Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

- Phương pháp dùng ma trận phần phụ
- Phương pháp Gauss và Gauss-Seidel
- Phương pháp Choleski
- Phương pháp viền quanh

PP dùng ma trận phần phụ

- Định lý:

$$C = \left[c_{ij} \right]_{n\times n} = \left[(-1)^{i+j} \det A_{ij} \right]$$

$$AC^t = (\det A).E$$

PP Gauss và Gauss-Seidel

- Đưa về giải phương trình $AX = E$

bằng phương pháp G và GS

$$\left[A \mid E \right] \Leftrightarrow \left[E \mid A^{-1} \right]$$

PP Choleski

- Phân tách ma trận đối xứng A (hoặc $A^t A$) thành tích hai ma trận tam giác là chuyển vị của nhau:

$$A = S^t S \qquad \left(A^t A = S^t S \right)$$

$$S = \left[s_{ij} \right]_{n \times n}, \quad s_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

PP Choleski

- Giải n phương trình

$$S^t S x^{(i)} = e_i \qquad \left(S^t S x^{(i)} = A^t e_i \right)$$

- Ghép các cột nghiệm $x^{(i)}$ tạo thành ma trận nghịch đảo cần tìm

PP viền quanh

- Phân khối ma trận:

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha_{n-1,1} \\ \alpha_{1,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}, \qquad A_n^{-1} = \begin{bmatrix} B_{n-1} & \beta_{n-1,1} \\ \beta_{1,n-1} & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

PP viền quanh

- Nhân hai ma trận

$$A.A^{-1} = E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_{n-1}B_{n-1} + \alpha_{n-1,1}\beta_{1,n-1} = E_{n-1} & (1) \\ A_{n-1}\beta_{n-1,1} + \alpha_{n-1,1}b_{n,n} = 0_{n-1,1} & (2) \\ \alpha_{1,n-1}B_{n-1} + a_{n,n}\beta_{1,n-1} = 0_{1,n-1} & (3) \\ \alpha_{1,n-1}\beta_{n-1,1} + a_{n,n}b_{n,n} = 1 & (4) \end{cases}$$

PP viền quanh

- Lấy (2) nhân với $\alpha_{1,n-1}A_{n-1}^{-1}$ từ bên trái rồi trừ đi (4), ta tìm được

$$b_{n,n} = \frac{1}{a_{n,n} - \alpha_{1,n-1}A_{n-1}^{-1}\alpha_{n-1,1}} \quad (5)$$

- Thay vào (2) ta có

$$\beta_{n-1,1} = \frac{-A_{n-1}^{-1}\alpha_{n-1,1}}{a_{n,n} - \alpha_{1,n-1}A_{n-1}^{-1}\alpha_{n-1,1}} \quad (6)$$

PP viền quanh

- Làm tương tự với cặp phương trình (1) và (3) ta thu được:

$$\beta_{1,n-1} = \frac{\alpha_{1,n-1} A_{n-1}^{-1}}{a_{n,n} - \alpha_{1,n-1} A_{n-1}^{-1} \alpha_{n-1,1}} \quad (7)$$

$$B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} \left(E_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1,1} \alpha_{1,n-1} A_{n-1}^{-1}}{a_{n,n} - \alpha_{1,n-1} A_{n-1}^{-1} \alpha_{n-1,1}} \right) \quad (8)$$

PP viền quanh

- Điều kiện: $\exists A_k^{-1} \quad \forall k = \overline{1, n}.$
- A khả nghịch bất kỳ:

$$x^t \left(A^t A \right) x = \left\langle x, A^t A x \right\rangle = \left\langle Ax, Ax \right\rangle \geq 0$$

$$"=" \quad \Leftrightarrow \quad Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

- Ma trận $M = A^t A$ thỏa mãn điều kiện thực hiện phương pháp. Khi đó

$$A^{-1} = M^{-1} A^t$$