TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

BÁO CÁO MÔN HỌC GIẢI TÍCH SỐ

PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN GIẢI BÀI TOÁN BIÊN (KÈM LỜI GIẢI CHO HỆ PT ĐSTT DẠNG 3 ĐƯỜNG CHÉO)

Sinh viên: Nguyễn Đức Chiến

MSSV: 20150356

KSTN Toán Tin K60

Hà Nội, Ngày 23 Tháng 11 năm 2016

Phương pháp sai phân giải bài toán biên

Nội dung: Bài toán biên đối với phương trình vi phân cấp 2 là bài toán mà điều kiện phụ được cho tại hai điểm khác nhau (ta còn gọi là điều kiện cho tại hai biên của đoạn [a,b] cần xét)

Có hai xu hướng để tìm nghiệm của bài toán biên. Nếu mà nghiệm được tìm dưới dạng chuỗi hàm, thì quy ước là phương pháp giải tích, đó là nghiệm đúng. Còn nếu mà chỉ giữ một số số hạng của chuỗi là tùy thuộc vào cấp chính xác của nghiệm mà ta mong muốn.

Nếu nghiệm được tìm dưới dạng bảng số thì gọi là phương pháp số, nghĩa là tìm giá trị của nghiệm tại 1 số điểm của đối số tương ứng.

Để tìm nghiệm đúng của bài toán biên là vấn đề khó. Trong tiết này ta trình bày phương pháp gần đúng(phương pháp sai phân hữu hạn) để tìm nghiệm gần đúng của bài toán biên cấp 2 và bài toán tìm trị riêng, véc tơ riêng của phương trình vi phân cấp 2. Đối với các bài toán mà ta đang xét, xem là đủ điều kiện để bài toán tồn tại duy nhất nghiệm đủ trơn trên đoạn [a,b] cần tìm.

Mục lục:

5. Chương trình và ví dụ

1. Định nghĩa bài toán biên, bài toán trị riêng và hàm lưới

1.1 Bài toán biên

Tìm hàm u = u(x) là nghiệm của phương trình

$[p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x) \qquad a \le x \le b$

Trong đó p(x), q(x), f(x) là những hàm số đã cho, liên tục và có đạo hàm liên tục tới cấp cần thiết trên đoạn [a,b], đồng thời p(x) $\ge c_1 > 0$; $q(x) \ge 0$, c_1 là hằng số dương) thỏa mãn một trong các điều

kiện biên sau:

$u(a) = \alpha$; $u(b) = \beta$ (biên loại 1)

$p(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1$

$p(b)u'(b) - \sigma_2 u(b) = -\mu_2$

trong đó $\alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2$ là những hằng số đã cho

$\sigma_1 \ge 0$, $\sigma_2 \ge 0$; $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ (biên loại 3)

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ (biên loại 2)

Cũng có thể là bài toán biên hỗn hợp. Tại x = a điều kiện biên loại này, còn x = b điều kiện biên loại khác.

1.2 Bài toán trị riêng

Tìm λ và hàm u = u (x) không đồng nhất "=0" trên [a,b] là nghiệm của bài toán sau:

$-[p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) = \lambda r(x).u(x) \qquad a<x<b$

$u(a) = 0; u(b)=0$

trong đó p(x), q(x), r(x) là những hàm đã cho, lien tục và có đạo hàm liên tục tới cấp cần thiết, đồng thời

$$p \geq c_1 > 0;\ q \geq 0;\ r > 0$$

Số λ gọi là trị riêng của toán tử vi phân

$$Lu = -[p(x)u'(x)]' - q(x)\, u(x)$$

Còn hàm u(x) không đồng thời bằng 0 thỏa mãn hệ trên gọi là hàm riêng tương ứng với trị riêng λ.

1.3 Lưới và hàm lưới

Chia đoạn [a,b] thành N phần đều nhau bởi các điểm chia $x_0 = a$; $x_i = x_0 + ih$, i = chạy từ 1 đến N-1; $x_N = \frac{b-a}{N}$.

Các điểm x_i tạo thành lưới trên [a,b]. Các điểm x_i gọi là các nút lưới; $h = x_{i+1} - x_i$ gọi là bưới của lưới

2. Lược đồ sai phân đối với bài toán biên loại 1

2.1 Sai phân bài toán biên loại 1

Trước hết ta xấp xỉ đạo hàm của hàm cần tìm u(x) tại các nút lưới.

Xét hàm (x). Giả sử (x) có đạo hàm đến cấp 3 trên đoạn [a,b]. Theo công thức Taylor ta có:

$$\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \varphi(x_i) + \frac{h}{2}\varphi'(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 . \frac{1}{2!}\varphi''(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^3 . \frac{1}{3!}\varphi'''(c_1)$$

$$\varphi\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = \varphi(x_i) - \frac{h}{2}\varphi'(x_i) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 . \frac{1}{2!}\varphi''(x_i) - \left(\frac{h}{2}\right)^3 . \frac{1}{3!}\varphi'''(c_2)$$

Trong đó $c_1 \in \left(x_i, x_i + \dfrac{h}{2} \right); c_2 \in \left(x_i - \dfrac{h}{2}, x_i \right)$;

Ký hiệu

$$\varphi\left(x_i\right) = \varphi_i \qquad \varphi\left(x_i \pm h\right) = \varphi_{i\pm1}$$

$\varphi\left(x_i \pm \dfrac{h}{2} \right) = \varphi_{i\pm\frac{1}{2}}, \varphi'\left(x_i\right) = \varphi'_i$,ta được

$$\frac{\varphi_{i+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \varphi'_i + O\left(h^2\right)$$

Vậy $$u'_i \approx \frac{1}{h}\left[u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \right] \qquad (1)$$

(bỏ qua sai số $O(h^2)$),

Theo công thức (1) ta có

Đạt sai số $O(h^2)$. Lần nữa áp dụng công thức (1) ta có

$$\left[p\left(x_i\right) u'\left(x_i\right) \right]' = \left[p_i u'_i \right]' \approx \frac{1}{h}\left[\left(pu' \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(pu'_{i-\frac{1}{2}} \right) \right] (2)$$

đạt sai số $0(h^2)$. Lần nữa áp dụng công thức (1) ta có

$$u'_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{h}\left[u_{i+1} - u_i \right]; u'_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{h}\left[u_i - u_{i-1} \right] \qquad (3)$$

đều đạt sai số $O(h^2)$.

Thay (3) vàp (2) ta được

$$\left(p_i u'_i \right)' \approx \frac{1}{h^2}\left[p_{i+\frac{1}{2}} \left(u_{i+1} - u_i \right) - p_{i-\frac{1}{2}} \left(u_i - u_{i-1} \right) \right] \qquad (4)$$

đạt sai số $0(h^2)$

Đặt

$$a_{i+1} = p_{i+\frac{1}{2}} = p\left(x_i + \frac{h}{2}\right); a_{i+1} = p_{i-\frac{1}{2}} = p\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$$
$$d_i = q(x_i); \varphi_i = f(x_i) \qquad (5)$$

Thay (4),(5) vào bài toán biên loại 1 được sấp xỉ , thay dấu " ≈ " bởi dấu "=" , đồng thời thay hàm cần tìm u bởi y ta được.

$$\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}y_{i+1} - (a_{i+1} + a_i)y_i + a_i y_{i-1}\right] - d_i y_i = -\varphi_i$$
$$y_0 = \alpha; \;\; y_N = \beta \quad i = \overline{1, N-1}$$

Bài toán trên gọi là bài toán sai phân tương ứng với bài toán vi phân loại 1 và hệ thu được trên là hệ đại số tính tuyến , hệ đó được viết lại trong dạng

Đặt $A_i = \dfrac{1}{h^2}a_i; \qquad B_i = \dfrac{1}{h^2}a_{i+1};$

$C_i = \dfrac{1}{h^2}\left(a_i + a_{i+1} + h^2 d_i\right)$ ta được hệ

$$y_0 = \alpha$$
$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i \quad i = \overline{1, N-1} \; (*)$$
$$y_N = \beta$$

Hệ (*) có ma trận hệ số hạng 3 đường chéo , thỏa mãn các điều kiện ổn định của công thức truy đuổi.

2.2 Hệ ptđs tt có dạng 3 đường chéo

2.2.1 Phương pháp truy đuổi trái

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính dạng 3 đường chéo tổng quát:

$$\left.\begin{aligned} -C_0x_0 + B_ox_1 &= -d_0 \\ A_ix_{i-1} - C_ix_i + B_ix_{i+1} &= -d_i \qquad i=\overline{1,n-1} \\ A_nx_{n-1} - C_nx_n &= -d_n \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Hệ phương trình trên có ma trận hệ số dạng 3 đường chéo:

$$A=\begin{bmatrix} -C_0 & B_0 & 0 & .... & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & .... & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & .... & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & .... & A_n & -C_n \end{bmatrix}$$

Ta tìm nghiệm hệ trên trong dạng

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad i=\overline{0,n-1} \qquad (**)$$

trong đó α_{i+1} β_{i+1} sẽ được tìm từ điều kiện buộc (**) là nghiệm của hệ (*).

Thay (**) vào (*) và sử dụng đẳng thức

$$x_{i-1} = \alpha_ix_i + \beta_i = \alpha_i\,[\alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}] + \beta_i\ ;$$

Ta thu được ;

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_iA_i} \qquad i = 1,n\text{-}1 \\ \beta_{i+1} &= \frac{\beta_iA_i + d_i}{C_i - \alpha_iA_i} \qquad i = 1,n\text{-}1 \end{aligned}\right\}$$

Để thực hiện công thức trên ta cần có α_i, βi; các số đó được xác định nhờ phương trình đầu tiên của hệ (*):

$$-C_0x_0 + B_0x_0 = -d_0$$

Hay $x_0 = \frac{B_0}{C_0} x_1 + \frac{d_0}{C_0} = \alpha_1 x_1 + \beta_1$

Vậy: $\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0};$ $\beta_1 = \frac{d_0}{C_0}$

Để thực hiện công thức (**) tìm nghiệm của hệ, ta cần có x_n. Giá trị nghiệm x_n sẽ được xác định nhờ phương trình cuối cùng của hệ (*).

Một mặt $x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n$ (theo **)

Mặt khác $A_n x_{n-1} - C_n x_n = -d_n$ (theo *)

Từ hai phương trình đó ta suy ra:

$$x_n = \frac{\beta_n A_n + d_n}{C_n - A_n \alpha_n}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (*) được tìm theo công thức truy đuổi

$$\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}; \quad \beta_1 = \frac{d_0}{C_0}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}; \quad \beta_1 = \frac{A_i + d_i}{C_i - \alpha_i A_i} \qquad i = 1,2,...n-1$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_n \beta_n + d_n}{C_n - A_n \alpha_n} \\ x_i &= \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad i = 0, n - 1 \end{aligned}\right\}$$

Quá trình tính: Trước hết tính α_i, β_i, i = 1, n -1, sau đó tính x_i, xuất phát lùi dần lại, nên công thức gọi là công thức đuổi phải.

2.2.2 Phương pháp truy đuổi phải

Nếu hệ phương trình (*), nghiệm được tìm trong dạng:

$x_{n+1} = \xi_{n+1}x_i + n_{i+1}$, i = 1,n-1

Hoàn toàn tương tự như trên ta thu được công thức truy đuổi trái (xuất phát từ x_0) như sau:

$$\xi_1 = \frac{A_n}{C_n}; \quad \eta_n = \frac{d_n}{C_n}$$

$$\xi_{i+1} = \frac{A_i}{C_i - \xi_i A_i}; \quad \eta_1 = \frac{B_1\eta_{i+1} + d_i}{C_i - B_i\xi_{i+1}} \quad i = 1,...n-1$$

$$x_1 = \frac{A_n\beta_n + d_n}{C_n - A_n\alpha_n}$$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad i = 0, n - 1$$

2.2.3 Điều kiện ổn định của phương pháp truy đuổi

Khi tìm nghiệm của hệ (*) theo công thức truy đuổi phải hoặc trái ta gặp sai số quy tròn. Hiện tượng sai một ly đi một dặm vẫn thường xảy ra trong toán. Vì vậy thuật toán cần ổn định, nghĩa là nếu theo công thức trên với $0 \le \alpha$ thì α_i, i=2,...n vẫn không vượt quá "1" khi đó ta nói thuật toán ổn định.

Ở đây điều kiện để công thức ổn định là:

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i \ge A_i + B_i \quad i = 1,n-1$$

Và $$0 \le \frac{B_0}{C_0} < 1; \qquad 0 \le \frac{A_n}{C_n} < 1$$

Thực vậy: Từ $0 \le \alpha_i = \frac{B_0}{C_0} < 1$ và điều kiện trên ta sẽ chỉ ra $\alpha_i < 1$ $(\forall\, i)$

giả sử đúng với α_i thì $\alpha_{i+1} < 1$ vì

$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i} = \frac{B_i}{(C_i - A_i - B_i) + B_i + (1-\alpha_i)A_i} < 1$

Vậy công thức truy đuổi tính là ổn định.

3. Xét bài toán biên loại 3

Xét bài toán biên loại 3 . Đối với phương trình vi phân đã được xấp xỉ bởi hệ N-1 phương trình ,N+1 ẩn y_0, y_1 …., y_N.

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i \quad i = \overline{1, N-1}$$

Đạt sai số $O(h^2)$. Ta cần xấp xỉ điều kiện biên loại 3.

Do

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a) + \frac{h}{2}u''(a) + O(h^2)$$

$$a_1 = p\left(a + \frac{h}{2}\right) = p(a) + \frac{h}{2}p'(a) + O(h^2)$$

nên

$$a_1 \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = \left[p(a) + \frac{h}{2}p'(a) + O(h^2)\right]\left[u'(a) + \frac{h}{2}u''(a) + O(h^2)\right]$$

$$= p(a)u'(a) + \frac{h}{2}\left[p'(a)u'(a) + p(a)u''(a)\right] + O(h^2)$$

$$= p(a)u'(a) + \frac{h}{2}\left[p(a)u'(a)\right]' + O(h^2) \qquad (****)$$

Từ pt trên ta thấy , nếu thay $p(a)u'(a) \approx a_1 \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$ thì sai số tại nút lưới x_0=a đạt cấp O(h); điều này sẽ ảnh hưởng đến sai số trên toàn lưới là $O(h^2)$.

Để trên biên cũng đạt được sai số O(h^2), ta sử dụng thêm chính phương trình điều kiện biên tại x=a.

$$\left[p(a)u'(a)\right]' = -f(a) + q(a)u(a)$$

Thay đẳng thức này vào (****)

Bỏ qua O(h^2) được "$\approx$", thay dấu "$\approx$"bởi dấu "=", đồng thời thay hàm cần tìm u bởi y vào điều kiện biên ta được

$$a_1 \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}\left[q(a)y_0 - f(a)\right] - \sigma_1 y_0 = -\mu_1$$

đạt độ sai xấp xỉ O(h^2).

Hoàn thành tương tự với biên x = b.

$$-a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} - \frac{h}{2}\left[q(b)y_N - f(b)\right] - \sigma_2 y_N = -\mu_2$$

Vậy ứng với bài toán biên loại 3 ta được bài toán sai phân tương ứng:

$$-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -\mu_1$$
$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i$$
$$A_N y_{N-1} - C_N y_N = -\mu_2$$

Trong đó

$$C_0 = \frac{1}{h}\left(a_1 + \frac{h^2}{2}q(a) + \sigma_1 h\right); B_0 = \frac{a_1}{h}$$

$$A_i = \frac{1}{h^2}a_i, B_i = \frac{1}{h^2}a_{i+1}, C_i = \frac{1}{h^2}\left(a_i + a_{i+1} + h^2 d_i\right)$$

$$i = \overline{1, N-1};$$

$$A_N = \frac{a_N}{h}; C_N = \frac{1}{h}\left(a_N + \frac{h^2}{2}q(b) + \sigma_2 h\right)$$

$$a_i = p\left(x_i - \frac{h}{2}\right); d_i = q(x_i); \varphi_i = f(x_i)$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

$$a_N = p\left(b - \frac{h}{2}\right)$$

Hệ trên là hệ có ma trận dạng 3 đường chéo , giải được bằng công thức truy đuổi và bằng công thức truy đuổi , ổn định tính nhờ các điều kiện ban đầu

Ngoài ra hệ trên cũng là hệ đại số tuyến tính có đường chéo trội nên cũng áp dụng được phương pháp lặp.

4. Phương pháp sai phân đối với bài toán trị riêng

Xét bài toán trị riêng, ta có bài toán sai phân sau:

$$-\frac{1}{h^2}\left[a_i y_{i-1} - \left(a_i + a_{i+1}\right) y_i + a_{i+1} y_{i+1}\right] + d_i y_i = \lambda f_i y_i$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

$$y_0 = y(0) = 0, y_N = y(b) = 0$$

Trong đó

$$a_i = p\left(x_i - \frac{h}{2}\right); d_i = q\left(x_i\right); f_i = r(x_i)$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

Hay

$$-\frac{a_i}{h^2} y_{i-1} + \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i - \lambda f_i\right) y_i - \frac{a_{i+1}}{h^2} y_{i+1} = 0$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

$$y_0 = 0, y_N = 0 \qquad (6)$$

Hệ (6) là hệ đại số tuyến tính thuần nhất gồm N-1 phương trình, N-1 ẩn là $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$.

Để hệ (6) tồn tại nghiệm không tầm thường (nghiệm không đồng thời bằng không) tì định thức của hệ phương trình phải bằng không (định thức có chứa λ).

$$\Delta_{n-1}(\lambda) = 0$$

Trong đó $\Delta_{n-1}(\lambda)$ là đa thức bậc n-1 đối với λ và gọi là đa thức đặc trưng. Giải đa thức đặc trưng trên, ta được λ, xem λ là giá trị riêng xấp xỉ, ứng với trị riêng đã có tại các nút lưới $x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{N-1}$.

Ứng với các trị riêng khác ta được các hàm riêng khác và cứ thế tiếp tục.

5. Chương trình và ví dụ

Chương trình cho bài toán biên loại 1:

```
function [x,y]= saiphan1(p,q,f,N,a,b,c,d)
% N la so nut luoi
% a,b la 2 bien
% c = u(a), d = u(b)
h=(b-a)/N;
x=zeros(1,N+1);
for i=0:N
    x(i+1)= a + i*h;
end
        %tinh day xi
M=zeros(N+1,N+2);
Ai=zeros(N-1,1);
Bi=zeros(N-1,1);
Ci=zeros(N-1,1);
Phi=zeros(N-1,1);
for i=1:N-1
    Ai(i)=(p(x(i)+h/2))/(h*h);
    Bi(i)=(p(x(i+1)+h/2))/(h*h);
    Ci(i)=(p(x(i+1)+h/2)+p(x(i)+h/2)+h*h*q(x(i+1)))/(h*h);
end
for i=1:N-1
    Phi(i)=f(x(i+1));
end
for i=2:N
    M(i,i)=-Ci(i-1,1);
    M(i,i-1)=Ai(i-1,1);
    M(i,i+1)=Bi(i-1,1);
end
M(1,1)=1; M(N+1,N+1)=1;
M(1,N+2)=c;M(N+1,N+2)=d;
for i=2:N
    M(i,N+2)=-Phi(i-1,1);
end
        %su dung ham luoi thu duoc phuong trinh co ma tran he so M
n = size(M,1)-1;
anpha = zeros(1,n+1); anpha(1)= -M(1,2)/M(1,1);
beta = zeros(1,n+1); beta(1)= M(1,n+2)/M(1,1);
A = zeros(1,n); B = zeros(1,n); C = zeros(1,n);d = zeros(1,n);
for i= 1:n
```

```
    A(i) = M(i+1,i);
    B(i) = M(i+1,i+2);
    C(i) = -M(i+1,i+1);
    d(i) = -M(i+1,n+2);
        %thiet lap cac day Ai,Bi,Ci,di cua he 3duong cheo
    anpha(i+1) = B(i)/(C(i)-anpha(i)*A(i));
    beta(i+1) = (A(i)*beta(i)+d(i))/(C(i)-anpha(i)*A(i));
        %tinh day anpha, beta
end
y = zeros(1,n+1);
y(n+1) = (A(n)*beta(n) + d(n))/(C(n) - A(n)*anpha(n));
        %tinh yn truoc
for i= n:-1:1
    y(i) = anpha(i)*y(i+1) + beta(i);
end
```

Xét ví dụ là phương trình:

$$y'' - y = 0 \qquad 1 < x < 2$$

$$y(1) = e^1 \approx 2.7183$$

$$y(2) = e^2 \approx 7.3891$$

Ta lần lượt chọn bước lưới $h = \frac{1}{8}$ ứng với N=8 và $h = \frac{1}{16}$ ứng với n = 16.

ở đây ta có $p = 1, q = 1, f = 0$

p=@(x) 1;
q=@(x) 1;
f=@(x) 0;
[x,y]=saiphan1(p,q,f,8,1,2,exp(1),exp(2));

Ta thu được bảng giá trị của y với mỗi x như sau :

```
>> [x,y]=saiphan1(p,q,f,8,1,2,exp(1),exp(2))

x =

    1.0000    1.1250    1.2500    1.3750    1.5000    1.6250    1.7500    1.8750    2.0000


y =

    2.7183    3.0805    3.4908    3.9557    4.4824    5.0791    5.7552    6.5212    7.3891

>>
```

Ta có nghiệm của phương trình là $y = e^x$, so sánh với kết quả đúng:

```
x =

    1.0000    1.1250    1.2500    1.3750    1.5000    1.6250    1.7500    1.8750    2.0000


y =

    2.7183    3.0802    3.4903    3.9551    4.4817    5.0784    5.7546    6.5208    7.3891

>>
```

Ta thấy sai số rất nhỏ.

Với $h = \frac{1}{16}$

[x,y]=saiphan1(p,q,f,16,1,2,exp(1),exp(2));

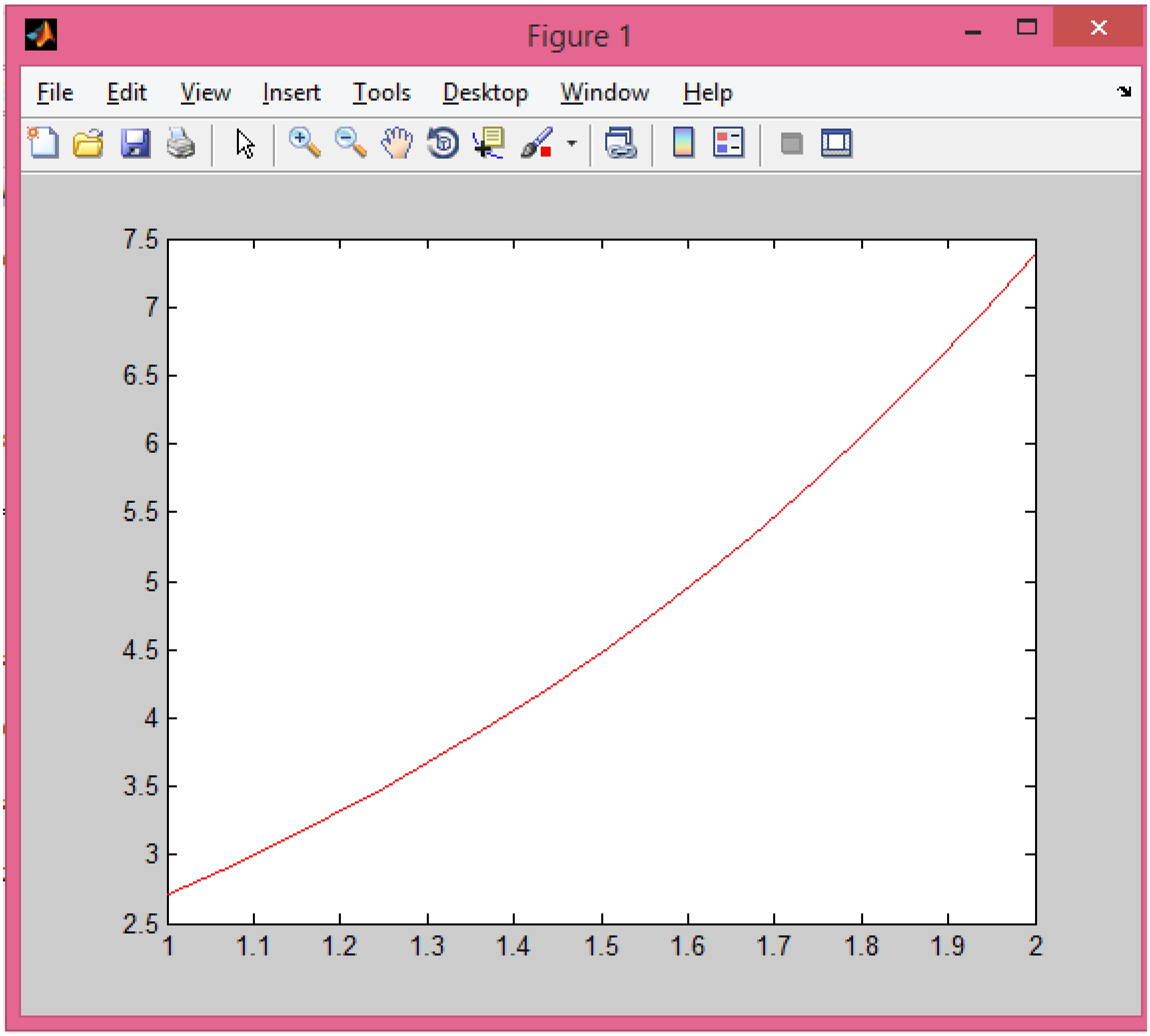
Ta thu được

```
Command Window
>>  [x,y]=saiphan1(p,q,f,16,1,2,exp(1),exp(2));
>> [x,y]=saiphan1(p,q,f,16,1,2,exp(1),exp(2))

x =

  Columns 1 through 9

    1.0000    1.0625    1.1250    1.1875    1.2500    1.3125    1.3750    1.4375    1.5000

  Columns 10 through 17

    1.5625    1.6250    1.6875    1.7500    1.8125    1.8750    1.9375    2.0000


y =

  Columns 1 through 9

    2.7183    2.8936    3.0803    3.2790    3.4905    3.7156    3.9552    4.2103    4.4819

  Columns 10 through 17

    4.7709    5.0786    5.4061    5.7547    6.1259    6.5209    6.9414    7.3891
```

So với giá trị của nghiệm đúng sai số cũng rất nhỏ, sai số đạt nhỏ hơn so với h=1/8.

```
x =

  Columns 1 through 9

    1.0000    1.0625    1.1250    1.1875    1.2500    1.3125    1.3750    1.4375    1.5000

  Columns 10 through 17

    1.5625    1.6250    1.6875    1.7500    1.8125    1.8750    1.9375    2.0000


y =

  Columns 1 through 9

    2.7183    2.8936    3.0802    3.2789    3.4903    3.7155    3.9551    4.2102    4.4817

  Columns 10 through 17

    4.7707    5.0784    5.4059    5.7546    6.1257    6.5208    6.9414    7.3891

>>
```

Đồ thị thu được với h =1/16 là



Ta thấy đồ thị thu được rất trơn, đó là do sai số nhỏ.

Chương trình cho bài toán biên loại 3

```
function [x,y]= saiphan3(p,q,f,N,a,b,o1,o2,u1,u2)
% N la so nut luoi
% a,b la 2 bien
% p(a)u'(a)-o1*u(a)=-u1
% p(b)u'(b)-o2*u(b)=-u2
h=(b-a)/N;
x=zeros(1,N+1);
for i=0:N
    x(i+1)= a + i*h;
end
        %tinh day xi
M=zeros(N+1,N+2);
Ai=zeros(N-1,1);
Bi=zeros(N-1,1);
```

```
Ci=zeros(N-1,1);
Phi=zeros(N-1,1);
for i=1:N-1
    Ai(i)=(p(x(i)+h/2))/(h*h);
    Bi(i)=(p(x(i+1)+h/2))/(h*h);
    Ci(i)=(p(x(i+1)+h/2)+p(x(i)+h/2)+h*h*q(x(i+1)))/(h*h);
end
for i=1:N-1
    Phi(i)=f(x(i+1));
end
for i=2:N
    M(i,i)=-Ci(i-1,1);
    M(i,i-1)=Ai(i-1,1);
    M(i,i+1)=Bi(i-1,1);
end
M(1,1)=-(p(x(1,1)+h/2)+(h^2)/2*q(a)+o1*h)/h;
M(1,2)=p(x(1,1)+h/2)/h;
M(N+1,N+1)=-(p(x(N)+h/2)+(h^2)/2*q(b)+o2*h)/h;
M(N+1,N)=p(x(N)+h/2)/h;
M(1,N+2)=-u1;M(N+1,N+2)=-u2;
for i=2:N
    M(i,N+2)=-Phi(i-1,1);
end
n = size(M,1)-1;
anpha = zeros(1,n+1); anpha(1)= -M(1,2)/M(1,1);
beta = zeros(1,n+1); beta(1)= M(1,n+2)/M(1,1);
A = zeros(1,n); B = zeros(1,n); C = zeros(1,n);d = zeros(1,n);
for i= 1:n
    A(i)  = M(i+1,i);
    B(i)  = M(i+1,i+2);
    C(i)  = -M(i+1,i+1);
    d(i)  = -M(i+1,n+2);
        %thiet lap cac day Ai,Bi,Ci,di cua he 3duong cheo
    anpha(i+1)  = B(i)/(C(i)-anpha(i)*A(i));
    beta(i+1)  = (A(i)*beta(i)+d(i))/(C(i)-anpha(i)*A(i));
        %tinh day anpha, beta
end
y = zeros(1,n+1);
y(n+1)  = (A(n)*beta(n)  + d(n))/(C(n)  - A(n)*anpha(n));
        %tinh yn truoc
for i= n:-1:1
    y(i)  = anpha(i)*y(i+1)  + beta(i);
end
```

Xét ví dụ là phương trình:

$$y'' - y = 0 \qquad\qquad 1 < x < 2$$

$$y'(1) - 2y(1) = -e$$

$$y'(2) - 2y(2) = -e^2$$

Với $\begin{aligned} & p = 1, q = 1, f = 0 \\ & \sigma_1 = \sigma_2 = 2 \\ & \mu_1 = e, \mu_2 = e^2 \end{aligned}$

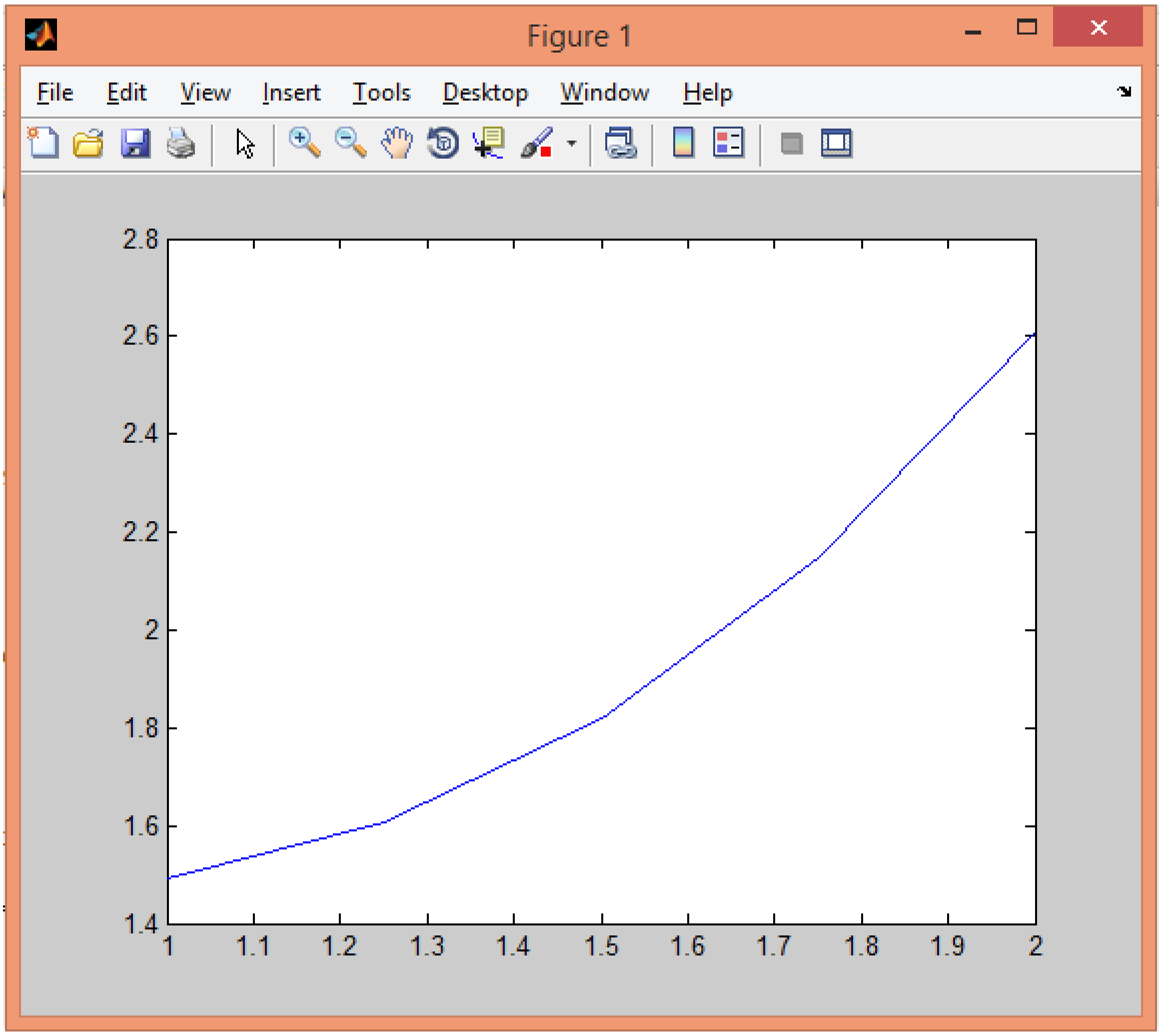
Ta chia bước lưới lần lượt là 1/4, 1/8 và 1/16:

[x,y]=saiphan3(p,q,f,4,1,2,2,2,exp(1),exp(2))

Ta thu được

```
>> [x,y]=saiphan3(p,q,f,4,1,2,2,2,exp(1),exp(2))

x =

    1.0000    1.2500    1.5000    1.7500    2.0000


y =

    1.4925    1.6058    1.8194    2.1468    2.6084

>>
```

Có đồ thị:



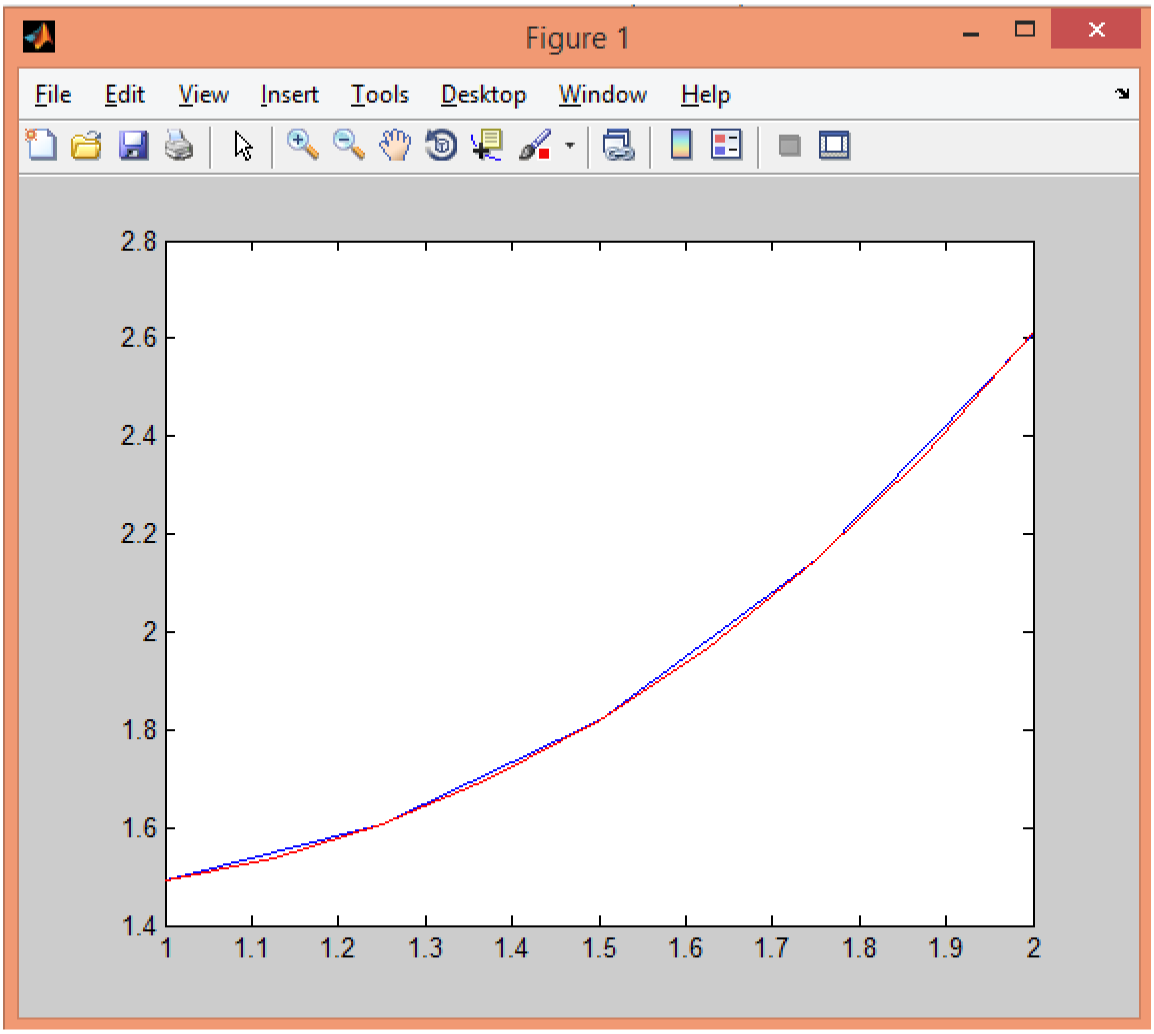
Với h =1/8

[x,y]=saiphan3(p,q,f,8,1,2,2,2,exp(1),exp(2))

Thu được

```
>> [x,y]=saiphan3(p,q,f,8,1,2,2,2,exp(1),exp(2))

x =

    1.0000    1.1250    1.2500    1.3750    1.5000    1.6250    1.7500    1.8750    2.0000


y =

    1.4919    1.5367    1.6056    1.6996    1.8201    1.9690    2.1487    2.3620    2.6122

>>
```

Có đồ thị là đường màu đỏ



Đồ thị thu được trơn hơn với đồ thị với =1/4;

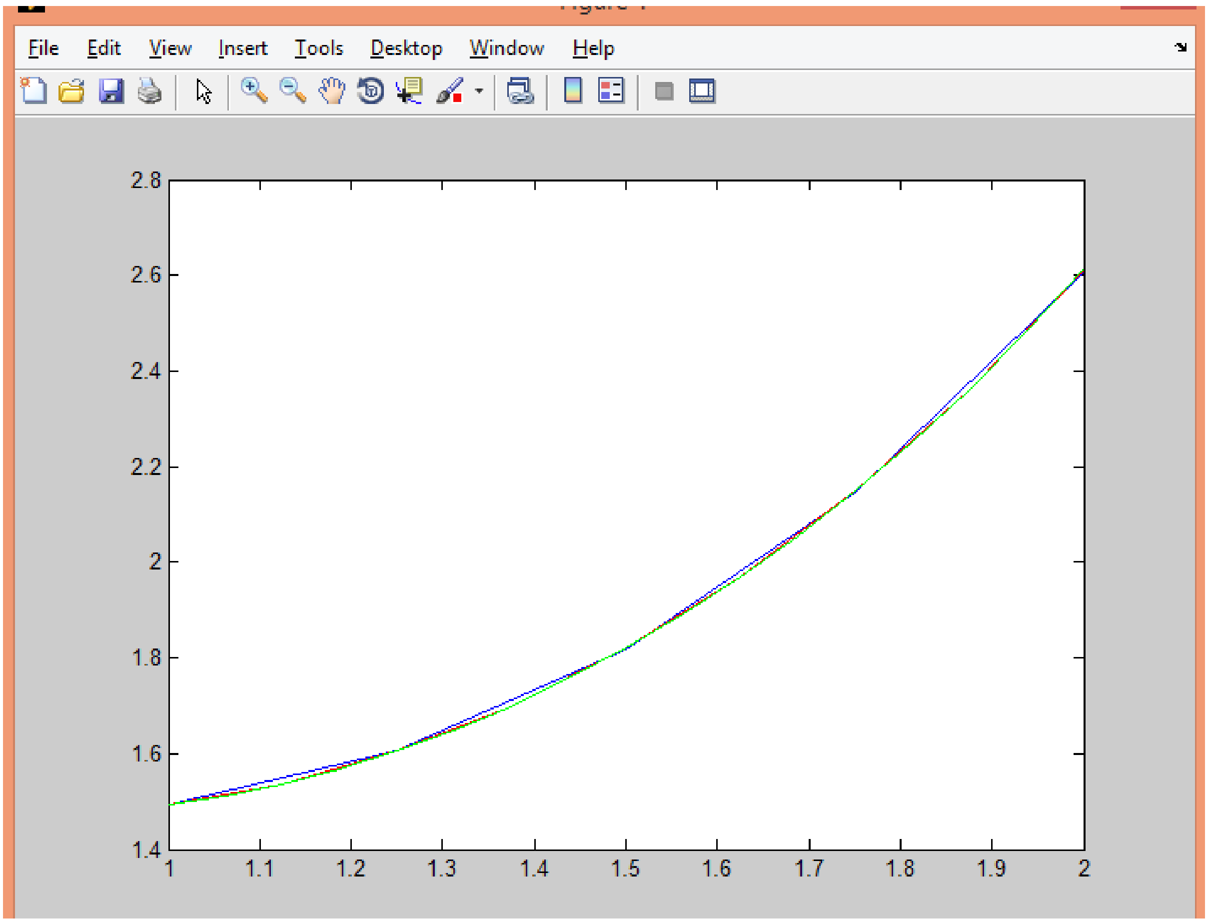
Với h=1/16,

[x,y]=saiphan3(p,q,f,16,1,2,2,2,exp(1),exp(2))

Ta thu được

```
>> [x,y]=saiphan3(p,q,f,16,1,2,2,2,exp(1),exp(2))

x =

  Columns 1 through 9

    1.0000    1.0625    1.1250    1.1875    1.2500    1.3125    1.3750    1.4375    1.5000

  Columns 10 through 17

    1.5625    1.6250    1.6875    1.7500    1.8125    1.8750    1.9375    2.0000


y =

  Columns 1 through 9

    1.4918    1.5113    1.5366    1.5680    1.6056    1.6494    1.6996    1.7565    1.8202

  Columns 10 through 17

    1.8911    1.9693    2.0552    2.1492    2.2515    2.3627    2.4830    2.6131

fx >>
```

Có đồ thị là đường mà xanh lá



Đồ thị thu được trơn hơn so với cả đường màu xanh và đỏ.

Chương trình cho bài toán trị riêng:

Ta có hệ phương trình:

$$-\frac{a_i}{h^2}y_{i-1}+\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{h^2}+d_i-\lambda f_i\right)y_i-\frac{a_{i+1}}{h^2}y_{i+1}=0$$

$$i=\overline{1,N-1}$$

Ta cần tìm λ bằng việc cho định thức hệ trên bằng 0.

Ta chia cả phương trình cho f_i để thu được hệ mới rồi tìm trị riêng λ của hệ vừa thu được bằng công thức của matlab.

Chương trình

```
function [y]= tririeng(p,q,r,N,a,b)
% N la so khoang nut luoi
% a,b la 2 bien
%pt M la ma tran co da thuc dac trung giong vs dinh thuc pt=0
h=(b-a)/N;
x=zeros(1,N+1);
for i=0:N
    x(i+1)= a + i*h;
end
%tinh day xi
M=zeros(N-1,N-1);
Ai=zeros(N-1,1);
Bi=zeros(N-1,1);
Ci=zeros(N-1,1);
f=zeros(N-1,1);
for i=1:N-1
    f(i)=r(x(i+1));
end
for i=1:N-1
    Ai(i)=-(p(x(i)+h/2))/(h*h*f(i));

    Bi(i)=-(p(x(i+1)+h/2))/(h*h*f(i));

    Ci(i)=(p(x(i))+p(x(i))+h*h*q(x(i+1)))/(h*h*f(i));
end
for i=1:N-1
    M(i,i)=Ci(i);
end
for i=2:N-1
    M(i,i-1)=Ai(i);
end
for i=1:N-2
```

```
        M(i,i+1)=Bi(i);
end
y=eig(M);
end
```

Xét bài toán

$$-y'' = \lambda(1+x)y \qquad 0 < x < 1$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Ta chạy chương trình lần lượt với N=3, 6, 12, 24

y1=tririeng(p,q,r,3,0,1)

```
>> y1=tririeng(p,q,r,3,0,1)

y1 =

   18.3365
    5.9635

>>
```

y1=tririeng(p,q,r,6,0,1)

```
>> y1=tririeng(p,q,r,6,0,1)

y1 =

   96.0100
   71.7111
   48.0000
    6.3974
   24.0686

>>
```

y1=tririeng(p,q,r,12,0,1)

```
>> y1=tririeng(p,q,r,12,0,1)

y1 =

  442.3849
  370.5376
  323.5768
  283.9538
  240.2979
  192.0000
  142.8005
    6.5104
   25.8499
   56.5817
   96.5220

>>
```

y1=tririeng(p,q,r,24,0,1)

```
>> y1=tririeng(p,q,r,24,0,1)

y1 =

  1.0e+003 *

    1.9437
    1.7262
    1.5741
    1.4558
    1.3591
    1.2772
    1.2044
    1.1309
    1.0496
    0.9605
    0.8658
    0.7680
    0.6692
    0.5714
    0.4765
    0.0065
    0.0263
    0.0589
    0.1037
    0.1599
    0.3863
    0.2266
    0.3025
```

Ta thấy không phải bất kì các giá trị nào thu được cũng là trị riêng của bài toán ban đầu.

Bằng thực nghiệm thay số ta thấy có giá trị 0,65 gần như không thay đổi trong suốt quá trình.

Chương trình cho hệ ptđstt dạng 3 đường chéo bất kì

```matlab
function x=kiemtra3dc(M)
error = 0;
n=size(M,1);
if -M(1,2)/M(1,1)<0
    error=1;
end
if -M(1,2)/M(1,1)>=1
    error=1;
end
if -M(n,n-1)/M(n,n)<0
    error=1;
end
if -M(n,n-1)/M(n,n)>=1
    error=1;
end
    %kiem tra hang dau va hang cuoi
    A=zeros(n-2,1); B=zeros(n-2,1); C=zeros(n-2,1); D=zeros(n-2,1);
for i= 1:n-2
    A(i) = M(i+1,i);
    B(i) = M(i+1,i+2);
    C(i) = -M(i+1,i+1);
    D(i) = C(i)-A(i)-B(i);
end
for i=1:n-2
    if A(i)<=0
        error=1;
    end
    if B(i)<=0
        error=1;
    end
    if D(i)<0;
        error=1;
    end
end
    %kiemtra Ai, Bi > 0 va Ci>=Ai+Bi
if error ==1
    disp('Ma tran nhap vao ko thoa man dieu kien on dinh');
else
    j = size(M,1)-1;
anpha = zeros(1,j+1); anpha(1)= -M(1,2)/M(1,1);
beta = zeros(1,j+1); beta(1)= M(1,j+2)/M(1,1);
A = zeros(1,j); B = zeros(1,j); C = zeros(1,j);d = zeros(1,j);
for i= 1:j
    A(i) = M(i+1,i);
    B(i) = M(i+1,i+2);
    C(i) = -M(i+1,i+1);
    d(i) = -M(i+1,j+2);
        %thiet lap cac day Ai,Bi,Ci,di cua he 3duong cheo
    anpha(i+1) = B(i)/(C(i)-anpha(i)*A(i));
    beta(i+1) = (A(i)*beta(i)+d(i))/(C(i)-anpha(i)*A(i));
        %tinh day anpha, beta
end
x = zeros(1,j+1);
x(j+1) = (A(j)*beta(j) + d(j))/(C(j) - A(j)*anpha(j));
        %tinh xn truoc
for i= j:-1:1
    x(i) = anpha(i)*x(i+1) + beta(i);
end

end
```

Chạy chương trình với một ma trận ổn định

M =

-3	1	0	0	0	4
2	-4	1	0	0	3
0	3	-7	2	0	5
0	0	2	-8	4	10
0	0	0	4	-10	-20

ta thu được nghiệm

```
y =

   -2.0959   -2.2877   -1.9589   -0.9247    1.6301

>>
```

chạy với ma trận không ổn định

M =

-3	1	0	0	0	4
2	-4	1	0	0	3
0	3	-4	2	0	5
0	0	2	-8	4	10
0	0	0	4	-10	-20

ta nhận được kết quả

```
M =

    -3     1     0     0     0     4
     2    -4     1     0     0     3
     0     3    -4     2     0     5
     0     0     2    -8     4    10
     0     0     0     4   -10   -20

>> y=kiemtra3dc(M)
Ma tran nhap vao ko thoa man dieu kien on dinh
```