Họ và tên

BÁO CÁO: PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

I, Ý tưởng phương pháp

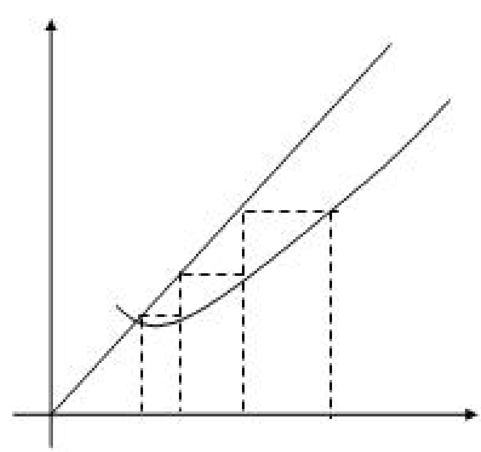
Giả sử (a, b) là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$, tức là $f(\alpha) = 0$ với $\alpha \in (a, b)$.

Ta viết lại phương trình $f(x) = 0$ trong dạng:

$$x = g(x)$$

trong đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên [a, b].

Sau đó ta sử dụng lặp để tìm giao của 2 đường $y = x$ và $y = g(x)$, đó chính là nghiệm của phương trình.



II, Xây dựng công thức

Với $g(x)$ là hàm số liên tục trên [a, b], (a, b) là khoảng phân ly nghiệm.

Chọn x_0 là điểm bất kì thuộc [a, b] và tính dãy lặp theo công thức

$$x_n = g(x_{n-1}) \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Công thức trên được gọi là quá trình lặp, n được gọi là thứ của phép lặp.

III, Sự hội tụ của phương pháp

- Quá trình lặp được gọi là hội tụ, nếu dãy $\{x_n\}$ tính theo công thức trên hội tụ, tức là tồn tại $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

- Nếu quá trình lặp hội tụ, nghĩa là $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Nhưng do g(x) là hàm số liên tục trên [a, b] nên $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = g\left[\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right]$
  Suy ra: $x^* = g(x^*)$
  Vậy khi đó $x^* = \alpha$ là nghiệm của phương trình x = g(x) hay là nghiệm của phương trình f(x) = 0.

Điều kiện hội tụ của quá trình lặp:

- **Định lý:** Giả sử (a, b) là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình f(x) = 0 hay x = g(x). g(x) là hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục trên [a, b]; $g(x) \in [a, b]$ với mọi $x \in [a, b]$. Với x_n bất kỳ thuộc [a, b]; nếu tồn tại số q > 0 không phụ thuộc vào x sao cho:

  $$|g'(x)| \le q < 1 \ \forall x \in [a,b]$$

  Thì quá trình lặp hội tụ và hội tụ tới nghiệm đúng α của phương trình.
- **Chứng minh:** Do α là nghiệm của x = g(x) nên ta có $\alpha = g(\alpha)$
  Theo công thức lặp ta có: $x_1 = g(x_0)$. Theo định lý Lagrange

  $(x_1 - \alpha) = g'(c)(x_0 - \alpha)$, trong đó c là giá trị trung gian giữa x_0 và α. Từ đó theo điều kiện trên:

  $$|x_1 - \alpha| \le q|x_0 - \alpha|$$

  Tương tự ta cũng có:

  $$|x_2 - \alpha| \le q|x_1 - \alpha|$$

  …

  $$|x_n - \alpha| \le q|x_{n-1} - \alpha|$$

  Nhân các bất đẳng thức trên vế với vế:

  $$|x_n - \alpha| \le q^n |x_0 - \alpha|$$

  Do 0 < q < 1 nên khi $n \to \infty$ thì $x_n \to \alpha$.

  Hay $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

  Vây với các điều kiện của định lý trên thì quá trình lặp hội tụ và hội tụ tới nghiệm đúng α của phương trình.
- **Nhận xét:** Ta thấy ánh xạ g: [a, b] -> [a, b] chính là 1 ánh xạ Lipschitz, là 1 ánh xạ co với hệ số Lipschitz là q < 1. Từ đó theo định lý Banach về điểm bất động ta có luôn tồn tại duy nhất $\alpha \in [a, b]$ sao cho $g(\alpha) = \alpha$. Điều này hoàn toàn hợp lý với chứng minh ở trên.
  Ta còn thấy rằng khi q càng nhỏ thì tốc độ hội tụ sẽ càng nhanh, và tốc độ hội tụ sẽ càng chậm khi q tiến càng gần tới 1.

IV, Sai số

Có hai công thức sai số:

$$\left|x_n-\alpha\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_n-x_{n-1}\right| \quad (1)$$

$$\left|x_n-\alpha\right| \le \frac{q^n}{1-q}\left|x_1-x_0\right| \quad (2)$$

Công thức (1) thuận lợi khi tính trên máy. Muốn nghiệm gần đúng x_n đạt sai số ε, ta kiểm tra điều kiện dừng:

$$\left|x_n-x_{n-1}\right| < \delta = \frac{\varepsilon(1-q)}{q}$$

Công thức (2) thuận lợi trong việc tìm nghiệm gần đúng x_n đạt sai số $\varepsilon > 0$ cho trước. Cụ thể, từ đánh giá: $\left|x_n-\alpha\right| \le \frac{q^n}{1-q}\left|x_1-x_0\right| < \varepsilon$

Ta suy ra chỉ cần chọn số n nhỏ nhất thỏa mãn: $n > \log_q \frac{\varepsilon(1-q)}{\left|x_1-x_0\right|}$ hay:

$$n = \left\lfloor \log_q \frac{\varepsilon(1-q)}{\left|x_1-x_0\right|} \right\rfloor + 1$$

Chứng minh công thức sai số:

Chứng minh công thức sai số (1):

$\left|x_n-\alpha\right| \le q\left|x_{n-1}-\alpha\right| = q\left|\left(x_{n-1}-x_n\right)+\left(x_n-\alpha\right)\right|$

$\Rightarrow \left|x_n-\alpha\right| \le q\left|x_{n-1}-x_n\right| + q\left|x_n-\alpha\right|$

$\Rightarrow (1-q)\left|x_n-\alpha\right| \le q\left|x_n-x_{n-1}\right|$

$\Rightarrow \left|x_n-\alpha\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_n-x_{n-1}\right|$

Chứng minh công thức sai số (2):

Có: $x_n = g\left(x_{n-1}\right)$, $x_{n-1} = g\left(x_{n-2}\right)$

$\Rightarrow x_n - x_{n-1} = g\left(x_{n-1}\right) - g\left(x_{n-2}\right)$

Theo định lý Lagrange:

$x_n - x_{n-1} = g'(c)\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)$ với c là giá trị trung gian x_{n-1} và x_{n-2}.

Hay $\left|x_n-x_{n-1}\right| = \left|g'(c)\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)\right| \le q\left|x_{n-1}-x_{n-2}\right|$

Thay vào công thức sai số thứ (1) và truy hồi, ta được:

$$\left|x_n-\alpha\right| \le \frac{q^n}{1-q}\left|x_1-x_0\right|$$

V, Thuật toán:

Đầu vào: Hàm g(x), q, xấp xỉ đầu x_0, sai số ε sao cho $|g'(x)| \le q < 1$ trên (a, b) là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình f(x) = 0 hay x = g(x)

Đầu ra: x_n là nghiệm gần đúng của phương trình x = g(x),

Bước 1: Tính $\delta = \frac{\varepsilon(1-q)}{q}$

Bước 2: Với xấp xỉ đầu x_0, tính:

$x_n = g(x_{n-1})$ với n = 1

Bước 3: Kiểm tra sai số theo công thức:

$|x_n - x_{n-1}| < \delta$

+) Nếu công thức trên đúng thì x_n là nghiệm xấp xỉ cần tìm

+) Nếu công thức trên chưa đúng thì quay lại bước 2, thực hiện với n = n+1;

VI, Chương trình:

```
function [x,k] = lapdon1(g,q,x0,epsilon)
if nargin<4
    epsilon = 1e-5;
end
delta = epsilon*(1-q)/q;
k = 1;
x = feval(g,x0);
while (abs(x - x0) >= delta)
    x0 = x;
    x = feval(g,x0);
    k = k+1;
end
disp('Sai so la:');
disp(abs(x-x0)*q/(1-q));
end
```

Với sai số ở đây là $\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$.

VII, Chạy thử và nhận xét:

VD: Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$, biết khoảng cách ly nghiệm (-2,75;-2,3) và sai số 0,0001.

$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 3 - 3x^2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3-3x^2}$

Với $g(x) = \sqrt[3]{3-3x^2}$, $g'(x) = \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{\left(3-3x^2\right)^2}}$

$|g'(x)| \le 0,04572 < 1 \quad \forall x \in [-2,75,-2,3]$ => g(x) thỏa mãn điều kiện.

Chọn xấp xỉ đầu x_0 = -2,4

Thực hiện chương trình với g = $\sqrt[3]{3-3x^2}$, q = 0,04572, x_0 = -2,4, epsilon = 0,0001

Kết quả:

```
Sai so la:

     8.392390998406357e-05

t =

  -2.525474512750751

k =

    13
```

Với t là nghiệm, k là số lần lặp

Thử thực hiện với g = $\sqrt[3]{3-3x^2}$, q = 0,2, x_0 = -2,4, epsilon = 0,0001

Kết quả:

```
Sai so la:

     8.455255661232730e-05

t =

  -2.530816514857571

k =

    20
```

Thử thực hiện với g = $\sqrt[3]{3-3x^2}$, q = 0,5, x_0 = -2,4, epsilon = 0,0001

```
Sai so la:
```

```
    8.222612039610056e-05

t =

  -2.531779751210682

k =

    26
```

Thử thực hiện với $g = \sqrt[3]{3-3x^2}$, q = 0,5, x_0 = -2,45, epsilon = 0,0001

```
Sai so la:

    7.950432477343838e-05

t =

  -2.531789986108087

k =

    24
```

Nhận xét:

- Ta thấy khi q càng nhỏ thì số lần lặp càng giảm, q càng lớn thì số lần lặp càng tăng, phù hợp với nhân xét ở phần trên.
- Khi xấp xỉ đầu x_0 càng gần với nghiệm α thì số lần lặp càng ít.
- Ta thấy không thể đánh giá được sai số thực tế ở đây mà chỉ có thể đánh giá qua $\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$. Ta có thể nhận thấy rằng trong quá trình lặp, hệ số co không đứng yên vì sau mỗi lần lặp, khoảng phân ly nghiệm càng bé lại, có những hàm chặn trên g' giảm nhanh, có những hàm chặn trên g' giảm chậm, nên sai số cũng vậy.

VII. Đánh giá về tốc độ hội tụ

1. Định nghĩa tốc độ hội tụ:

Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x, với $x_n \neq x$ với mọi n. Nếu tồn tại hằng số dương μ và α sao cho $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^{\alpha}} = \mu$ thì x_n hội tụ tới x với tốc độ hội tụ μ và hội tụ với bậc α.

Nếu α = 1, 0 < μ < 1 thì dãy hội tụ tuyến tính

Nếu α = 2 thì dãy hội tụ bình phương

Nếu α = 3 thì dãy hội tụ lập phương …

Nếu α = 1 và μ = 0, hoặc 1 < α < 2 thì dãy hội tụ siêu tuyến tính.

Nhận xét: Ta thấy tốc độ hội tụ chủ yếu phụ thuộc vào bậc α, khi bậc càng cao thì dãy hội tụ càng nhanh.

2. **Xét tốc độ hội tụ của phương pháp lặp đơn**

Ta có dãy $\{x_n\}$ của phương pháp được định nghĩa như sau:

$x_n = g(x_{n-1})$ với n = 1; 2; 3; …

Dãy trên hội tụ tới nghiệm đúng α của phương trình x = g(x) như đã chứng minh ở trên.

Sử dụng định lý Lagrange, ta có:

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)\left(x_n - \alpha\right)$$ với c_n nằm trong đoạn (x_n, α)

$$\Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| = |g'(c_n)||x_n - \alpha|$$

Bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, c_n nằm trong đoạn (x_n, α) nên $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$. Hơn nữa ta lại có g' là hàm liên tục, ta được:

$$\lim_{n\to\infty} g'\left(c_n\right) = g'(\alpha)$$

Từ đó:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \lim_{n\to\infty} \left|g'\left(c_n\right)\right| = |g'(\alpha)|$$

Ta có: $|g'(x)| \le q < 1 \ \forall x \in [a, b] \Rightarrow |g'(\alpha)| < 1$

Vậy nếu $|g'(\alpha)| \ne 0$ thì với mọi xấp xỉ đầu $x_0 \in [a, b]$, dãy $\{x_n\}$ hội tụ tuyến tính tới $\alpha \in [a, b]$.

⇨ Điều này cho thấy tốc độ hội tụ khá chậm với $|g'(\alpha)| \ne 0$

3. **Cách tăng nhanh tốc độ hội tụ của phương pháp.**

- Để cho phương pháp lặp đơn hội tụ nhanh hơn, chúng ta phải tạo được hàm g' sao cho với α là nghiệm của phương trình x = g(x), g'(α) = 0. Khi đó dãy sẽ hội tụ siêu tuyến tính, tốc độ hội tụ sẽ nhanh hơn so với trường hợp hội tụ tuyến tính.
- **Định lý:** Gọi α là nghiệm của phương trình: x = g(x), g(x) ∈ [a, b] là khoảng phân ly nghiệm α Giả sử rằng g'(α) = 0, g(x) và g'(x) liên tục và có đạo hàm liên tục trên khoảng [a, b] và $|g'(x)| \le q < 1 \ \forall x \in [a, b]$. Khi đó sẽ tồn tại δ > 0 sao cho với $x_n \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, dãy x_n được định nghĩa là $x_n = g(x_{n-1})$ với n = 1, 2, 3, … sẽ hội tụ với bậc ≥ 2.
- **Ta chứng minh định lý:**

Áp dụng khai triển Taylor, ta được:

$$g\left(x_n\right) = g\left(\alpha\right) + g'\left(\alpha\right)\left(x_n - \alpha\right) + \frac{1}{2}g''\left(c_n\right)\left(x_n - \alpha\right)^2$$ với c_n nằm trong đoạn (x_n, α).

$$\Rightarrow x_{n+1} - \alpha = g\left(x_n\right) - g\left(\alpha\right) = \frac{1}{2}g''\left(c_n\right)\left(x_n - \alpha\right)^2$$ (vì $g(x^*) = 0$)

$$\Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{2}\left|g''\left(c_n\right)\right||x_n - \alpha|^2$$

$$\Rightarrow \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = \frac{1}{2}|g''(c_n)|$$

Bởi vì $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, c_n nằm trong đoạn (x_n, α) nên $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$. Hơn nữa ta lại có g'' là hàm liên tục, ta được:

$$\lim_{n\to\infty} g''(c_n) = g''(\alpha)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}|g''(c_n)| = \frac{1}{2}|g''(\alpha)|$$

Từ đó, ta thấy nếu g'(α) = 0 thì dãy x_n hội tụ với bậc ≥ 2, sự hội tụ sẽ nhanh hơn.

- **Mở rộng hơn:** Giả sử g(x) là hàm thỏa mãn: g(x), g'(x), $g^{(2)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ liên tục, có đạo hàm liên tục trên đoạn [a, b]. Hơn nữa, g(x) ∈ [a, b] với mọi x ∈ [a, b] và $|g'(x)| \le q < 1\ \forall x \in [a,b]$

  Nếu nghiệm α của phương trình x = g(x) thỏa mãn:

  $$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

  Thì với mọi x_0 ϵ [a, b], dãy x_n được định nghĩa là $x_n = g(x_{n-1})$ với n = 1, 2, 3, … sẽ hội tụ bậc n, với tốc độ hội tụ là $\frac{1}{n!}|g^{(n)}(\alpha)|$.

- **Kết luận:** Bằng cách tìm hàm g(x) thỏa mãn điều kiện mở rộng ở trên, ta sẽ thực hiện được phương pháp lặp đơn với số lần lặp ít hơn.