



# Projektarbeit

über das Thema

## Modellbasierte Implementierung einer Vektorregelung für Synchronmaschinen

**Autoren:** Benjamin Ternes  
benjamin.ternes@fernuni-hagen.de  
Matrikelnummer: 014102076

Jan Feldkamp  
jan.feldkamp@hs-bochum.de  
Matrikelnummer: 012215207

**Prüfer:** Prof. Dr.-Ing. A. Bergmann

**Abgabedatum:** 29. Oktober 2014

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	1
1 Theoretische und begriffliche Grundlagen	3
1.1 Theorie der Drehfeldmaschinen	3
1.1.1 Maxwellsche Gleichungen	3
1.1.2 Mehrphasensysteme	5
1.2 Magnetfelder	9
1.2.1 Strombelag	9
1.2.2 Durchflutung	12
1.2.3 Gleichfelder	13
1.2.4 Drehfelder	13
1.3 Induktivitäten	15
1.3.1 Streuinduktivitäten und Streureaktanzen	16
1.4 Einführung Synchronmaschine	17
1.4.1 Spannungsgleichungen und Ersatzschaltbild	18
1.4.2 Beschreibung der Synchronmaschine im d,q-Koordinatensystem nach Schröder (2000)	22
1.4.3 Beschreibung der Synchronmaschine im d,q-Koordinatensystem nach Kellner (2012)	24
2 Grundlagen der Vektorregelung	26
2.1 Raumzeigerdarstellung	26
2.2 Beschreibung in $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem	29
2.3 Beschreibung in rotorfesten d-q-Koordinatensystem	33
2.4 Signalflussplan der Vektorregelung	34
3 Anforderungsprofil für die Regelung der PMSM mit Simulink	37
3.1 Eingabe und Ausgabedaten	37
3.2 Darstellung der Simulationsergebnisse	37

---

4	Regelung der PMSM mit Simulink	38
4.1	Einführung in Simulink . . . . .	38
4.2	Einführung in die TI-Bibliotheken . . . . .	38
4.3	Übersicht der Regelstruktur . . . . .	38
4.3.1	Subsysteme . . . . .	38
5	Auswertung der Simulationsergebnisse	39
5.1	Vergleich der Ergebnisse der TI-Bibliotheken . . . . .	39
6	Zusammenfassung	40
	Literatur	41

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Spannungsquelle eines Mehrphasensystems. . . . .	5
1.2	Phasenspannung eines symmetrischen Drehstromerzeugers. . . . .	8
1.3	Abbildung des Nutquerfeldes einer Rechtecknut im Stator. . . . .	9
1.4	Vereinfachte Modellvorstellung zur Berechnung des Luftspaltfeldes mit Hilfe des Strombelags. . . . .	10
1.5	Integral entlang des Umfanges; magnetische Umlaufspannung. . . . .	13
1.6	Strombelag, Felderreger- und Feldkurve der Vollpolmaschine. . . . .	14
1.7	Abbildungen zweier Synchron Generatoren verschiedener Leistungsklassen. . . . .	17
1.8	Veranschaulicht das mit $n$ rotierende $d, q$ -System, in dem der Maschinen- zustand durch ruhende Zeiger ausgedrückt wird. . . . .	19
1.9	Ersatzschaltbild der Synchronmaschine. . . . .	20
1.10	Erzeugung einer mehrphasigen Spannung durch ein räumlich sinusförmiges Läuferdrehfeld. . . . .	21
1.11	Darstellung der Synchronmaschine im dq-Koordinatensystem. . . . .	22
1.12	Graphische Veranschaulichung der verschiedenen Koordinatensysteme: drei- phasig $(a, b, c)$ , ständerfest $(\alpha, \beta)$ und rotorfest $(d, q)$ . . . . .	24
1.13	Allgemeines Netzwerk des Ständers einer Drehstrommaschine. . . . .	24
2.1	Beispielhafte Lage eines Zeitzeigers. . . . .	27
2.2	zweipolige Drehfeldmaschine . . . . .	29
2.3	Beispielhafte Lage des Raumzeigers im $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem. . . . .	31
2.4	Zusammenhang der $\alpha$ - $\beta$ -Koordinaten und der d-q- Raumzeigerkomponenten . . . . .	33
2.5	Clarke Blockbild . . . . .	35
2.6	Park Blockbild . . . . .	36

# Symbolverzeichnis

## Allgemeine Symbole

Symbol	Bedeutung	Einheit
$I$	elektrische Stromstärke	A
$\Theta$	elektrische Durchflutung	A
$A$	elektrischer Strombelag	A/m
$J$	elektrische Stromdichte	A/m <sup>2</sup>
$H$	magnetische Feldstärke	A/m
$I_e$	Erregerstrom	A
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	Vs/Am
$\mu_r$	relative Permeabilität	
$B$	magnetische Flussdichte	Vs/m <sup>2</sup>
$\Phi$	magnetischer Fluss	Vs
$\Psi$	verketteter Fluss	Vs
$L, M$	Induktivitäten	Vs/A
$U$	elektrische Spannung	V
$U_e$	Erregerspannung	V
$R_e$	Erregerkreisverlustwiderstand	$\Omega$
$V$	magnetisches Vektorpotenzial	Vs/m
$V_m$	magnetische Spannung	A
$\Omega_L$	elektr. Winkelgeschwindigkeit des Rotors( $\Omega_L = Z_p \cdot \Omega_m$ )	1/s
$\Omega_m$	mech. Winkelgeschwindigkeit des Rotors	1/s
$Z_p$	Polpaarzahl	
$\psi_d, \psi_q$	Statorfluss-Komponenten im d,q-System	Vs
$U_d, U_q$	Statorspannungs-Komponenten im d,q-System	V
$I_d, I_q$	Statorstrom-Komponenten im d,q-System	A
$R_1$	Statorwiderstand	V/A
$L_d, L_q$	Statorinduktivität im d,q-System	Vs/A



# 1 Theoretische und begriffliche Grundlagen

Um auf die Regelung einer anisotropen Synchronmaschine einzugehen, werden im folgenden einige Grundlagen erörtert.

## 1.1 Theorie der Drehfeldmaschinen

Drehfeldmaschinen sind die am häufigsten eingesetzten Antriebsmaschinen, der Grund hierfür ist die Robustheit der aktiven Bauteile und die gute Energieeffizienz. Zudem besitzen Drehfeldmaschinen ein großes Leistungsspektrum und einen großen Drehzahl- und Drehmomentstellbereich. Die wesentlichen Vertreter der Maschinenfamilie sind die Synchron- und die Asynchronmaschinen. Beide basieren auf der Wirkung eines Drehfeldes, das sich durch den Luftspalt der Maschine bewegt. Die Synchron- und Asynchronmaschine besitzen im Ständer denselben Aufbau und erfordern zur Darstellung ihres Verhaltens eine Reihe gleicher physikalischer Begriffe. Es ist zweckmäßig die Grundlagen der Synchronmaschine in einem eigenen Kapitel zu behandeln. Dies gilt insbesondere für den Aufbau der Drehstromwicklungen sowie die Grundlagen zur Beschreibung von umlaufenden Durchflutungen und deren Felder.

### 1.1.1 Maxwell'sche Gleichungen

Die Grundlage für alle Betrachtungen sind die Maxwell'schen Gleichungen. In Differentialform lauten diese (unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes  $\vec{D}$ )

1. Maxwell'sche Gleichung  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \approx \vec{J}$
2. Maxwell'sche Gleichung  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
3. Maxwell'sche Gleichung  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
4. Maxwell'sche Gleichung  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

und die dazu gehörigen Materialgesetze lauten

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \gamma \vec{E}\end{aligned}$$

Bei homogenen, isotropen Materialien reduzieren sich die Skalarfelder  $\mu, \epsilon$  und  $\gamma$  zu ortsunabhängigen Materialkonstanten.

### Das Durchflutungsgesetz (1. Maxwellsche Gleichung in Integralform)

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_A \vec{J} d\vec{A} \quad (1.1)$$

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  längs eines in sich geschlossenen räumlichen Integrationsweges  $\vec{l}$  ist gleich dem gesamten elektrischen Strom, der durch die so begrenzte Fläche  $A$  hindurchtritt.

### Das Induktionsgesetz (2. Maxwellsche Gleichung in Integralform)

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (1.2)$$

Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  längs eines in sich geschlossenen Integrationsweges  $\vec{l}$  ist gleich der negativen totalen zeitlichen Änderung des gesamten magnetischen Flusses, der durch die so begrenzte Fläche  $A$  hindurchtritt.

Hierbei ist

$$\int_A \vec{B} d\vec{A} = \Phi \quad (1.3)$$

der magnetische Fluss.



**(3. Maxwellsche Gleichung in Integralform)**

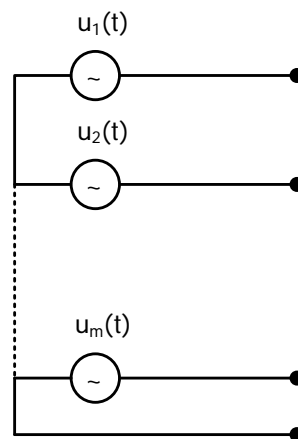
$$\int_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (1.4)$$

**(4. Maxwellsche Gleichung in Integralform)**

$$\int_A \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV \quad (1.5)$$

**1.1.2 Mehrphasensysteme**

Bei einpoliger Verbindung von  $m$  Wechselspannungsquellen entsteht eine Schaltung, die  $(m + 1)$  Klemmen aufweist (s. h. Abbildung 1.1). Haben diese  $m$  Wechselspannungsquellen dieselbe Kreisfrequenz  $\omega$ , so stellt die Schaltung die Spannungsquelle eines allgemeinen Mehrphasensystems dar.



**Abbildung 1.1:** Spannungsquelle eines Mehrphasensystems.

Da keine Vorgaben bezüglich der Amplituden  $\hat{u}$  und der Phasenlage  $\varphi$  in der Definition der allgemeinen Mehrphasen-Spannungsquelle enthalten sind, kann sie z. B. durch das folgende Gleichungssystem beschrieben werden

$$\begin{aligned}
u_{1(t)} &= \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) \\
u_{2(t)} &= \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \\
&\vdots \\
u_{m(t)} &= \hat{u}_m \cdot \cos(\omega t - \varphi_m)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Aus der allgemeinen Mehrphasen-Spannungsquelle entsteht eine symmetrische Mehrphasen-Spannungsquelle, wenn zusätzlich gleiche Amplituden

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \dots \hat{u}_m$$

und gleiche Phasenwinkeldifferenz zwischen aufeinanderfolgenden Teilspannungen gefordert werden

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \dots = \varphi_{m-1} - \varphi_m = \Delta\varphi$$

Aus Symmetrieüberlegungen ergibt sich, dass die einheitliche Phasenwinkeldifferenz eine Funktion der Phasenzahl  $m$  sein muss.

$$\Delta\varphi = \frac{\omega T}{m} = \frac{2\pi}{m} \tag{1.7}$$

Darin tritt die Periodendauer  $T$  der Teilspannungen auf. Setzt man der Einfachheit

$$\varphi_1 = 0$$

so wird die symmetrische Mehrphasen-Spannungsquelle durch das folgende Gleichungssystem beschrieben.

$$\begin{aligned}
u_{1(t)} &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \\
u_{2(t)} &= \hat{u} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega T}{m}\right) \\
&\vdots \\
u_{m(t)} &= \hat{u} \cdot \cos\left(\omega t - (m-1)\frac{\omega T}{m}\right)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

In der Elektrotechnik treten Systeme mit verschiedenen Phasenzahlen auf. Das Wechselstromsystem kann als Sonderfall des Mehrphasensystems mit  $m = 1$  aufgefasst werden. Es kommt nur bei kleinen Leistungen zum Einsatz. Eine Ausnahme stellt die Bahnversorgung dar, die bis zu großen Leistungen generell einphasig betrieben wird. Gekennzeichnet ist diese durch die eingeprägte Frequenz von  $f = 16\frac{2}{3}\text{Hz}$ .

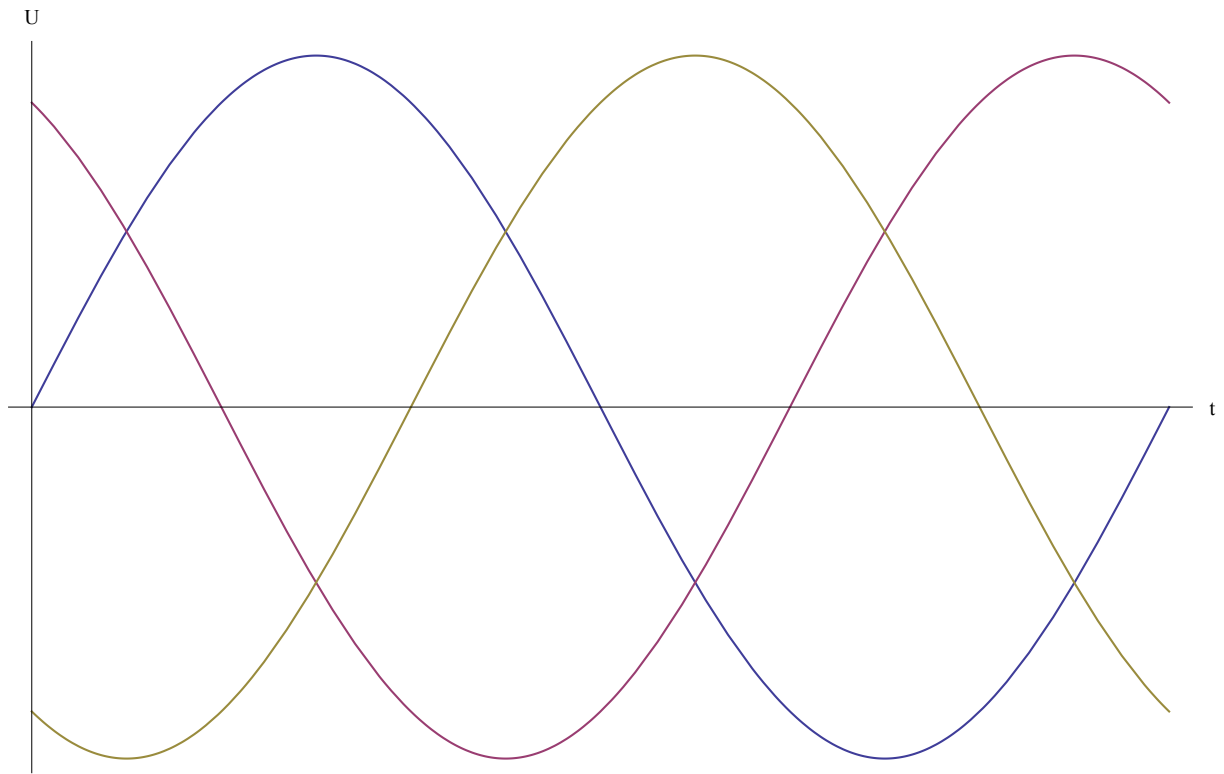
Die Phasenzahl  $m = 2$  tritt bei elektrischen Kleinmaschinen auf, allerdings nur in Form eines unsymmetrischen Systems mit einer Phasenwinkeldifferenz

$$\Delta\varphi = 90^\circ \text{ bzw. } 270^\circ$$

Die Phasenzahl  $m = 3$  kennzeichnet das Drehstromsystem, dass die Basis der elektrischen Energietechnik bildet. Höhere Phasenzahlen treten z. B. in der Stromrichtertechnik auf mit  $m = 6, 12, 24$ . Drehstromerzeuger mit Phasenzahl  $m = 3$  werden generell als symmetrisches System ausgelegt. Als Klemmenbezeichnung ist die Buchstabengruppe  $R, S, T$  bzw.  $U, V, W$  üblich, wobei die gemeinsame Leitung der drei Teilspannungen mit  $O, N$  oder  $Mp$  für Mittelpunkt bezeichnet wird.

Durch die DIN-Normung wurde festgelegt, dass die Klemmenbezeichnung beim Drehstromsystem mit  $L1, L2$  und  $L3$  zu erfolgen hat. Die Phasenwinkeldifferenz ist  $\Delta\varphi = 120^\circ$ . Stellt man die Phasenspannungen  $u_{1(t)}, u_{2(t)}, u_{3(t)}$  nach Abbildung ?? dar, so ergibt sich

Der prinzipielle Aufbau einer Drehstromwicklung lässt sich anhand aus den Anforderungen zur Erzeugung einer dreiphasigen Wechselspannung erläutern. Eine solche Drehspannung erhält man mit einer Anordnung nach Abbildung 1.10. Ein aus Dynamoblechen geschichtetes Ständerblechpaket enthält in Nuten am Bohrungsumfang gleichmäßig verteilte Leiter, die zu drei räumlich verteilten Wicklungssträngen zusammengeschaltet werden (Fischer 2009, S. 141). Der Läufer erzeugt ein Gleichfeld, das eine sinusförmige Feldverteilung längst des Luftspaltes aufbaut. Hat der Läufer eine konstante Drehzahl, so induziert das Feld in den einzelnen Spulen zeitlich sinusförmige Spannungen, die sich innerhalb eines



**Abbildung 1.2:** Phasenspannung eines symmetrischen Drehstromerzeugers.

Wicklungsstranges zu einem Wert addieren. Die Berechnung der Induktion kann über die Allgemeine Beziehung

$$u_q = B \cdot l \cdot v \quad (1.9)$$

erfolgen. Sei  $d_1$  der Bohrungsdurchmesser des Ständerblechpaketes einer  $2p$ -poligen Maschine, so bezeichnet man den Umfangsanteil

$$\tau_p = \frac{d_1 \cdot \pi}{2p} \quad (1.10)$$

wieder als Polteilung. Die Polteilung entspricht der Länge einer Halbwelle der sinusförmigen Flussdichteverteilung im Luftspalt (entspricht einem elektrischen Winkel von  $\omega t = 180^\circ$ ).

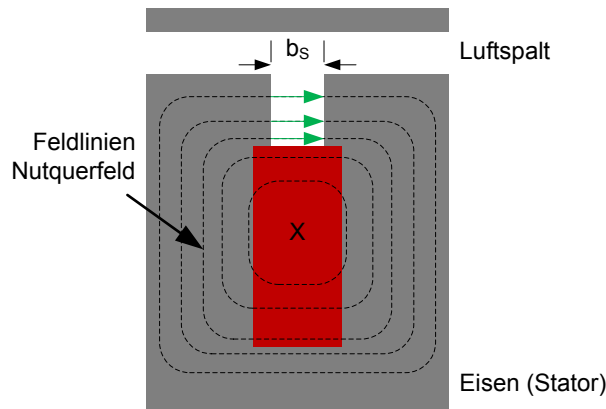
Bei einer zweipoligen Maschine mit  $p = 1$  stimmen somit der räumlich mechanische und der elektrische Winkel überein, allgemein gilt die Beziehung (Fischer 2009, S.141f.)

$$\gamma_{\text{el}} = p \cdot \gamma_{\text{mech}} \quad (1.11)$$

## 1.2 Magnetfelder

### 1.2.1 Strombelag

Das Luftspaltfeld hat die zentrale Bedeutung und muss deshalb auch berechnet werden können. Die Ursache für die Entstehung dieses Luftspaltfeldes sind die vom Strom durchflossenen Leiter in den Nuten des Stators. Unter der idealisierten Annahme eines homogenen Feldverlaufs im Bereich der Nutöffnung (s. h. Abbildung 1.3) das Feld im Luftspalt vom Feld in der Nut getrennt.



**Abbildung 1.3:** Abbildung des Nutquersfeldes einer Rechtecknut im Stator.

Hierzu wird die oben abgebildete Nut betrachtet, wobei die Permeabilität des Eisens als sehr groß gegenüber derjenigen von Luft angenommen wird ( $\mu_{\text{Fe}} \rightarrow \infty$ ). Es bildet sich ein Nutquerfeld aus, das ist leicht aus dem Durchflutungsgesetz herzuleiten.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta \quad (1.12)$$

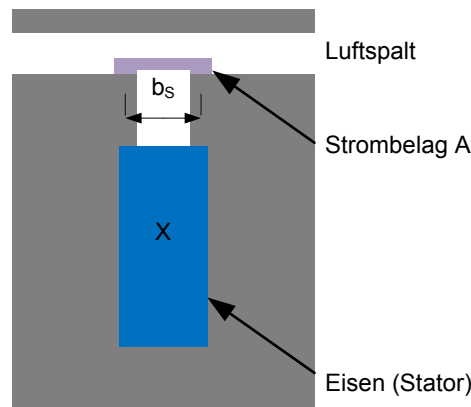
Dieses Nutquerfeld stößt an der Grenzfläche zwischen Nutöffnung (Nutschlitz bzw. Streuschlitz) und Luftspalt an das zu berechnende Luftspaltfeld und stellt somit eine der Randbedingungen zur Berechnung des Luftspaltfeldes dar. Das Magnetische Feld in der Nutöffnung  $H_S$ , dass unter idealisierte Annahme tangential gerichtet ist, kann wiederum auch aus dem Durchflutungsgesetz berechnet werden.

$$H_S = \frac{\Theta_{\text{Nut}}}{b_S} \quad (1.13)$$

Diese Randbedingung zur Berechnung des Luftspaltfeldes kann auch anders erzeugt werden. Unter Annahme, dass die Nutdurchflutung  $\Theta$  unendlich dünn auf einer glatten Eisenoberfläche gleichmäßig im Bereich der Nutöffnung  $b_S$  verteilt ist. Diese Modellvorstellung wird mit Hilfe des Strombelages beschrieben.

$$A = \frac{\Theta_{\text{Nut}}}{b_S} \quad (1.14)$$

s. h. Abbildung 1.4 zeigt die Modellvorstellung der obigen Beschreibung.



**Abbildung 1.4:** Vereinfachte Modellvorstellung zur Berechnung des Luftspaltfeldes mit Hilfe des Strombelages.

Bei Auswertung des Durchflutungsgesetz bei einem Umlauf um diesen Strombelag, ergibt sich für die tangentiale Feldstärke  $H_t$  an der Eisenoberfläche im Bereich des Strombelages

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \Theta_{\text{Nut}} \quad (1.15)$$

$$H_t \cdot b_S = A \cdot b_S \quad (1.16)$$

$$H_t = A = \frac{\Theta_{\text{Nut}}}{b_S} \quad (1.17)$$

Mit Abbildung 1.17 ist gezeigt, dass die Randbedingungen zur Berechnung des Luftspaltfeldes unverändert erhalten bleibt, wenn statt der in Nuten eingebrachten Leiter ein äquivalenter Strombelag auf der glatten Eisenoberfläche berücksichtigt wird (Die Wirkung der Nutdurchflutung wird hinreichend genau durch den über der Nutöffnung verteilten Strombelag beschrieben). Zur Berechnung des Luftspaltfeldes muss also nun das Nutenfeld nicht berücksichtigt werden. Zudem kann eine deutlich vereinfachte Geometrie zugrunde gelegt werden.

»Die Begrenzungsflächen von Stator und Rotor können als glatt angenommen werden, was in Umfangsrichtung der Maschine konstanten Luftspalt und demzufolge auch einen konstanten magnetischen Luftspaltleitwert entspricht. (Gerling 2008, *Elektrische Maschinen und Antriebe*. Bundeswehr Universität in München.)«

Weitere spezifische Darstellungen zum Strombelag. Die räumliche Verteilung des Stromes wird durch den Strombelag wiedergegeben, der als Leiterzahl  $\times$  Stromstärke pro Länge des stromdurchflossenen Umfanges bei rotatorischen Maschinen als (Hofmann 2013, S. 199)

$$A = \frac{I \cdot w}{x_S \cdot p} = \frac{2m \cdot Z \cdot I}{\pi \cdot d_i} \quad (1.18)$$

betrachtet man jetzt die Polteilung  $\tau_p$

$$\tau_p = \frac{\pi \cdot d_i}{2p} \quad (1.19)$$

so wird aus Gl. 1.18 und Gl. 1.19 bei voller Bewicklung über eine Polteilung

$$A = \frac{mwI}{p\tau_p} \quad (1.20)$$

»Aus dem Strombelag  $A$  wird bei rotatorischen Maschinen abhängig von der Umfangskoordinate mit  $A(x)$ , wenn:

- sich durch Wechsel von Hin- und Rückleiter einer Wicklung die Stromrichtung ändert,
- durch Konzentration der Wicklung der Strom in den Lücken zu Null wird.

(Hofmann 2013, S. 199)«

Der dann alternierende Strombelag  $A$  kann mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung durch seine Grundwelle beschrieben werden

$$A_1(x) = \hat{A}_1 \cdot \cos\left(\frac{x}{\tau_p} \cdot \pi\right) \quad (1.21)$$

Die wichtigste Kenngröße zur Erzeugung der Kräfte in Maschinen sind die Feldgrößen, wobei Vernachlässigung des magnetischen Spannungsabfalls im Eisen kann laut dem Durchflutungsgesetz mit  $\mu_{\text{Fe}} \gg 1$  die magnetische Spannung über den Luftspalt an jeder Stelle der Umfangskoordinate  $x$  über das Integral des Strombelages ermitteln (s. h. Abbildung 1.5).

$$V_\delta(x) = - \int_0^x A(x) dx \quad (1.22)$$

Das Integral erhält die Bezeichnung »Felderregerkurve« (vgl. Hofmann (2013, S. 199)). Die Felderregerkurve gibt an, welche magnetische Spannung zur Magnetfelderzeugung an der Stelle  $x$  zur Verfügung steht. Diese ist wichtig für die Berechnung von Streuung und Verlusten in der Maschine.

### 1.2.2 Durchflutung

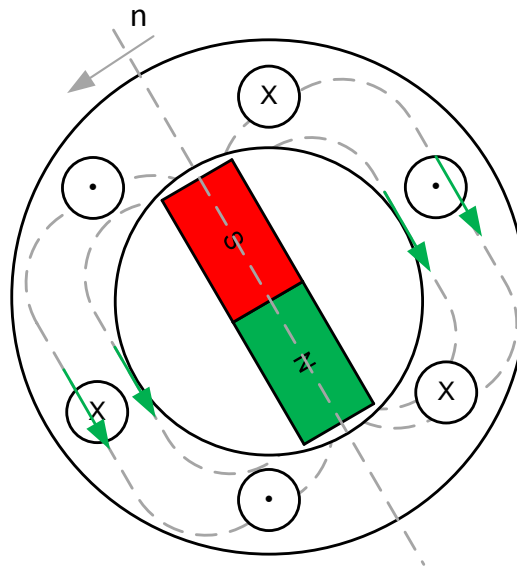
Die Durchflutung lässt sich als Integral des Strombelages entlang der Polteilung darstellen

$$\Theta = - \int_0^{\tau_p} A(x) dx \quad (1.23)$$

mit Gl. 1.19 ergibt sich dann (Hofmann 2013, S. 200)

$$\Theta = - \int_0^{2(\pi/p)} A(\gamma) d\gamma \quad \text{mit} \quad \frac{x}{\tau_p} = \frac{\gamma}{\pi} \quad (1.24)$$





**Abbildung 1.5:** Integral entlang des Umfanges; magnetische Umlaufspannung.

### 1.2.3 Gleichfelder

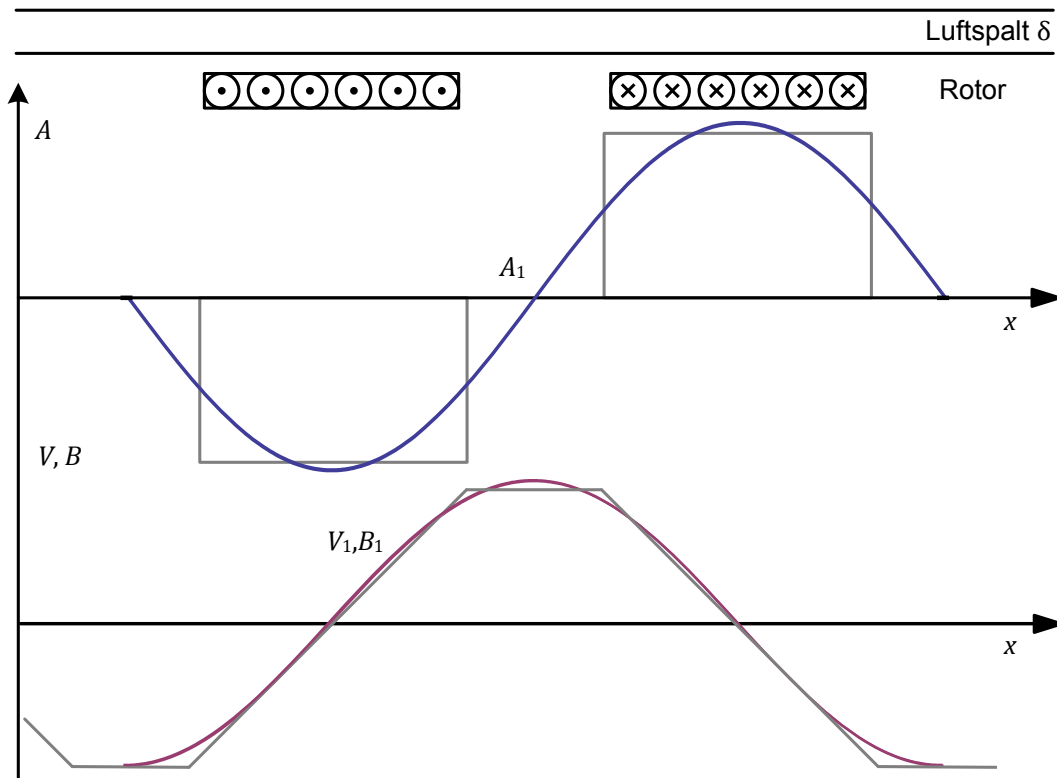
Wird der Strombelag einer Wicklung durch einen Gleichstrom gebildet, so entsteht ein örtlich, aber nicht zeitlich abhängiges Luftspaltfeld. Die örtliche Abhängigkeit hängt von den Wicklungsparametern ab, Abbildung 1.6 zeigt Strombelag  $A$  und Felderregerkurve  $B$  einer Vollpol-Ankerspule. Der Strombelag ist konzentriert, die Felderregerkurve wird trapezförmig an den Sinus angenähert. Der Induktionsverlauf lässt sich allgemein nach Fourier-Reihenentwicklung durch die Grundwelle beschreiben

$$B_1(x) = \hat{B}_1 \cdot \cos\left(\frac{x}{\tau_p} \cdot \pi\right) \quad (1.25)$$

### 1.2.4 Drehfelder

Nach Hofmann (2013) sind

»Drehfelder sind Magnetfelder, deren Welle durch den Luftspalt läuft.«



**Abbildung 1.6:** Strombelag, Felderregere- und Feldkurve der Vollpolmaschine.

Die Erzeugung von Drehfeldern kann auf zwei Arten geschehen. Zum einen aus der Drehung eines Gleichfeldes (s. h. Abschnitt 1.2.3) oder durch die Überlagerung von räumlich verteilten und zeitlich versetzten Wechselfeldern. Bei der Synchronmaschine wird mittels Gleichstrom der Anker erregt, so entsteht zunächst ein Gleichfeld mit örtlicher Induktionsverteilung. Wird nun die das Gleichfeld erzeugende Wicklung gedreht, bekommt das Feld eine Drehgeschwindigkeit, die Felddichte verhält sich orts- und zeitabhängig.

$$B(x, t) = \hat{B} \cdot \cos\left(\frac{x}{\tau_p} \pi \pm \omega t\right) \quad (1.26)$$

Der Fall, dass sich aus der Überlagerung von räumlich verteilten und zeitlich versetzten Wechselfeldern ein Drehfeld bildet soll hier nicht weiter erläutert werden.

## 1.3 Induktivitäten

Innerhalb der Vektorregelung (s. h. Abschnitt 2) werden die absoluten Induktivitäten zum Beispiel für die Berechnung des Spannungssollwertmodells, also der Vorsteuerung, benötigt. Im Rahmen von geberlosen Regelalgorithmen sind die absoluten und differentiellen Induktivitäten erforderlich – wie Kellner (2012)[S. 35ff.] gut darstellt. Auch bei aktuellen Forschungsthemen »Parameteridentifikation von Synchronmaschinen« zeigt Kellner (2012) auf S. 148ff., dass die Induktivitäten für Ständerwiderstandsidentifikation benötigt werden. Da für die Anwendung nur die Parameter in rotorfesten Koordinaten von Belang sind, wird sich die Sichtweise in der vorliegenden Arbeit darauf beschränken.

In den Spannungsgleichungen (s. h. Abschnitt 1.4.1) der Wicklungen einer elektrischen Maschine sind neben den ohmschen Spannungsabfällen  $u$  die zeitlichen Änderungen ihrer Flussverkettungen  $\Psi$  (Müller, Vogt und Ponick 2008, S. 511). Sowohl die Flussverkettung als auch die ohmschen Spannungsabfälle sind Funktionen der Ströme  $i$ . Bei ohmschen Spannungsabfällen tritt als Proportionalitätsfaktor der Wicklungswiderstand  $R$  auf. Bei magnetischer Linearität zwischen den Strömen und der Flussverkettung ist  $L$  der Proportionalitätsfaktor.

»Wenn magnetische Linearität vorausgesetzt wird, kann die Flussverkettung einer Wicklung ganz allgemein als Linearkombination ihrer von den einzelnen für das Feld verantwortlichen Strömen herrührenden Anteile dargestellt werden (Müller, Vogt und Ponick 2008, S. 511).«

Die dort auftretenden Proportionalitätsfaktoren sind Induktivitäten  $L$ . Für die Flussverkettung  $\Psi_n$  einer Wicklung  $n$  mit dem gesamten Feld des Stromes  $i_k$  der Wicklung  $k$  gilt

$$\Psi_n = L_{n,k} \cdot i_k = \int_{\text{Wicklungen}} B_k dA \quad (1.27)$$

Dabei stellt der Proportionalitätsfaktor  $L$  zwischen der Flussverkettung einer Wicklung und ihrem eigenen Strom die Selbstinduktivität dar (Ternes 2013, S. 24). Ströme die in anderen Wicklungen fließen, nennt man Gegeninduktivitäten. Ausgehend von Gl. 1.27 ergibt sich die allgemeine Berechnungsvorschrift für eine Induktivität  $L_{n,k}$  die Beziehung

$$L_{n,k} = \frac{\Psi_n}{i_k} \quad (1.28)$$

Die Induktivitäten lassen sich im stationären Betrieb der Maschine lassen sich entsprechend Reaktanzen zuordnen.

$$X = \omega L \quad (1.29)$$

### 1.3.1 Streuinduktivitäten und Streureaktanzen

Man erhält die Streuinduktivität gemäß der allgemeinen Beziehung in Gl. 1.28. Das prinzipielle Vorgehen zur Berechnung von Streuflussverkettungen kann aus Müller, Vogt und Ponick (2008, S. 311) entnommen werden. Entsprechend ergeben sich verschiedene Arten von Streuung.

#### Nut- und Zahnkopfstreuung

Nach Müller, Vogt und Ponick (2008, S. 323) erhält man für die Teilstreufelder im Nut- und Zahnkopfraum entsprechend umgerechnet in die Streureaktanz

$$X_\sigma = \omega L_\sigma \quad (1.30)$$

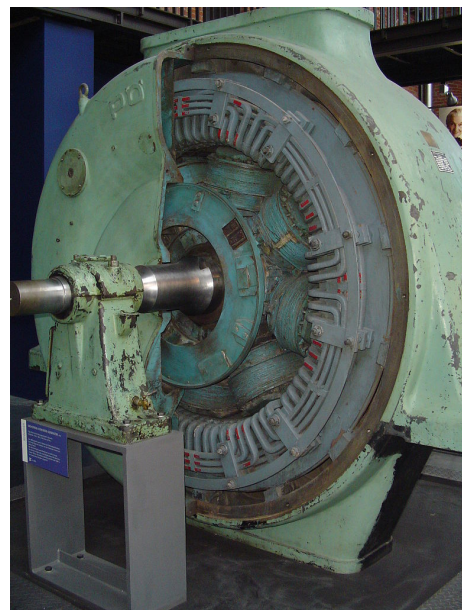
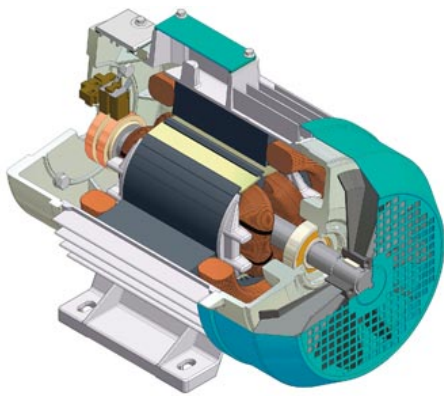
Nach Müller, Vogt und Ponick (2008, S. 533–536) ergibt sich für den allgemeinen relativen Streuleitwert

**Tabelle 1.1:** Abhängigkeiten für den allgemeinen relativen Streuleitwert nach Müller, Vogt und Ponick (2008).

Streuungskomponente	$\lambda_\sigma =$
Nut- und Zahnkopfstreuung	$\frac{\lambda_{nz}}{q}$
Wicklungskopfstreuung	$\lambda_w$
Oberwellenstreuung	$\sigma_o \lambda_h \xi_p^2$
Schrägungsstreuung	$\sigma_{schr} \lambda_h \xi_p^2$

## 1.4 Einführung Synchronmaschine

**Historischer Hintergrund** Die ersten Synchronmaschinen wurden als Einphasengenerator entwickelt und gebaut, den ersten dreiphasigen Synchrongenerator entwickelten 1887 unabhängig voneinander F. A. Haselwander<sup>1</sup> und C. S. Bradley<sup>2</sup>. Bei den Entwicklungen bildeten sich die Bauformen der Schenkelpol- und Vollpolmaschine aus. Die Weiterentwicklung der Synchronmaschine hing stark mit dem Ausbau der Energieversorgung und dem Bedarf von leistungstärkeren Generatoren zusammen. Unabhängig von der Entwicklung wurden schon sehr früh Synchronmaschinen als Antriebsmaschinen für eine konstante Drehzahlregelung oder einen Phasenbetrieb in der Industrie eingesetzt (Fischer 2009, S. 287; Müller und Ponick 2006, S. 485f.).



**Abbildung 1.7:** Abbildungen zweier Synchron Generatoren verschiedener Leistungsklassen.

Die gleichstromgespeiste Erregerwicklung ermöglicht es, das Magnetfeld unabhängig vom Netz zu beeinflussen. Als Spannungsquelle für die Speisung der Erregerwicklung wurden sog. Gleichstromerregermaschinen eingesetzt, in der heutigen Zeit werden Wechselspannung mit Hilfe von Leistungselektronischen Schaltungen gespeist. Um die Schleifringübertragung der Erregerleistung zu umgehen, werden schleifring- bzw. bürstenlose Erregersysteme realisiert

1 Friedrich August Haselwander war ein deutscher Ingenieur, ein Erfinder der Drehstrom-Synchronmaschine und des kompressorlosen Ölmotors.

2 Charles Schenk Bradley war ein US-amerikanischer Elektrotechniker, Erfinder und Pionier von frühen Elektromotoren. Er zählt neben F. A. Haselwander zu den Begründern des heute im Bereich der elektrischen Energietechnik eingesetzten Dreiphasenwechselstromes.

(Ternes 2012, S. 108). Als Motor wurden Drephasen-Synchronmaschinen schon bald für große Leistungen eingesetzt, z. B. zum Antrieb von Pumpen und Verdichten (Müller und Ponick 2006, S. 486). Der Nachteil ist, dass die Drehzahl durch die Netzfrequenz festgelegt ist. Die Synchronmaschine arbeitet unabhängig von der Belastung stets mit der durch die Netzfrequenz und die ausgeführte Polpaarzahl festgelegten synchronen Drehzahl.

Heute ist es möglich mit Hilfe eines Frequenzumrichters die Drehzahl der Synchronmaschine zu steuern. Aus diesem Grund werden größere Gleichstrommaschinen durch drehzahlvariable Synchronmaschinen abgelöst. Im Bereich kleinerer Leistungen wird anstelle der Gleichstromerregung eine Erregung durch Permanentmagnete eingesetzt. Dabei verliert man die Beeinflussung des Erregerzustandes über den Erregerstrom, dafür erhält man eine elektrische Maschine die keine elektrische Verbindung zum Läufer erfordert.

### 1.4.1 Spannungsgleichungen und Ersatzschaltbild

Die Synchronmaschine mit Vollpolläufer ist wegen ihres konstanten Luftspaltes mathematisch leichter erfassbar, als die Synchronmaschine mit Schenkelpolläufer. Als Grundlage für weitere Betrachtungen dient dieses mathematische Modell als Grundlage. Weiterhin wird vereinbart, dass

- quasistationärer Betrieb
- Verbraucherzählpfeilsystem
- rechtsgängige Spulen
- läuferfeste, komplexe Ebene

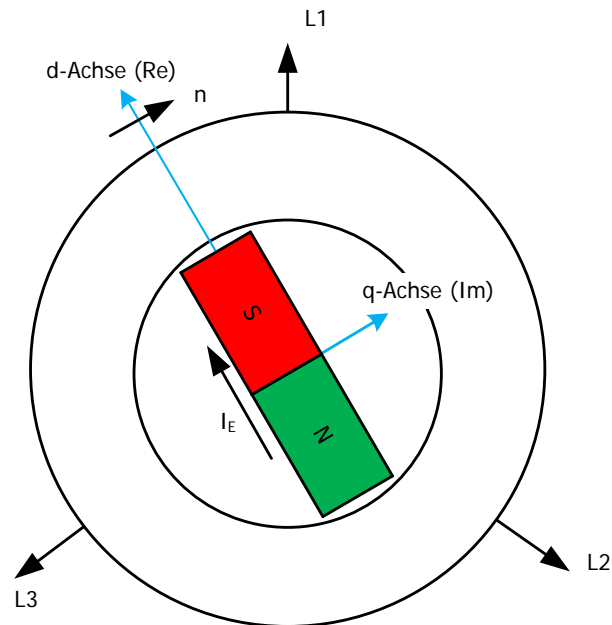
vorliegt s. h. Abbildung 1.8.

Der Ständerkreis kann in den Läuferkreis keine Spannung induzieren, weil Ständerfeld und Läuferfeld gleiche Drehzahl haben und somit im Läufer keine ständerbedingten Flussänderungen entstehen. Mit dieser Erkenntnis und den oben genannten Voraussetzungen wird der Läuferkreis durch die Gleichung

$$U_e = I_e \cdot R_e \quad (1.31)$$

beschrieben.

Die Induktivität  $L_e$  bringt wegen



**Abbildung 1.8:** Veranschaulicht das mit  $n$  rotierende  $d, q$ -System, in dem der Maschinenzustand durch ruhende Zeiger ausgedrückt wird.

$$\frac{di_e}{dt} = 0$$

keinen Beitrag. Die Spannungsgleichung für den Ständerkreis ergibt sich zu

$$U_1 = R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + jX_h \underline{I}_\mu \quad (1.32)$$

Bei der Synchronmaschine entsteht die Magnetisierungsstrombelagswelle aus der Ständer- und der Läuferstrombelagswelle. Der Magnetisierungsstrom setzt sich entsprechend zusammen

$$\underline{I}_\mu = \underline{I}_1 + I'_e \quad (1.33)$$

Damit ergibt sich für die Ständerspannung  $U_1$

$$U_1 = R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + jX_h \underline{I}_1 + jX_h \underline{I}'_e \quad (1.34)$$

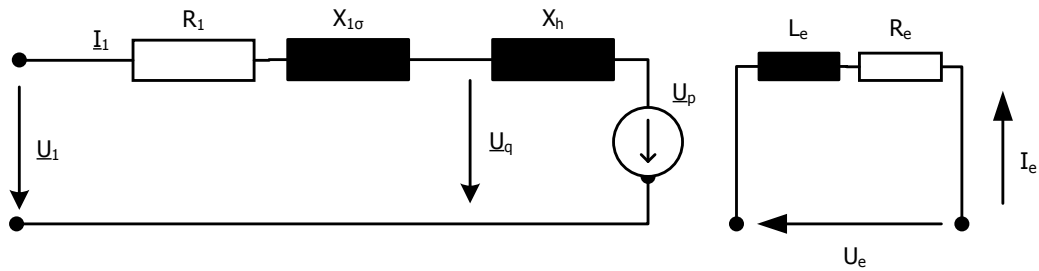
Der vom Ständerstrom unabhängige Term wird als eingeprägte Spannung aufgefasst. Die Polradspannung

$$\underline{U}_p = jX_h \underline{I}'_e \quad (1.35)$$

ist über den Erregerstrom einstellbar. Die Ständerhauptreaktanz  $X_h$  korrespondiert mit dem Drehfeld. Die Hauptfeldspannung

$$\underline{U}_h = jX_h \underline{I}_1 + \underline{U}_p \quad (1.36)$$

hat wie das Drehfeld zwei Komponenten, eine ständerbedingte und eine polradbedingte.



**Abbildung 1.9:** Ersatzschaltbild der Synchronmaschine.

Haupt- und Streureaktanz des Ständerkreises werden häufig zur synchronen Reaktanz zusammengezogen

$$X_d = X_1 + X_h \quad (1.37)$$

Die daraus folgende relative synchron Reaktanz ist eine wichtige Kenngröße der Synchronmaschine.



$$x_d = \frac{I_1}{U_1} \cdot X_d \quad (1.38)$$

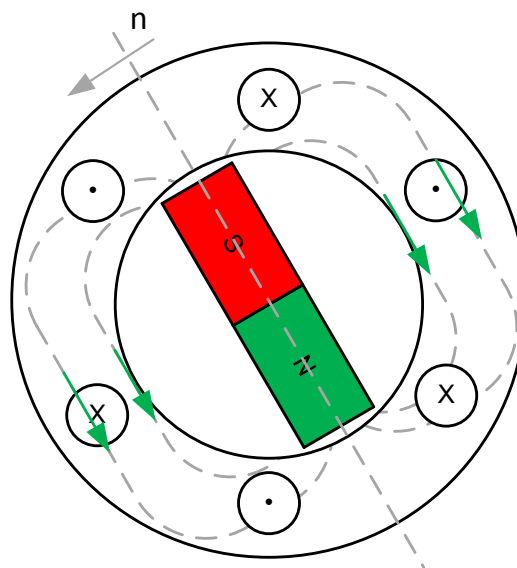
Als Richtwert gilt

$$x_d = 1.2 \dots 1.5 \text{ Vollpolläufer} x_d = 0.6 \dots 1.6 \text{ Schenkelpolläufer}$$

Der Ständerkreisverlustwiderstand ist etwa mit

$$R_1 \approx 0.07 X_d \quad (1.39)$$

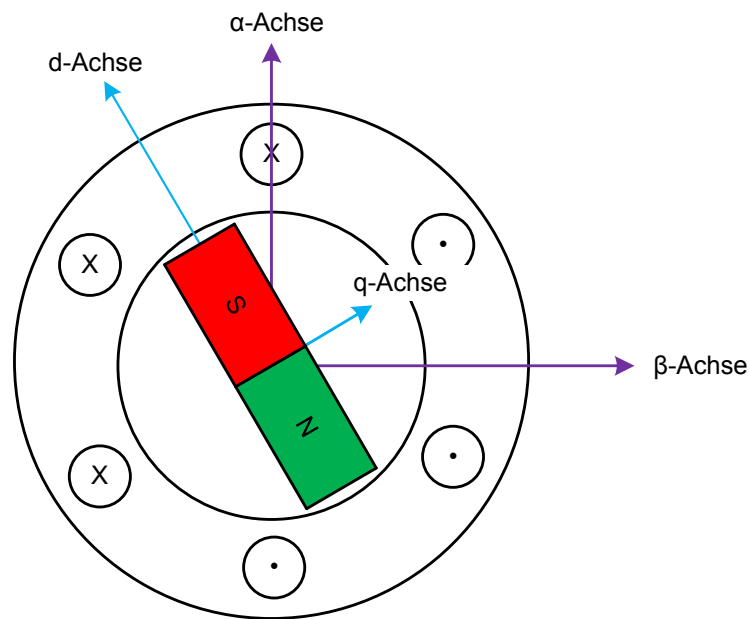
anzusetzen.



**Abbildung 1.10:** Erzeugung einer mehrphasigen Spannung durch ein räumlich sinusförmiges Läuferdrehfeld.

### 1.4.2 Beschreibung der Synchronmaschine im d,q-Koordinatensystem nach Schröder (2000)

Im folgenden wird angenommen, dass die Speisung des Polrads durch Permanentmagneten ersetzt wird. In diesem Fall verbleiben nur die drei Statorwicklungen als stromdurchflossene Wicklungen. Wesentlich bei den nachstehenden Überlegungen ist es, ob die Synchronmaschine als symmetrische Maschine (Vollpolläufer) oder als unsymmetrische Maschine (Schenkelpolläufer) konzipiert ist. Die Wahl der Konzipierung hat Auswirkungen auf die Möglichkeit, Feldschwähebetrieb zu erreichen oder nur bedingt und dann mit Einschränkungen (Schröder 2000, S. 291).



**Abbildung 1.11:** Darstellung der Synchronmaschine im dq-Koordinatensystem.

Wird die Synchronmaschine in der Statorwicklung mit einer sinusförmigen Spannung versorgt, so ist diese als (PMSM) permanentmagneterregte Synchronmaschine definiert. Bei einer trapezförmigen Speisung der Statorwicklung wird die Maschine als (BLDC) bürstenlose Gleichstrommaschine bezeichnet. Der einfachste Fall für die Ermittlung des Signalflussplanes ist die Annahme, dass die Maschine an der Statorwicklung eine sinusförmige Spannung anliegt und die Maschine symmetrisch konzipiert wurde. Bei einer symmetrisch konzipierten Synchronmaschine werden die Reluktanzeinflüsse nicht wirksam. Damit ergeben sich nach Schröder (2000, S. 291) folgende Gleichungen für die Synchron-Vollpolmaschine.

Aufgrund der besonderen konstruktiven Situation wird für den Rotor das mit dem Rotor umlaufende Koordinatensystem  $L$  jetzt mit den allgemein verwendeten Achsenbezeichnungen  $d$  und  $q$  gewählt (s. h. Abbildung 1.12). Damit wird die Kreisfrequenz  $\Omega_L$  des umlaufenden Koordinatensystems  $L(d, q)$  auf die mit der Polpaarzahl  $Z_p$  umgerechnete mechanische Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_m$  des Rotors festgelegt ist. Aus den obigen Kenntnissen ergibt sich dann Schröder (2001, S. 682)

$$\Omega_L = Z_p \cdot \Omega_m \quad (1.40)$$

Die Spannungsgleichungen der Synchronmaschine ergeben sich entsprechend zu

Spannungsgleichungen (Vollpolmaschine) nach Schröder (2000)

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = U_d - R_1 \cdot I_d + \Omega_L \cdot \Psi_q \quad (1.41)$$

$$\frac{d\Psi_q}{dt} = U_q - R_1 \cdot I_q + \Omega_L \cdot \Psi_d \quad (1.42)$$

mit

$$\Psi_d = \Psi_{PM} + L_d \cdot I_d \quad (1.43)$$

$$\Psi_q = L_q \cdot I_q \quad (1.44)$$

Damit ergibt sich das innere Luftspaltdrehmoment  $M_i$  zu:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot (\Psi_d \cdot I_q - \Psi_q \cdot I_d) \\ &= \frac{3}{2} \cdot Z_p \cdot \left( \underbrace{\Psi_{PM} \cdot I_q}_{\text{Hauptmoment}} + \underbrace{(L_d - L_q) \cdot I_d \cdot I_q}_{\text{Reluktanzmoment}} \right) \end{aligned} \quad (1.45)$$

und der allgemeinen mech. Bewegungsgleichung

$$\Theta \cdot \frac{d\Omega_m}{dt} = M_i - M_L \quad (1.46)$$

### 1.4.3 Beschreibung der Synchronmaschine im d,q-Koordinatensystem nach Kellner (2012)

Auf die grundlegenden elektrischen Effekte reduziert kann eine PMSM nach Abbildung ?? dargestellt werden; drei konzentrierte Induktivitäten im Ständerblechpaket zusammen mit dem Permanentmagneten im Rotor. Für die Herleitung der Zusammenhänge wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen, hierfür wird auf einschlägige Literatur verwiesen (Müller und Ponick 2006; Fischer 2009; Schröder 2000; Kremser 2004)

**Abbildung 1.12:** Graphische Veranschaulichung der verschiedenen Koordinatensysteme: dreiphasig  $(a, b, c)$ , ständerfest  $(\alpha, \beta)$  und rotorfest  $(d, q)$ .

Das Induktionsgesetz besagt, dass die in einer Spule induzierte Spannung gleich der entgegengesetzten Änderung der durch die Wicklung der Spule fließenden Flussverkettung ist (Kellner 2012).

$$u_q = -\frac{d}{dt}\Psi \quad (1.47)$$

**Abbildung 1.13:** Allgemeines Netzwerk des Ständers einer Drehstrommaschine.

Entsprechend Abbildung 1.13 ergeben die die Grundgleichungen einer PMSM ganz allgemein zu

$$u_u = R_1 i_u + \frac{d}{dt}\Psi_u \quad (1.48)$$

$$u_v = R_1 i_v + \frac{d}{dt}\Psi_v \quad (1.49)$$

$$u_w = R_1 i_w + \frac{d}{dt}\Psi_w$$

Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass das dreiphasige System symmetrisch und damit nullsystemfrei ist. Damit lassen sich komplexe Zahlen zur Darstellung der Ströme und Spannungen verwenden. Der Komplexe Spannungszeiger in ständerfesten Koordinaten lautet

$$\underline{u}^{\alpha,\beta} = \frac{2}{3}(u_u + \underline{a}u_v + \underline{a}^2u_w) \quad \text{mit } \underline{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.50)$$

Eine ausführliche Beschreibung der Raumzeigerdefinition ist in Abschnitt 2.1 beschrieben.

»Das innere Drehmoment berechnet sich aus den Luftspaltgrößen und enthält daher keine mechanischen Verluste, wie zum Beispiel Reibungsverluste, die in den Motorlagern auftreten. Bei einer in Sternschaltung betriebenen Maschine, deren Sternpunkt nicht geerdet ist, in Verbindung mit symmetrisch vorgegebenen Klemmenspannungen ist kein Nullsystem vorhanden. Daher wird zur Vereinfachung der Berechnungen davon ausgegangen, dass das betrachtete System kein Nullsystem besitzt, auch wenn die vom Umrichter erzeugten Spannungen in der Realität nicht ideal sind und die Nullsystemfreiheit nicht für Motoren in Dreiecksschaltung zutrifft (Kellner 2012, S. 25).«

Es gilt:

$$u_u + u_v + u_w = 0 \quad (1.51)$$

Aus den Gleichungen 1.49, 1.50 und 1.51 ergibt sich dann in ständerfesten Koordinaten abhängig von Phasenströmen und -flussverkettungen

$$\underline{u}^{\alpha,\beta} = \frac{2}{3} \left[ (R_1 i_u + \frac{d}{dt} \Psi_u) \cdot (1 - \underline{a}^2) + (R_1 i_v + \frac{d}{dt} \Psi_v) \cdot (\underline{a} - \underline{a}^2) \right] \quad (1.52)$$

## 2 Grundlagen der Vektorregelung

In modernen Antriebssystemen ist es häufig unerlässlich, entscheidende Maschinengrößen wie Drehzahl oder Drehmoment auf einen gewünschten Wert einzustellen. Dabei kamen der Vergangenheit häufig Gleichstrommaschinen zum Einsatz, welche sich durch gute Regel- und Einstelleigenschaften bei den geforderten Parametern auszeichnen. Große Fortschritte in den Bereichen der Leistungselektronik und Reglerkomponenten führen dazu, dass Antriebe wesentlich einfacher mit Synchronmaschinen realisiert werden können. Dabei haben Drehfeldmaschinen, aufgrund fehlender mechanischer Kommutation den Vorteil, dass kein nennenswerter Verschleiß auftritt.

Entscheidend für den Aufbau einer geregelten PMSM ist die Vektor- bzw. feldorientierte Regelung. Die Maschine wird näherungsweise mit sinusförmigen Strömen gespeist. Ebenso besitzen alle weiteren auftretenden elektrischen Größen wie Spannungen, Flüsse oder Felder aufgrund ihres Zeitverhaltens annähernd Sinusform (Nuss 2010, S. 1). Die Idee der Vektorregelung ist es nun, nicht die zeitlichen Momentanwerte der Ströme zu verändern, sondern die erfassten Wechselgrößen in ein Zwei-komponentiges rotierendes Koordinatensystem zu übertragen. Dabei beschreibt eine Komponente das Drehmoment, während die andere Komponente die magnetische Flussdichte darstellt. Diese Größen werden regelungstechnisch verwertet und zurück transformiert.

### 2.1 Raumzeigerdarstellung

Die stationären Zusammenhänge der elektrischen Größen in der Maschine, welche ursächlich aus dem Zusammenhang von  $\Psi$  und  $B$  herrühren, können zunächst mithilfe komplexer Zeitzeiger beschrieben werden. Dabei lassen sich die Statorströme,  $i_u$ ,  $i_v$ , und  $i_w$  einer Drehfeldmaschine mit idendischer Amplitunde  $\hat{i}_s$  und Statorkreisfrequenz  $\omega_s$  und der in Kapitel 1.1.2 angeführten Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = 120^\circ$  als

$$\begin{aligned} i_{s,n} &= \operatorname{Re}\{i_{s,n}\} = \operatorname{Re}\{\hat{i}_{s,i} \cdot e^{j\omega_s t}\} = \operatorname{Re}\left\{\hat{i}_s \cdot e^{j(\omega_s t + 0 - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3})}\right\} \\ &= \hat{i}_s \cdot \cos\left(\omega_s t + \varphi_0 - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3}\right) ; \text{ mit } n = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

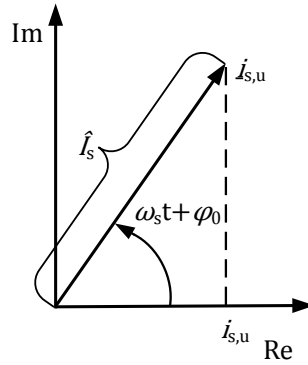
mit den komplexen Zeitzeigern

$$\underline{i}_{s,n} = \hat{i}_{s,n} \cdot e^{j\omega_s t} ; \text{ mit } n = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

und den komplexen Amplituden

$$\hat{i}_{s,n} = \hat{i}_s \cdot e^{j(\omega_s t + 0 - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3})} ; \text{ mit } n = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

entwickeln. Die folgende Abbildung 2.1 veranschaulicht die vorangegangenen Gleichungen 2.1, 2.2 sowie 2.3 und stellt beispielhaft den Zeitzeiger  $i_{s,u}$  dar.



**Abbildung 2.1:** Beispielhafte Lage eines Zeitzeigers.

Da das Ziel darin besteht, den dynamischen Rotationsvorgang einer PMSM zu modellieren, ist die Verwendung eines Zeitzeigers, mit dem nur stationäre Vorgänge beschrieben werden können, nicht angebracht. Hier ist es zweckmäßig, einen Operator so zu entwickeln, dass dieser in der Lage ist, dynamische Vorgänge zu beschreiben, ohne dazu Nebenbedingungen wie beispielsweise die Periodizität heranzuziehen. Bei der Entwicklung bieten sich die Statorphasenströme  $i_{s,u}$ ,  $i_{s,v}$ , und  $i_{s,w}$  des Dreiphasensystems an. Diese stehen zu jedem Zeitpunkt zur Verfügung. Es sei angemerkt, dass dabei die Nullbedingung erfüllt ist. Die Summe der Statorphasenströme muss immer Null sein, was beim Einsatz von Drehfeldmaschinen idr. gegeben ist. Dadurch ist es auch immer möglich mit Kenntnis zweier Größen auf die Dritte zu schließen, da gilt:

$$i_{s,u} + i_{s,v} + i_{s,w} = 0 \quad (2.4)$$

Nun ist der zweikomponentige Zeitzeiger immer um mindestens zwei Momentanwerte erweiterbar. Ein hierfür geeigneter Ansatz zur Erzeugung eines Raumzeigers wurde erstmals in kovacs1959 veröffentlicht:

$$\underline{i}_s(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ \underline{i}_{s,u}(t) + \underline{i}_{s,v}(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + \underline{i}_{s,w}(t) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \right\} \quad (2.5)$$

Um jetzt aufzeigen zu können, dass der Ansatz aus 2.5 im stationären Zustand mit dem entsprechenden Statorstromzeitzeiger übereinstimmt und schlussendlich den Raumzeiger zu erzeugen, werden zunächst in 2.5 die Statorstrommomentanwerte aus 2.1 eingesetzt. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \underline{i}_s(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ \hat{i}_s \cdot \cos(\omega_s t + \varphi_0) + \hat{i}_s \cdot \cos\left(\omega_s t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + \right. \\ \left. \hat{i}_s \cdot \cos\left(\omega_s t + \varphi_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wird nun die Cosinus-Funktion durch die entsprechende exponentielle Darstellung ersetzt, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \underline{i}_s(t) = \frac{2}{3} \cdot \hat{i}_s \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\omega_s t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_s t + \varphi_0)}) + \right. \\ \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\omega_s t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(\omega_s t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3})}) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + \\ \left. \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\omega_s t + \varphi_0 - \frac{4\pi}{3})} + e^{-j(\omega_s t + \varphi_0 - \frac{4\pi}{3})}) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nach ausmultiplizieren der Terme folgt mit  $1 + e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{j\frac{8\pi}{3}} = 0$  das Ergebnis und somit der Raumzeiger

$$\underline{i}_s = \frac{2}{3} \cdot \hat{i}_s \cdot \left\{ \frac{3}{2} \cdot e^{j(\omega_s t + \varphi_0)} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j(\omega_s t + \varphi_0)} \cdot \left( 1 + e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{j\frac{8\pi}{3}} \right) \right\} = \hat{i}_s \cdot e^{j(\omega_s t + \varphi_0)} \quad (2.8)$$



Das Ergebnis von 2.8 entspricht strukturell dem in 2.1 angegebenen Statorstromzeitzeiger. Dadurch ist sichergestellt, dass der Ansatz aus 2.5 in der Lage ist als Gesamtzeiger, bestehend aus den Momentanwerten der Statorströme, zu fungieren. Die folgende Abbildung 2.2 zeigt zur Veranschaulichung eine zweipolige Drehfeldmaschine mit zugehörigem Zeigerdiagramm, welches den Statorstromraumzeiger beinhaltet.

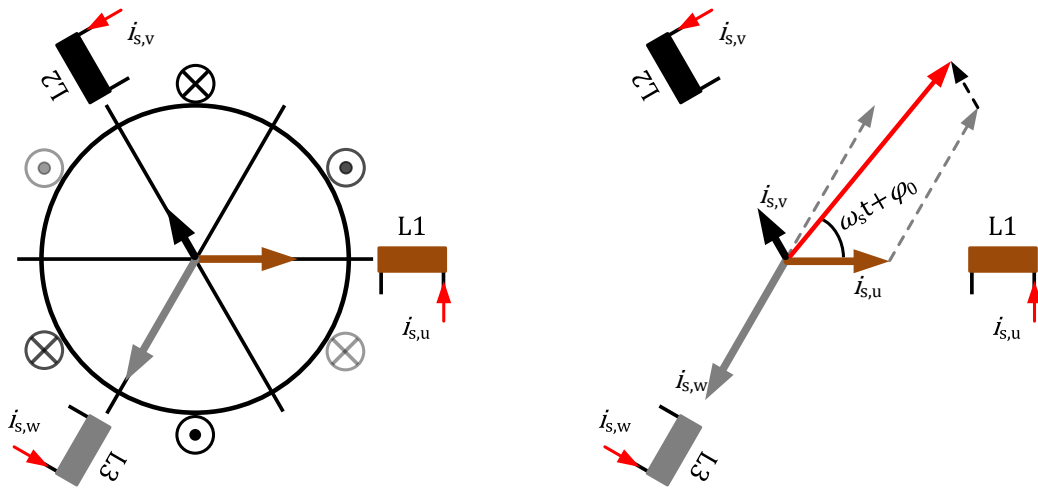


Abbildung 2.2: zweipolige Drehfeldmaschine

Mit der Einführung des Raumzeigers ist die theoretische Grundlage dafür geschaffen, die PMSM mit einer feldorientierten Regelung zu versehen. Da sich, wie Eingangs beschrieben, alle Größen in der Drehfeldmaschine näherungsweise sinusförmig verhalten, ist die Stromraumzeigerdarstellung aus 2.5 für alle anderen dreiphasigen Größen als allgemeine Raumzeigerdarstellung definierbar.

$$\underline{a}(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ \underline{a}_u(t) + \underline{a}_v(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + \underline{a}_w(t) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \right\} \quad (2.9)$$

Im Folgenden werden die in der Praxis benötigten Transformationsvorschriften erläutert, welche das Wechseln zwischen Phasen- und Raumzeigergrößen erlauben.

## 2.2 Beschreibung in $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem

Als Grundlage für das Wechseln zwischen Phasen- und Raumzeigergrößen dient zunächst die Definition aus 2.9. Die Definitionsgleichung lässt sich in Real- und Imaginärteil aufspalten.

Es kommt so zu folgender Aufteilung

$$\operatorname{Re} \underline{a}(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ a_u(t) + a_v(t) \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + a_w(t) \cdot \cos \frac{4\pi}{3} \right\} \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Im} \underline{a}(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ a_v(t) \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + a_w(t) \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right\} \quad (2.11)$$

In Zusammenhang mit der Clarke Transformationsvorschrift ist es üblich, den Realteil in  $\alpha$ - und den Imaginärteil als  $\beta$ -Koordinaten auszudrücken. Daher ist die Clarke Transformation im deutschsprachigen Bereich auch  $\alpha$ - $\beta$ -Transformation bekannt. Um im Weiteren die in der Praxis notwendige Transformationsmatrix zu erhalten, werden die Trigonometrischen Ausdrücke numerisch dargestellt. Aus 2.10 und 2.11 folgt somit

$$a_\alpha(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ a_u(t) - \frac{1}{2} \cdot a_v(t) - \frac{1}{2} \cdot a_w(t) \right\} \quad (2.12)$$

$$a_\beta(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a_v(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a_w(t) \right\} \quad (2.13)$$

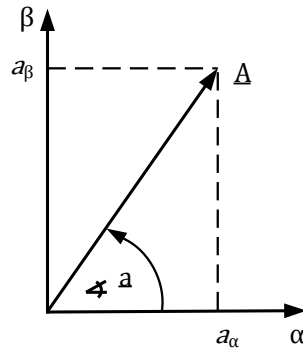
Der entstandene Raumzeiger in  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinaten ist in allgemeiner Form als

$$\underline{a}(t) = a_\alpha(t) + j a_\beta(t) \quad (2.14)$$

darstellbar. Um die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponente des entstandenen Raumzeigers besser nachvollziehen zu können, zeigt die Abbildung 2.3 eine beispielhafte Lage des Zeigers in  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinaten.

Nachdem sich der Raumzeiger im neuern Koordinatensystem darstellen lässt, ist es nun entscheidend, eine mathematische Transformationsvorschrift aufzustellen, die sich an 2.12 und 2.13 orientiert. Übertragen auf eine Vektorschreibweise lautet die Transformation:

$$\begin{bmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \end{bmatrix} = \underline{T}' \begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} \quad (2.15)$$



**Abbildung 2.3:** Beispielhafte Lage des Raumzeigers im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem.

mit der Transformationsmatrix

$$\underline{T}' = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Mit dieser Matrix ist es möglich, die dynamische Drehfeldgrößen eines dreiphasigen Systems auf zwei Größen zu reduzieren sowie Momentanwerte und Amplitude in einem Raumzeiger darzustellen. Der Faktor  $\frac{2}{3}$  normiert dabei  $a_\alpha$  und  $a_\beta$  auf den Betrag der entsprechenden Eingangsgrößen.

Für eine Regelung fehlt eine Rücktransformationsvorschrift, mit deren Hilfe die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponente wieder in ein Dreiphasensystem gebracht werden kann. Die inverse Matrix bildet sich aus der Transformationsmatrix 2.16. Da es sich hier aber um eine nichtquadratische Matrix handelt, ist diese zunächst nicht invertierbar. Folglich muss die Matrix um eine Eingangsgröße erweitert werden. Dabei bietet sich die Nullbedingung des Systems an. Bindet man die Kontengleichung aus 2.4 in 2.16 ein, folgt für die vektorielle Transformationsbeziehung

$$\begin{bmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \\ a_0 \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Die auf diese Art entstandene quadratische Matrix ist eindeutig invertierbar. Daher folgt für

$$\begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} = \underline{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

die inverse Transformationsmatrix

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Für die Praxisanwendung reicht die vereinfachte inverse Clarke-Transformation mit der Beziehung

$$\begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} = \underline{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

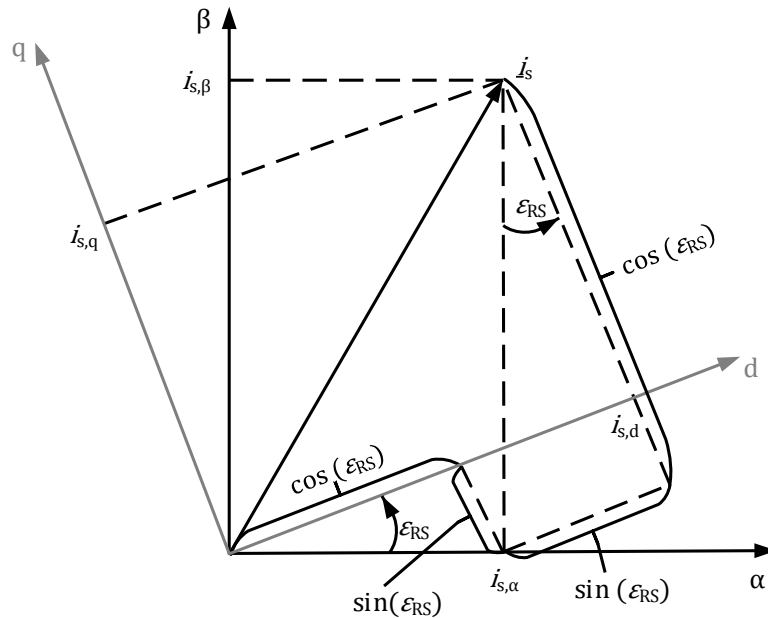
und der Transformationsmatrix

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

aus. Da die Nullkomponente der Phasengröße aufgrund der symmetrischen Belastung null ist, kann auch  $a_0$  null gesetzt werden, was dem Wegfall der letzten Spalte von  $\underline{T}^{-1}$  entspricht.

## 2.3 Beschreibung in rotorfesten d-q-Koordinatensystem

Für die Regelung von Drehfeldmaschinen hat es sich als praktikabel herausgestellt, die Beschreibung des im Vorfeld beschriebenen ortsfesten Koordinatensystems in ein, mit der Winkelgeschwindigkeit des Rotors, rotierendes Koordinatensystem zu überführen. Daher wird die Darstellung auch rotorfest genannt. Die Vorteile dieser Koordinatenbeschreibung liegen zum einen in einer einfacheren Darstellbarkeit elektrophysikalischer Zusammenhänge und zum anderen dass die Raumzeigergrößen näherungsweise Gleichgrößen sind. Dadurch lassen sich klassische Regelverfahren auf die Maschine anwenden. Das Regelverhalten ähnelt dem der Gleichstrommaschine, welche sich durch eine gute Regelbarkeit auszeichnet. Für die folgende Park Transformation dient die zuvor durchgeführte Clarke Transformation als Grundlage. Zur Verdeutlichung der Transformationsvorschriften dient die nachfolgende Abbildung am Beispiel eines Statorstromraumzeigers



**Abbildung 2.4:** Zusammenhang der  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinaten und der  $d$ - $q$ -Raumzeigerkomponenten

Hier ist neben dem ortsfesten  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem auch das rotierende Koordinatensystem erkennbar. Das rotierende System wird als  $d$ - $q$ -Koordinatensystem bezeichnet, wobei  $d$  für direct axis und  $q$  für quadrature axis steht. Der für die Transformation entscheidende Winkel ist hier mit  $\varepsilon_{RS}$  gekennzeichnet. Mit Hilfe der Abbildung lässt sich nun die Transformationsbeziehung zwischen  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinaten und  $d$ - $q$ -Koordinaten aufstellen.

$$\begin{bmatrix} a_d \\ a_q \end{bmatrix} = \underline{T}' \cdot \begin{bmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Die Transformationsmatrix lautet dann

$$\underline{T}' = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_{RS} & \sin \varepsilon_{RS} \\ -\sin \varepsilon_{RS} & \cos \varepsilon_{RS} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Da die Matrix quadratisch ist, kann diese ohne weiteres invertiert werden. Die Rücktransformation von d-q-Koordinaten in  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinaten ist für die Regelung ebenfalls von entscheidender Bedeutung, um aus dem rotierenden Raumzeiger im letzten Schritt wieder die drei Phasengrößen zu erhalten. Es gilt für die Rücktransformation also die Beziehung

$$\begin{bmatrix} a_\alpha \\ a_\beta \end{bmatrix} = \underline{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_d \\ a_q \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

mit der Transformationsmatrix

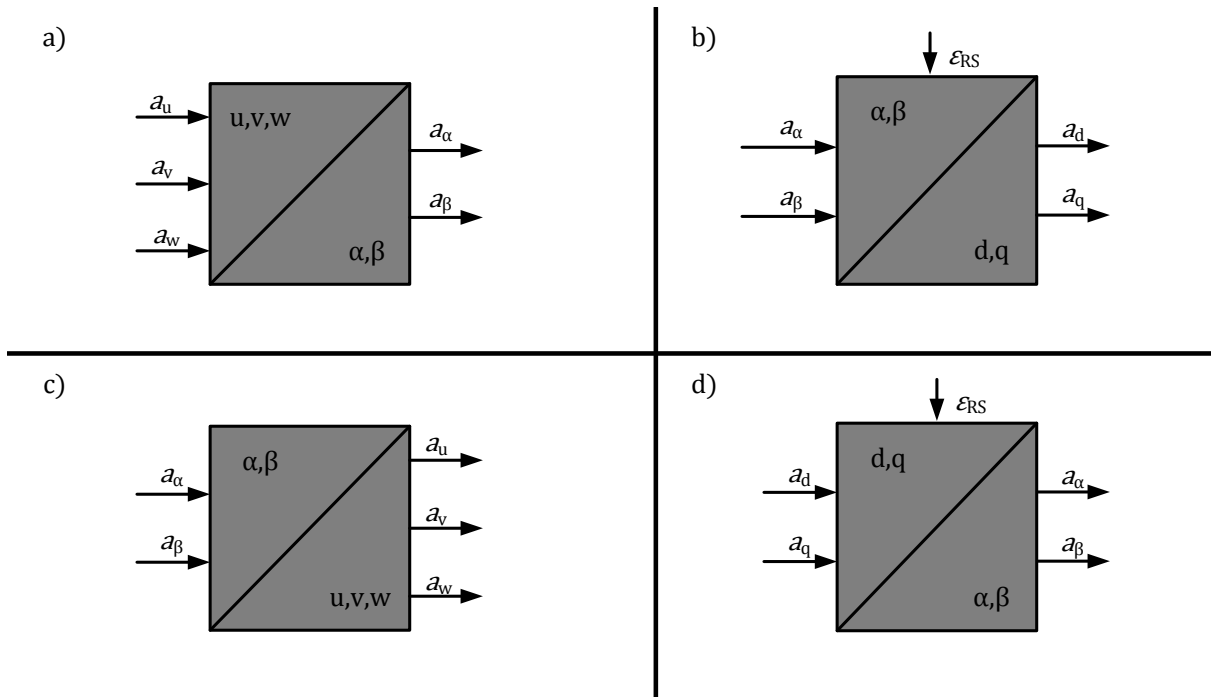
$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_{RS} & -\sin \varepsilon_{RS} \\ \sin \varepsilon_{RS} & \cos \varepsilon_{RS} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

## 2.4 Signalflussplan der Vektorregelung

In diesem Abschnitt mit Hilfe der Transformationsvorschriften aus den vorherigen Abschnitten 2.2 und 2.3 vorbereitend ein Signalflussplan entwickelt werden. Dieser Plan soll im praktischen Teil ins Gesamtsystem integriert werden können. Zur einfacheren Darstellung der Clarke- und Parktransformation werden zunächst entsprechende Signalflussbilder eingeführt.

Bei der Parktransformation muss der Winkel  $\varepsilon_{RS}$ , um den das  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem zum d-q-System verschoben ist, zugeführt werden.

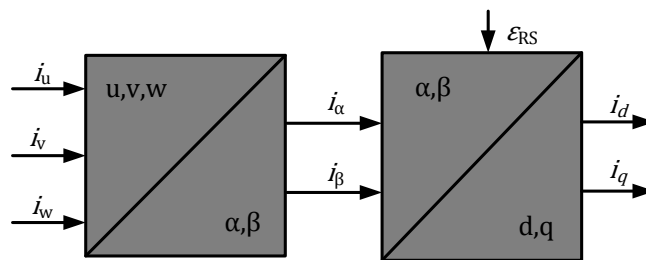
Die entsprechenden Rücktransformationen werden in den folgenden zwei Abbildungen dargestellt.

**Abbildung 2.5:** Clarke Blockbild

Mit Hilfe der Blockbilder kann jetzt die sowohl die vollständige Hintransformation eines Dreiphasensystems in ein rotatorisches, zweikomponentiges Bezugssystem, als auch die entsprechende Rücktransformation, als Signalfussbild skizziert werden.

Abbildung ?? zeigt die Transformation der Statorphasenströme  $i_u$ ,  $i_v$  und  $i_w$  in d-q-Komponenten, während die nachfolgende Grafik ?? die zusammenhängende Rücktransformation verbildlicht.

a)



b)

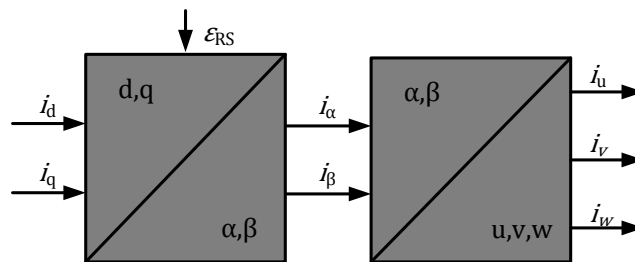


Abbildung 2.6: Park Blockbild



## **3 Anforderungsprofil für die Regelung der PMSM mit Simulink**

### **3.1 Eingabe und Ausgabedaten**

### **3.2 Darstellung der Simulationsergebnisse**

## **4 Regelung der PMSM mit Simulink**

### **4.1 Einführung in Simulink**

### **4.2 Einführung in die TI-Bibliotheken**

### **4.3 Übersicht der Regelstruktur**

#### **4.3.1 Subsysteme**

## **5 Auswertung der Simulationsergebnisse**

### **5.1 Vergleich der Ergebnisse der TI-Bibliotheken**

## 6 Zusammenfassung

# Literatur

- Binder, Andreas (2012). *Elektrische Maschinen und Antriebe: Übungsbuch - Aufgaben mit Lösungsweg*. Berlin: Springer.
- Bolte, Ekkehard (2012). *Elektrische Maschinen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. (Besucht am 14.07.2014).
- Bronstein, I. N. u. a. (2012). *Taschenbuch der Mathematik*. 8. Aufl. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Felderhoff, Rainer und Udo Busch (2006). *Leistungselektronik*. 4. Aufl. München: Hanser.
- Fischer, Rolf (2009). *Elektrische Maschinen*. 14. Aufl. München: Hanser.
- Fuest, Klaus und Peter Döring (2004). *Elektrische Maschinen und Antriebe: Lehr- und Arbeitsbuch ; mit zahlreichen durchgerechneten Beispielen und Übungen sowie Fragen und Aufgaben zur Vertiefung des Lehrstoffes*. Wiesbaden: Vieweg.
- Gerke, Wolfgang (2012). *Elektrische Maschinen und Aktoren: Eine anwendungsorientierte Einführung*. (Besucht am 13.07.2014).
- Grune, Rayk (2012). »Verlustoptimaler Betrieb einer elektrisch erregten Synchronmaschine für den Einsatz in Elektrofahrzeugen«. Dissertation. TU Berlin.
- Hagmann, Gert (2008). *Grundlagen der Elektrotechnik*. 13. Aufl. Ulm: AULA.
- Hahn, Ulrich (2007). *Physik für Ingenieure*. München: Oldenbourg.
- Henke, Heino (2011). *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. 4. Aufl. Berlin: Springer.
- Hofmann, Wilfried (2013). *Elektrische Maschinen: [Lehr- und Übungsbuch]*. München [u.a.]: Pearson.
- Kellner, Sven (2012). »Parameteridentifikation bei permanenterregten Synchronmaschinen«. Dissertation. TU Erlangen-Nürnberg.

- Knorrenschild, Michael (2014). *Mathematik für Ingenieure 2: Angewandte Analysis im Bachelorstudium*. München: Hanser.
- Kofler, Michael und Hans-Gert Gräbe (2002). *Mathematica: Einführung, Anwendung, Referenz*. München [u.a.]: Addison-Wesley.
- Kornmeier, Martin (2013). *Wissenschaftliches schreiben leicht gemacht*. 6. Aufl. Bern: Haupt UTB.
- Kovács, K. und I. Rácz (1959). *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen*. Budapest: Verlag der ungarischen Akademie der Wissenschaften.
- Kremser, Andreas (2004). *Elektrische Maschinen und Antriebe: Grundlagen, Motoren und Anwendungen*. Stuttgart [u.a.]: Teubner.
- Lingnau, Anselm (2007). *LaTeX hacks*. Köln: O'Reilly.
- Lutz, Holger und Wolfgang Wendt (2012). *Taschenbuch der Regelungstechnik*. 9. Aufl. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Müller, Germar und Bernd Ponick (2006). *Elektrische Maschinen*. Weinheim: Wiley-VCH.
- Müller, Germar, Karl Vogt und Bernd Ponick (2008). *Berechnung elektrischer Maschinen*. Weinheim: Wiley-VCH-Verl.
- Nuss, Uwe (2010). *Hochdynamische Regelung elektrischer Antriebe*. Berlin; Offenbach: VDE-Verl.
- Papula, Lothar (2003). *Mathematische Formelsammlung*. 8. Aufl. Wiesbaden: Vieweg.
- (2009a). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Band 1, Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. 12. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
  - (2009b). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Band 2, Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. 12. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Perassi, Hector (2006). »Feldorientierte Regelung der permanenterregten Synchronmaschine ohne Lagegeber für den gesamten Drehzahlbereich bis zum Stillstand«. Dissertation. TU Ilmenau.
- Riefenstahl, Ulrich (2010). *Elektrische Antriebssysteme: Grundlagen, Komponenten, Regelverfahren, Bewegungssteuerung*. 3. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag.

- Scherf, Helmut (2010). *Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme eine Sammlung von Simulink-Beispielen*. München: Oldenbourg.
- Schlosser, Joachim (2014). *Wissenschaftliche Arbeiten schreiben mit LaTeX : Leitfaden für Einsteiger*. 5. Aufl. Heidelberg u. a.: mitp.
- Schröder, Dierk (2000). *Elektrische Antriebe: Grundlagen*. Berlin [u.a.]: Springer.
- (2001). *Regelung von Antriebssystemen*. Berlin [u.a.]: Springer.
- Stöcker, Horst (2010). *Taschenbuch der Physik*. 6. Aufl. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Ternes, Benjamin (2012). »Beitrag zur internationalen ANSYS Konferenz in Kassel – Simulation des Synchronprozesses«. In: *Nutzung des Tools EM-Praktikum und ANSYS in den Lehrveranstaltungen der Elektrischen Maschinen*. CADFEM, S. 108–112.
- (2013). »Softwaregestützte Berechnung von Stator- und Rotoroberströmen in Abhängigkeit der Drehzahl eines asynchronen Käfigläufermotors auf Basis der Oberfeldtheorie«. Bachelorarbeit. FH Dortmund, University of Applied Science und Arts.
- Theisen, M. R. (2013). *Wissenschaftliches Arbeiten*. 16. Aufl. München: Vahlen.
- Unbehauen, Heinz (2008). *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- (2009). *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Auflage: 9., durchges. u. korr. Aufl. 2007. 2., korr. Nachdruck 2009. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. 447 S.
- (2011). *Regelungstechnik III: Identifikation, Adaption, Optimierung*. Auflage: 7., korr. Aufl. 2011. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. 616 S.
- Wökl-Bruhn, Henning (2009). »Synchronmaschine mit eingebetteten Magneten und neuartiger variabler Erregung für Hybridantriebe«. Dissertation. TU Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig.