

Projet d'actuariat de l'assurance Non-Vie

ENSAE PARIS

Eurydice Maucuer, Benjamin Patra

Enseignant : Christophe DUTANG

1 Exploration des données de YEAR0

1.1 Ajout et création de nouvelles variables

En nous inspirant du travail effectué dans le cours [1], nous avons fait le choix d'ajouter de nouvelles variables à partir de données externes ainsi que d'en créer certaines à partir des variables déjà existantes. A partir de données disponibles sur le site de l'INSEE, nous avons ajouté la densité de population par département¹ ainsi que le libellé de la région. Afin de réaliser les calibrations des différents modèles, les variables continues sont catégorisées. Pour certaines variables plusieurs catégorisations sont établies et les statistiques descriptives permettront de choisir la plus adaptée. D'après la documentation du package CASdataset [2], la variable vh_cyl est découpé en une variable catégorielle à deux modalités car "Popular cars have a power of 1,000 cc (cylinders), whereas luxury cars usually have a power of 2,000 cc or greater". De plus, une métrique présente dans l'une des bases de ce package nous a semblé intéressante : il s'agit de l'EV Ratio qui est défini comme (puissance du véhicule en kW x 100) / (poids du véhicule en kg + 75). Les dernières variables construites sont simplement les logarithme de certaines des variables continues.

1.2 Étude de la fréquence

Nous disposons de 100 000 polices d'assurances pour l'année YEARO. Nos premières observations portent sur la distribution du nombre de sinistres. La figure 1 montre une faible proportion d'assurés ayant au moins un sinistre. En effet, une forte majorité d'assuré, 88%, n'a aucun sinistre sur l'année YEARO. On cherche donc à regarder si toute la population est égale face à la fréquence des sinistres. Pour cela, il existe trois type de variables disponibles dans notre base de données : les caractéristiques du conducteur, les caractéristiques du véhicule et les caractéristiques du contrat.

Commençons par les caractéristiques du conducteur. Nous disposons de l'âge et du nombre d'années de permis de celui-ci et de même pour le second conducteur s'il existe. Le graphiques 2, montre que peu d'informations sur le second conducteur sont renseignés. Pour cette raison, nous avons fait le choix de ne pas inclure les variables sur le second conducteur par la suite. En s'intéressant au conducteur principal 3a 3b, on constate que les jeunes conducteurs, que ce soit en âge ou en années de permis, sont légèrement plus exposés à la possibilité d'avoir un sinistre. Nous regardons donc un possible lien entre les deux variables, la matrice de corrélation 6 confirme une forte corrélation entre l'âge du conducteur et son nombre d'années de permis. Il est important de noter que les jeunes conducteurs sont néanmoins peu représentés dans notre base. Nous disposons également du CRM² ce qui nous permet de remarquer que l'écrasante majorité des assurés bénéficie d'un bonus. Les clients malussés et nouveaux clients (bonus neutre) semblent sur-risqués. Nous avons également représenté le nombre de sinistres total et ramené à 100 000 habitants par département 7, il apparaît que certains départements sont plus risqués que d'autres à l'image de la Meuse et la Vendée.

Au sujet des nombreuses caractéristiques du véhicule disponibles, toutes ne semblent pas intéressantes à l'image du modèle du véhicule car trop précis. Nous nous concentrons donc sur l'âge, la valeur, le type de carburant 4a, la classe de risque 4b et la marque du véhicule 4c. Le risque décroît avec l'âge du véhicule, particulièrement sur les 20 premières années 4d. A l'inverse le risque est croissant selon la valeur du véhicule 4e, excepté pour la tranche +50 000 euros qui est cependant sous représenté.

Les caractéristiques du contrat d'assurance : fréquence de paiement 5a, formule choisie et s'il s'agit d'un contrat "Pay as you Drive" 5b montrent que la majorité des contrats sont en formule Maxi sans option "Pay as you drive". La figure 5c indique que plus la couverture est élevée plus les sinistres sont fréquents. Cela semble logique puisqu'un assuré au tiers ne déclarera pas tous ses sinistres, car non remboursables, contrairement à un assuré tous risques.

1.3 Étude de la sévérité

Débutons par une analyse univariée du montant de la sinistralité, notre base de sinistres comporte 13 559 lignes. Tout d'abord nous constatons que nous disposons de 438 valeurs de sinistres négatives et faisons le choix, d'après [1], de les écarter pour l'étude de la sévérité. L'histogramme 8a et le boxplot 8c du montant des sinistres permettent de dresser les conclusions suivantes :

 $^{^{1} \}texttt{https://www.insee.fr/fr/statistiques/5544529?sommaire=5435421\&q=densit\%C3\%A9\%20d\%C3\%A9partement\#consulter}$

²coefficient réduction majoration

- Les montants de nos sinistres sont assez faibles, avec une médiane de 358,65€.
- Seul 10% des sinistres ont un montant supérieur à 2567,33€.

La fonction de répartition 8e converge lentement vers 1 du fait du nombre très limité de sinistres supérieurs à 20 000€et de l'absence de sinistre entre 30 346€et 164 858€, le maximum. Le graphique 8d permet de déduire que :

- 50% des plus petits sinistres ne représentent que 6,8% de la charge totale.
- 75% des plus petits sinistres ne représentent que 23,3% de la charge totale.
- 95% des plus petits sinistres ne représentent que 64,4% de la charge totale.

Comme dans 1.2 nous pouvons étudier le montant des sinistres selon les caractéristiques du conducteur, du véhicule et du contrat. La figure 9a permet de voir une évolution en "cuvette" : diminution du montant des sinistres jusqu'à 30-40 ans puis une augmentation. La figure 9b montre que les voitures récentes ont un montant de sinistres plus élevés en moyenne, ce qui apparaît logique pour une voiture neuve pour laquelle les réparations peuvent être coûteuses. La logique reste la même pour le montant du véhicule 9c. Concernant les spécificités du contrat, nous remarquons, comme en fréquence, que la sinistralité diminue avec avec la couverture 9d. Nous avons également représenté le montant moyen d'un sinistre par département 9f: Paris, l'Eure, l'Orne, les Hautes Pyrénéennes et le Gers présentent les montants les plus élevés.

2 Modélisation et méthode

2.1 Méthodologie

Nous utilisons une approche fréquence-sévérité afin de réaliser notre tarification. Cette méthode consiste à réaliser deux modèles distincts, un pour la fréquence et un pour la sévérité puis à calculer la prime pure via la formule $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(B)$ où N et B représente la fréquence et le montant respectivement.

Lois calibrées: Comme dans le cours, nous avons réalisé plusieurs modélisation en fréquence et en sévérité. Pour la fréquence nous avons essayé plusieurs lois classiques: \mathcal{P} oisson, \mathcal{Q} uasi- \mathcal{P} oisson et \mathcal{B} inomiale \mathcal{N} égative avec θ fixe et θ estimé. Par la même méthode que présentée dans [1] 3.2.7 et à partir des graphiques 11 on détermine θ pour la loi $\mathcal{B}\mathcal{N}$ par rapport à l'âge du véhicule. On obtient $\theta = 1/\hat{a} = 4.366812$. Nous étudions également des modèles plus avancés: les lois zéro-modifiéees. Nous regardons les liens logit, probit, cloglog et cauchit pour un loi de \mathcal{P} oisson ainsi qu'un lien logit pour une loi $\mathcal{B}\mathcal{N}$.

Pour la sévérité, nous avons fait le choix de réaliser trois méthodes différentes :

- Tout d'abord nous avons calibré une loi Gamma sur l'ensemble des données disponibles en sévérité (hormis les valeurs négatives comme précisé plus haut).
- Nous avons ensuite procéder par écrêtement et nous avons calibré des lois Gamma, Inverse Gaussienne (log) et Inverse Gaussienne $(1/\mu^2)$.
- Enfin, nous avons calibré les mêmes lois sur les sinistres attritionels pour une méthode par séparation.

Pour les méthodes par écrêtement et par séparation, nous choisissons la valeur seuil entre sinistre attritionels et extrêmes à partir du quantile à 99,5%. On constate que les sinistres extrêmes représentent 10% de la charge sinistre totale. Pour la méthode par écrêtement, on calcule une charge surcrête par police de 44,6 \in . Dans le cadre d'une méthode par séparation, nous déterminons le paramètre α d'une loi de Pareto 1 calibrée sur les sinistres atypiques par la formule suivante obtenue par méthode des moments : $\hat{\alpha} = \frac{2}{1-\hat{m}^2/\hat{v}}$ [3]. Nous obtenons ensuite le montant de la surprime par la formule donnée dans [1]. Celle-ci est de 6,8 \in .

Choix des variables : Afin de sélectionner nos variables explicatives, nous sommes partis d'un jeu de variables 8 qui semblaient intéressantes d'après l'analyse descriptives des données pour modéliser la fréquence et la sévérité. Ensuite nous avons appliqué deux méthodes classiques pour la sélection de variables :

- Une méthode descendante consistant à enlever successivement les variables en éliminant en premier les moins significatives jusqu'à ne garder que celle qui le sont.
- Une méthode par stepAIC [4] [5] [6]. Cette méthode basée sur le critère AIC, qui doit être minimal, élimine successivement les variables qui permettent de diminuer le plus fortement l'AIC.

En fréquence comme en sévérité, quelque soit la loi utilisée, nous remarquons que nous sélectionnons les mêmes variables. Voici la liste des variables retenues :

Table 1: Liste des variables sélectionnées

	Modèles de fréquence	Modèles de sévérité
Assuré	bonus	
Assure	drv_age1	drv_age1
	risk_class_G	
	vh_age_G2	vh_age_G2
Véhicule	vh_fuel	
	vh_make_G	
	vh_value_G3	vh_value_G3
	pol_coverage	pol_coverage
Contrat	pol_pay_freq	pol_pay_freq
	pol_payd	

2.2 Modélisation de la fréquence

Nous calibrons les lois précédemment citées pour la fréquence. Les métriques d'adéquation sont disponibles dans les tables 2 et 3. La loi Binomiale Négative avec θ estimé est celle minimisant les critères AIC et BIC et la loi zéromodifiée Binomiale Négative avec lien logit minimise la log-vraisemblance. Cette dernière loi étant plus complexe, nous gardons la loi Binomiale Négative avec θ estimé.

Table 2: Métriques d'adéquation pour les lois de fréquence

	Poisson lien log	QuasiPoisson lien log	Binomiale Negative theta fixe	Binomiale Negative theta estimé
log-vraisemblance	-40,396.23	NA	-40,322.23	-40,299.69
AIC	80,862.46	NA	80,714.45	80,671.37
BIC	81,195.41	NA	81,047.40	81,013.84
deviance	55,958.14	55,958.14	53,014.61	50,318.71
dif dev null et dev	1,669.77	1,669.77	1,624.53	1,577.08

Table 3: Métriques d'adéquation pour les lois zéro-modifiées en fréquence

	Zéro Modifié P	Zéro Modifié P	Zéro Modifié P	Zéro Modifié P	Zéro Modifié NB
	logit	probit	cloglog	cauchit	logit
log-vraisemblance AIC BIC	-40,282.33 80,704.67 81,370.57	-40,280.21 80,700.43 81,366.33	-40,282.88 80,705.75 81,371.66	-40,302.21 80,744.43 81,410.33	$\begin{array}{c} -40,277.92 \\ 80,697.85 \\ 81,373.27 \end{array}$

Nous donnons en annexe 9, la table des coefficients estimés ainsi que les p-valeurs pour la loi retenue. Nous remarquons que l'âge du véhicule est la caractéristique dominante avec des β estimés les plus élevés en valeur absolue. Nous représentons également les estimations du nombre de sinistres par rapport aux observations par classe de risque 12. Par ailleurs, il y a bien dé-corrélation des résidus par rapport aux valeurs prédites 13.

2.3 Modélisation de la sévérité

Nous calibrons les lois mentionnées en partie 2.1. Les métriques d'adéquation pour les lois calibrées en sévérités sont disponibles dans les tables 4, 5 et 6.

Nous remarquons que la loi Gamma avec un lien log dans la méthode par séparation est celle minimisant à la fois la vraisemblance, l'AIC et le BIC. C'est donc la loi que nous retiendront pour construire notre prime.

Table 4: Métriques d'adéquation pour la sévérité

	Gamma lien log
log-vraisemblance	-100,381.90
AIC	200,795.80
BIC	200,915.20
deviance	27,538.08
dif dev null et dev	572.34

Table 5: Métriques d'adéquation pour les sinistres inflatés, méthode par écrêtement

	Gamma lien log	Inverse Gaussienne lien log	Inverse Gaussienne lien $1/mu^2$
log-vraisemblance	-101,531.90	-99,596.30	-99,591.74
AIC	203,095.90	199,224.60	199,215.50
BIC	203.215.40	199,344.10	199,334.90

Table 6: Métriques d'adéquation pour les sinistres inflatés, méthode par séparation

	Gamma lien log	Inverse Gaussienne lien log	Inverse Gaussienne lien $1/mu^2$
log-vraisemblance	-98,954.03	-103,353.20	$\begin{array}{c} -103,353.20 \\ 206,738.40 \\ 206,857.80 \end{array}$
AIC	197,940.00	206,738.40	
BIC	198,059.40	206,857.80	

Nous donnons en annexe 10, la table des coefficients estimés ainsi que les p-valeurs pour la loi retenue. La formule choisie ainsi que la valeur du véhicule ont les coefficients les plus élevés en valeur absolue et sont donc des facteurs déterminants de la sévérité. Nous donnons en 14 les estimations du montant des sinistres par rapport aux observations par classe de risque. Par ailleurs, il y a bien dé-corrélation des résidus par rapport aux valeurs prédites 15.

3 Calcul de Prime

3.1 Prime Pure

Grâce aux lois sélectionnées pour la fréquence en 2.2 et pour la sévérité en 2.3, on calcule la prime pure pour les 100 000 polices d'assurance de YEAR1. L'histogramme de la prime pure est disponible en annexe 16a. La figure 16d, montre que les assurés ayant une voiture récente ont une prime supérieure à celle des autres conducteurs ce qui apparaît logique au vue des constatations faites en 1.3. De même, 16b montre que les assurés ayant une faible couverture payent moins cher que les autres. Le graphique selon l'âge du conducteur 16c indique que les jeunes conducteurs payent une prime inférieure aux autres classes d'âge ce qui est assez surprenant par rapport aux tarifs réellement pratiqués. Cependant, 10a indique que la classe des jeunes conducteurs est la moins dangereuse en terme de variabilité. En effet, 10 % de leurs plus grands sinistres représentent environ 30 % de la charge totale des sinistres alors que pour les autres classes ces 10% représentent 50% de la charge totale.

3.2 Prime Commerciale

Pour déterminer la prime commerciale nous avons repris la méthodologie développée dans [1], nous avons réalisé 10~000 simulations par une méthode de bootstrap non-paramétrique de la charge sinistre agrégée avec les données d'apprentissage. L'histogramme 17a des résultats obtenus montrent que que les simulations sont distribuées quasi normalement avec une asymétrie à droite. La somme de nos primes est inférieure à la moyenne des simulations. On constate aussi, grâce à la fonction de répartition empirique de la charge 17b, que les simulations sont faiblement dispersées avec des valeurs resserrées entre 13 et 14 millions. En utilisant le principe de la valeur espérée, le tableau 7 permet d'établir que $\kappa = 5\%$ permet de couvrir la charge de portefeuille dans 95% des cas. On détermine ainsi la prime commerciale (sans frais ni taxe) : prime commerciale $= (1+\kappa)E[X]$.

Table 7: Moyenne et quantile en fonction de la somme des primes pures

	quantile	valeur	écart % par rapport à la prime pure
somme prime pure	0.31	13.07	0
moyenne charge agrégée	0.52	13.22	1.2
quantile à 95% de la charge	0.95	13.72	5.0
quantile à 99% de la charge	0.99	13.95	6.7
quantile à 99.5% de la charge	0.995	14.07	7.7

References

- [1] Chistophe Dutang. Actuariat de l'assurance Non-Vie. 2021-2022. URL: http://dutangc.free.fr/.
- [2] Chistophe Dutang & Arthur Charpentier. *Package 'CASdatasets'*. Dec. 2020. URL: http://cas.uqam.ca/pub/web/CASdatasets-manual.pdf.
- [3] Xavier Milhaud Carine Sauser Mélanie Groisne. Projet Etienne Marceau Méthodes statistiques en assurance non vie. Page 11. Décembre 2007. URL: https://www.xaviermilhaud.fr/public/CR-stats1.pdf.
- [4] Arthur Charpentier. Actuariat de l'Assurance Non-Vie 3. 2017. URL: https://freakonometrics.github.io/documents/teaching/slides-ensae-2017-3.pdf.
- [5] Frédéric Bertrand. Choix du modèle. 2010. URL: https://irma.math.unistra.fr/~fbertran/enseignement/Estimation_2010/Cours1-Anado.pdf.
- [6] Choose a model by AIC in a Stepwise Algorithm. URL: https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/MASS/html/stepAIC.html.

4 Annexe

.1 Étude de la fréquence

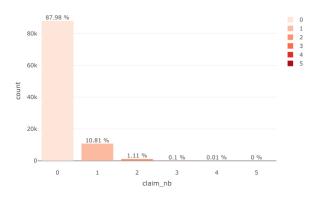


Figure 1: Répartition du nombre de sinistres par contrat

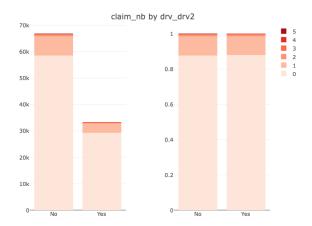


Figure 2: Nombre de sinistres en fonction de la déclaration d'un second conducteur

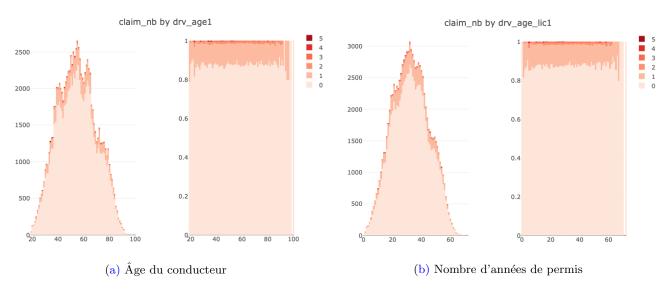


Figure 3: Nombre de sinistres selon les caractéristiques du conducteur

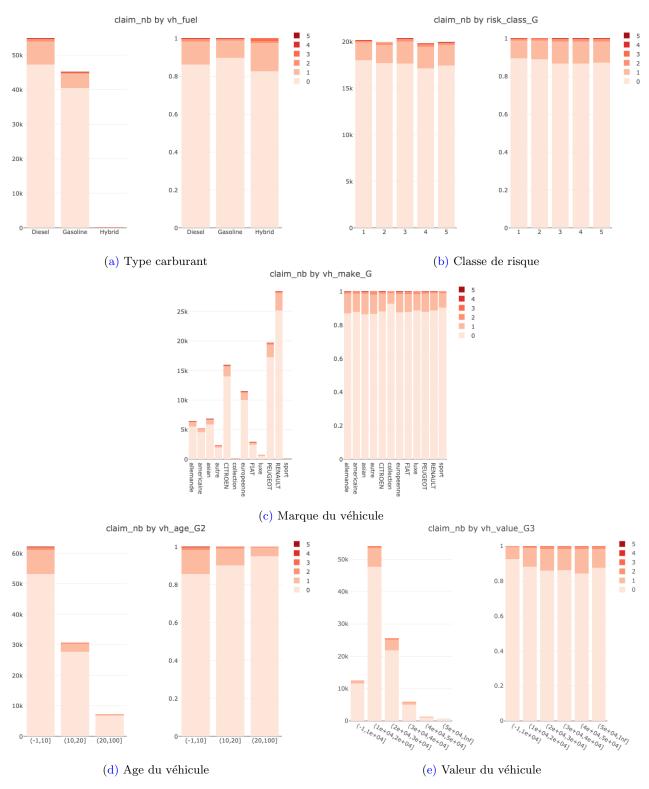


Figure 4: Nombre de sinistres selon les caractéristiques du véhicule

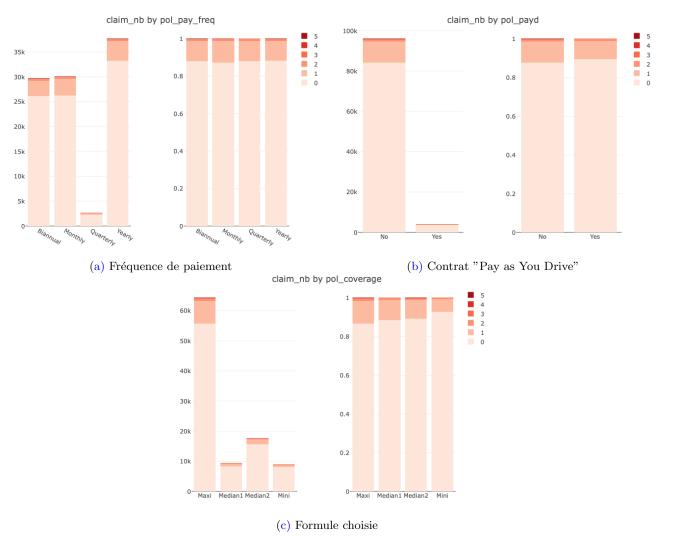


Figure 5: Nombre de sinistres selon les caractéristiques du contrat

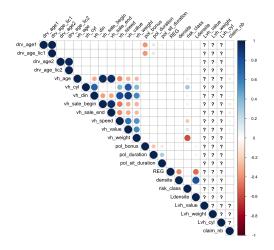
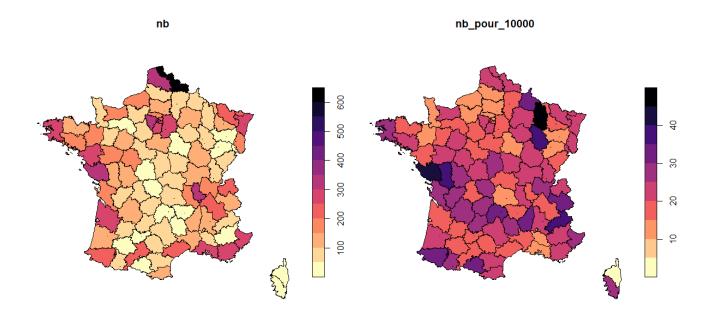


Figure 6: Corrélation des variables



(a) Nombre de sinistres

(b) Nombre de sinistres pour 100 000 habitants

Figure 7: Nombre de sinistres par département

.2 Étude de la sévérité

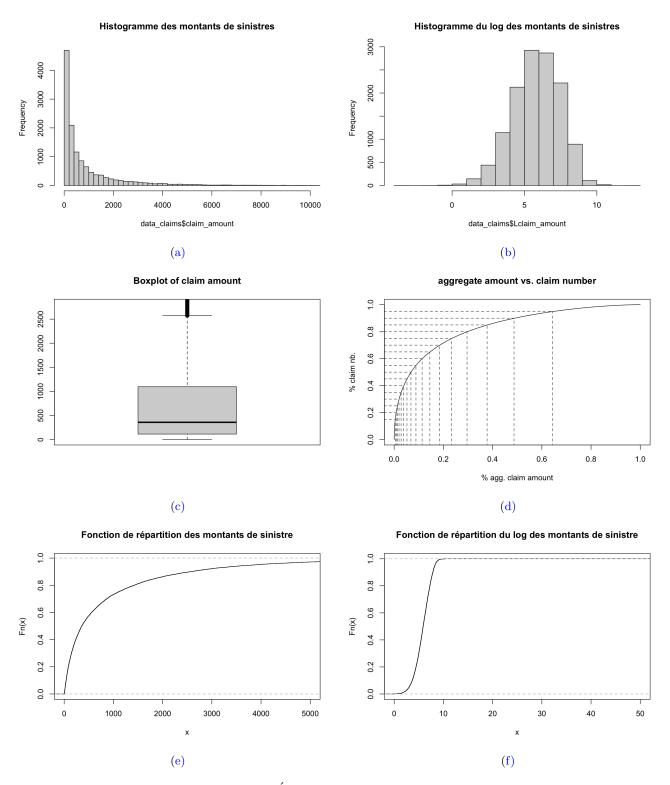


Figure 8: Étude des montants des sinistres

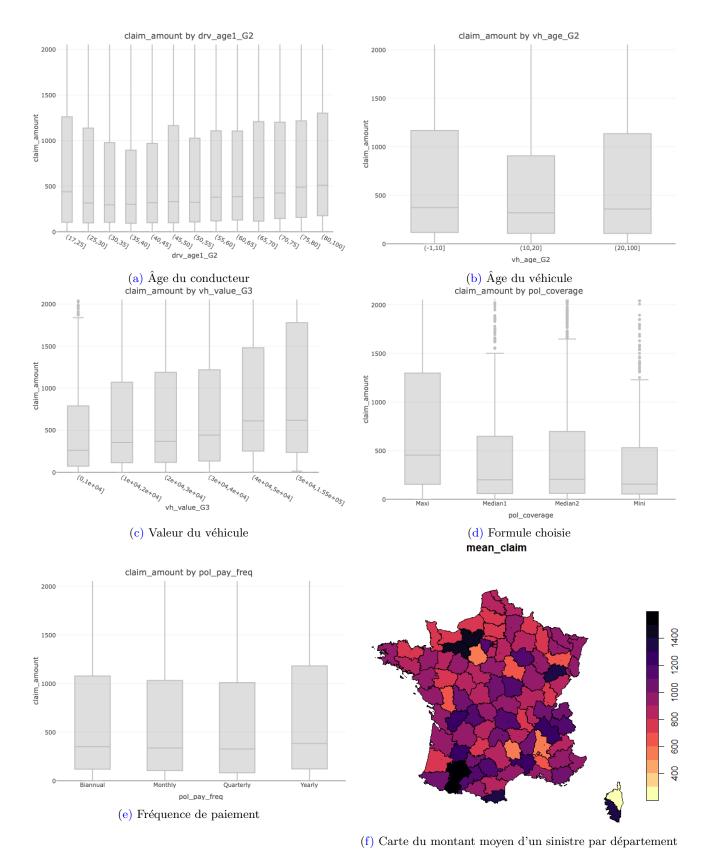


Figure 9: Nombre de sinistres selon les caractéristiques du conducteurs, du véhicules et du contrat

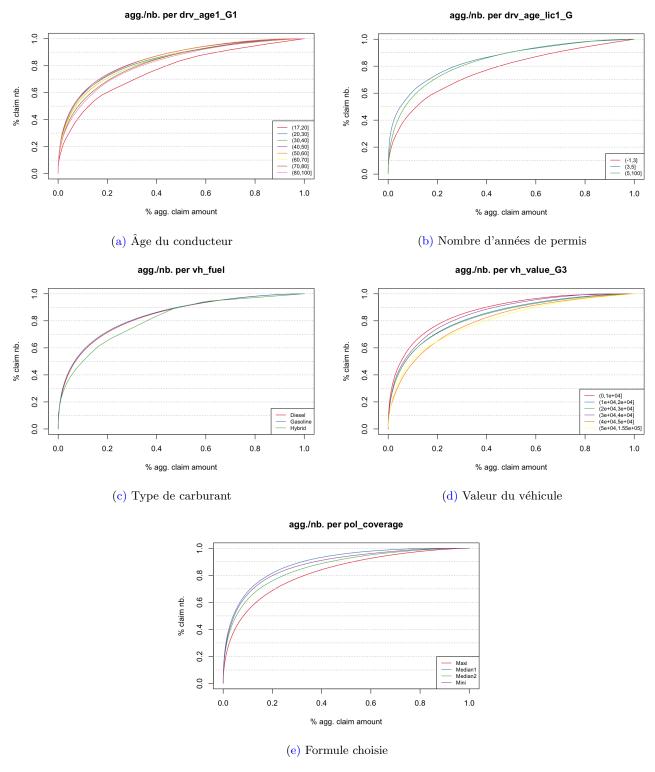


Figure 10: Graphique nombre de sinistres VS montant agrégés

.3 Choix des modèles

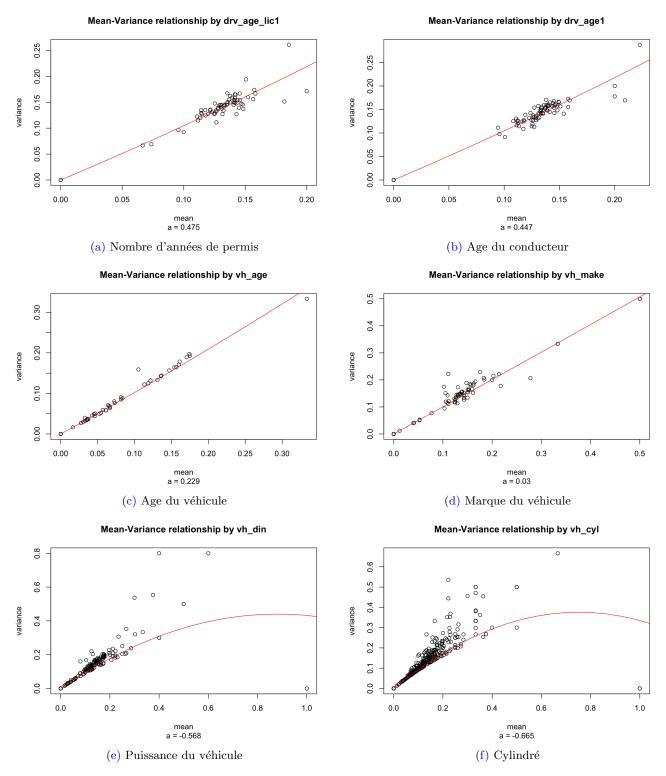


Figure 11: Relation moyenne / variance du nombre de sinistres

Table 8: Liste des variable initiales

Liste des variables
bonus densite drv_age1 drv_age2 pol_coverage pol_pay_freq pol_payd REG_LABEL
risk_class_G vh_age_G2 vh_cyl_G vh_fuel vh_make_G vh_value_G3

.4 Résultats des modèles

.4.1 Modèle de fréquence : Loi Binomiale Négative θ estimé

Table 9: Coefficients pour la régression Binomiale Négative θ estimé

	Estimate	Std. Error	z value	$\Pr(> z)$
(Intercept)	-1.8509	0.0714	-25.92	0.0000
bonusmalus	0.2456	0.1350	1.82	0.0689
bonusneutre	0.2182	0.1126	1.94	0.0527
drv_age1	-0.0016	0.0006	-2.66	0.0078
pol_coverageMedian1	-0.1905	0.0323	-5.90	0.0000
$pol_coverageMedian2$	-0.2226	0.0250	-8.89	0.0000
pol_coverageMini	-0.6708	0.0409	-16.41	0.0000
pol_pay_freqMonthly	0.0656	0.0232	2.83	0.0046
pol_pay_freqQuarterly	0.0283	0.0578	0.49	0.6244
pol_pay_freqYearly	0.0017	0.0223	0.07	0.9409
pol_paydYes	-0.1431	0.0487	-2.94	0.0033
$risk_class_G2$	0.0140	0.0309	0.46	0.6490
$risk_class_G3$	0.0955	0.0302	3.16	0.0016
$risk_class_G4$	0.1130	0.0319	3.54	0.0004
$risk_class_G5$	0.0990	0.0352	2.81	0.0049
$vh_age_G2(10,20]$	-0.3422	0.0219	-15.65	0.0000
$vh_age_G2(20,100]$	-0.9869	0.0569	-17.33	0.0000
$vh_fuelGasoline$	-0.1935	0.0227	-8.51	0.0000
$vh_fuelHybrid$	0.1062	0.2501	0.42	0.6710
$vh_make_Gamericaine$	0.0237	0.0556	0.43	0.6704
vh_make_Gasian	0.0673	0.0507	1.33	0.1850
vh_make_Gautre	0.1736	0.0694	2.50	0.0124
$vh_make_GCITROEN$	0.0038	0.0464	0.08	0.9345
$vh_make_Gcollection$	0.1400	0.3139	0.45	0.6555
$vh_make_Geuropeenne$	0.0069	0.0468	0.15	0.8829
vh_make_GFIAT	0.1271	0.0667	1.91	0.0567
vh_make_Gluxe	-0.0044	0.1190	-0.04	0.9704
$vh_make_GPEUGEOT$	0.0038	0.0451	0.09	0.9322
$vh_make_GRENAULT$	-0.0468	0.0435	-1.07	0.2828
vh_make_Gsport	0.0500	0.3179	0.16	0.8750
$vh_value_G3(1e+04,2e+04]$	0.1568	0.0390	4.02	0.0001
$vh_value_G3(2e+04,3e+04]$	0.2010	0.0464	4.33	0.0000
$vh_value_G3(3e+04,4e+04]$	0.1541	0.0588	2.62	0.0088
$vh_value_G3(4e+04,5e+04]$	0.2811	0.0866	3.24	0.0012
$vh_value_G3(5e+04,Inf]$	0.0994	0.1161	0.86	0.3921

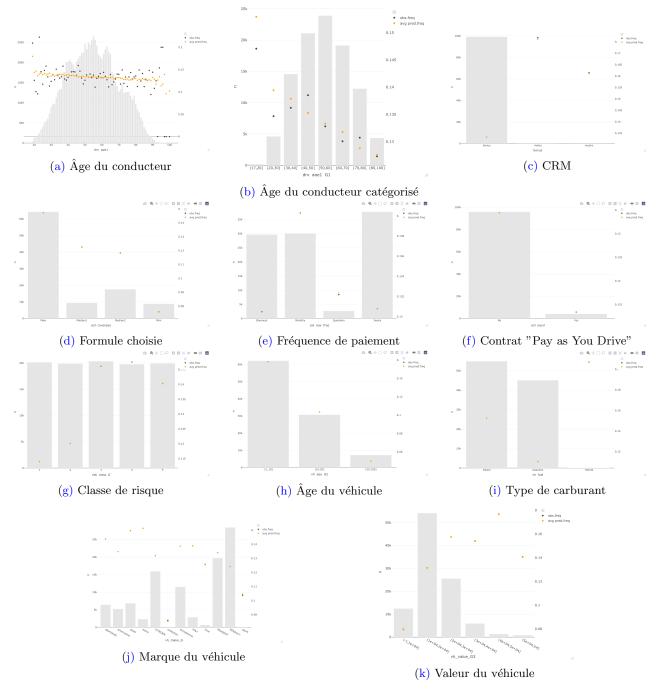


Figure 12: Nombre de sinistres et leur prédiction en fonction des caractéristiques pour la loi Binomiale Négative θ estimé

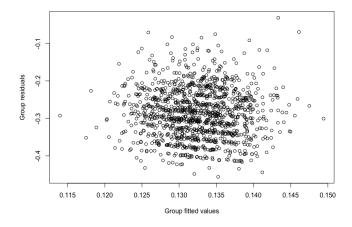


Figure 13: Résidus pour la loi Binomiale Négative θ estimé

.4.2 Modèle de sévérité : Loi Gamma avec lien log, méthode par séparation

Table 10: Coefficients pour la régression Gamma lien log, méthode par séparation

	Estimate	Std. Error	t value	$\Pr(> t)$
(Intercept)	6.6366	0.0787	84.35	0.0000
drv_age1	0.0015	0.0009	1.65	0.0991
$pol_coverageMedian1$	-0.4065	0.0492	-8.26	0.0000
$pol_coverageMedian2$	-0.4309	0.0380	-11.33	0.0000
pol_coverageMini	-0.5384	0.0633	-8.51	0.0000
pol_pay_freqMonthly	-0.0260	0.0349	-0.74	0.4566
pol_pay_freqQuarterly	-0.0633	0.0869	-0.73	0.4661
pol_pay_freqYearly	0.0576	0.0336	1.71	0.0866
$vh_{age}G2(10,20)$	-0.1292	0.0326	-3.96	0.0001
$vh_{age}G2(20,100)$	0.0972	0.0861	1.13	0.2591
$vh_value_G3(1e+04,2e+04)$	0.1856	0.0548	3.38	0.0007
$vh_value_G3(2e+04,3e+04)$	0.2127	0.0579	3.67	0.0002
$vh_value_G3(3e+04,4e+04)$	0.3171	0.0733	4.33	0.0000
$vh_value_G3(4e+04,5e+04)$	0.4874	0.1166	4.18	0.0000
$\underline{\text{vh_value_G3}(5e+04,Inf]}$	0.5688	0.1575	3.61	0.0003

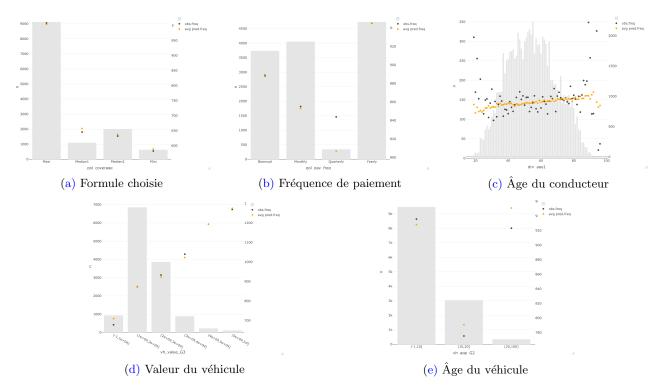


Figure 14: Montant des sinistres et leur prédiction en fonction des caractéristiques pour la loi Gamma avec lien log, méthode par séparation

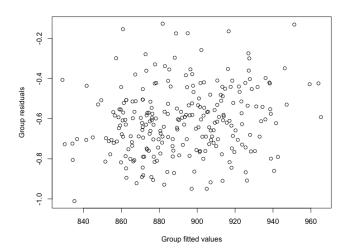


Figure 15: Résidus pour la loi Gamma avec lien log, méthode par séparation

.5 Calcule de Prime

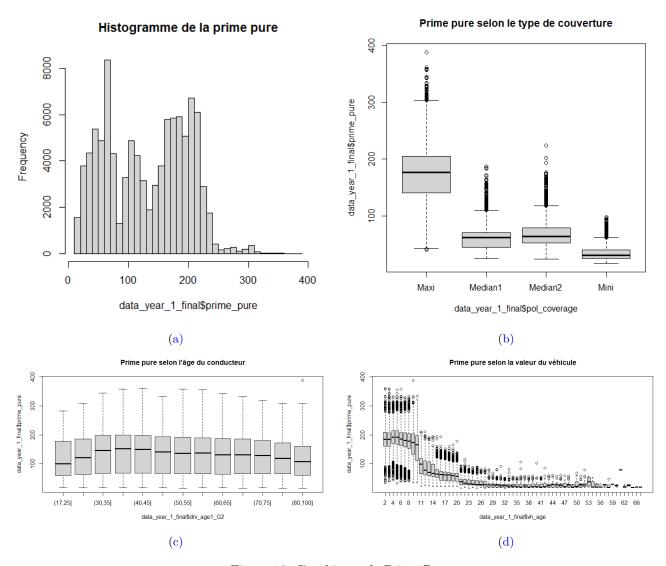
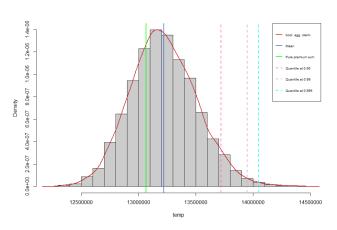
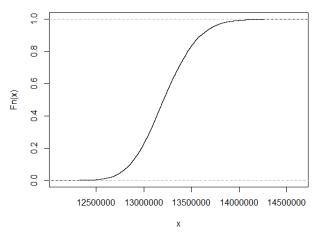


Figure 16: Graphiques de Prime Pure

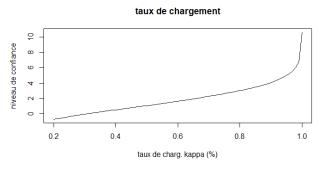
ecdf charge des sinistres aggrégés





(a) Histogramme de la charge agrégée

 $(\mbox{\bf b})$ Fonction de répartition de la charge des sinistres agrégés obtenue par simulation



(c) Taux de chargement

Figure 17: Graphiques de simulation de la charge sinistres agrégée