=x). P(Y=y) ,
- P(X=x | Y=y)=P(X=x) ,
- $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{f_X(x)\cancel{f_Y(y)}}{\cancel{f_Y(y)}} = f_X(x)$

Ejemplo: distribución Normal bivariada

Diremos que el par (X, Y) de v.a. tiene distribución normal bivariada si función de densidad conjunta es:





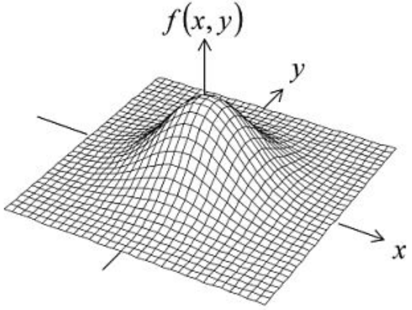
$$f(x,y)= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}(\sigma_2^2(x-\mu_1)^2+\sigma_1^2(y-\mu_2)^2-2\sigma_1\sigma_2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2))\}$$

μ_1= E(X), μ_2= E(Y) , σ_1^2= Var(X), σ_2^2= Var(Y),

$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$$

Ejemplo: distribución Normal bivariada

X e Y v.a. con distribución normal bivariada son independientes si y sólo si ρ=0 si y sólo si Cov(X,Y)=0

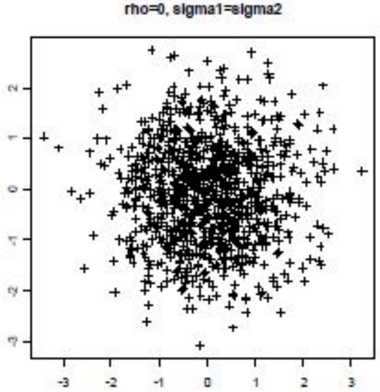


$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = 0$$

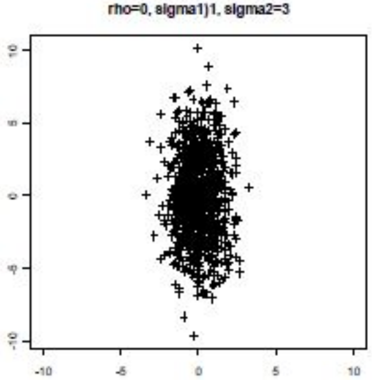
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}(\sigma_2^2(x-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(y-\mu_2)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2))\}$$

$$f(x,y) = \left[\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\right] \left[\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\right] = f_X(x) f_Y(y)$$

Datos con distribución Normal bivariada

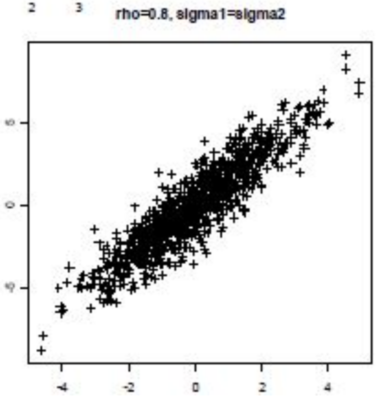


$\mu_1 = \mu_2 = 0$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$
$\rho = 0$

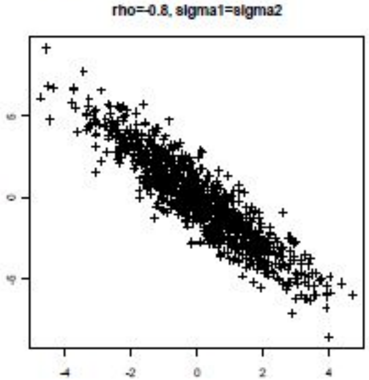


$\mu_1 = \mu_2 = 0$
$\sigma_1 = 1 \ \sigma_2 = 3$
$\rho = 0$

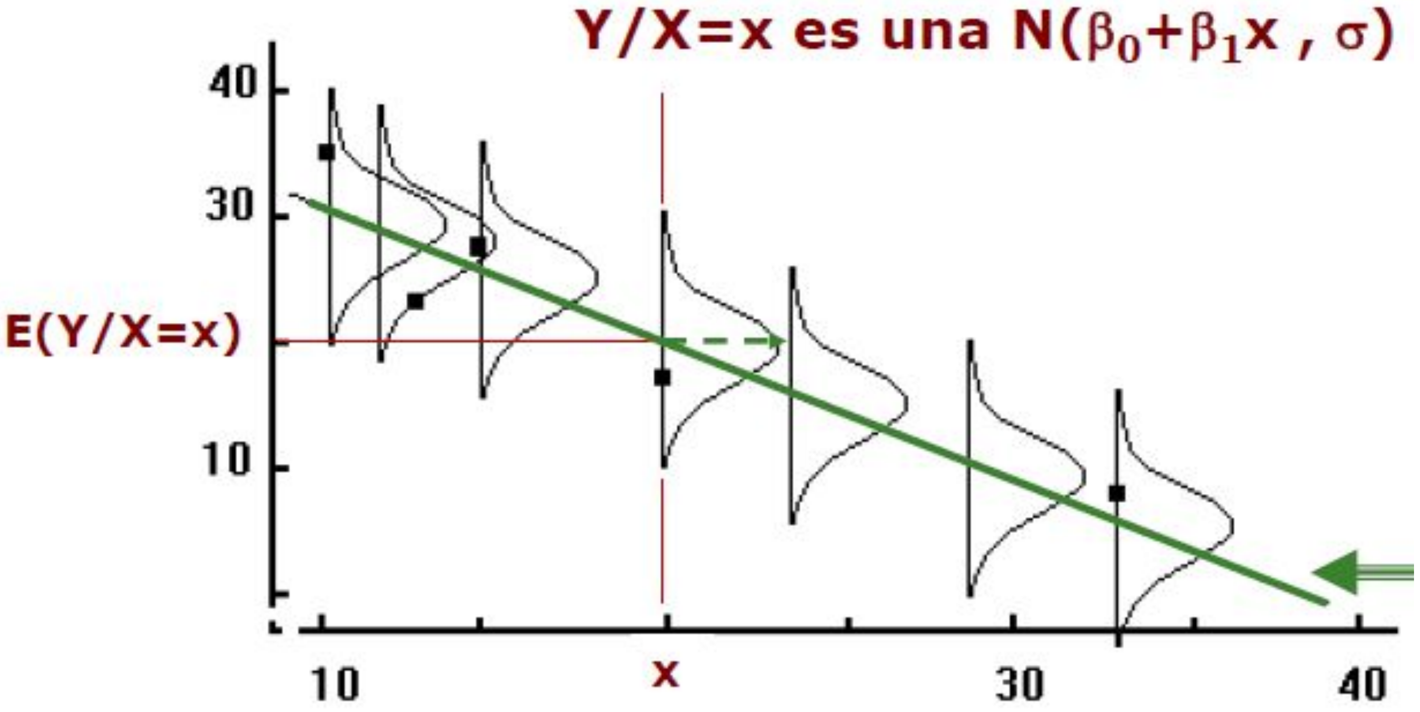
$\mu_1 = \mu_2 = 0$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$
$\rho = 0.8$



$\mu_1 = \mu_2 = 0$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$
$\rho = -0.8$



Distribución condicional Normal bivariada



Ejemplo de David W. Stockburger

Ejemplo: Distribución Normal multivariada

Llamamos vector aleatorio a $\underline{Y}=(Y_1,Y_2, \ldots,Y_n)$ o a $\underline{Y}=[Y_1\ Y_2 \ldots Y_n]^t$ a un arreglo de v.a. 's

Diremos que el vector $\underline{Y}$ tiene distribución normal multivariada si la función de densidad conjunta del arreglo es:

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

donde $\mathrm{x} = [x_1 \ldots x_n]^t$ y $\mu = [\mu_1 \ldots \mu_n]^t$, vector de medias.

Σ se dice **Matriz de Var-Covarianza**, matriz nxn, simétrica no singular y |Σ| denota el determinante de Σ.

Asociación de Variables

- Para variables Categóricas: **tablas de contingencia**

	Diestro	Zurdo	TOTAL
Hombre	43	9	52
Mujer	44	4	48
TOTAL	87	13	100

- Para variables Numéricas: Covarianza y Correlación

Covarianza y Correlación

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

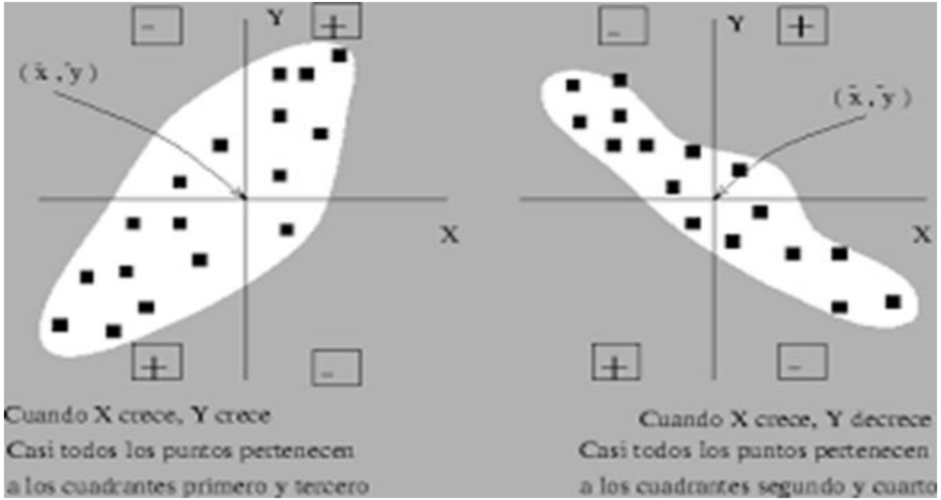
Si Cov_{xy}>0, la correlación es directa.

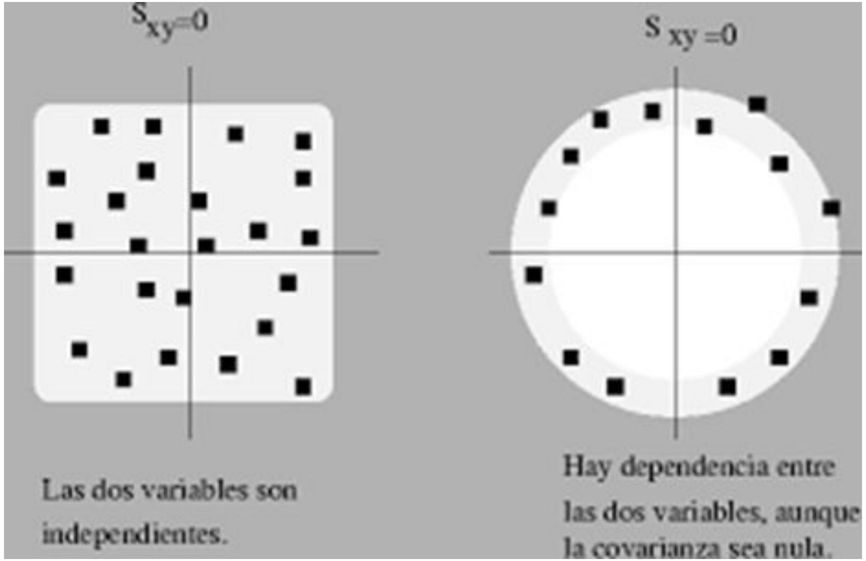
•Si Cov_{xy}< 0, la correlación es inversa

$$\rho = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

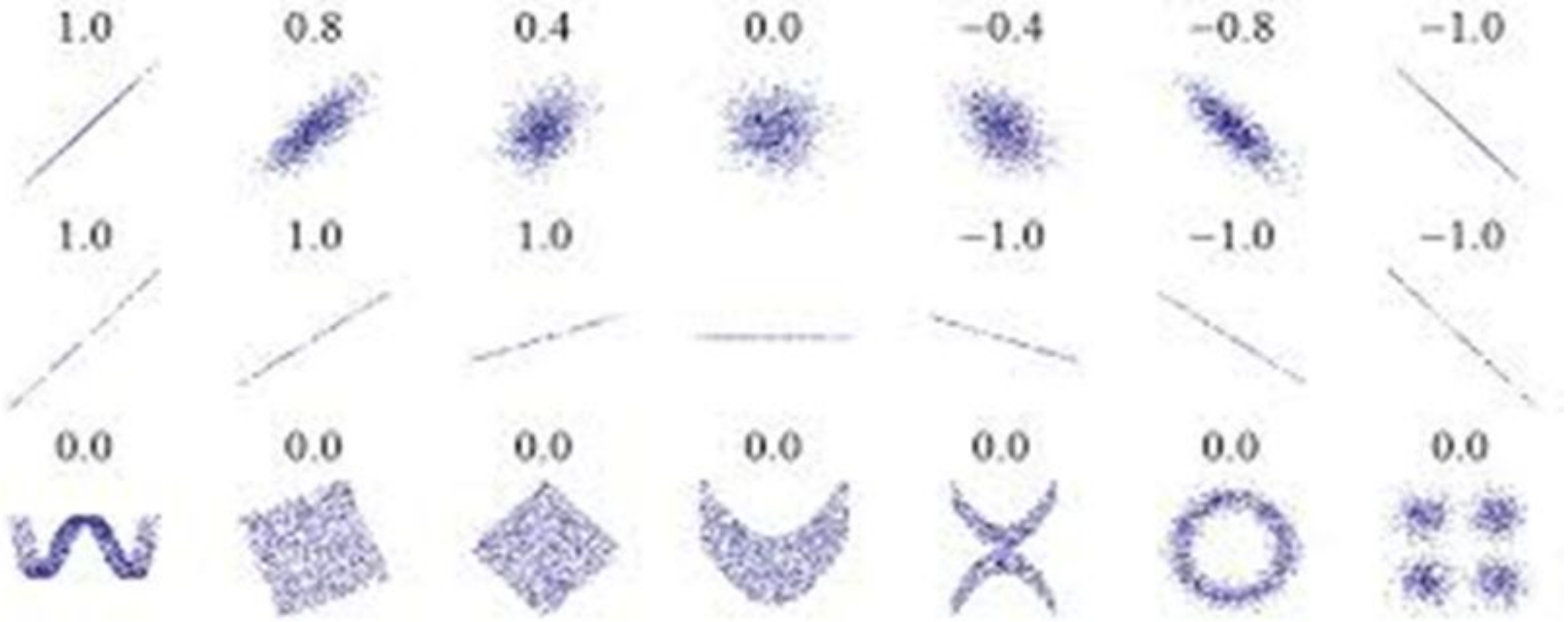
El valor del índice de correlación r= ρ varía en el intervalo [-1,1],

Covarianza en gráficos





Correlación en gráficos



Interpretación

●Si $r = 1$, existe una correlación positiva perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada *relación directa*: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante.

●Si $0 < r < 1$, existe una correlación positiva.

●Si $r = 0$, no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables.

●Si $-1 < r < 0$, existe una correlación negativa.

●Si $r = -1$, existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada *relación inversa*: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante.

Coeficiente de correlación lineal. Spearman

O Coeficiente de Spearman

Para (X , Y) par de v.a. Si no sabemos si su distribución conj. es Normal o tenemos poco datos. O si la/s variable/s son del tipo ordinal.

- analíticamente tiene un cálculo tedioso

Coeficiente de correlación lineal. Tau de Kendall

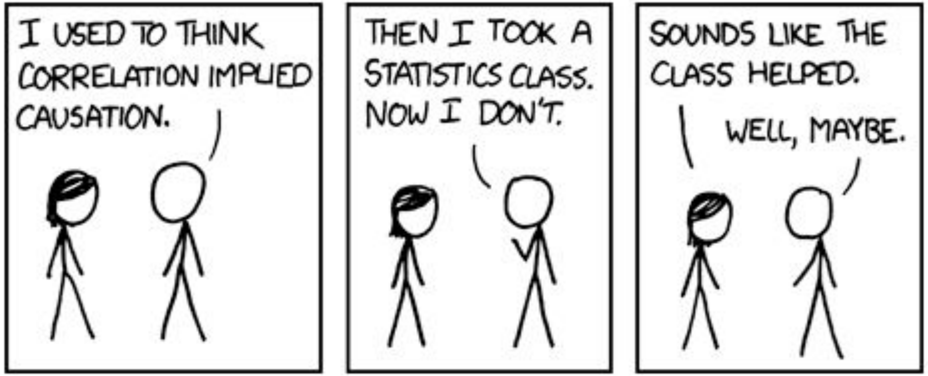
O Coeficiente de Correlación por Rangos de Kendall

Medida de asociación no paramétrica utilizada para variables cualitativas ordinales o de razón (numéricas). Estas variables son distribuidas en categorías con varios niveles que cumplen un orden, por ejemplo, muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto.

- Sólo se puede aplicar a partir de tablas cuadradas.
- Las variables utilizadas deben ser de nivel ordinal, intervalo o razón
- Su resultado debe encontrarse en el rango de -1 a 1.
- Tiene sentido su aplicación, si las variables objeto de estudio no poseen una distribución poblacional conjunta normal

Cuidado!

Recuerden que **la correlación no implica causalidad**. Por ejemplo, si las ventas de helados están correlacionadas positivamente con los ataques de los tiburones a los nadadores, eso no significa que el consumo de helados de alguna manera hace que los tiburones ataquen. Otra variable, como el clima cálido, puede provocar un aumento tanto en las ventas de helados como en las visitas a las playas.



Población y muestra

Cuando recogemos los datos muchas veces es imposible relevar la característica de interés de todos el grupo entero (población) o universo, se examina una pequeña parte del grupo, llamada muestra.

Al medir o considerar una característica de interés en una muestra, se consideran los datos como
$x_1, x_2, \dots, x_n$, realizaciones de $X_1, X_2, \dots, X_n$ m.a.

Notar la diferencia entre minúscula y mayúscula

Muestra aleatoria

Una sucesión de v.a. X_1, X_2,..., X_n se dice **muestra aleatoria (m.a.)** si son v. a. independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). “Clones” de una misma X

Todas las medidas antes mencionadas para una muestra de datos podemos pensarlas a partir de una muestra aleatoria, también serán variable aleatorias, llamadas estadísticos. Como por ejemplo el **estadístico Media Muestral:**

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Algunas propiedades teóricas: Muestra aleatoria

- Si X_1, X_2,..., X_n m.a. (v.a.i.i.d.) tal que $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, entonces:

  - $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
  - $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu,\sigma^2/n)$

- Si Z_1, Z_2,..., Z_n m.a. tal que $Z_i \sim N(0,1)$, entonces:

$$V = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$$