Modelo Integrate and Fire

Nicolás Benjamín Ocampo
Licenciatura en Ciencias de la Computación - FaMAF
Redes Neuronales

Abstract—Este artículo aborda el estudio de propiedades subyacentes de una neurona, siendo esta un tipo particular de celula. Nos enforcaremos en su habilidad de propagar señales por médio pulsos eléctricos conocidos como **potenciales de acción** utilizando un modelo neuronal biológico conocido como Integrate and Fire. Este último nos permitirá enforcarnos en la frecuencia en que estos potenciales de acción ocurren cuando la membrana de nuestra celula en cuestión es estimulada por alguna carga en específico.

Index Terms—Integrate and Fire, Membrana Celular, Sistemas Neuronales, Potencial de Membrana

1 Introducción

1.1 Descripción del Problema

Las neuronas son distinguibles en comparación a otras células del cuerpo debido a como representan y transmiten información al disparar secuencias de ”espigas” cuando estás son sufren un **cambio en su potencial de membrana**. Siendo este último la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de una célula.

Nuestro objetivo a lo largo de las siguientes páginas será la caracterización de como ciertos estímulos pueden lograr la aparición de estas espigas obteniendo un **potencial de acción** cuando el potencial de membrana alcanza un cierto **umbral**.

Esta membrana presenta además un **potencial de equilibrio**. Es decir una carga la cual tiende a mantenerse si dicho estimulo es nulo. En caso de haber ocurrido un estimulo previo que sesó, el potencial va a restituirse de manera similar a una fuga hasta alcanzar el potencial de equilibrio nuevamente.

Teniendo estos datos en mente nos vá a interesar hallar la respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con el potencial de membrana bajo una corriente externa estímulo constante?
- ¿Como es el comportamiento partiendo desde un potencial de membrana inicial?
- ¿Qué podemos decir acerca de la frecuencia de disparo de estas espigas?
- ¿Y si la corriente externa depende del tiempo?

A priori no es fácil dar una respuesta a estas cuestiones sin realizar suposiciones que conciernen al dominio del problema. Por lo tanto recrearemos la situación utilizando la ecuación diferencial dada por el modelo **Integrate and Fire**.

1.2 Modelado del Problema

El modelo de Integrate and Fire busca obtener una representación de la membrana celular por medio de un circuito que consiste en un capacitor en serie con una resistencia. Dicho circuito nos permitirá reproducir la evolución temporal del potencial de membrana cuando este cambia debido a sus canales iónicos.

La ecuación diferencial del modelo está dada por:

$$\tau_m \frac{dV_m(t)}{dt} = E_L - V_m(t) + R_m I_e(t)$$

- τ_m: Tiempo caracteristico de la membrana.
- E_L: Potencial de reposo.
- $V_m(t)$: Potencial de membrana con respecto al tiempo.
- R_m: Resistencia neta total.
- $I_e(t)$: Corriente electrica entrante con respecto al tiempo.

Analicemos un poco como estas ecuaciones describen nuestra situación.

Para empezar, la expresión $V_m(t)$ es la función incógnita en la ecuación que indica el potencial de membrana en el tiempo e $I_e(t)$ será el input o corriente estímulo que hará que la taza de cambio de $V_m(t)$ incremente con un ritmo R_m dado por la resistencia.

La ecuación indica además que cuando $I_e = 0$, el potencial de membrana se relaja exponencialmente con tiempo constante τ_m al potencial de equilibro E_L.

Por otro lado, para generar potenciales de acción la ecuación de este modelo rige por la regla de que cada vez V_m alcance un umbral V_{th}, un potencial de acción es disparado y V_m es reseteado a un valor V_{reset}. Esto no consideraría que pueda llegar a pasar con el potencial de membrana cuando es incrementado por encima del umbral. Sin embargo, sabemos que el sistema va a tender a relajarse al potencial de reposo, ni bien la corriente externa se anule, Debido a ello, el modelo considera esta simplificación.

Ahora si podemos reformular nuestras preguntas en terminos de este modelo.

a. ¿Cual es la función $V_m(t)$ que resuelve la ecuación cuando $I_e(t) = I_e$ y $V_m(t = 0) = V_0$?

b. ¿Qué suscede cuando partimos de una condición inicial? Por ejemplo:

$$\begin{aligned} I_e &= 2nA \\ V_0 = E_L &= -65mV \\ R_m &= 10M\Omega \\ V_{th} &= -50mV \\ \tau_m &= 10ms \end{aligned}$$

c. ¿Qué podemos decir de la frecuencia de disparo ω?
d. ¿Y si $I_e(t)$ ya no es constante?

2 Análisis del Modelo

2.1 Solución Analítica de la Ecuación

Aprovechando que E_L es constante más las condiciones estipuladas por **a.** y realizando un cambio de variable $U = V_m - E_L$ tenemos que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV_m}{dt} - \cancel{\frac{dE_L}{dt}} = \frac{dV_m}{dt}$$

y la ecuación de nuestro modelo en términos de U nos queda

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\tau_m}(U - R_m I_e)$$

Luego para resolver esta ecuación diferencial seguimos con

$$\begin{aligned} t &= -\tau_m \int \frac{dU}{U - R_m I_e} \\ t &= -\tau_m \ln(U - R_m I_e) + C \\ t &= -\tau_m \ln\left(\frac{U - R_m I_e}{U_0 - R_m I_e}\right) \end{aligned}$$

Donde $U_0 = V_0 - E_L$. Notar que en el último paso obtuvimos el valor de C debido a que el tiempo inicial en nuestro sistema es $t = 0$ y $V_m(t = 0) = V_0$.

Finalmente, despejamos U y volvemos a escribir la ecuación en términos de V_m obteniendo.

$$V_m(t) = e^{-t/\tau_m}(V_0 - E_L - R_m I_e) + R_m I_e + E_L$$

Notar que el caso cuando $I_e = 0$ es un caso particular de esta solución con la salvedad de que si ahora analizamos que ocurre cuando t tiende a infinito, tenemos que el potencial de membrana converge a $R_m I_e + E_L$. Es decir, este se aleja del equilibrio una distancia $R_m I_e$.

Por otro lado, esto también nos dice que si $R_m I_e + E_L < V_{th}$, entonces no se va a producir un potencial de acción, pues el potencial de membrana no va a superar el umbral. En caso contrario, al mantener el estimulo constante, obtendriamos un **trén de disparo** que se repetiría con una cierta frecuencia.

Por ejemplo, si utilizamos los datos de la pregunta **b.** tendremos que el sistema converge a

$$R_m I_e + E_L = 10M\Omega \times 2nA - 65mV = -45mV$$

Dado que $V_{th} = -50mV$ se supera el umbral de disparo y obtendriamos dicha ráfaga.

También podemos expresar cuanta carga externa es necesaria para superar el umbral al despejar I_e de la desigualdad $R_m I_e + E_L \geq V_{th}$ obteniendo

$$I_e \geq \frac{V_{th} - E_L}{R_m} = 1.5mV$$

Esto nos dice que estimulos menores a $1.5mV$ no repercutirán en un potencial de acción.

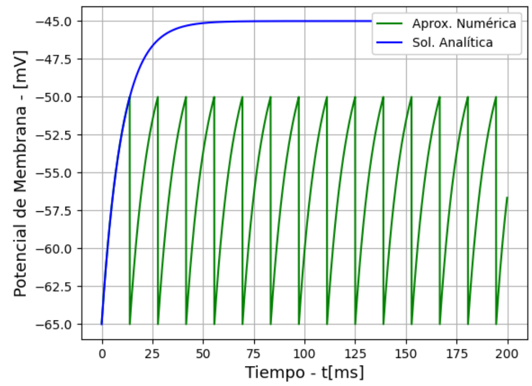

Fig. 1: V_m **vs** t - Potencial de Membrana $V_m(t)$ entre $0ms \leq t \leq 200ms$

2.2 Aproximación Numérica

Abordemos la situación ahora desde otra perspectiva, supongamos que partimos desde un tiempo $t = 0$ con las condiciones especificadas en **b.** y aproximemos $V_m(t)$ por medio de **Runge Kutta de Orden 4** hasta un tiempo $t = 200ms$ comparandola con la solución analítica. Además, incluiremos el umbral de disparo V_{th} que ni bien este es sobrepasado, restituimos el potencial de membrana al equilibrio.

El resultado puede verse en la Figura 1 donde la curva en azul corresponde a la solución encontrada en la sección 2.1 y la verde es la aproximación por el método númerico.

Por un lado, la solución analítica tiende a $-45mV$ que corresponde con el resultado que obtuvimos anteriormente. Además, hasta antes de la primera espiga, su contraparte numérica es practicamente idéntica separandose cuando se alcanza el umbral a los $-50mV$.

Por otro lado, como mencionamos antes, al restituir el potencial al equilibrio E_L puede presenciarse un comportamiento periódico con una cierta frecuencia asociada.

2.3 Frecuencia de Disparo

Algo a notar es que cuando $I_e \geq \frac{V_{th} - E_L}{R_m}$, el período T está dado por el tiempo que le lleva al potencial de membrana igualar el umbral cuando este se encuentra inicialmente en equilibrio, es decir:

$$\begin{aligned} V_{th} &= V_m(T) \\ &= e^{-T/\tau_m}(V_0 - E_L - R_m I_e) + R_m I_e + E_L \\ &= e^{-T/\tau_m}(-R_m I_e) + R_m I_e + E_L \end{aligned}$$

Luego despejamos T:

$$T = -\tau_m \ln\left(1 + \frac{E_L - V_{th}}{R_m I_e}\right)$$

Notar que $R_m I_e > 0$ y $E_L - V_{th} \leq 0$ eso nos deja que la expresión $\ln\left(1 + \frac{E_L - V_{th}}{R_m I_e}\right) \leq 0$ y por lo tanto T es no negativo como es esperado al tratarse de un valor de tiempo.

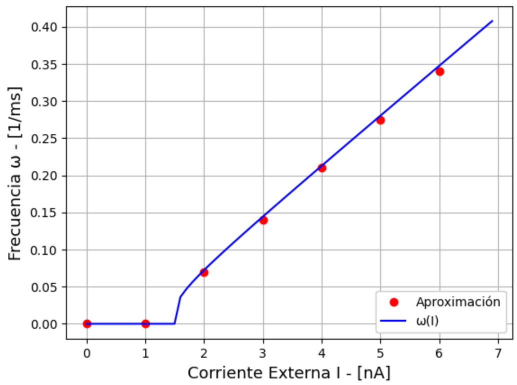

Fig. 2: ω **vs** I_e - Frecuencia de disparo al cambiar la corriente externa.

Como la frecuencia ω es la inversa del período obtenemos que

$$\omega = -\left(\tau_m \ln\left(1 + \frac{E_L - V_{th}}{R_m I_e}\right)\right)^{-1}$$

Para verificar nuestra solución podemos estimar la frecuencia para los valores $I_e = 0, 1, ..., 6$ y ver si coinciden con lo dado por la solución analítica. Una forma sencilla de hacerlo es contar la cantidad de espigas que ocurrieron en un intervalo Δt y luego dividir por este mismo.

Como puede verse en la Figura 2, la estimación denotada por los puntos rojos es apenas distante de la solución analítica. Notar como la frecuencia cambia al incrementar I_e siendo 0 cuando $I_e \leq 1.5nA$, pero ni bien alejandose de este al incrementar la corriente externa, haciendo más frecuente la cantidad de disparos o espigas que puedan llegar a ocurrir en un intervalo de tiempo.

2.4 Corriente Externa Dependiendo del Tiempo

Para contestar nuestra última pregunta **d.**, usaremos una corriente externa $I_e(t)$ dada de la siguiente manera:

$$I_e(t) = 0.35\,(C(t) + S(t))^2\, nA$$

done $C(t)$ y $S(t)$ estan dados como

$$C(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{7}\right) + \cos\left(\frac{t}{13}\right)$$
$$S(t) = \sin\left(\frac{t}{5}\right) + \sin\left(\frac{t}{11}\right)$$

Para este caso la aproximaremos numéricamente bajo los mismos parámetros que veniamos utilizando.

La razón en el uso de está función es conocer cual es el comportamiento del sistema si la corriente externa, aparte de no ser constante, está compuesta por otras funciones con periodos distintos con la esperanza de obtener un comportamiento más similar a lo que podriamos encontrar en la naturaleza.

El resultado está dado por la figura 3, que como puede verse los disparos son realizados en distintos momentos de tiempo siguiendo un patrón no tan predecible como antes,

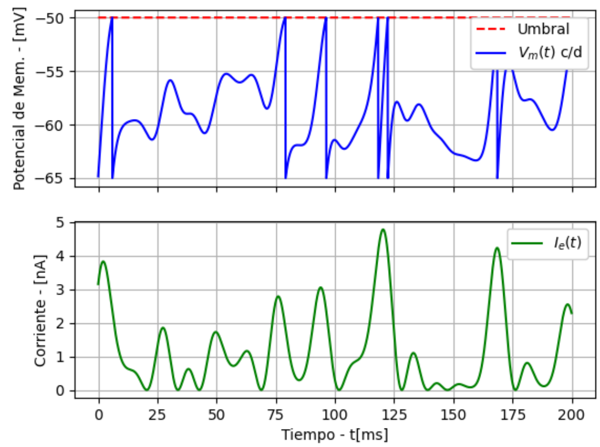

Fig. 3: V_m, I_e **vs** t - Potencial de membrana con disparo respecto al tiempo bajo $I_e(t)$ no constante.

similarmente a como encontrariamos en una neurona de algún ser vivo. Para este caso además ya no podriamos hablar de una frecuencia de disparo pero si una porcentaje promedio del mismo.

3 Conclusión

Recapitulando lo obtenido para las distintas preguntas podemos concluir que:

- No se puede producir un potencial de acción si la corriente externa no es lo suficientemente alta. En caso de serlo, producirá un comportamiento periódico (Siempre y cuando el $I_e(t)$ sea constante) que puede ser deducido al analizar el tiempo en que el potencial de membrana alcanza el umbral partiendo desde el reposo.
- Lo anterior puede corroborarse no solo analiticamente pero también aproximando $V_m(t)$ a partir de un valor inicial teniendo en cuenta el umbral de disparo y restituyendo el potencial al equilibrio cuando V_{th} es alcanzado.
- Cuando $I_e(t)$ deja de ser constante, dependiendo de como cambie la corriente externa en tiempo, el modelo Integrate and Fire puede llegar a simular resultados realmente interesante que podrian ocurrir sin ninguna duda en la naturaleza.

References

[1] Dayan P. and L. Abbott, *Theoretical neuroscience: computational and mathematical modeling of neural systems*, MIT Press, 2001.