Raziskava k-matrčne dimenzije grafov

Benjamin Šenk, Soraja Sekavčnik

1 Opis problema

k-matrčna dimenzija je pomemben koncept v teoriji grafov. Za razliko od standardne matrične dimenzije grafa ta zahteva, da vsak par vozlišč reši vsaj k vozlišč. Tako se pojem k-matrične dimenzije ujema s standardno matrično dimenzijo za $k = 1$.

k-matrično dimenzijo grafa $G = (V, E)$ označimo z $dim_k(G)$ in je definirana kot velikost najmanjše množice $S \subset V(G)$, ki reši graf G in ji rečemo k-rešljiva množica.

Zanimajo naju lastnosti oziroma formule, ki jih z najinim programom lahko dobiva za k-matrično dimenzijo naslednjih grafov:

1. kartezični produkt dveh ciklov $C_a \square C_b$;
2. kartezični produkt poti $P_a \square P_b \square P_c$;
3. hiperkocka;
4. drevesa na n vozliščih.

2 Reševanje problema

Za reševanje problema sva spisala celoštevilski linearni program (CLP), ki je za parametre sprejel dimenzije grafa (za vsako od štirih tipov grafov se je to malo razlikovalo) ter parameter k_{value}, ki je določal katero k-matrično dimenzijo bo računal program.

Najprej sva funkcijo `MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)` ustvarila nov CLP, ki išče minimum funkcije. Nato sva ustavrila nove spremenljivke (binarne) in zastavila ciljno funkcijo, ki sešteje vrednosti binarnih spremenljivk za vsa vozlišča v grafu.

Z dodanim pogojem zahtevamo, da vsaki dve različni vozlišči rešita vsaj k vozlišč grafa. To sva naredila tako, da sva ustvarila novo spremnljivko `expr`, ki za vsak par (različnih) vozlišč v_a in v_b izračuna njuni razdalji do preostalih vozlišč v grafu, nato s funkcijo `bool()` ugotovi ali sta razdalji enaki (s funkcijo `int()` te logične vrednosti prtvorimo v 0 oziroma 1) ter vse te vrednosti sešteje. Pogoj tako zahteva, da je za vsak par vozlišč v grafu spremenljivka `expr` večja ali enaka k.

S funkcijo `solve()` poskusiva rešiti CLP in pridobiti množico S, če pa k-matrična dimenzija za tak graf ne obstaja, nama program vrne vrednosti `inf, None`.

3 Generiranje podatkov

Za enostavno generiranje grafov za izvajanje ekperimentov na najinem programu sva uporabila okolje SageMath, ki ima mnogo vgrajenih grafov, ki sva jih potrebovala. Do njih sva dostopala preko metod objekta `graphs`.

Za generiranje hiperkock oziroma n-kock sva uporabila funkcijo `CubeGraph(`n`)`. Poti in cikle dolžine n sva implementirala s funkcijama `PathGraph(`n`)` in `CycleGraph(`n`)`, nato pa jih združila v kartezične produkte ciklov/poti s funkcijo `cartesian_product`. Za ugotavljane lastnosti k-matričnih dimenzij dreves na n vozliščih sva uporabila iterator za generiranje dreves na n vozliščih `TreeIterator(`n`)`.

4 Eksperimenti

Najin CLP sva pognala na zgoraj opisanih grafih za različne velikosti (število vozlišč) ter vse možne parametre k. Rezultate sva zapisala v tabele, ki so priložene (zaradi prevelikih dimenzij niso vključene direktno v poročilo) ter poskusila ugotoviti formulo/vzorec v katerem se pojavijo k-matrične dimezije za opisane štiri grafe.

5 Ugotovitve

1. **Kartezični produkt dveh ciklov**

k-matrično dimenzijo kartezičnega produkta dveh ciklov sva opazovala glede na vrednost dolžine prvega cikla (t.j. vrednost parametra a), pri čemer sva prišla do naslednjih ugotovitev:

(a) **Kartezični produkt ciklov dolžin** $1 \times b$

Opazila sva, da se pojavita dva različna vzorca glede na parnost dolžine dugega cikla.
Če je parameter b lih, je $dim_k = k+1$ ter obstaja za $k \leq b-1$.
Če pa je parameter b sod, je $dim_k = k+1$ za $k \leq b/2-1$ in $dim_k = k+2$ za $b/2 \leq k \leq b-2$ ter obstaja za $k \leq b-2$. Ta vzorec velja za parameter $b \geq 3$.

(b) **Kartezični produkt ciklov dolžin** $2 \times b$

Problem spet razdelimo glede na parnost dolžine drugega cikla.
Če je parameter b sod, je $dim_1 = 3$, za $1 < k \leq b$ pa je $dim_k = 2k$. k-matrična dimenzija obstaja za $k \leq b$. Če je parameter b lih, pa je $dim_k = 2k$ za $k \leq \lfloor b/2 \rfloor$, $dim_k = 2k-1$ za $\lfloor b/2 \rfloor + 1 \leq k \leq b$ ter $dim_{b+1} = 2k-2$. k-matrična dimenzija obstaja za $k \leq b+1$. Ta vzorec velja za parameter $b \geq 5$.

(c) **Kartezični produkt ciklov dolžin** $3 \times b$

Pri parametru $a = 3$ postanejo stavri malo bolj kopleksne. Vredno se je osredotočiti na parameter $b \geq 5$. Opazimo, da za taka dva parametra a in b velja $dim_1 = 3$ ter $dim_2 = 4$. Za $k = 3$ in $k = 4$ pa je k-matrična dimenzija spet odvisna od parnosti parametra b:

$$dim_3(C_3 \square C_b) = \begin{cases} 6; & b \text{ je liho število;} \\ 5; & b \text{ je sodo število;} \end{cases}$$

$$dim_4(C_3 \square C_b) = \begin{cases} 7; & b \text{ je liho število;} \\ 6; & b \text{ je sodo število.} \end{cases}$$

Za $k \geq 5$ so vrednosti k-matrične dimenzije konstantne (glede na parameter $b \geq 5$), in sicer $dim_5 = 8$, nato pa se vrednosti k-matrične dimezije večajo v vzorcu $+1, +2, +1, +2, +1, +2, ...$ (t.j. $dim_6 = 9$, $dim_7 = 11$, $dim_8 = 12$, $dim_9 = 14$, $dim_{10} = 15, ...$). Anomalija pa se pojavi le pri $b = 6$ in $k = 10$, kjer je $dim_{10}(C_3 \Box C_6) = 16$ in ni enaka 15. k-matrične dimenzije obstajajo za $k \leq 2b$, le v primeru $b = 4$, je lahko k največ 6.

(d) **Kartezični produkt ciklov dolžin** $4 \times b$

V tem primeru se nam za ugotavljanje vzorca splača osredotočiti na $b \geq 4$. Za $k = 1$ in $k = 2$ dobimo naslednja predpisa:

$$dim_1(C_4 \Box C_b) = \begin{cases} 3; & b \text{ je liho število;} \\ 4; & b \text{ je sodo število;} \end{cases}$$

$$dim_2(C_4 \Box C_b) = \begin{cases} 4; & b \text{ je liho število;} \\ 5; & b \text{ je sodo število.} \end{cases}$$

Za $k \geq 4$ pa je primere smiselno razdeliti glede na parnost parametra k. Če je k sodo število, je $dim_k = 2k$ za vse parametre $b \geq 4$. Če je k liho število, pa velja naslednji predpis:

$$dim_k(C_4 \Box C_b) = \begin{cases} 2k; & b \text{ je liho število;} \\ 2k+1; & b \text{ je sodo število.} \end{cases}$$

Posebnost pa se pojavi pri $k = 3$, kjer je $dim_3 = 7$ za vse parametre b, razen za $b = 5$, kjer je $dim_3(C_4 \Box C_5) = 6$.
Za vse parametre b se da k-matrično dimezijo izračunati za $k \leq 2b$, le v primeru $b = 3$ se da k-matrično dimenzijo izračunati za $k \leq 8$.

2. **Kartezični produkt treh poti**

k-matrično dimenzijo kartezičnega produkta treh poti sva opazovala glede na vrednost dolžine prve poti (t.j. vrednost parametra a), pri čemer sva prišla do naslednjih ugotovitev:

(a) **Kartezični produkt poti dolžin** $1 \times b \times c$

Za kartezični produkt treh poti, kjer ima prva dolžino 1 je k-matrična dimenzija enaka $dim_k = 2k$. Maksimalen k za katerega lahko izračunamo k-matrično dimenzijo pa je $b + c - 2$.

(b) **Kartezični produkt poti dolžin** $2 \times b \times c$

Za kartezični produkt treh poti, kjer ima prva dolžino 2, je k-matrična dimenzija odvisna od parnosti parametra k in ustreza naslednji formuli:

$$dim_k(P_2 \Box P_b \Box P_c) = \begin{cases} 2k+1; & k \text{ je liho število;} \\ 2k; & k \text{ je sodo število.} \end{cases}$$

Maksimalen k za katerega lahko izračunamo k-matrično dimenzijo pa je $2(b+c-2)$.

(c) **Kartezični produkt poti dolžin** $3 \times b \times c$

Pri kartezičnem produktu treh poti, kjer ima prva dolžino 3 pa se v vzorcu k-matrične dimenzije pojavi skok (kot pri kartezičnem produktu ciklov), in sicer do skoka pride pri $2(b+c-1)$. Pred skokom je $dim_k = 3k$, po skoku pa se povečuje po vzorcu $+4, +2, +4, +2, ...$

Maksimalen k za katerega lahko izračunamo k-matrično dimenzijo pa je $3(b+c-2)$.

Iz ugotovitev za parameter $a = 1, 2, 3$ sva sklepala, da je maksimalen k za katerega lahko izračunamo k-matrično dimenzijo za kartezičen produkt poti $P_a \Box P_b \Box P_c$ enak $a(b+c-2)$.

3. **Hiperkocka**

Za n-kocko obstaja k-matrična dimenzija za $k \leq 2^{n-1}$, pri čemer je pri maksimalnem k (t.j. $k = 2^{n-1}$) k-matrična dimenzija enaka $dim_k = 2^n$. Pri $k = 1$ je $dim_k \leq n$. Kot vemo je število povezav v n-kocki enako $|V| = 2^n$, število povezav pa $|E| = 2^{n-1} \cdot n$, še dodatno pa velja, da za $k = |V|/2$ je $dim_k = |V|$.

4. **Drevesa na n vozliščih**

Pri drevesih na n vozliščih sva iskala maksimalne k-matrične dimenzije, ko se sprehodimo po vseh drevesih na n vozliščih. Za to obliko grafa se nam splača osredotočiti na $n \geq 4$, saj so vsa drevesa manjših dimenzij kar enaka poti iste dolžine. Iz pridobljenih podatkov lahko opazimo, da je $dim_1 = n-2$ in $dim_2 = n-1$. Maksimalni k, za katerega še dobimo podatke za k-matrično dimenzijo devesa na n vozliščih, je kar $n-1$ in sicer je $dim_{n-1} = n$.

Iz podatkov sva opazila še, da se pri vsakem k na začetku ponovi določeno število vrednosti in iz tega dobila naslednji formuli: $dim_{2k-1}(x) = 2k$ za $x = 2k, ..., 3k-1$ in $dim_{2k}(x) = 2k+1$ za $x = 2k+1, ...3k$.