למידה חישובית - תרגיל 5

1 א $f(x,y) = 2e^{xy}$ constraint: $2x^2+y^2=32$

constraint: $2x^2+y^2-32=0$

$$L = 2e^{xy} - \lambda(2x^2+y^2-32)$$

$$\nabla L = 0$$

(1) $\nabla x = 2ye^{xy} - 4\lambda x = 0$

(2) $\nabla y = 2xe^{xy} - 2\lambda y = 0$

(3) $\nabla \lambda = -2x^2 - y^2 + 32 = 0$

(2) $2x \cdot e^{xy} = 2\lambda y$

$x \cdot e^{xy} = \lambda y$

$\lambda = \dfrac{x \cdot e^{xy}}{y}$

Plug In (1) = $ye^{xy} - \dfrac{2x^2e^{xy}}{y} = 0 / \cdot y$

(1) $y^2e^{xy} - 2x^2e^{xy} = 0 / \cdot e^{xy}$

(1) $y^2 = 2x^2$

(3) $-2x^2 - 2x^2 = -32$

$4x^2 = 32$

$x^2 = 8$ $\quad x = \pm\sqrt{8}$

*) $x = \sqrt{8} \Rightarrow$ $y = \pm\sqrt{16}$

*) $y = 4 \Rightarrow$

(2) = $\lambda = \dfrac{\sqrt{8} \cdot e^{4 \cdot \sqrt{8}}}{4} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{2} \cdot e^{4 \cdot 2\sqrt{2}}}{4_{2}}$

$\lambda = \dfrac{\sqrt{2} \cdot e^{8\sqrt{2}}}{2}$

$x = \sqrt{8}$

$**)\quad y = -4$

$$(2):\ \lambda = \frac{\sqrt{8} \cdot e^{-4\cdot\sqrt{8}}}{-4} \Rightarrow \frac{\cancel{2}\sqrt{2} \cdot e^{-4\cdot 2\sqrt{2}}}{-2\cdot\cancel{2}}$$

$$\lambda = \frac{-\sqrt{2} \cdot e^{-8\sqrt{2}}}{2}$$

$**)\quad x = -\sqrt{8} \Rightarrow y = \pm 4$

ולכן, מאחר ושניהם זהה, מקבלים
אז כמו בחישובים קודמים

לכן

(x, y, λ)

$$\Big\{ \Big(\sqrt{8}, \underset{max}{4}, \frac{\sqrt{2}e^{8\sqrt{2}}}{2}\Big), \Big(\sqrt{8}, \underset{min}{-4}, \frac{-\sqrt{2}e^{-8\sqrt{2}}}{2}\Big)$$

$$\Big(-\sqrt{8}, \underset{min}{4}, \frac{-\sqrt{2}e^{-8\sqrt{2}}}{2}\Big), \Big(-\sqrt{8}, \underset{max}{-4}, \frac{\sqrt{2}e^{8\sqrt{2}}}{2}\Big) \Big\}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \text{constreint: } y - \cos(x) = 0$$ 1

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(y - \cos(x))$$

$$\nabla L = 0$$

(1) $\nabla x = 2x - \lambda \sin(x) = 0$

(2) $\nabla y = 2y - \lambda = 0$

(3) $\nabla \lambda = \cos(x) - y = 0$

(3) = $y = \cos(x)$

(2) = $2 \cdot \cos(x) = \lambda$

(1) = $2x - 2\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$

$x = 0$

(3) = $\cos(0) = y$

$y = 1$

(2) = $2 \cdot 1 = \lambda$

$\lambda = 2$

(x, y, λ)

$\{(0, 1, 2)\}$ min

($f(\pi, -1) > 1$ לכן $\pi, -1$ לא (3, כי לא)

2 א. $K(x,y) = K_1(x,y) + K_2(x,y)$

נסמן $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$

נחשב כעת את המכפלה הפנימית

כי $\varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_1(y) + \varphi_2(x)\cdot\varphi_2(y)$

$= K_1(x\cdot y) + K_2(x\cdot y) = (K_1+K_2)(x\cdot y)$ עפ"נ נתון

ומאחר שניהם K, אזי חיבורם גם הינו. - מש"ל

אם אנחנו יודעים, עפ"נ הנתון בשאלה, כי ב R^m המידע ניתן להפרדה לינארית, עם וקטור המשקולות w.

נסתכל על שתי הקבוצות הדיוניות כך ש

$x \in C_1 \quad w\cdot x < 0$ $\quad (w = w_1, w_2 \ldots w_m)$

$x \in C_2 \quad w\cdot x > 0$

נגדיר את וקטור המשקולות w', בהסתמך על w כך ש

$$w' = (w_1, w_2 \ldots, w_m, \underbrace{0, 0 \ldots 0}_{|\varphi_2|})$$

ולכן, עבור w' מתקיים עדיין כי

$x \in C_1 \quad w'\cdot x < 0$

$x \in C_2 \quad w'\cdot x > 0$

ולכן $f_1(\vec{x}) = <\vec{w}, \varphi(\vec{x})> = <\vec{w}', \varphi_1(\vec{x})>$

$+<0, \varphi_2(\vec{x})> = <\vec{w}, \varphi_1(\vec{x})> = f$ מקורית

(ולכן הטענה נכונה)

ג) (עפ״י מצגת, FINAL_ML06_SVM1)

$$(a x \cdot y + \beta)^d \qquad a, \beta \neq 0$$

$$(a x_1 \cdot y_1 + a x_2 y_2 + a x_3 y_3 + \dots + a x_n y_n + \beta)^d$$

לכן, עפ״י המצגת ומה שלמדנו בכיתה

$$\binom{n+d}{n}$$

ד) $$K(x,y) = (a_1 x \cdot y + \beta_1)^d + (a_2 x \cdot y + \beta_2)^d$$

נפתח את כ״ל עפ״י ניוטון

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} a_1^k \beta_1^{d-k} (x \cdot y)^k + \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} a_2^k \beta_2^{d-k} (x \cdot y)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (a_1^k \beta_1^{d-k} + a_2^k \beta_2^{d-k}) (x \cdot y)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (a_1^k \beta_1^{d-k} + a_2^k \beta_2^{d-k}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)^k$$

$$= \varphi(x) \cdot \varphi(y) \Rightarrow K(x,y)$$

נשים לב נוסיף כי מ. פולינום (חיבור של שני פולינומים) בנוסף, נשים לב כי מ. פולינום ממימד $\binom{n+d}{n}$ (עד מספר קודמים) ולכן בעצם אותו המימד כמו φ_1 ו-φ_2

3 (ג

$$\varphi(x) = (x_1^3, x_2^3, \sqrt{3}x_1^2x_2, \sqrt{3}x_1x_2^2, 3x_1^2, 3x_2^2, 3\sqrt{2}x_1x_2, 3\sqrt{3}x_1, 3\sqrt{3}x_2, 3\sqrt{3})$$

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y) = x_1^3y_1^3 + x_2^3y_2^3 + 3x_1^2x_2y_1^2y_2 + 3x_1x_2^2y_1y_2^2 + 9x_1^2y_1^2 + 9x_2^2y_2^2 + 18x_1y_1x_2y_2 + 27x_1y_1 + 27x_2y_2 + 27$$

$$= (xy)^3 + 9\cdot(x\cdot y)^2 + 27(x\cdot y + 1)$$

$$K(x,y) = (x\cdot y)^3 + 9(x\cdot y)^2 + 27(x\cdot y + 1)$$

$$K(x,y) = (x\cdot y)^3 + 3^2(x\cdot y)^2 + 3^3(x\cdot y) + 3^3$$

$$K(x,y) = (\langle x,y\rangle + 3)^3$$

2 (ב) המסקנה: מדובר ל Histogram Intersection Kernel (והוכחה נכונה מ Stack Overflow)

$$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^N: \quad \varphi(x) = (\underbrace{1,1\dots1}_{x}, \underbrace{0,0,0\dots0}_{N-x})$$

$$\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x)\cdot\varphi_i(y) =$$

$$\begin{matrix} (\underbrace{1 1,\dots 1}_{x}\ \underbrace{0.0,\dots 0}_{N-x}) & \Rightarrow & x & x\le y \\ (\underbrace{1 1\dots 1}_{y}\ \underbrace{0 0\dots 0}_{N-y}) & & y & x>y \end{matrix} \Rightarrow \min(x,y)$$

למשל, בדוגמא שנתנו $N=5$ למשל אזי

$$\varphi(3)\cdot\varphi(5) = \min(3,5) = 3 \Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 1+1+1+0+0 = \underline{\underline{3}}$$

$$\varphi(x) = (\sqrt{5}x_1^2, \sqrt{5}x_2^2, \sqrt{10}x_1x_2, \sqrt{8}x_1, \sqrt{8}x_2, \sqrt{5})$$ (2)

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y) = 5x_1^2y_1^2 + 5x_2^2y_2^2 + 10y_1y_2x_1x_2 + 8x_1y_1 + 8x_2y_2 + 5)$$

$$(\sqrt{5}(x\cdot y))^2 + 8(x\cdot y) + 5 = 5(x\cdot y)^2 + 10(x\cdot y) + 5 - 2(x\cdot y)$$

$$K(x,y) = 5(x\cdot y)^2 + 10(x\cdot y) + 5 - 2(x\cdot y)$$

$$K(x,y) = 5((x\cdot y)+1)^2 - 2(x\cdot y)$$

$$K(x,y) = 5(\langle x,y\rangle + 1)^2 - 2(\langle x,y\rangle)$$