

Versuch Nr. 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Alexandra Klein
alexandra.klein@tu-dortmund.de

Benjamin Brandt
benjamin.brandt@tu-dortmund.de

Durchführung: 06.01.2021

Abgabe: 11.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Effektiver Dämpfungswiderstand	3
2.2 Aperiodischer Grenzfall	3
2.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und Phase	4
2.4 Fehlerrechnung	5
3 Durchführung	5
3.1 Messdaten	6
4 Auswertung	7
4.1 a) Effektiver Dämpfungswiderstand	7
4.2 b) Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall	8
4.3 c) Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	9
4.4 d) Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	11
5 Diskussion	11
6 Anhang	14
Literatur	15

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll ein gedämpfter RLC-Schwingkreis untersucht werden. Ziel ist es seinen Dämpfungswiderstand sowie die Zeitabhängigkeit der Amplitude des Stroms zu bestimmen. Desweiteren soll der Dämpfungswiderstand im aperiodischen Grenzfall ermittelt werden. Daraufhin soll bei einem Serienresonanzkreis die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung, sowie schließlich die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Effektiver Dämpfungswiderstand

Um den effektiven Dämpfungswiderstand des RLC-Schwingkreises zu bestimmen wird die Spannung durch eine e-Funktion der Form

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-2\pi \cdot \mu \cdot t} \quad (1)$$

dargestellt, wobei die Relation

$$2\pi \cdot \mu = \frac{R}{2L} \quad (2)$$

genutzt wird. Gleichung (2) nach R aufgelöst liefert den effektiven Dämpfungswiderstand

$$R = 4\pi \cdot \mu \cdot L. \quad (3)$$

Die Abklingdauer T_{ex} ist die Zeit, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes abgenommen hat. Die Abklingdauer T_{ex} ist definiert als

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (4)$$

2.2 Aperiodischer Grenzfall

Ein besonderer Fall ist der Aperiodische Grenzfall. Er tritt ein wenn die Relation

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}$$

eintritt. Dann kommt keine Schwinung zustande, sondern die Amplitude der Spannung nähert sich monoton gegen null. Damit ergibt sich der Grenzwiderstand zu

$$R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}}. \quad (5)$$

2.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und Phase

Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung lässt sich mit Hilfe der Gleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t} \quad (6)$$

bestimmen. Durch Einsetzen der Relation $I = \frac{Q}{t}$ und $Q = U \cdot C$, wobei Q die Ladung und C die Kapazität des Kondensators bezeichnet, ergibt sich Gleichung (6) zu

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_0 e^{i\omega t} \quad (7)$$

Wenn nun der Lösungsansatz

$$U_c = \alpha(\omega) e^{i\omega t} \quad (8)$$

mit einer beliebigen komplexen Zahl $\alpha(\omega)$, wobei ω die Frequenz bezeichnet, in Gleichung (7) eingestzt wird, erhält man nach Ableiten und Kürzen des e-Terms, die Gleichung

$$-LC\omega^2 \alpha(\omega) + i\omega RC \alpha(\omega) + \alpha(\omega) = U_0. \quad (9)$$

Durch Auflösen nach $\alpha(\omega)$ und Erweitern mit dem komplex konjugierten des Nenner erhält man für $\alpha(\omega)$

$$\alpha(\omega) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (10)$$

Da U_c die Form $|\alpha(\omega)|e^{i\phi}$ hat, ist gerade $|U_c| = |\alpha(\omega)|$. Somit ergibt sich die Kondensatorspannung U_c abhängig von der Frequenz zu

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (11)$$

Die Kondensatorspannung erreicht ihr Maximum bei der sogenannten Resonanzfrequenz ω_{res} . Diese errechnet sich mit

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (12)$$

Desweiteren kann die Eigenschaft des komplexen Ansatz für U genutzt werden, um die Phase zu erhalten. Es ist dabei

$$\tan \phi(\omega) = \frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2},$$

womit sich die Phase ϕ zwischen Kondensator- und Erregerspannung zu

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (13)$$

ergibt.

2.4 Fehlerrechnung

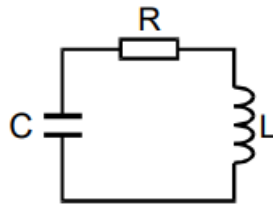
Sämtliche Fehler in diesem Protokoll werden mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt. Die Fehler lassen sich mit

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \quad (14)$$

berechnen.

3 Durchführung

Grundlegend besteht der Versuchsaufbau aus einem Schwingkreis mit einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule.



Der Schwingkreis ist mit einem Frequenzgenerator und einem Oszillographen verbunden. Im ersten Teil des Versuchs, der sich mit der Aufgabenstellung a) beschäftigt, wird der Widerstand $R_1 = (30.3 \pm 0.1)\Omega$ verwendet; der Kondensator hat eine Kapazität von $C = (5.0 \pm 0.02)\text{nF}$ und die Induktivität der Spule beträgt $L = (3.5 \pm 0.01)\text{mH}$. Der Frequenzgenerator regt den RLC-Kreis mit einer Rechteckspannung an, die hier $f = 242.9\text{Hz}$ beträgt.

Mit geeigneten Einstellungen am Oszillographen lassen sich so die Amplituden der Schwingung im zeitlichen Verlauf ablesen, woraus anschließend der effektive Dämpfungswiderstand zu bestimmen ist.

Im zweiten Versuchsteil wird dann anstelle von R_1 ein variabler Widerstand R verwendet; die vom Generator erzeugte Frequenz ändert sich nicht.

Der Widerstand wird jetzt solange langsam erhöht, bis auf dem Oszillographen keine Schwingung mehr dargestellt wird, sondern der charakteristische Verlauf des aperiodischen Grenzfalles zu erkennen ist.

Für den letzten Versuchsteil, der die Fragestellungen c) und d) beantworten soll, wird als Widerstand $R_2 = (271.6 \pm 0.2)\Omega$ verwendet. Außerdem wird der Schwingkreis nun mit einer Sinusfrequenz angeregt. Diese Frequenz wird schrittweise variiert. Auf dem Oszillographen wird neben der Schwingung des RLC-Kreises auch die Frequenz des Generators aufgetragen, so dass sich die Phase, die Phasenverschiebung sowie die beiden Amplituden ablesen lassen.

3.1 Messdaten

Tabelle 1: Teil a)

$t[s]$	$U[V]$
6	1.9
20	-1.3
34	0.8
46	-0.65
62	0.35
76	-0.3
88	0.2
102	-0.15
116	0.05
128	-0.1

Tabelle 2: Teil c) und d)

$f[kHZ]$	$\phi[\mu s]$	$\Delta\phi[\mu s]$	$A_s[V]$	$A_g[V]$
5.00	200	0	2.6	0.7
10.00	100	0	2.8	0.8
16.00	62	0.1	3.0	0.8
19.00	52	2	3.2	0.1
21.00	48	2	3.4	0.7
25.00	40	2	4.2	0.8
27.00	37	3	4.8	0.8
30.00	33	3	5.4	0.7
33.00	30	5	6.4	0.7
40.00	24	8	5.6	0.7
43.00	24	8	4.4	0.7
46.00	22	8	3.5	0.7
49.00	20	9	2.8	0.7
52.00	19	9	2.3	0.7
55.00	18	9	1.9	0.8
58.00	17	8	1.6	0.8
60.00	16	8	1.45	0.8

4 Auswertung

4.1 a) Effektiver Dämpfungswiderstand

Um den effektiven Dämpfungswiderstand zu bestimmen, werden die aufgenommenen Messwerte, der Spannung U und der Zeit aus Tabelle 1, in der Form (1) in ein Diagramm aufgetragen.

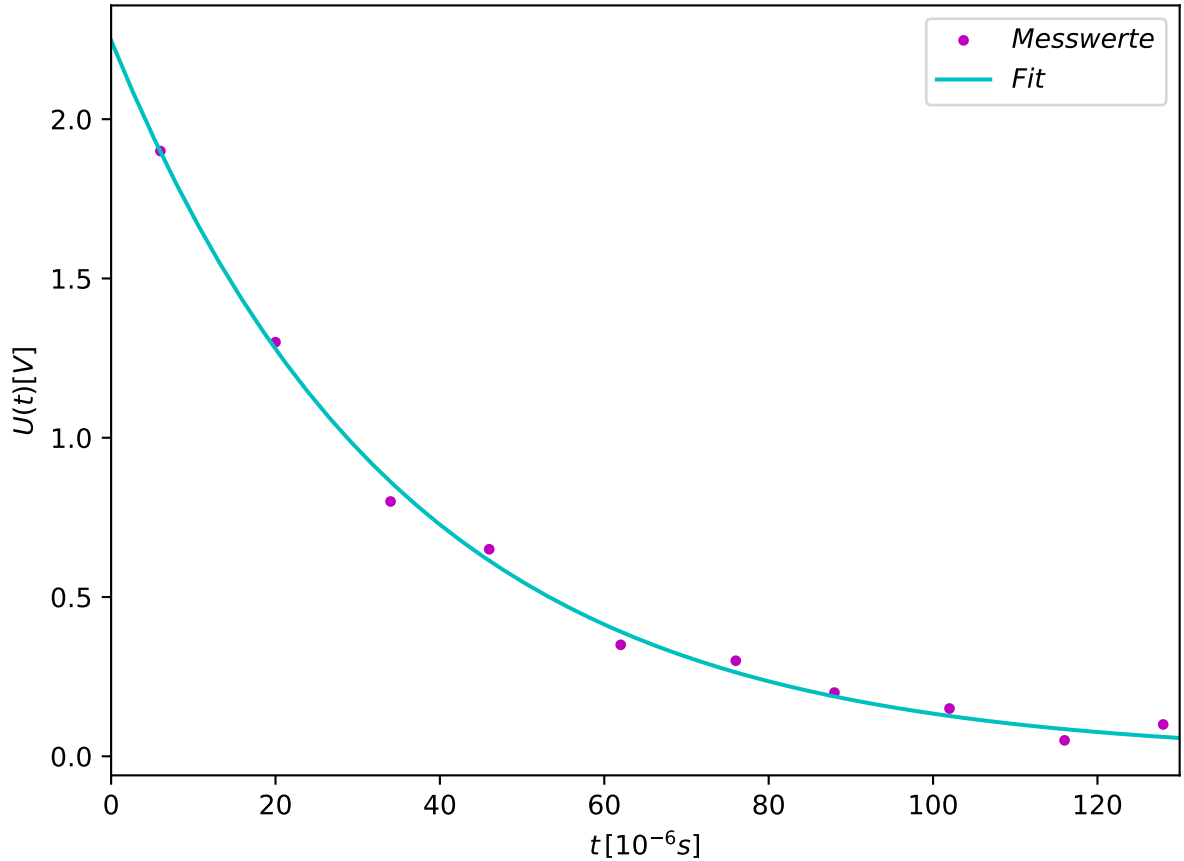


Abbildung 1: Gemessene Spannung nach der Zeit aufgetragen

Mit *Python* können dann die beiden unbekannten Größen U_0 und $2\pi \cdot \mu$ von (1) bestimmt werden, welche sich zu $U_0 = 2.25 \text{V}$ und $2\pi \cdot \mu = 0.03 \frac{\text{V}}{\text{H}}$ ergeben. Einsetzen in (3) liefert für den effektiven Dämpfungswiderstand

$$R = 4\pi \cdot \mu \cdot L = 98.7 \Omega.$$

Der Fehler berechnet sich mit (14) zu

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2} = 4\pi \cdot \mu \cdot \Delta L = 1.2 \cdot 10^{-12} \Omega, \quad (15)$$

so dass sich für den effektiven Widerstand $R = 98.7 \pm 1.2 \cdot 10^{-12} \Omega$ ergibt. Die Abklingdauer T_{ex} ist definiert als der Kehrwert von $2\pi \cdot \mu$ definiert und berechnet sich mit (4) zu

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi \cdot \mu} = 0.01s.$$

4.2 b) Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall

Im Versuch konnte der Widerstand $R_{ap} = 1.275 \text{ k}\Omega$ für den aperiodischen Grenzfall abgelesen werden. Der theoretische Wert lässt sich mit (5) zu

$$R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = 1673.32 \Omega$$

berechnen. Was einer Abweichung von 23.8% des gemessenen Werts vom theoretischen Wert entspricht.

4.3 c) Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung ist durch Gleichung (7) gegeben. Um die Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz zu bestimmen wurden Bereich 5 – 60 kHz die Kondensatorspannung bzw. die Spannung des Schwingkreises gemessen und in Tabelle 2 aufgetragen. Die Werte sind in Abbildung 2 aufgetragen.

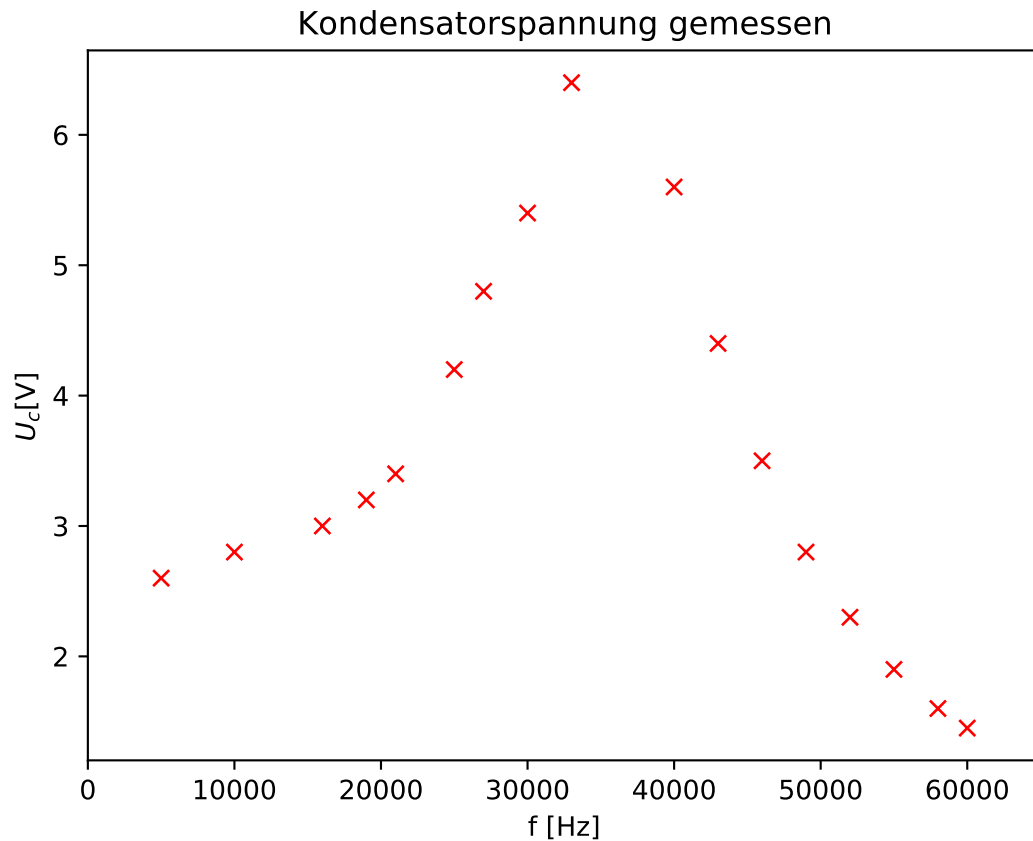


Abbildung 2: Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenzabhängigkeit

Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung ist durch Gleichung (11) gegeben. Mit den Werten $L = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ H}$, $C = 5.0 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ und $R = 271.6 \Omega$ ergibt sich der Graph der Kondensatorspannung zu Abbildung 3.

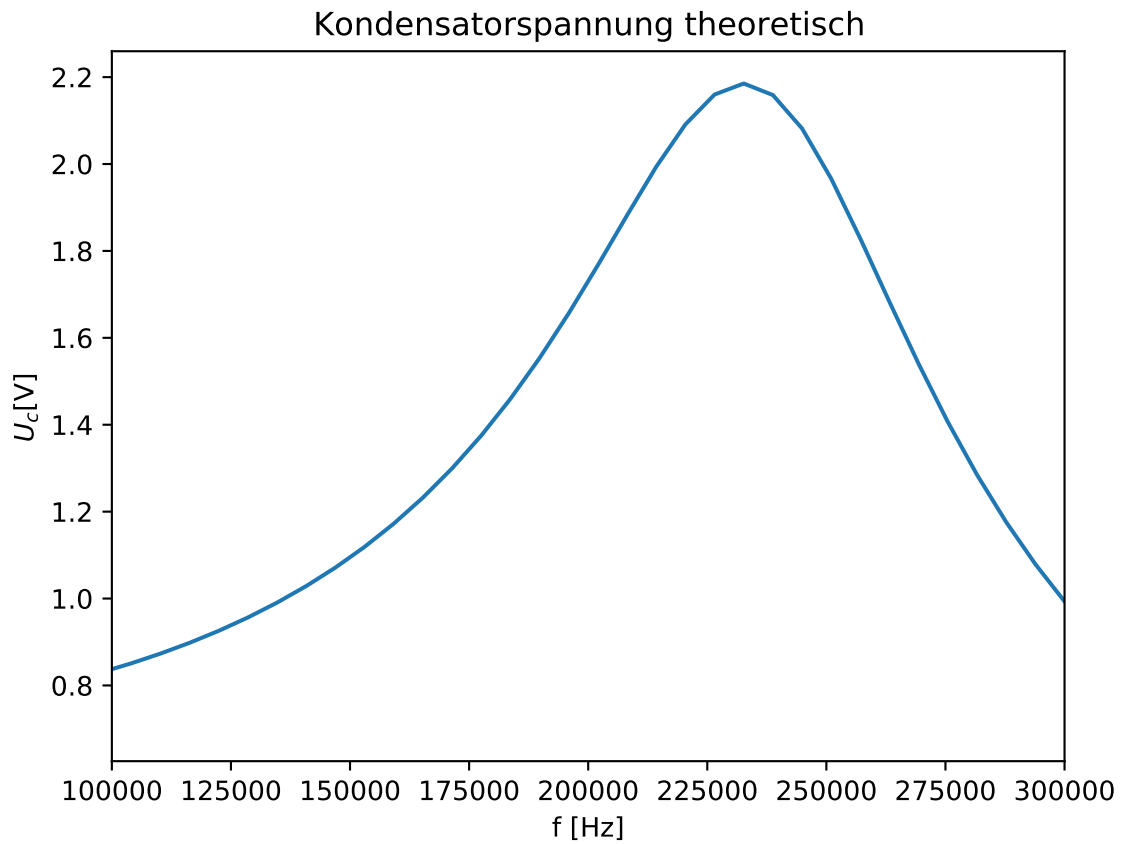


Abbildung 3: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung in der Theorie

Es ist zu erkennen das die Kurve für die Kondensatorspannung die gemessen Werte in der Form annähert. Jedoch ist der Wert für die Resonanzfrequenz, in der Theorie deutlich höhere hat als die als die gemessene Resonanzfrequenz welche bei etwa 33 kHz liegt. Während die theoretische Resonanzfrequenz sich mit (12) zu

$$\omega_{\text{res}} = 232.66\text{kHz}$$

ergibt. Was einer Abweichung von 85.82% von vom gemessen Wert zum theoretischen entspricht.

4.4 d) Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Nun soll Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt werden.

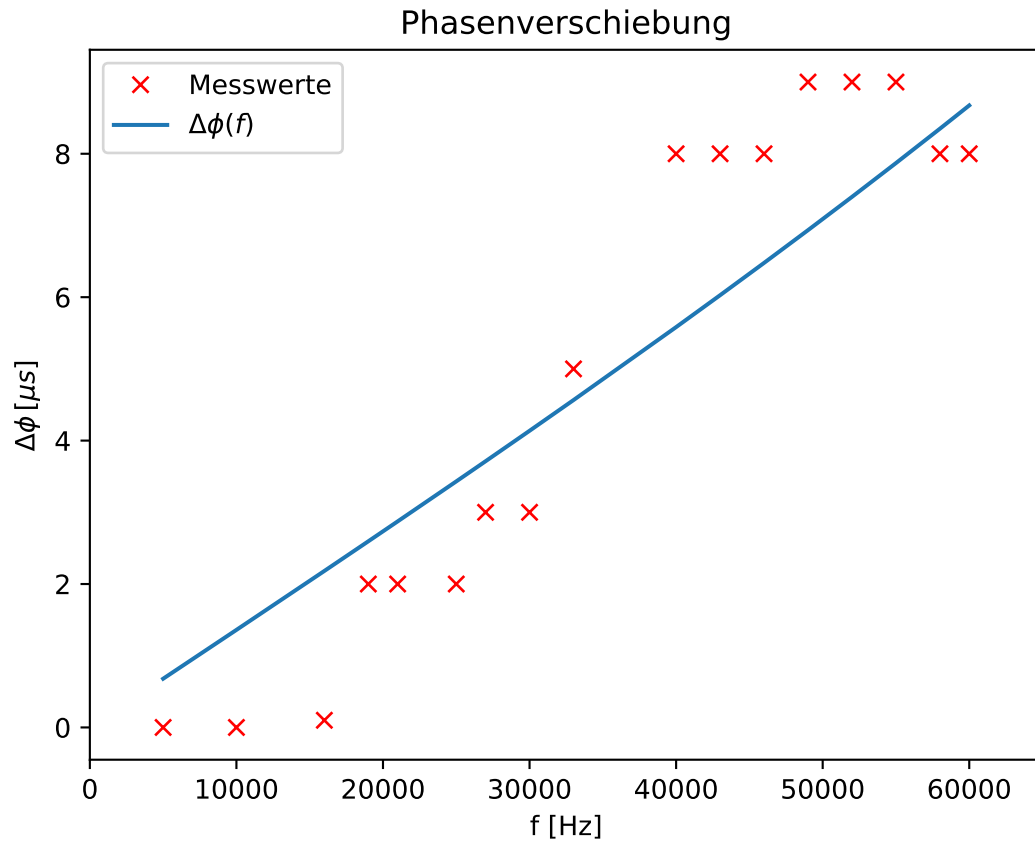


Abbildung 4: Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Kondensatorspannung

Die Phasenverschiebung lässt sich mit (13) bestimmen und ist in Abbildung 4 als die blaue Kurve dargestellt. (13) sagt aus, dass für hinreichend kleine Frequenzen die Kondensator- und Erregerspannung nahezu in Phase sind. Während bei höheren Frequenzen die Kondensatorspannung ansteigt und am Höhepunkt etwa um π hinter der Erregerspannung zurückbleibt. Dieses Verhalten des Anstiegs der Phasenverschiebung ist bei den Messwerten zu erkennen.

5 Diskussion

Die meisten Fehler, die in diesem Versuch auftreten, liegen im Toleranzbereich. Neben den Fehlern, die die einzelnen Bauteile aufweisen, ist hier vor allem die Ungenauigkeit, die beim Ablesen des Oszillographen entstehen, ausschlaggebend. Durch diese lassen sich nicht nur die Fehler auf die Amplituden und Phasen erklären, die in weiteren Rechnungen auch die Parameter U_0 und $2\pi \cdot \mu$ sowie die daraus berechnete Abklingdauer T_{ex} in Aufgabenteil a) beeinflussen, sondern sie führt auch zu einem Fehler auf den abgelesenen Widerstand R_{ap} in b), da dieser nicht so eingestellt werden kann, dass exakt der aperiodische Grenzfall vorliegt. In Teil c) liegt die gemessene Kondensatorspannung mit ihrer Resonanzfrequenz sehr weit von der errechneten weg. Grund dafür kann erneut das ungenaue Messen bzw. die Fehler der Bauteile sein, jedoch ist es unwahrscheinlich, dass daraus eine derart drastische Abweichung zustandekommt. Vermutlich liegt daher der Fehler eher in den Rechnungen. In Teil d) nähert die Kurve für $\Delta\phi$ die Messwerte relativ gut an. Die Abweichung an dieser Stelle ist höchst wahrscheinlich durch Fehler, bzw. Ungenauigkeiten beim Messen aufgrund der begrenzten Genauigkeit der Skala der Messgeräte, zu erklären. ,

6 Anhang

Abbildung 5: Originale Messwerte

a)

t		Amplitude	
Kästchen	[μs]	Kästchen	[V]
0,3	6	3,8	1,9
1	20	-2,6	-1,3
1,2	34	1,6	0,8
2,3	46	-1,3	-0,65
3,1	62	0,2	0,35
3,8	76	-0,6	-0,3
4,4	88	0,4	0,2
5,1	102	-0,3	-0,15
5,8	116	0,1	0,05
6,4	128	-0,2	-0,1

b) $R = 1,275 \text{ k}\Omega$

c) & d)

f [kHz]	Phase	Phasenverschiebung	A _{schwingkreis}	A _{Generator}
10,00	100 μs	0	2,8V	0,8V
5,00	200 μs	0	2,6V	0,7V
16,00	62 μs	0,1 μs	3V	0,8V
19,00	52 μs	2 μs	3,2V	0,7V
21,00	48 μs	2 μs	3,4V	0,7V
25,00	40 μs	2 μs	4,2V	1,6V 0,8V
27,00	37 μs	3 μs	4,8V	1,6V 0,8V
30,00	33 μs	3 μs	5,4V	1,6V 0,7V
33,00	30 μs	5 μs	6,4V	0,7V
40,00	24 μs	8 μs	5,6V	0,7V
43,00	24 μs	8 μs	4,4V	0,7V
46,00	22 μs	8 μs	3,5V	0,7V
49,00	20 μs	9 μs	2,8V	0,2V
52,00	19 μs	9 μs	2,3V	0,2V
55,00	18 μs	9 μs	1,9V	0,8V
58,00	17 μs	8 μs	1,6V	0,8V
60,00	16 μs	8 μs	1,45V	0,8V

Literatur

- [1] *Einheiten Umrechner*. URL: <https://www.einheiten-umrechnen.de/Nanofarad+in+Farad+umrechnen.php> (besucht am 19.12.2020).
- [2] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 354 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. TU Dortmund. 2020.