

Modelo de Predadores y Prezas de Lotka-Volterra

Nicolás Benjamín Ocampo

Licenciatura en Ciencias de la Computación - FaMAF
Redes Neuronales

Abstract—Este artículo aborda la demografía de una población de conejos y de zorros que conviven en un ecosistema determinado, siendo modelado a partir de las ecuaciones *predador-presa* de **Lotka-Volterra**. En particular, haremos uso de sistemas dinámicos con el fin de comprender el cambio poblacional de ambas especies cuando se deja evolucionar el sistema libremente. Realizaremos un análisis general de la estabilidad del mismo para luego concluir sobre un caso en particular bajo ciertas condiciones iniciales y parametros influyentes dentro de nuestro modelo. Finalmente abordaremos la pregunta si los predadores y prezas pueden convivir entre ellos.

Index Terms—Lotka-Volterra, Predadores, Prezas, Sistemas Dinámicos



1 INTRODUCCIÓN

1.1 Descripción del problema

Considera la siguiente situación sobre un ecosistema donde conviven tantos **zorros** como **conejos**. Ambas poblaciones pueden crecer o decrecer en cantidad a partir de un tiempo inicial $t = 0$ con una cierta **taza de crecimiento**. Ahora bien, dado que los zorros son **predadores** de los conejos, necesitan de su existencia e interacción para sobrevivir. Por otro lado, dicha interacción, si bien beneficia a los zorros, afecta a los conejos al ser su **presa**. Estos intercambios están regulados por **tazas de éxito en la caza** en favor de los zorros y en contra los conejos.

Las tasas de crecimiento y de éxito en la caza, están dadas por las características de nuestro ecosistema.

Dado este escenario, uno se podría preguntar:

- ¿Qué ocurre con la población de ambas especies cuando se deja evolucionar el sistema libremente, es decir, cuando t tiende a infinito?
- ¿Pueden los conejos y los zorros coexistir?
- ¿Podrían extinguirse ambas especies? ¿Y alguna de ellas?

A priori no es fácil dar una respuesta a estas cuestiones, por ende realizaremos suposiciones que conciernen al dominio del problema y modelaremos la situación con el fin de analizarla utilizando las **ecuaciones de predadores y prezas de Lotka-Volterra**.

1.2 Modelado del problema

El modelo Lotka-Volterra está determinado por las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}\dot{C} &= \alpha C - \beta C Z \\ \dot{Z} &= -\gamma Z + \delta C Z\end{aligned}$$

- C : Cantidad de conejos en el ecosistema.
- α : Taza de crecimiento de los conejos.
- β : Taza de éxito en la caza que afecta a la presa.

- Z : Cantidad de zorros en el ecosistema.
- γ : Taza de crecimiento de los zorros.
- δ : Taza de éxito en la caza que favorece al depredador.

Analicemos como estas ecuaciones describen nuestra situación.

Para empezar, las expresiones C y Z son funciones incógnitas que indican la cantidad poblacional en el tiempo, es decir, dependen de este último ($C(t)$ y $Z(t)$).

Por otro lado, \dot{C} y \dot{Z} son las **razones de cambio** de dichas funciones en el tiempo. Por lo tanto nos va a interesar obtener información de $C(t)$ y $Z(t)$ a partir de sus tasas de cambio.

Los parametros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes positivas que, como mencionamos, se obtienen a partir de características de nuestro sistema.

Notar que la razón de cambio de la población de los conejos crece con tasa α y es afectado por la interacción con los zorros con tasa de éxito β . Esto nos dice además que el alimento de los conejos en cierta manera es ilimitado influyente por la constante α . Análogamente, la razón de cambio de la población de los zorros decrece con tasa γ y es favorecido por la interacción con los conejos con tasa de éxito δ . Dicho de otra manera el alimento de los zorros depende de la cantidad de presas que hayan en el entorno, siendo este último regulado por los parámetros.

De allí se puede intuir que si no hubiesen zorros, la población de los conejos crecería indefinidamente. Por otro lado, si no hubiesen conejos, los zorros se extinguirían. Además, puede presenciarse un ciclo de crecimiento y declinamiento entre ambas especies, los predadores aumentan mientras las presas abundan, y las presas abundan siempre y cuando los predadores sean pocos.

De todas formas plantearemos un análisis más riguroso que nos permita justificar nuestra intuición y nos deje tranquilos al final del día.

Finalmente, concluiremos con un ejemplo de análisis para los siguientes parametros.

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.1 \\ \beta &= 0.02 \\ \gamma &= 0.3 \\ \delta &= 0.01\end{aligned}$$

Para este caso, la interacción entre presas y predadores afectara ligeramente más a los conejos que lo que favorecerá a los zorros. Notar también que la población de los zorros decrece con tasa $\gamma = 0.3$ si este no consigue alimentos.

2 DIAGRAMA DE FLUJO Y ESTABILIDAD DEL SISTEMA

2.1 Puntos Fijos

Para determinar que va a ocurrir con nuestro sistema cuando el tiempo tienda a infinito, debemos encontrar primero los puntos fijos del mismo para luego analizar su estabilidad (Si nuestras funciones incognitas C y Z se apartan, atraen, u oscilan en dichos puntos). Veamos para que valores de C y Z tenemos que $\dot{C} = \dot{Z} = 0$.

Esta claro que un punto fijo del sistema es $(C^*, Z^*) = (0, 0)$. Además, notar que

$$\begin{aligned}\dot{C} &= 0 \\ \alpha C - \beta CZ &= 0 \\ \alpha C &= \beta CZ \\ \alpha &= \beta Z \\ \frac{\alpha}{\beta} &= Z\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= 0 \\ -\gamma Z + \delta CZ &= 0 \\ \delta CZ &= \gamma Z \\ \delta C &= \gamma \\ C &= \frac{\gamma}{\delta}\end{aligned}$$

Por lo tanto el otro punto fijo es $(C^*, Z^*) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

2.2 Linealización alrededor de los puntos fijos

La estabilidad de los puntos fijos puede ser determinada linealizando alrededor de ellos. Es decir, posicionarnos cerca de los puntos fijos por medio de una pequeña perturbación, desplazar nuestros ejes coordenados en dichos puntos y considerar nuevos ejes sobre los cuales la tasa de cambio \dot{C} no depende de \dot{Z} y viceversa. Esto nos indicará que nuestro sistema es *linealmente separable*.

Para ello obtengamos la matriz Jacobiana de nuestro modelo dada como

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{C}}{\partial C} & \frac{\partial \dot{C}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \dot{Z}}{\partial C} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - \beta Z & -\beta C \\ \delta Z & \delta C - \gamma \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego evaluamos los puntos fijos (C^*, Z^*) en la matriz jacobiana.

2.2.1 Estabilidad del Punto Fijo $(0, 0)$

Para este caso la matriz nos queda

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \alpha - \beta 0 & -\beta 0 \\ \delta 0 & \delta 0 - \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego para conocer la estabilidad de dicho punto fijo (Cercano a este punto fijo), necesitamos los autovalores de dicha matriz.

Como A es diagonal sus autovalores son $\lambda_1 = \alpha$ y $\lambda_2 = -\gamma$ cuya base de autovectores es la canonica $\vec{v}_1 = (1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (0, 1)$.

Esto nos dice que, cercano al punto fijo, no hay necesidad de un cambio de ejes coordenados pues nuestro sistema está desacoplado.

Dado también que λ_1 y λ_2 nos resultan con signos opuestos (Recordar que los parámetros son positivos), tenemos que $(0, 0)$ es un **punto silla inestable**.

Es decir, las trayectorias son atraídas al punto fijo bajo el eje delimitado por \vec{v}_2 , sin embargo estas se repelen de manera exponencial bajo el eje delimitado por \vec{v}_1

2.2.2 Estabilidad del Punto Fijo $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Siguiendo el mismo procedimiento tenemos que

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \alpha - \beta \frac{\alpha}{\beta} & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & \delta \frac{\gamma}{\delta} - \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - \alpha & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & \gamma - \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego para calcular los autovalores de dicha matriz debemos encontrar las raíces de su polinomio característico dado por:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \delta \frac{\alpha}{\beta} \beta \frac{\gamma}{\delta} = \lambda^2 + \alpha \gamma$$

Luego los autovalores son $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$.

Dado que resultaron ser imaginarios puros, es decir con parte real nula, tenemos un **punto fijo centro**, que no es atractor, ni repelente, donde las trayectorias oscilan con forma de un centro alrededor de este punto.

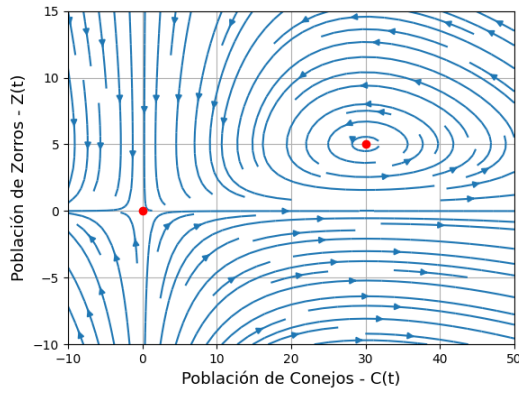


Fig. 1: Diagrama de Flujo del Sistema

2.3 Diagrama de Flujo

Con la información obtenida, estamos en condiciones de responder las preguntas que nos planteamos al inicio del artículo. Si bien no conocemos la solución exacta de nuestras incógnitas $C(t)$ y $Z(t)$, conocemos cuales son sus comportamiento a medida que el tiempo crece cuando estas están cerca de los puntos fijos. Luego de acuerdo a [1], está aproximación puede extrapolarse cuando se está contemplando valores mucho más apartados.

Ahora bien, dicho comportamiento depende de cual fue la cantidad de zorros y de conejos inicial en nuestro ecosistema. Por lo tanto, para visualizar de manera más sencilla el proceder de $C(t)$ y $Z(t)$ confeccionaremos un **Diagrama de Flujo** del sistema que nos dará de manera cualitativa las posibles trayectorias de estas funciones bajo multiples condiciones iniciales.

Como dijimos en la introducción, realizaremos nuestro análisis para la parametrización:

$$\alpha = 0.1$$

$$\beta = 0.02$$

$$\gamma = 0.3$$

$$\delta = 0.01$$

Para este caso, los puntos fijos son $(0,0)$ y $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}) = (30,5)$. Recordemos entonces que para $(0,0)$ obtuvimos un punto de ensilladura inestable, y para $(30,5)$ un punto centro neutro.

Como puede verse en la Figura 1 esto concuerda con nuestros resultados generales. Recordar también que para el punto $(0,0)$ habíamos visto que sus autovalores eran $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$ cuyas direcciones corresponden con las de los ejes C y Z respectivamente.

Además, el autovalor λ_1 es positivo por lo tanto las trayectorias tienden de manera exponencial sobre el eje C en dirección positiva hacia la derecha apartándose del punto fijo. Para las trayectorias posicionadas en su eje contraparte Z , estas terminan siendo atraídas.

También se puede ver que ocurre un comportamiento dual cuando Z o C son negativos, pero estos casos no serán de nuestro interés bajo un análisis biológico (Dado que no puede haber menor a 0 seres vivos de una especie).

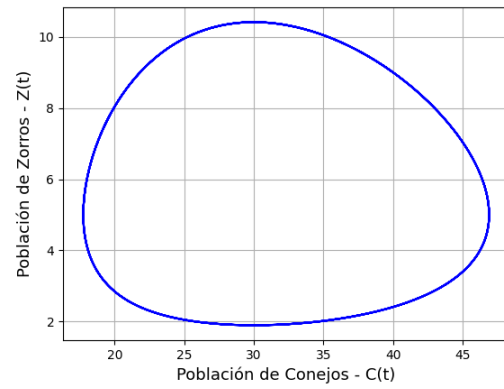


Fig. 2: Z vs C - Aproximación numérica al problema del valor inicial con $t = 0$, $Z_0 = 9$ y $C_0 = 40$

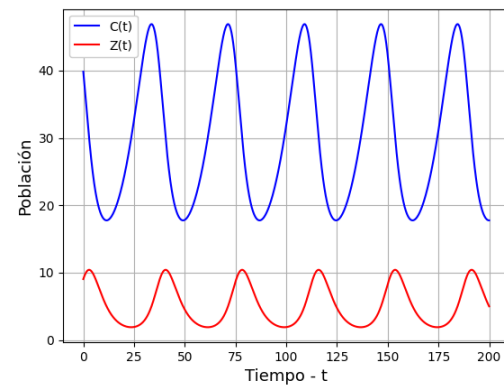


Fig. 3: Z y C vs t - Aproximación numérica al problema del valor inicial con $t = 0$, $Z_0 = 9$ y $C_0 = 40$

Notar que por medio del gráfico uno puede percatarse de los **nullclines**, es decir, aquellas regiones sobre las cuales el flujo es puramente horizontal o vertical. Estos casos se dan para aquellos flujos que rigen sobre los mismos ejes, es decir, cuando inicialmente no hay zorros o no hay conejos.

Esto confirma la intuición que tuvimos al comienzo, si inicialmente no hay zorros, los conejos perdurarán infinitamente en el tiempo. Por otro lado si no hubiese conejos, los zorros no podrían sobrevivir.

Finalmente, para el punto $(30,5)$ se confirma nuevamente lo que obtuvimos en la sección anterior. Esto nos quiere decir que, si hubiesen zorros y conejos inicialmente, estos convivirían de manera indefinida en el tiempo donde en ocasiones prosperarían uno u otro. Por lo tanto ninguno de los 2 se extinguiría!

3 APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Abordemos ahora la situación desde otra perspectiva. Supongamos que partimos del tiempo inicial $t = 0$ con cantidades $Z_0 = 9$ de zorros y $C_0 = 40$ de conejos. Aproximemos las soluciones $C(t)$ y $Z(t)$ por medio de **Runge Kutta de Orden 4** y ver si obtenemos una trayectoria oscilante hasta un tiempo $t = 200$.

Como puede verse en las Figuras 2 y 3, los resultados por medio de este método no contradicen a lo obtenido bajo el análisis de estabilidad. Se tiene que las soluciones estimadas de $C(t)$ y $Z(t)$ siguen un comportamiento oscilante y uniforme al transcurrir el tiempo, manteniendo una población alrededor de 15 a 50 conejos y 2 a 13 zorros en nuestro ecosistema.

Por lo tanto ambas formas de lidiar con el problema son totalmente válidas. Sin embargo, el segundo método nos deja con la intriga si para otras condiciones iniciales tendríamos un comportamiento similar.

4 CONCLUSIÓN

Luego de este análisis (y algunas cuentas), finalmente podemos responder nuestras conjeturas iniciales y quedarnos con nuestra consciencia limpia.

Recopilando los resultados podemos concluir que:

- Ninguna de las poblaciones puede extinguirse siempre y cuando hayan conejos y zorros inicialmente, estas se quedarían oscilando indefinidamente siendo en ocasiones más prospero para una especie que para otra pero inevitablemente repitiéndose el ciclo.
- Si es que hubiese ausencia de alguna especie, la población de conejos crecería exponencialmente, y la de zorros desaparecería debido a la falta de alimento.
- Los métodos de estabilidad y aproximación numérica permitieron dar una clara perspectiva de nuestras incognitas sin resolverlas de manera de exacta. La diferencia es que en un caso obtuvimos un panorama del sistema para cualesquiera valores iniciales, cuando en contraparte, aproximar numéricamente nos requiere una en específico. Este segundo método podría nos ser viable si lo que nos interesa es conocer una perspectiva del flujo para muchas condiciones iniciales.
- Si bien además al final se trabajaron sobre parámetros específicos en nuestro modelo, por lo que mostramos en la sección 2, el comportamiento oscilatorio alrededor de uno de los puntos fijos y el de punto silla en el origen de los ejes coordenados se cumple para cualquiera valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positivos, variando la periodicidad oscilatoria y la velocidad de crecimiento en la población de tales especies.

REFERENCES

- [1] S. Strogatz, *Non Linear Dynamics and Chaos*, Reading, Massachusetts: Perseus Books, 1994.