

# Métodos numéricos y Optimización

## Trabajo Práctico 2

### Estudio numérico de péndulos simples y dobles

#### I. INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos desempeñan un papel importante en la resolución de ecuaciones y sistemas complejos de diversas ramas de la ciencia e ingeniería. Los métodos numéricos son herramientas indispensables en física para analizar y comprender cómo se comportan los sistemas dinámicos. En específico, nos queremos enfocar en dos sistemas particulares: El péndulo simple y el péndulo doble. El movimiento del péndulo simple está definido por una ecuación diferencial de segundo orden y es un problema muy estudiado en la física por su capacidad para describir fenómenos complejos. Por su parte el péndulo doble es un sistema más complejo que consiste en enganchar a la masa del primer péndulo un segundo péndulo, de ahí el nombre. El movimiento del sistema está descrito por un sistema de ecuaciones de segundo orden que añade un mayor grado de dificultad a la hora de la resolución del sistema.

Para analizar estos sistemas utilizaremos distintos métodos numéricos como el método de Euler y el de Runge-Kutta para resolver las ecuaciones. También observaremos cómo cambian las soluciones obtenidas según varían las condiciones iniciales y los pasos temporales para comprender mejor las limitaciones y ventajas de cada enfoque numérico en la resolución de estos sistemas.

#### II. MÉTODOS NUMÉRICOS A UTILIZAR

Para resolver los problemas utilizaremos cuatro métodos numéricos, tres aplicaciones del método de Euler y el método de Runge-Kutta.

##### A. Método de Euler

El más simple de los métodos para resolver un problema de valor inicial.

###### 1. Idea informal del método

Considere el problema de calcular la pendiente de una curva desconocida que satisface una cierta ecuación diferencial y un punto de inicio de la curva. A través de la ecuación diferencial se puede determinar la pendiente de la recta tangente en el punto inicial. Luego al avanzar un pequeño tramo por esta tangente se obtiene un nuevo punto que asumo

esta sobre la curva, vuelvo a calcular la pendiente y continuó repitiendo el procedimiento. Al final me quedará una curva poligonal que aproxima a la curva original.

## 2. Procedimiento del método

Dado el problema de valores iniciales

$$\{ \dot{y} = f(t, y(t)), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha \}$$

Busco una aproximación continua  $y(t)$  en los puntos grilla  $t_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Siendo  $h$  un step size fijo definido de la forma  $h = \frac{b-a}{n}$

Por taylor

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y'(\varepsilon_i)$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2 y''(\varepsilon_i)}{2}$$

Defino  $w_i = y(t_i)$  y el método queda

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \end{cases}$$

## 3. Error del método.

El error del método viene dado de la forma

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L} (e^{L(t_i-a)} - 1)$$

con  $M/|y''(t)| \leq M \forall t \in [a, b]$

Este error depende linealmente de  $h$

## 4. Estabilidad del método

**Euler explícito:**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_{t+1} \\ w_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_t \\ w_t \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_t \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_t \\ w_t \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_t \\ w_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & h \\ \frac{-g}{l} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_t \\ w_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1 + h\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_2 = 1 - h\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Como  $h$  siempre es positivo y la raíz siempre da un valor real positivo,  $\lambda_1$  siempre va a ser mayor a 1 por ende siempre es inestable.

### Euler semi-explicito:

$$\omega_{t+1} = h * f(\theta_t) = \omega_t - w_0^2 * h * \theta_t$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + h * \omega_{t+1} = \theta_t + h * \omega_t + h^2 * f(\theta_t) = h * \omega_t + (1 - h^2 * w_0^2)\theta_t$$

$$\lambda^2 - \lambda(2 - h^2 * w_0^2) + 1 = 0$$

Teniendo en cuenta que  $\lambda_1 < 1$

$$0 < h < 2/w_0$$

Por ende, cuando  $h$  está dentro de los parámetros, el método es estable.

## B. Método de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son una serie de métodos numéricos muy usados en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales debido a su precisión y estabilidad. De los métodos de Runge-Kutta nos interesa el método de orden 4 (RK4).

### 1. Explicación informal del método

La idea principal detrás del método de Runge-Kutta está en que en vez de tomar la pendiente de un solo punto como lo hacíamos en Euler, RK4 divide el intervalo en pasos pequeños y estima la pendiente en diferentes puntos de cada paso, luego estima como cambia la ecuación en ese paso en particular.

### 2. Procedimiento

Son una especialización de los métodos numéricos a un paso. Siendo

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha \end{cases}$$

el método de RK4 queda

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ k_1 = hf(t_i, w_i) \\ k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3) \end{cases}$$

### III. PENDULO SIMPLE

#### A. Problema a resolver

El problema de péndulo simple a resolver en este trabajo es el siguiente;

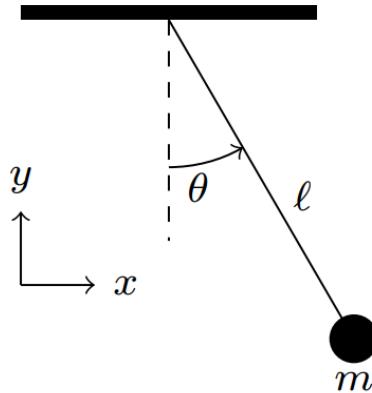


Figura 1: Esquema de un péndulo simple. El origen de coordenadas se encuentra en el punto de agarre.

Un péndulo simple está compuesto por una partícula de masa  $m$  sujetada a un punto de agarre por una vara sin masa de largo  $\ell$  y bajo la acción de la gravedad. La figura 1 muestra un diagrama del sistema. La gravedad tiene aceleración  $g$ . Tomando los ejes de coordenadas que se usan en la figura y utilizando el hecho de que la longitud de la vara es fija, el vector posición de la partícula  $r$  puede escribirse como

$$r = (\ell \sin \theta(t), \ell \cos \theta(t))$$

La dinámica del péndulo está descrita por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\theta} + (w_0)^2 \sin \theta = 0$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La energía total del sistema viene dada por

$$E = T + V$$

donde

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \theta^2$$

es la energía cinética, y

$$V = -mgl \cos \theta + mgl$$

es la energía potencial. La energía total del sistema se conserva en el tiempo. El valor de E es siempre el mismo  $\forall t$ . Los que van fluctuando dependiendo de t son V y T.

## B. Linealización del sistema

Partiendo de

$$\ddot{\theta} + (\omega_0)^2 \sin(\theta) = 0$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

podemos definir

$$\dot{\theta} = w$$

$$\dot{w} = \frac{g}{l} \sin(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} = \bar{F}(\theta, w) \quad (\theta, w) = \bar{x}$$

Los puntos de equilibrio de este sistema se obtienen haciendo

$$\bar{F}(\theta, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi \dots$$

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}_0$  es punto de equilibrio

$$\bar{F}(\bar{x}) \approx D\bar{F}(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

$$\dot{\bar{x}} = D\bar{F}(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

Particularmente este sistema tiene un punto de equilibrio estable en  $\theta = 0$ . La existencia de este punto de equilibrio nos permite hacer una expansión de  $\sin \theta$  alrededor de  $\theta = 0$ . A primer orden está toma la forma

$$\sin \theta \approx \theta$$

Esta aproximación y su aplicación solo sirven cuando  $\theta$  está cerca del 0, por eso se refiere a esta aproximación como una de pequeñas oscilaciones. Usandola obtengo que

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix}$$

que puedo escribir como

$$\dot{\theta} = w$$

$$\frac{-g}{l} \theta = \dot{w}$$

para sacar los autovectores de la matriz cálculo

$$(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

y obtengo que

$$\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\sqrt{\frac{g}{l}}A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \sqrt{\frac{g}{l}}B \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Uso mis condiciones iniciales para obtener A y B

$$\theta(0) = A \cos(0)$$

$$\dot{\theta}(0) = B \cos(0) \sqrt{\frac{g}{l}}$$

y obtengo

$$A = \theta_0$$

$$B \sqrt{\frac{g}{l}} = \dot{\theta}_0$$

## IV. PÉNDULO DOBLE

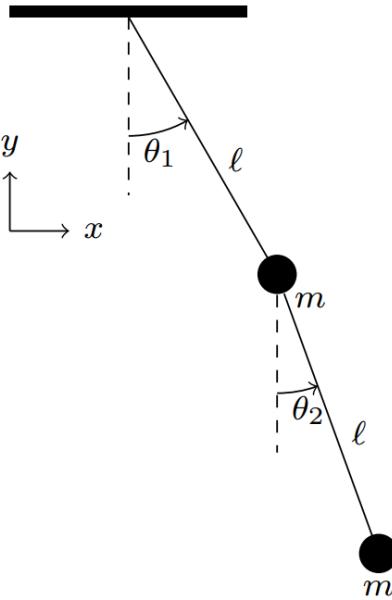


Figura 2: Esquema de un péndulo doble. El origen de coordenadas se encuentra en el punto de agarre.

El péndulo doble está compuesto por dos péndulos simples sujetos de la forma que se ve en la figura 2. Notar que el ángulo  $\theta_2$  está medido desde la vertical, se considera que las longitudes y masas de cada péndulo son iguales. Bajo esta elección de coordenadas, la posición de cada partícula puede describirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (l \sin \theta_1(t), l \cos \theta_1(t)) \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + (l \sin \theta_2(t), l \cos \theta_2(t)) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de las masas toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{-w_0^2(2 \sin(\theta_1) - \cos(\Delta) \sin(\theta_2)) - \sin(\Delta)(\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_1)^2)}{2 - \cos^2(\Delta)} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{-w_0^2(2 \sin(\theta_2) - 2 \cos(\Delta) \sin(\theta_1)) - \sin(\Delta)(\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_2)^2)}{2 - \cos^2(\Delta)} \end{aligned}$$

donde  $\Delta = \theta_1 - \theta_2$ . La dinámica del sistema exhibe comportamientos caóticos.

## V. OBJETIVOS

El objetivo del trabajo es estudiar la estabilidad y convergencia de los distintos métodos numéricos y la dinámica de los distintos sistemas físicos. Habrá que resolver las ecuaciones de los péndulos simples y dobles, y analizar el comportamiento de sus soluciones y de los métodos numéricos. Se deben probar distintas condiciones iniciales y pasos temporales.

## **A. Péndulo Simple**

Se estudiará las trayectorias obtenidas así como la evolución de E, T y V. Se resolverá utilizando distintas condiciones iniciales, todas con  $\theta'(0) = 0$ , pero con distinto  $\theta(0) = 0$ . Para el análisis usaremos los métodos de euler explícito, euler semi-implícito y RK4.

Compararemos los distintos resultados con lo obtenido de la resolución analítica del sistema.

## **B. Péndulo Doble**

Usaremos el método de RK4 para estudiar las trayectorias del sistema. Con los resultados intentaremos distinguir distintos tipos de trayectorias, veremos cómo varían estas si cambian las condiciones iniciales y observaremos cómo reacciona el sistema caótico a estos cambios.

# **VI. APLICANDO LOS MÉTODOS AL PROBLEMA**

## **A. Péndulo simple**

### **1. Euler explícito**

Para conseguir las ecuaciones del sistema usando el método de euler explícito. Usamos las ecuaciones,

$$\omega_{t+1} = \omega_t + hf(\theta_t)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + h\omega_t$$

### **2. Euler semi-implícito**

Para el método de semi-explicito usamos las ecuaciones,

$$\omega_{t+1} = \omega_t + hf(\theta_{t+1})$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + h\omega_{t+1}$$

### **3. RK4**

Para el método de runge kutta 4 usamos las ecuaciones,

$$k_1 = hf(\theta_t)$$

$$k_2 = hf(\theta_t + 0.5k_1)$$

$$k_3 = hf(\theta_t + k_1)$$

$$k_4 = h f(\theta_t + k_3)$$

$$\omega_{t+1} = \omega_t + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)1/6$$

$$k_1 = h\omega_t$$

$$k_2 = h(\omega_t + 0.5k_1)$$

$$k_3 = h(\omega_t + 0.5k_2)$$

$$k_4 = h(\omega_t + k_3)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)1/6$$

con la condición inicial que  $w_0 = 0$  y  $\theta_0 = \text{ángulo en radianes}$ .

$$\text{Y deducimos que } f(\theta_t) = -\frac{g}{l} \sin\theta.$$

En términos de código para cada método, tras definir las condiciones iniciales usamos un for loop que va desde  $i = 1$  hasta  $i = \frac{\text{tiempo max}}{h} + 1$ . Por cada loop se resuelven los theta y omega usando el método designado. Y con estos se calcula la energía total, la energía cinética y potencial usando las fórmulas dadas.

## B. PÉNDULO DOBLE

Para el péndulo doble usamos las ecuaciones de f como,

$$f_1(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{-\omega_0^2(2\sin\theta_1 - \cos\Delta\sin\theta_2) - \sin\Delta(\omega_2^2 + \cos\Delta\omega_1^2)}{2 - \cos^2\Delta}$$

$$f_2(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{-\omega_0^2(2\sin\theta_2 - 2\cos\Delta\sin\theta_1) + \sin\Delta(\omega_1^2 + \cos\Delta\omega_2^2)}{2 - \cos^2\Delta}$$

Para estas ecuaciones le aplicamos solamente el método de runge kutta 4. Donde  $\omega_1$  se resuelve usando  $f_1$  y  $\omega_2$  con  $f_2$ .

## VII. PASO Y ÁNGULO INICIAL PÉNDULO SIMPLE

### A. Péndulo Simple

#### 1. Cambios en el paso

Ahora observaremos cómo cambia la aproximación de la trayectoria y la energía total según cambia el paso temporal para aplicar los métodos. En todas las aproximaciones usaremos un  $\theta_0$  pequeño para reducir el error que introduce el tomar  $\sin(\theta) \approx \theta$  ya que esto solo aplica cerca del 0. Se usará un  $\theta_0$  de  $6^\circ$  grados y se examinará tanto con  $0 \leq t \leq 20$  y  $0 \leq t \leq 60$  para poder ver mejor cómo trabajan los métodos al evaluar en intervalos chiquitos y como lo hacen entre más largo es el intervalo.

### a) Usando un paso de 0.1

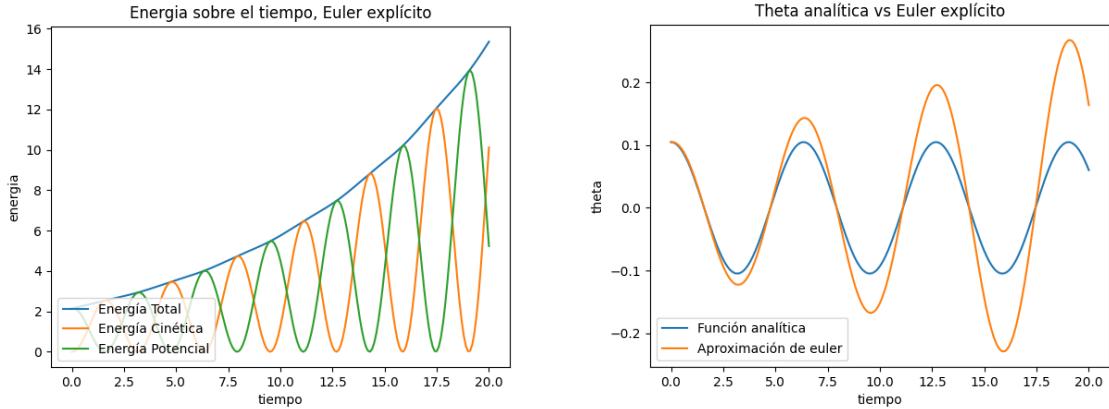


Figura 3: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.1 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

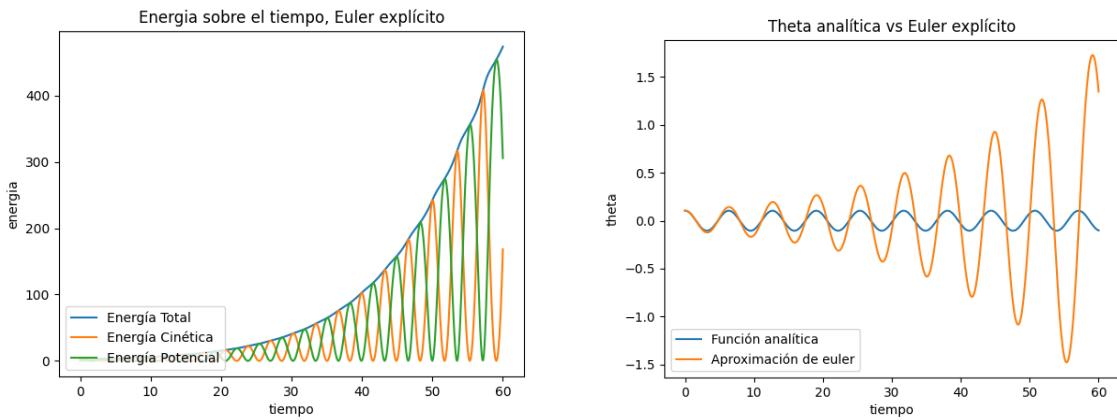


Figura 4: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.1 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

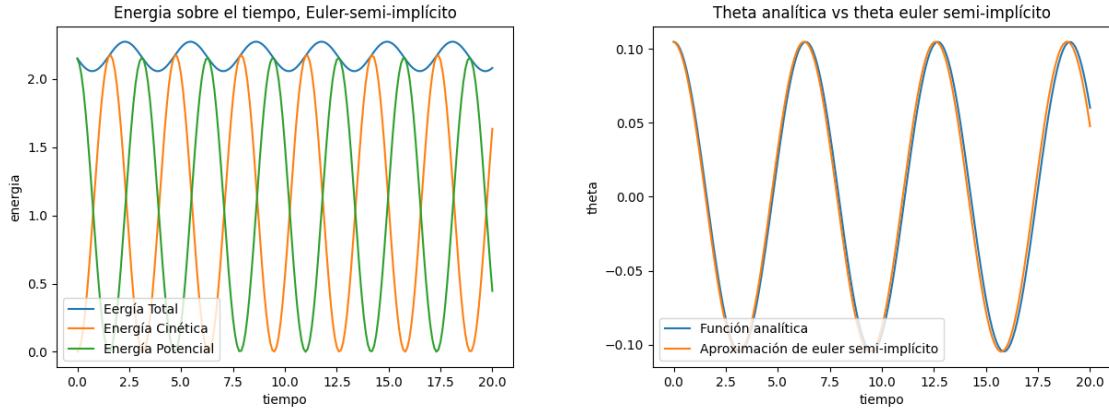


Figura 5: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.1 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

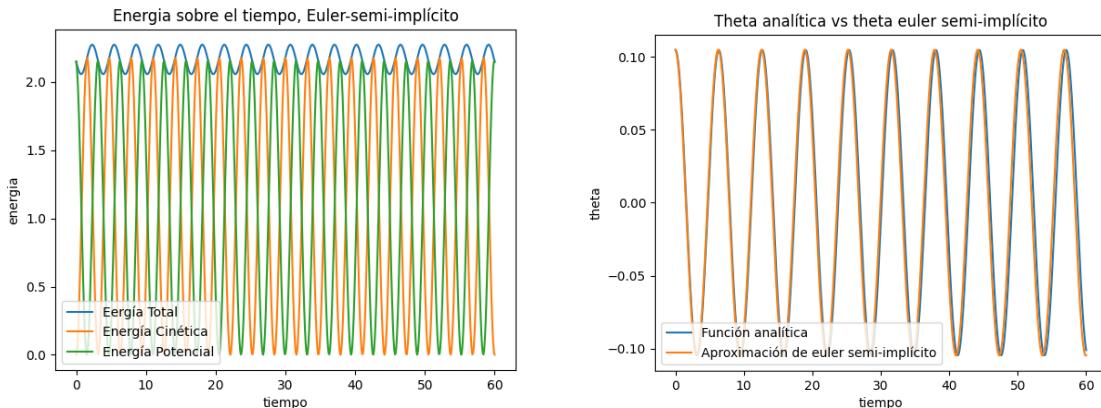


Figura 6: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.1 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

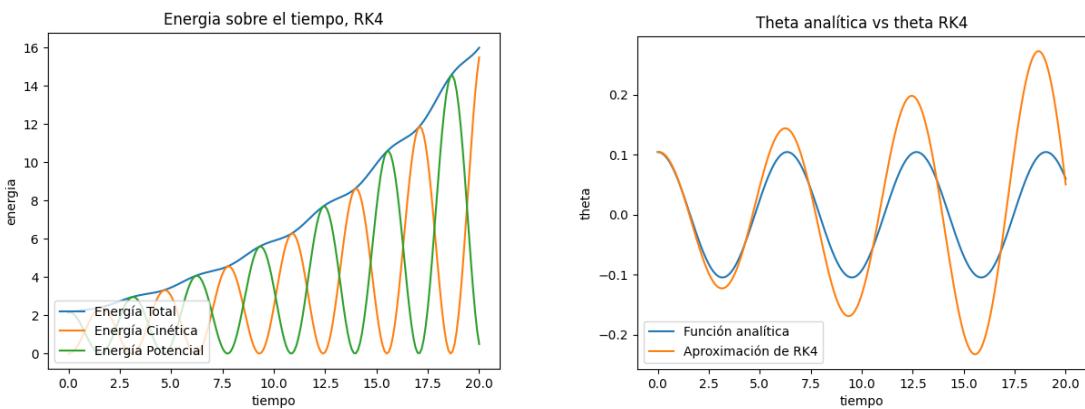


Figura 7: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.1 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de RK4.

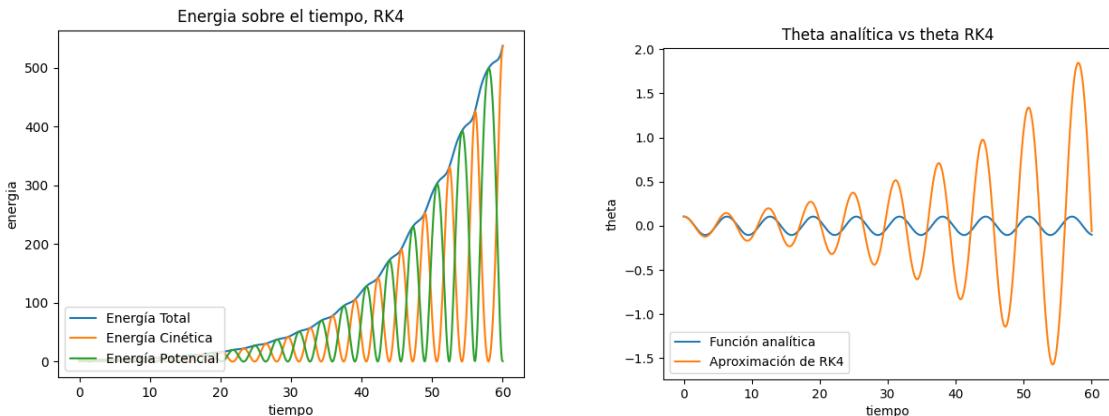


Figura 8: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.1 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de RK4.

Se puede observar de los métodos que solo uno de ellos aproxima bien con este paso temporal y ese es el de euler semi-implícito. Los otros dos ‘agregan’ energía al sistema, alterando las mediciones. Euler semi-implícito a pesar de no conseguir una energía constante consigue una energía fluctuante entre dos cotas que parecen no variar mucho a medida que aumenta el tiempo. Las aproximaciones a  $\theta$  de RK4 y euler explícito son bastante malas y se alejan muy rápidamente del valor de la solución analítica.

## 2. Usando 0.01

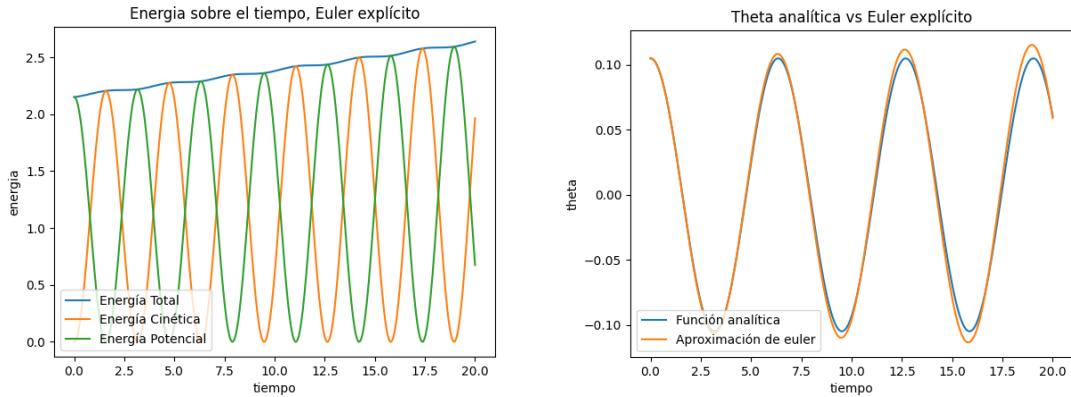


Figura 9: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.01 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

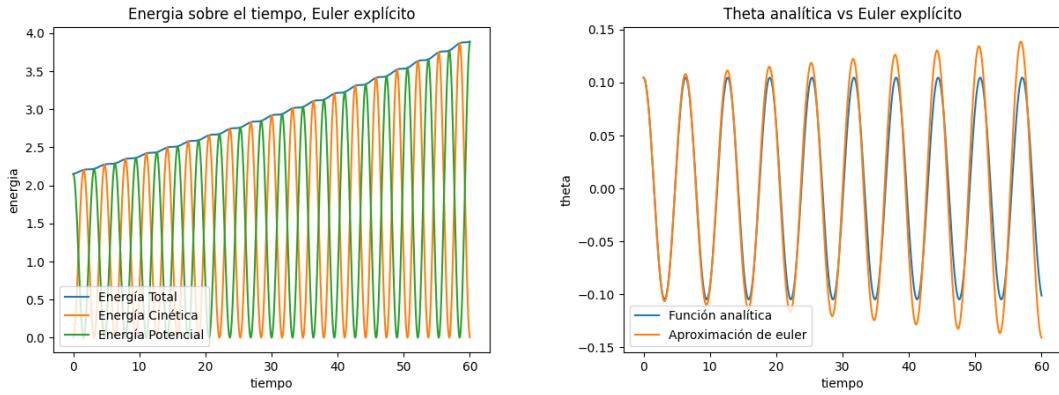


Figura 10: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.01 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

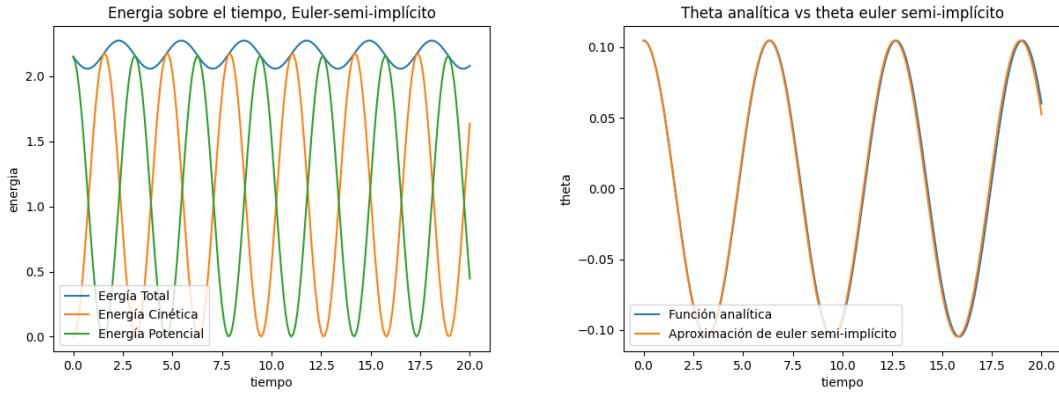


Figura 11: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.01 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

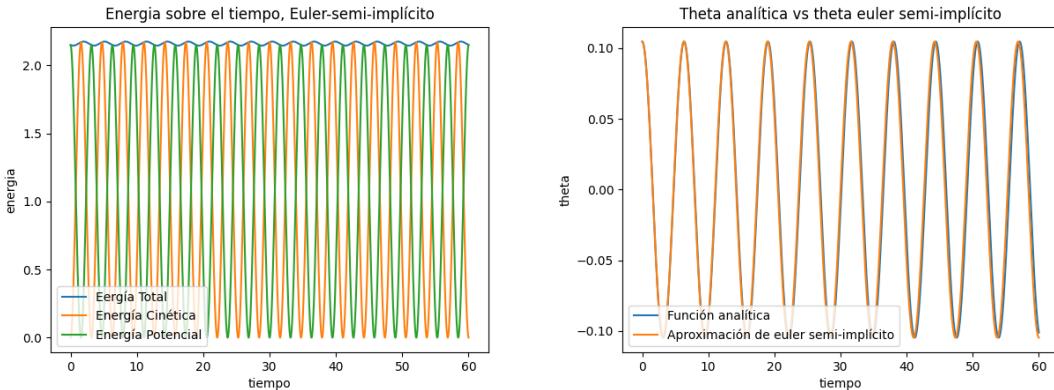


Figura 12: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.01 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

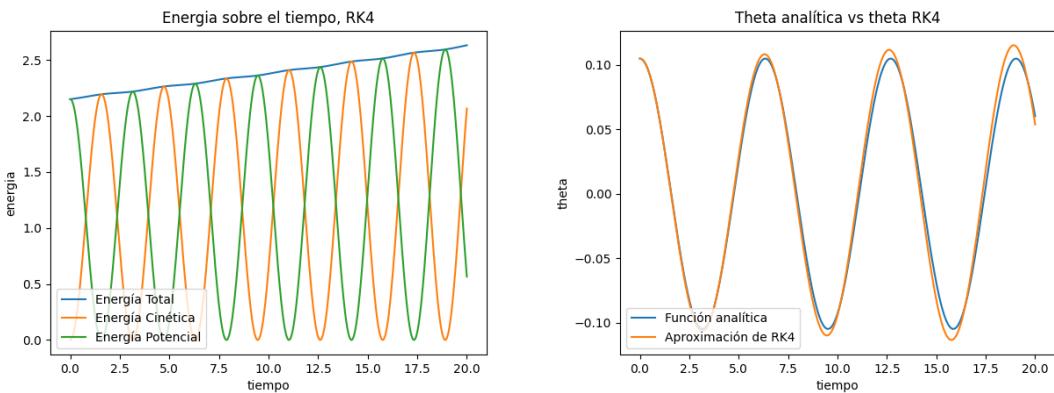


Figura 13: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.01 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de RK4.

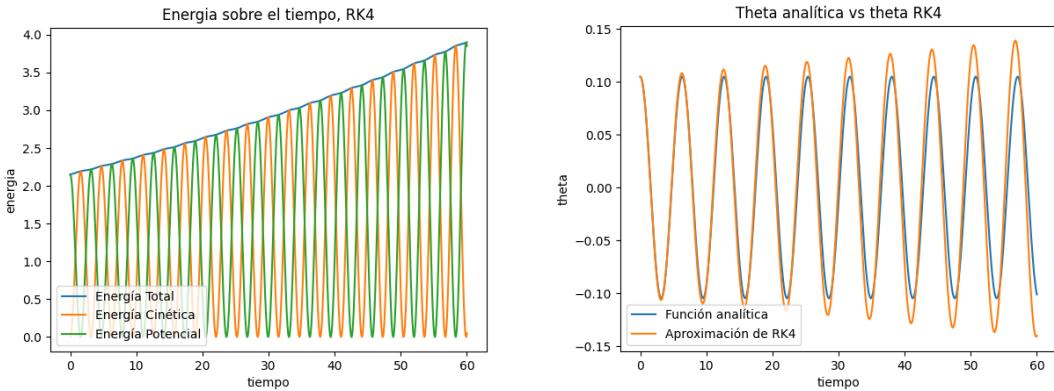


Figura 14: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.01 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de RK4.

Usando 0.01 se nota una gran mejoría tanto en RK4 como en euler explícito en su aproximación sobre la energía y  $\theta$ . Euler implícito continúa siendo la que mejor aproximación tiene.

### 3. Usando 0.001

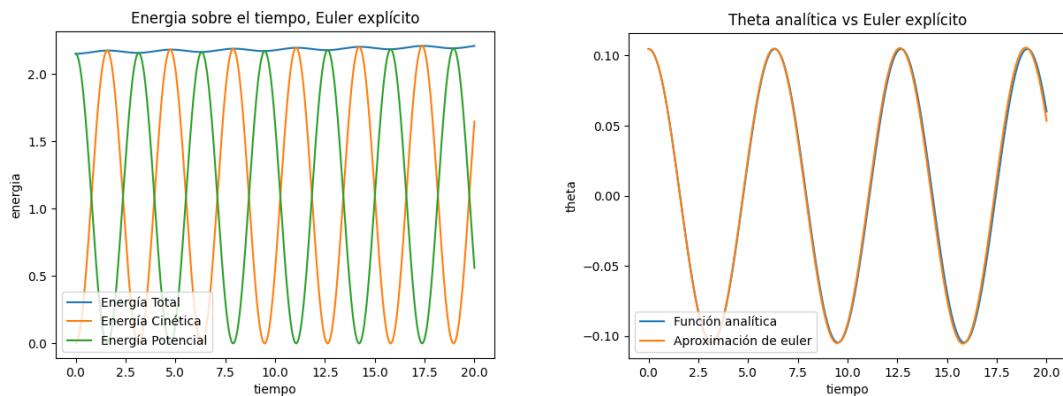


Figura 15: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.001 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

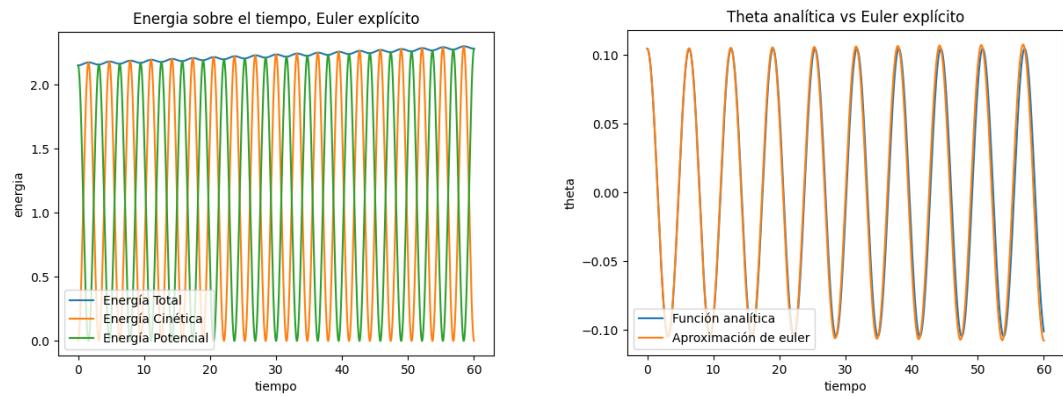


Figura 16: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.001 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

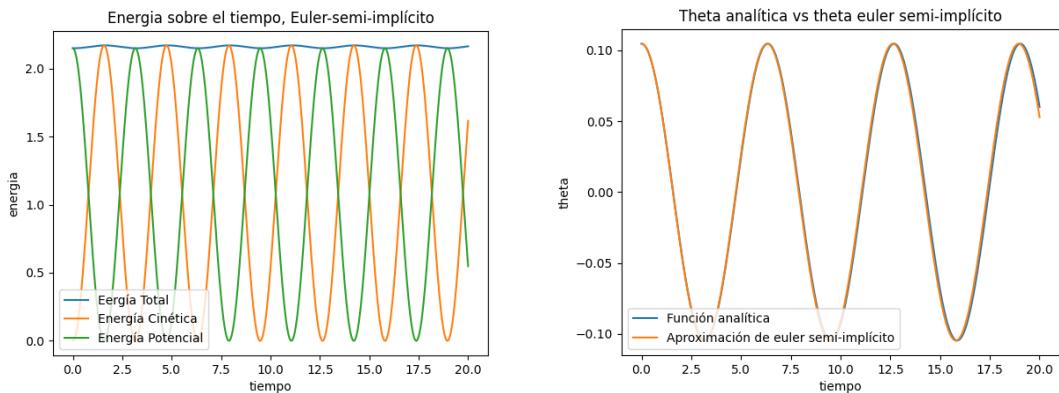


Figura 17: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.001 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

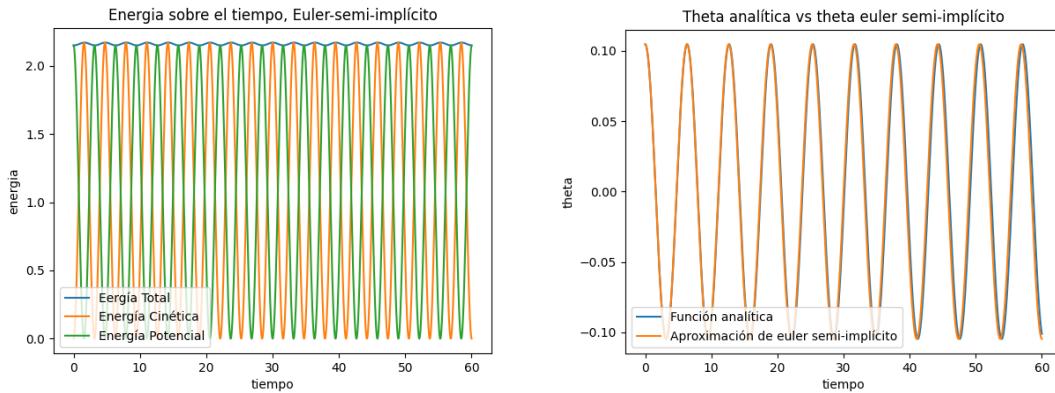


Figura 18: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.001 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

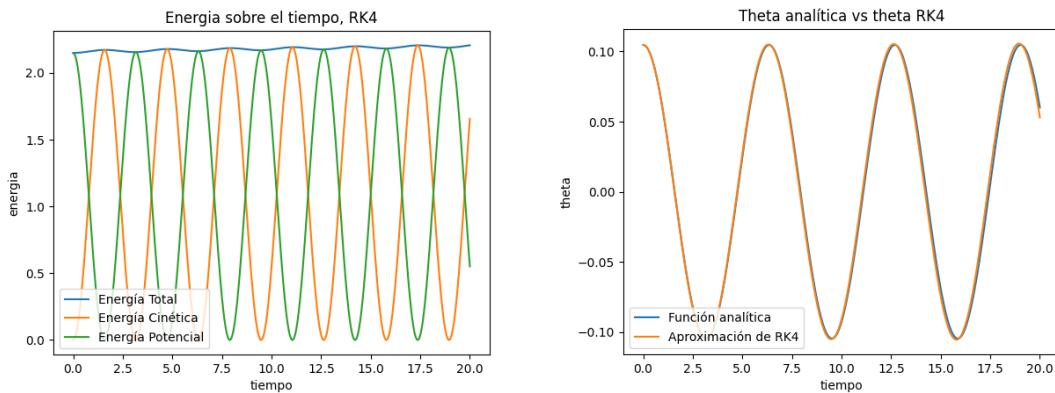


Figura 19: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.001 con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de RK4.

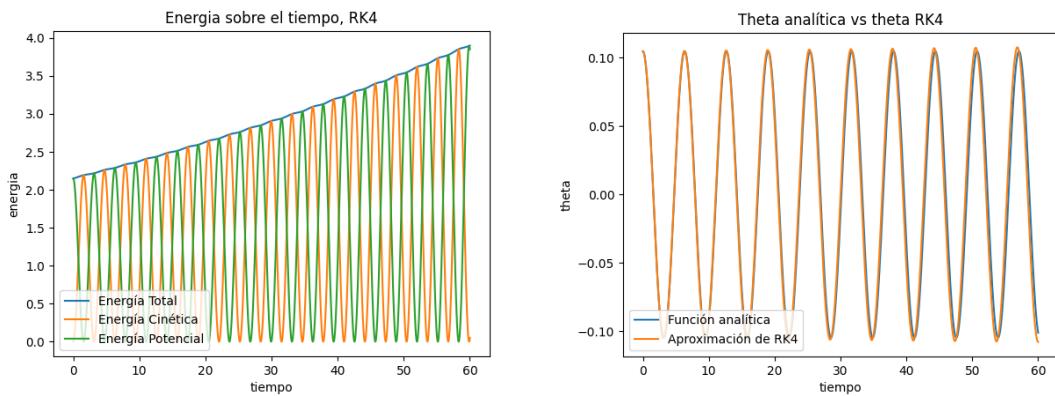


Figura 20: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de 0.001 con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de RK4.

Una notable mejora en todos los métodos. RK4 sigue con un notable aumento de energía al examinar en un grán intervalo pero al observar como varía la  $\theta$  en el tiempo vemos que casi no cambia.

#### 4. Usando 0.0001

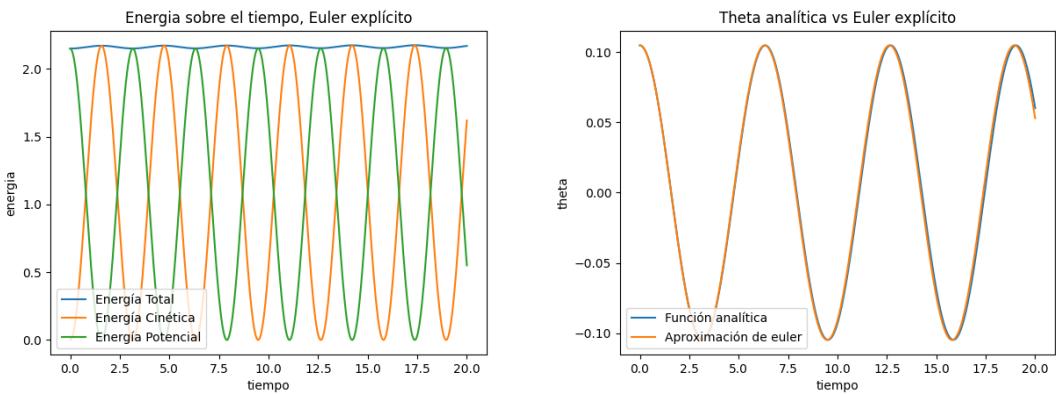


Figura 21: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de  $0.0001$  con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

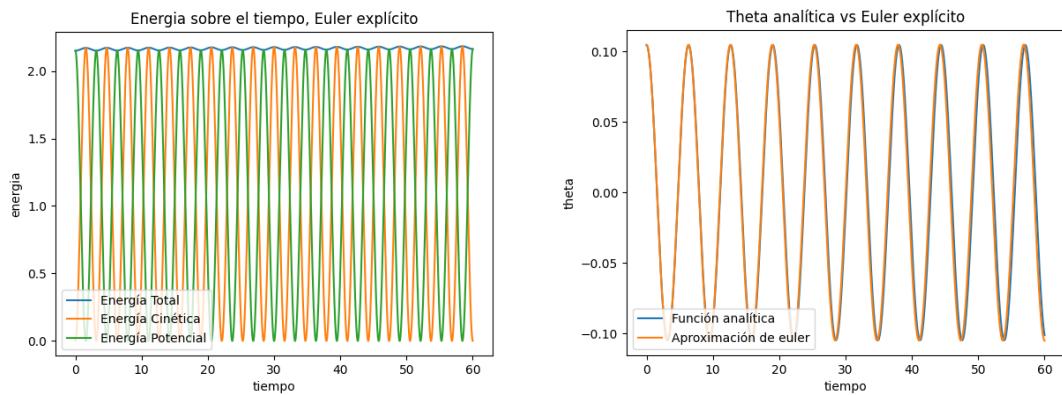


Figura 22: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de  $0.0001$  con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler explícito.

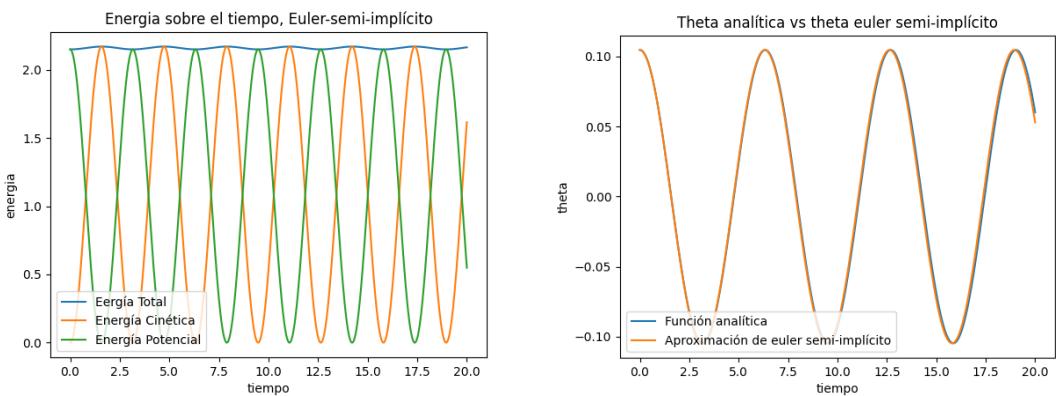


Figura 23: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de  $0.0001$  con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

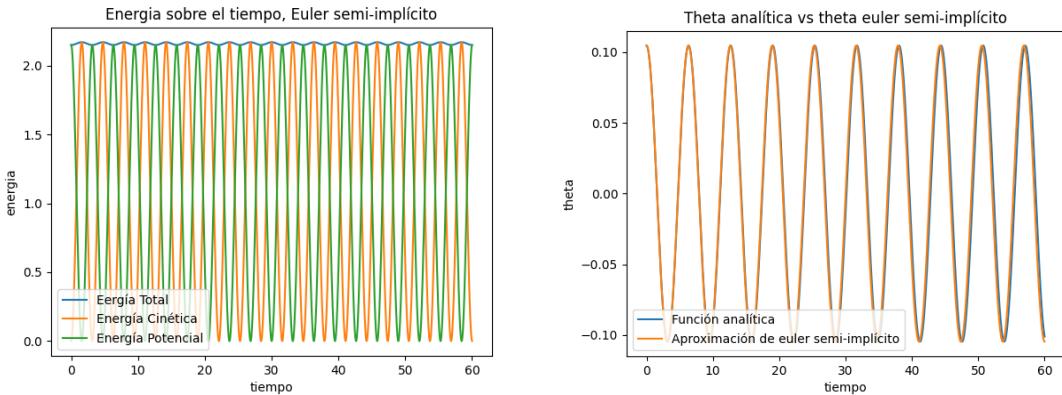


Figura 24: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de  $0.001$  con  $0 \leq t \leq 60$  al aproximar usando el método de Euler semi-implícito.

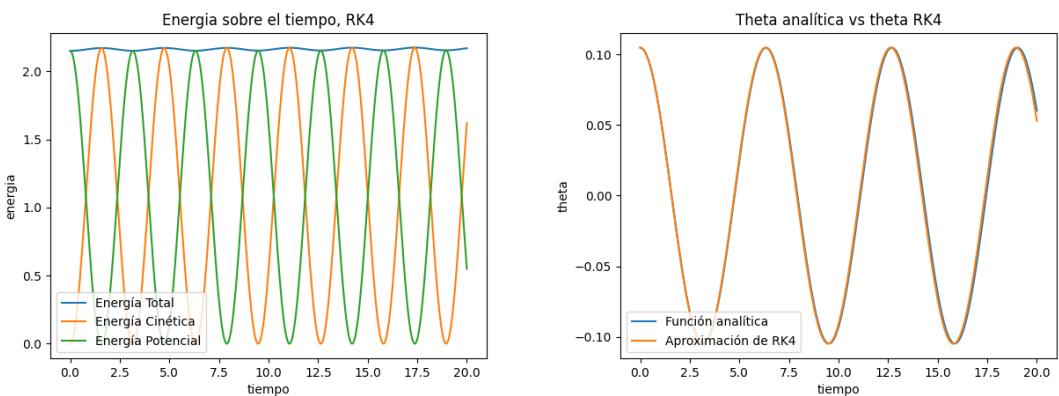


Figura 25: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de  $0.0001$  con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de RK4.

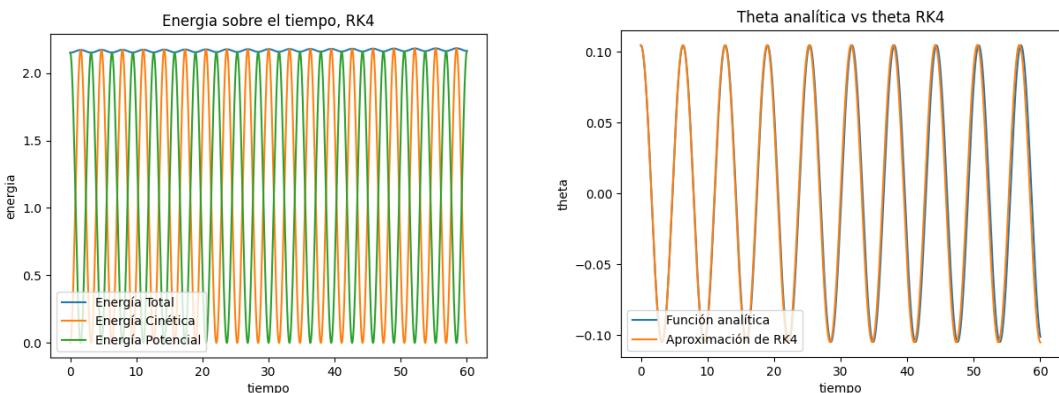


Figura 26: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  usando un paso temporal de  $0.001$  con  $0 \leq t \leq 20$  al aproximar usando el método de RK4.

Con  $0.0001$  todos los métodos aproximan muy bien la energía. El cambio mas grande se nota en la energía entre RK4 con  $0.001$  y  $0.0001$ . Las aproximaciones de  $\theta$  de los tres métodos se ven muy precisas y casi sin variación.

## B. Cambios en el ángulo

Para ver cómo incide el  $\theta_0$  en las aproximaciones del método trabajaremos con un  $h$  fijo de 0.0001, con motivo de reducir el error insertado por el paso temporal lo más posible.

### 1. Ángulos chicos

Se considerarán ángulos chicos a ángulos menores a  $10^\circ$  grados. Para este análisis podemos observar a las figuras 21, 21, 23, 24, 25 y 26 ya que fueron figuras que hicimos con un  $h$  de 0.0001 y un  $\theta_0 = 6$ . Estas aproximaciones son muy buenas para  $\theta(t)$ .

### 2. Ángulos medianos

Se considerará un ángulos medianos a los ángulos que estén entre  $10^\circ$  grados y  $60^\circ$  grados. El intervalo del análisis será con  $0 \leq t \leq 30$  con un  $\theta_0 = 30$ .

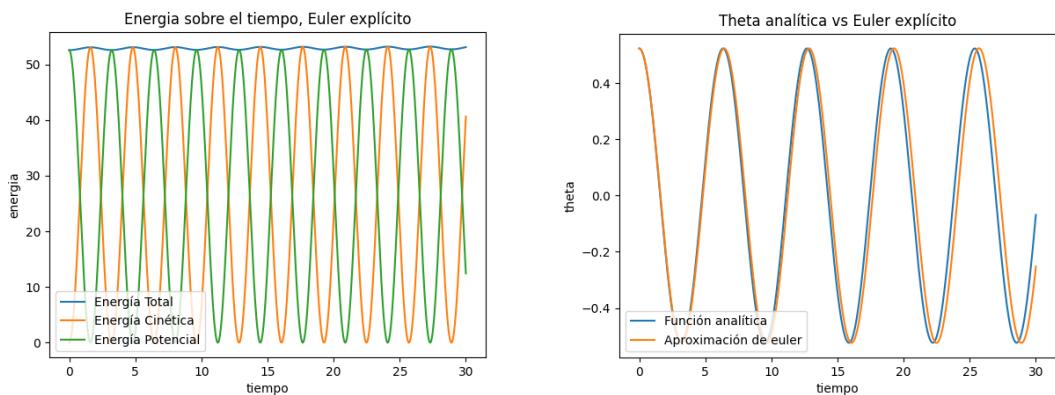


Figura 27: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  al usar euler explícito

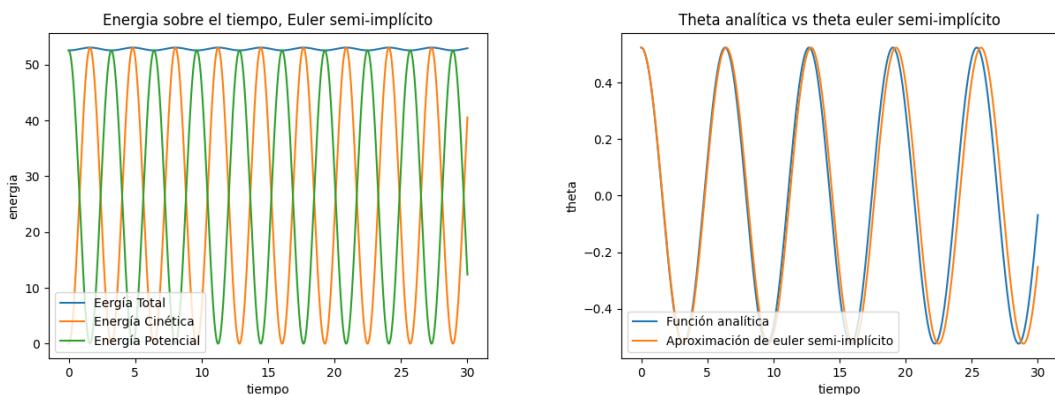


Figura 28: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  al usar euler semi-implícito.

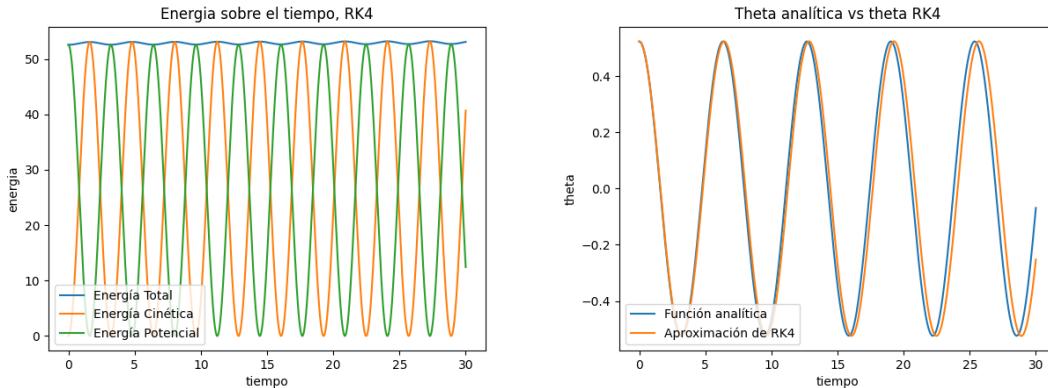


Figura 29: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  al usar RK4.

Al empezar a usar  $\theta_0$  más grandes se empieza a notar un desfase entre  $\theta(t)$  y la aproximación. Mientras más crece  $t$ , más aumenta el periodo de la aproximación de  $\theta(t)$  independientemente del método. Esto se debe a lo ya mencionado anteriormente de que la solución analítica que tenemos del sistema para hacer las comparaciones es una de ‘pequeñas oscilaciones y solo se comporta bien con  $\theta_0 \approx 0$ . No hay cambios notables en la energía respecto a cuando usamos ángulos chicos.

### 3. Ángulos grandes

Se considerará ángulos grandes a los angulos mayores a  $60^\circ$  grados y menores a  $180^\circ$  grados.

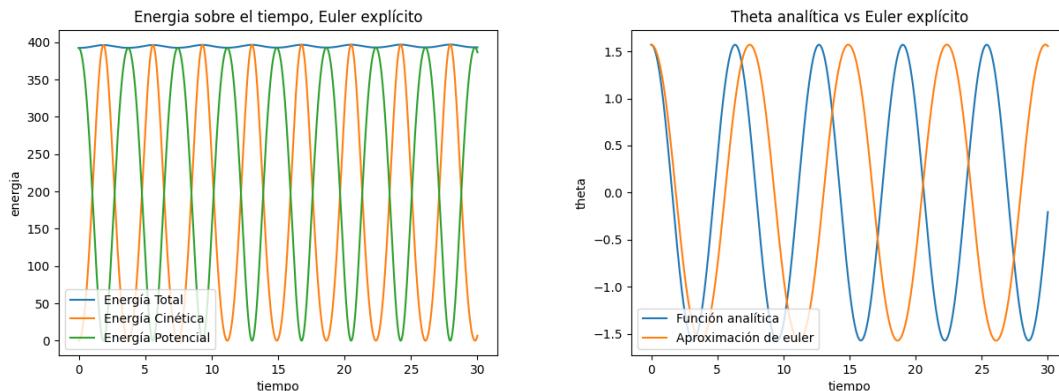


Figura 30: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  al usar euler explícito.

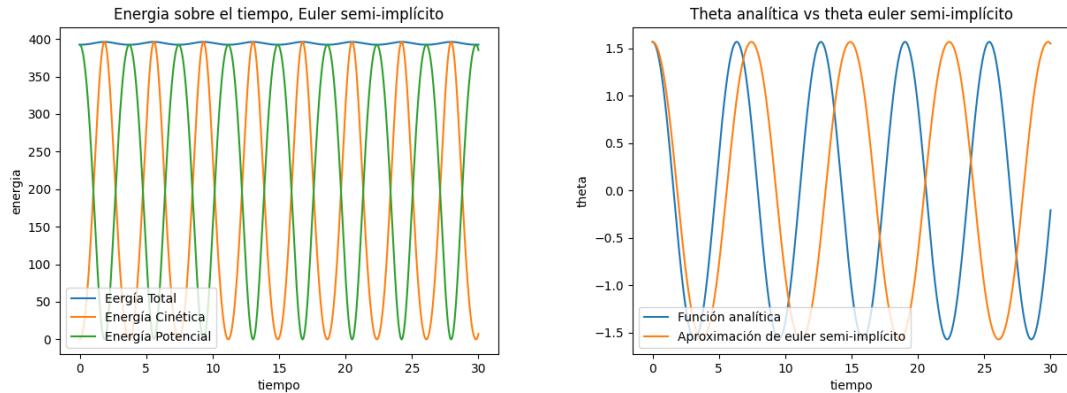


Figura 31: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  al usar euler semi-implícito.

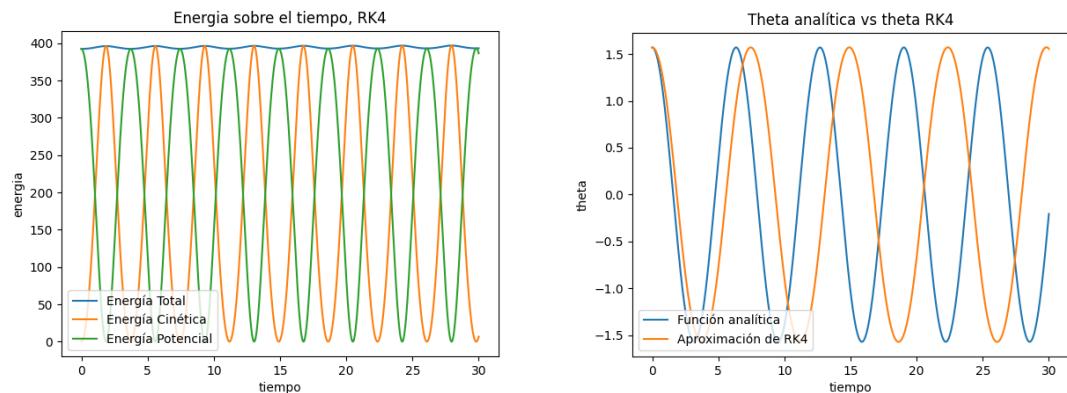


Figura 32: Evolución de la energía y  $\theta(t)$  al usar RK4.

El desfase entre  $\theta(t)$  analítico y el aproximado ya es muy grande y se aleja muy rápido de la medida real, no hay cambios significativos en la energía, las ondas son diferentes pero se siguen manteniendo relativamente constantes a través del tiempo

### C. Conclusión sobre el paso y el $\theta_0$

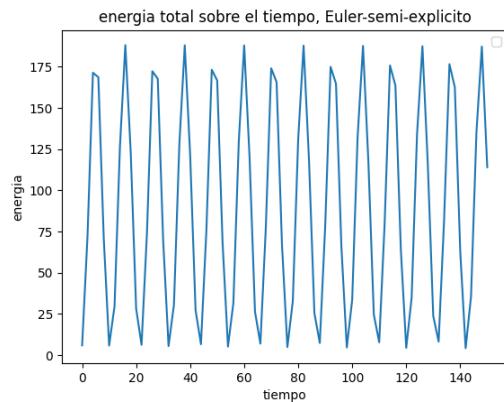
De los gráficos obtenidos se pueden extraer algunas conclusiones. Se ha podido observar que la elección de un paso adecuado tiene una gran influencia en cuanto a la correcta aproximación de los métodos de euler explícito y RK4. El Euler implícito mostró poca variación respecto al cambio de  $h$  y nunca la energía total se alejó de un valor bien aproximado una vez el paso temporal fue menor a 0.01. También cabe señalar que pasando  $h = 0.01$  los  $\theta(t)$  aproxiaron muy bien y no sufrieron grandes cambios entre  $h = 0.01$ ,  $h = 0.001$  y  $h = 0.0001$ . Por su parte elegir un  $\theta_0$  chiquito, mediano o grande tuvo un enorme impacto en las aproximaciones de  $\theta(t)$  según iba aumentando  $\theta_0$ .

Se puede concluir que una buena elección del  $h$  es importantísimo para una obtención de aproximaciones adecuadas, teniendo este más efecto sobre las aproximaciones de la energía total del sistema y estancándose la mejora sobre  $\theta(t)$  pasado un  $h$  de 0.01. Los cambios de  $\theta_0$  mostraron afectar poco a la energía total aproximada del sistema, pero demostraron cambiar abruptamente al  $\theta(t)$ , aumentando el periodo de oscilación de este de manera constante, con un incremento mayor a medida que  $\theta$  se aleja de 0.

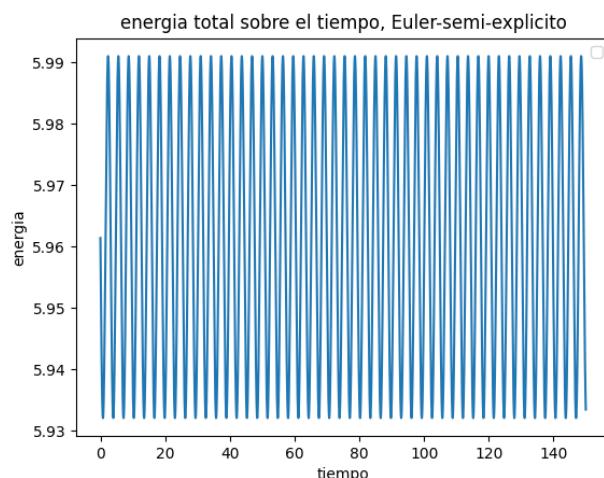
## VIII. CONVERGENCIA

Ya probamos analiticamente que el método explícito de euler es inestable implicando que la energía total se comporta de manera caótica a medida que el tiempo se hace más grande, sin importar del valor de  $h$ . Pero el método semi-implícito converge para los valores de  $h$  dentro del rango.

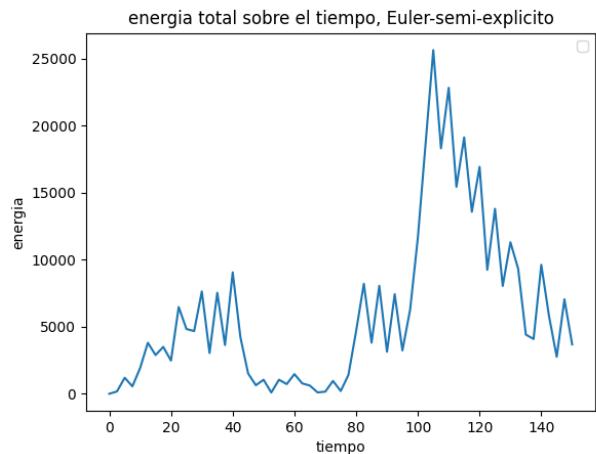
Energía vs tiempo con método semi-explicito.  $h = 2$ ,  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $l = 10$



Energía vs tiempo, euler semi-explicito.  $h = 0.01$ ,  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $l = 10$ ,  $t_{max} = 150$



Energía vs tiempo, euler semi-explicito.  $h = 2.5$ ,  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $l = 10$ ,  $t_{max} = 150$



Es notable que a medida que incrementa el  $h$ , la energía total oscila con una amplitud más grande. Pero como se ve en el último gráfico, cuando  $h$  se encuentra fuera del rango necesario para que el método converja. La energía total se comporta de manera caótica.

## IX. PÉNDULO DOBLE.

Al péndulo doble se lo resolvió usando el método de RK4. De analizar distintas trayectorias se puede observar como un cambio pequeño en las condiciones iniciales lleva a trayectorias muy diferentes, y que están no parecen tener relación entre sí.

Al sistema se le encontraron soluciones periódicas en los puntos de equilibrio, ya que en ellas el sistema no se mueve y por lo tanto es constante en el tiempo. Con ángulos muy pequeños también se pueden observar trayectorias quasi-periódicas, ya que el sistema está muy cerca del punto de equilibrio y se mueve muy poco respecto al tiempo. Un tercer tipo de solución periódica que se encontró es cuando los dos ángulos iniciales son idénticos, las dos masas son idénticas y la longitud de las barras también, ya que en estos casos el sistema actúa como un solo péndulo, es importante notar que este tipo de soluciones no es estable, ya que una ligera diferencia entre  $\theta_0$  y  $\theta_1$  volverá a hacer que el sistema se comporte como dos péndulos y recuperara el caos del sistema.

Los ejemplos de trayectorias se encontrarán adjuntos al trabajo, ya que no se pueden enviar animaciones con pdf.

## X. BIBLIOGRAFÍA

[https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_Euler](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler)

<https://www.geeksforgeeks.org/using-matplotlib-for-animations/>

[https://www.mathstools.com/section/main/Metodos\\_de\\_Runge\\_Kutta?lang=es](https://www.mathstools.com/section/main/Metodos_de_Runge_Kutta?lang=es)

[http://wmatem.eis.uva.es/~jesroj/matem1/Curso/Cap02\\_Esquema.pdf](http://wmatem.eis.uva.es/~jesroj/matem1/Curso/Cap02_Esquema.pdf)