Estadística II. Laboratorio 1

Febrero 2024

1. Sesgo y Error

1. Si X_1, X_2, ..., X_n forman una muestra aleatoria de una población con media μ, qué condición se debe imponer sobre las constantes a_1, a_2, ..., a_n para que el siguiente estimador sea insesgado:

$$\hat{\mu} = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$$

2. Si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son estimadores insesgados del mismo parámetro poblacional θ, qué condición debe ser impuesta sobre las constantes k_1 y k_2 para que el siguiente estimador sea insesgado:

$$\hat{\theta}_3 = k_1\hat{\theta}_1 + k_2\hat{\theta}_2$$

3. Suponga que $X_1 = k_1$, $X_3 = k_2$, ..., $X_n = k_n$ es una muestra aleatoria de una población del tipo Bernoulli, con un parámetro poblacional θ y con $k_i = \{0, 1\}$.

   Definamos una variable aleatoria como $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Mueste si el siguiente estimador es insesgado:

$$\hat{\theta} = \frac{X + 1}{n + 2}$$

4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una problación normal con media μ, bajo que condiciones el siguiente estimador de la varianza (σ^2) es insesgado:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{n}$$

5. Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución del tipo binomial con parámetros n y θ, muestre si el siguiente estimador es un estimador insesgado de la varianza de X dada por $n\theta(1-\theta)$:

$$\hat{\sigma}^2 = n\left(\frac{X}{n}\right)\left(\frac{n-X}{n}\right)$$

6. Suponga una muestra aleatoria de tamaño 2, X_1 y X_2, de una población con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\theta^2 & \text{para } 0 < x < \frac{1}{\theta} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si suponemos que $\lambda = \frac{1}{\theta}$ es una forma alterna de ver el parámetro de la función de densidad, ¿qué valor debe tomar la constante c para que el siguiente estimador sea insesgado?:

$$\hat{\lambda} = c(X_1 + 2X_2)$$

2. Eficiencia

1. Suponga que $\overline{X}_1$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n de una población con función de distribución normal, cuyos parámetros son: μ y σ_1^2. Asimismo, suponga que $\overline{X}_2$ es la media de otra muestra aleatoria de tamaño n de una población con función de distribución normal con parámetros μ y σ_2^2. Suponiendo que ambas muestras son idependientes, muestre que:

   (i) El estimador $\hat{\mu} = \omega\overline{X}_1 + (1-\omega)\overline{X}_1$, donde $0 \leq \omega \leq 1$ es insesgado.

   (ii) La varianza del estimador $\hat{\mu}$ es mínima cuando:

$$\omega = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

2. Sean X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una población con densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x\frac{1}{\theta}} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Suponga los siguientes estimadores: $\hat{\theta}_1 = X_1$ y $\hat{\theta}_2 = \overline{X}$:

(i) Encuentre las varianzas de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.

(ii) Diga cuál de los dos estimadores es más eficiente.

(iii) Diga si alguno de los dos alcanza la cota inferior Cramér-Rao.

3. Sean X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una población con densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{para } 0 < x < \theta \\ o & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Tomemos como estimador de θ a:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3}{2}\overline{X}$$

Explique si el estimador cumple con la cota inferior de Cramér-Rao.

3. Consistencia

1. Sean X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una población con distribución exponencial y parámetro θ dada por:

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Muestre si alguno de los siguientes estimadores es un estimador consistente de θ:

$$\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \tag{1}$$

$$\hat{\theta}_n = X_1 \tag{2}$$

$$\hat{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3}$$

4. Suficiencia

1. Sean X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una población con distribución exponencial y parámetro θ:

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Muestre que el siguiente estimador es un estimador suficiente:

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

2. Sean X_1, X_2 y X_3 una muestra aleatoria de una población con distribución Bernoulli y parámetro θ:

$$p(X_i = k_i) = \begin{cases} \theta^{k_i}(1-\theta)^{k_i} & \text{para } k_i = 0, 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Muestre si los siguientes estimadores son suficientes:

$$\hat{\theta}_1 = X_1 + X_2 + X_3 \tag{4}$$

$$\hat{\theta}_2 = X_1 + 2X_2 + 3X_3 \tag{5}$$

3. Sea $\overline{X}$ un estimador de la media μ de una función de densidad de probabilidad normal con varianza σ^2:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

¿Es $\overline{X}$ un estimador suficiente?

Tip 1: Desarrolle

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}((x_i-\overline{X})-(\mu-\overline{X}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2 \end{aligned}$$

Tip 2: Utilizando el resultado anterior, determine una factorización de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.