Pruebas de Hipótesis

Existen 2 tipos de errores que podemos cometer cuando realizamos una prueba de hipótesis:

1. **Error Tipo I**. Podemos rechazar H_0 cuando H_0 es cierta. La probabilidad que identifica a este error es denotada por α, y

2. **Error Tipo II**. Podemos equivocarnos en no rechazar H_0 cuando H_0 es falsa. La probabilidad que identifica a este error es denotada por β.

Al mismo tiempo existen 2 tipos de **desiciones correctas**:

1. Podemos no rechazar H_0 cuando H_0 es cierta, y

2. Podemos rechazar H_0 cuando H_0 es falsa.

En resumen,, tenemos lo siguiente:

Cuadro 1: Tabla Tipo de Error

		Estado verdadero de la naturaleza	
		H_0 cierta	H_1 cierta
Desición	No rechazo H_0	Desición Correcta	Error Tipo II: β
	Rechazo H_0	Error Tipo I: α	Desición Correcta

En la Figura 1 ilustramos el valor de la constante K que delimita cada uno de los tipos de error. Asimismo, en la Figura 1 se ilustran los tipos de error y las probabilidades asociadas a cada uno.

Definiremos el concepto de **Potencia de una Prueba**, la cual será el valor dado por $1-\beta$. De forma similar definiremos el **Nivel de Significancia de una Prueba** al valor de α.

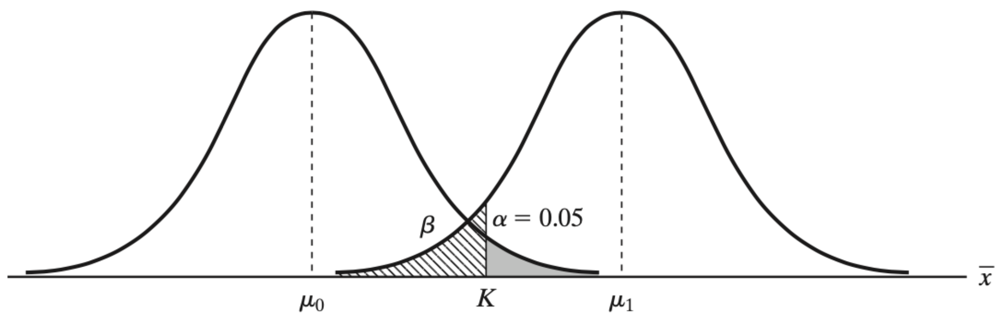

Figura 1: Ilutración de las probabilidades de Error Tipo I y Error Tipo II. Retomado de Miller y Miller (2014; p. 340) I. Miller y M. Miller 2014

Pruebas para medias, varianzas y proporciones

Pruebas para medias

Ejemplo. Supongamos una muestra aleatoria de las calificaciones de 25 alumnos de una materia y escuela determinadas. Supongamos que la población de donde se seleccionó la muestra tiene una distribución normal con desviación estándar 0.16. Dicha muestra reporta un promedio de 8.091, pruebe la hipótesis nula:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 8 \\ H_a &: \mu \neq 8 \end{aligned}$$

Ejemplo. Supongamos una muestra aleatoria de tamaño 100 de una población cuya función de densidad de probabilidad cualquiera con desviación estándar $\sigma = 1.295$. Supongamos que la media muestral es 21.819, queremos probar que:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 22 \\ H_a &: \mu < 22 \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea una muestra aleatoria de una población normal de tamaño $n = 5$, de donde: $\overline{X} = 183.1$, $\hat{\sigma} = 8.2$ y $\alpha = 0.05$, y probemos la hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 185 \\ H_a &: \mu < 185 \end{aligned}$$

Pruebas para diferencias de medias

Ejemplo. Supongamos dos muestras aleatorias tomadas de poblaciones normales, para las cuales observamos los datos del cuadro 2. Asumiendo un nivel de confianza del 95 %, determine si la diferencia de medias es de 0.20.

Cuadro 2: Estadísticas de dos muestras aleatorias

Estadística	Muestra 1	Muestra 2
$\overline{X}$	2.61	2.38
n	50	40
σ	0.12	0.14

Ejemplo. Supongamos dos muestras aleatorias de dos poblaciones normales, de las cuales no conocemos la varianza. Supongamos que obtenemos los resultados del Cuadro 3. Supongamos que queremos determinar si con una confianza del 95 % las media de la población 1 es mayor que la media de la población 2.

Cuadro 3: Estadísticas de dos muestras aleatorias

Estadística	Muestra 1	Muestra 2
$\overline{X}$	546	492
n	4	4
$\hat{\sigma}$	31	26

Pruebas para varianzas

Ejemplo. Supongamos una muestra aleatoria de una población con distribución normal de tamaño $n = 18$ y una varianza muestral de $\hat{\sigma} = 0.68$. Realicemos una prueba de hipótesis al 95 % de confianza para la afirmación de que la varianza muestral es más grande que la varianza poblacional $\sigma^2 = 0.36$.

Ejemplo. Supongamos que tenemos 2 muestras aleatorias de 2 poblaciones con distribuciones normales, para las cuales observamos los datos del Cuadro 4.

Cuadro 4: Table para razón de varianzas

Estadística	Muestra 1	Muestra 2
$\hat{\sigma}_i^2$	19.2	3.5
n	13	16

Utilice una prueba al 98 % de confianza para determinar si las siguientes hipótesis son ciertas:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_a &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Pruebas para proporciones

Ejemplo. Supongamos que sabemos que menos del 20 % de una población tiene un padecimiento o enfermedad. Suponga que tomamos una muestra aleatoria de 200 individuos de dicha población y observamos que 22 tienen el padecimiento. Al respecto se pregunta si el procentaje de personas con el padecimiento es menor al 22 %. Así formulamos las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = 0.2 \\ H_a &: \theta < 0.2 \end{aligned}$$