Bài báo cáo số 19

Phương pháp
Bình phương tối thiểu

Sinh viên: PHẠM NHẬT DUY - KSTN Toán Tin K60
MSSV: 20150628
Giáo viên hướng dẫn: TS. HÀ THỊ NGỌC YẾN

PHẠM NHẬT DUY - KSTNTTK60

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

I.Ý TƯỞNG PHƯƠNG PHÁP

- Khi viết $y_i = f(x_i)$,giá trị y_i có bao gồm cả sai số tại điểm x_i và để đa thức p(x) xấp xỉ f(x) sát thực, phải tăng số mốc nội suy thì lại gặp đa thức bậc cao
- Giả sử $y_i \approx f(x_i)$, $i = \overline{1,n}$ với $x_i \neq x_j (i \neq j)$
- Tìm hàm φ_m xấp xỉ hàm $f(x)$ trong dạng $\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \phi_k(x)$
- Trong đó $\varphi_k(x)$ $k = \overline{0m}$là những hàm số của x đã biết, còn a_k với $k = \overline{0m}$ là những hệ số hằng số

II.SAI SỐ TRUNG BÌNH PHƯƠNG

- Xét hai hàm số $f(x)$ và $\varphi(x)$
- Ta gọi sai số (hay độ lệch) trung bình phương của hai hàm số $f(x)$và $\varphi(x)$ trên tập hợp điểm x_i $(i = \overline{1,n})$là biểu thức
- $$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - \varphi(x_i)]^2} \qquad (1)$$
- Từ định nghĩa trên, ta thấy nếu độ lệch σ_n càng bé thì $\varphi(x)$ càng gần với $f(x)$, và khi đó ta nói hàm $\varphi(x) \approx f(x)$ (xấp xỉ) trên $[x_0, x_n]$ theo nghĩa trung bình phương
- Do $f(x_i)$ không có mà chỉ có $y_i \approx f(x_i)$ nên (1) được viết lại
- $$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2} \qquad (2)$$

III.XÂY DỰNG THUẬT TOÁN

Bài toán

- Xét $\varphi(x) = F(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ là lớp hàm phụ thuộc các tham số
- $a_0, a_1, ..., a_m$ .Hãy tìm bộ tham số a_k $(k = \overline{0, m})$sao cho
- $$\sigma_n(a_0, a_1, ..., a_m) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)]^2} \quad (3)$$
- đạt min
- Nhưng để (3) đạt min, ta chỉ cần tìm bộ số a_k $(k = \overline{0, m})$để
- $$\phi(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum[y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)]^2 \quad (4)$$
- đạt min là đủ

- Vậy bài toán được đặt lại như sau:
- Từ bảng số $y_i \approx f(x_i)$ $(i = \overline{1, n})$ (5)
- Hãy tìm bộ số $a_0, a_1, ..., a_m (m \leq n - 1)$ sao cho (4) đạt min
- Giả sử tìm được bộ số là $\overline{a_0}, \overline{a_1}, ..., \overline{a_m}$ thì $F(x, \overline{a_0}, \overline{a_1}, ..., \overline{a_m}) = \varphi(x)$ và khi đó ta nói $f(x) \approx \varphi(x)$ tốt nhất theo nghĩa trung bình phương và phương pháp tìm hàm $\varphi(x)$ như vậy gọi là phương pháp bình phương tối thiểu
- Để được đơn giản ta xét $F(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ có dạng tuyến tính đối với các tham số $a_0, a_1, ..., a_m$

Xây dựng thuật toán

- Định nghĩa:(Đa thức suy rộng) Cho hệ hàm $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)$ là những hàm số của biến số x
- Ta gọi $P_m(x,a_0,\dots,a_m)=\sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$(6)là đa thức suy rộng của hệ hàm $\{\varphi_k(x)\}_{k=\overline{0m}}$;trong đó a_k $k=\overline{0m}$là hệ số, còn hệ $\{\varphi_k(x)\}_{k=\overline{0m}}$ gọi là hệ cơ bản
- Chọn $\varphi_k(x)=x^k$, $k=\overline{0m}$ thì hệ đó gọi là hệ đại số và $P_m$là đa thức bậc m
- Chọn hệ $\varphi_k(x)$ là hệ $1,\cos(x),\sin(x),\dots,\cos(kx),\sin(kx)$ thì $P_m$là đa thức lượng giác

---

- Từ bảng số $y_i \approx f(x_i)$,$i=\overline{1,n}$, hãy tìm hàm
- $$\varphi(x)=P_m(x,a_0,\dots,a_m)=\sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x) \quad (7)$$
- sao cho $\phi(a_0,\dots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k(x_i)]^2$ (8)đạt min với phân hoạch $\Delta\equiv[a,b]$ với $\Delta:\{a\equiv x_1<x_2<\dots<x_n\equiv b\}$
- Để (8) đạt min,ta xem $\phi(a_0,\dots,a_m)$là hàm số của $m+1$ biến số là $a_0,a_1,\dots,a_m$ ta quy về tìm cực tiểu của hàm ϕ của $m+1$ biến số $a_0,a_1,\dots,a_m$

- Theo lý thuyết hàm nhiều biến số, cực trị hàm (8)

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_j} = 0 \qquad j = \overline{0m}$$

- Hay

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_0(x_i)a_0 + \varphi_1(x_i)a_1 + \dots + \varphi_m(x_i)a_m - y_i]\varphi_0(x_i) = 0$$
$$\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_0(x_i)a_0 + \varphi_1(x_i)a_1 + \dots + \varphi_m(x_i)a_m - y_i]\varphi_k(x_i) = 0$$
$$\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_0(x_i)a_0 + \varphi_1(x_i)a_1 + \dots + \varphi_m(x_i)a_m - y_i]\varphi_m(x_i) = 0$$

- Hay

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i)a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i)a_1 + \dots + \sum_{i=1}^{n} \varphi_m(x_i)\varphi_k(x_i)a_m = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_k(x_i) \tag{9}$$

$$k = 0,1,\dots,m$$

- Ký hiệu $\varphi_r = (\varphi_r(x_1), \varphi_r(x_2), \dots, \varphi_r(x_n))^t$ là vector n chiều có thành phần thứ i là $\varphi_r(x_i)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ cũng là vectơ n chiều. Ta ký hiệu

$$[\varphi_r, \varphi_s] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_r(x_i)\varphi_s(x_i) \qquad [y, \varphi_r] = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_r(x_i)$$

- Khi đó hệ (9) được viết lại dưới dạng

$$\begin{array}{l} [\varphi_0, \varphi_0]a_0 + [\varphi_0, \varphi_1]a_1 + \dots + [\varphi_0, \varphi_m]a_m = [y, \varphi_0] \\ [\varphi_1, \varphi_0]a_0 + [\varphi_1, \varphi_1]a_1 + \dots + [\varphi_1, \varphi_m]a_m = [y, \varphi_1] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [\varphi_m, \varphi_0]a_0 + [\varphi_m, \varphi_1]a_1 + \dots + [\varphi_m, \varphi_m]a_m = [y, \varphi_m] \end{array} \tag{10}$$

- Hệ (10) là hệ đại số tuyến tính m+1 phương trình, m+1 ẩn là $a_0, a_1, \dots, a_m$ và được gọi là hệ phương trình chuẩn

- Định thức hệ (10)

$$G(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_m)=\begin{vmatrix} [\varphi_0,\varphi_0] & [\varphi_0,\varphi_1] & \dots & [\varphi_0,\varphi_m] \\ [\varphi_1,\varphi_0] & [\varphi_1,\varphi_1] & \dots & [\varphi_1,\varphi_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varphi_m,\varphi_0] & [\varphi_m,\varphi_1] & \dots & [\varphi_m,\varphi_m] \end{vmatrix} \qquad (11)$$

- gọi là định thức Gram của hệ vecto $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_m$
- Ta thấy định thức Gram đối xứng .Nếu định thức Gram khác 0 thì hệ (10) tồn tại duy nhất nghiệm
- Nếu hệ hàm vecto $\{\varphi_k\}$ $k=\overline{0m}$ độc lập tuyến tính trên $[a,b]$ thì định thức Gram khác 0, hơn nữa hàm số $\phi(a_0,\dots,a_m)$ đạt cực tiểu tại điểm $(\overline{a_0},\dots,\overline{a_m})\in\mathbb{R}^{m+1}$ là nghiệm của hệ (10)

- Vậy hàm

$$\overline{\varphi}(x)=\sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}\varphi_j(x) \qquad (12)$$

- sẽ xấp xỉ hàm $f(x)$ tốt nhất theo nghĩa trung bình phương

IV.SAI SỐ CỦA PHƯƠNG PHÁP

- Ta gọi

$$\overline{\sigma_m} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - \overline{\varphi}(x_i)]^2} \qquad (13)$$

- là sai số của phương pháp trung bình phương. Ta xét:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \overline{\varphi}(x_i)]^2 = [y-\overline{\varphi}, y-\overline{\varphi}] = [y-\overline{\varphi}, y] - [y-\overline{\varphi}, \overline{\varphi}] \qquad (14)$$

- Nhưng $[y-\overline{\varphi},\overline{\varphi}] = [y,\overline{\varphi}] - [\overline{\varphi},\overline{\varphi}] = [y, \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}\varphi_j] - [\sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}\varphi_j, \sum_{k=0}^{m}\overline{a_k}\varphi_k]$

$$= \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}[y,\varphi_j] - \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}[\varphi_j, \sum_{k=0}^{m}\overline{a_k}\varphi_k]$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}\{[y,\varphi_j] - \sum_{k=0}^{m}\overline{a_k}[\varphi_j,\varphi_k]\} = 0$$

- Vì phần trong ngoặc {.} có $\overline{a_k}$ là nghiệm của hệ phương trình chuẩn (10), nên từ (14) ta được

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \overline{\varphi}(x_i)]^2 = [y-\overline{\varphi}, y] = [y,y] - [\overline{\varphi}, y] = [y,y] - \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}[y,\varphi_j]$$

- Suy ra $\overline{\sigma_m} = \sqrt{\frac{1}{n}\{[y,y] - \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}[y,\varphi_j]\}}$ (15)

- là độ lệch trung bình phương của hàm $y = f(x)$ và hàm xấp xỉ $\overline{\varphi}(x) = \sum_{j=0}^{m}\overline{a_j}\varphi_j$ với điều kiện $\{\varphi_j(x)\}$ $j = \overline{0m}$ là hệ hàm độc lập tuyến tính trên $[a,b] \supseteq \{x_i, i = \overline{1n}\}$ trong đó a_j $j = \overline{0m}$ là nghiệm của hệ phương trình chuẩn (10)

V.TRƯỜNG HỢP $\{\varphi_i(x)\}_{i=\overline{0m}}$ LÀ HỆ TRỰC CHUẨN (?)

- Định nghĩa:(hệ trực giao) Hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=\overline{0m}}$ gọi là hệ trực giao trên trên tập $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ nếu
- $[\varphi_r,\varphi_s]=\sum_{i=0}^{n}\varphi_r(x_i)\varphi_s(x_i)=0$ khi $r\neq s$ và $[\varphi_r,\varphi_s]\neq 0$ khi $r=s$
- Số $\|\varphi_r\|=\sqrt{[\varphi_r,\varphi_r]}$ gọi là chuẩn của φ_r trên tập hợp Δ
- Hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=\overline{0m}}$ gọi là hệ trực chuẩn nếu hệ đó là hệ trực giao và có chuẩn bằng 1: $\|\varphi_r\|=1 \quad r=\overline{0m}$
- Như vậy: nếu chọn $\{\varphi_j\}_{j=\overline{0m}}$ là hệ trực giao, thì từ hệ phương trình chuẩn (10) ta có ngay

$$\overline{a}_j=\frac{[y,\varphi_j]}{[\varphi_j,\varphi_j]} \qquad j=\overline{0m} \qquad (16)$$

- Thay $\overline{a}_j(j=\overline{0m})$ vào (15)

$$\overline{\sigma}_m=\sqrt{\frac{1}{n}\{\|y\|^2-\sum_{j=0}^{m}\frac{[y,\varphi_j]^2}{[\varphi_j,\varphi_j]^2}\}} \qquad (17)$$

- Từ (17) ta dễ thấy: Khi tăng m thì $\overline{\sigma}_m$ sẽ giảm vì số hạng thứ 2 trong ngoặc {..} của (17) là số âm, nên $\overline{\sigma}_m$ có thể tính dần từng bước từ $m=0,1,2...$Giả sử đến bước thứ k=m,ta thu được $\overline{\sigma}_k<\varepsilon$ theo mong muốn, ta thì dừng quá trình tính. Nếu $\overline{\sigma}_m\geq\varepsilon$ ta tính thêm bước thứ $m=k+1$, sao cho $\overline{\sigma}_1<\varepsilon(1>k)$ ta dừng quá trình tính

VI.HỆ CƠ BẢN(HỆ ĐẠI SỐ VÀ LƯỢNG GIÁC)

1. Hệ đại số

- Xét hệ hàm $\varphi_j = x^j$; $j = \overline{0m}(m \le n-1)$
- Bài toán trở thành:tìm a_j ; $j = \overline{0m}$ sao cho

$$\varphi(x) = P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

- là đa thức bậc m(vì hệ $1, x, x^2, ..., x^m$ độc lập tuyến tính)
- Các hệ số a_j $(j = \overline{0m})$ được xác định từ hệ (10).Trong TH này:

$$[y, \varphi_s] = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_s(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^s$$

$$[\varphi_r, \varphi_s] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_r(x_i)\varphi_s(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+s}$$

- Hệ phương trình chuẩn:

$$\begin{aligned}
& n.a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^m a_m = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 a_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} a_m = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \qquad (2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i^m a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} a_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} a_m = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^m
\end{aligned}$$

- Do hệ $1, x, x^2, ..., x^m$ độc lập tuyến tính nên hệ (2)tồn tại duy nhất nghiệm $\overline{a_i}$ $i = \overline{0m}$
- Từ đó suy ra $f(x) \approx \overline{\varphi}(x) = P_m(x)$ và $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \overline{a_j} x^j$ là đa thức bậc m $(m \le n-1)$
- Sai số trung bình phương được tính theo công thức (15)

$$\overline{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{j=0}^{m} \overline{a_j} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j\}} \qquad \overline{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{P_m}(x_i)\right)^2}$$

THUẬT TOÁN

- INPUT:
  - X-mảng các phần tử của x (n phần tử)
  - y-mảng các phần tử của f(x) (n phần tử)
  - m-bậc của đa thức
- OUTPUT:
  - x-mảng gồm các hệ số $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ của đa thức
  - ss-sai số của phép tính

★ **Thuật toán:**

- Bước 1:Nhập các giá trị đầu vào X,y,m
- Bước 2:Lập hàm "I=hamtong(x,k,t)" để tính các tổng

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j (j = \overline{0,2m}) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^j y_i (j = \overline{0,m})$$

  - Với x,t là các mảng 1 chiều đầu vào,k là số mũ
  - n=size(x,2),I=0
  - for i=1:n cộng I=I+t(i)*x(i)^k .Ta được kết quả I
- Bước 3:Tạo ma trận A (m+1)*(m+1) và Y(m+1)*1
  - trong đó Y là ma trận cột $\sum_{i=1}^{n} x_i^j y_i (j = \overline{0,m})$ và A là ma trận chứa các hệ số của ẩn
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i^j (j = \overline{0,2m})$

- for i=1:m+1–>Y(i,1)=hamtong(X,i-1,y)
- for j=1:m+1 –>A(i,j)=hamtong(X,i+j-2,t) với t=ones(n,1)
- Vậy ta được Ax=Y

• Bước 4: x=A\Y

- Ta được ma trận x gồm các hệ số theo thứ tự $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$

• Bước 5: Tính sai số ss

- Lập hàm "dathuc(x)" tính giá trị của đa thức vừa tìm được tại điểm x
- for i=1:n –> ss=ss+(y(i)-dathuc(x(i)))^2
- ss=sqrt((1/n)*ss)

Các chương trình con

```
function I=hamtong(X,k,t)
  n=size(X,2);
  I=0;
  for i=1:n
        I=I+t(i)*X(i)^k;
  end
end
function I=dathuc(A,x)
    n=size(A,1);
    I=0;
    for i=1:n
        I=I+A(i,1)*x^(i-1);
    end
end
```

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

```
function [x,ss]=nghiem1(X,y,m)
   n=size(X,2);
   A=zeros(m+1,m+1);
   Y=zeros(1+m,1);
   t=ones(n,1);
   for i=1:m+1
       Y(i,1)= hamtong(X,i-1,y);
       for j=1:m+1
               A(i,j)=hamtong(X,i+j-2,t);
       end
   end
   x=A\Y;
   ss=0;
   for j=1:n
           ss=ss+(y(j)-dathuc(x,X(j)))^2;
   end
   ss=sqrt((1/n)*ss);
end
```

```
X=[1.2 3.4 -0.9 3.34 0.12 16.90 -9.7 2.77 -12.67 5.01 0.01 7.90 13.9
-6.80];
y=[-0.15 17.16 -1.37 15.96 0.91 4256.55 -1099.80 6.99 -2353.98 76.58 0.99
369.34 2300.33 -405.99];


>> [x,ss]=nghiem1(X,y,3)

x =

   0.982958713854908
   0.013986210310138
  -1.999515659679997
   0.999926275725305


ss =

   0.044790509631566
```

Đây là hàm $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3$

2. Hệ lượng giác

- Trong thực tế nhiều khi ta gặp những hàm có tính chất tuần hoàn khi đó hàm xấp xỉ cũng cần mang tính chất đó.Ta chọn hàm xấp xỉ là đa thức lượng giác cấp k:

$$T_k(x) = \alpha_0 + \sum_{r=1}^{k} (\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx) \qquad (3)$$

- trong đó $\alpha_r, \beta_r, \alpha_0$ là những số còn $k \in \mathbb{N}^*$
- Rõ ràng $T_k(x)$ có dạng của đa thức suy rộng (m=2k) với cơ số $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = \cos(x), \varphi_2 = \sin(x), \ldots$

$$\varphi_{2r-1}(x) = \cos rx, \varphi_{2r}(x) = \sin rx, \ldots \varphi_{2k-1}(x) = \cos kx, \varphi_{2k}(x) = \sin kx$$

- thì $\left[\varphi_0, \varphi_0\right] = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$ $\qquad$ $\left[y, \varphi_0\right] = \sum_{i=1}^{n} y_i$

$$\left[\varphi_0, \varphi_j\right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \cos p x_i & j = 2p-1 \\ \sum_{i=1}^{n} \sin p x_i & j = 2p \end{cases} \qquad j = \overline{1,2k}$$

$$\left[\varphi_l, \varphi_j\right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \cos r x_i \sin p x_i & l = 2r-1, j = 2p-1 \\ \sum_{i=1}^{n} \sin r x_i \cos p x_i & l = 2r, j = 2p-1 \\ \sum_{i=1}^{n} \sin r x_i \sin p x_i & l = 2r, j = 2p \end{cases} \qquad \begin{matrix} j = \overline{1,2k} \\ l = \overline{1,2k} \end{matrix}$$

$$\left[y, \varphi_j\right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i \cos p x_i & j = 2p-1 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \sin p x_i & j = 2p \end{cases}$$

- Theo công thức (10) ta được hệ phương trình chuẩn:

$$\left.\begin{aligned} & n\alpha_0+\sum_{r=1}^{k}\left(\alpha_r\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i+\beta_r\sum_{i=1}^{n}\sin rx_i\right)=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ & \alpha_0\sum_{i=1}^{n}\cos px_i+\sum_{r=1}^{k}\left\{\alpha_r\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i\cos px_i+\beta_r\sum_{i=1}^{n}\sin rx_i\cos px_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}y_i\cos px_i \\ & \alpha_0\sum\sin px_i+\sum_{r=1}^{k}\left\{\alpha_r\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i\sin px_i+\beta_r\sum_{i=1}^{n}\sin rx_i\sin px_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}y_i\sin px_i \\ & p=\overline{1k} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

- Hệ trên gồm 2k+1 phương trình,2k+1 ẩn là $\alpha_r, \beta_r, \alpha_0, r=\overline{1k}$
  Do hệ $1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos kx,\sin kx$ độc lập tuyến tính $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ nên hệ trên tồn tại duy nhất nghiệm, suy ra đa thức lượng giác (3) xấp xỉ f(x) theo nghĩa trung bình phương.

- Sai số xác định theo công thức:

$$\overline{\varphi}_{2k}=\sqrt{\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\overline{T}_k(x_i)\right]^2}$$

- trong đó $\overline{T}_k(x)=\overline{\alpha}_0+\sum_{j=1}^{k}\left[\overline{\alpha}_j\cos jx+\overline{\beta}_j\sin jx\right]$
- với $\overline{\alpha}_0,\overline{\alpha}_j,\overline{\beta}_j (j=\overline{1k})$ là nghiệm của hệ (4)
- Chú ý: Nếu tập hợp các mốc $x_i\in(0,2\pi]$ cách đều nhau: với $x_i=ih(i=\overline{1,n})$, $h=\frac{2\pi}{n}(n\geq 2k+1)$ thì tại các mốc x_i ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i=\sum_{i=1}^{n}\sin rx_i=0 \quad (r=\overline{1k})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i\sin px_i=0 \quad (r=\overline{1,k}, p=\overline{1,k})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i\cos px_i=\sum_{i=1}^{n}\sin rx_i\sin px_i=0 \quad (r=\overline{1,k}, p=\overline{1,k}, r\neq p)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2 rx_i=\sum_{i=1}^{n}\sin^2 rx_i=\frac{n}{2} \quad (r=\overline{1,k})$$

THUẬT TOÁN

- INPUT:
  - X-mảng các phần tử của x (n phần tử)
  - y-mảng các phần tử của f(x) (n phần tử)
  - k-bậc của đa thức lượng giác
- OUTPUT:
  - x-mảng gồm các hệ số $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_k, \beta_k$ của đa thức lượng giác bậc k
  - ss-sai số của phép tính

- Thuật toán:
- Bước 1: Nhập các giá trị đầu vào X,y,k
- Bước 2:Tạo hai ma trận A,B có cỡ k*n

$$A = \begin{bmatrix} \sin x_1 & \sin x_2 & ... & \sin x_n \\ \sin 2x_1 & \sin 2x_2 & ... & \sin 2x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \sin kx_1 & \sin kx_2 & ... & \sin kx_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & ... & \cos x_n \\ \cos 2x_1 & \cos 2x_2 & ... & \cos 2x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \cos kx_1 & \cos kx_2 & ... & \cos kx_n \end{bmatrix}$$

  - Lập hàm hamtonglg(A,B) để tính tổng các tích của 2 dòng trong mỗi ma trận A,B
- Bước 3: Tính Y(i,1) là ma trận cột chứa $\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cos(jx_i) \sum_{i=1}^{n} y_i \sin(jx_i)$

$j = \overline{1,k}$

- for i=2:2:2k –>Y(i)=hamtonglg(B,m,i/2) (m=k hàng y(j)) (j=1,2…,n)
- for i=3:2:2k+1 –> Y(i)=hamtonglg(A,m,(i-1)/2)
- Y(1)=hamtonglg(m,t) (t=ones(k,n)) Y((2k+1)*1)

- Bước 4: Tính C(i,j) là ma trận chứa các hệ số của ẩn

$$\sum_{i=1}^{n}\cos rx_i (r=\overline{0,k}) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sin rx_i (r=\overline{0,k}) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sin rx_i \cos px_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin rx_i \sin px_i (r=\overline{1,k}, p=\overline{1,k}) \qquad \sum_{i=1}^{n}\cos rx_i \cos px_i$$

- for i,j=2:2:2k –>C(i,j)=hamtonglg(B,B,j/2,i/2)
- for i,j=3:2:2k+1 –>C(i,j)=hamtonglg(A,A,(j-1)/2,(i-2)/2)
- for i=2:2:2k –>C(1,i)=C(i,1)=hamtonglg(B,t,i/2)
- for i=3:2:2k+1 –>C(i,1)=C(1,i)=hamtonglg(A,t,(i-1)/2)
- C(1,1)=n

- Bước 5: Có Cx=Y –>x=C\Y
- Bước 6: Tính sai số-ss
  - Lập hàm hamlg(x) để tính gía trị của hàm lượng giác vừa tìm được tại các điểm x
  - for i=1:n –> ss=ss+(y(i)-hamlg(X(i)))^2
  - ss=sqrt((1/2k)*ss)

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

```
function [x,ss]=helg(X,y,k)
    n=size(X,2);
    t=ones(k,n);
    A=zeros(k,n);
    B=zeros(k,n);
    C=zeros(2*k+1,2*k+1);
    m=zeros(k,n);
    for i=1:k
        for j=1:n
            A(i,j)=sin(i*X(j));
            B(i,j)=cos(i*X(j));
        end
    end
    for j=1:n
        for i=1:k
            m(i,j)=y(j);
        end
    end
    for i=2:2:2*k
        Y(i,1)=hamtonglg(B,m,i/2,1);
    end
    for i=3:2:2*k+1
        Y(i,1)=hamtonglg(A,m,(i-1)/2,1);
    end
    Y(1,1)=hamtonglg(m,t,1,1);
```

```
for i=2:2:2*k
        for j=2:2:2*k
            C(i,j)=hamtonglg(B,B,j/2,i/2);
        end
    end
    for i=3:2:2*k+1
        for j=3:2:2*k+1
            C(i,j)=hamtonglg(A,A,(j-1)/2,(i-1)/2);
        end
    end
    for i=2:2:2*k
        C(1,i)=hamtonglg(B,t,i/2,1);
        C(i,1)=hamtonglg(B,t,i/2,1);
    end
    for i=3:2:2*k+1
        C(1,i)=hamtonglg(A,t,(i-1)/2,1);
        C(i,1)=hamtonglg(A,t,(i-1)/2,1);
    end
    C(1,1)=n;
    x=C\Y;
    ss=0;
    for i=1:n
        ss=ss+(y(i)-hamlg(x,X(i)))^2;
    end
    ss=sqrt((1/(2*k))*ss);

end
```

Các chương trình con:

```
function I=hamtonglg(A,B,a,b)
    n=size(A,2);
    I=0;
    for i=1:n
        I=I+(A(a,i))*(B(b,i));
    end
end
function I=hamlg(A,x)
    k=size(A,1);
    I=0;
    for i=2:2:k-1
        I=I+A(i,1)*(cos((i/2)*x));
    end
    for i=3:2:k
        I=I+A(i,1)*(sin(((i-1)/2)*x));
    end
    I=I+A(1,1);
end
```

```
X=[pi/6 pi/3 pi/2 2*pi/3 5*pi/6 pi 7*pi/6 4*pi/3 3*pi/2 5*pi/3 11*pi/6
2*pi];
y=[2.611 3.102 2.912 2.105 0.612 -1.321 -1.906 -2.412 -2.802 -2.703
-1.610 1.500];
>> [x,ss]=helg(X,y,2)

x =

   0.007333333333333
   0.860254716947549
   3.003769036310496
  -0.020583333333334
   0.431713663786542


ss =

   0.552884456923608
```

Vậy ta thu được đa thức lượng giác:

$$f(x) = 0{,}007333333 + 0{,}86025\cos(x) + 3{,}00376\sin(x) - 0{,}02058\cos(2x) + 0{,}43171\sin(2x)$$

VII.XÁC ĐỊNH THAM SỐ HÀM THỰC NGHIỆM

- Ta xét vài trường hợp tìm tham số của hàm số thực nghiệm thường gặp trong kỹ thuật bằng phương pháp bình phương tối thiểu.

1. $y = ax + b$
2. $y = ax^2 + bx + c$
3. $y = a + b\cos x + c\sin x$
4. $y = ae^{bx}(a > 0)$
5. $y = ax^b(a > 0, x \geq 0)$

- Các hàm số có dạng trên là hàm số của biến x,còn a,b,c là các tham số

- Trường hợp dạng 1,2,3 là dạng tìm hàm $\varphi(x)$biểu diễn tuyến tính theo các tham số a,b,c.Còn trường hợp 4,5 là dạng hàm phi tuyến đối với các tham số a,b

1. Trường hợp dạng $y = ae^{bx}$

- Lấy logarit 2 vế: $\lg y = \lg a + xb.\lg e$
- Đặt $Y = \lg y, A = \lg a, B = b\lg e$
- Ta được $Y = A + Bx$
- Từ bảng số đã cho: $y_i = f(x_i) \Rightarrow Y_i = \lg y_i$
- Hay $Y_i = \lg f(x_i) \quad i = \overline{1,n} \qquad (1)$
- Bài toán qui về: Từ bảng số (1) tìm hàm $\varphi(x) = A + Bx$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu

- Hàm $\varphi(x)$ có dạng tuyến tính theo các tham số A,B và hệ cơ sở đại số là 1,x.Theo công thức (2 phần VI) giải ta được $\overline{A},\overline{B}$
- Từ đó suy ra $\overline{a}=10^{\overline{A}};\overline{b}=\dfrac{\overline{B}}{\lg e}$
- Vậy từ bảng số đã cho ta thu được hàm thực nghiệm dạng:

$$y=\overline{a}e^{\overline{b}x}$$

- Công thức sai số: $\sigma_n=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{a}e_i^{\overline{b}x}\right)^2}$

THUẬT TOÁN

- INPUT:
  - X-mảng các phần tử của x (n phần tử)
  - y-mảng các phần tử của f(x) (n phần tử)
- OUTPUT:
  - x-mảng gồm 2 thành phần $\overline{a},\overline{b}$
  - ss-sai số của phép tính

- Thuật toán:

- Bước 1: Nhập các giá trị đầu vào X,y
- Bước 2: Tính Y(i) =log(y(i)) (i=1,2,…,n) (Tạo bảng số mới)
- Bước 3: z=hệ_đại_số(X,Y,1)   (size(z)=2*1)
  - z(1,1)= $\overline{A}$; z(2,1)= $\overline{B}$ –> $\overline{a} = 10^{\overline{A}} = x(1); \overline{b} = \dfrac{\overline{B}}{\lg e} = x(2)$
- Bước 4: Tính sai số-ss
  - for i=1:n –> ss=ss+(y(i)-x(1)*exp(x(2)*X(i)))^2
  - ss=sqrt((1/n)*ss)

```
function [x,ss]=nghiem2(X,y)
    z=zeros(2,1);
    n=size(X,2);
    Y=zeros(1,n);
    for i=1:n
        Y(i)=log10(y(i));
    end
    z=nghiem1(X,Y,1);
    x(1)=10^(z(1,1));
    x(2)=z(2,1)/(log10(exp(1)));
    ss=0;
    for i=1:n
        ss=ss+(y(i)-x(1)*exp(x(2)*X(i)))^2;
    end
    ss=sqrt((1/n)*ss);
end
```

2. Trường hợp dạng $y = ax^b$

- Hoàn toàn tương tự như 1.Ta có: $\lg y = \lg a + b.\lg x$
- Đặt $Y = \lg y, A = \lg a, B = b, \lg x = X$
- Từ bảng số đã cho ta được $Y_i = \lg f(x_i)$ và $X_i = \lg x_i (i = \overline{1,n})$
- Bằng công thức (2 phần VI) giải ta được $\overline{A}, \overline{B}$
- Từ đó suy ra $\overline{a} = 10^{\overline{A}}; \overline{b} = \overline{B}$ ta được hàm thực nghiệm dạng

$$y = \overline{a}x^{\overline{b}}$$

- Công thức sai số: $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{a}x_i^{\overline{b}}\right)^2}$

THUẬT TOÁN

- INPUT:
  - X-mảng các phần tử của x (n phần tử)
  - y-mảng các phần tử của f(x) (n phần tử)
- OUTPUT:
  - x-mảng gồm 2 thành phần $\overline{a}, \overline{b}$
  - ss-sai số của phép tính

- Thuật toán:

- Bước 1: Nhập các giá trị đầu vào X,y
- Bước 2: Y(i)=log(y(i)) ; xx(i)=log(X(i)) (i=1,2,..,n) (tạo bảng mới)
- Bước 3: z=hệ_đại_số(xx,Y,1)
  - z(1,1)= $\overline{A}$; z(2,1)= $\overline{B}$ –> $\overline{a} = 10^{\overline{A}} = x(1); \overline{b} = \overline{B} = x(2)$
- Bước 4: Tính sai số-ss
  - for i=1:n –> ss=ss+(y(i)-x(1)*X(i)^(x(2)))^2
  - ss=sqrt((1/n)*ss)

```
function [x,ss]=nghiem3(X,y)
  n=size(X,2);
  xx=zeros(1,n);
  z=zeros(2,1);
  Y=zeros(1,n);
  for i=1:n
    xx(i)=log10(X(i));
    Y(i)=log10(y(i));
  end
  z=nghiem1(xx,Y,1);
  x(1)=10^z(1,1);
  x(2)=z(2,1);
  ss=0;
  for i=1:n
    ss=ss+(y(i)-x(1)*(X(i))^x(2))^2;
  end
  ss=sqrt((1/n)*ss);
end
```

THUẬT TOÁN VỚI HỆ ĐLTT BẤT KÌ

- INPUT:
  - X-mảng các phần tử của x (n phần tử)
  - y-mảng các phần tử của f(x) (n phần tử)
  - z-mảng các hàm số theo biến x(m hàm số) (hệ hàmφ trong z là độc lập tuyến tính)
- OUTPUT:
  - c-mảng gồm các hệ số của các hàm trong z
  - ss-sai số của phép tính

THUẬT TOÁN

- Bước 1:Nhập các giá trị đầu vào X,y,z
- Bước 2:Tính ma trận cột Y $[y,\varphi_r]=\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_r(x_i)$
- Bước 3:Tính ma trận vuông A(m*m) $[\varphi_r,\varphi_s]=\sum_{i=1}^{n}\varphi_r(x_i)\varphi_s(x_i)$
- Bước 4:x=Y/A
- Bước 5:Tính sai số-ss
  - $ss=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i)]^2}$

Các chương trình con

```
function I=tong1(a,b,X)
    n=size(X,2);
    I=0;
    for i=1:n
        I=I+(subs(a,(X(i))))*(subs(b,(X(i))));
    end
end
function I=tong2(y,b,X)
    n=size(X,2);
    I=0;
    for i=1:n
        I=I+(y(i))*(subs(b,(X(i))));
    end
end
function I=hetm(z,c,a)
syms x;
m=size(z,1);
I=0;
for i=1:m
    I=I+(c(i,1))*(subs((z(i)),a));
end
```

```
function [c,ss]=hedltt(X,y,z)
    syms x;
    n=size(X,2);
    m=size(z,1);
    A=zeros(m,m);
    Y=zeros(m,1);
    c=zeros(m,1);
    for i=1:m
        Y(i,1)=tong2(y,z(i),X);
    end
    for i=1:m
        for j=1:m
            A(i,j)=tong1(z(i),z(j),X);
        end
    end
    c=A\Y;
    ss=0;
    for i=1:n
        ss=ss+(y(i)-hetm(z,c,X(i)))^2;
    end
    ss=sqrt((1/n)*ss);
    c=double(c);
    ss=double(ss);
end
```

```
syms x;
X=[1.02 3.07 12.51 -0.08 -6.63 2.9 0.07 -2.51 0.32 -5 -1.63 0.05 -10];
y=[3.46 9.47 135513.41 -0.77 -0.58 8.28 -0.26 -1.88 0.66 3.79 -2.58 -0.33
2.93];
z=[exp(x);(cos(x))^2;sin(x);x];

>> [c,ss]=hedltt(X,y,z)

c =

   0.499999917249139
  -0.987730364456204
   2.999514357577476
  -0.197803371555675

ss =
   0.024073904666949
```

Đây là hàm $f(x)=\frac{1}{2}e^{x}-\cos^{2}(x)+3\sin(x)-0,2x$ với y đã được cho sai lệch so với kết quả chuẩn

```
y=[3.4650095 9.3766626 135513.39 -0.75579955 -0.57751692 8.2820609
-0.26302537 -1.88005 0.66721569 3.7996776 -2.5742801 -0.33192903 2.928045
0.000012447034]
Ta thấy y tăng nhanh và giao động do hàm sin,cos
```

THUẬT TOÁN VỚI HÀM $y=be^{a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+...+a_m\varphi_m(x)}$

- Ta có: $\lg y=a_1\varphi_1(x)\lg e+...+a_m\varphi_m(x)\lg e+\lg b$
- Đưa về hệ độc lập tuyến tính $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_m(x),x^0$
- Giải ra ta được các hệ số $a_1\lg e,...,a_m\lg e,\lg b$ từ đó tìm được các hệ số cần tìm
- INPUT:
    - X-mảng các phần tử của x (n phần tử)
    - y-mảng các phần tử của f(x) (n phần tử)
    - z-mảng các hàm số theo biến x(m hàm số) (hệ hàm trong z là độc lập tuyến tính)
- OUTPUT:
    - c-mảng gồm các hệ số của các hàm trong z và b
    - ss-sai số của phép tính

THUẬT TOÁN

- Bước 1:Nhập các giá trị đầu vào X,y,z
- Bước 2:Đưa bảng số ban đầu thành bảng số mới với giá trị lg(y),X
- Bước 3:Sử dụng thuật toán với hệ độc lập tuyến tính trong z và cộng thêm 1 hàm x^(0) có hệ số là lg(b).Tìm được hàm c chứa các giá trị $a_1 \lg e, \ldots, a_m \lg e, \lg b$ –> Ta tìm được mảng a chứa các giá trị $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$
- Bước 4:Tính sai số-ss
  - $ss = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi(x_i))^2}$

Chương trình con:

```
function I=hee(z,a,t)
syms x;
I=1;
m=size(z,1);
for i=1:(m-1)
    I=I*exp((a(i))*(subs((z(i)),t)));
end
I=I*a(m);
end
```

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

```
function [a,ss]=nghieme(X,y,z)
    syms x;
    m=size(z,1);
    n=size(X,2);
    for i=1:n
        Y(i)=log10(y(i));
    end
    z(m+1)=x^(0);
    c=hedltt(X,Y,z);
    for i=1:m
        a(i,1)=c(i)/(log10(exp(1)));
    end
    a(m+1,1)=10^(c(m+1));
    ss=0;
    for i=1:n
        ss=ss+(y(i)-hee(z,a,X(i)))^2;
    end
    ss=sqrt((1/n)*ss);
    ss=double(ss);
end
```

```
syms x;
X=[-5.6 -4.8 -3 -1.65 -0.1 -0.05 0.002 0.99 1 1.6 2.5 3.15 4.89 5.92];
y=[0.0003 0.01 0.12 0.178 2.48 2.712 3.05 11.53 11.577 9.45 1.237 0.108
0.0001 0.00001];
z=[sin(x);x^(2)];

>> [a,ss]=nghieme(X,y,z)

a =
   2.056193887971993
  -0.338867889272257
   3.048421462922460

ss =
     0.294510468024370
```

Đây là hàm $f(x) = 3e^{2\sin(x)-\frac{x^2}{3}}$ với y đã được cho sai lệch so với kết quả chuẩn

```
y=[0.000305919742777 0.010162421855228 0.112632189714154 0.164866739920768
2.448834316234906 2.712364101530985 3.012020007970608  11.518612967235757
11.567748509024945 9.434999835805272 1.236423877917320 0.107991559675335
0.000144732278496 0.000012447034395]
```

Ta thấy y tăng(giảm) rất nhanh trong 1 khoảng và giảm(tăng) cũng rất nhanh trong những khoảng còn lại