

# Automatique générale

Bernard Arnould  
David Rouchard

M306A: Edition 2016-2017

**Automatiser c'est tout faire pour ne rien devoir faire**

# Catégories de systèmes

## **D. Rouchard: Systèmes séquentiels & combinatoires 15h**

Les signaux sont de type tout ou rien (vrai/faux)

Ils ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1

Algèbre de Boole et Grafset

Pneumatiques, électriques, informatiques

## **B. Arnould: Systèmes de régulation 45h (30 + 15)**

Les signaux sont des fonctions continues du temps

Ils sont régis par des équations différentielles

Transformées de Laplace.

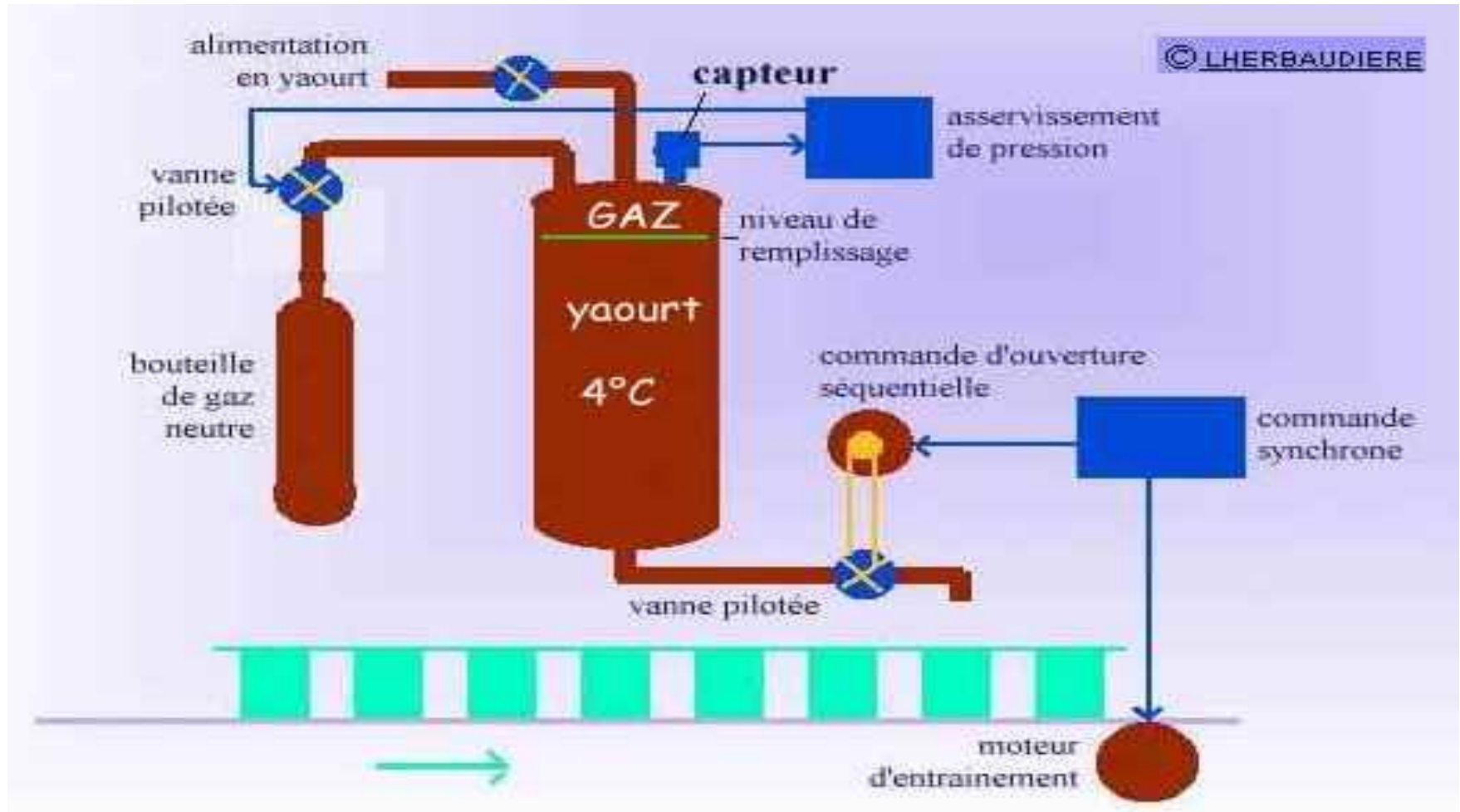
Électriques, pneumatiques, thermiques, mécaniques...

Tous les domaines de la technique.

En industrie les deux types sont intimement liés et indissociables

# Exemple industriel concret

Remplissage de pots de yaourt...mayonnaise..flacons de...



# Exemple industriel concret

## Remplissage de pots de yaourt

- Constituer une réserve de yaourt afin d'éviter l'arrêt du procédé de remplissage.
- Dosage volumique.....mais on pourrait peser
- **Partie T.O.R**
  - Avancer le tapis si flacon sous le robinet
  - Ouvrir le robinet un certain temps
  - avancer à nouveau
  - avec tous les contrôles voulus qui permettent d'arrêter la production dans une **situation** où il sera aisé de reprendre au vol....Pour éviter.....

- Partie régulation
  - Température (régulation de maintien)
  - Pression (régulation de maintien + variation de consigne)
  - Systèmes régis par des équations différentielles.

## Références bibliographiques

- Louis Maret

### **Automatique**

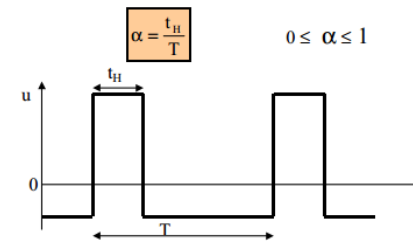
-Presses Polytechniques et Universitaires Romandes  
(Ecole polytechnique fédérale de Lausanne)

# Signaux et systèmes

## Signal

Grandeur mesurable (physique) porteuse d'information relative à une autre grandeur

- Amplitude instantanée d'une tension image d'une température (thermocouple)
- Fréquence d'une tension
- Rapport cyclique d'une tension



## Signal analogique

Le domaine du paramètre porteur d'information est continu.

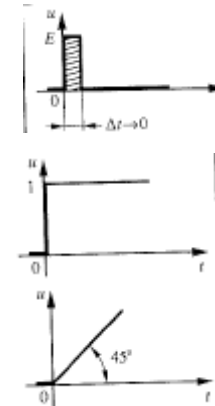
## Signal causal

$$x(t) \equiv 0 \quad \forall t < 0$$

$\delta(t)$  percussion ou impulsion de Dirac

$\varepsilon(t)$  Echelon unité

$v(t)$  Rampe unité



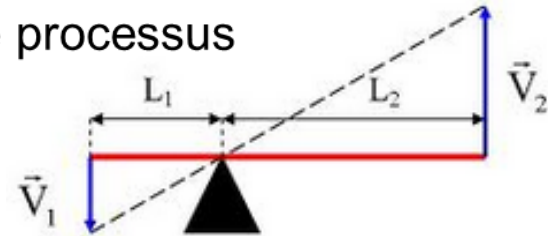
Tout signal est rendu causal en le multipliant par l'échelon unité

## Système

Ensemble d'éléments associés dans un but déterminé

On parle aussi de procédé de fabrication ou de processus

Par exemple le four du boulanger qui doit être maintenu en température



## Système statique

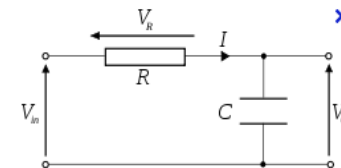
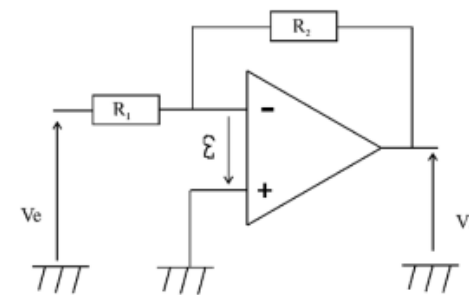
Celui dont la réponse est instantanée

- Un simple bras de levier sans inertie

$$v_2 = v_1 * \frac{L_2}{L_1}$$

- Un amplificateur opérationnel

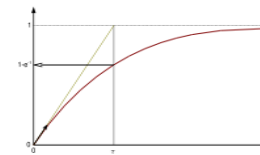
$$v_c = v_e * \frac{R_2}{R_1}$$



## Système dynamique

Celui dont la réponse n'est pas instantanée

- Un circuit RC ou plusieurs
  - Il possède une mémoire analogique
- Il lui faut du temps ( 5\*T ) pour oublier le passé



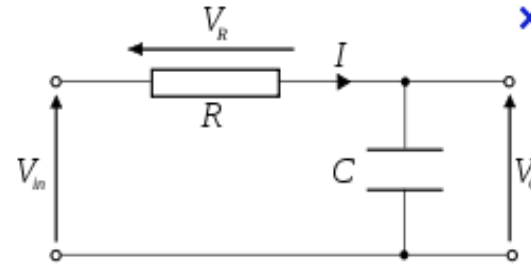


## Système à constantes localisées

- Ceux qui sont décrits par des équations différentielles ordinaires

$$i = \frac{1}{R} (v_{in} - v_c) = C \frac{dv_c}{dt}$$

- Peuvent être d'ordre élevé
- Contiennent des accumulateurs d'énergie  
ici le condensateur  
les réfractaires d'un four  
le niveau dans un réservoir



## Système à constantes réparties

- Ceux qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles
- Il y intervient le temps (t), mais aussi une variable d'espace (x)
- Equation de transfert de chaleur (Fourier)

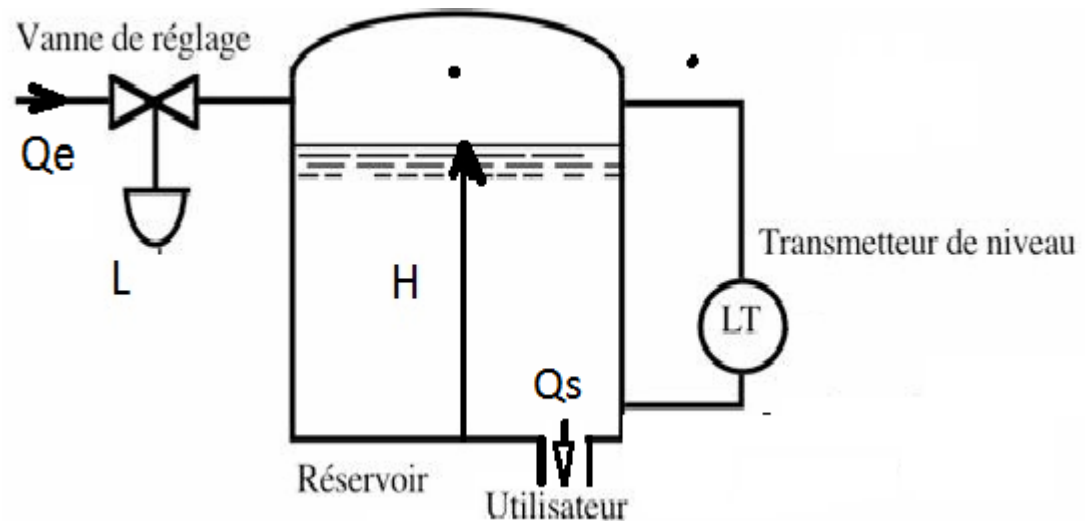
$$- \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

## Système causal

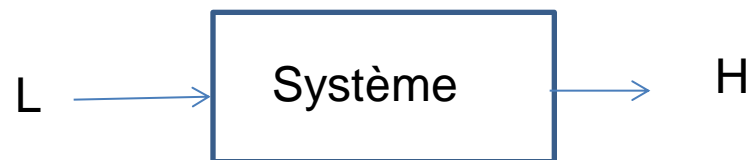
La variation de la sortie ne peut précéder celle de l'entrée

## Système scalaire

Système auto réglant



- Possède une ou **une entrée**
- Levée de la vanne**, c'est la grandeur de commande
- Possède **une sortie**
- C'est le **niveau**



## Système multivariable

- De nombreuses entrées et de nombreuses sorties

## Système permanent (invariant)

-Celui dont les paramètres (localisés ou distribués) ne varient pas avec le temps

exemple de système non permanent, un échangeur qui s'incruste au fil du temps

## Système linéaire

-Celui qui possède les propriétés

-d'additivité

-Si à  $u_1(t)$  correspond la sortie  $y_1(t)$

-Si à  $u_2(t)$  correspond la sortie  $y_2(t)$

-alors à  $u(t) = (u_1(t)+u_2(t))$  correspond la sortie  $y(t)= y_1(t)+y_2(t)$

-d'homogénéité

-Si à  $u_1(t)$  correspond la sortie  $y_1(t)$

-alors à  $u(t)=Ku_1(t)$  correspond la sortie  $y(t)=Ky_1(t)$

!!!! Attention

$Y=AX+B$  n'est pas linéaire!!!!

$Y_1=AX_1+B$  et  $Y_2=AX_2+B$

$Y_1+Y_2= A(X_1+X_2)+2B$  différent de  $Y_1+Y_2= A(x_1+x_2)+B$

Mais linéaire en variations...=> **Modèle petits signaux**

## Dans ce cours, on ne traite que des systèmes

- Linéaires ou linéarisés
  - Causaux
  - Scalars (une entrée, une sortie, une perturbation)
  - Permanents
  - À mémoire (dynamique)
  - À constantes localisées
- C'est-à-dire décrits par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + u(t).$$

Auxquelles on peut appliquer la transformation de **Laplace**

# Obtention des modèles dynamiques

## • Modèle de connaissance

- Poser des hypothèses simplificatrices
- Ecrire les équations de la physique qui décrivent le fonctionnement du procédé.

Souvent équations de bilan de masse d'énergie...

Résultat très souvent non-linéaire => linéariser

Modèle du réservoir

Hyp: section constante

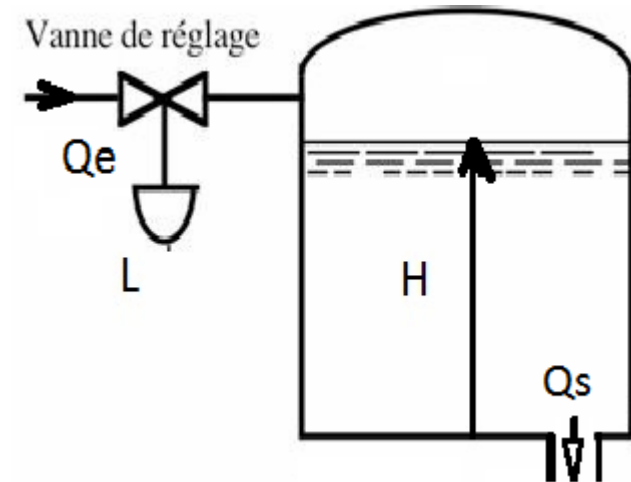
écoulement turbulent

vanne linéaire

pression réseau constante

## • Modèle comportemental

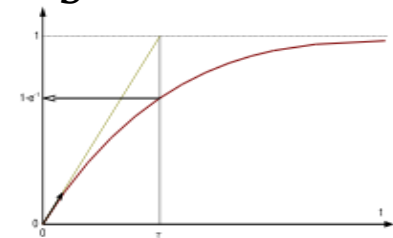
- Choisir un point de fonctionnement ( $H_0, L_0$ )
- Appliquer un échelon à l'entrée
- Enregistrer le signal de sortie
- Choisir une classe de modèles linéaires
- **Identifier** les paramètres ( $T$  et  $K$ )



$$(Q_e - Q_s)dt = dV = d(SH)$$

$$Q_e = k_v L \quad Q_s = k_o \sqrt{H}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{S} (k_v L - k_o \sqrt{H})$$



$$T \frac{dh}{dt} + h = Kl$$

# Linéarisation Taylorienne

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{S} (k_v L - k_0 \sqrt{H})$$

Modèle non-linéaire du système...  
Le réservoir

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{1}{S} (k_v L_0 - k_0 \sqrt{H_0})$$

Mouvement nominal

$$\frac{d(H_0+h)}{dt} = \frac{1}{S} (k_v (L_0 + l) - k_0 \sqrt{H_0 + h})$$

On insère les variations sur toutes les variables indépendantes. Il en résulte des variations de toutes les variables dépendantes

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} (k_v (L_0 + l) - k_0 \sqrt{H_0 + h}) - \frac{1}{S} (k_v L_0 - k_0 \sqrt{H_0})$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} (k_v l - k_0 \sqrt{H_0 + h}) + \frac{1}{S} (k_0 \sqrt{H_0})$$

on isole les variations: changement de repère de coordonnées  $H \Rightarrow h$

$$\frac{dh}{dt} = F(h, l)$$

$$\frac{dh}{dt} \cong \frac{1}{S} \left( k_v l - k_0 \frac{1}{2\sqrt{H_0}} h \right)$$

Expression toilettée prête au calcul à développer en série de Taylor dont on néglige les termes non linéaires.

# Linéarisation Taylorienne

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{s} (k_v l - k_0 \sqrt{H_0 + h}) + \frac{1}{s} (k_0 \sqrt{H_0}) \quad \frac{dh}{dt} = F(h, l)$$

$$F(h, l) = F(h, l)_{\delta=0} + \frac{\partial F(h, l)}{\partial l}_{\delta=0} l + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(h, l)}{\partial l^2}_{\delta=0} l^2 \dots + \frac{\partial^3(h, l)}{\partial l^3}_{\delta=0} l^3 +$$

$$\frac{\partial F(h, l)}{\partial h}_{\delta=0} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(h, l)}{\partial h^2}_{\delta=0} h^2 \dots + \dots + \frac{\partial^3(h, l)}{\partial h^3}_{\delta=0} h^3$$

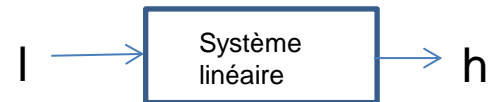
$$F(h, l)_{\delta=0} = 0$$

$$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2(h, l)}{\partial l^2}_{\delta=0} \cong 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(h, l)}{\partial h^2}_{\delta=0} \cong 0 \text{ ainsi que tous les termes d'ordre supérieurs}$$

$$\frac{\partial F(h, l)}{\partial l}_{\delta=0} = \frac{k_v}{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(h, l)}{\partial h}_{\delta=0} = \frac{k_0}{s} \frac{1}{2\sqrt{H_0}}$$

$$\frac{dh}{dt} \cong \frac{1}{s} \left( k_v l - k_0 \frac{1}{2\sqrt{H_0}} h \right) \text{ de la forme } T \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = K l(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad \frac{h}{l} = 2 \frac{k_v}{k_0} \sqrt{H_0} = K \quad \text{gain statique}$$



## Sens concret de la linéarisation

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{S} (k_v L - k_0 \sqrt{H})$$

Equation différentielle non-linéaire

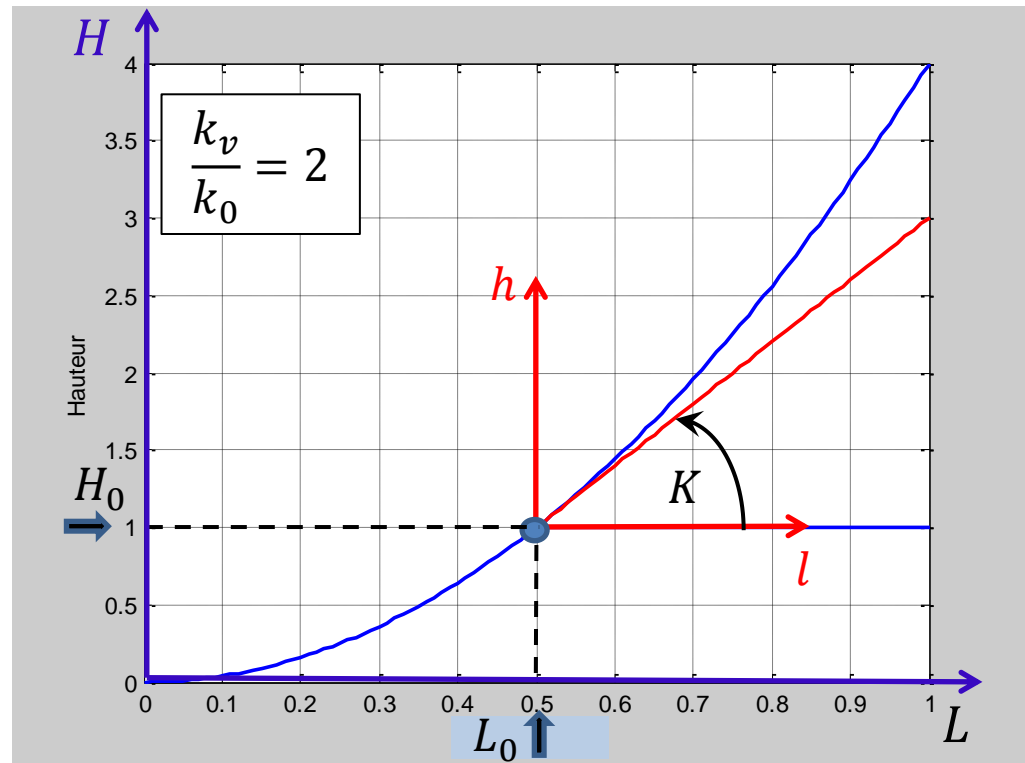
$$(k_v L - k_0 \sqrt{H}) = 0$$

Ensemble des points de fonctionnement statiques

$$H = \left( \frac{k_v}{k_0} \right)^2 L^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = 2 \left( \frac{k_v}{k_0} \right)^2 L$$

$$H_0 = \left( \frac{k_v}{k_0} \right)^2 L_0^2$$



$$\left( \frac{\partial H}{\partial L} \right)_0 = 2 \left( \frac{k_v}{k_0} \right)^2 L_0 = 2 \frac{k_v}{k_0} \sqrt{H_0} = K \quad \text{Gain statique}$$



# Transformation de Laplace (rappels)

Pourquoi:

Parce que c'est plus simple!!!!

On transforme des équations différentielles linéaires en équations algébriques plus facile à manipuler....

De plus, on accède directement à la réponse harmonique en régime sinusoïdal établi.....nous verrons cela!

$$F(s) = Lf(t) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad s: \text{variable complexe } s = \sigma + j\omega$$

Exemple:

Transformée de l'échelon unité

$$F(s) = L\varepsilon(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

Transformée de l'exponentielle causale

$$L\varepsilon(t)e^{-at} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}$$

Transformée de d'une rampe.....intégrer l'échelon (dans le temps) donc multiplier par 1/s

$$L\varepsilon(t)t = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) t e^{-st} dt = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

# Transformation de Laplace

## Propriétés

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Si  $Lf(t) = F(s)$  et CI nulles alors

$$Lkf(t) = kF(s)$$

$$L(f_1(t) + f_2(t)) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$L \frac{df(t)}{dt} = s F(s) \quad \text{Pour dériver dans le domaine du temps : multiplier par } s$$

$$L \int f(t)dt = \frac{F(s)}{s} \quad \text{Pour intégrer dans le domaine du temps: multiplier par } \frac{1}{s}$$

# Transformation de Laplace

## Propriétés

$$\text{Si } F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$L(f(t - Tr)) = F(s) e^{-sTr} \text{ translation dans le temps (retard)}$$

$$L(f(t)e^{-at}) = F(s + a) \text{ translation complexe}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s)s \quad \text{valeur initiale}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)s \quad \text{valeur finale}$$

Transformée de l'exponentielle causale

$$L\varepsilon(t)e^{-at} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}$$

Transformée de d'une rampe.....intégrer l'échelon (dans le temps) donc multiplier par 1/s

$$L\varepsilon(t)t = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) t e^{-st} dt = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Transformée d'un échelon décalé dans le temps de  $\tau$  s

$$L\varepsilon(t-\tau) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t-\tau) e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

$$\frac{dh}{dt} \cong \frac{1}{S} \left( k_v l + qp - k_0 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{H_0}} h \right)$$

de la forme

$$T \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = K l(t) + K_p qp(t)$$

**Transformée de Laplace à CI nulles**

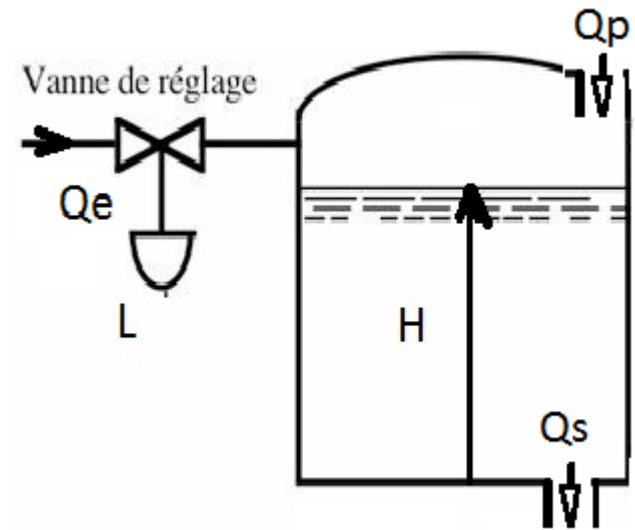
$$TsH(s) + H(s) = KL(s) + K_p Qp(s)$$

**Pas de variation sur Qp**

$$TsH(s) + H(s) = KL(s)$$

$$H(s)(sT + 1) = KL(s)$$

$$\frac{H(s)}{L(s)} = \frac{K}{(sT+1)} = G(s)$$

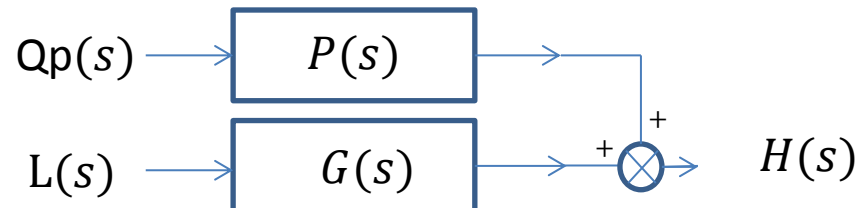


**Pas de variation sur l**

$$TsH(s) + H(s) = K_p Qp(s)$$

$$H(s)(sT + 1) = K_p Qp(s)$$

$$\frac{H(s)}{Qp(s)} = \frac{K_p}{(sT+1)} = P(s)$$



## Réponse à un échelon unité de levée de vanne

Transformée du <b>signal</b> d'entrée échelon	$L(s) = \frac{1}{s}$
---	----------------------

Fonction de transfert du <b>système</b> liant la variation de hauteur à la variation de levée	$G(s) = \frac{H(s)}{L(s)} = \frac{K}{(sT+1)}$
---	---

Transformée du <b>signal</b> de sortie	$H(s) = \frac{K}{(sT+1)} \frac{1}{s}$
--	---------------------------------------

Retour dans le domaine du temps: Transformée inverse de H(s)	$h(t) = L^{-1}(H(s))$ $h(t) = L^{-1}\left(\frac{K}{(sT+1)} \frac{1}{s}\right)$
---	--

Décomposer en fractions simples	
$H(s) = \frac{K}{(sT+1)} \frac{1}{s} = \frac{\frac{K}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)} \frac{1}{s} = \frac{K_e}{(s+a)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)} \quad \text{avec } a = \frac{1}{T}$	
$A = \lim_{s \rightarrow 0} (H(s) * s) = K$	$B = \lim_{s \rightarrow -a} (H(s)(s+a)) = -\frac{k_e}{a} = -K$

$h(t) = L^{-1}(H(s)) = L^{-1}\left(\frac{K}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{K}{(s+a)}\right) = K\varepsilon(t) - K\varepsilon(t)e^{-at}$
--

# Théorèmes aux limites

$$L(h(t)) = H(s) = \frac{K}{(sT + 1)} \frac{1}{s}$$

$$L\left(\frac{dh(t)}{dt}\right) = s H(s) = \frac{K}{(sT + 1)}$$

## À l'origine en t = 0

Valeur initiale de h(t)  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s)s = 0$

Valeur initiale de h'(t)  $\lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{(sT+1)} s = \frac{K}{T}$

## En t = infini

Valeur finale de h(t)  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)s = K$

Valeur finale de h'(t)  $\lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(sT + 1)} s = 0$

## Système

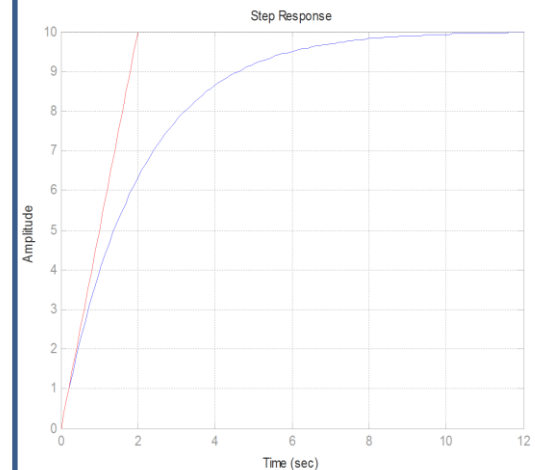
$$G(s) = \frac{H(s)}{L(s)} = \frac{4}{(2s+1)}$$

## Entrée échelon

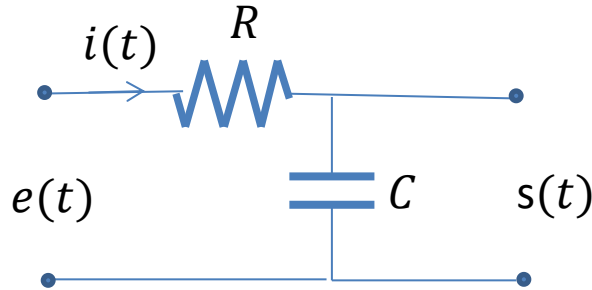
$$L(s) = \frac{2.5}{s}$$

## Réponse de la sortie

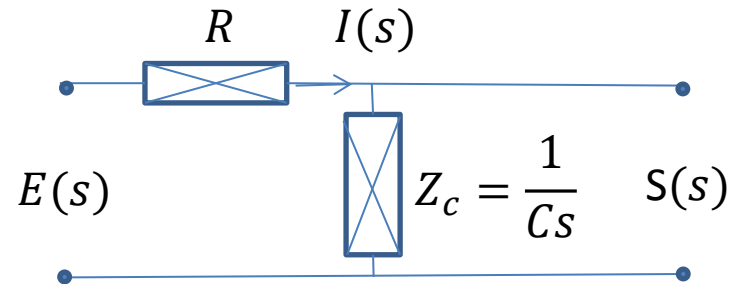
$$H(s) = \frac{10}{(2s + 1)} \frac{1}{s}$$



## Calcul direct de fonctions de transfert



$$i(t) = \frac{e(t) - s(t)}{R} = C \frac{ds(t)}{dt}$$



Pour le condensateur seul

$$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} \quad I_c(s) = CsV_c(s)$$

$$Z_c = \frac{V_c(s)}{I_c(s)} = \frac{1}{Cs}$$

Pour une inductance seule

$$Z_l = sL$$

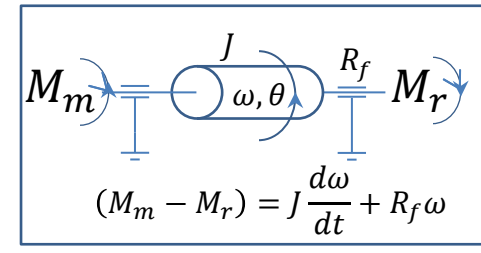
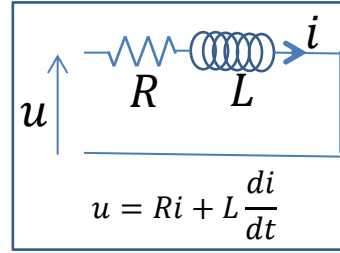
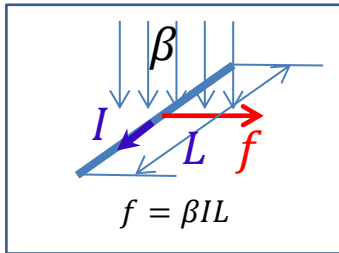
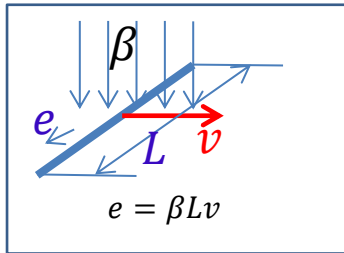
directement : diviseur de tension

$$\frac{S(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{1}{(RCs + 1)} = \frac{1}{sT + 1}$$

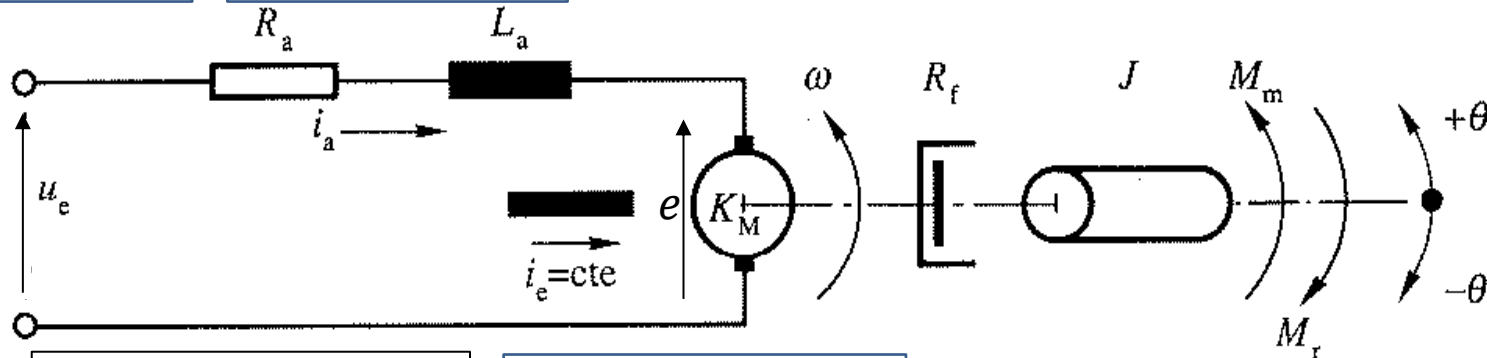


# Moteur DC commandé par l'induit

## Equations fondamentales



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



### Hypothèses

- pas de saturation
- pas d'hystérèse
- pas de réaction d'induit
- frottements visqueux
- rendement unitaire

$$u_e - e = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}$$

$$e = K_e \omega$$

$$P_e = e i_a = K_e \omega i_a$$

$$M_m - M_r = J \frac{d\omega}{dt} + R_f \omega \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$M_m = K_m i_a$$

$$P_m = M_m \omega = K_m \omega i_a$$

Figure tirée de L. Maret:  
Régulation automatique PPUR

$$\eta = 1 \quad P_e = P_m$$

$$K_e \omega i_a = K_m \omega i_a$$

$$K_m = K_e = K$$

## Exercice: schéma fonctionnel interne du moteur

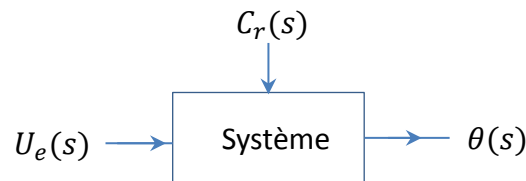
$$u_e - e = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \quad \tau_e = \frac{L_a}{R_a}$$

$$M_m = K_m i_a$$

$$e = K_m \omega$$

$$M_m - M_r = J \frac{d\omega}{dt} + R_f \omega \quad \tau_m = \frac{J}{R_f}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



### Conseils

- Prendre les transformées de Laplace à CI nulles sur chaque équation et faire apparaître gains et constantes de temps
- Faire apparaître les « boîtes » fonctionnelles qui expriment les relations causes à effets
- Les interconnecter entres-elles

### Outils

- transmetteur  $\omega(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow \theta(s)$

- sommateur

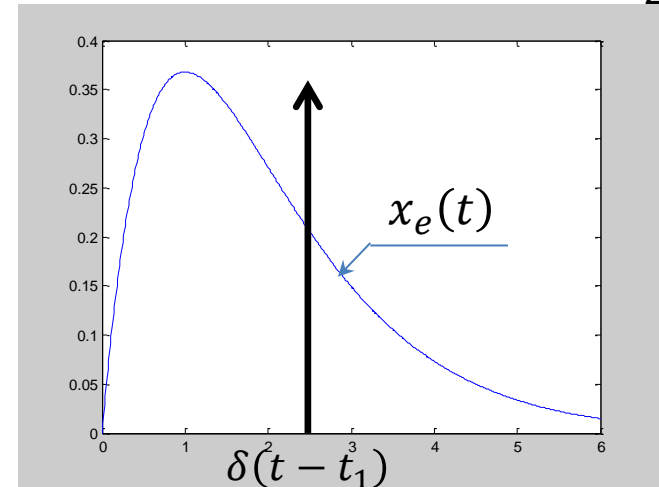
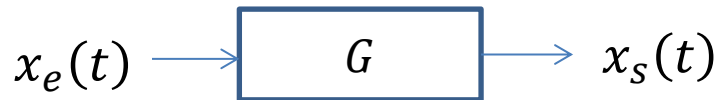
- différenciateur

# Représentation des systèmes

Par la réponse impulsionnelle: produit de convolution

$$x_e(t_1) = \int_0^\infty x_e(t) \delta(t - t_1) dt$$

$$x_e(t) = \int_0^t x_e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



Soit G sollicité en entrée par une impulsion de Dirac  
La sortie est la réponse impulsionnelle  $g(t)$

$$\delta(t) \gg g(t)$$

Si l'entrée est sollicitée par une impulsion de Dirac décalée de  $\tau$  secondes la sortie l'est aussi

$$\delta(t - \tau) \gg g(t - \tau)$$

Si l'entrée est multipliée par  $x_e(\tau)$  la sortie l'est aussi

$$\delta(t - \tau) x_e(\tau) \gg g(t - \tau) x_e(\tau)$$

On intègre par rapport au temps.....

$$\int_0^t \delta(t - \tau) x_e(\tau) d\tau \gg \int_0^t x_e(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$x_e(t) = \int_0^t \delta(t - \tau) x_e(\tau) d\tau \gg x_s(t) = \int_0^t x_e(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$x_e(t) \gg x_s(t)$$

**C'est le produit de convolution**

$$x_s(t) = \int_0^t x_e(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$x_s(t) = g(t) * x_e(t)$$

$$X_s(s) = L(g(t) * x_e(t)) = G(s) \cdot X_e(s)$$

## Représentation par la transmittance isomorphe

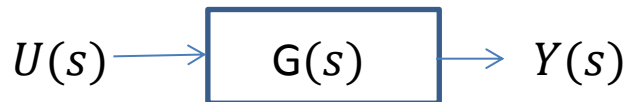
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots b_0 u(t).$$

Transformée de Laplace prise sur les deux membres à C.I. nulles

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m U(s) s^m + b_{m-1} U(s) s^{m-1} + \dots b_0 U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0} \quad \text{Fraction rationnelle en } s$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = G(s) \quad m \leq n \quad \text{Réalisation physique}$$



## Représentation par la transmittance isochrone

Entrée sinusoïdale, Co sinusoïdale.....d'amplitude unité à la pulsation  $\omega$

Plus général et surtout plus simple pour les calculs...vecteur tournant

Appliqué depuis  $t = -\infty$

$$\sin \omega t = \text{Imag}(e^{j\omega t}) \quad \cos \omega t = \text{Réal}(e^{j\omega t})$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

$$\text{à } u(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = B e^{j\omega t} \quad \text{Système linéaire}$$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots b_0 u(t)$$

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad \frac{du(t)}{dt} = j\omega e^{j\omega t} \quad \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = (j\omega)^2 e^{j\omega t} \dots \frac{d^n u(t)}{dt^n} = (j\omega)^n e^{j\omega t}$$

$$y(t) = B e^{j\omega t} \quad \frac{dy(t)}{dt} = B j\omega e^{j\omega t} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = B (j\omega)^2 e^{j\omega t} \dots \frac{d^n y(t)}{dt^n} = B (j\omega)^n e^{j\omega t}$$

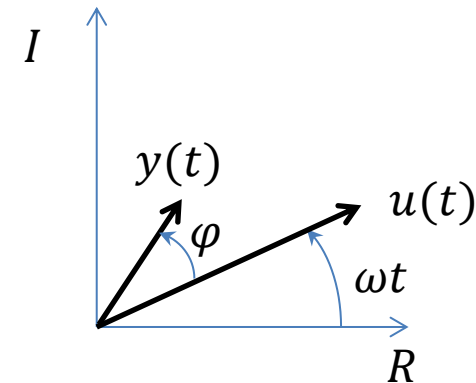
$$(a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots a_1 j\omega + a_0) e^{j\omega t} = (b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots b_0) B e^{j\omega t}$$

$$B = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots a_1 j\omega + a_0}$$

$$B = G(s = j\omega) = G(e^{j\omega t})$$

$$G(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|y|}{|u|} \quad \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$



Transmittance isomorphe: différentes formes

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Forme de Bode: polynomiale

$$G(s) = \frac{K_0}{s^\alpha} \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} s + \dots + \frac{b_m}{b_0} s^m}{1 + \frac{a_{\alpha+1}}{a_\alpha} s + \dots + \frac{a_n}{a_\alpha} s^{n-\alpha}} = \frac{K_0}{s^\alpha} R(s) \quad R(0) = 1$$

Forme de Bode: factorisée

$$G(s) = \frac{K_0}{s^\alpha} \frac{(sT_{n1} + 1)(sT_{n2} + 1) \dots}{(sT_{d1} + 1)(sT_{d2} + 1) \dots} = \frac{K_0}{s^\alpha} R(s)$$

$K_0$ : gain statique  $\alpha$ : nombre d'intégrateurs

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Forme d'Evans: polynomiale

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{k_0}{s^\alpha} \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} s^{m-1} + \dots + \frac{b_0}{b_m}}{s^{n-\alpha} + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1-\alpha} + \dots + \frac{a_\alpha}{a_n}} = \frac{k_0}{s^\alpha} r_0(s)$$

Forme d'Evans: factorisée

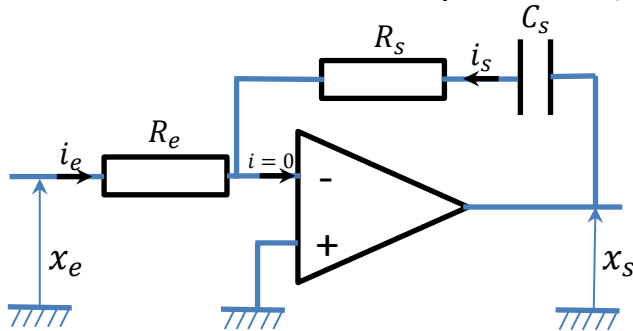
$$G(s) = \frac{k_0}{s^\alpha} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{k_0}{s^\alpha} \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$z_1 \dots z_m \Rightarrow$  racines du numérateur: les zéros du système

$p_1 \dots p_n \Rightarrow$  racines du dénominateur: les pôles du système

## Exercices

### Correcteur électronique actif (AOP)



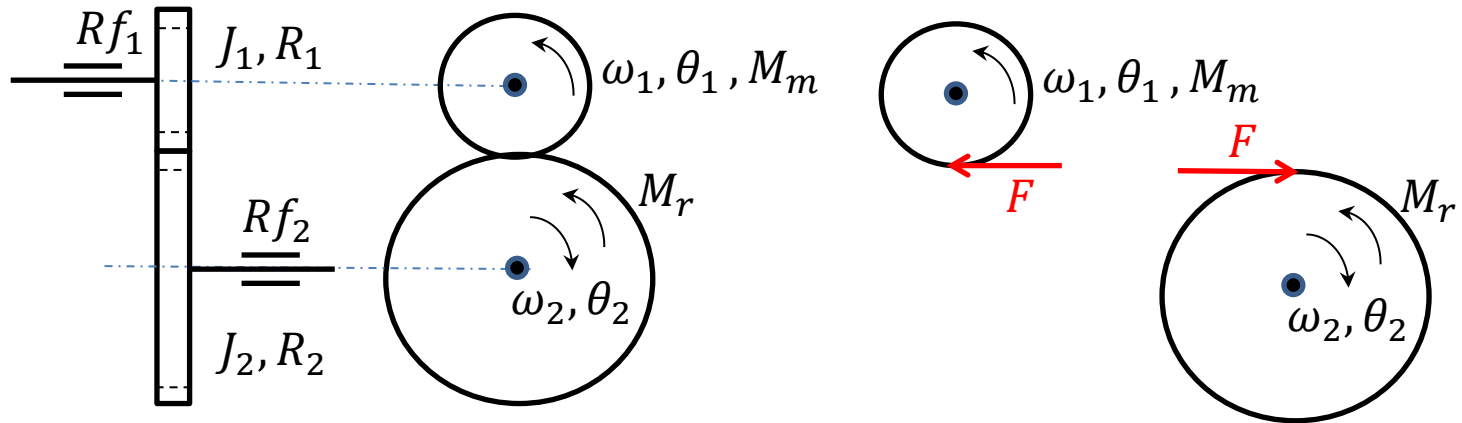
#### Hypothèses

- Gain infini
- Impédance d'entrée infinie

Exprimer la transmittance qui lie  $x_s(s)$  à  $x_e(s)$   
L'écrire sous les différentes formes

$$\frac{X_s(s)}{X_e(s)} = ?$$

### Train d'engrenages: réducteur de vitesse



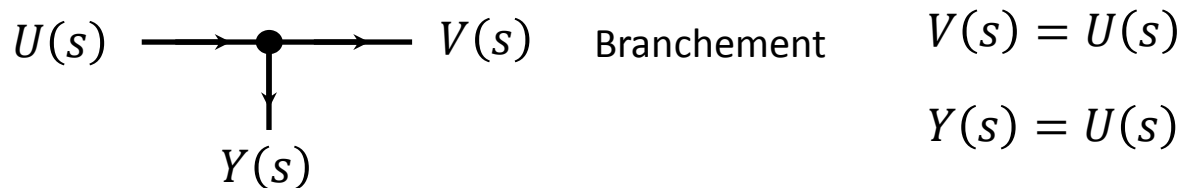
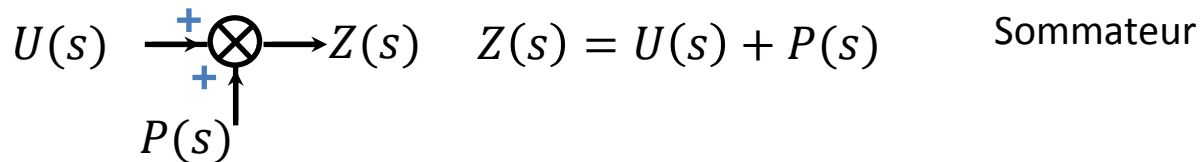
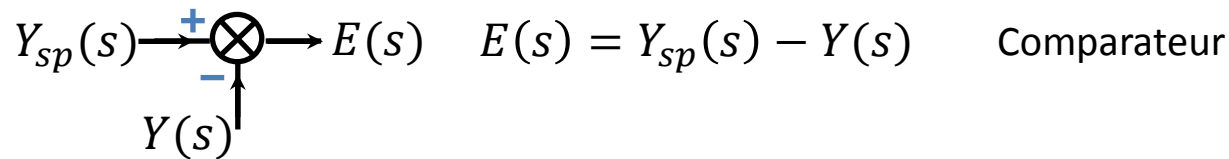
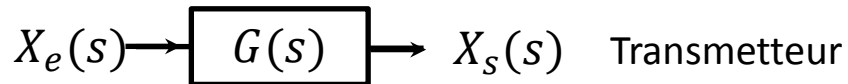
Exprimer la transmittance qui lie  $\omega_1(s)$  à  $M_m(s)$  et  $M_r(s)$



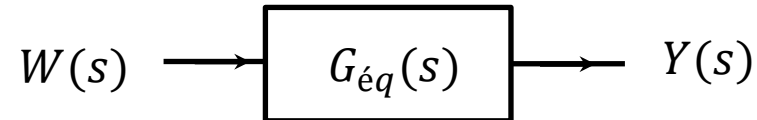
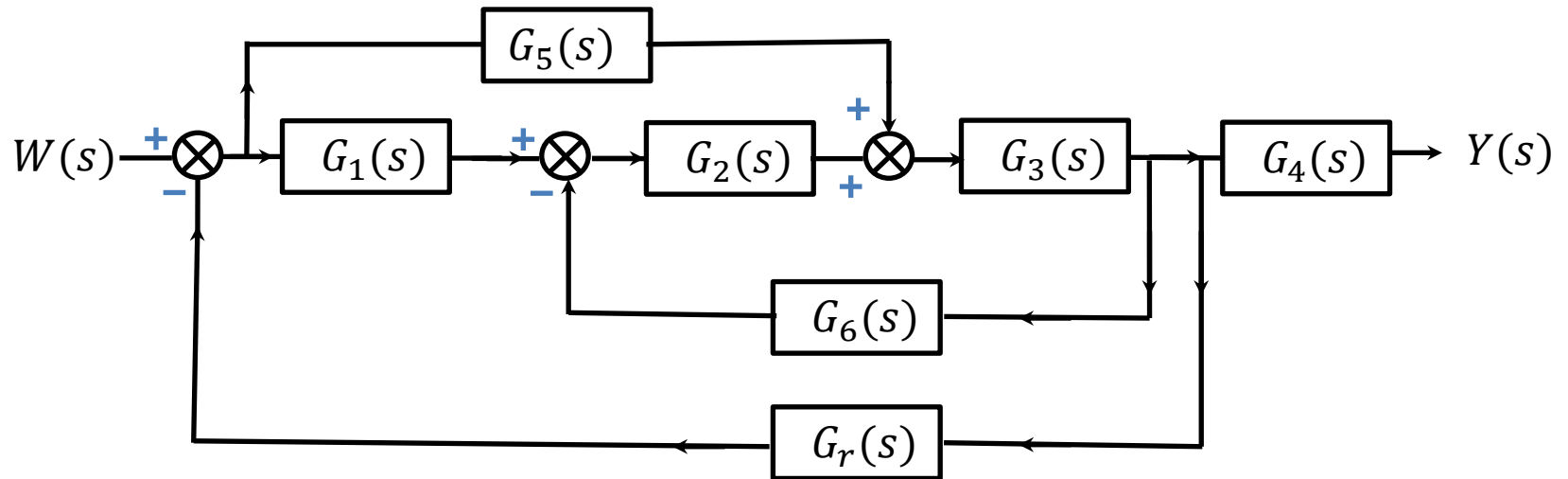
## Schéma fonctionnel

Système global décomposé en sous-systèmes basés sur les différentes parties constitutives.  
C'est bien plus clair qu'une ou plusieurs équations qui décrivent mathématiquement l'ensemble.

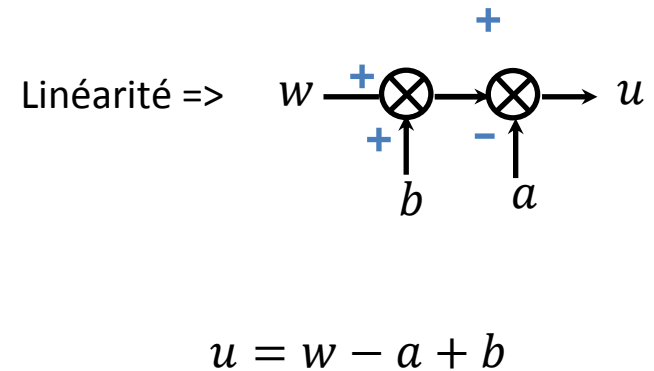
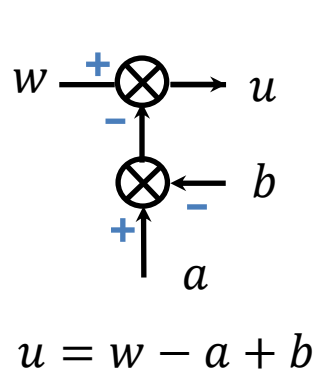
### Symboles



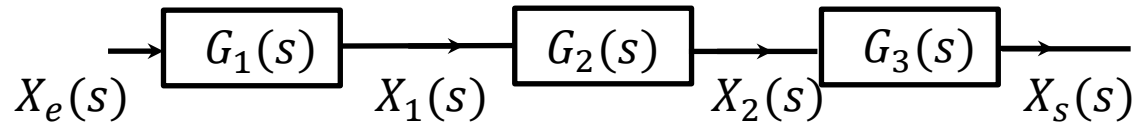
Attention: les liaisons sont orientées (flèches)



Sans faire trop de calculs  
Algèbre des schémas



## Transmittances en série

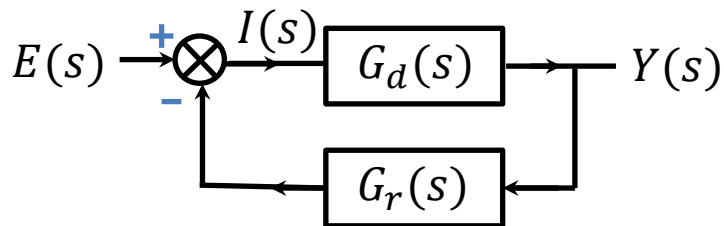


$$\frac{X_1(s)}{X_e(s)} = G_1(s) \quad \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = G_2(s) \quad \frac{X_s(s)}{X_2(s)} = G_3(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{X_e(s)} \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \frac{X_s(s)}{X_2(s)} = \frac{X_s(s)}{X_e(s)} = G_1 G_2 G_3$$

Attention: 2 RC en série => piège: charge dynamique

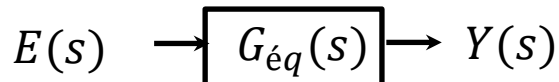
## Transmittance en réaction négative



$$I(s) = E(s) - Y(s)G_r(s)$$

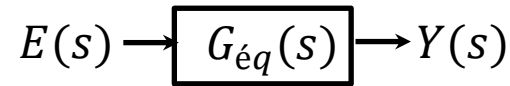
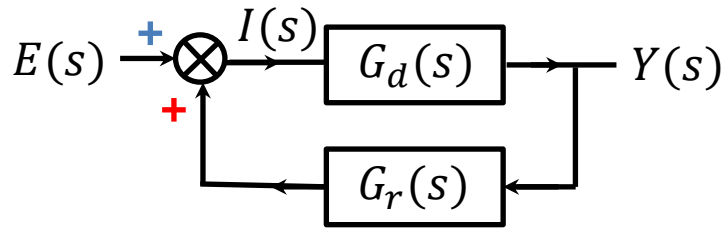
$$Y(s) = G_d(s)I(s)$$

En éliminant  $I(s)$



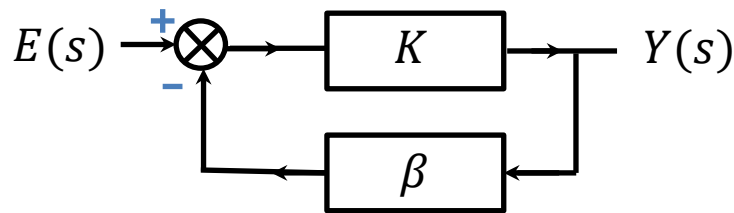
$$G_{éq} = \frac{G_d(s)}{1 + G_d(s)G_r(s)}$$

Transmittance en réaction **positive**



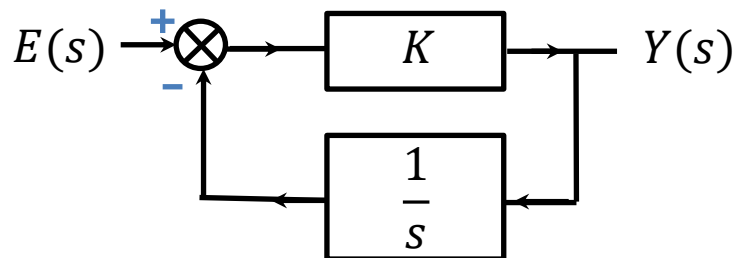
$$G_{eq} = \frac{G_d(s)}{1 - G_d(s)G_r(s)}$$

Construction de fonctions inverses (rétroaction négative)



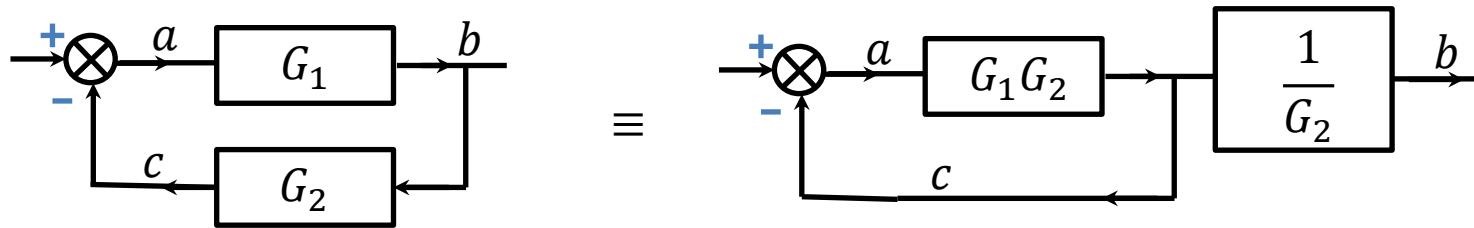
$$G_{eq} = \frac{K}{1 + K\beta} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \beta} \cong \frac{1}{\beta} \text{ si } K \uparrow \uparrow \uparrow$$

Intégrateur dans la rétroaction....construit la dérivée..... filtrée

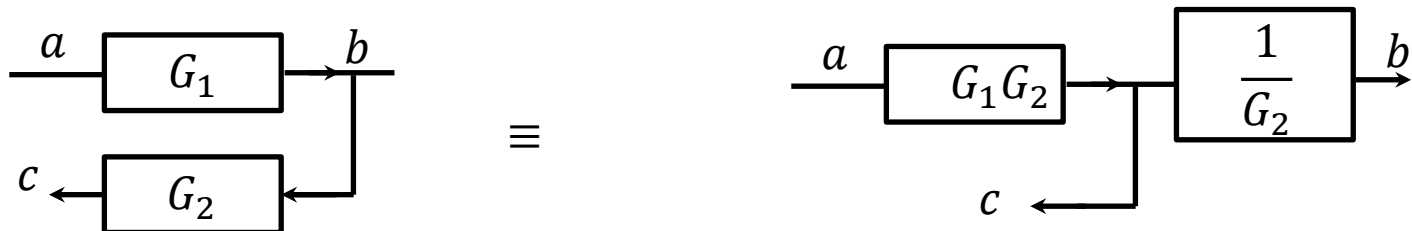


$$G_{eq} = \frac{K}{1 + \frac{K}{s}} = \frac{Ks}{s + K} = \frac{s}{\frac{s}{K} + 1} = \frac{s}{sT_f + 1}$$

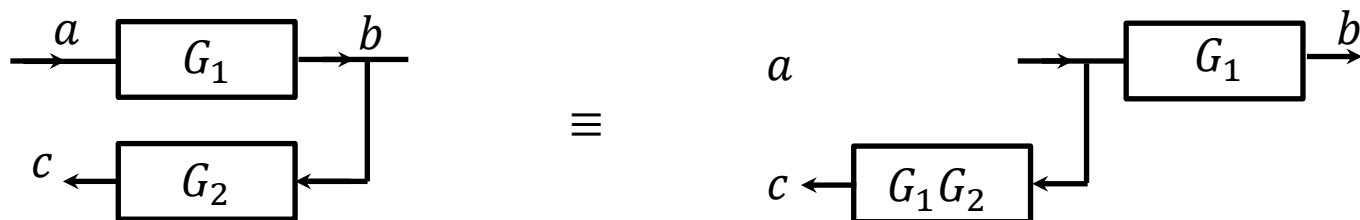
**Attention:** ordre du numérateur <= à l'ordre du dénominateur



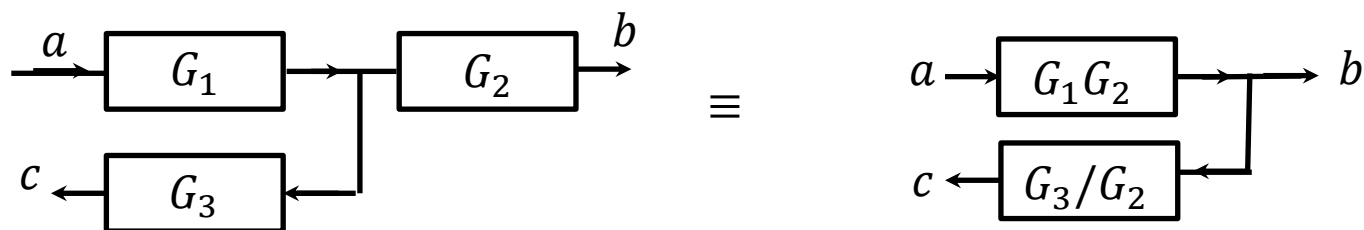
Equivalence par **tous** les chemins

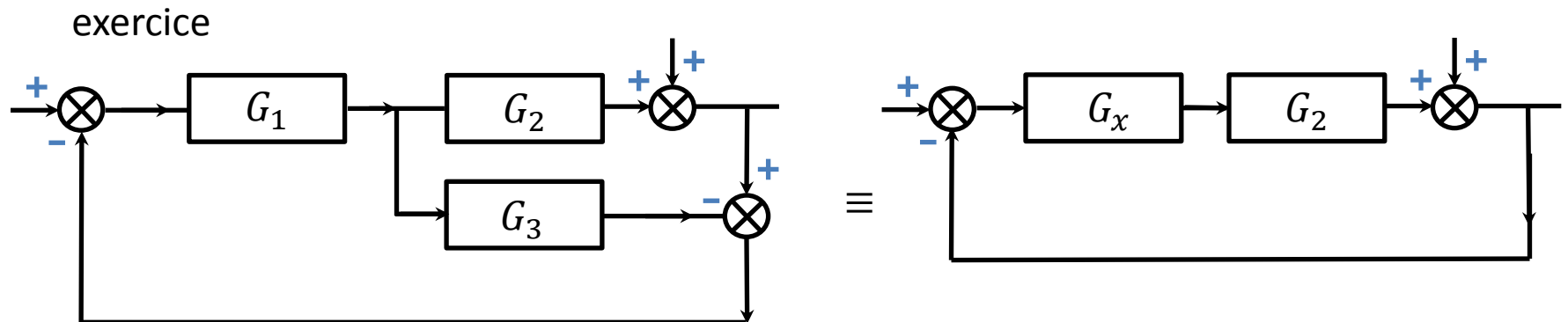
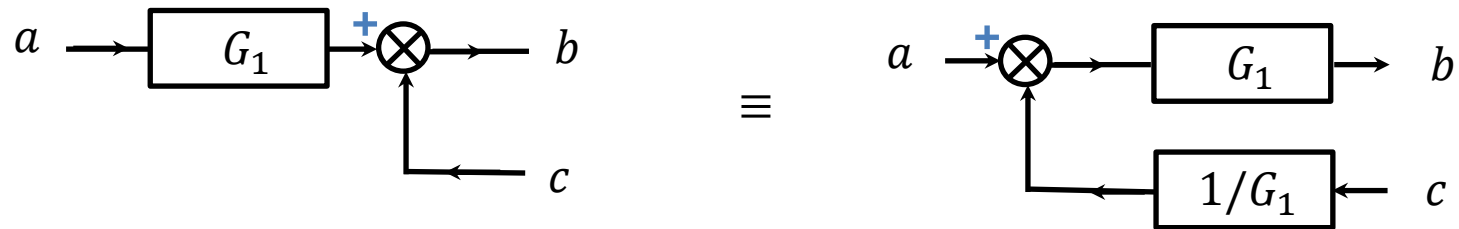
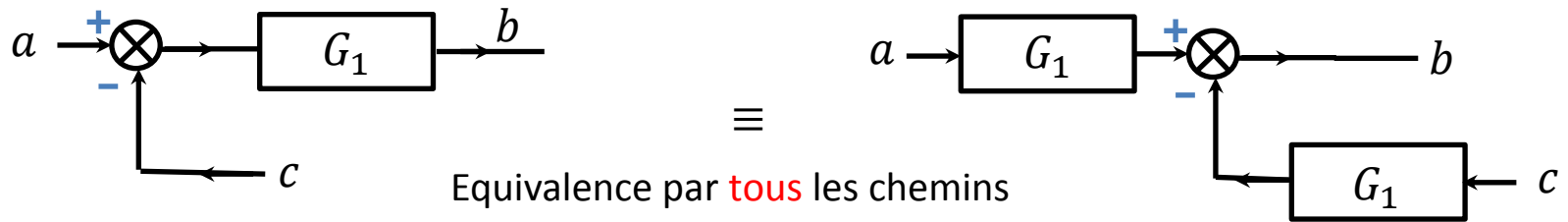


Equivalence par **tous** les chemins



Equivalence par **tous** les chemins

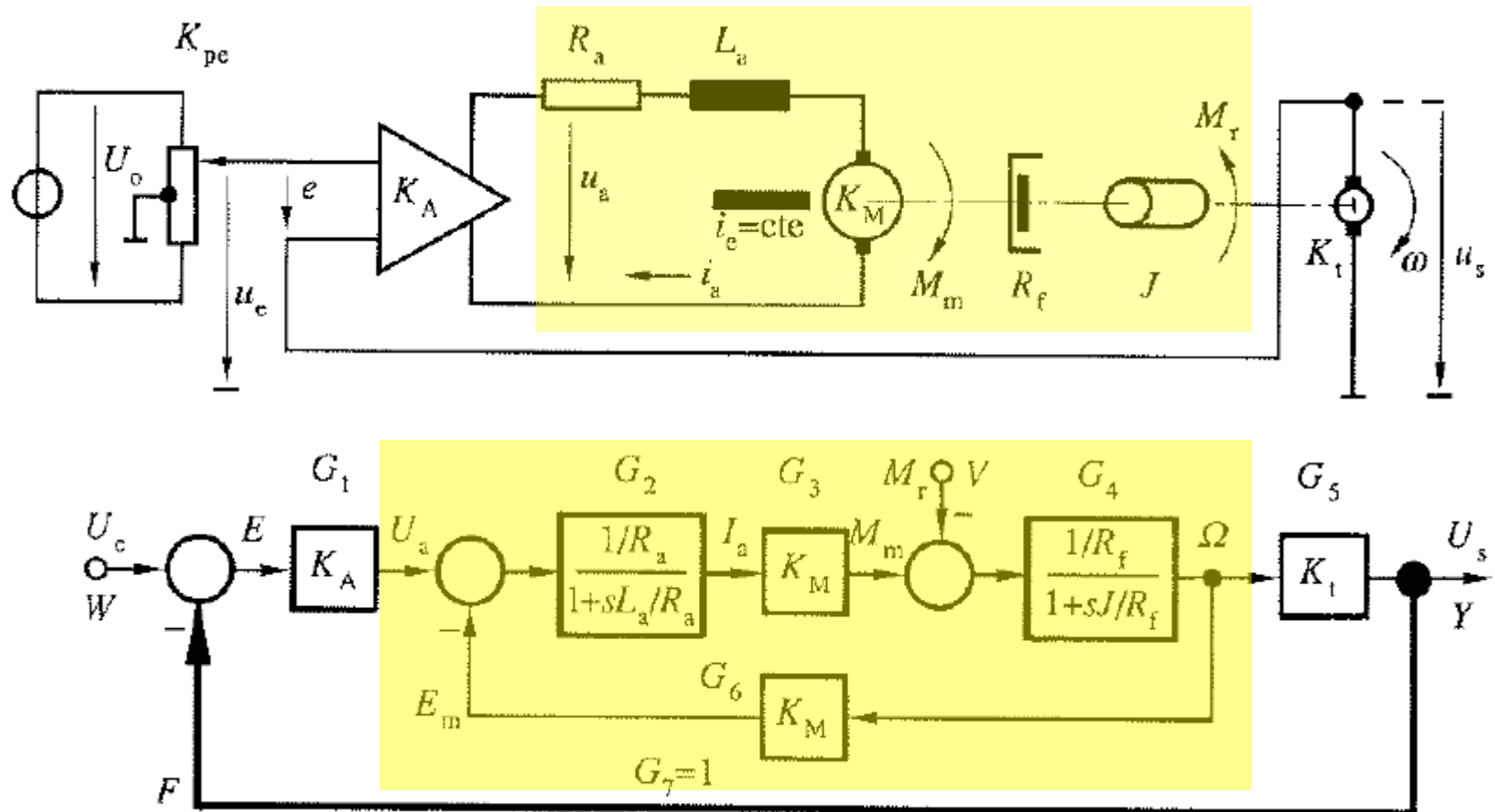




# Régulation AUTOMATIQUE

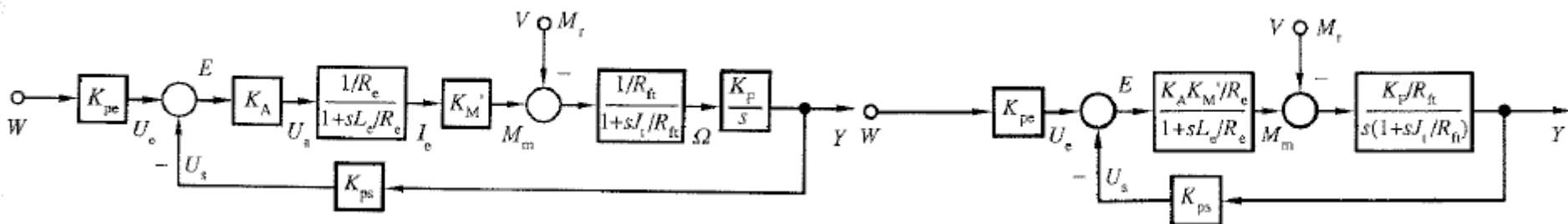
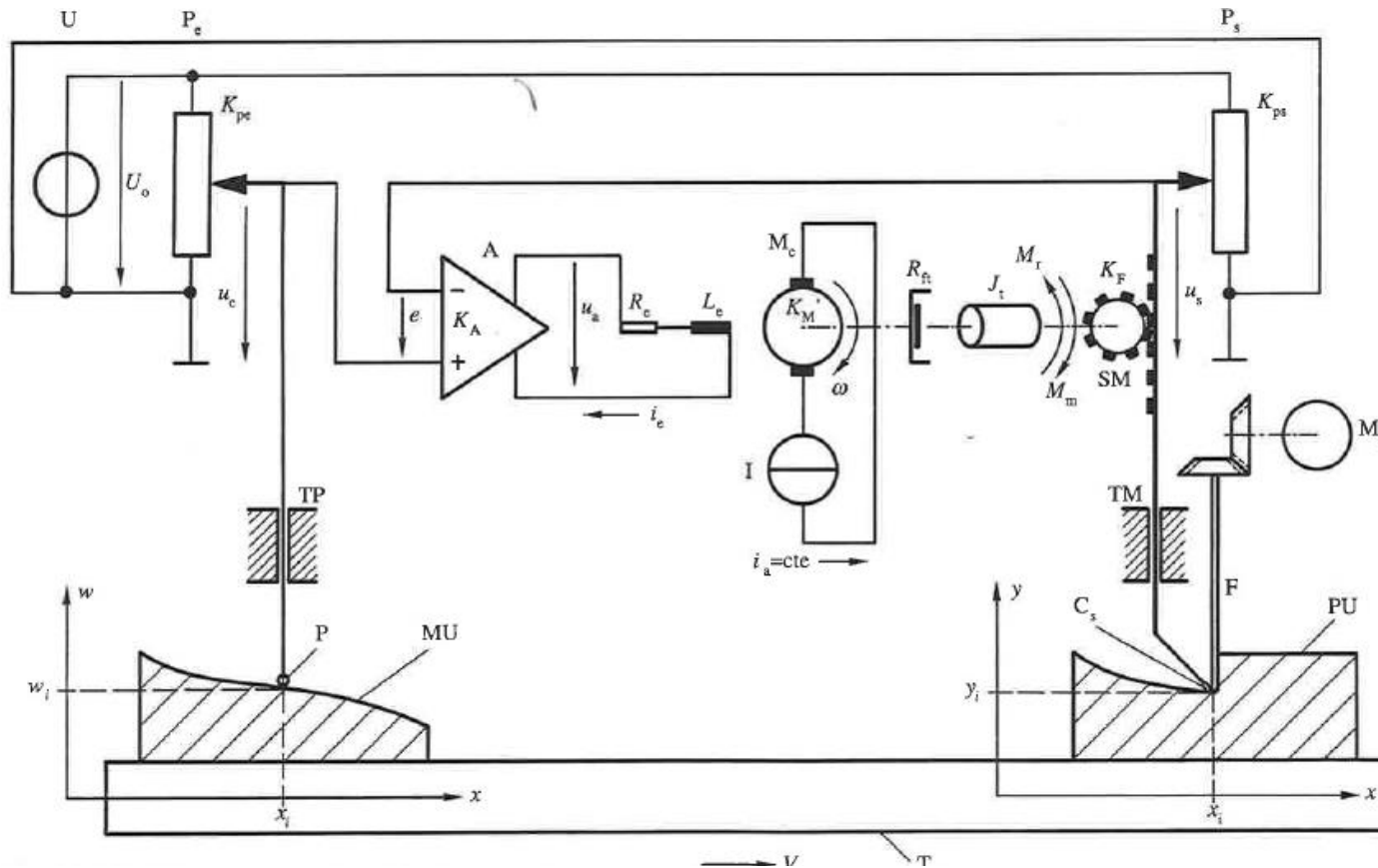
Automatique = sans intervention humaine !!!

Régulation de vitesse d'un moteur



Figures tirées de L. Maret: Régulation automatique avec l'autorisation de PPUR

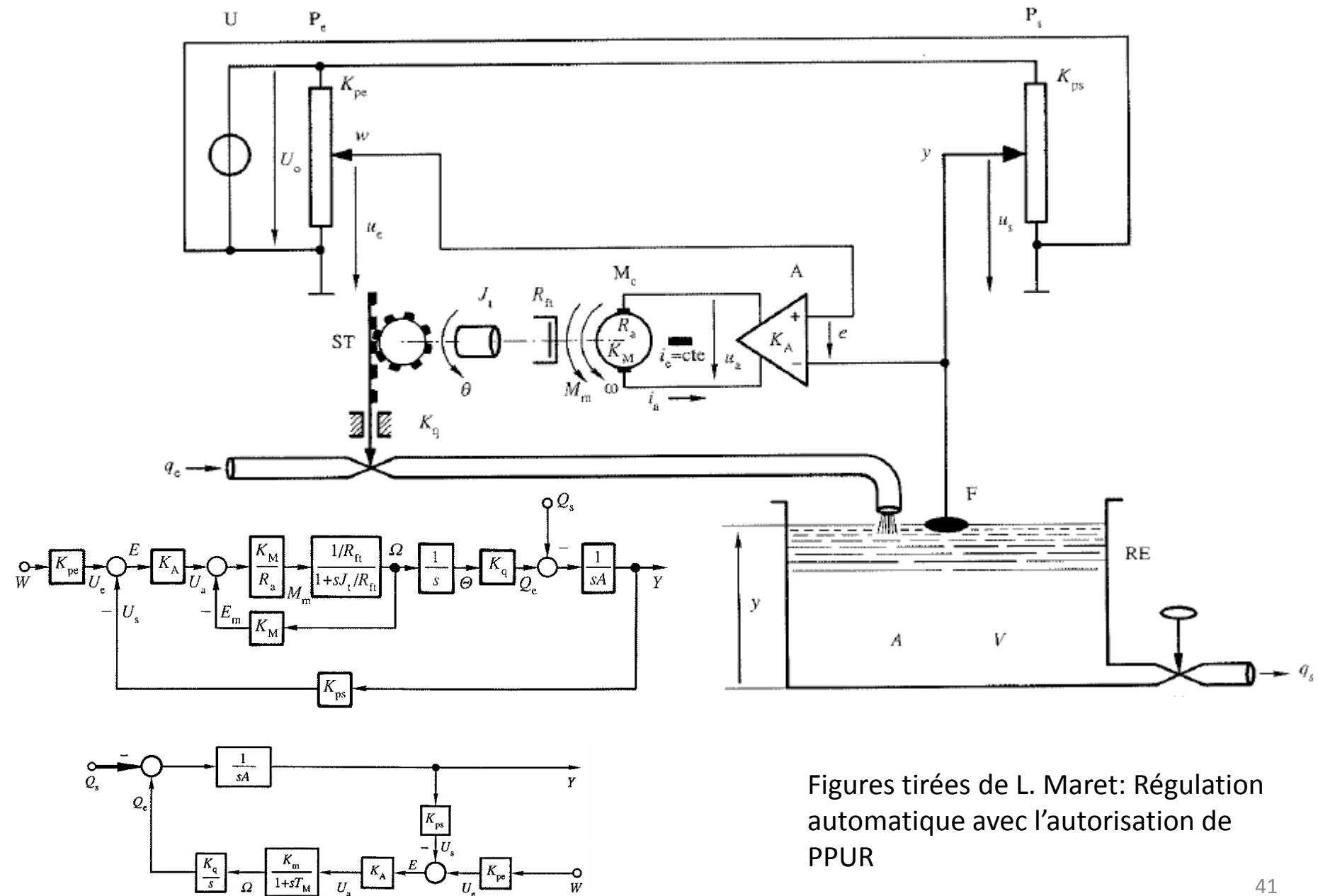
# Réglage par rétroaction: Régulation de correspondance, suivi de consigne



Figures tirées de L. Maret: Régulation automatique avec l'autorisation de PPUR

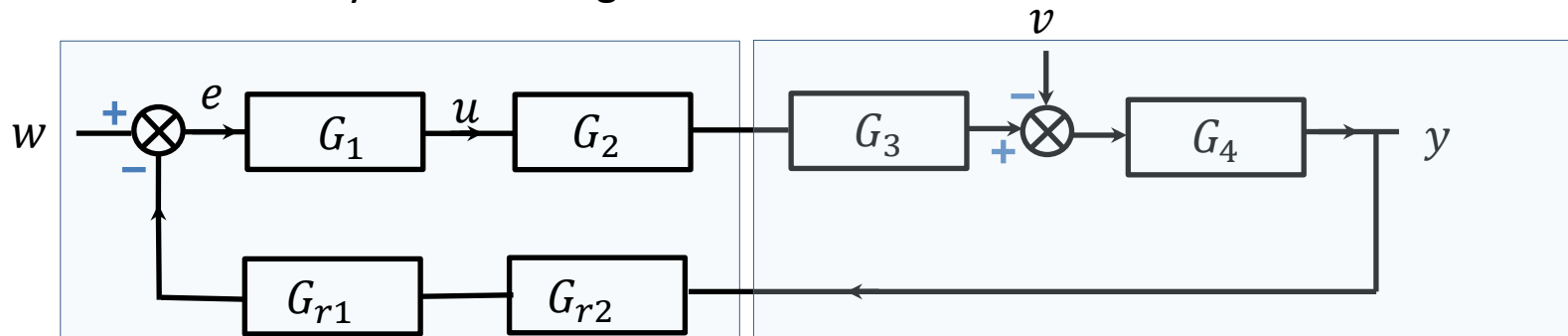


# Réglage par rétroaction: Régulation de maintien, réjection des perturbations



Figures tirées de L. Maret: Régulation automatique avec l'autorisation de PPUR

## Schéma d'un système de régulation



### Equipement de Régulation

#### Régulateur

Comparateur

$G_1$  Correcteur; Régulateur, AOP

$G_2$  Amplificateur: vanne, EDP

#### Chaine de mesure

$G_{r1}$  Capteur: Thermocouple, pt100

$G_{r2}$  Transducteur : 4-20mA, 0-10v

### Signaux

w: consigne ou grandeur prescrite

e: écart de réglage

u: grandeur réglante

y: grandeur réglée

v: grandeur perturbatrice

### Système réglé

Divisé en deux parties et afin de préciser où agit la perturbation

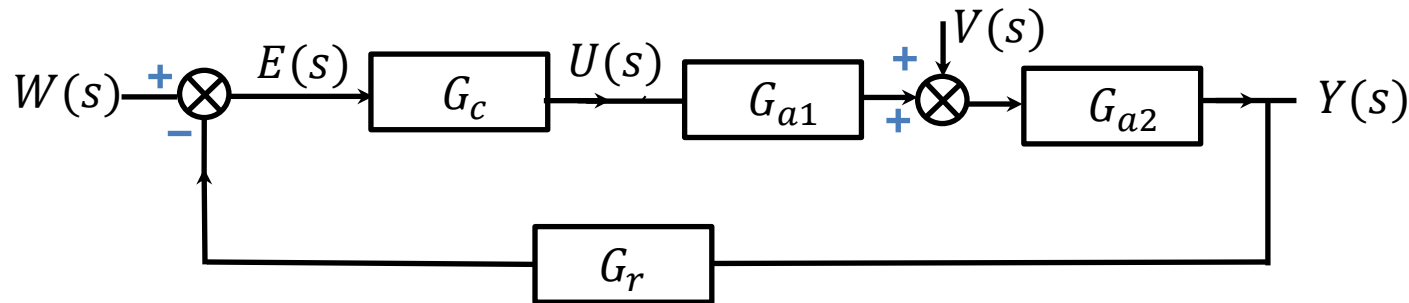
### Chaine d'action

$$G_d = G_1 G_2 G_3 G_4$$

### Chaine de réaction

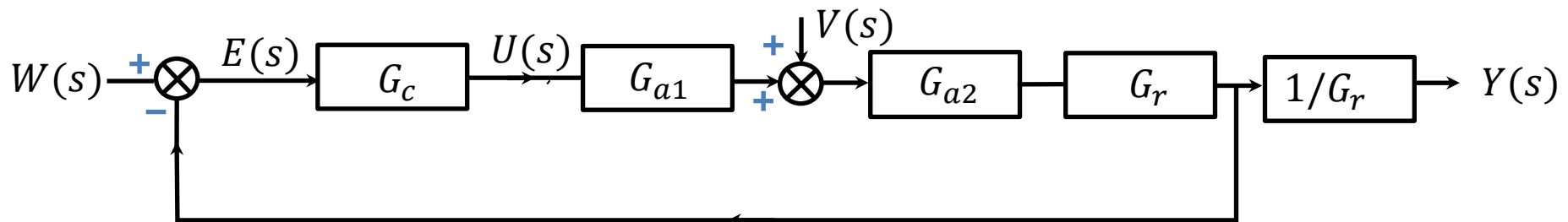
$$G_r = G_{r1} G_{r2}$$

## Schéma fonctionnel universel bouclé

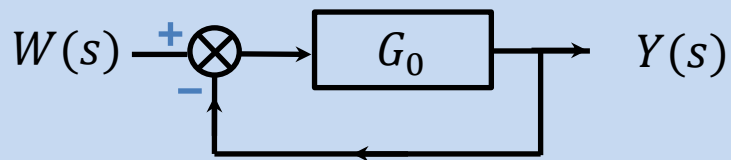


$$G_0 = G_c G_a G_r$$

Transmittance de la boucle **ouverte**

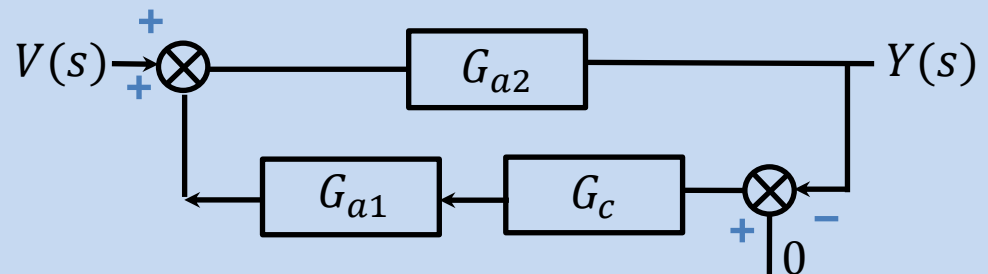


avec  $V(s) = 0$  et  $G_r = 1$   
 $G_0 = G_c G_a \rightarrow$



$$G_{W\acute{e}q} = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0}$$

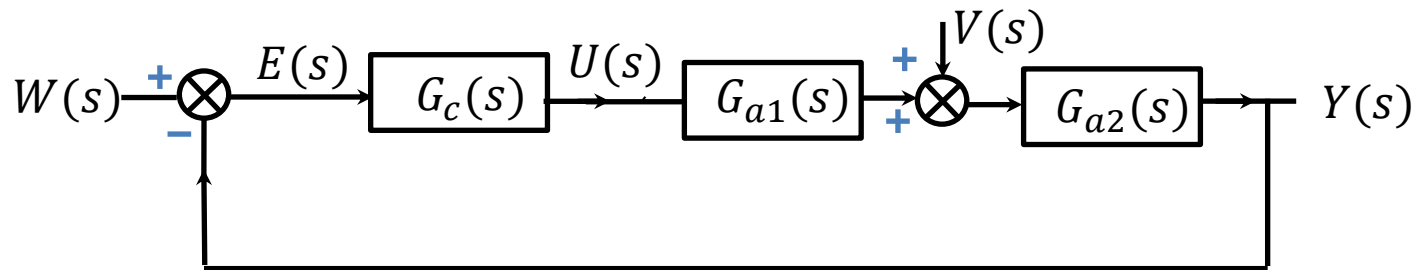
avec  $W(s) = 0$  et  $G_r = 1$



$$G_{V\acute{e}q} = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{a2}}{1 + G_0}$$

$G_{W\acute{e}q}$  et  $G_{V\acute{e}q}$  ont même dénominateur  $(1 + G_0)$  : **importance fondamentale STABILITE**

## Régulateurs



Connaissant le système ( $G_{a1}$  &  $G_{a2}$ ) il faut choisir le régulateur  $G_c$  tel que:

- la perturbation  $V(s)$  soit résorbée rapidement
  - le suivi de la consigne  $W(s)$  soit assuré
- autrement dit que l'écart de réglage  $E(s)$  s'évanouisse rapidement avec le temps

Exemples de transmittances de régulateurs

- régulateur à action proportionnelle

$$u(t) = K e(t) \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K$$

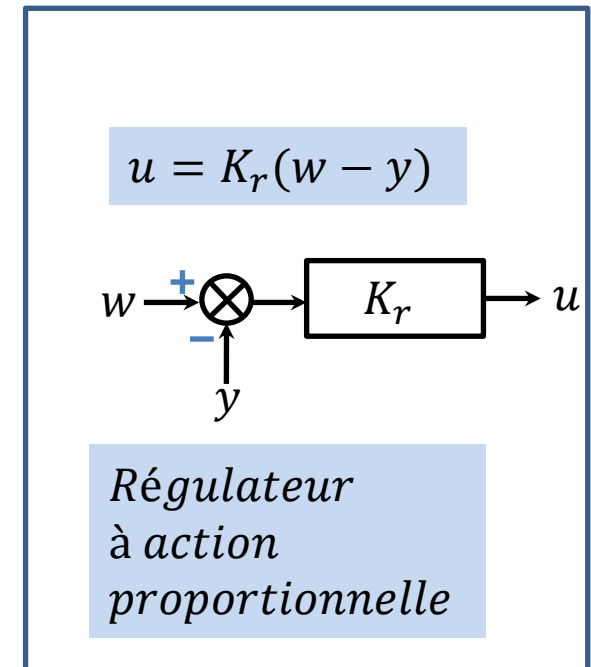
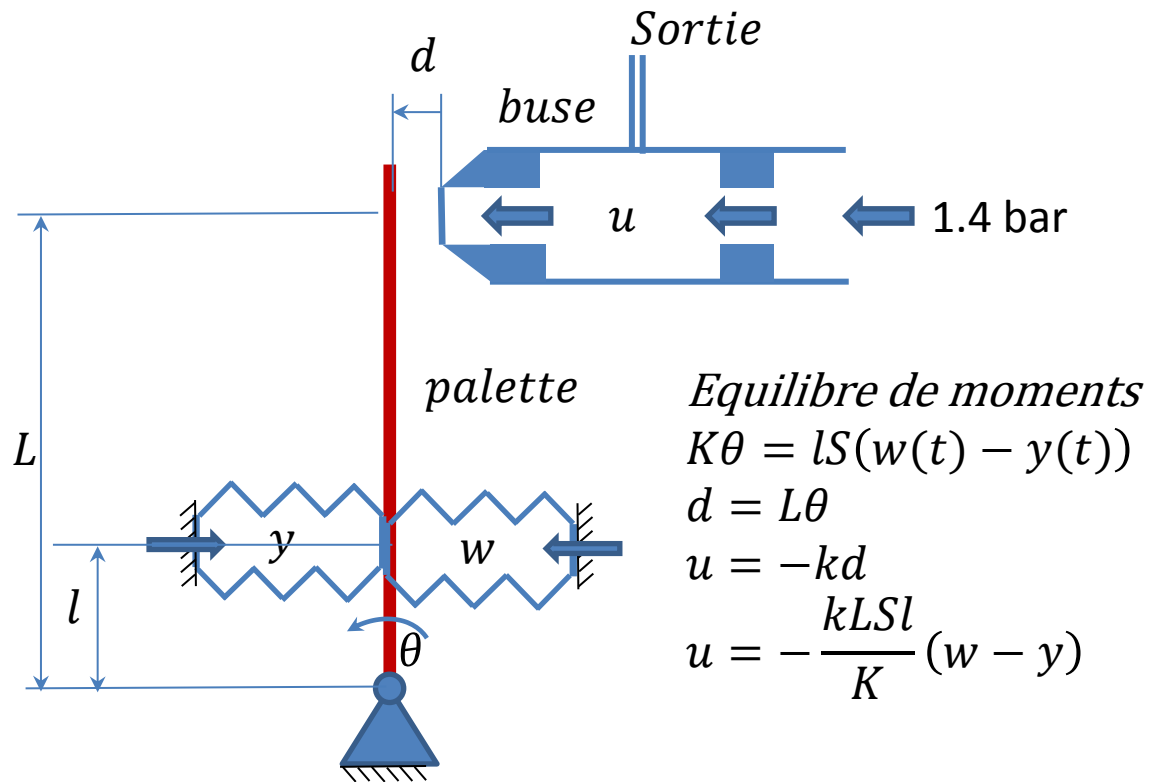
- régulateur à action proportionnelle et par intégration

$$u(t) = K e(t) + \frac{K}{T_i} \int e(t) dt \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

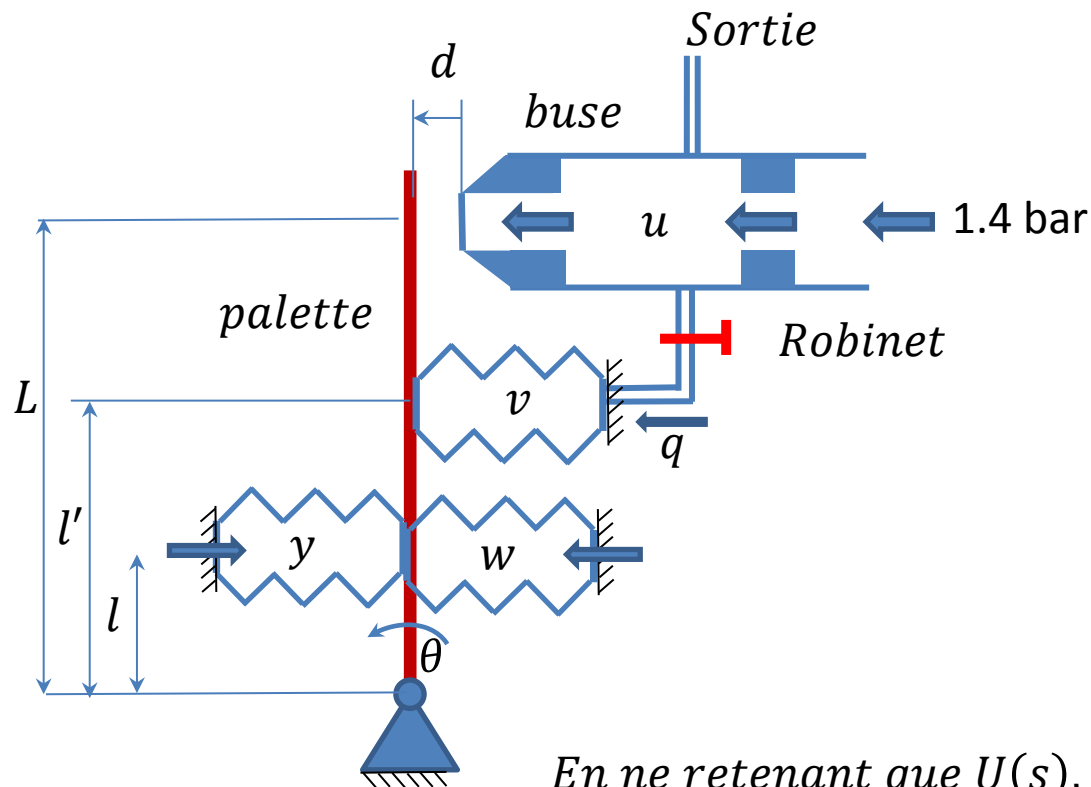
- régulateur à action proportionnelle, par intégration et par dérivation

$$u(t) = K e(t) + \frac{K}{T_i} \int e(t) dt + K T_d \frac{de(t)}{dt} \quad G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right)$$

## Réalisation concrète: technologie pneumatique



# Réalisation concrète: technologie pneumatique



*Equilibre de moments*

$$K\theta = lS(w(t) - y(t)) + vSl'$$

$$d = L\theta$$

$$u = -kd$$

$$u = -\frac{kLSl}{K}(w - y)$$

$$q(t) = \frac{(u(t) - v(t))}{R}$$

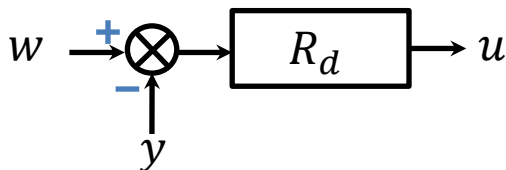
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{(sT_d + 1)} \quad T_d = RC$$

En ne retenant que  $U(s)$ ,  $W(s)$  et  $Y(s)$  il vient

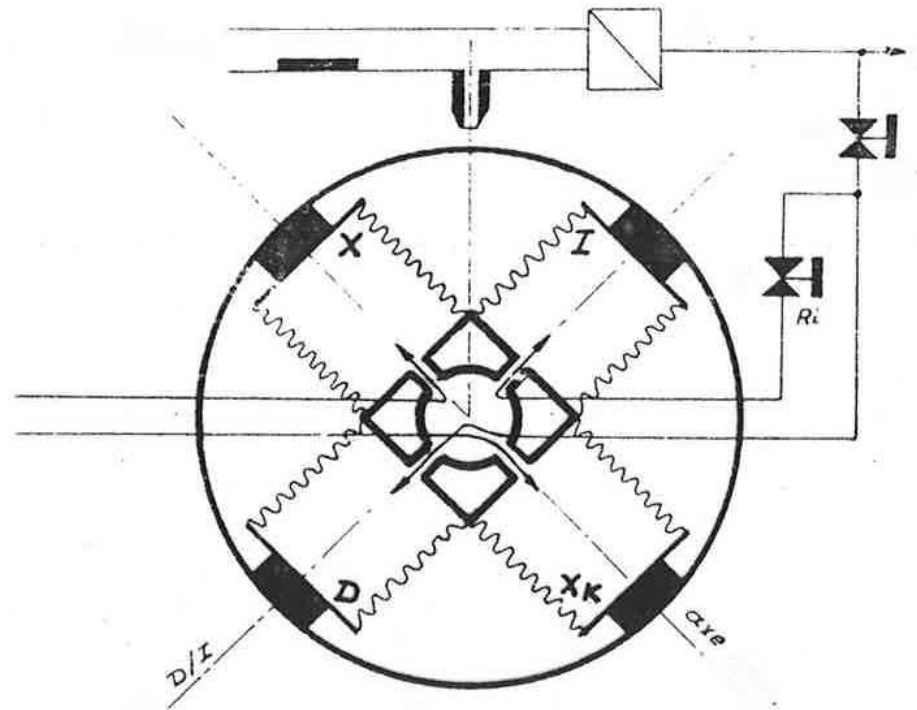
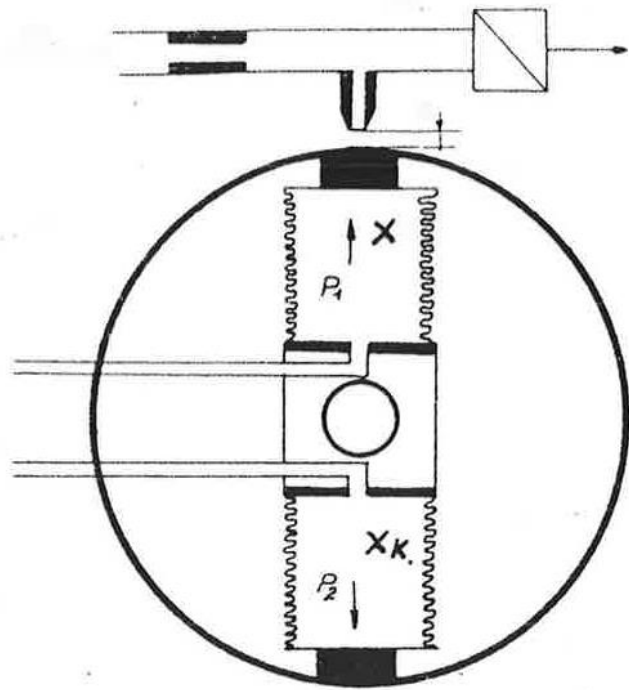
$$R_d = \frac{U(s)}{(W(s) - Y(s))} = -\frac{K_r(sT_d + 1)}{(sT_f + 1)}$$

Régulateur à action proportionnelle et par dérivation

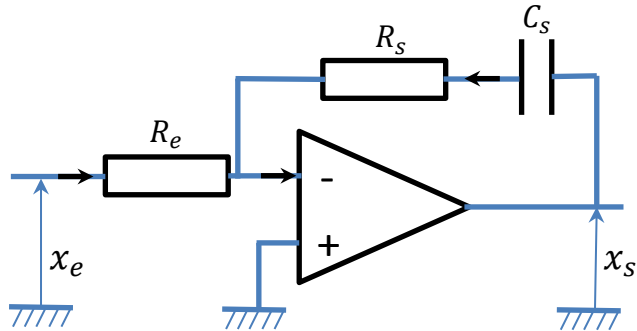


$$T_f \ll T_d \text{ (10 à 20 fois) et } K_r = \frac{l}{l'}$$

# Réalisation concrète: technologie pneumatique

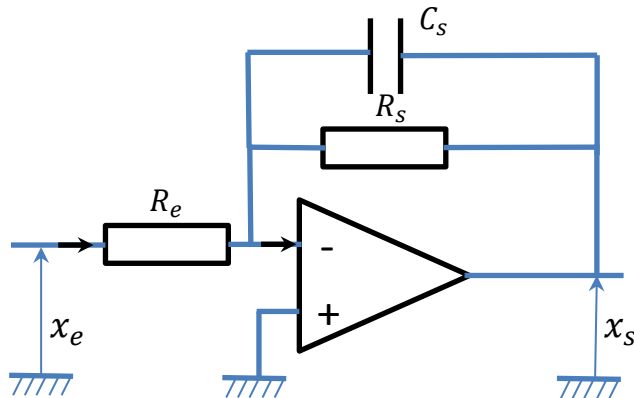


# Réalisation concrète: technologie électronique à AOP



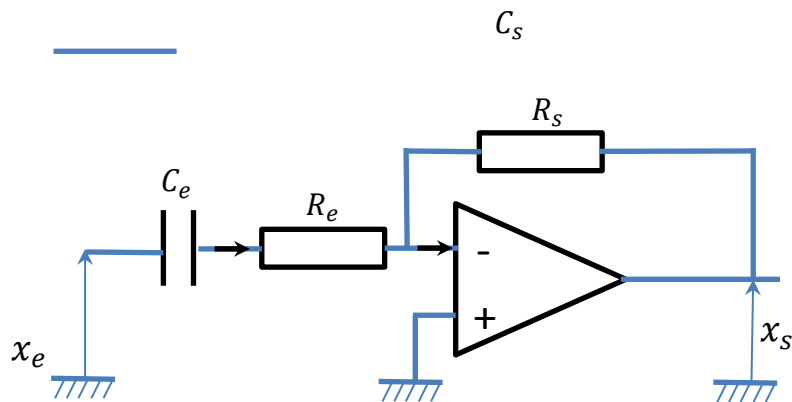
$$\frac{X_s}{X_e} = -\left(K + \frac{1}{sT_i}\right) \quad T_i = R_s C_s \quad K = \frac{R_s}{R_e}$$

*Action proportionnelle et par intégration*



$$\frac{X_s}{X_e} = -K \left( \frac{1}{sT + 1} \right) \quad T = R_s C_s \quad K = \frac{R_s}{R_e}$$

*Filtre passe-bas du premier ordre*



$$\frac{X_s}{X_e} = -\left( \frac{R_s C_e s}{R_e C_e s + 1} \right)$$

*Action dérivée filtrée*

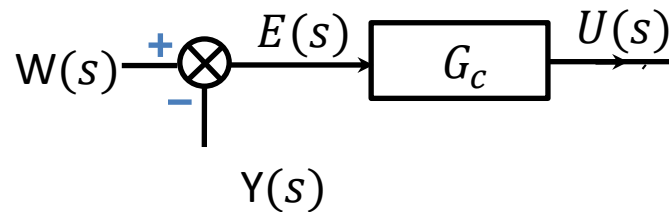


## Transmittances de régulateurs industriels

Le célébrissime PID

Pourquoi ces trois actions

$$G_c = \frac{U(s)}{E(s)}$$



Régulateur PID parallèle

⇒ Facile pour calculer les réponses temporelles

$$G_c = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d$$

Régulateur PID série

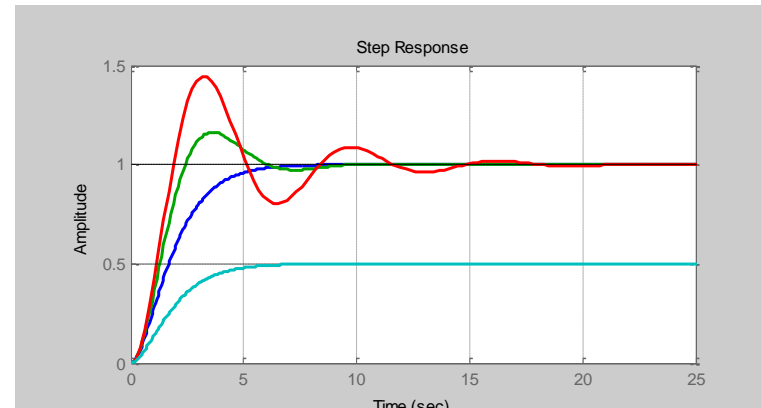
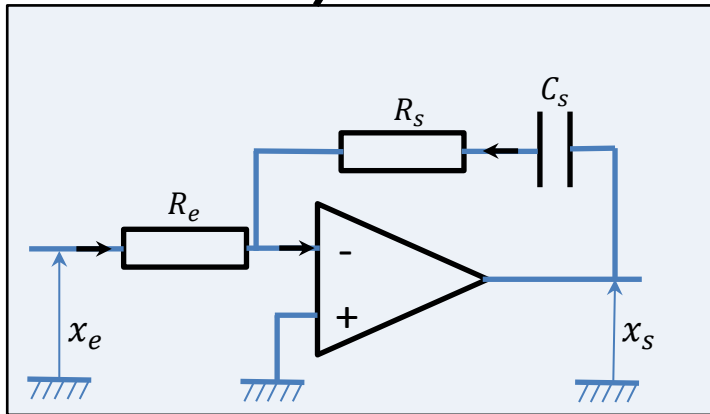
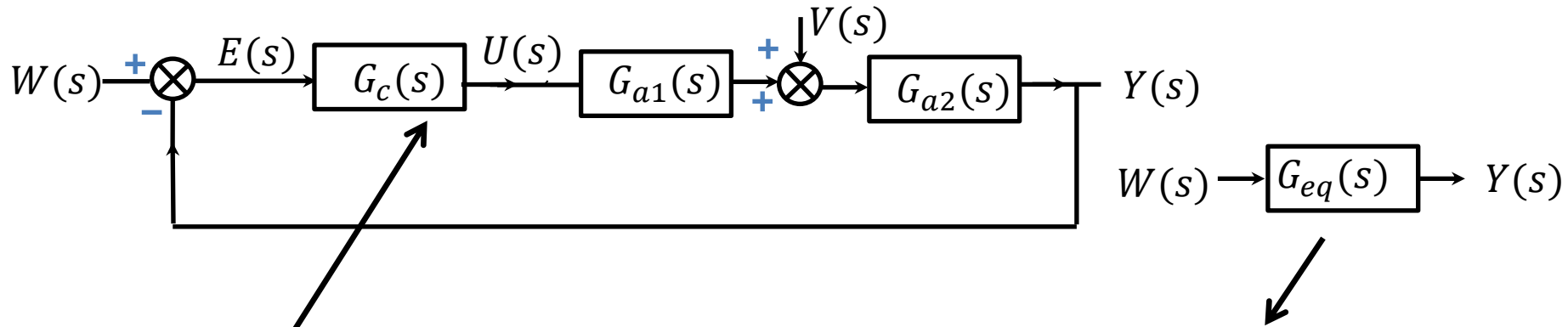
⇒ Facile pour tracer les diagrammes de Bode

$$G_c = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( \frac{sT_i + 1}{sT_i} \right) \left( \frac{sT_d + 1}{sT_f + 1} \right)$$

Avance – Retard de phase ARP

$$G_c = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \underbrace{\left( \frac{sa T_d + 1}{1 + sT_d} \right)}_{\text{Avance}} \underbrace{\left( \frac{sT_i + 1}{sdT_i + 1} \right)}_{\text{Retard}} \quad a > 1 \quad d > 1$$

## Performances d'un système asservi



### stabilité du système de régulation en BF

Le système écarté de sa position d'équilibre y revient une fois que la sollicitation a cessé.

Pendule inverse, bille dans une cuvette

### Précision du système de régulation en BF

- en régime permanent
  - astatisme de conduite,  $y=w$ ?
- précision dynamique
  - l'écart de réglage s'atténue vite?
  - les oscillations sont de forte amplitude
- Au prix de quels efforts de la grandeur réglante

## Forme de Bode

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_p}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1) + K_p} = \frac{K_p}{(1 + K_p) \left( \frac{T_1 T_2}{1 + K_p} s^2 + \frac{T_1 + T_2}{1 + K_p} s + 1 \right)}$$

$K_p$  affecte le gain statique de  $G_f$

$K_p$  modifie les coefficients du polynôme dénominateur

$K_p$  modifie donc aussi la position des pôles

$K_p$  modifie donc l'allure du transitoire  $y(t)$  relatif à un échelon de consigne  $w(t)$

On identifie avec la forme normalisée du second ordre fondamental

$$G_f(s) = \frac{K_f}{\left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

$$K_f = \frac{K_p}{1 + K_p} \quad \zeta = \frac{T_1 + T_2}{2 \sqrt{T_1 T_2 (1 + K_p)}} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{(1 + K_p)}{T_1 T_2}}$$

Dont la réponse à une impulsion ou un échelon est bien connue => tables de transformées

$$g(t) = K_f \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right)$$

$$g(t) = K_f \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t\right)$$

$$\gamma(t) = K_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \right] \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}\right)$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = g(t)$$

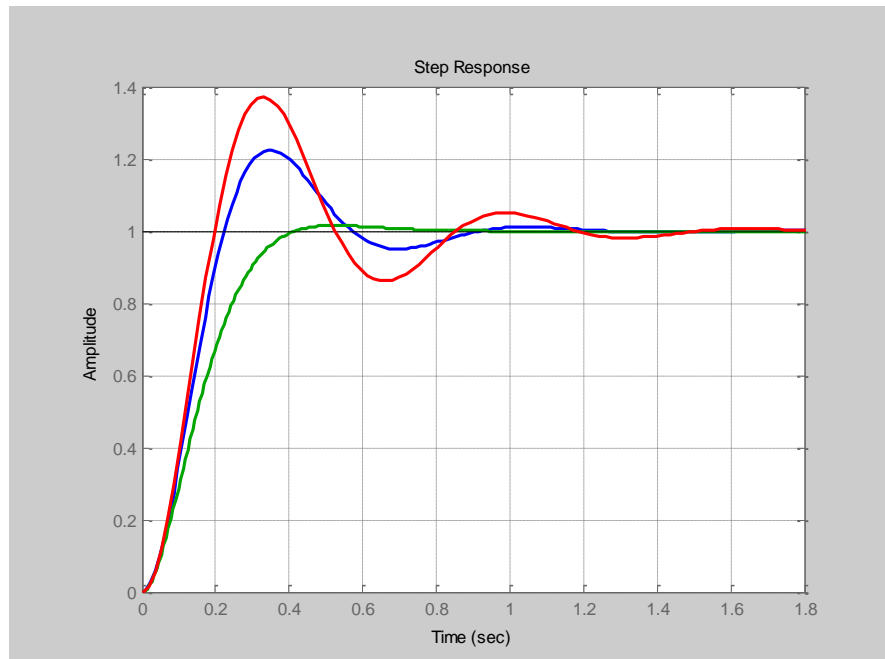
Réponses obtenues avec

$$\omega_n = 10$$

$$\zeta = 0.3$$

$$\zeta = 0.4$$

$$\zeta = 0.8$$



## Stabilité asymptotique

Analyse à partir **du régime libre: Conditions initiales différentes de zéro** et entrée nulle

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t).$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{G_f(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \text{ avec } y(0) = y_0; y'(0) = 0 \dots \dots$$

Si  $Lf(t) = F(s)$  alors

$$L \frac{df(t)}{dt} = s F(s) - f(0)$$

$$L \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$L \frac{d^n f(t)}{dt^n} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$Y(s) = \frac{a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} y(0)$$

*Pas d'influence du numérateur  
et influence fondamentale de  $1 + G_0$*

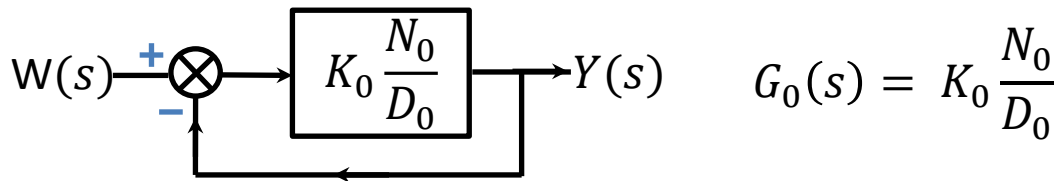
$$Y(s) = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} y(0) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} y(0) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s-p_i)} y(0)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} y(0) \quad \text{les modes du système}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  ssi **TOUS** les pôles  $p_i$  du système sont à partie réelle négative

les pôles  $p_i$ , racines de l'équation caractéristique  $(1 + G_0)$  de  $G_f$   
du système en boucle fermée sont à partie réelle négative

Les modes s'éteignent d'autant plus vite que la partie réelle négative  
des pôles est grande

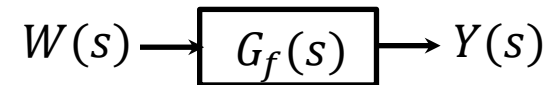
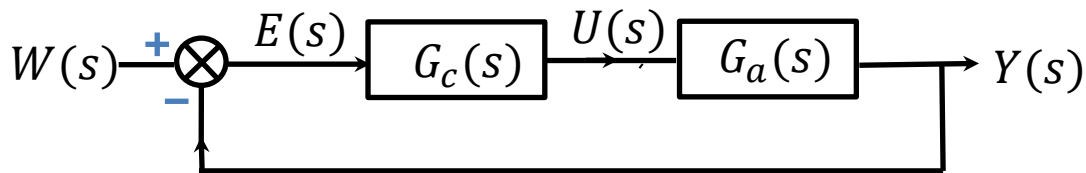


$$G_f = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} \qquad G_f = \frac{K_0 \frac{N_0}{D_0}}{1 + K_0 \frac{N_0}{D_0}} = \frac{K_0 N_0}{D_0 + K_0 N_0}$$

# Stabilité asymptotique

Analyse à partir de la réponse impulsionnelle

$W(s) = 1$  : *impulsion de Dirac*



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{G_f(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} = K_0 N_0$$

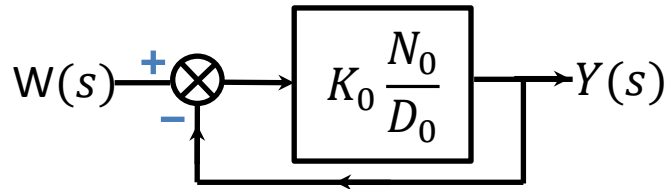
$$Y(s) = \mathbf{G_f(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$Y(s) = \mathbf{G_f(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_{fi}}{(s - p_i)}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_{fi} e^{p_i t}$$

## Système à stabilité absolue

$$G_f = \frac{K_0 N_0}{D_0 + K_0 N_0}$$

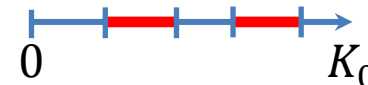


On augmente  $K_0$  ..... les pôles de  $G_f$  changent et un pôle simple ou une paire de pôles complexes conjugués ont une partie réelle nulle, les modes correspondants ne s'amortissent plus, on a atteint le gain critique  $K_0 = K_{0cr}$



## Système à stabilité conditionnelle

On augmente  $K_0$  ... *et on atteint le régime critique  $K_0 = K_{0cr}$*   
*si on augmente encore le gain, le système se stabilise à nouveau très rare*



*Comment trouver ce gain critique ....  
 quelle est sa valeur?*

*est – on loin de ce régime de fonctionnement qu'on veut éviter à tout prix ?*



## Critère de Routh

S'applique à la transmittance en BF

$$G_f = \frac{K_0 \frac{N_0}{D_0}}{1 + K_0 \frac{N_0}{D_0}} = \frac{K_0 N_0}{D_0 + K_0 N_0} = \frac{K_0 N_0}{d_c(s)}$$

$$d_c(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

On construit le tableau de Routh selon la méthode ci-dessous

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	...
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	...	...	
$b$	$c$	$d$		
$l$	$m$			
$o$				

$$\text{avec } b = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad c = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$d = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$l = \frac{b a_{n-3} - a_{n-1} c}{b} \quad m = \frac{b a_{n-5} - d a_{n-1}}{b}$$

Le système en BF est asymptotiquement stable si il n'y a pas de changement de signe dans la première colonne, de plus, il a autant de pôles instables que de changements de signes dans la première colonne du tableau

Exemple

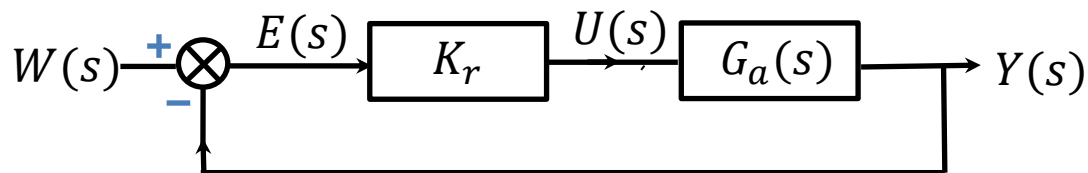
$$G_f = \frac{1}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s^3 - 4s^2 + s + 6}$$

1	1	0
-4	6	0

$\frac{(-4 * 1) - (1 * 6)}{-4} = \frac{10}{4}$	0	0
--	---	---

6	0	0
---	---	---

Exercice



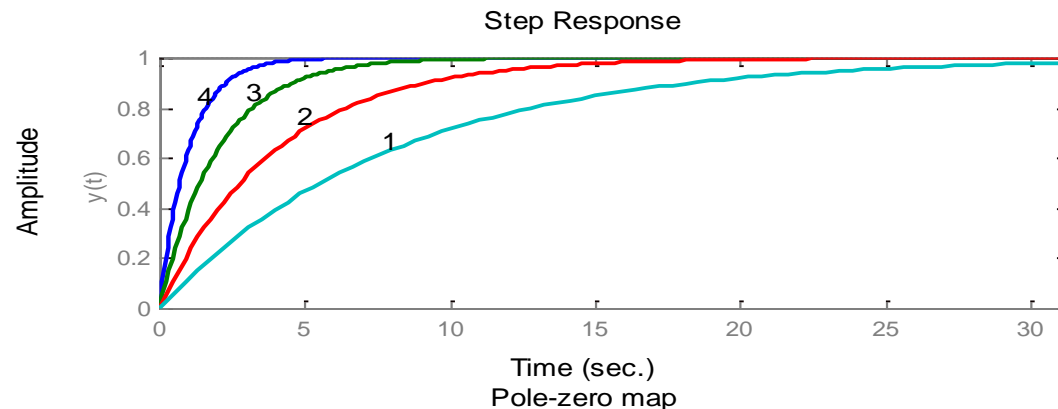
Déterminez la valeur du gain critique du régulateur  $K_r$  pour  $G_a = \frac{2}{(sT+1)^3}$  et pour  $G_a = \frac{2}{(sT+1)^2}$

## Relations entre les pôles d'un système et la réponse temporelle d'un système

Système du premier ordre

$$H(s) = \frac{X_s}{X_e} = \frac{1}{sT + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T} = \frac{k}{s + a} = \frac{k}{s - p}$$

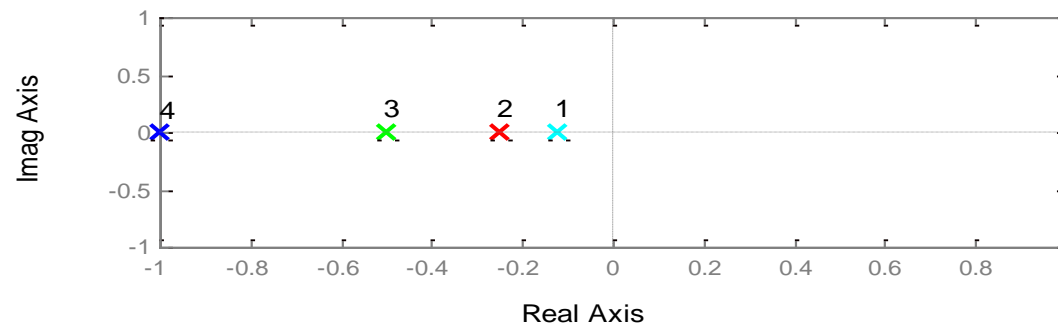
Sollicité par un échelon  
unité  $X_e(s) = \frac{1}{s}$



$$x_s(t) = (1 - e^{-at})$$

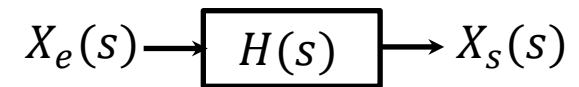
$$x_s(t) = (1 - e^{pt})$$

$$x_s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



Système du second ordre **fondamental** pôles complexes auto - conjugués

$$H(s) = \frac{x_s}{x_e} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$



Sollicité en entrée par un échelon unité  $X_e(s) = \frac{1}{s}$  donne (table de transformées)

$$x_s(t) = K_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right) \right]$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0 \quad \delta = \zeta \omega_n \quad \omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$\omega_n$ : pulsation naturelle du système non - amorti ( $\zeta=0 \rightarrow \omega_0 = \omega_n$ )  
rayon d'un cercle passant par les pôles

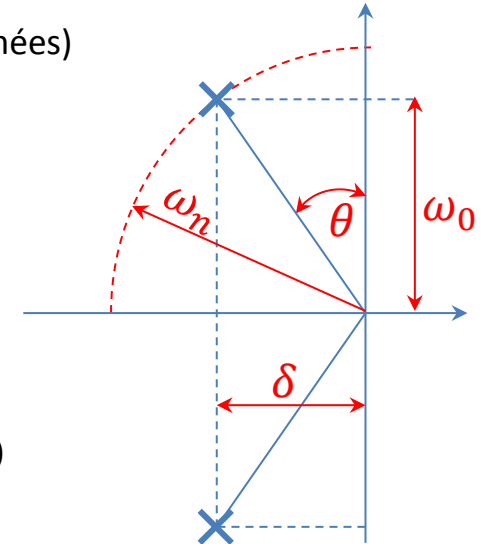
$\omega_0$ : pseudo - pulsation, celle à laquelle le système va osciller

$\zeta$  : coefficient d'amortissement réduit, **détermine à lui seul** le dépassement

$\zeta = \sin \theta$  ..... pas de dépassement perceptible (1%) si  $\theta = 45^\circ \rightarrow \zeta = 0.707$

$\delta = \zeta \omega_n = \frac{1}{T_e}$  **détermine à lui seul** l'enveloppe du transitoire (lieu des extremum)

La rapidité avec laquelle « s'éteint » le transitoire .



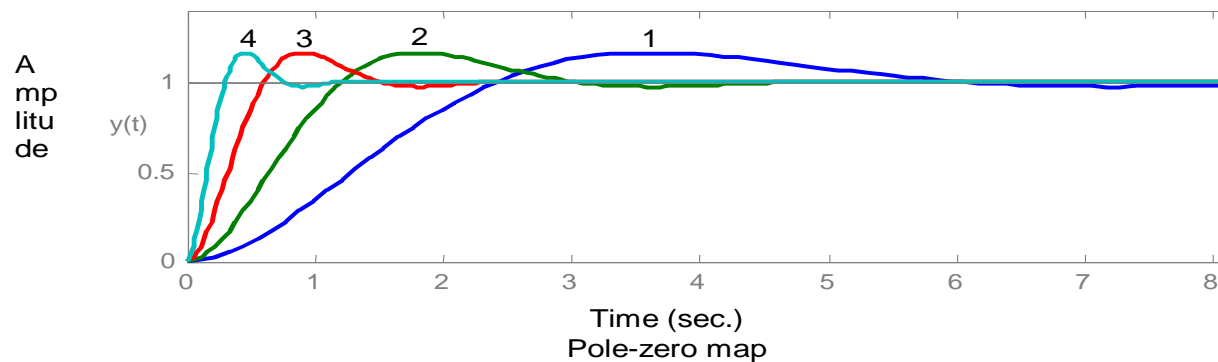
## Système du second ordre

Amortissement  $\zeta$  constant

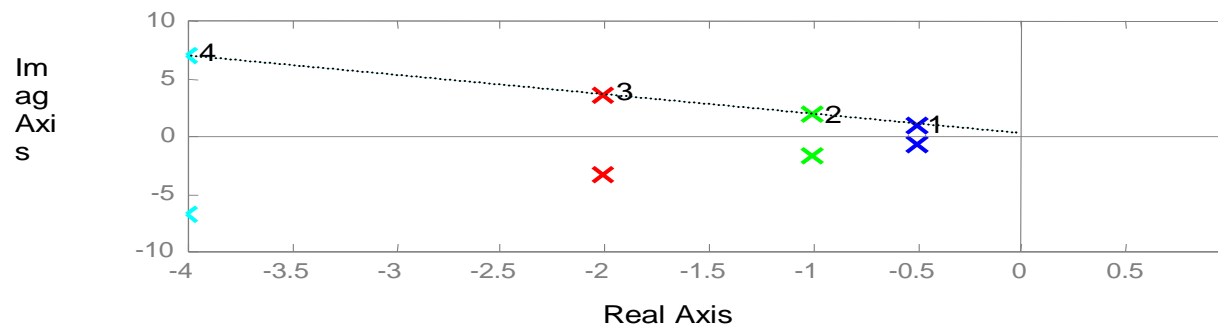
$$H(s) = \frac{x_s}{x_e} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$x_s(t) = K_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \right] \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right)$$

Step Response



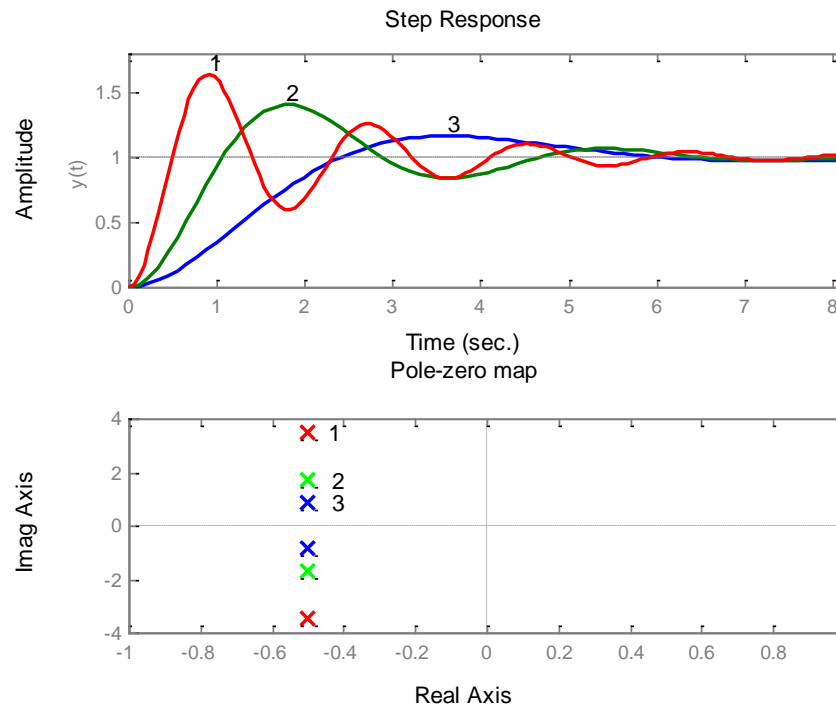
Pole-zero map



## Temps de réponse constant

$$H(s) = \frac{x_s}{x_e} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

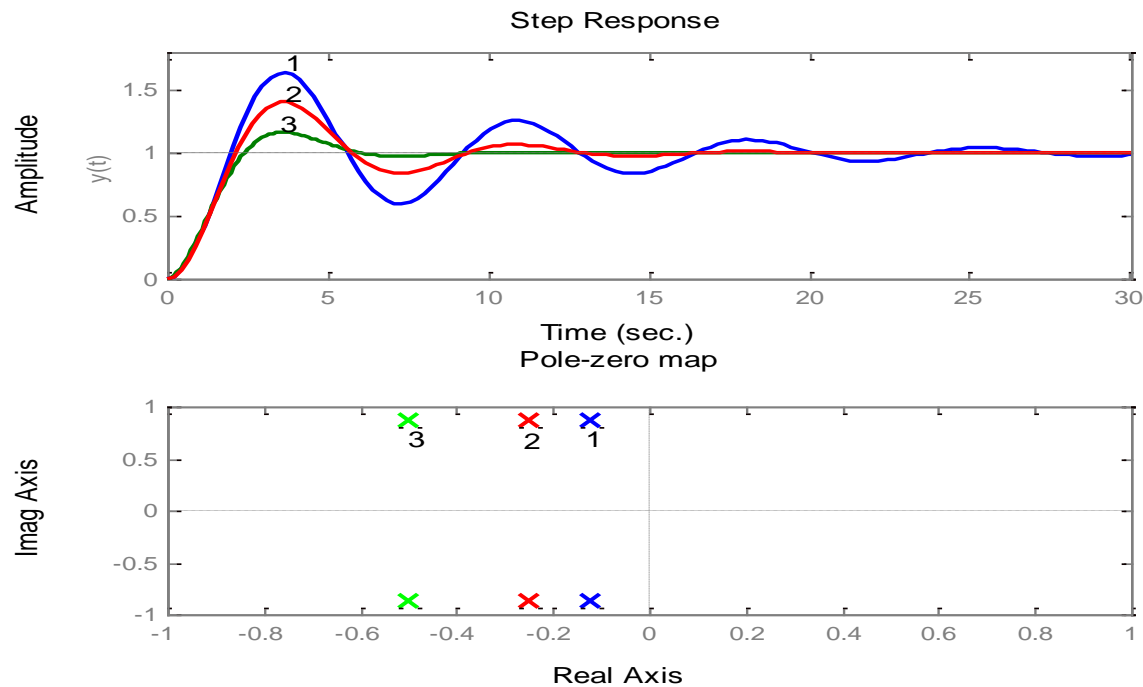
$$x_s(t) = K_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \right] \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right)$$



## Pseudo-pulsation constante

$$H(s) = \frac{x_s}{x_e} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$x_s(t) = K_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \right] \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right)$$



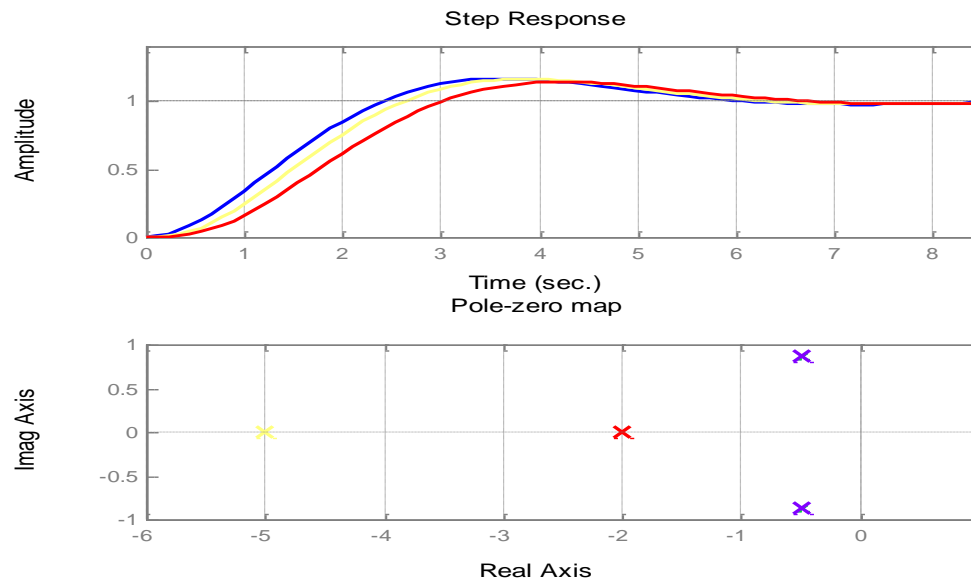
## Pôles dominants

Et si....l'ordre est supérieur à 2?.....On fait comme si l'ordre était 2 sous certaines hypothèses

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad \text{pôles en } p = -0.5 \pm 0.866j \rightarrow \text{bleu}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(0.2s + 1)} \quad \text{pôles en } p_{1,2} = -0.5 \pm 0.866j \text{ \& } p_3 = -5 \rightarrow \text{jaune}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(0.5s + 1)} \quad \text{pôles en } p_{1,2} = -0.5 \pm 0.866j \text{ \& } p_3 = -2 \rightarrow \text{rouge}$$



*On accepte l'idée que la réponse est celle d'un système du second ordre fondamental pour autant que la partie réelle du (des) pôle(s) supplémentaire(s) ....*



## Notions complémentaires

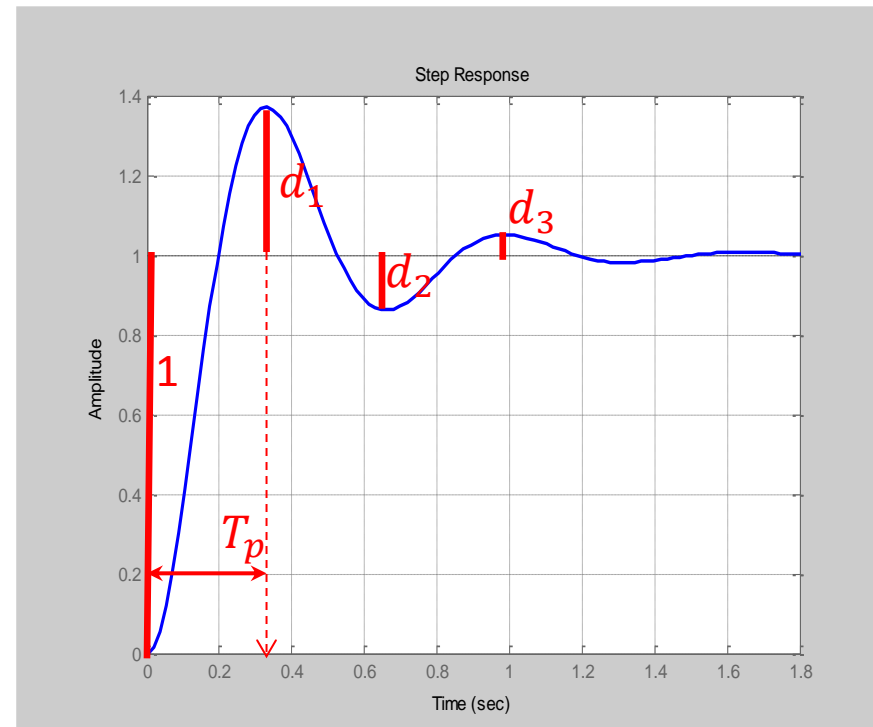
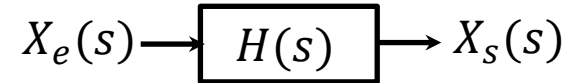
Décrément logarithmique et temps de pic

$$H(s) = \frac{x_s}{x_e} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

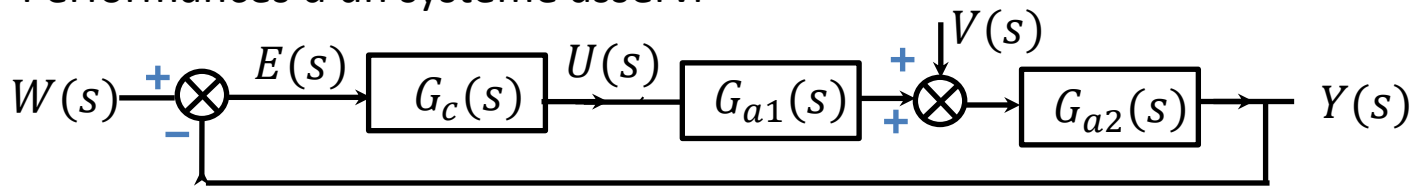
$$x_s(t) = K_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \right] \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi\right)$$

$$D = \frac{d_1}{1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_3}{d_2} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_0}$$



## Performances d'un système asservi



### *Comment choisir $G_c$ tel que l'on ait*

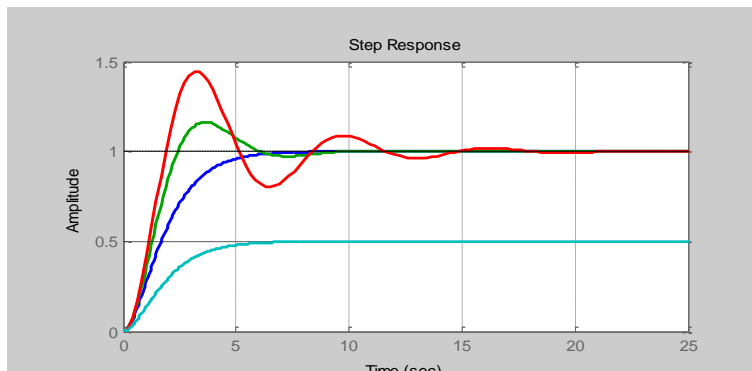
#### Précision en suivi de consigne

La grandeur réglée tend-elle à rejoindre  
Rapidement la grandeur prescrite lorsque  
celle-ci varie

- en échelon
- En rampe

$$W(s) \rightarrow \boxed{G_{w\acute{e}q}(s)} \rightarrow Y(s)$$

$$G_{W\acute{e}q} = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_a G_c}{1 + G_a G_c}$$

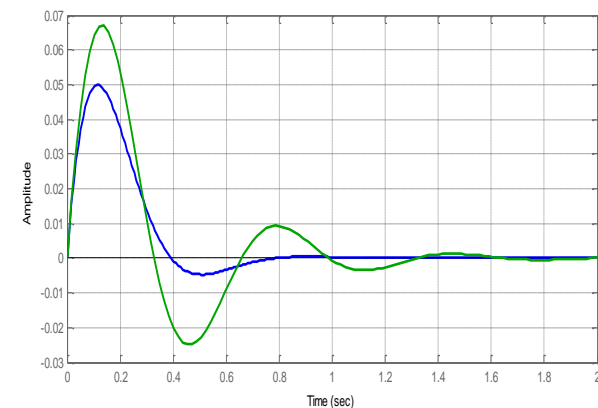


#### Précision en réjection des perturbations

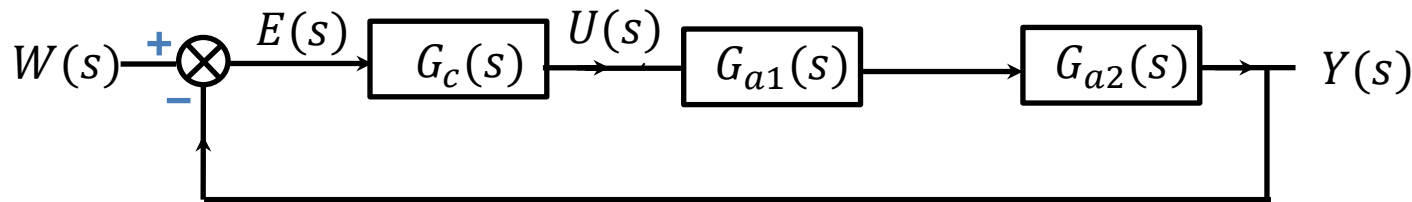
La grandeur réglée tend-elle à rester égale à  
la grandeur prescrite lorsque la perturbation  
agit sur le système, en entrée ou en sortie

$$W(s) \rightarrow \boxed{G_{v\acute{e}q}(s)} \rightarrow Y(s)$$

$$G_{V\acute{e}q} = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{a2}}{1 + G_a G_c}$$



## Suivi de consigne



$$E(s) = \frac{1}{1+G_0} W(s) \quad G_0 = \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s) \text{ avec } R_0(0) = 1 \rightarrow \text{Forme de Bode}$$

$$E(s) = \frac{s^\alpha}{s^\alpha + K_0 R_0(s)} W(s)$$

## Echelon unité

$$W(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)s$$

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + K_0 R_0(s)}$$

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + K_0}$$

$$\alpha = 0 \quad e_p = \frac{1}{1 + K_0}$$

$$\alpha = 1 \quad e_p = 0$$

$$\alpha = 2 \quad e_p = 0$$

## Rampe unité

$$W(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_v = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)s$$

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + K_0 R_0(s)}$$

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + K_0}$$

$$\alpha = 0 \quad e_v = \infty$$

$$\alpha = 1 \quad e_v = \frac{1}{K_0}$$

$$\alpha = 2 \quad e_v = 0$$

## Accélération unité

$$W(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_a = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)s$$

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + K_0 R_0(s)}$$

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + K_0}$$

$$\alpha = 0 \quad e_a = \infty$$

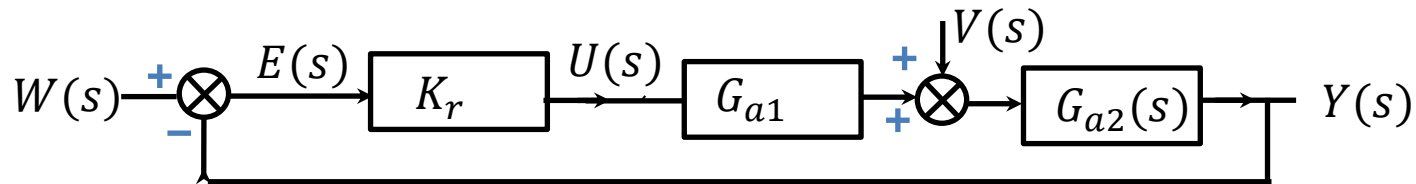
$$\alpha = 1 \quad e_a = \frac{1}{K_0}$$

$$\alpha = 2 \quad e_a = \frac{1}{K_0}$$

# Tableau de synthèse de l'écart de position (suivi de consigne)

Écart de position	Echelon	Rampe	accélération
$\alpha = 0$	$\frac{1}{1 + K_0}$	$\infty$	$\infty$
$\alpha = 1$	0	$\frac{1}{K_0}$	$\infty$
$\alpha = 2$	0	0	$\frac{1}{K_0}$

Exercice: calculez l'écart de position



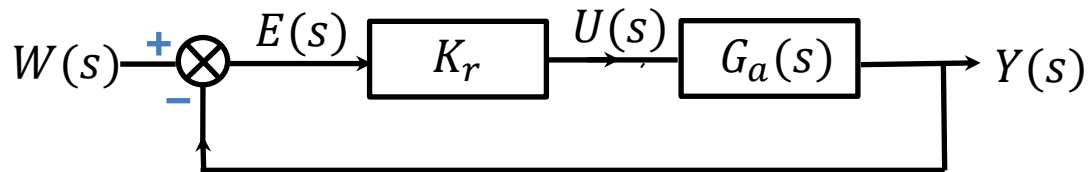
1) Perturbation à l'entrée

$$V(s) = \frac{1}{s} \quad W(s) = 0 \quad G_{a1}(s) = 1 \quad G_{a2}(s) = \frac{1}{s}$$

2) Perturbation en sortie

$$V(s) = \frac{1}{s} \quad W(s) = 0 \quad G_{a1}(s) = \frac{1}{s} \quad G_{a2}(s) = 1$$

## Dilemme Stabilité-Précision



Pour augmenter la précision, il faut augmenter le gain de la boucle ouverte et en particulier le gain  $K_r$  du régulateur.

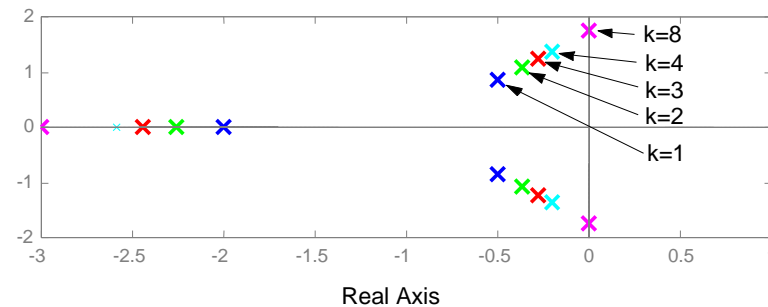
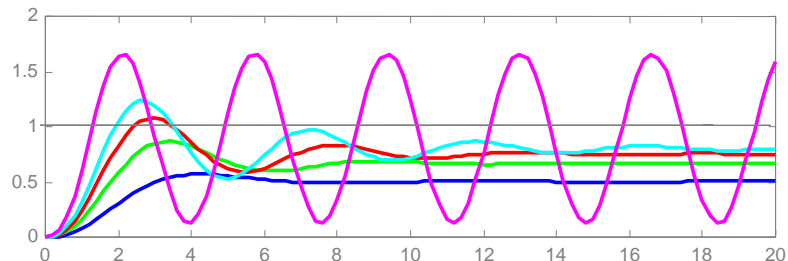
Mais l'augmentation du gain de la boucle ouverte  $G_0 = K_r G_a$  déplace (de façon très générale) les pôles de  $G_f = \frac{G_0}{1+G_0}$  vers le 1/2 plan complexe droit et risque d'engendrer l'instabilité....

D'où la dénomination: dilemme Stabilité-Précision.

$$G_a = \frac{1}{(sT+1)^3} \quad G_0 = G_a K_r$$

$$G_f = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{K_r}{(sT+1)^3 + K_r}$$

$$K_{0cr} = 8$$



## Facteur de qualité d'un système de régulation automatique

Etude du transitoire de l'erreur lors d'une réponse indicielle en BF

Critères:

ISE: Integral square value of error

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt \cong \int_0^{2T_{r95}} e^2(t)dt$$

ITSE: Integral of time multiplied square value of error

$$J = \int_0^{\infty} te^2(t)dt \cong \int_0^{2T_{r95}} te^2(t)dt$$

Exemple

$$G_f = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

$$E(s) = W(s) - Y(s) = W(s) - \frac{W(s)}{s^2 + 2\zeta s + 1} = \frac{s + 2\zeta}{s^2 + 2\zeta s + 1} sW(s)$$

$\zeta$  optimal au sens du critère ISE?

$$E(s) = W(s) - Y(s) = W(s) - \frac{W(s)}{s^2 + 2\zeta s + 1} = \frac{s + 2\zeta}{s^2 + 2\zeta s + 1} sW(s)$$

$$W(s) = \frac{1}{s} \rightarrow E(s) = \frac{s + 2\zeta}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

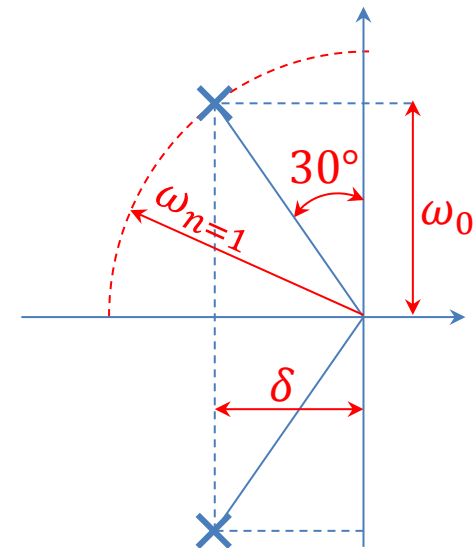
*d'où...selon les tables de transformées*

$$e(t) = \frac{e^{-\zeta t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right)$$

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt = \zeta + \frac{1}{4\zeta} \quad \frac{\partial J(\zeta)}{\partial \zeta} = 1 - \frac{1}{4\zeta^2} = 0$$

$$\zeta_{\min} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5 \quad \sin(\theta) = 0.5 \quad \theta = 30^\circ \rightarrow d \cong 15\%$$

$$\zeta = 0.43 \rightarrow d \cong 22\%$$



# Analyse fréquentielle

Synthèse de régulateurs

Etude de la stabilité

Déduction **approximative** du régime transitoire:

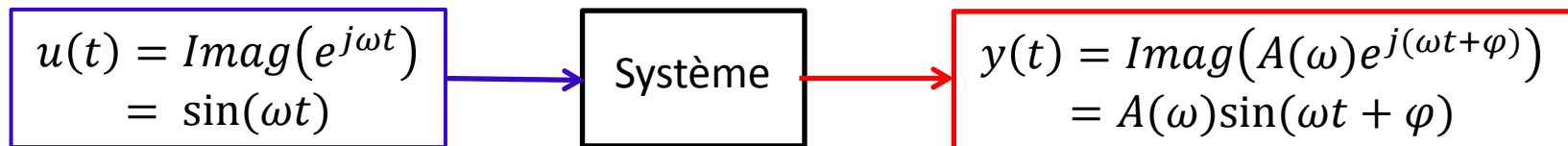
Durée et dépassement indiciel

Réponse harmonique

↓ ↓ ↓

réponse en régime sinusoïdal quand  
tous les modes (réponse libre) sont éteints...  
c'est-à-dire en régime forcé.

Dans  $G(s)$  faire  $s = j\omega \rightarrow G(j\omega)$



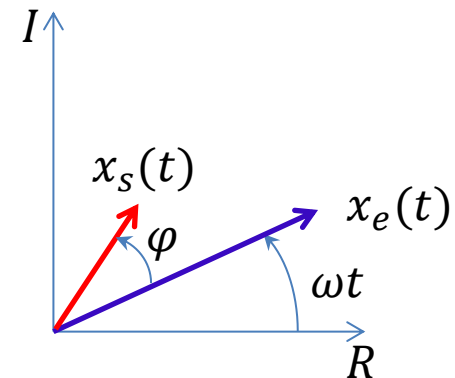
$$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega}$$

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$$



Boucle ouverte  $G_0(j\omega) \rightarrow A$  et  $\varphi$

Boucle fermée  $G_f(j\omega) \rightarrow B$  et  $\psi$



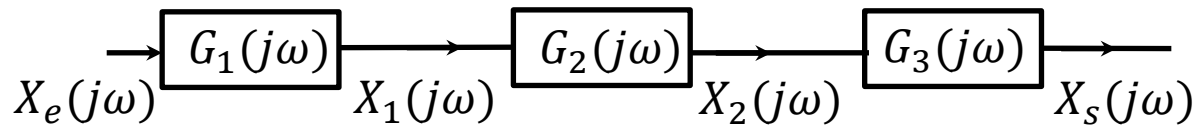
## Lieux de transfert

représentation de la réponse harmonique dans les diagrammes

Lieu de Bode:  $A_{dB}(\omega)$  courbe de l'amplitude

$\varphi(\omega)$  courbe de phase

portées dans un diagramme à échelle semi – logarithmique



$$G(j\omega) = \frac{X_s(j\omega)}{X_e(j\omega)} = G_1(j\omega) G_2(j\omega) G_3(j\omega)$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} A_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)}$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}e^{j\varphi_2(\omega)}e^{j\varphi_3(\omega)}$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega) e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\varphi_3(\omega))}$$

$$A = A_1 A_2 A_3 \quad \log_{10} A = \log_{10} A_1 A_2 A_3 = \log_{10} A_1 + \log_{10} A_2 + \log_{10} A_3$$

$$\begin{aligned} A_{dB} &= A_{1dB} + A_{2dB} + A_{3dB} \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned}$$

$$A_{dB} = A_{1dB} + A_{2dB} + A_{3dB}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

$$G(s) = 0.2 \frac{(s + 10)}{s + 1}$$

Bode Diagrams

Ecrire sous la forme de Bode

$$4) G(s) = 2 \frac{(0.1 s + 1)}{s + 1}$$

*Décomposer*

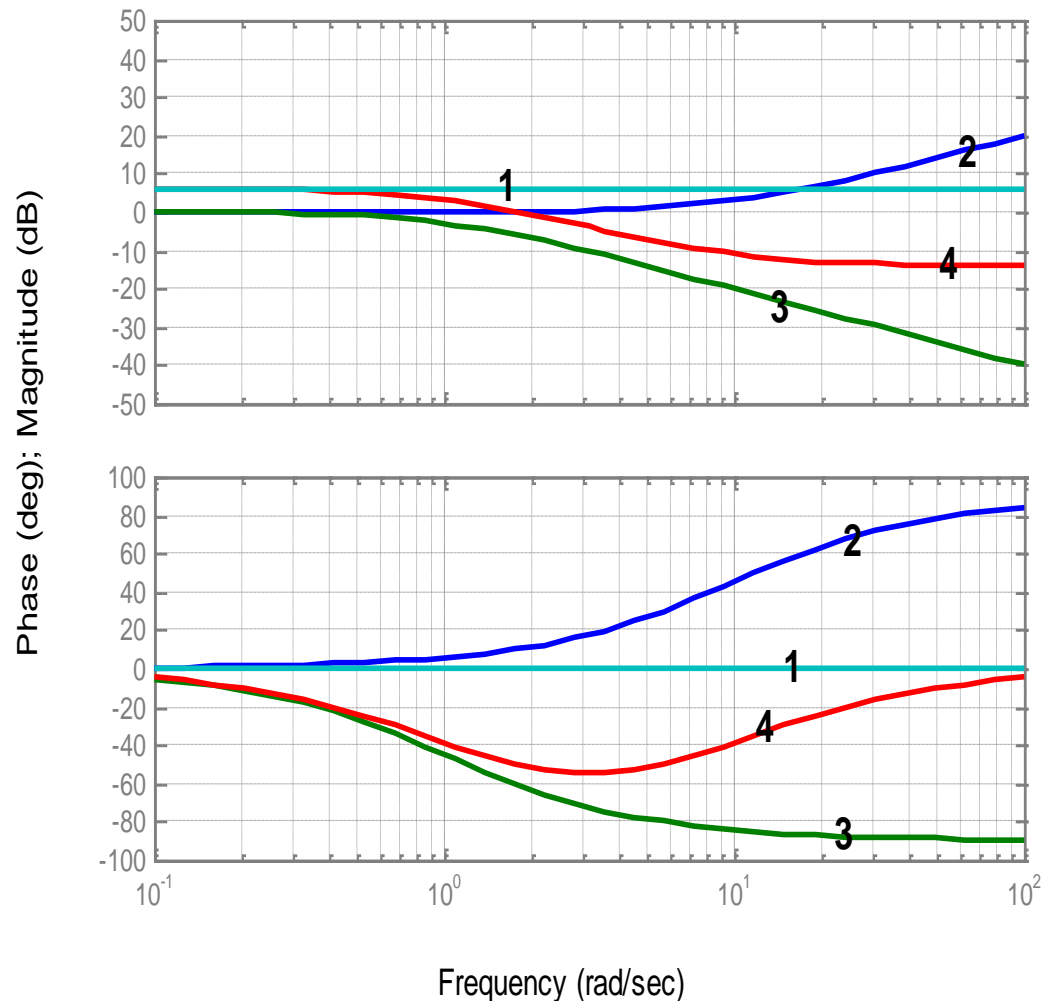
$$G = G_1 G_2 G_3$$

$$1) G_1 = 2$$

$$2) G_2 = (0.1 s + 1)$$

$$3) G_3 = \frac{1}{s + 1}$$

- Représenter les composantes dans le diagramme semi-log
- faire la somme des termes



## Approximations asymptotiques

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

Basses fréquences  $\omega \ll \frac{1}{T}$

$$G(j\omega) \cong 1$$

$$A(\omega) = 1 \quad A_{dB} = 0$$

$$\varphi = 0^\circ$$

Hautes fréquences  $\omega \gg \frac{1}{T}$

$$G(j\omega) \cong \frac{1}{Tj\omega}$$

$$G(s) \cong \frac{1}{sT}$$

*intégrateur en HF*

$$A(\omega) = \frac{1}{T\omega} \quad \varphi = -90^\circ$$

$$A_{dB}(\omega) = -20 \log T\omega$$

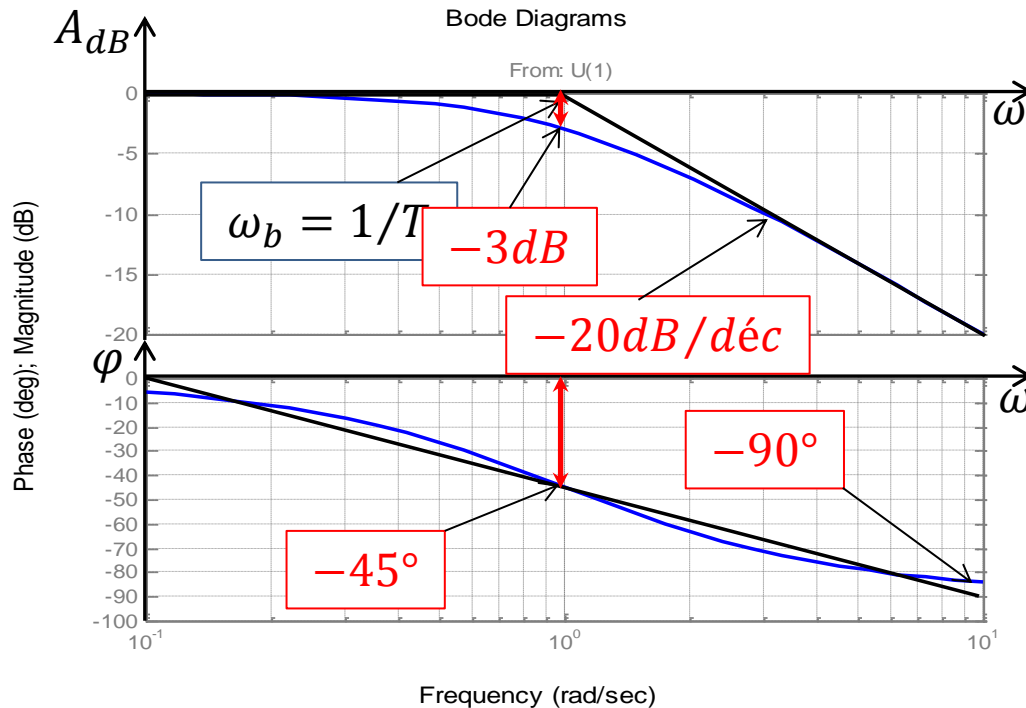
$$A_{dB}(1/T) = 0 \text{ dB}$$

$$A_{dB}(10/T) = -20 \text{ dB}$$

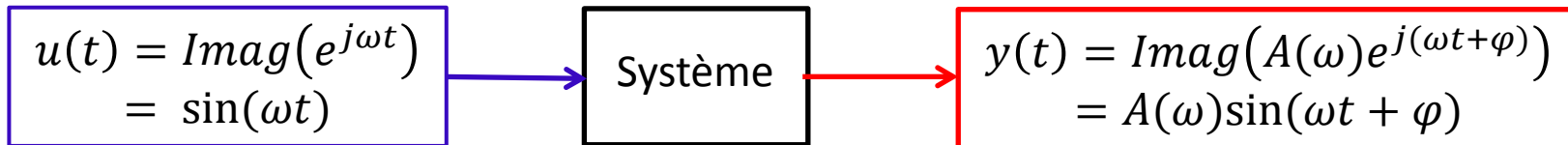
$$A_{dB}(100/T) = -40 \text{ dB}$$

*Approximations BF et HF*

*Égales en  $\omega = \frac{1}{T} \rightarrow \omega_b \triangleq \frac{1}{T}$*



# Lieu de Nyquist de la réponse harmonique



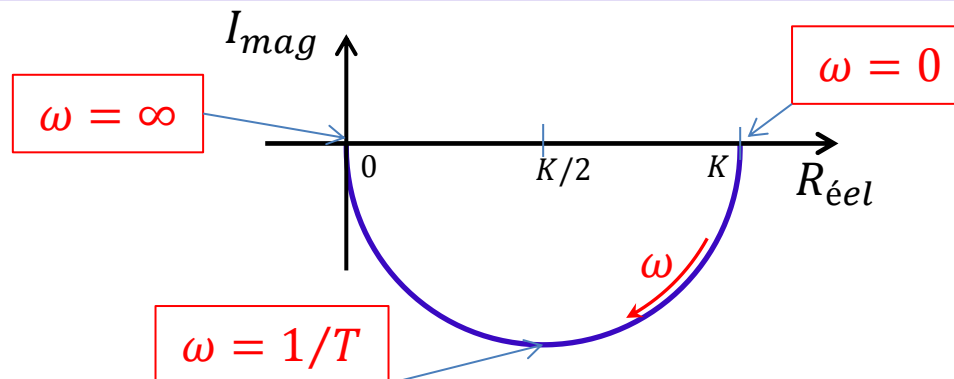
Représentation polaire de  $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R_{\text{éel}}(G(j\omega)) + jI_{\text{mag}}(G(j\omega))$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{R_{\text{éel}}(G(j\omega))^2 + I_{\text{mag}}(G(j\omega))^2}$$

$$\varphi = \arg(G(j\omega)) = \arctg\left(\frac{I_{\text{mag}}(G(j\omega))}{R_{\text{éel}}(G(j\omega))}\right)$$

Le lieu est paramétré en pulsations  $0 < \omega < \infty$



Exemple

$$G(s) = \frac{K}{sT + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega T}{1}$$

$\frac{1}{2}$  cercle de diamètre  $K$

centré en  $\frac{K}{2} + 0j$

# Lieu de Black-Nichols de la réponse harmonique

*Représentation cartésienne de  $G(j\omega)$*

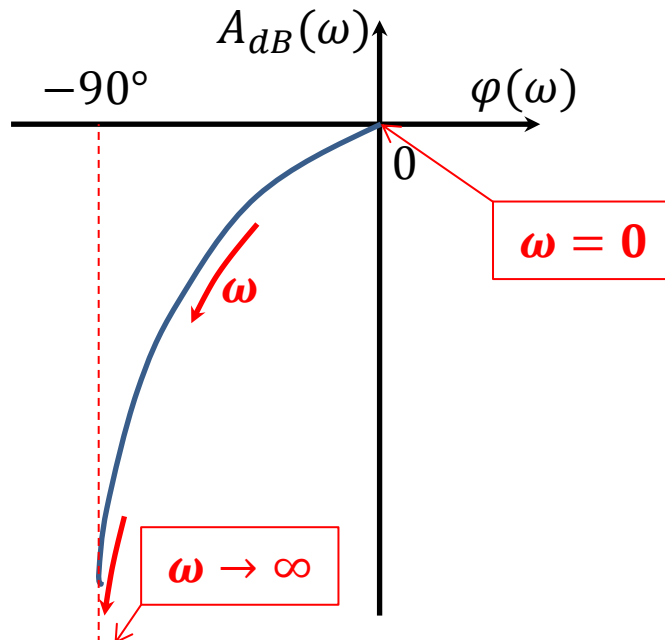
$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A_{dB}(\omega) = f[\varphi(\omega)]$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\log|G(j\omega)|$$

$$\varphi = \arg(G(j\omega)) = \arctg\left(\frac{I_{mag}(G(j\omega))}{R_{\acute{e}el}(G(j\omega))}\right)$$

*Le lieu est paramétré en pulsations  $0 < \omega < \infty$*



*Exemple*

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$$

$$A_{dB}(\omega) = -20\log\sqrt{(\omega T)^2 + 1}$$

$$A_{dB} = -10 \log((\omega T)^2 + 1)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{T\omega}{1}\right)$$

$$\text{en } \omega = \frac{1}{T}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = -45^\circ \quad A_{dB} = -3$$

## Exercices

Pour  $G(s) = \frac{K}{s}$

***Esquissez: la reponse temporelle***

- à un échelon unité
- à une impulsion unité

***Esquissez les lieux de***

- Bode
- Nyquist
- Black – Nichols

***idem pour***

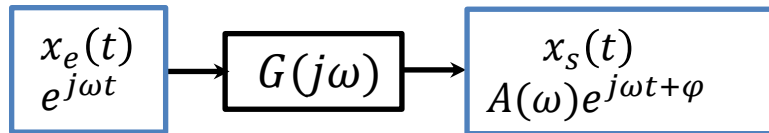
$$G(s) = e^{-sT}$$

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

$$G(s) = \frac{s}{s+1}$$

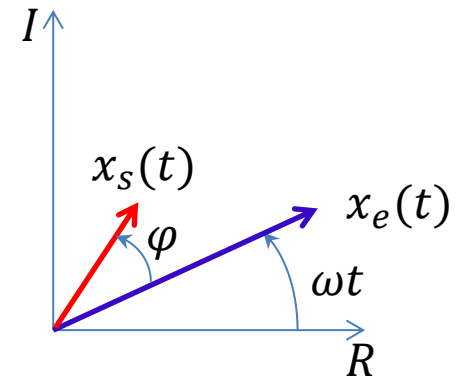
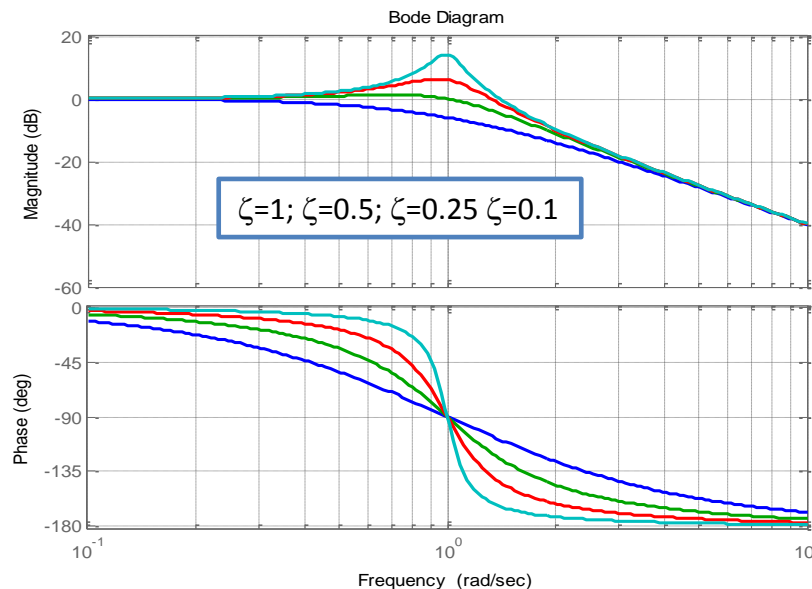
Système du second ordre fondamental: réponse harmonique

$$G(s) = \frac{X_s}{X_e} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$



$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad A_{dB} = 20 \log A(\omega) \quad \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

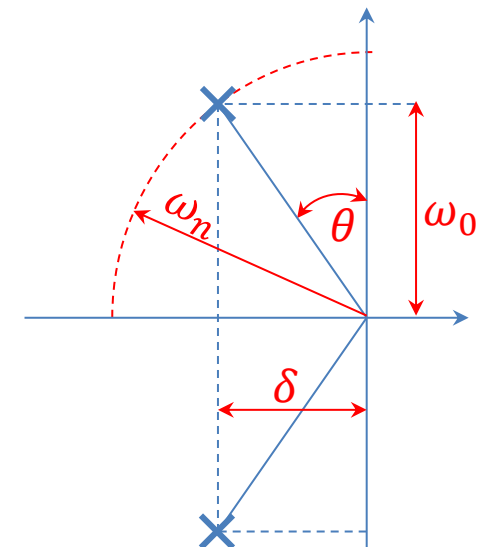
$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad Q_{dB} = 20 \log Q$$



$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$$

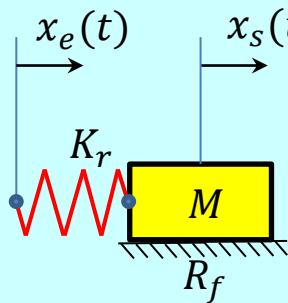
$$\delta = \zeta\omega_n$$

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$



# Système du second ordre fondamental: Synthèse

Système masse ressort sur un plan



Equilibre des forces sur M

$$F_a(t) = [x_e(t) - x_s(t)]K_r \rightarrow$$

$$F_r(t) = M \frac{d^2 x_s}{dt^2} + R_f \frac{dx_s}{dt} \leftarrow$$

$$G(s) = \frac{X_s(s)}{X_e(s)} = \frac{K_r}{Ms^2 + R_f s + 1}$$

$$G(s) = \frac{X_s(s)}{X_e(s)} = \frac{1}{\frac{M}{K_r} s^2 + \frac{R_f}{K_r} s + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_r}{M}} \quad \text{et} \quad \zeta = R_f \sqrt{\frac{1}{4MK_r}}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$$

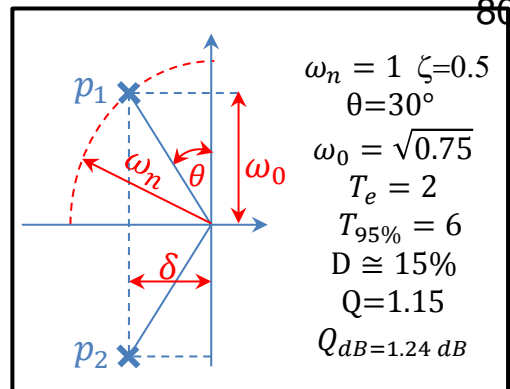
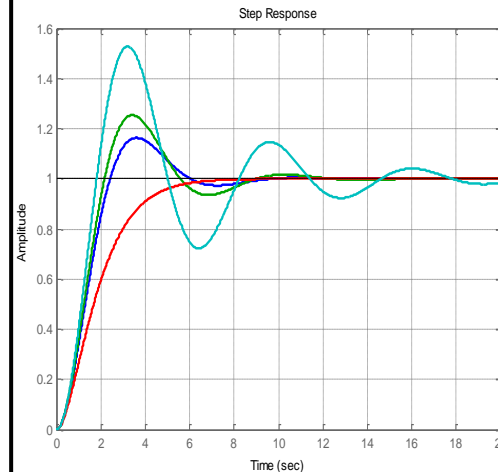
Temps: Echelon

$$\delta = \zeta\omega_n \quad \omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$T_{95\%} = \frac{3}{\delta} \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$D = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\omega_n = 1 \quad \zeta = 1; 0.5; 0.4; 0.2$$



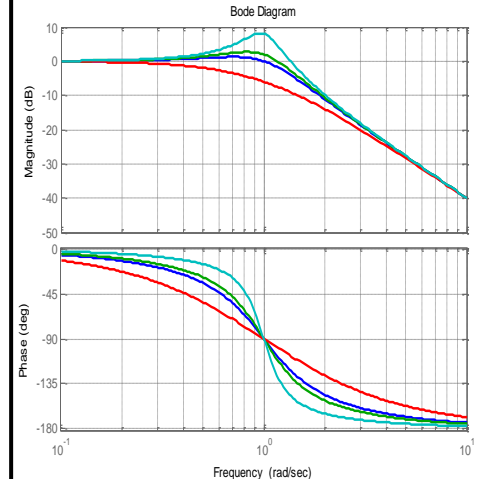
Harmonique: sinusoïdal

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

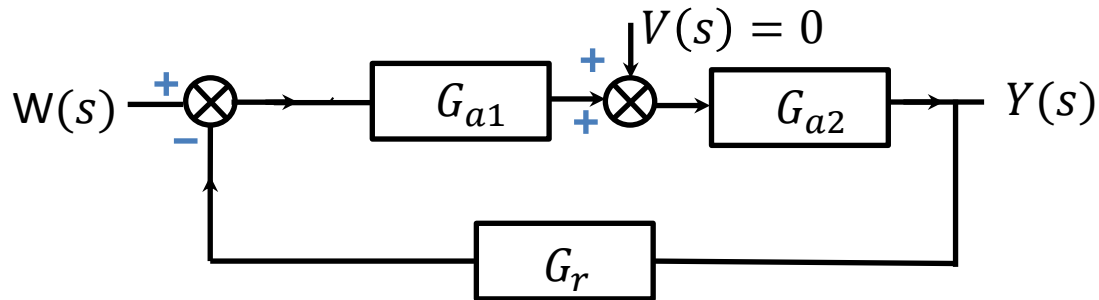
$$Q_{dB} = 20 \log Q$$

$$\omega_n = 1 \quad \zeta = 1; 0.5; 0.4; 0.2$$



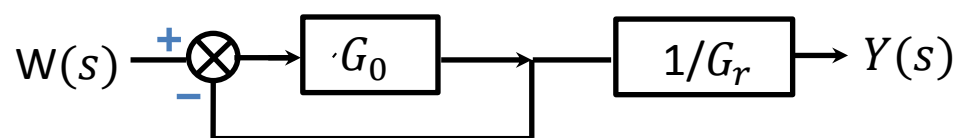
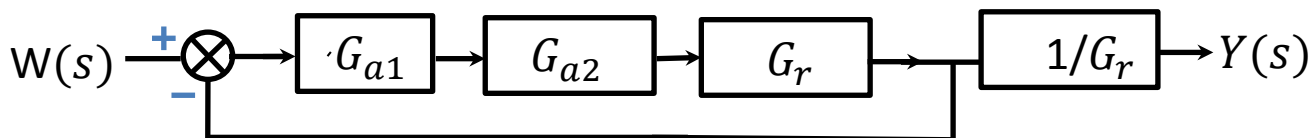
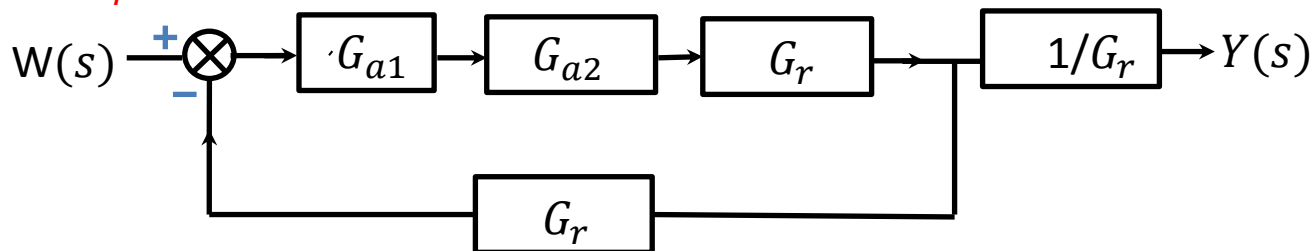


## Lieux de transfert en boucle fermée



$$G_f = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_{a1}G_{a2}}{1 + G_{a1}G_{a2}G_r} = \frac{G_a}{1 + G_0} \quad \text{si } G_r = 1 \rightarrow G_f = \frac{G_a}{1 + G_a} = \frac{G_0}{1 + G_0}$$

si  $G_r \neq 1$



$$G_f = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} \frac{1}{G_r}$$

Comment déduire  $G_f$  de  $G_0$

$$G_f(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)}$$

$$|G_0(j\omega_p)| = OP$$

$$\arg[G_0(j\omega_p)] = \beta$$

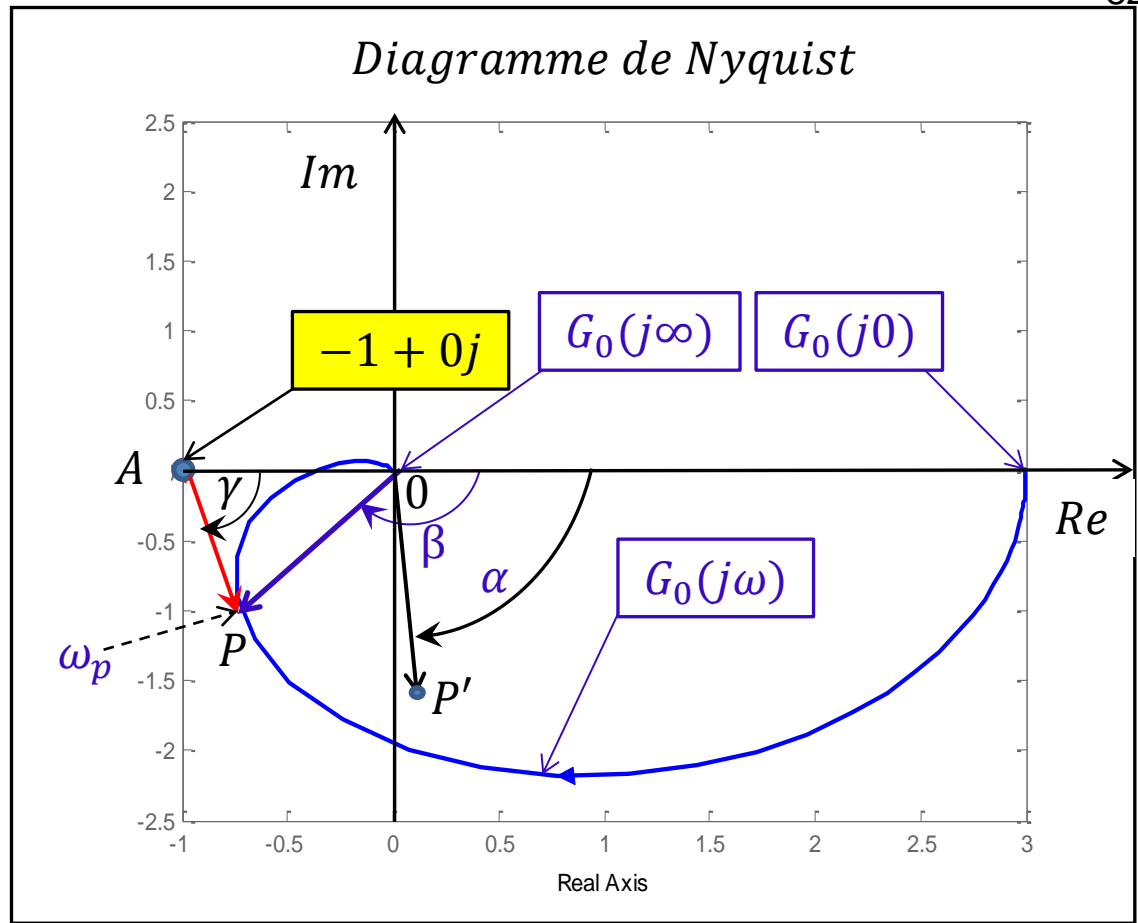
$$|1 + G_0(j\omega_p)| = AP$$

$$\arg[1 + G_0(j\omega_p)] = \gamma$$

$$G_f(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)}$$

$$\left| \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| = \frac{OP}{AP} = B(\omega) = OP'$$

$$\psi(\omega) = \arg \left[ \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right] = \beta - \gamma$$



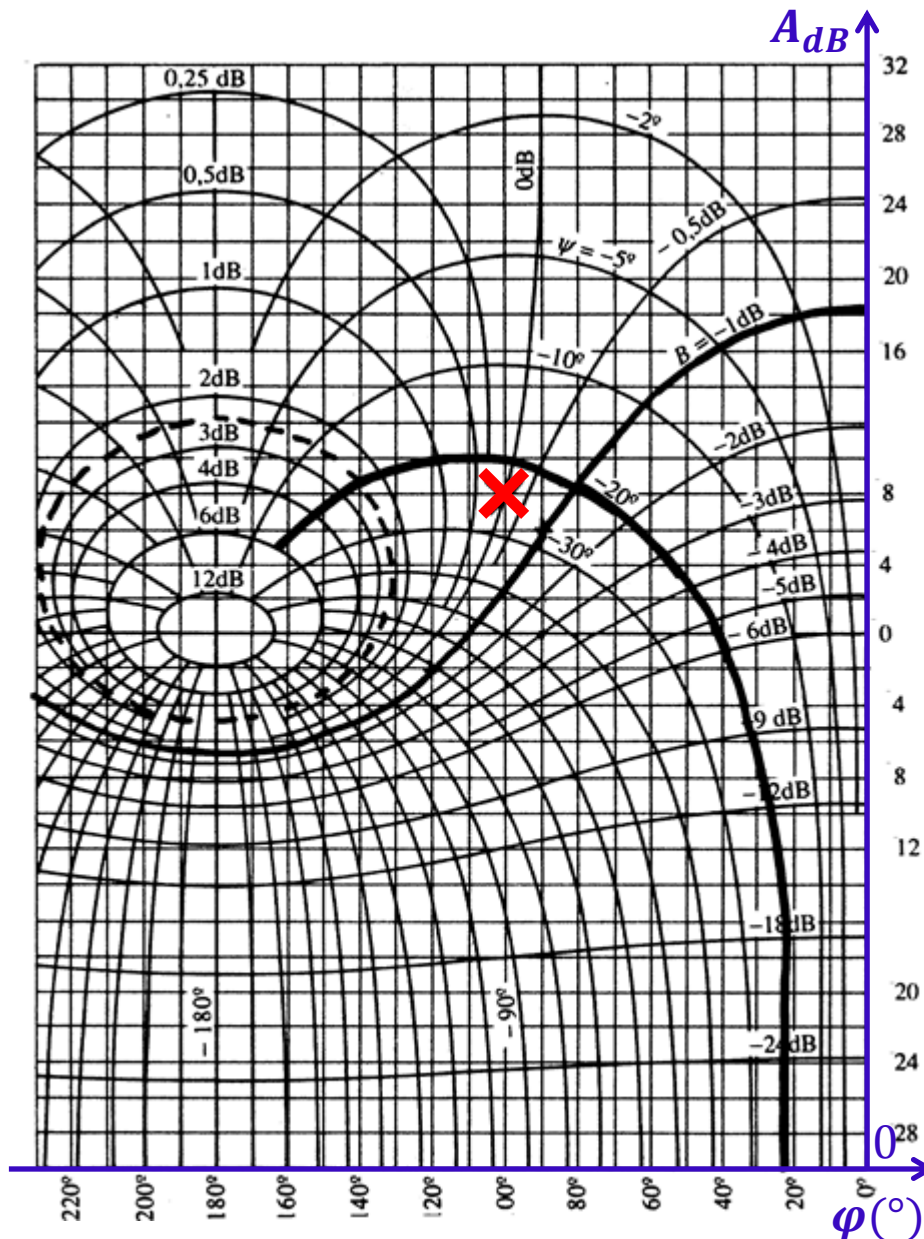
*Diagramme tout fait des lieux*

*à B constant et à  $\psi$  constant*

*Dans Nyquist Hall → Cercles iso – résonance*

*Dans Black – Nichols → lieu iso – résonance*

Lieux de transfert en boucle fermée dans le diagramme de Black-Nichols (la tête à cheveux!)



La graduation extérieure (en bleu) permet de porter la réponse harmonique en boucle ouverte.

Gain logarithmique  $A_{dB}(\omega)$   
en fonction du déphasage  $\varphi(\omega)$

$$A(\omega) = |G_0(j\omega)|$$

$$A_{dB} = 20 \log A(\omega) \quad \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

Le lieu ainsi tracé permet de lire directement sur les lieux:

$$\text{iso - gain} \quad B(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right|$$

$$\text{iso - phase} \quad \psi(\omega) = \arg \left[ \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right]$$

particulièrement utile pour la synthèse de régulateurs

La croix rouge  $A_{dB} = 8 \text{ dB}$   $\varphi = -100^\circ$

$$A = \frac{10^{\frac{8}{20}}}{1} = 2.5 \rightarrow G_0 = \frac{-0.43 - 2.46j}{1}$$

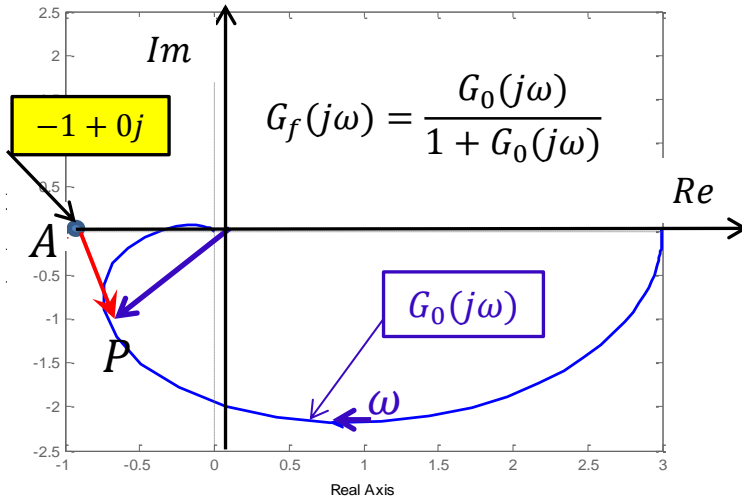
$$\frac{1}{(1 + G_0)} = \frac{1}{1 - 0.43 - 2.46j} =$$

$$\frac{G_0}{1 + G_0} = (2.5[-100^\circ])(0.39[77^\circ]) = 1[-22^\circ]$$

soit 0dB et  $-22^\circ$  lu directement sur les iso-lieux

# Réponse harmonique et critère de stabilité

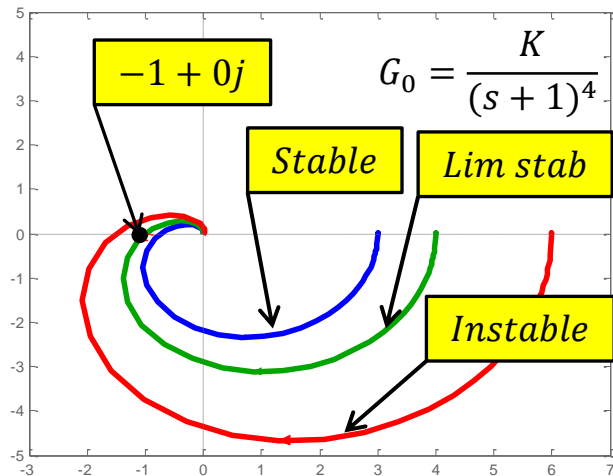
## Diagramme de Nyquist



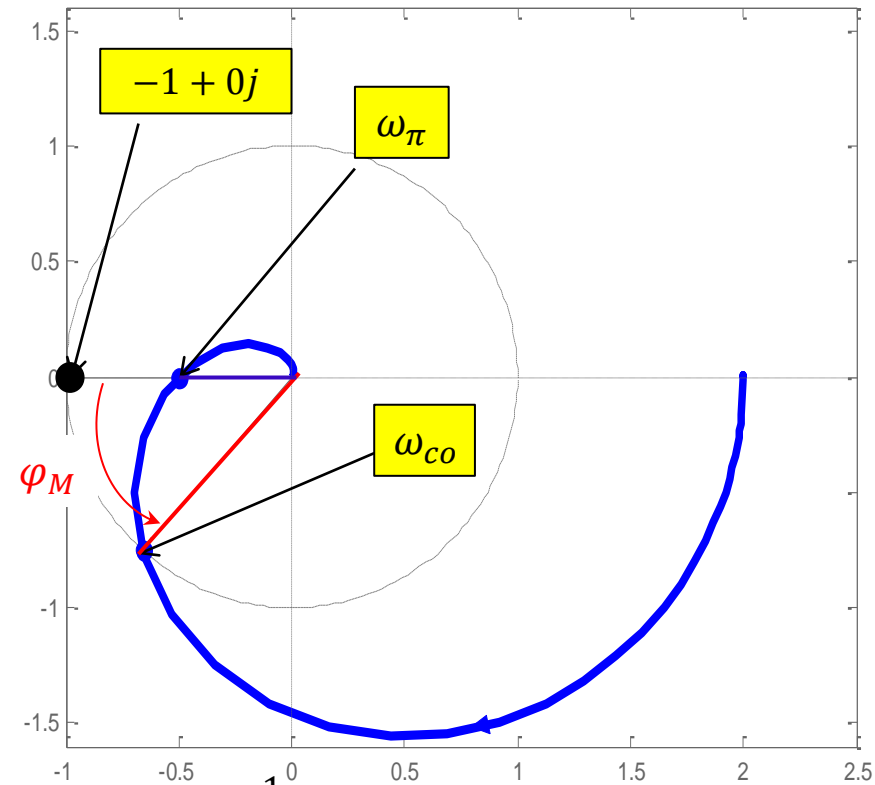
Étude de la stabilité de la BF  $\rightarrow G_f$ .

à partir de la BO  $\rightarrow G_0$ .

Lieu parcouru à  $\omega \uparrow \Rightarrow$  le pt -1 à gauche: OK



Marges de stabilité:  
expriment la distance au point -1



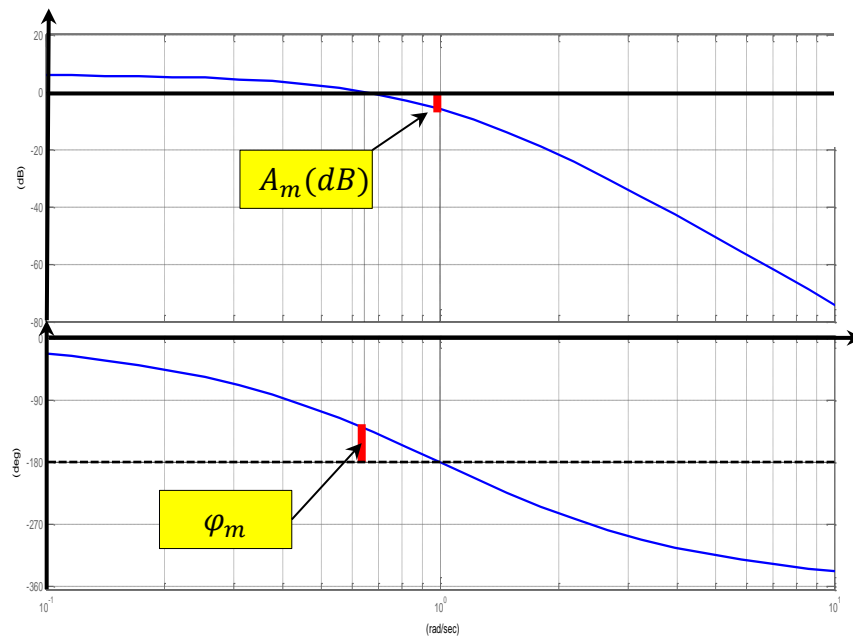
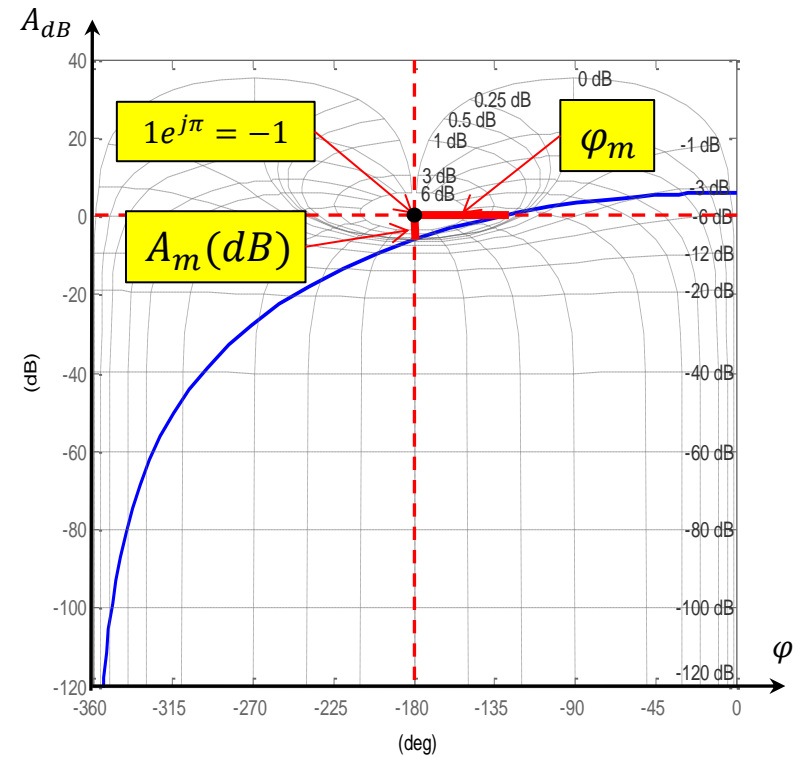
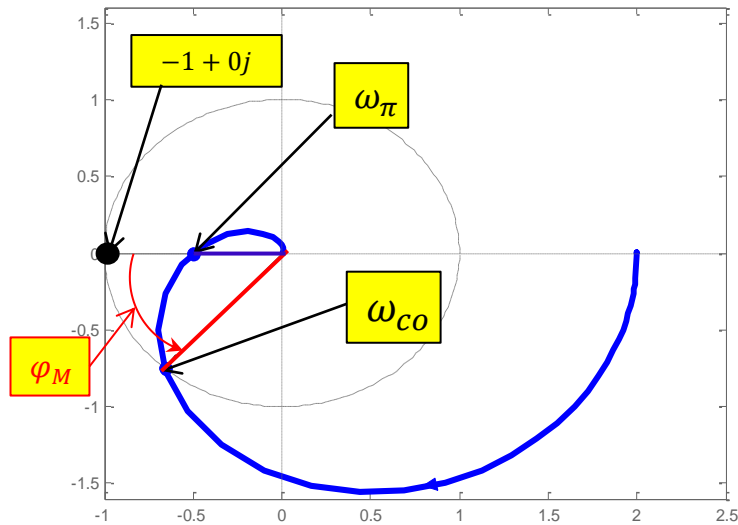
$$A_m = \frac{1}{A_\pi}$$

$$A_\pi = |G_0(j\omega_\pi)|$$

$$\varphi_m = \arg[G_0(j\omega_{co})] + \pi$$

$$A_m(dB) = 20 \log_{10} A_m$$

# Marges de stabilité dans les diagrammes

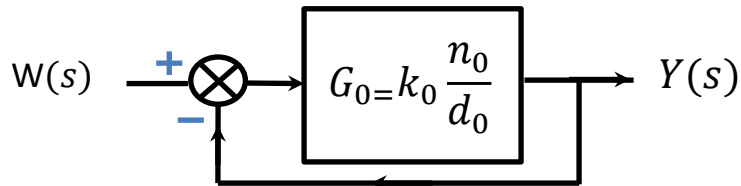


*En pratique*  
 $A_m = 6 \dots 10dB$   
 $\varphi_m = 45 \dots 70^\circ$   
*doivent toujours être vérifiées*

## Analyse dans le plan complexe

Lieu des **pôles de  $G_f$**  ou encore lieu d'Evans.

Lorsque le gain de  $G_0$  varie les pôles se déplacent dans le plan complexe et décrivent un lieu.



$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad \text{avec } G_0 = k_0 \frac{n_0(s)}{d_0(s)}$$

$$G_f(s) = \frac{k_0 n_0(s)}{d_0(s) + k_0 n_0(s)} \quad \text{montre bien que}$$

$k_0$  affecte les pôles de  $G_f$  et les déplace dans le plan complexe. Cela affecte l'allure de la réponse à un échelon de consigne.

Exemple:  $G_0 = \frac{k_0}{s(s+4)}$   $p_{10} = 0$ ;  $p_{20} = -4$

$$G_f = \frac{k_0}{s(s+4) + k_0} = \frac{k_0}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$p_{1-2} = -2 \pm \sqrt{4 - k_0}$$

si  $k_0 \leq 4$   $p_1$  &  $p_2 \rightarrow$  purement réelles

$k_0 = 0$   $p_1 = 0$   $p_2 = -4$  idem à  $p_{10}$  &  $p_{20}$

$k_0 = 3 \rightarrow p_1 = -1$  &  $p_2 = -3$

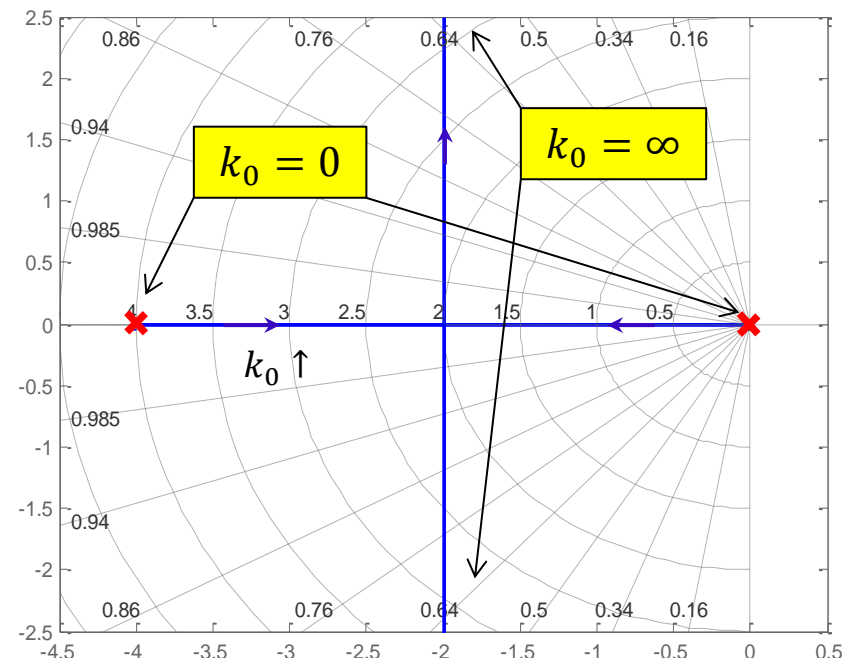
$k_0 = 4 \rightarrow p_1 = -2$  &  $p_2 = -2$

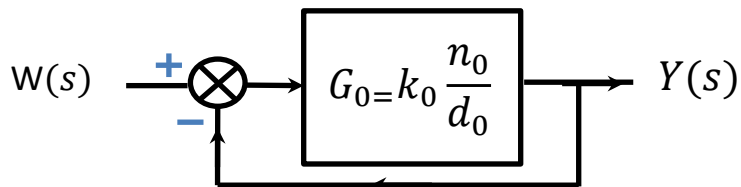
si  $k_0 > 4$   $p_1$  &  $p_2 \rightarrow$  complexes auto - conj

$k_0 = 8 \rightarrow p_1 = -2 + 2j$  &  $p_2 = -2 - 2j$

$k_0 = 20 \rightarrow p_1 = -2 + 4j$  &  $p_2 = -2 - 4j$

$k_0 = 104 \rightarrow p_1 = -2 + 10j$  &  $p_2 = -2 - 10j$





$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$G_f = \frac{k_0 n_0}{d_0 + k_0 n_0} = \frac{k_0}{d_c}$$

Lieu des pôles de  $G_f$

$$d_c(s) = 0$$

$$d_0 + k_0 n_0 = 0$$

$$-\frac{1}{k_0} = \frac{n_0}{d_0}$$

$$1 \quad \arg\left(\frac{n_0}{d_0}\right) = -\pi$$

$$2 \quad \left|\frac{n_0}{d_0}\right| = \frac{1}{k_0}$$

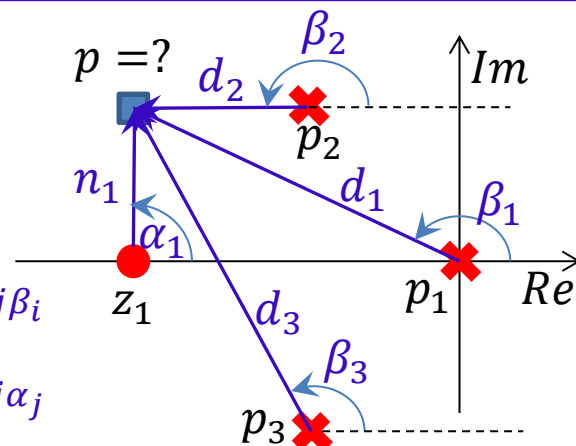
1: condition sur l'argument,  
permet le tracé du lieu d'Evans,  
lieu des valeurs de  $s$  satisfaisant **1**

2: condition sur la norme,  
permet de graduer le lieu en  $k_0$

$$G_0 = k_0 \frac{n_0(s)}{d_0(s)} = k_0 \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = k_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

✗ représentent  
les  $n$  pôles

● représentent  
les  $m$  zéros



$$s - p_i = \overrightarrow{p_i p} = d_i e^{j\beta_i}$$

$$s - z_j = \overrightarrow{z_j p} = n_j e^{j\alpha_j}$$

$$G_0 = k_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

en  $s = p$

$$G_0(p) = k_0 \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{(p - z_1)}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)}$$

$$G_0(p) = \frac{n_1 e^{j\alpha_1}}{d_1 e^{j\beta_1} d_2 e^{j\beta_2} d_3 e^{j\beta_3}} = \frac{n_1}{d_1 d_2 d_3} e^{j(\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3)}$$

$$1: \text{cond sur l'argument} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j - \sum_{i=1}^n \beta_i = -(2k + 1)\pi$$

$$2: \text{cond sur la norme} \quad \frac{\prod_{j=1}^m n_j}{\prod_{i=1}^n d_i} = \frac{1}{k_0}$$

## Règles de construction du lieu des pôles de $G_f$

$$G_0 = k_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad G_f = \frac{k_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + k_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

$$\text{cond sur l'argument} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j - \sum_{i=1}^n \beta_i = (2k + 1)\pi \quad \text{cond sur la norme} \quad \frac{\prod_{j=1}^m n_j}{\prod_{i=1}^n d_i} = \frac{1}{k_0}$$

- Tout point du plan complexe qui satisfait à la condition sur les arguments appartient au lieu des pôles de la transmittance en boucle fermée  $G_f$

- Le lieu possède n branches
  - Le lieu est symétrique à l'axe réel
  - Les branches du lieu appartenant à l'axe réel sont situées à gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros
  - En  $k_0 = 0$  les n branches sont sur les pôles de  $G_0$  (points de départ)
  - En  $k_0 = \infty$  les n branches sont sur les zéros de  $G_0$  (points d'arrivée)
- Le lieu part donc des pôles de  $G_0$  pour aboutir aux zéros de  $G_0$  si le nombre de zéros (m) est inférieur au nombre de pôles (n) le lieu tend vers les n-m asymptotes (zéros rejetés à l'infini)

- Les angles que forment les asymptotes et l'axe réel sont donnés

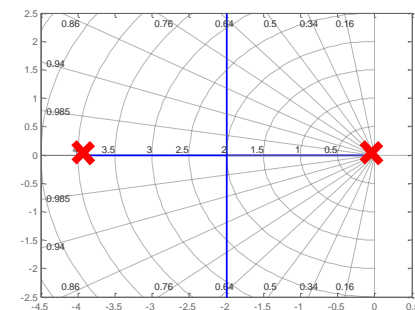
$$\text{par } \theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \text{ pour } k = 1 \dots n - m \text{ ou}$$

- Permet de lire immédiatement  $k_{crit}$  et  $\omega_{crit}$  intersection du lieu avec l'axe imaginaire.
- Le point de branchement des asymptotes avec l'axe réel est donné par

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_i}{n - m}$$

$$G_0 = \frac{k_0}{s(s+4)}$$

$n=2 \quad m=0$   
 $p_{01} = 0; p_{02} = -4$   
 2 branches (n)  
 Axe réel [-4...0]  
 2 asymptotes (n - m)  
 $\Delta = \frac{-4 - 0}{2} = -2$   
 $\theta_{a1} = \frac{\pi}{2} \quad \theta_{a2} = \frac{3\pi}{2}$





# Identification de la transmittance en BO (modèle comportemental)

Le système **en BO** est sollicité sur son entrée par des signaux types (échelon, rampe...) UNE transmittance appartenant à une classe de modèles est déduite de l'analyse de évolution (**du comportement du système**) de la sortie.

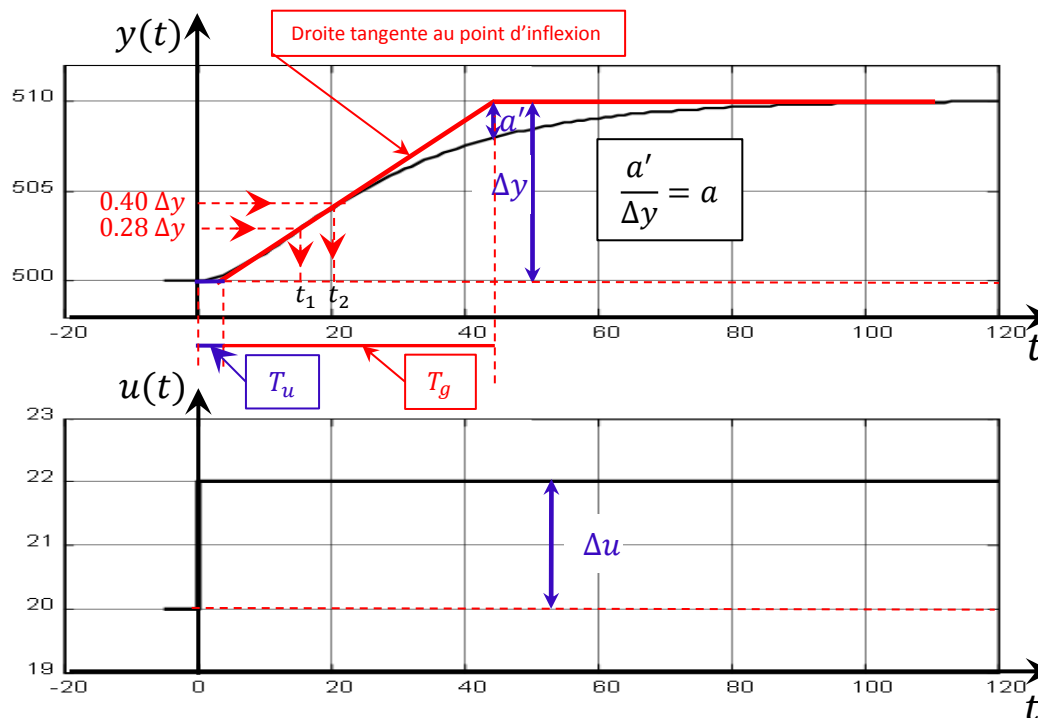
C'est une méthode de type « Black box model », elle ne s'appuie en rien sur la physique du phénomène. Le bon sens critique doit donc ici être très présent.

Un signal échelon a un spectre en fréquence très étendu et dès lors « excite tous les modes du système ». Il est par ailleurs facile à réaliser.

Pour ces raisons, il est pratiquement le seul signal d'excitation à être utilisé.

Ces méthodes sont anciennes, mais toujours très utilisées en industrie. Elles s'appuient sur des constructions graphiques simples, réalisées sur

l'enregistrement la réponse indicielle du procédé.



*Modèle de Broïda*

$$G_0(s) = \frac{K e^{-sT_m}}{(sT + 1)}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad T = 5.5(t_2 - t_1)$$

$$T_m = (2.8t_1 - 1.8t_2)$$

*Modèle de Vandergrinten*

$$G_0(s) = \frac{K e^{-sT_m}}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)} \quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$T_1 = T_g \left( \frac{3ae - 1}{1 + ae} \right) \quad T_2 = T_g \left( \frac{1 - ae}{1 + ae} \right)$$

$$T_m = T_u - \frac{T_1 T_2}{T_1 + 3T_2}$$

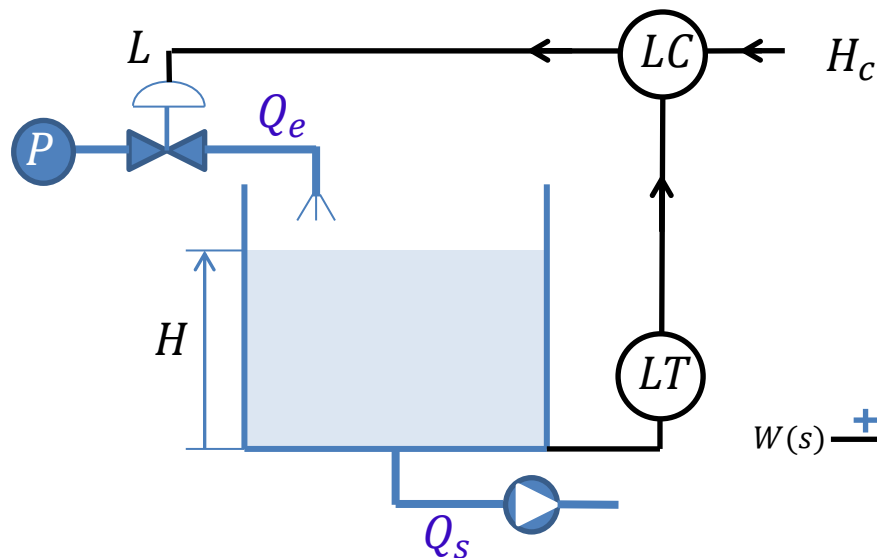
*Modèle de Strejc*

$$G_0(s) = \frac{K e^{-sT_m}}{(sT + 1)^n} \quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

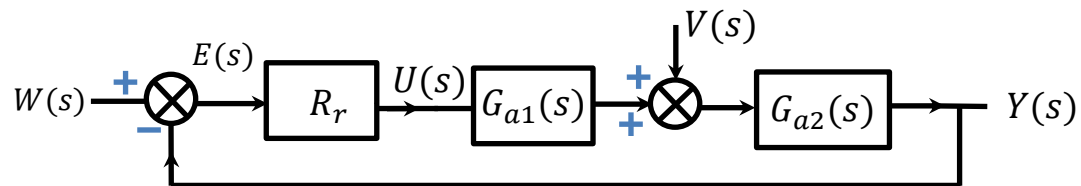
n	$T_u/T_g$	$T_g/T$
1	0	1
2	0.104	2.72
3	0.22	3.69
4	0.32	4.46
5	0.41	5.12
6	0.49	5.7

## Structures de réglage

Structure de réglage par rétroaction: exemple d'une régulation de niveau

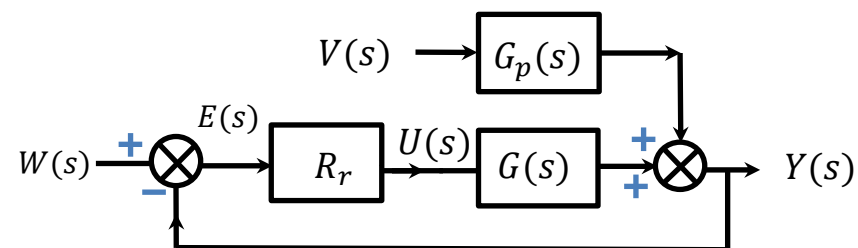


$LT$ : level transmitter  
 $LC$ : Level controller (régulateur  $R_r$ )  
 par rétroaction  
 $H$ : grandeur réglée ( $Y$ )  
 $L$ : grandeur réglante ( $U$ )  
 $H_c$ : grandeur de consigne ( $W$ )  
 $Q_s$ : Débit perturbatoire ( $V$ )

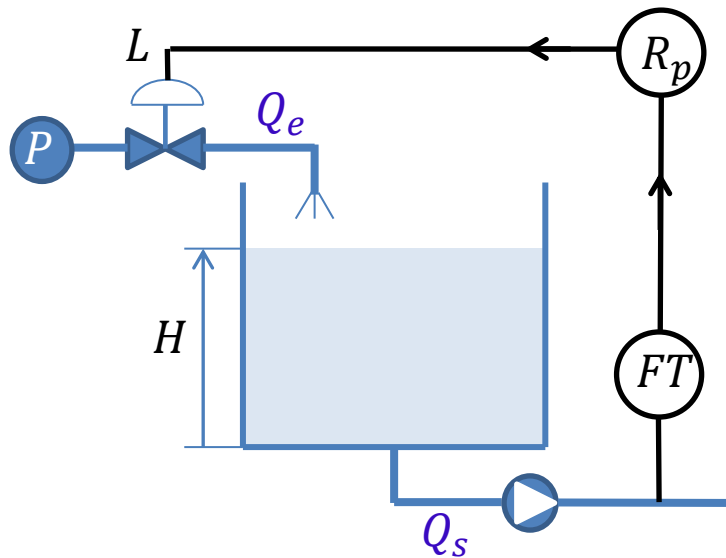


Particularités:

- 1) La perturbation n'est pas mesurée
- 2) Pour que le régulateur ouvre la vanne il faut que le niveau baisse. L'action du régulateur est fonction des EFFETS de la perturbation et non de la perturbation. il agit donc toujours trop tard.
- 3) Si le régulateur possède un gain élevé dans le Domaine des basses-fréquences (intégrateur) le régulateur possède une bonne robustesse vis-à-vis de l'écart de réglage statique.



## Structure de réglage à action prévisionnelle



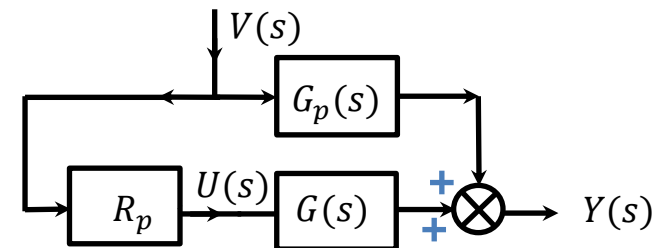
*FT: Flow transmitter*

*R<sub>p</sub>: régulateur à action prévisionnelle*

*H: grandeur réglée (Y)*

*L: grandeur réglante (U)*

*Q<sub>s</sub>: Débit perturbatoire (V)*



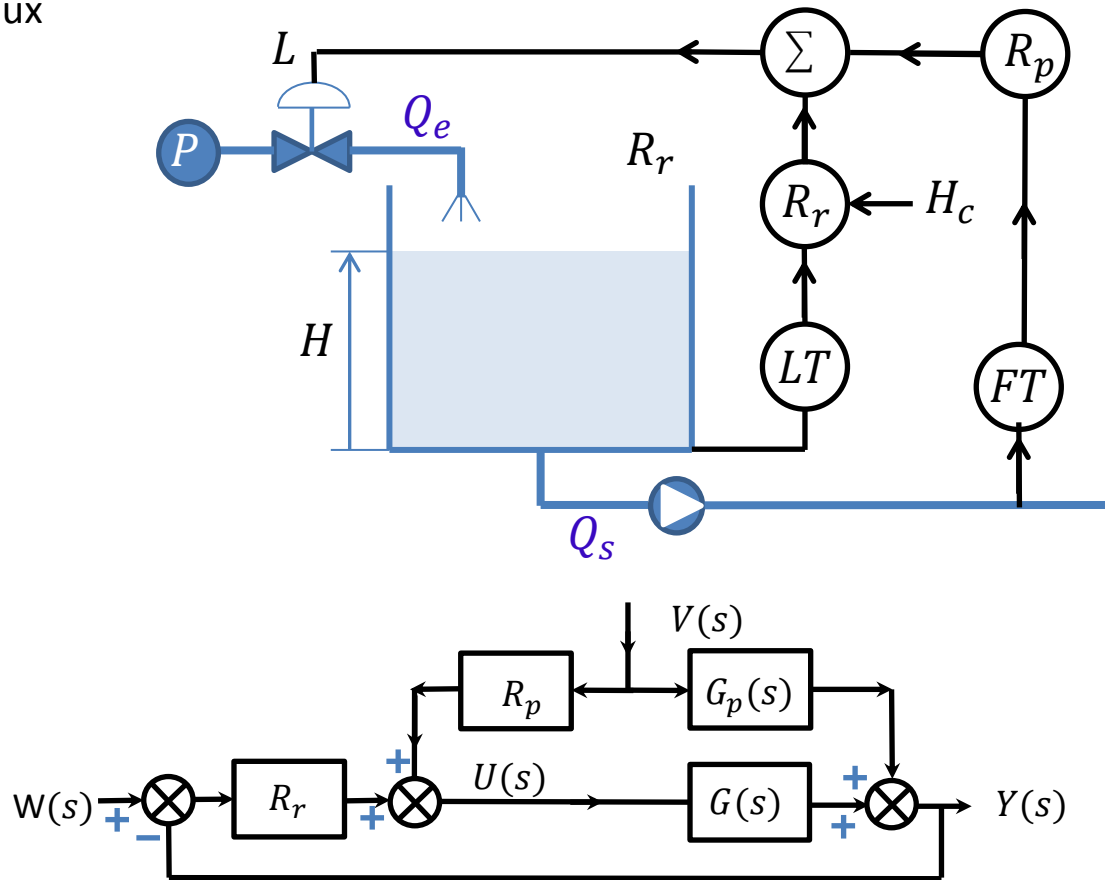
$$VR_p G + VG_p = V(R_p G + G_p) = Y = 0 \quad \forall t$$

$$R_p = -\frac{G_p}{G}$$

*Particularités:*

- 1) La perturbation doit être mesurable et il faut connaître  $G$  et  $G_p$
- 2) Le régulateur contient l'inverse du procédé (réalisabilité physique)
- 3) l'action du régulateur est indépendante du niveau, il agit en aveugle car la grandeur réglée n'est pas mesurée
- 4) Si  $R_p$  est parfaitement ajusté, la perturbation n'affecte pas la sortie, l'action du régulateur compense instantanément la perturbation (apport de  $Q_e$  qui compense  $Q_s$ )
- 5) C'est une commande en boucle ouverte qui n'a aucune robustesse vis à vis de l'écart statique, si le gain du système varie, la compensation n'est plus efficace.
- 6) Si le retard de  $G_s$  est supérieur à celui de  $G_p$  alors la compensation arrive toujours trop tard au travers de  $G$ .

On combine les deux



*Particularités:*

*le gros du travail est effectué par le régulateur à action prévisionnelle*

*le régulateur par rétroaction apporte le complément nécessaire pour prendre en compte les variations paramétriques et la difficulté d'inverser  $G(s)$ .*

## Régulations fonctionnelles...principes de base

Méthode basée sur un modèle direct du procédé et sur une estimation de la perturbation.

### Suivi de consigne

Si  $G^{-1}$  est l'inverse parfait de  $G$  alors

$G^{-1}G = 1$  et tout signal appliqué à l'entrée de

$G^{-1}G$  se retrouve en sortie ...

$y(t)$  suit  $w(t) \rightarrow$  conduite parfaite

Mais la perturbation n'est pas compensée ...

On tente de l'estimer ....

### Réjection des perturbations

Au moyen d'un modèle direct  $G_d$  du procédé,

on construit la sortie non perturbée du procédé.

En soustrayant ce signal à la sortie perturbée,

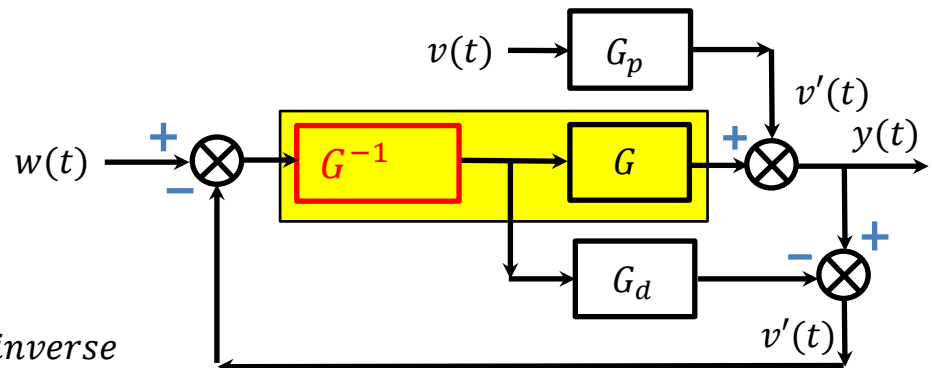
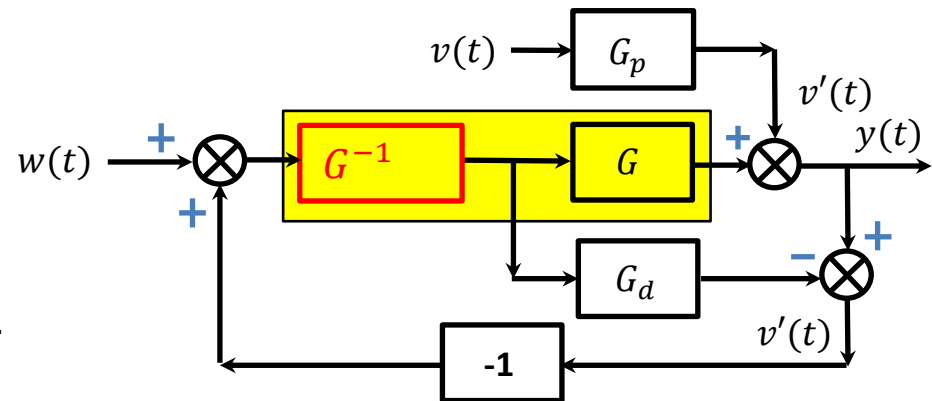
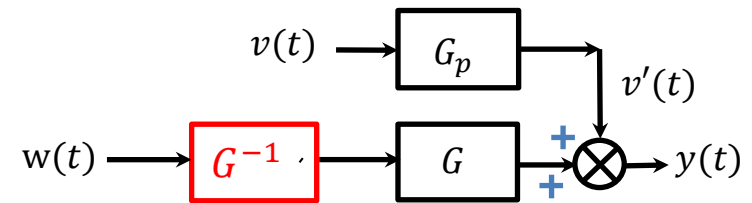
on reconstruit la perturbation qu'il suffit

d'inverser avant de l'ajouter à la consigne  $w(t)$  ...

### GENIAL, mais Trop beau pour être vrai ...!

En effet  $G$  est généralement passe – bas donc intégrateur en HF,  $G^{-1}$  contient donc des éléments dérivateurs qui sont non – réalisables et amplificateurs de bruit en HF.

$G^{-1}$  doit donc comporter du filtrage tant pour sa réalisabilité physique que pour éviter de chahuter trop l'organe de réglage. On réalise donc  $G_r^{-1}$  approximation de  $G^{-1}$  doit avoir un gain statique inverse de celui de  $G$  sous peine de subir un statisme de conduite.



# Synthèse fréquentielle

*Valable pour des systèmes:*

- à déphasage minimal (pas de zéros à droite)
- avec temps mort pur

*La méthode n'est pas systématique*

*Elle requiert des essais successifs*

*Un esprit créatif et du savoir faire.*

*Elle tente de satisfaire un cahier des charges qui prend en compte:*

*Les signaux d'erreur, position ou vitesse  $\rightarrow (e_p, e_v)$*

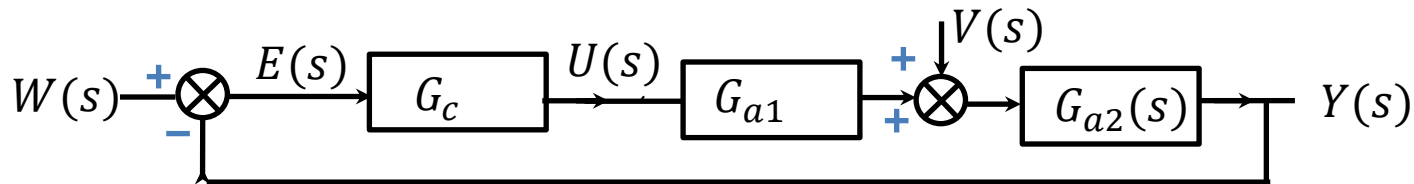
*- suivi de consigne et réjection des perturbations*

*L'allure temporelle de la réponse indicielle  $\rightarrow (\zeta, \omega_0)$*

*Le degré de stabilité  $\rightarrow (Q_{dB}, \varphi_m, A_m)$*

*La rapidité  $\rightarrow T_r, d(\%), \omega_c$*

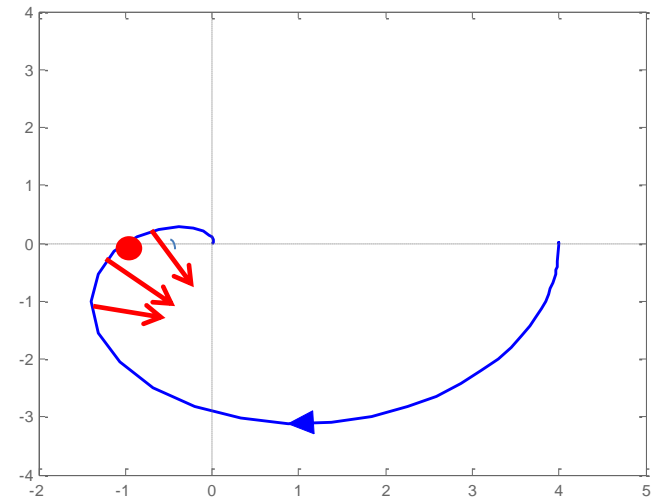
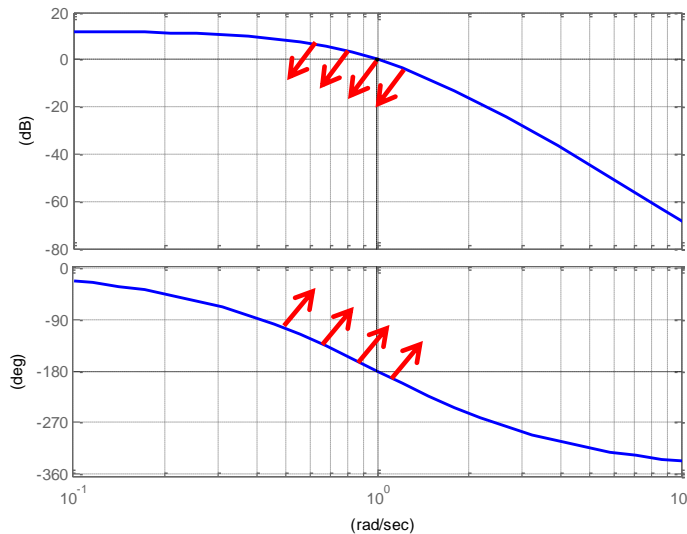
*La qualité  $\rightarrow (IAE, ISE \dots etc)$*



*C'est à dire trouver  $G_c$  tel que le cahier des charges soit satisfait*

# Synthèse dans le diagramme de Bode

Souhait: modifier la réponse harmonique pour s'éloigner du point -1



La correction idéale serait d'opérer un relevé de la courbe des phases sans modifier la courbe d'amplitude car elle détermine le temps de réponse....

Ou encore réduire la courbe d'amplitude sans modifier la courbe des phases....

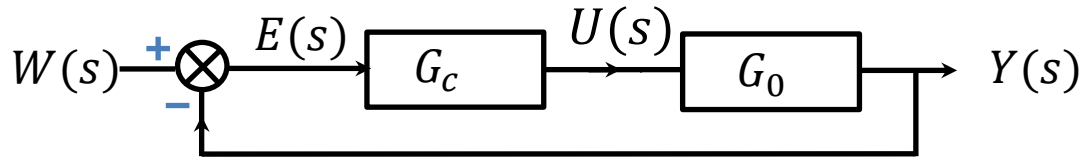
Mais cela n'est pas possible.....il faut que le correcteur soit réalisable et **un correcteur réalisable modifie la courbe de l'amplitude et de la phase.**

*Correction par action pure*

$$\begin{array}{cccc}
 G_c = K_p & G_c = K_p + \frac{K_i}{s} & G_c = K_p + K_d s & G_c = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \\
 P & PI & PD & PID
 \end{array}$$

## Correction à action proportionnelle

$$G_c = K_p$$



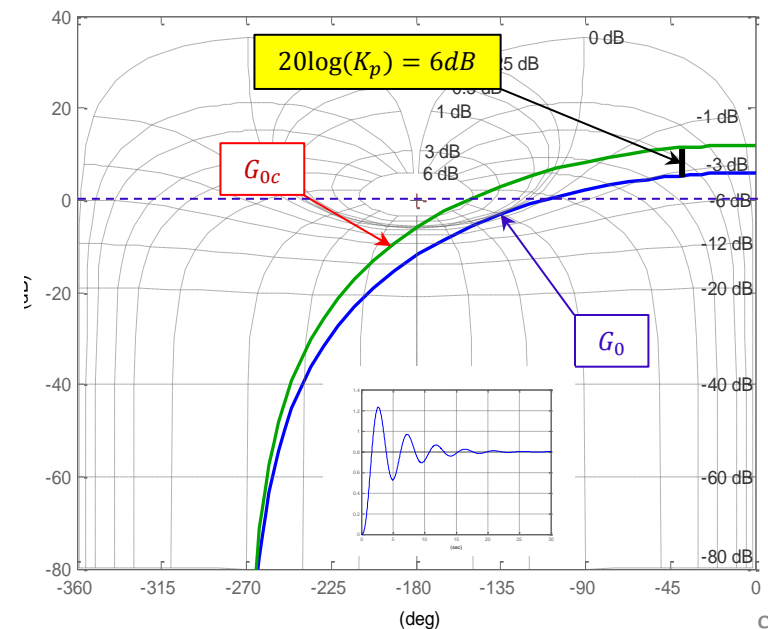
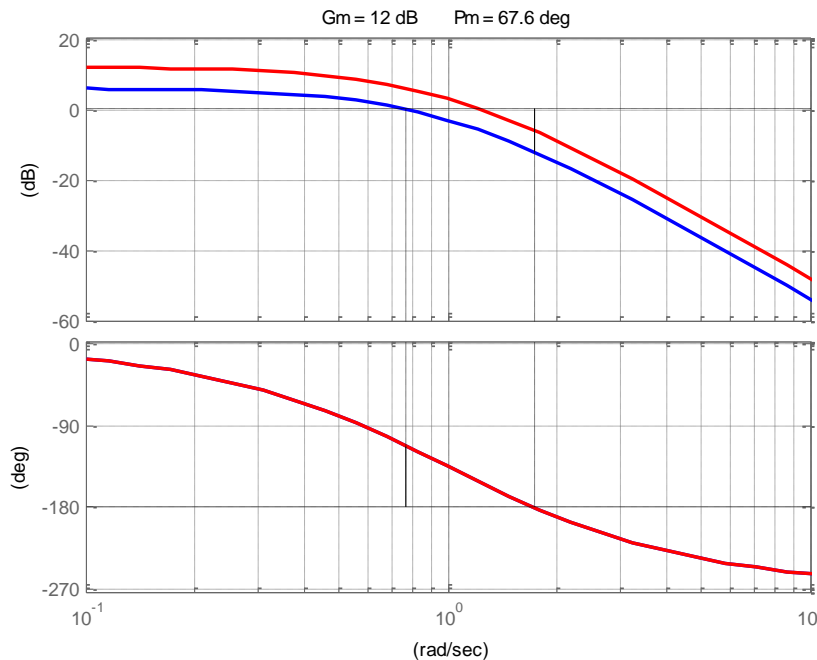
On admet que l'on règle la grandeur délivrée par le capteur, le retour est alors unitaire.

On admet que pendant un certain temps que la réponse puisse dépasser la consigne...15%

On admet aussi une oscillation

*Forme de Bode*  $G_0 = \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s)$  avec  $R_0(0) = 1$

$G_{0c} = G_c G_0 = K_p \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s) = \frac{K_{0c}}{s^\alpha} R_0(s)$  on cherche  $K_{0c}$  optimal  $= K_0 K_p$





## Correction à action proportionnelle et par intégration

Forme de Bode  $G_0 = \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s)$  avec  $R_0(0) = 1$   $G_c = \frac{K_c(sT_n + 1)}{s}$

$$G_{0c} = \frac{K_c(sT_n + 1)}{s} \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s) = K_{0c}(sT_n + 1) \frac{R_0(s)}{s^{\alpha+1}} \quad \text{avec } R_0(s) = \frac{R_0'(s)}{(sT + 1)}$$

Principe: compenser la plus grande constante de temps de  $R_0(s)$ :  $T_n = T$ , ajouter l'intégrateur à  $G_0$ .

$$G_{0c} = \frac{K_c K_0}{s^{\alpha+1}} R_0'(s) = \frac{K_{0c}}{s^{\alpha+1}} R_0'(s)$$

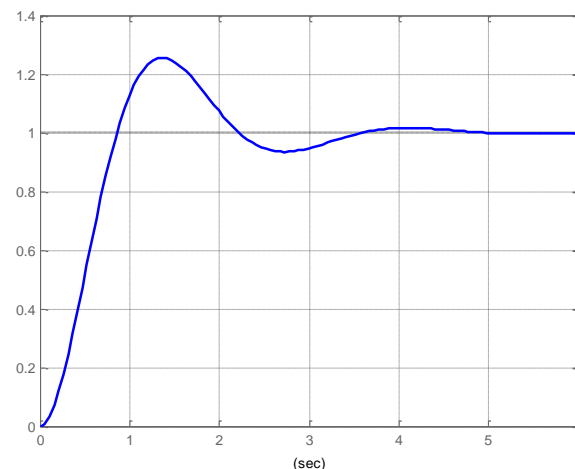
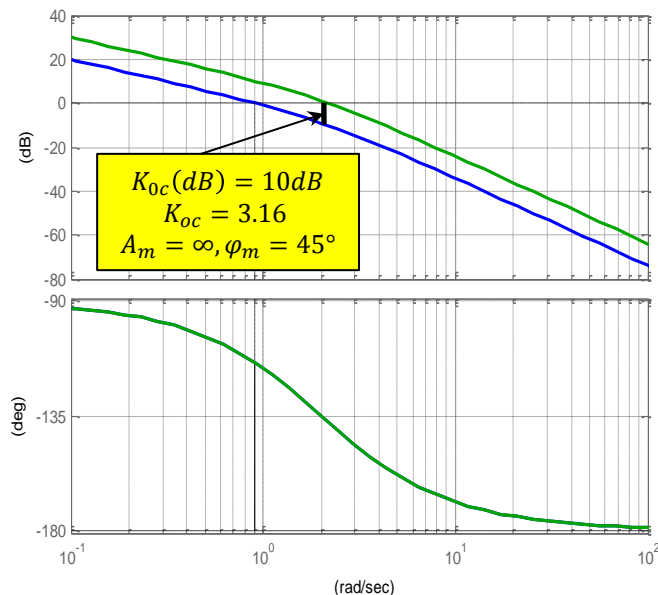
Synthétiser  $K_{0c}$  par la méthode de Bode ou Black – Nichols, en déduire  $K_c = \frac{K_{0c}}{K_0}$

$$G_0 = \frac{2}{(0.5s + 1)(2s + 1)} \quad T_1 = 2; T_2 = 0.5 \text{ forme factorisée de Bode}$$

Souhaits: réponse optimale; écart de position null  $\rightarrow T_1 > T_2$  On simplifie  $T_1$  par le zéro du régulateur

$$G_{0c} = \frac{K_{0c}}{s(0.5s + 1)} \quad \text{dont on trace le diagramme de Bode on en déduit } K_{0c} \cong 3.16 \text{ donc } K_c = \frac{3.16}{2} = 1.58$$

$$G_c(s) = \frac{1.58(s+2)}{s}$$



## Correction à action proportionnelle et par dérivation

Forme de Bode  $G_0 = \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s)$  avec  $R_0(0) = 1$

$$G_c = K_c(sT_d + 1)$$

$$G_{0c} = K_c(sT_d + 1) \frac{K_0}{s^\alpha} R_0(s)$$

Principe: en  $\omega = \frac{10}{T_d}$  le correcteur relève

l'amplitude de 20dB et la phase d'environ 90°.

Pour relever la phase au maximum dans le voisinage du domaine où se mesurent les marges de stabilité, il suffit de repérer la pulsation  $\omega_{(-20)}$  endroit où la courbe de l'amplitude présente une atténuation de

$$20\text{dB} \text{ et de positionner } \omega_b = \frac{1}{T_d} = \frac{\omega_{(-20)}}{10}$$

C'est ainsi que la courbe de phase sera relevée du maximum possible dans le voisinage du point -1.

On applique ensuite la méthode de Bode ou Black pour conférer au système les marges de stabilité voulues.

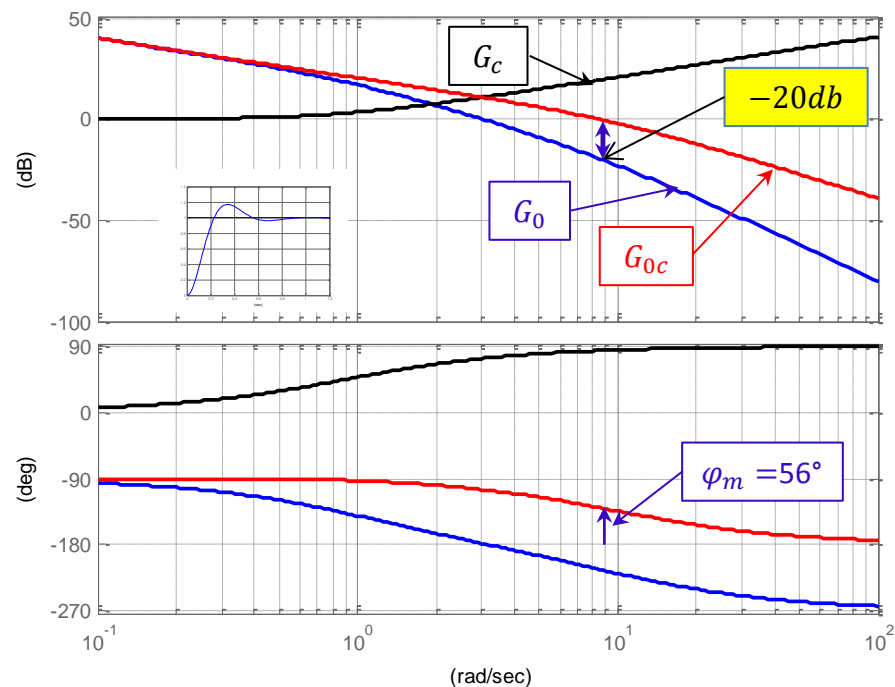
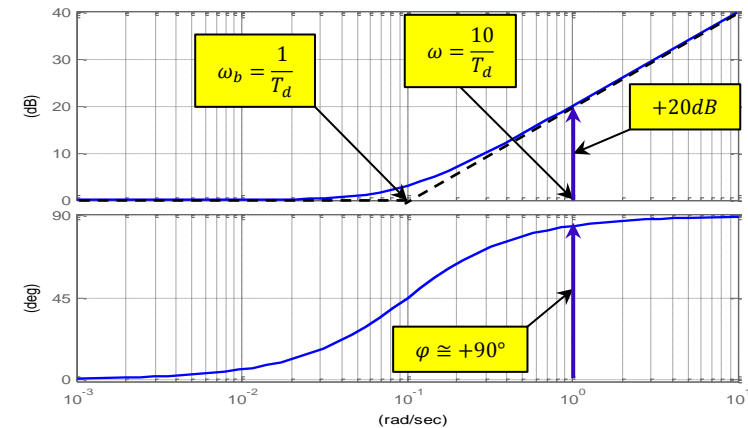
Exemple:  $G_0 = \frac{10}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$

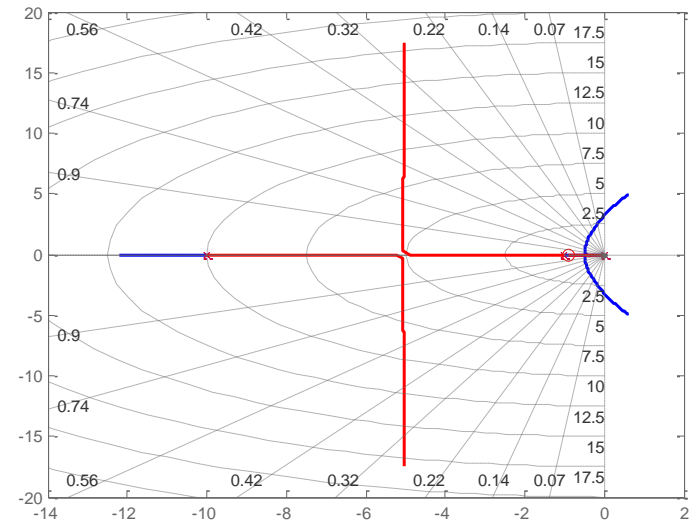
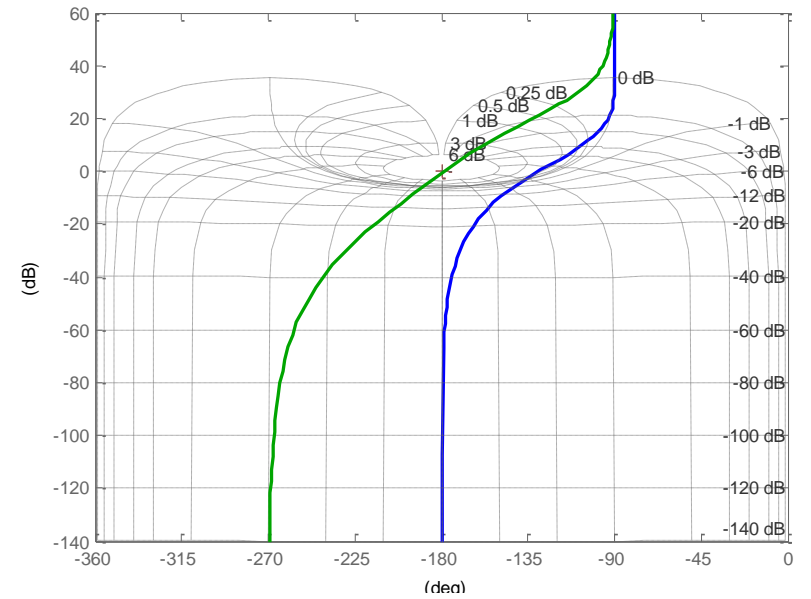
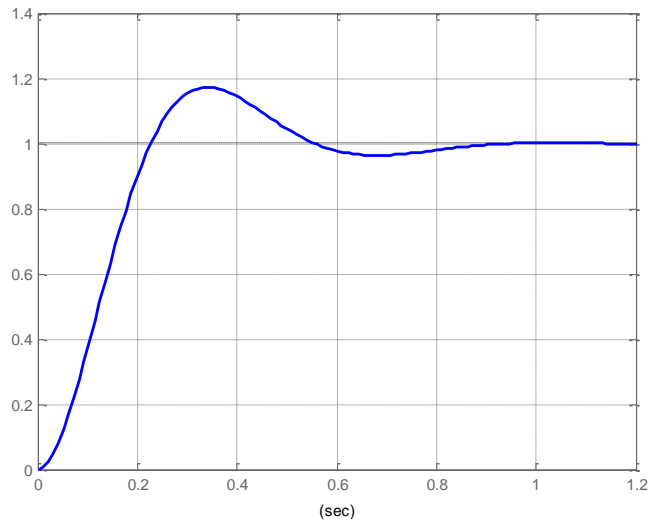
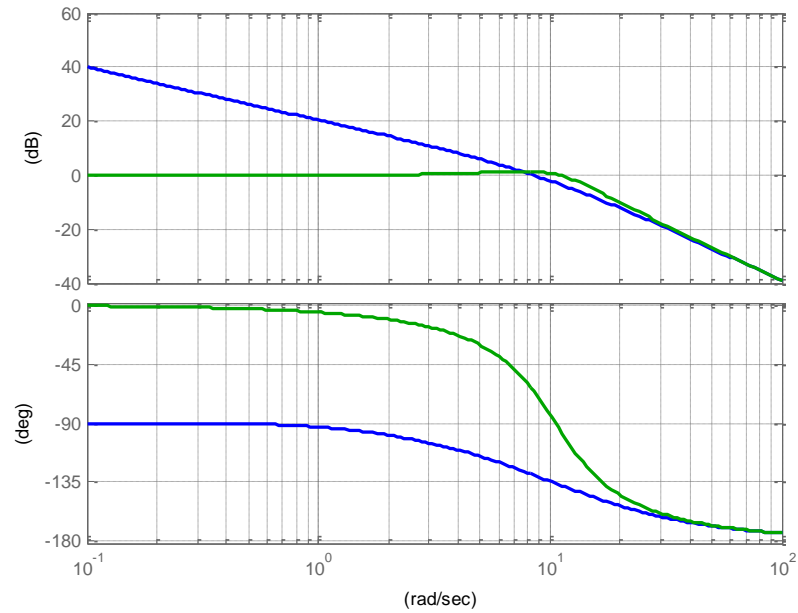
$$\omega_{(-20)} = 9 \quad \omega_b = 0.9 = \frac{1}{T_d} \quad T_d = 1.1$$

$$\varphi_m = 56^\circ \quad A_m = \infty \text{ dB} \quad Q_{dB} = 1.4$$

Pas nécessaire de retoucher  $K_c = 1$ .

$$G_c = (1.1s + 1)$$





## Synthèse d'un régulateur PID par les méthodes fréquentielles

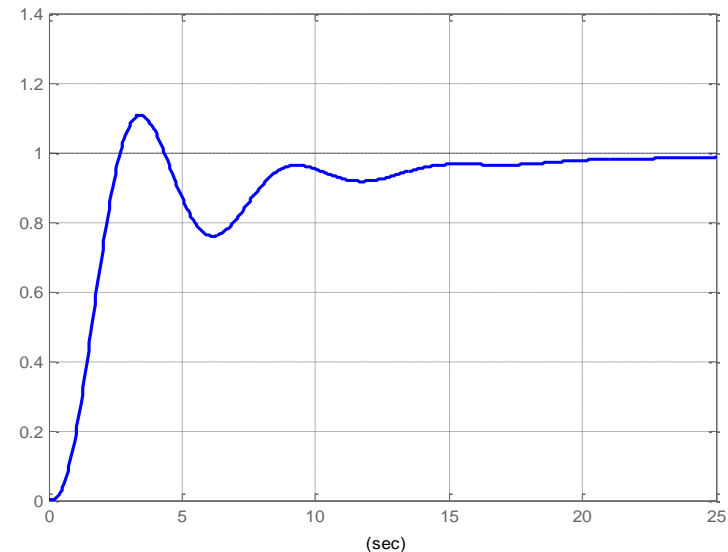
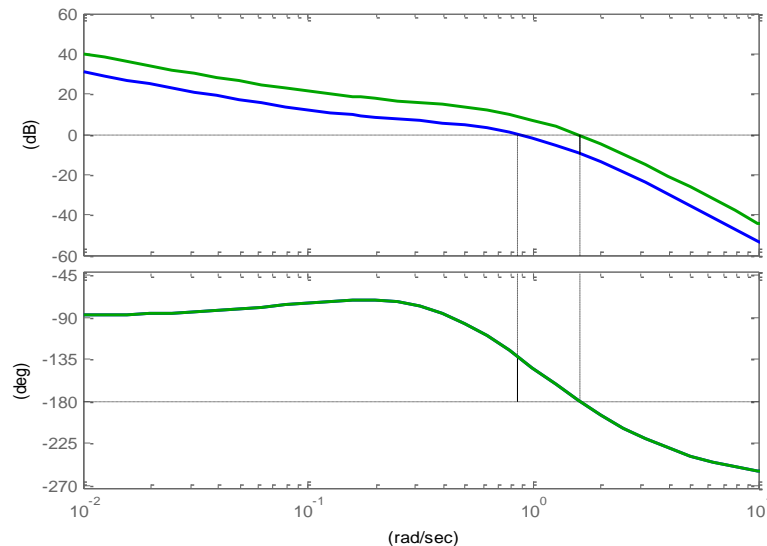
$$\text{soit } G_0 = \frac{2}{(s+1)^4} \quad G_c = K_c \frac{(sT_i+1)}{s} \frac{(sT_d+1)}{(sT_f+1)} \quad T_f = \frac{T_d}{20} \dots \frac{T_d}{10}$$

Dans un premier temps, négligeons le filtrage de l'action par dérivation et réduisons l'ordre de  $G_0$  en simplifiant un des pôles avec le zéro en  $1/T_i$

représentons alors le diagramme de Bode de  $\frac{1}{s(s+1)^3}$  et calculons  $T_d$  par

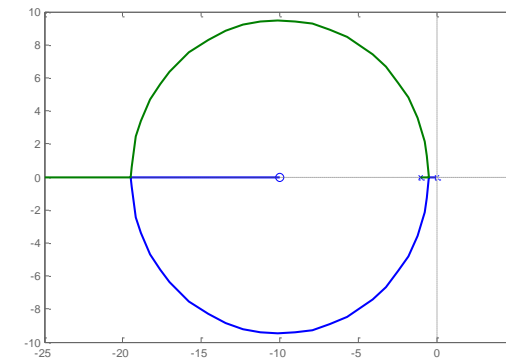
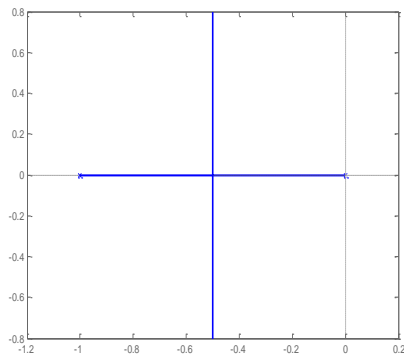
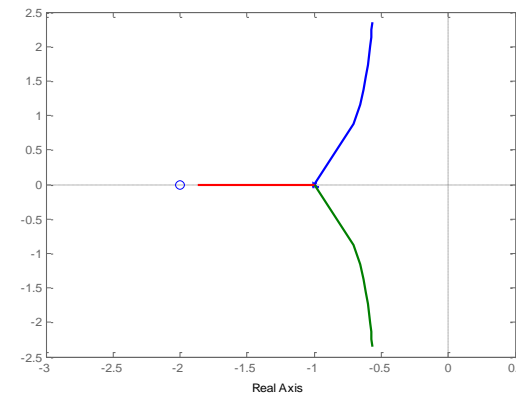
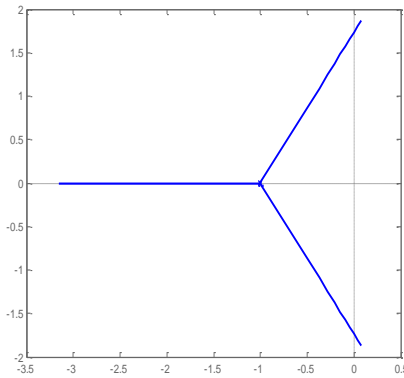
la méthode de Bode  $\omega_{-20dB} = 1.56 \quad \frac{1}{T_d} = 0.156$  et  $T_d = 6.40$ .

Un gain de  $0.35/2$  appliqué à la transmittance corrigée permet d'obtenir des marges de stabilité correctes de  $9.61dB$  et  $48^\circ$



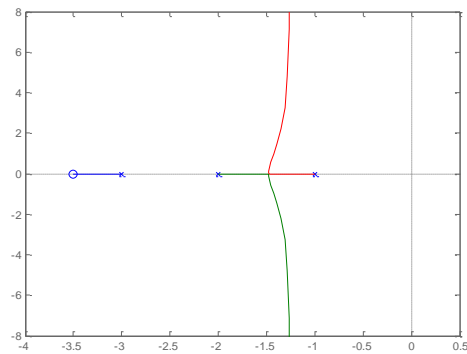
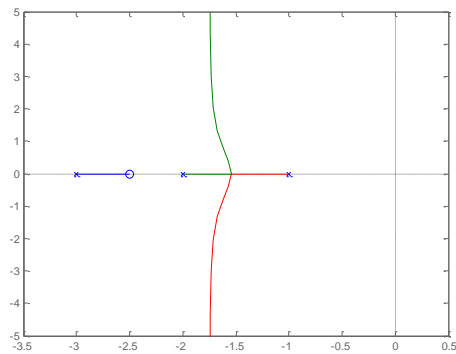
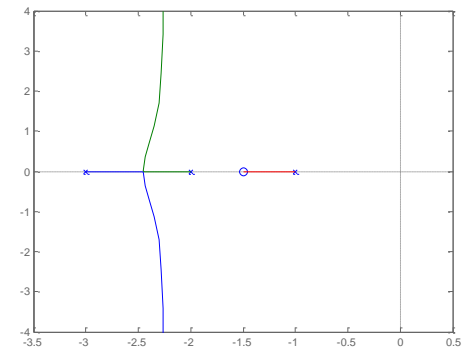
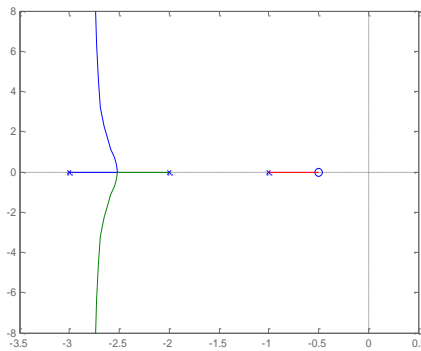
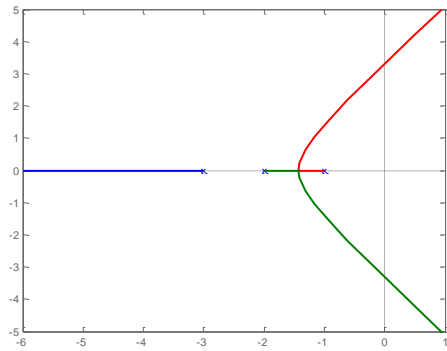
## Synthèse dans le plan complexe

L'idée suivie est de modifier le *lieu des pôles de  $G_f$*  par adjonction de pôles et de zéros à  $G_o$  au moyen du correcteur  $G_c$ . On peut de cette façon modifier le lieu des pôles de  $G_f$  pour tenter d'imposer le dépassement, le temps de réponse, la pulsation propre le coefficient d'amortissement ... On exploitera en particulier la propriété qu'ont les zéros (du correcteur) d'attirer le lieu vers eux.

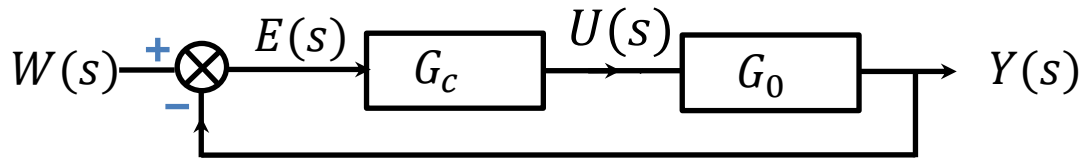


*Influence d'un zéro*  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

*zéro ajouté en  $-0.5; -1.5; -2.5; -3.5$*



## Synthèse d'un correcteur à action proportionnelle et par intégration



$$G_0(s) = 10 \frac{(s + 9)}{(s + 2)(s + 4)(s + 10)} \quad G_c(s) = \frac{sT_n + 1}{sT_i} = k_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_n}\right)}{s}$$

Un pôle à l'origine et un zéro en  $-\frac{1}{T_n}$  qu'il faut placer de façon adéquate.

Spécifications:

- réponse optimale,
- pas d'écart de statisme
- durée du réglage d'environ 2s.

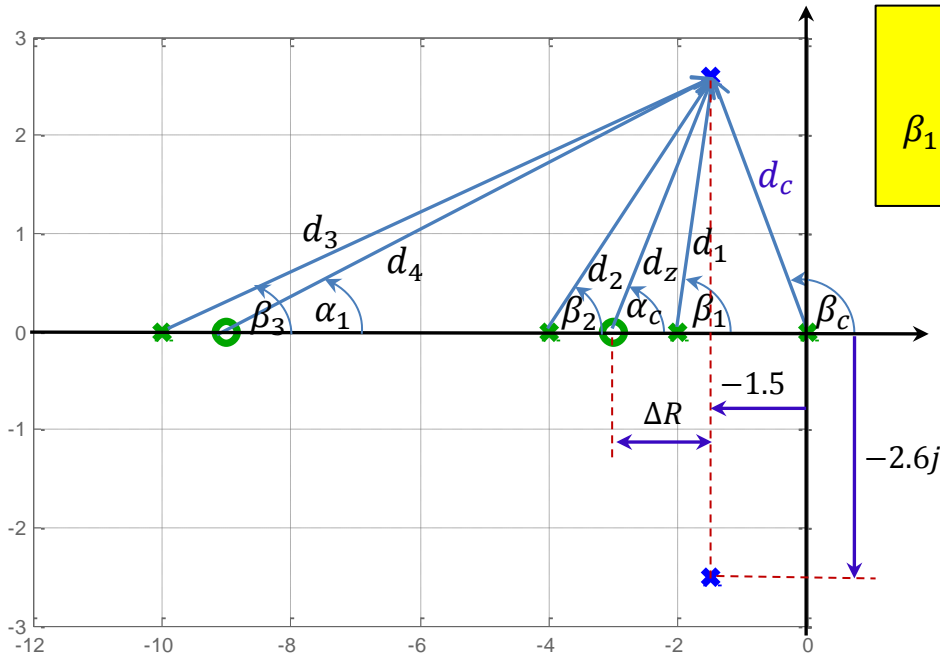
On en déduit:

- $\zeta=0.5$  et pôles de  $G_f$  placés sur une droite d'amortissement inclinée de  $30^\circ$  sur l'axe imaginaire
- il faut une intégration dans le correcteur
- Le temps de réponse à 95% = 2 donc  $\tau_e = 2/3$  et donc  $\delta = -\frac{3}{2} = -1.5$

Les pôles dominants sont donc situés en  $p_{1-2} = -1.5 \pm 2.6j$

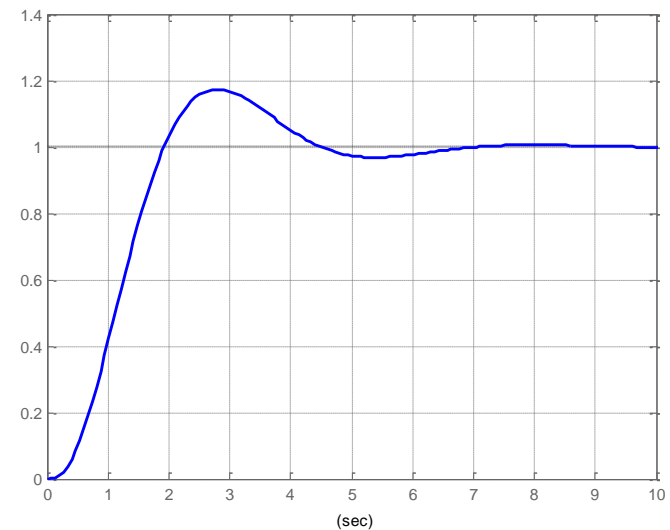
$$G_{0c}(s) = \frac{10(s+9)}{(s+2)(s+4)(s+10)} * \frac{k_c(s-z_c)}{s}$$

On place le zéro  $z_c$  de façon à vérifier la condition sur l'angle



$$\begin{aligned} -(2k+1)\pi &= -\beta_c - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_c \\ \alpha_c &= \beta_c + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \alpha_1 - 180^\circ \\ \beta_1 &= 79^\circ; \beta_2 = 46^\circ; \beta_3 = 17^\circ; \beta_c = 120^\circ; \alpha_1 = 19^\circ \\ \alpha_c &= 63^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(63^\circ) &= 1.96 = \frac{2.6}{\Delta R} \quad \Delta R = 1.32 \\ z_c &= -1.32 - 1.5j = -2.82 \end{aligned}$$



Condition sur le module

$$\frac{1}{10k_c} = \frac{d_4 d_z}{d_c d_1 d_2 d_3} = \frac{7.93 * 2.91}{8.8 * 3.6 * 2.64 * 3} = 0.092$$

$$k_c \cong 1 \quad \varphi_m = 50^\circ \quad G_{m dB} = 15 dB$$



# Méthodes de synthèse directes

## Méthode de Chien, Rhones et Reswick

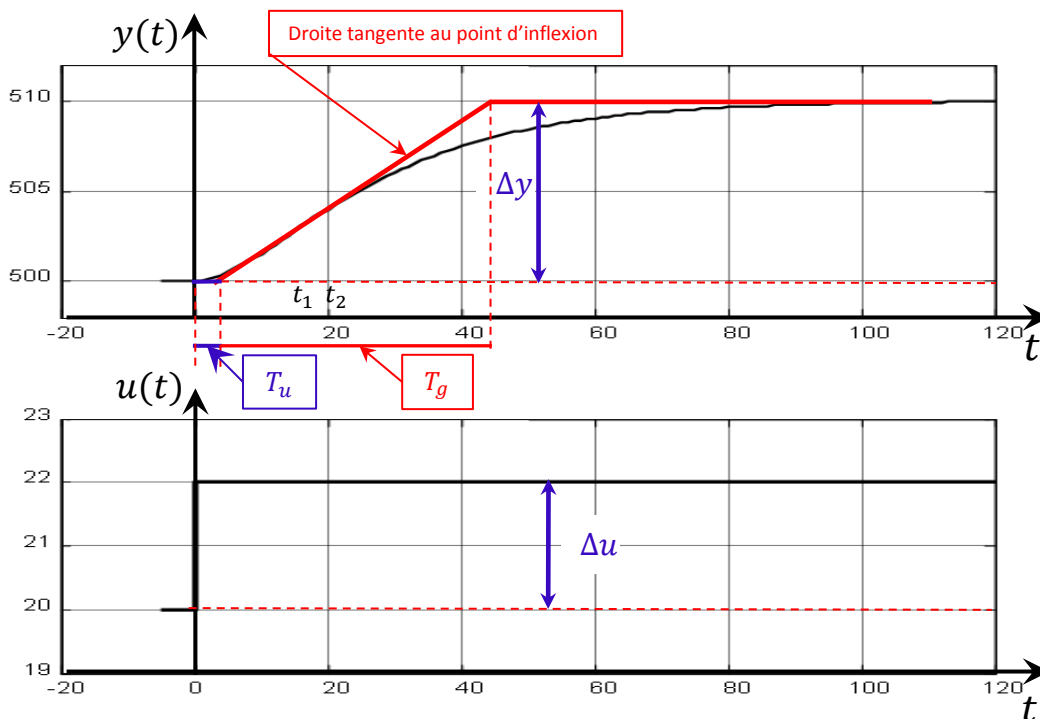
Le système en BO est sollicité sur son entrée par un échelon et il y correspond la réponse indicielle apériodique représentée ci-dessous.

Avant d'effectuer l'essai le système doit être stabilisé autour d'un point de fonctionnement afin d'imposer des conditions initiales nulles. Il faut aussi attendre le temps voulu afin de disposer de la totalité du transitoire, c'est-à-dire atteindre un second point de fonctionnement. Ce sont les VARIATIONS  $\Delta u$  et  $\Delta y$  qui sont exploitées.

On trace la droite tangente au point d'inflexion et approxime la réponse à trois segments de droite:  $T_u$ ,  $T_g$  et le segment tangent au point d'inflexion. Les valeurs de  $T_u$  et  $T_g$  permettent le calcul de la réglabilité  $\rho = \frac{T_g}{T_u}$ .

Plus la valeur de  $\rho$  est faible, plus le système sera difficilement réglable et au plus le régulateur sera complexe, c'est le cas du retard pur dont la réglabilité  $\rho$  est nulle car  $T_g = 0$ . Par contre une réglabilité élevée indique qu'un régulateur simple peut convenir. C'est le cas d'un système du premier ordre dont la valeur de  $T_u$  est nulle et donc  $\rho = \infty$ .

La structure du régulateur et la valeur des paramètres sont déterminés par  $\rho$ ,  $T_u$  et  $T_g$  selon le tableau ci-contre.



$$K_s = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad R(s) = K_r \left( \frac{sT_i + 1}{sT_i} \right) \left( \frac{sT_d + 1}{sT_f + 1} \right)$$

$\rho \geq 10$  régulateur P

$$K_{bo} = \frac{\rho}{3.3} (s) \quad K_r = \frac{K_{bo}}{K_s}$$

$10 > \rho \geq 7$  régulateur PI

$$K_{bo} = \frac{\rho}{2.9} (s) \quad K_r = \frac{K_{bo}}{K_s} \quad T_i = 1.2 T_g$$

$7 > \rho \geq 3$  régulateur PID

$$K_{bo} = \frac{\rho}{1.7} (s) \quad K_r = \frac{K_{bo}}{K_s} \quad T_i = T_g$$

$$T_d = (0.5 \dots 1) T_u \quad T_f \cong \frac{T_d}{10 \dots 20}$$

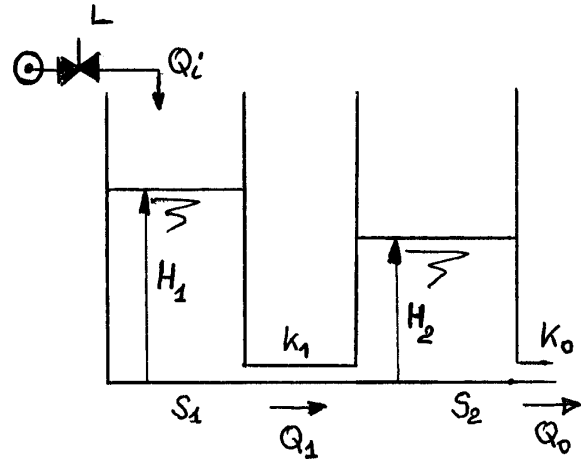
## Automatique générale : Exercices

## Séance N°1 : Modélisation

Soit l'installation schématisée ci-contre constituée de deux cuves reliées par un conduit et alimentées par une vanne de réglage linéaire.

On admet les hypothèses suivantes destinées à simplifier les calculs et en particulier à éviter la linéarisation qu'induirait un écoulement supposé turbulent dans les conduits.

Les hauteurs sont exprimées en décimètres et les débits en  $\text{dm}^3/\text{minute}$ .



- Les écoulements dans les restrictions ont lieu en régime laminaire: le débit est proportionnel à la pression différentielle ou à la hauteur.  $Q=KH$ .
- Le débit  $Q_i$  traversant la vanne est proportionnel à la levée  $L$  qui est considérée adimensionnelle  $0 \leq L \leq 1$ .
- A pleine ouverture un débit de  $20 \text{ dm}^3/\text{minute}$  traverse la vanne.
- Les deux cuves sont de sections égales à  $1 \text{ dm}^2$ .
- Le coefficient  $K_0$  de débit de l'orifice de sortie vaut  $1 \text{ dm}^2/\text{min}$ .
- Le coefficient  $K_1$  de débit du conduit entre les cuves vaut  $2 \text{ dm}^2/\text{min}$ .

### On demande

- 1) Etablir la fonction de transfert qui lie la hauteur  $H_2$  à la levée de la vanne  $L$ .
- 2) Etablir la fonction de transfert qui lie la hauteur  $H_1$  à la levée de la vanne  $L$ .
- 3) Calculer la transformée de Laplace des signaux  $H_1(s), H_2(s)$  en réponse à un échelon d'amplitude  $0.1$  appliqué à la levée de vanne.
- 4) Calculer les réponses temporelles  $H_1(t)$  et  $H_2(t)$  et d'en esquisser l'allure en fonction du temps.
- 5) Sans en rechercher l'expression temporelle d'esquisser l'allure de la réponse  $H_2(t)$  lorsqu'une rampe d'amplitude  $p=0.1/\text{min}$  est appliquée à la levée de la vanne de réglage.

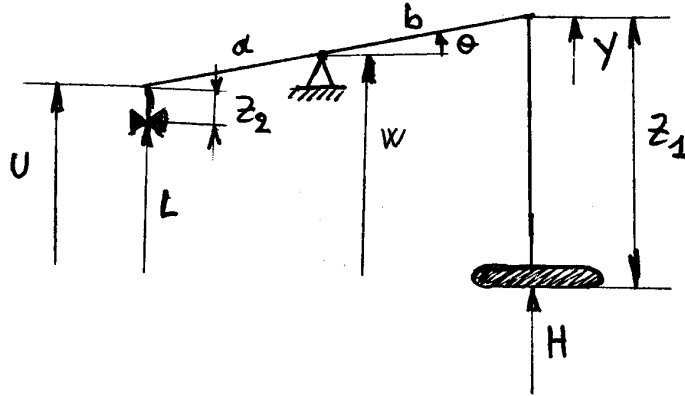
## Séance N°2 : Système en boucle fermée

Dans le but de maintenir le niveau constant dans la seconde cuve, un dispositif constitué d'un flotteur et d'une tringlerie est ajouté. Quand le niveau s'élève, le levier entraîné par le flotteur tourne autour de la rotule.

L'angle  $\theta$  croît et la vanne de réglage se ferme réduisant ainsi le débit d'entrée et donc le niveau  $H$  dans la seconde cuve.

Le système ainsi constitué est un régulateur à action proportionnelle qui agit par rétroaction et donc en boucle fermée. En effet un accroissement de  $H$  entraîne une diminution de  $U$ .

Le nouveau système créé par l'association des cuves et de la tringlerie ne réagit plus de la même façon. L'entrée de ce nouveau système n'est plus la levée qui devient une grandeur interne, mais bien une consigne de niveau.



### On demande:

- 1) De dessiner la structure de réglage sous forme d'un schéma fonctionnel d'y faire apparaître le système, le régulateur et les signaux utiles.
- 2) D'indiquer la grandeur qui constitue la consigne et comment on peut la modifier.
- 3) D'indiquer comment on peut changer le gain du régulateur.
- 4) D'établir un modèle du système de tringlerie (le régulateur)

- 5) De combiner ces résultats avec ceux obtenus lors de la première séance d'exercices et d'établir la fonction de transfert en boucle fermée liant le niveau  $H_2$  à la consigne.

Lors de la séance d'exercices précédente, nous avons obtenu pour la fonction de transfert du système seul :

$$\frac{H_2(s)}{L(s)} = \frac{40}{s^2 + 5s + 2} \quad H \text{ en décimètres et } L \text{ adimensionnel}$$

- 6) De montrer que les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dépendent du rapport  $a/b$  de la tringlerie.
- 7) D'esquisser l'allure du transitoire de  $H_2$  relatif à une variation de consigne d'un décimètre quand les segments  $a$  et  $b$  de la tringlerie sont identiques.
- 8) De déterminer le rapport optimal ( $\xi=0.5$ )  $a/b$  de la tringlerie.

### Séance N°3 : Identification de procédé & schéma fonctionnel

La réponse ci-dessous a été relevée sur un four industriel.

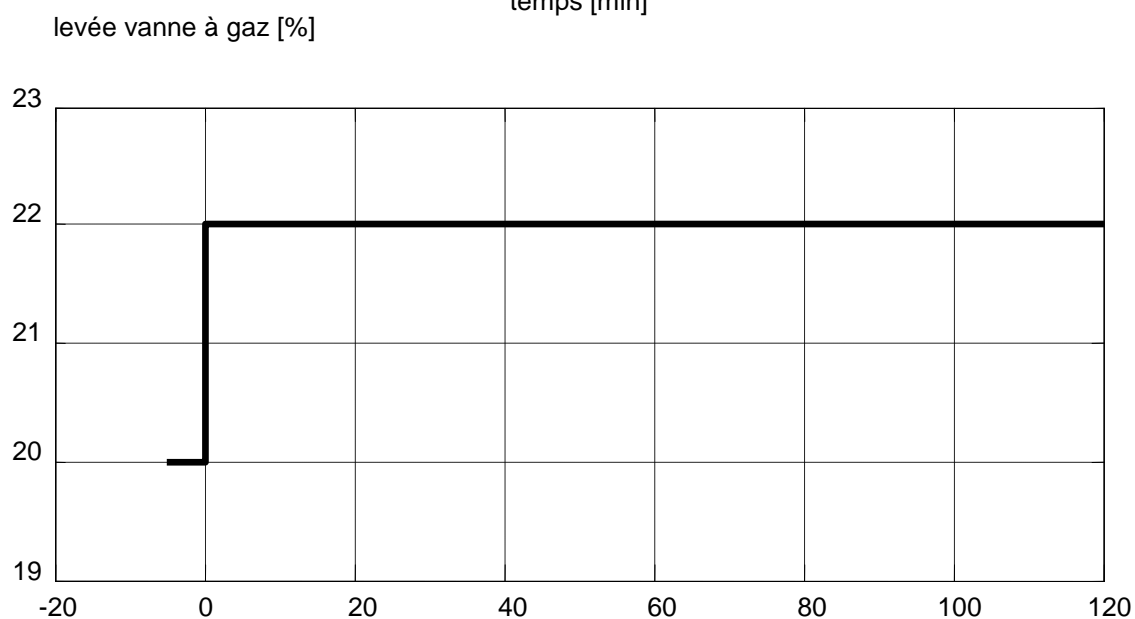
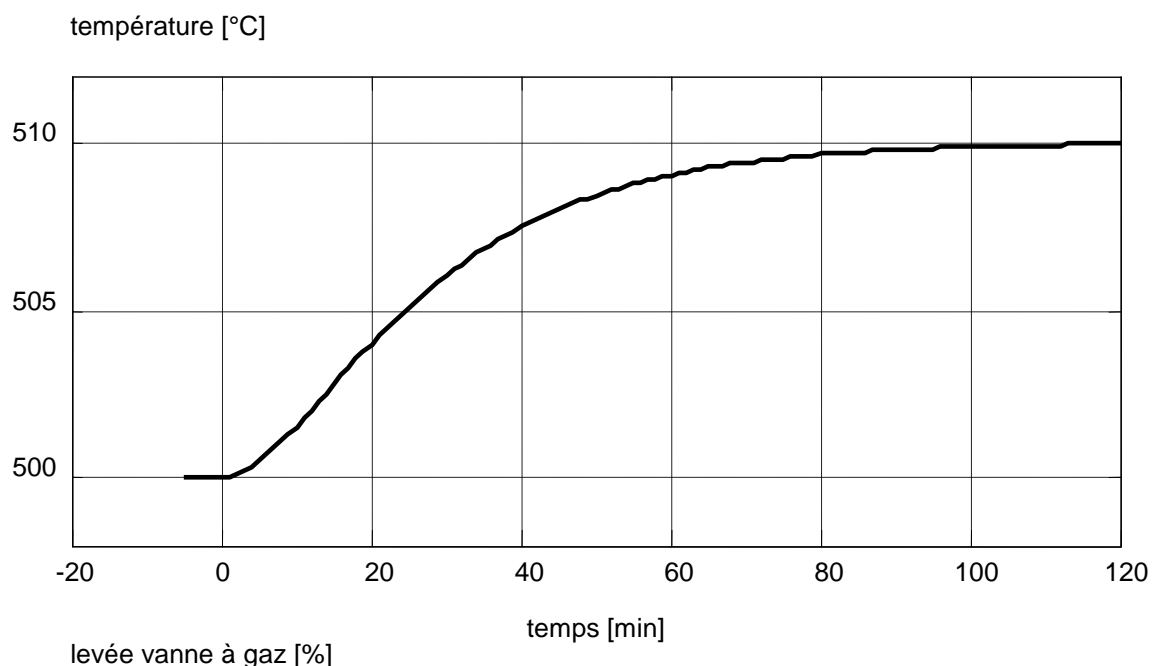
La sollicitation appliquée à la levée vanne à gaz était constituée d'un échelon, l'ouverture de la vanne ayant varié de 20% à 22%.

La température initialement stabilisée à 500°C s'est accrue de 10°C pour atteindre asymptotiquement la valeur finale de 510°C après un temps de 120 minutes.

#### Demande

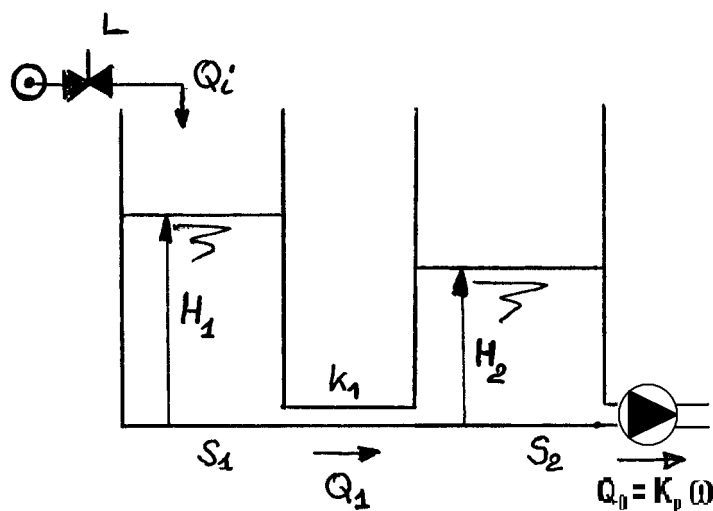
1) D'identifier les modèles de Broïda, de Strejc et de Vandergrinten.

2) Avec les mêmes conditions initiales, esquissez la réponse en température résultant d'un créneau de 2% appliqué à la vanne à gaz pendant 40 minutes.



### Données

On a modifié le système constitué par les deux cuves en y ajoutant une pompe volumétrique qui prélève dans la seconde cuve un débit proportionnel à sa vitesse. Le débit ainsi prélevé dans la seconde cuve n'est pas affecté par le niveau et peut varier de façon aléatoire au cours du temps. La vitesse de la pompe constitue donc une perturbation.



Les hypothèses exploitées lors de la première séance sont conservées : régime d'écoulement laminaire, unités : décimètres et minutes, levée de la vanne adimensionnelle.

$K=20 \text{ dm}^3/\text{min}$  ;  $K_p=10 \text{ dm}^3/\text{min}$  ;  $K_1=2 \text{ dm}^2/\text{min}$  ;  $S_1=S_2=1 \text{ dm}^2$ .  $0 \leq \omega \leq 1$  ;  $0 \leq L \leq 1$

Cela conduit immédiatement aux équations suivantes :

$$(Q_i - Q_1) = S_1 \frac{dH_1}{dt}$$

$$Q_i = KL$$

$$Q_1 = K_1(H_1 - H_2)$$

$$(Q_1 - Q_0) = S_2 \frac{dH_2}{dt}$$

$$Q_0 = K_p \omega$$

### Demande

1) A partir des équations ci-dessus, de construire directement autour des deux intégrateurs (1/s en variable de Laplace) un schéma fonctionnel décrivant le système.

2) À partir schéma fonctionnel dessiné au premier point et sans faire aucun calcul, mais par transformations successives du schéma fonctionnel en exploitant les règles de réduction, établir la transmittance isomorphe qui lie la hauteur  $H_2$  à la levée de la vanne.

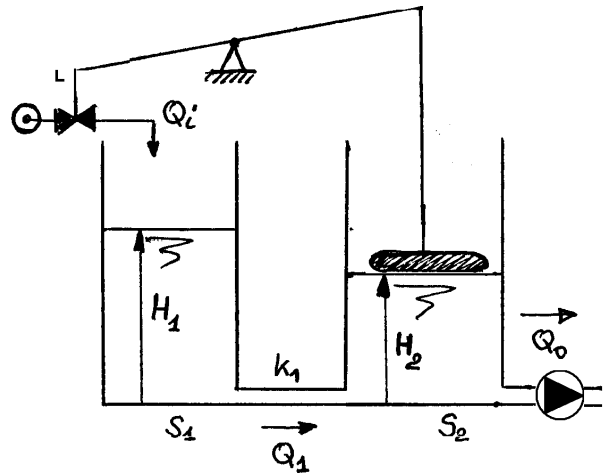
Procéder de même pour établir la fonction de transfert qui lie la hauteur  $H_2$  à la perturbation.

### Séance N°4 : Réponse harmonique d'un système

Lors d'une séance précédente vous avez établi le modèle du système hydraulique ci-contre constitué d'une vanne, de deux cuves et d'une pompe.

La fonction de transfert liant la grandeur réglée (la hauteur  $H_2$  dans la deuxième cuve) à la grandeur réglante (la levée de la vanne) de ce système s'écrivait :

$$\frac{H_2(s)}{L(s)} = \frac{40}{s^2 + 4s}$$



Dans le but de maintenir le niveau constant malgré le prélèvement d'un débit variable par la pompe (c'est la perturbation), un régulateur à action proportionnelle constitué d'un flotteur et d'un levier permettant de fermer la vanne quand le niveau monte est ajouté au système.

On demande :

- 1) En exploitant les approximations asymptotiques représenter le diagramme de Bode du système (en boucle ouverte)
- 2) De porter ces résultats dans le diagramme de Black et en déduire le gain du régulateur à action proportionnelle (le rapport des longueurs du bras de levier) qui confère au système en boucle fermée un dépassement d'environ 20% lorsqu'un échelon est appliqué sur la consigne.
- 3) De mesurer les marges de stabilité
- 3) De représenter le diagramme de Bode du système corrigé en boucle fermée (quelques points bien choisis dans le diagramme de Black-Nichols).
- 4) De calculer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, la valeur du coefficient d'amortissement réduit et la pulsation naturelle du système non amorti.
- 5) De déterminer le temps de réponse à 95% relatif à un échelon appliqué sur la consigne et d'esquisser l'allure du transitoire (exponentielle enveloppe et période du signal périodique enfermée dans l'exponentielle enveloppe).

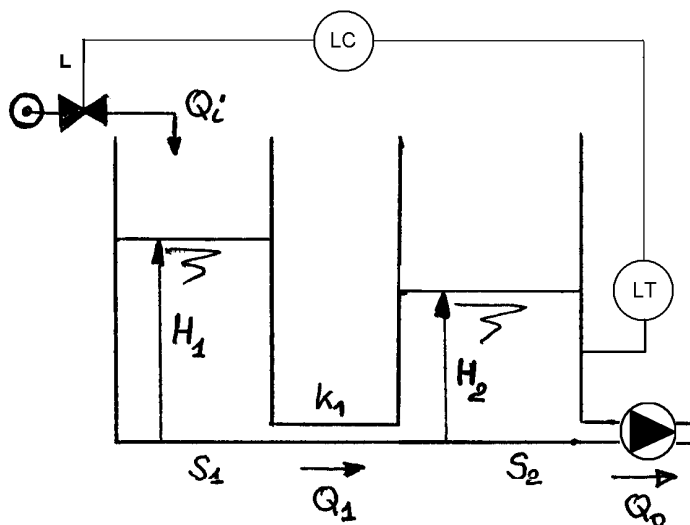
## Séance N°5 : Synthèse par le lieu des pôles (Evans)

Lors d'une séance d'exercice précédente vous avez établi le modèle du système hydraulique ci-contre constitué d'une vanne, de deux cuves et d'une pompe.

La fonction de transfert liant la grandeur réglée (la hauteur  $H_2$  dans la deuxième cuve) à la grandeur réglante (la levée de la vanne) de ce système s'écrivait :

$$\frac{H_2(s)}{L(s)} = \frac{40}{s^2 + 4s}$$

Dans le but de maintenir le niveau constant malgré le prélèvement d'un débit variable par la pompe (c'est la perturbation), un régulateur mécanique à action proportionnelle de gain  $K$  constitué d'un simple levier avait été ajouté au système.



On demande :

- 1) **En exploitant ses règles de construction**, de représenter le lieu des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée.
- 2) De calculer la valeur du gain qui confère au système en boucle fermée un coefficient d'amortissement réduit de 0.707 (pas de dépassement perceptible), de calculer le temps de réponse à 95%.

Le régulateur mécanique est remplacé par un régulateur électronique à avance de phase (LC sur le schéma), il ferme la vanne quand le niveau monte.

Sa transmittance s'écrit  $\frac{L(s)}{E(s)} = \frac{k(s+a)}{(s+20a)}$

On demande :

- 1) **En négligeant le filtrage**, d'effectuer la synthèse de ce régulateur (calculer les valeurs de  $k$  et  $a$ ) telles que
  - Le temps de réponse à 95% soit 0.75 minute
  - Le taux de dépassement indiciel soit d'environ 15% (il y correspond un coefficient d'amortissement réduit de 0.5).
- 2) D'esquisser le lieu des pôles du système corrigé (en boucle fermée)
- 3) De corriger le lieu des pôles en tenant compte de la valeur du filtrage.
- 3) De déterminer l'écart statique de conduite relatif à un échelon unité appliqué sur la consigne.



## Séance N°6 : Synthèse par les méthodes fréquentielles

Soit le système apériodique d'ordre trois décrit par le modèle de Strejc

$$H(s) = \frac{2}{(10s + 1)^3}$$

On demande de synthétiser par les méthodes fréquentielles un régulateur PID à structure série dont la fonction de transfert s'écrit :

$$R(s) = K \frac{(sT_i + 1)(sT_d + 1)}{sT_i (sT_f + 1)} \text{ avec } T_f = \frac{T_d}{10}$$

On admet qu'on puisse simplifier un pôle du système par un zéro du régulateur.

Pour la synthèse de l'action par dérivation, on négligera le filtrage.

Pour imposer les marges de robustesse on prendra en compte de filtrage de l'action D.

Procédure:

$T_i=10$  ; si on néglige  $T_f$

Il reste alors

$$G_{oc}(s) = \frac{2K}{T_i} \frac{(sT_d + 1)}{s(10s + 1)^2} = K_0 \frac{(sT_d + 1)}{s(10s + 1)^2}$$

Par les approximations asymptotiques, on représentera alors (sur une feuille quadrillée) le diagramme de Bode du système  $G_{oc}$  sans le terme dérivateur, c'est-à-dire:

$$R(s) = \frac{1}{s(10s + 1)^2}$$

On en déduira immédiatement la valeur de  $T_d$  selon la méthode vue aux cours.

On complètera alors ce diagramme par celui du régulateur à action proportionnelle et par dérivation filtré et on déduira la valeur de  $K_0$  qui confère au système  $\frac{K_0}{s(10s + 1)^2} \frac{(sT_d + 1)}{(sT_f + 1)}$  une marge de phase d'environ  $45^\circ$  et un marge de gain supérieure à 6 dB.

Pour finir on en déduira le gain du régulateur, il vaut  $K = \frac{K_0 T_i}{2}$

## **Quelques commandes Matlab relatives à l'analyse et la synthèse des systèmes continus**

### **Creating linear models.**

- tf** - Create transfer function models.
- set** - Set/modify properties of LTI models.

### **Data extraction.**

- tfdata** - Extract numerator(s) and denominator(s).
- get** - Access values of LTI model properties.

### **System interconnections.**

- parallel** - Generalized parallel connection (see also overloaded +).
- series** - Generalized series connection (see also overloaded \*).
- feedback** - Feedback connection of two systems.
- sgrid**

### **Model dynamics.**

- dcgain** - D.C. (low frequency) gain.
- pole, eig** - System poles.
- pzmap** - Pole-zero map.

### **Time-domain analysis.**

- ltiview** - Response analysis GUI (LTI Viewer).
- step** - Step response.
- impz** - Impulse response.
- lsim** - Response to arbitrary inputs.

### **Frequency-domain analysis.**

- ltiview** - Response analysis GUI (LTI Viewer).
- bode** - Bode diagrams of the frequency response.
- nyquist** - Nyquist plot.
- nichols** - Nichols plot.
- margin** - Gain and phase margins.

### **Classical design.**

- rlocus** - Evans root locus
- rltool** - Roots locus design GUI
- rlocfind** - Interactive root locus determination
- sgrid** - generates a grid over an existing continuous s-plane root locus or pole-zero map.

## ANNEXE 2

TABLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE À L'USAGE DES  
AUTOMATICIENS ET ELECTRONICIENS

## 1 Transformations usuelles - fonctions continues

Toutes les fonctions du temps s'entendent multipliées par l'échelon unité  $u(t)$ .

Autrement dit, toutes les fonctions sont causales.

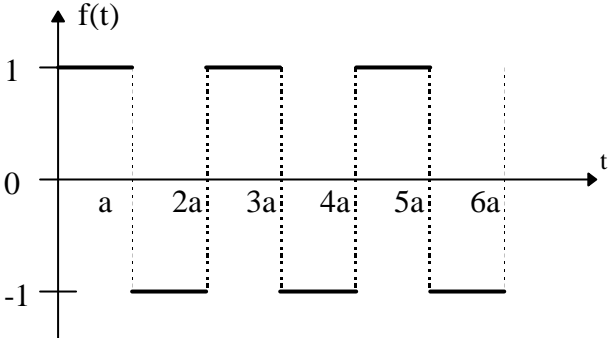
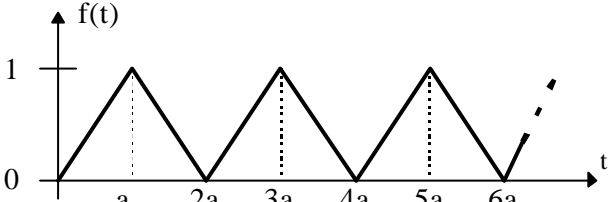
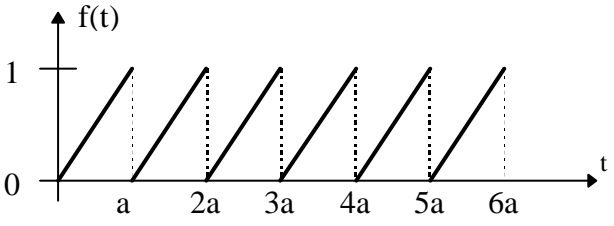
$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$p^n \quad n > 0$
$A$	$\frac{A}{p}$
$A.t$	$\frac{A}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n \text{ entier } n \geq 1$	$\frac{A}{p^n}$
$\frac{1}{T} e^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Tp}$
$1 - e^{-t/T}$	$\frac{1}{p(1+Tp)}$
$t - T + T e^{-t/T}$	$\frac{1}{p^2(1+Tp)}$
$\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2})$	$\frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$
$1 - \frac{1}{T_1 - T_2} (T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2})$	$\frac{1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$
$t - (T_1 + T_2) - \frac{1}{T_1 - T_2} (T_2^2 e^{-t/T_2} - T_1^2 e^{-t/T_1})$	$\frac{1}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$

$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-t/T}$ $\frac{1}{T^2}e^{-t/T}$ $1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-t/T}$ $t-2T+(t+2T)e^{-t/T}$	$\frac{p}{(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{p(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{p^2(1+Tp)^2}$
$\frac{\mathbf{w}_n^2}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \cdot e^{-\mathbf{x}\mathbf{w}_n t} \cdot \text{Sin}\left(\mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2} t + \mathbf{q}\right)$ $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \text{ArcCos} \mathbf{x}$ $\frac{\mathbf{w}_n}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \cdot e^{-\mathbf{x}\mathbf{w}_n t} \cdot \text{Sin}\left(\mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2} t\right) \quad 0 < \mathbf{x} < 1$ $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \cdot e^{-\mathbf{x}\mathbf{w}_n t} \cdot \text{sin}\left(\mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2} t + \mathbf{y}\right)$ $\mathbf{y} = \text{ArcCos} \mathbf{x}$ $t - \frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{w}_n} + \frac{1}{\mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \cdot e^{-\mathbf{x}\mathbf{w}_n t} \cdot \text{Sin}\left(\mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2} t + 2\mathbf{y}\right)$	$\frac{p}{1 + \frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{w}_n} p + \frac{p^2}{\mathbf{w}_n^2}}$ $\frac{1}{1 + \frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{w}_n} p + \frac{p^2}{\mathbf{w}_n^2}}$ $\frac{1}{p\left(1 + \frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{w}_n} p + \frac{p^2}{\mathbf{w}_n^2}\right)}$ $\frac{1}{p^2\left(1 + \frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{w}_n} p + \frac{p^2}{\mathbf{w}_n^2}\right)}$
$((b-a)t+1)e^{-at}$	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\text{Cos} a t$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\text{Cos}(a t + \mathbf{j})$	$\frac{p \text{Cos} \mathbf{j} - a \text{Sin} \mathbf{j}}{p^2+a^2}$
$\text{Sin} a t$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\text{Sin}(a t + \mathbf{j})$	$\frac{p \text{Sin} \mathbf{j} + a \text{Cos} \mathbf{j}}{p^2+a^2}$

$\text{si } a^2 > b^2: \frac{1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$ $\text{avec } \begin{cases} p_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ p_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$ $\text{si } a^2 = b^2: te^{-at}$ $\text{si } a^2 < b^2: \frac{1}{\mathbf{w}} e^{-at} \text{Sin} \mathbf{w} \quad \text{avec } \mathbf{w} = \sqrt{b^2 - a^2}$	$\frac{1}{p^2 + 2ap + b^2}$
$\text{si } a^2 > b^2: \frac{1}{b^2} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left( \frac{1}{e^{p_1 t}} - \frac{1}{e^{p_2 t}} \right)$ $\text{avec } \begin{cases} p_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ p_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$ $\text{si } a^2 = b^2: \frac{1}{a^2} (1 - e^{-at} - ate^{-at})$ $\text{si } a^2 < b^2: \frac{1}{b^2} \left( 1 - \frac{e^{-at}}{\mathbf{w}} (a \text{Sin} \mathbf{w} + \mathbf{w} \text{Cos} \mathbf{w}) \right)$ $= \frac{1}{b^2} \left( 1 - \frac{be^{-at}}{\mathbf{w}} \text{Sin}(\mathbf{w} + \mathbf{j}) \right)$ $\text{avec } \mathbf{w} = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad \text{tg} \mathbf{j} = \frac{\mathbf{w}}{a}$	$\frac{1}{(p^2 + 2ap + b^2)^2}$
$\frac{1}{a} e^{bt} \sin at$	$\frac{1}{(p-b)^2 + a^2}$
$e^{bt} \text{Cos} at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$
$\frac{1}{a} \text{Sh} at$	$\frac{1}{p^2 - a^2}$
$\text{Ch} at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\frac{1}{a} e^{bt} \text{Sh} at$	$\frac{1}{(p-b)^2 - a^2}$
$e^{bt} \text{Ch} at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 - a^2}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{(c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{p+c}{(p+a)(p+b)}$

$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$
$\frac{\sin at - at \cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2a} t \sin at$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$
$\frac{\sin at + at \cos at}{2a}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}$
$\cos at - \frac{1}{2} at \sin at$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
avec $\begin{cases} \sin ix = +i \operatorname{sh} x \\ \cos ix = \operatorname{ch} x \end{cases}$	formules en $\frac{1}{p^2 - a^2}$ changer $a$ en $ia$
$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left( \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} at - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} at + e^{-3at/2} \right)$	$\frac{1}{p^3 + a^3}$
$\frac{e^{at/2}}{3a} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} at + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} at - e^{-3at/2} \right)$	$\frac{p}{p^3 + a^3}$
$\frac{1}{3} \left( e^{at} + 2e^{-at/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} at \right)$	$\frac{p^2}{p^3 - a^3}$
$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{p^3}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a} + \sqrt{p+b}}$
$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{p}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
$\frac{a}{2\sqrt{p^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{p}}$
$\frac{1}{t} (e^{-bt} - e^{-at})$	$\ln \left( \frac{p+a}{p+b} \right)$

## 2 Transformations usuelles - fonctions discontinues

$f(t)$	$F(p)$
 $f(t) = u(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u(t - ka)$	$\frac{1}{p} \text{th} \left( \frac{ap}{2} \right)$
	$\frac{1}{ap^2} \text{Th} \left( \frac{ap}{2} \right)$
 $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{a} [u(t - ka) - u(t - (k+1)a)]$	$\frac{1}{ap^2} (1 - e^{-ap} - ape^{-ap}) \frac{1}{1 - e^{-ap}}$

# Instrumentation industrielle



## **« MESURE » DE LA TEMPERATURE COMPLEMENTS**

## 1. Incertitudes communes aux thermomètres.

Des incertitudes de mesures systématiques importantes ont comme origine une mise en oeuvre inadéquate des sondes de températures, quelque soit le principe de la mesure même si ce dernier a été bien choisi. Ce paragraphe explique comment, par une mise en oeuvre bien pensée, on peut maîtriser certaines grandeurs d'influence. Il y a trois sources d'incertitudes; elles seront ici traitées séparément alors qu'en pratique elles existent simultanément. Grâce à des hypothèses simplificatrices, la modélisation des phénomènes étudiés fournit des expressions simples. Celles-ci mettent en évidence les paramètres sur lesquels on peut agir pour obtenir une mesure qui soit une image la plus fidèle que possible de la température. Nous allons analyser l'influence de l'inertie, de la conductibilité et du rayonnement.

### 1.1. Influence de l'inertie.

On considère la sonde thermométrique représentée à la figure 1 comme une tige en matériau homogène de longueur  $L$  et de diamètre  $d$ . Elle se trouve initialement à la température  $t$  et est plongée brutalement dans un bain à la température  $\theta$ .

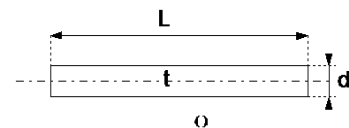


Figure 1

La quantité de chaleur élémentaire cédée par le bain au thermomètre vaut

$$dq = S\alpha(\theta - t)d\tau$$

La quantité de chaleur élémentaire est absorbée par le thermomètre

$$dq = V\rho Cdt$$

Comme ces grandeurs sont égales, il vient

$$S\alpha(\theta - t)d\tau = V\rho Cdt$$

avec

$\tau$ : le temps en s.

$t$ : la température de la sonde en  $^{\circ}\text{C}$

$S$ : la surface de contact entre la sonde et le milieu en  $\text{m}^2$ .

$\alpha$ : le coefficient d'échange en  $\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}}$  entre la sonde et le milieu.

$V$ : volume du thermomètre en  $\text{m}^3$ .

$C$ : la chaleur massique en  $\frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}}$

$\rho$ : la masse volumique en  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

C'est donc sous les hypothèses adoptées, une équation différentielle du premier ordre qui régit le comportement du thermomètre. Elle s'écrit.

$$S\alpha\theta = S\alpha t + V\rho C \frac{dt}{d\tau}$$

Si les conditions initiales sont nulles et qu'on applique la transformée de Laplace aux deux membres, il vient avec  $s$  la variable complexe de Laplace

$$\frac{t(s)}{\theta(s)} = \frac{1}{\frac{V\rho C}{S\alpha}s + 1} = \frac{1}{T_s s + 1}, \text{ formule dans laquelle } T_s \text{ est la constante de temps de la sonde.}$$

$V\rho C$  est la capacité calorifique de la sonde et  $\frac{1}{S\alpha}$  est la résistance au passage du flux thermique.

On sait<sup>1</sup> que  $\omega_b = \frac{1}{T_s}$  est la pulsation de brisure de la représentation dans un

diagramme de Bode de la réponse harmonique et qu'elle sépare ce diagramme en deux domaines importants.

On voit qu'il est possible pour une sonde déterminée de diminuer la constante de temps en augmentant le coefficient d'échange  $\alpha$ , c'est-à-dire en plaçant la sonde à un endroit où les turbulences sont importantes.

Il est aussi possible de diminuer  $T_s$  en diminuant le rapport  $\frac{V}{S}$ , c'est-à-dire en pourvoyant la sonde d'ailettes.

Le modèle électrique équivalent est un filtre du premier ordre de constante de temps  $T_s = RC$ , la représentation est donnée à la figure 2 ci-contre.

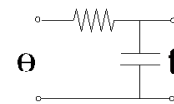


Figure 2

Si on étudie le thermomètre en tenant compte des divers matériaux dont il est composé, on obtient un modèle électrique équivalent dont le schéma est donné à la figure 3. Les conclusions relatives à la mise en oeuvre restent identiques.

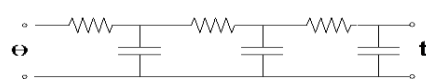


Figure 3

<sup>1</sup>voir cours de mesure II candidature.

## 1.2. Influence de la conductibilité.

Un thermomètre inséré dans un conduit est généralement protégé par une gaine qui porte le nom de cupule ou encore doigt de gant. Une représentation en est donnée à la figure 4. On souhaite étudier l'influence de la température de la paroi sur la température mesurée par le thermomètre.

On suppose que le régime est stationnaire.

On appelle :

$t_x$ : la température du gant à l'ordonnée  $x$ .

$t_f$ : la température du fluide.

$t_0$ : la température de la paroi du conduit.

$t_1$ : la température au fond du gant.

On écrit le bilan thermique pour une surface cylindrique élémentaire à l'ordonnée  $x$ :

La quantité de chaleur  
cédée par le fluide au

gant vaut:

$$dq_c = \pi d \alpha (t_f - t_x) dx \text{ avec}$$

$\alpha$ : le coefficient  
d'échange entre le fluide  
et la cupule en  $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

$d$ : le diamètre de  
la cupule en m.

Comme le régime est  
stationnaire, cette

quantité de chaleur

élémentaire cédée par le fluide est évacuée vers la paroi par conduction dans la cupule de section  $\Omega$ . Le flux à l'ordonnée  $x$  vaut

$$q_r = -\lambda \Omega \text{grad}(t) = -\lambda \Omega \frac{dt}{dx} : \text{si on l'exprime sous forme}$$

différentielle, il vient

$$\frac{dq_r}{dx} = -\lambda \Omega \frac{d}{dx} \left( \frac{dt}{dx} \right) = -\lambda \Omega \frac{d^2 t}{dx^2} \text{ ou encore } dq_r = -\lambda \Omega \frac{d^2 t}{dx^2}$$

On obtient:

$$\pi d \alpha (t_f - t_x) dx = -\lambda \Omega \frac{d^2 t}{dx^2} \text{ ou encore } \frac{d^2 t}{dx^2} = -\frac{\pi d \alpha (t_f - t_x)}{\lambda \Omega}$$

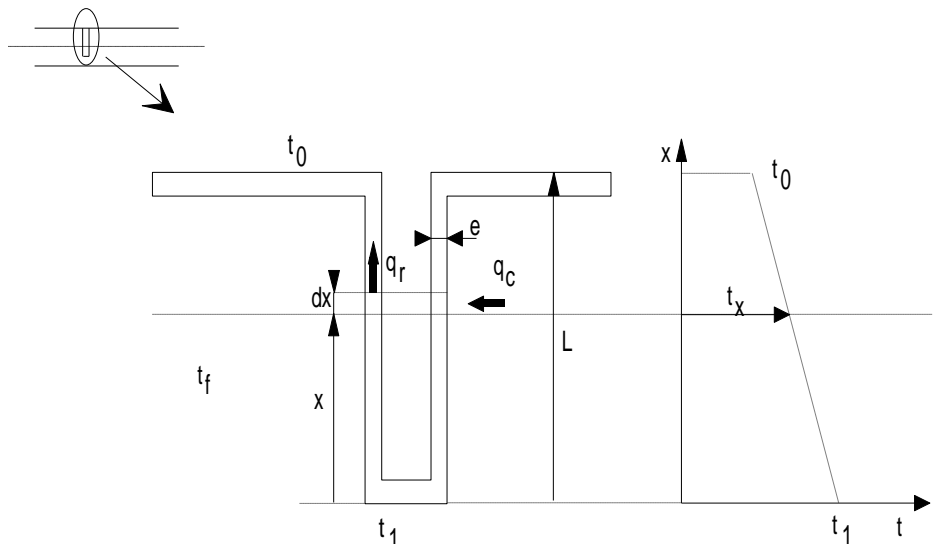


Figure 4

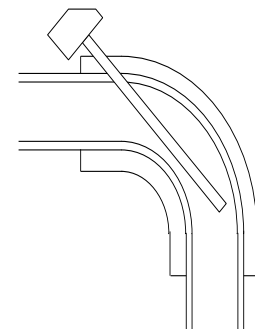


Figure 5

Si on pose  $K = \frac{\alpha \pi d}{\lambda \Omega}$ , la solution de cette équation différentielle s'écrit

$$t_x - t_f = (t_1 - t_f) \cosh(\sqrt{K}x)$$

Si la longueur du thermomètre vaut L et les conditions aux limites sont:

$$t_{x=0} = t_1 \text{ et } t_{x=L} = t_0$$

il vient finalement

$$t_f - t_0 = (t_f - t_1) \cosh(\sqrt{KL})$$

Comme le montre cette équation, c'est à l'extrémité de la cupule, en  $x=0$ , que la température est la plus élevée et donc la plus proche de la température du fluide. La plus petite incertitude ou erreur minimale vaut:

$$\text{erreur minimale} = (t_f - t_1) = \frac{t_f - t_0}{\cosh(\sqrt{KL})} \text{ avec } K = \frac{\alpha \pi d}{\lambda \Omega}$$

Pour diminuer cette erreur, lors de la mise en oeuvre il faudra veiller à :  
réduire l'écart  $t_f - t_0$ , c'est à dire isoler la conduite pour rapprocher la température  $t_0$  de la conduite de la température du fluide.

- augmenter la longueur L de la sonde
- augmenter la valeur de K, c'est-à-dire:
  - placer la sonde en un endroit où les turbulences sont importantes, ce qui assure une valeur élevée du coefficient d'échange;
  - choisir si possible une sonde réalisée en matériaux qui sont mauvais conducteurs de la chaleur;
  - diminuer la section  $\Omega$  de passage du flux thermique, c'est-à-dire diminuer l'épaisseur de la cupule.

Toutes ces considérations font qu'on trouve souvent, comme représenté à la figure 5, une sonde plus longue que le diamètre du conduit, placée obliquement dans un coude, où la conduite a été isolée thermiquement de l'ambiance.

### 1.3. Influence du rayonnement.

Si une sonde de température est insérée dans un conduit transportant un gaz diathermane, elle échange avec la paroi de celui-ci de la chaleur par rayonnement. Cela est la cause d'incertitudes de mesure. Le modèle mathématique simplifié qui suit permet de mettre en évidence les actions à prendre pour réduire cette incertitude.

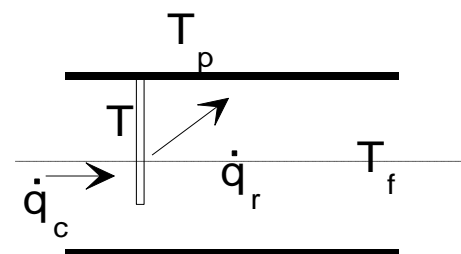


Figure 6

Admettons qu'on puisse calculer l'échange par rayonnement entre la sonde et la paroi par l'expression (voir figure 6) .

$$\dot{q}_r = c_1 S \left[ \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right] \text{ avec}$$

$c_1$ : un coefficient qui tient compte de l'émissivité de la sonde comparée à celle du corps noir;

$S$ : la surface de la sonde.;

$T$ : la température de la sonde;

$T_p$ : la température de la paroi;

Cette expression montre que la sonde émet de la puissance vers la paroi et qu'elle doit la puiser par convection dans le milieu qui l'entoure .

$$\text{soit } \dot{q}_c = \alpha S (T_f - T) \text{ avec}$$

$T_f$ : la température du gaz;

$\alpha$ : le coefficient d'échange par convection;

$S$ : la surface de la sonde.

Ces flux sont égaux, puisque l'étude porte sur le régime stationnaire; cela permet d'exprimer que l'incertitude de mesure peut être estimée par l'expression

$$(T_f - T) = \frac{c_1}{\alpha} \left[ \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right]$$

On voit que pour la réduire, il faut

- augmenter la température de la paroi et la rapprocher de celle du fluide, c'est-à-dire isoler la conduite;
- placer la sonde en un endroit où les turbulences sont importantes, ce qui assure une valeur élevée au coefficient d'échange  $\alpha$ ;
- utiliser des sondes qui sont polies et ne s'oxydent pas facilement;

- Placer comme le montre la figure 7 des écrans entre la sonde et la conduite.

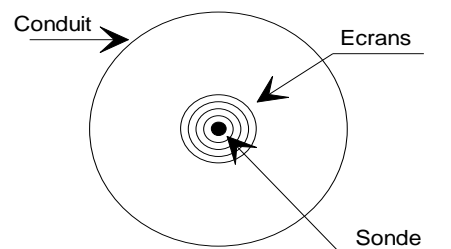


Figure 7

## **MESURE DES DEPLACEMENTS**

### 1. Capteur potentiométrique.

Le potentiomètre dont un schéma de principe est donné à la figure 1 est un transmetteur de déplacement.

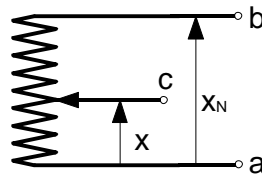


Figure 1

En effet, si la valeur de la résistance nominale du potentiomètre entre les bornes a et b vaut  $R_N$ , que la résistance entre la borne a et celle du curseur c, à l'abscisse x, vaut  $R(x)$ , on peut écrire à condition que le potentiomètre soit linéaire

$$R(x) = R_N \frac{x}{x_N}$$

On rencontre aussi des exécutions qui permettent la mesure des déplacements angulaires, dans ce cas, on peut écrire

$$R(\alpha) = R_N \frac{\alpha}{\alpha_N}$$

Ce qui distingue les potentiomètres utilisés en mesure des potentiomètres ordinaires est la tolérance sur la linéarité et leur faible coefficient de température ( $10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ ). On en construit à piste conductrice et à fil bobiné, cela a une influence sur la *résolution* qui est grande dans le premier cas puisqu'elle peut atteindre  $0.1\mu\text{m}$ . Par contre dans le cas d'un potentiomètre constitué d'une bobine de n spires, la *résolution* est fonction du nombre de spires et vaut  $\frac{1}{2n}$ .

Un autre paramètre important est la durée de vie qui s'exprime en millions de manoeuvres et qui justifie son emploi pour des mesures quasi-statiques.

Lors de la mise en oeuvre, il faut être attentif à l'influence que peut avoir la charge<sup>1</sup> constituée par le voltmètre sur la linéarité. La figure 2 montre un potentiomètre aux bornes duquel est raccordé un voltmètre de résistance interne  $R_v$ .

---

<sup>1</sup> Voir cours de candidature, " finesse d'une méthode de mesure "



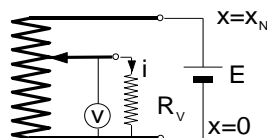


Figure 2

Le courant  $i$  dévié par le voltmètre peut être calculé en appliquant le théorème de Thévenin. Admettons qu'en  $x=0$  la résistance du potentiomètre soit nulle et qu'en  $X_N$  sa résistance soit  $R_N$ , on peut alors écrire

$$i = \frac{Ex}{R_v + \frac{x(1-x)R_N^2}{R_N(x+1-x)}} \quad \text{dont on déduit immédiatement la tension au voltmètre}$$

$$V = R_v i = \frac{Ex}{1 + x(1-x) \frac{R_N}{R_v}}$$

Cette expression, dont une représentation graphique est donnée à la figure 3 montre que la tension au voltmètre est une image linéaire du déplacement, à condition que le **rapport**  $\frac{R_N}{R_v}$  soit nul. En pratique, pour réduire l'écart à la linéarité il faut choisir un voltmètre dont la résistance interne est grande comparée à celle de potentiomètre.

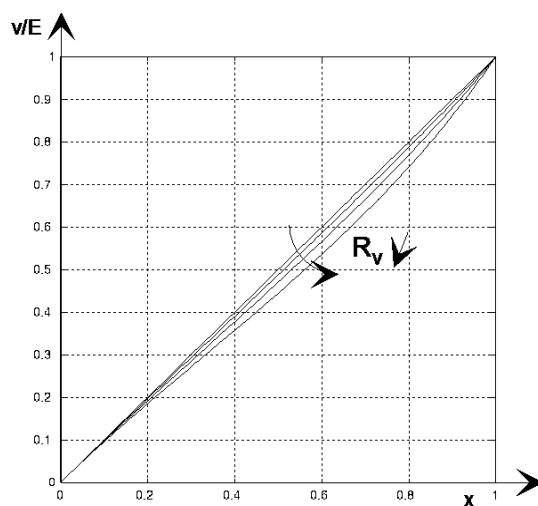


Figure 3

## 2. Le transformateur différentiel (L.V.D.T <sup>2</sup>).

### 2.1. Principe de fonctionnement.

Cet appareil de mesure des déplacements fait l'objet d'une séance de laboratoire, il sera donc vu en détail.

Comme le montre le schéma de principe de la figure 4, un transformateur différentiel est constitué d'un enroulement primaire et de deux enroulements secondaires placés symétriquement par rapport au primaire. Un noyau ferromagnétique peut se déplacer librement à l'intérieur du tube qui supporte les bobines. C'est lui qui est entraîné par l'élément dont on veut mesurer le déplacement.

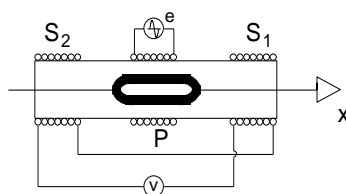


Figure 4

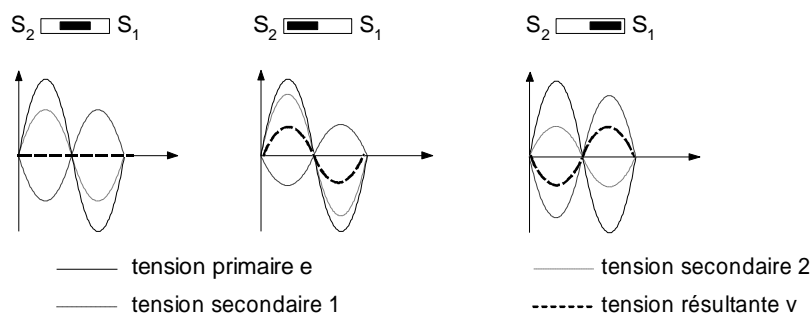


Figure 5

Si le primaire du transformateur est alimenté par une tension sinusoïdale  $e$ , il apparaît aux bornes des secondaires des forces électromotrices induites qui sont égales quand le noyau est à la position centrale. Si les secondaires sont connectés en opposition, la force électromotrice résultante  $v$  aux bornes du voltmètre vaut zéro volt. Lorsque le noyau se déplace, par exemple vers  $S_1$ , le couplage électromagnétique entre le primaire et le secondaire  $S_1$  augmente: la tension aux bornes de la bobine secondaire  $S_1$  croît. Par contre, le couplage électromagnétique entre le bobinage primaire et le secondaire  $S_2$  diminue ce qui entraîne une diminution de la tension aux bornes de  $S_2$ . On en déduit que l'amplitude tension aux

<sup>2</sup> L.V.D.T est l'abréviation de Linear Variable Differential Transformer.

bornes du voltmètre croît avec le déplacement par rapport à la position centrale, que le déplacement ait lieu à gauche ou à droite. Le déphasage de la tension secondaire par rapport à la tension primaire permet de connaître le sens du déplacement. La figure 5 montre les résultats obtenus dans trois cas.

Le graphique de la figure 6 montre la liaison entre le rapport de la tension résultante  $v$  à la tension d'entrée  $e$  appliquée au primaire en fonction du déplacement  $x$  du noyau.

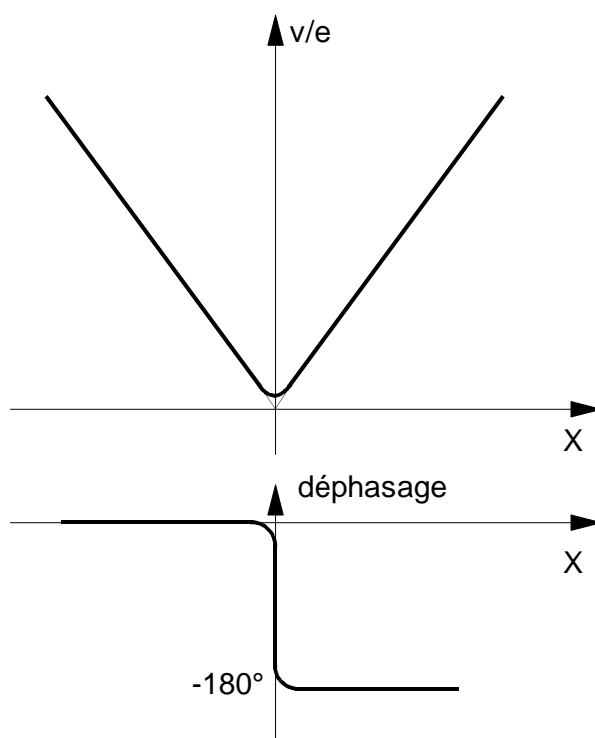


Figure 6

L'excellente linéarité est obtenue modifiant la densité de spires par unité de longueur bobinées sur le cylindre. Cet appareil peut, si la classe d'isolation des bobinages le permet, travailler à des températures élevées car il n'y a pas d'électronique embarquée. On dit qu'il a une résolution infinie car il est capable de détecter des déplacements infimes. Sa finesse est très grande car le noyau, dont la masse peut être très petite, ne touche pas les bobinages. Ce dernier point garantit aussi une très grande fiabilité puisqu'il ne peut s'user. Il existe des transformateurs différentiels qui permettent la mesure des déplacements angulaires. Toutes ces propriétés font qu'on le trouve intégré dans un grand nombre de capteurs destinés à la mesure de grandeurs physiques qui peuvent être converties en un déplacement. Dans le cas de

la mesure de grandeurs dynamiques, il faut s'assurer que le spectre du signal s'éteint une décade en dessous de la pulsation d'excitation.

## 2.2. Modèle mathématique.

On néglige le couplage capacitif qui existe entre les enroulements et entre spires, et on admet donc par le même fait que le modèle obtenu ne permettra pas l'étude dans le domaine des hautes fréquences où le couplage capacitif est grand . A partir du schéma électrique de la figure 7, on peut écrire les équations suivantes:

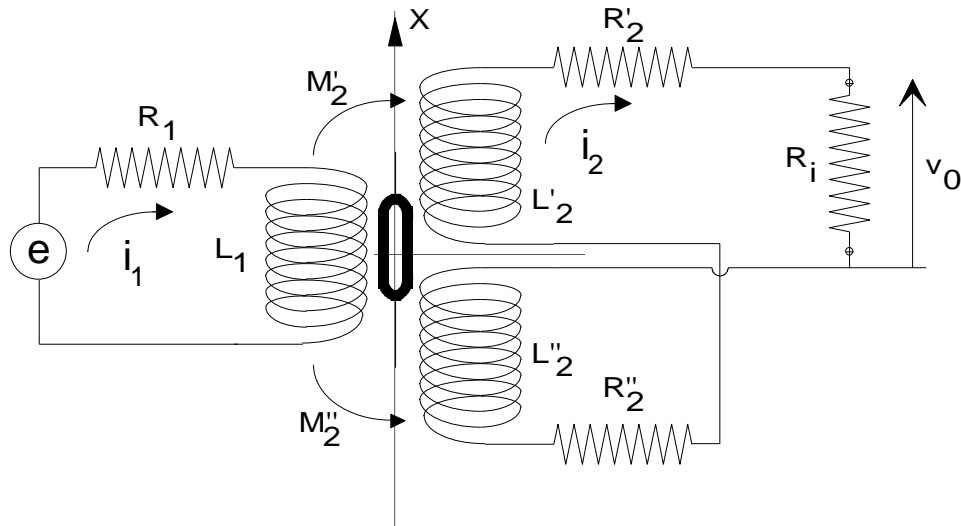


Figure 7

Au primaire:

$$e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + (M'_2(x) - M''_2(x)) \frac{di_2}{dt}$$

Au secondaire:

$$(M'_2(x) - M''_2(x)) \frac{di_1}{dt} = (L'_2 + L''_2) \frac{di_2}{dt} + (R'_2 + R''_2 + R_i) i_2$$

Au voltmètre:

$$v_0 = R_i i_2$$

Si on prend la transformée de Laplace sur les deux membres de ces trois équations, et en admettant que les conditions initiales sont nulles, il vient:

$$\begin{aligned} E(s) &= R_1 I_1(s) + L_1 s I_1(s) + (M'_2(x) - M''_2(x)) s I_2(s) \\ (M'_2(x) - M''_2(x)) s I_1(s) &= (L'_2 + L''_2) s I_2(s) + (R'_2 + R''_2 + R_i) I_2(s) \\ V_0(s) &= R_i I_2(s) \end{aligned}$$

Si on élimine par substitutions successives les courants  $I_1(s)$  et  $I_2(s)$  pour ne retenir que la tension aux bornes du voltmètre  $V_0(s)$ , il vient:

$$V_0(s) = \frac{(M_2'(x) - M_2''(x))R_i E(s)s}{(M_2'(x) - M_2''(x))^2 s^2 + [(L_2' + L_2'')s + (R_2' + R_2'' + R_i)](R_1 + sL_1)}$$

Si on divise numérateur et dénominateur par  $R_i$ , il vient:

$$V_0(s) = \frac{(M_2'(x) - M_2''(x))E(s)s}{\frac{(M_2'(x) - M_2''(x))^2 s^2}{R_i} + \left[ \frac{(L_2' + L_2'')s + (R_2' + R_2'' + R_i)}{R_i} \right] (R_1 + sL_1)}$$

qui peut aussi s'écrire

$$V_0(s) = \frac{(M_2'(x) - M_2''(x))E(s)s}{\frac{(M_2'(x) - M_2''(x))^2 s^2}{R_i} + \left[ \frac{(L_2' + L_2'')s}{R_i} + \left( \frac{(R_2' + R_2'')}{R_i} + 1 \right) \right] (R_1 + L_1 s)}$$

Cette dernière expression montre que si la résistance d'entrée du voltmètre est importante comparée aux résistances et impédances l'expression se simplifie et devient

$$V_0(s) = \frac{(M_2'(x) - M_2''(x))E(s)s}{(R_1 + L_1 s)}$$

Il faut remarquer cette l'hypothèse a pour effet de laisser l'ordre du polynôme en s du numérateur inchangé. Par contre, l'ordre du polynôme du dénominateur a diminué de une unité, il est passé de deux à un. Ceci indique que plus la fréquence est élevée, moins le modèle représentera la réalité.

Dans cette dernière expression, le déplacement n'apparaît pas de manière explicite. Si on développe les inductances mutuelles  $M_2'$  et  $M_2''$  en série de Taylor on trouve

$$M(x) = M(0) + ax + bx^2 + cx^3 \dots$$

Si l'inductance  $M_2'$  croît avec x, l'inductance  $M_2''$  décroît avec x puisqu'elle croît avec -x et donc

$$M_2'(x) = M(0) + ax + bx^2 + cx^3 \dots$$

$M_2''(-x) = M(0) + a(-x) + b(-x)^2 + c(-x)^3 \dots = M(0) - ax + bx^2 - cx^3 \dots$  La différence des inductances mutuelles s'exprime donc par

$$M_2'(x) - M_2''(x) = 2ax + 0x^2 + 2cx^3 \dots$$

Cette équation montre que la série ne contient plus de termes pairs. Cette propriété explique l'excellente linéarité du transformateur différentiel.

Enfin si on admet que l'influence des termes d'ordre supérieur à deux est négligeable, ce qui est obtenu constructivement par une répartition des spires des bobinages secondaire non-uniforme, il vient

$$V_0(s) = \frac{2axE(s)s}{(R_1 + L_1s)} \text{ qui peut être réécrite sous la forme}$$

$$\frac{V_0(s)}{xE(s)} = \frac{\left(\frac{V_0(s)}{E(s)}\right)}{x} = \frac{2as}{(R_1 + L_1s)} = S(s)$$

Cette expression montre que la sensibilité de la tension  $v_0$  au déplacement  $x$  du noyau du transformateur différentiel croît proportionnellement avec la tension d'alimentation. C'est pour cette raison qu'on l'exprime en millivolts par volt d'alimentation et par millimètre de déplacement.

Une des propriétés des fonctions de transfert est de permettre un calcul rapide de la réponse en régime sinusoïdal établi <sup>3</sup>. Il suffit pour cela de remplacer la variable complexe  $s$  par  $j\omega$ . Si on effectue cette opération, il vient:

$$S(j\omega) = \frac{2aj\omega}{(R_1 + L_1j\omega)}$$

Le transformateur différentiel joue donc, relativement à la tension d'alimentation, le rôle d'un opérateur complexe qui modifie l'amplitude et la phase du signal sinusoïdal appliqué au primaire. Cette dernière expression montre qu'il est dérivateur dans le domaine des basses fréquences et un simple gain en moyennes et hautes fréquences. Cette dernière conclusion correcte du point de vue théorique ne peut être validée en pratique car au-delà d'une certaine fréquence, l'hypothèse d'impédance infinie du voltmètre, n'est plus respectée. Le transformateur différentiel perd alors en sensibilité dans le domaine haute fréquence. Sa sensibilité est nulle pour une pulsation nulle et nulle pour une pulsation tendant vers l'infini.

Figure 8

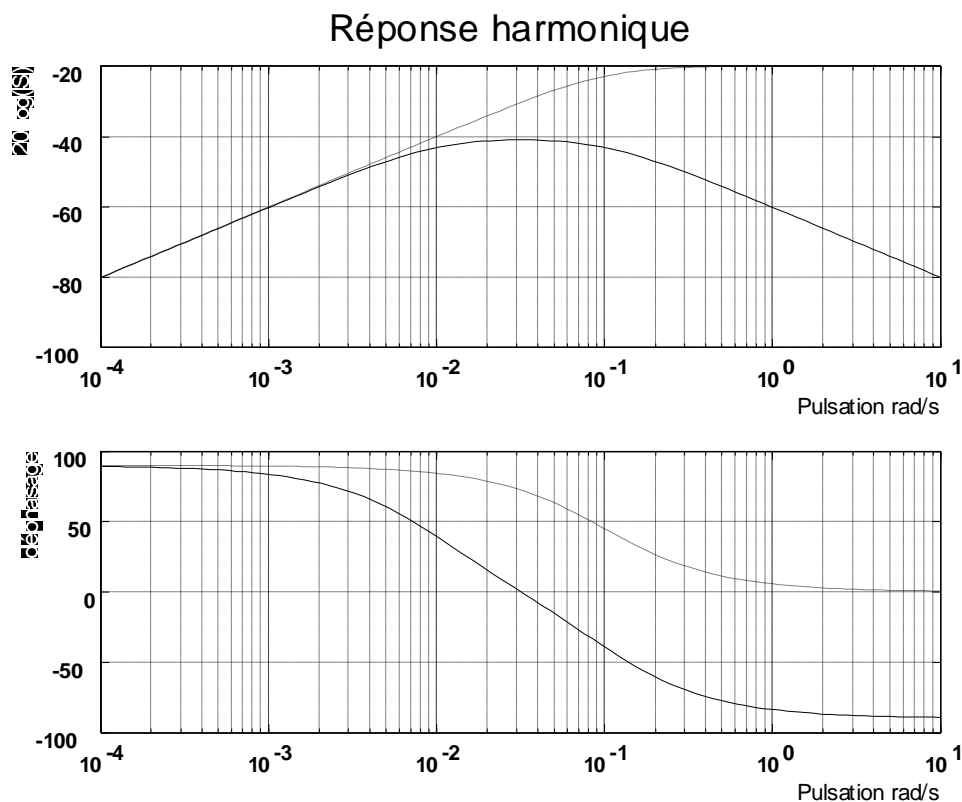
---

<sup>3</sup> dite aussi réponse harmonique

La figure 8 montre l'allure du diagramme de Bode du système  $S(s)$  pour les deux cas.

$$S(s) = \frac{1}{10s + 1} \quad S(s) = \frac{1}{(10s + 1)(100s + 1)}$$

Figure 9



Il montre qu'il existe un domaine de fréquence pour lequel la sensibilité est maximale et ne varie pas. C'est à cette pulsation d'excitation que le constructeur recommande d'alimenter l'appareil car une légère dérive de fréquence de l'oscillateur n'influencera pas la mesure <sup>4</sup>.

La modélisation du transformateur permet d'étudier comment la sensibilité varie avec la fréquence. C'est particulièrement utile ici car le relevé de la réponse harmonique, en une dizaine de points, est équivalente à un relevé d'une infinité de caractéristiques en V (tension-déplacement) à fréquence constante.

### 3. Inductance propre

Ce principe de mesure est fréquemment utilisé dans la construction des capteurs de pression pour mesurer la déformation d'une membrane.

---

<sup>4</sup> Voir maîtrise des grandeurs d'influence II candidature.

La réluctance d'un circuit magnétique constitué de k composants s'exprime par

$$R = \sum_{i=1}^k \frac{L_i}{\mu_i S_i}$$

Considérons le circuit magnétique représenté à la figure 10.

Une partie du circuit, de longueur  $L_f$  et de section  $S_f$ , est réalisée avec un matériau ferromagnétique la seconde partie constitue l'entrefer de longueur  $L_a = 2x$  et de section  $S_a$ . La réluctance de ce circuit s'exprime par

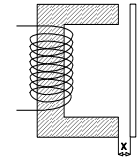


Figure 10

$$R = \frac{L_f}{\mu_f S_f} + \frac{L_a}{\mu_0 S_a}$$

Pour simplifier l'analyse, on admet que l'épanouissement du flux à l'entrefer est nul, c'est-à-dire  $S_a = S_f = S$ .

Or  $\mu_f = \mu_0 \mu_r$ , on peut donc écrire

$$R = \frac{L_a}{\mu_0 S} \left( \frac{L_f}{L_a \mu_r} + 1 \right) \cong \frac{L_a}{\mu_0 S}$$

car la perméabilité du circuit ferromagnétique est grande comparée à celle de l'entrefer.

L'inductance propre s'exprime par  $L = \frac{n^2}{R}$  et la longueur de l'entrefer vaut  $2x$ , il vient donc

$$L = \frac{n^2}{R} = \frac{n^2 \mu_0 S}{2x}$$

Cette relation montre que l'inductance propre du circuit varie avec le déplacement  $x$  suivant un hyperbole équilatère.

En pratique, dans un but de linéarisation, on réalise le montage différentiel de la figure 11.

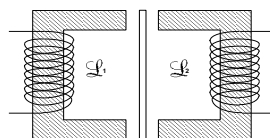


Figure 11

Enfin, pour traduire les variations des inductances  $L_1$  et  $L_2$  en variations de tension, on utilise, comme le montre la figure **Erreur ! Signet non défini.**, un pont alimenté par une tension sinusoïdale.



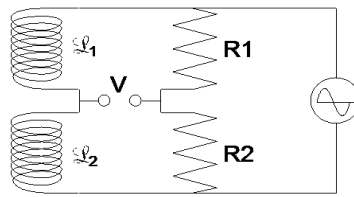


Figure 12

#### 4. Méthode capacitive

La capacité d'un condensateur est fonction de la distance des armatures et de leur surface. Dans le cas du condensateur plan représenté à la figure 13, elle s'exprime par  $c = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{x}$ .

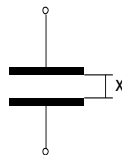


Figure 13

On rencontre en pratique des capteurs qui exploitent ce principe soit en modifiant la surface des armatures, auquel cas la traduction du déplacement en variation capacité est linéaire, soit en modifiant la distance entre les armatures. Dans ce deuxième cas, la relation qui lie la capacité au déplacement est non-linéaire, c'est une hyperbole équilatère. La figure **Erreur ! Signet non défini.** montre un capteur capacitif de déplacement angulaire. Les armatures constituées par deux plaques métalliques maintenues à une distance constante tournent l'une par rapport à l'autre. La surface du condensateur varie linéairement avec le déplacement angulaire  $\alpha$ , la capacité du condensateur varie donc aussi proportionnellement à l'angle  $\alpha$ .

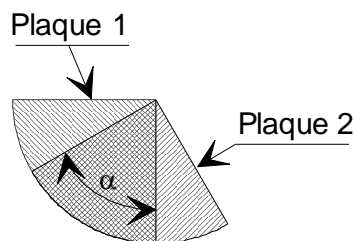


Figure 14

Pour traduire la variation de capacité en variation de tension, on emploie un pont de mesure.

La figure **Erreur ! Signet non défini.** montre le schéma d'un capteur de pression différentielle très répandu qui emploie le transducteur capacitif pour traduire

les déformations de la membrane de mesure qui constitue une armature commune à deux condensateurs.

On peut y voir des membranes de séparation. Elles permettent de remplir les cavités où se trouvent les condensateurs de mesure et donc de garantir une permittivité diélectrique constante quel que soit le fluide appliqué aux orifices notés  $p_1$  et  $p_2$ .

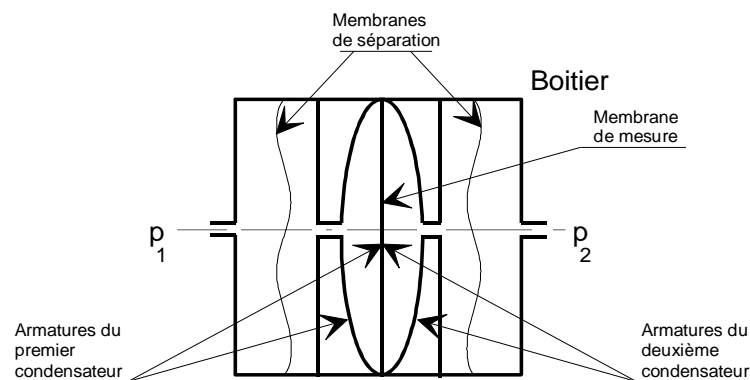


Figure 15

Ce type d'appareil permet la mesure de faibles pressions différentielles de l'ordre de quelques dizaines de millibars malgré des pressions statiques élevées de plusieurs dizaines voir centaines de bars appliquées aux entrées. On l'emploie, associé à un organe déprimogène, pour la mesure des débits, mais aussi en mesure indirecte des niveaux <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Exemple du niveau ballon donné au cours.

## DEBITMETRIE

# Débitmètre à orifice déprimogène

## Principe de fonctionnement.

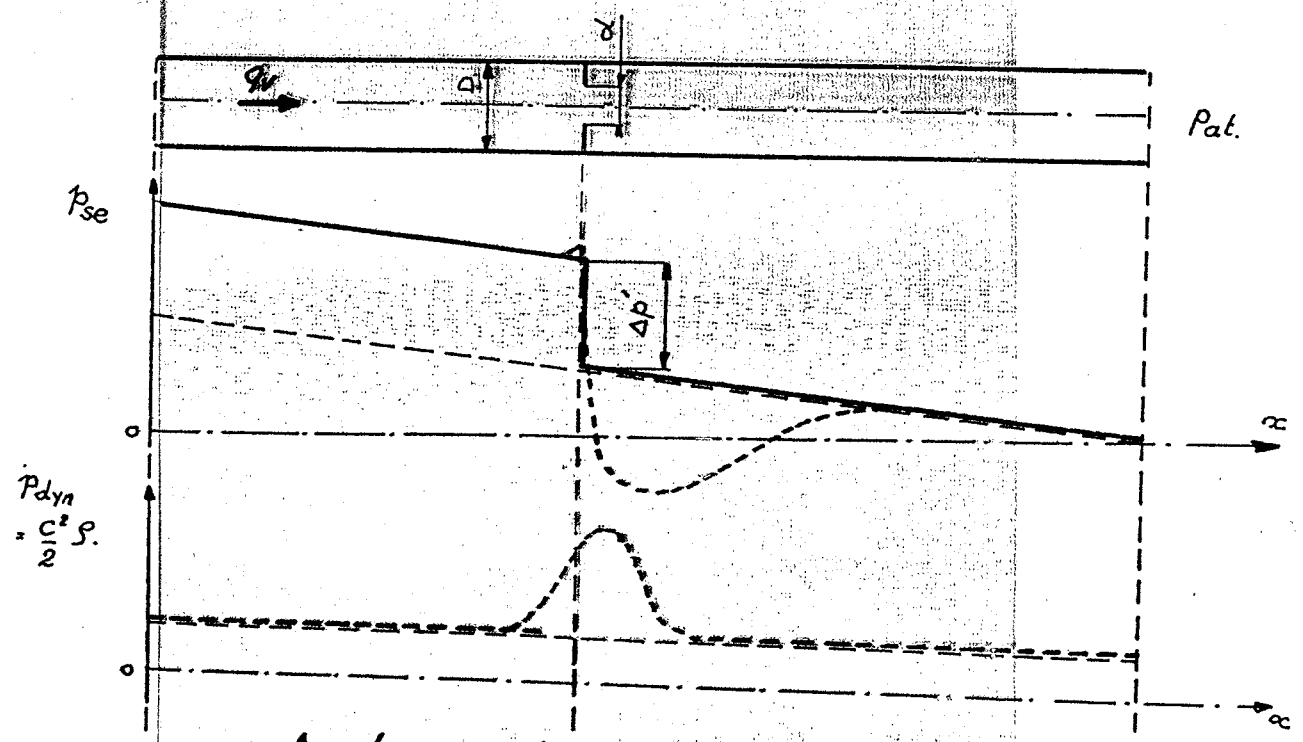
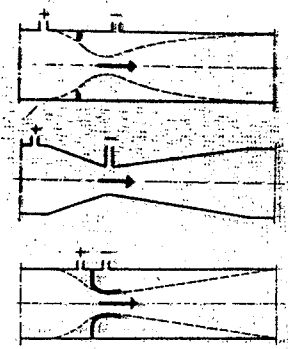
Créer une singularité, il en résulte une perte de charge et/ou une augmentation de vitesse.

$$\frac{\Delta p}{S} = K q_v^2$$

- Diaphragme.

- Venturi.

- Tuyère.



Analyse idéalisée à  $q_v = \text{constante}$ .

----- Sans diaphragme.

—— Chute de pression idéalisée avec diaphragme.

----- Cas réel.

Bernoulli.

$$H_1 = H_2$$

$H$  = Charge en  $\frac{m^2}{s^2}$  ou  $\frac{J}{kg}$

C'est une énergie spécifique.

$$H = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{c_2^2}{2}$$

$$z_1 = z_2.$$

incompressible.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2}$$

Si  $c$  croît,  $c_2 > c_1$   $p_2 < p_1$

En pratique.  $H_1 = H_2 + \sum f_{12}$ .

Expression normalisée ISO 5167 1980.

$$q_v = CE S_d \varepsilon \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho_1}}$$

Pour un diaphragme.

$$C = \alpha \sqrt{1 - \beta^4}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^4}}$$

$$\beta = \frac{d}{D}$$

$\alpha$ : Coefficient de débit.

$C$ : Coefficient de décharge.

$E$ : Coefficient de vitesse d'approche.

$\varepsilon$ : Coefficient de détente.

$$CE = \alpha.$$

$\varepsilon = 1$  pour les liquides.

$$\Delta p' \approx \frac{1 - \alpha \beta^2}{1 + \alpha \beta^2} \Delta p.$$

## Influence de la viscosité et de la position des prises de pression

### Prises de pression

- dans les angles
- à la bride -1" , +1"
- vena contracta 0 , D/2

### Formule de Stolz (EDF).

$$C = 0,5959 + 0,0312 \beta^{2,1} - 0,184 \beta^8 \\ + 0,0029 \beta^{2,5} * \left( \frac{10^6}{Re_D} \right)^{0,75} + C_0 L_1 \beta^4 (1-\beta^4)^{-1} \\ - 0,0337 L_2' \beta^3.$$

$C_0$  ,  $L_1$  et  $L_2'$  sont fonction du type de prise de pression.

Il existe des valeurs limites inférieures et supérieures pour  $Re_D$ .

### Influence de la rugosité

Limite supérieure à ne pas dépasser.

Limite =  $f\left(\frac{R}{D}, \text{prises}\right)$ . sur 10 D en amont.

$R$  = rugosité absolue en mm.

### Coût à l'exploitation

$$\Delta p' = \frac{1 - \alpha \beta^2}{1 + \alpha \beta^2} \Delta p. \quad P_{vi} = q_v \Delta p' \text{ en watts.}$$

Exemple: mesure d'un débit d'air à 20°C. et pat.

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3.$$

$$D = 0,3 \text{ m} \quad \beta = 0,5 \quad q_v = 1 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Re = 280.000 \quad C = 0,6 \quad \alpha = 0,62$$

$$\Delta p = 5000 \text{ Pa} \quad \Delta p' = 5000 \times 0,73 = 3650 \text{ Pa}$$

$$\text{Puissance consommée} \quad P = 3650 \text{ W}$$

$$\text{Si } q_v = 0,5 \text{ m}^3/\text{s} \quad P = \frac{3650}{2} = 1825 \text{ W}.$$

### Remarques

- Corrections en pression et température.
  - mesure d'un débit volumique.
  - Calcul itératif. qui converge rapidement.
  - Dispositif normalisé.
  - Si les mesures sont parfaites, précision 1%.
- Si la norme est respectée!

- Longueurs droites  $10D < L_d < 80D$  amont

$6D < L_d < 8D$  aval.

$$L_d = f(\beta, \text{Singularités à l'amont})$$

Redresseurs normalisés.

$$Q = S_d d \varepsilon \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

## Caractéristiques métrologiques.

- Bonne précision. (1%).
- Pas de calibration.
- Normalisé au niveau international.
- Perte de charge importante.
- Sensible aux longueurs droites.
- faible étendue de mesure.
- Sensible aux fluides chargés  
aux bulles d'air.
- Correction nécessaire en température.  
en pression.
- Normalisation exigeante.
- Influence de la viscosité  $\alpha = f(\beta, Re)$ .
- Régime d'écoulement turbulent.
- Non linéaire



# Débitmètre à section variable.

## Principe. de fonctionnement

Equilibre d'un flotteur dans un champ de vitesses uniforme.

Forces appliquées au flotteur

Archimède :  $\rho V g$   $\uparrow$

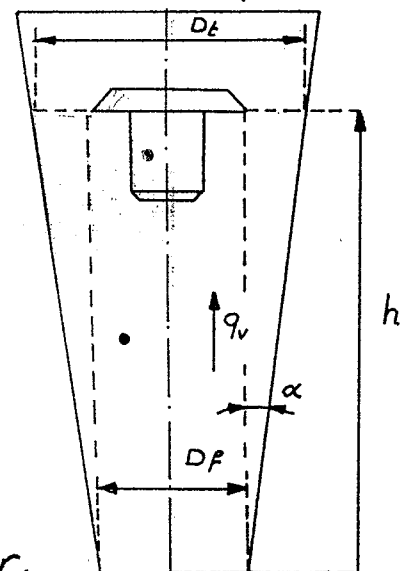
hydrodynamique :  $C_x S_f \rho \frac{C^2}{2}$   $\uparrow$

pesanteur :  $\rho_f g V$

$$\sum F_i = 0.$$

$$C = \sqrt{\frac{2gV}{C_x S_f}} \sqrt{\frac{\rho_f - \rho}{\rho}}$$

$C$ : vitesse d'équilibre du flotteur.



Conduit  $D_t = D_f + K h$   $K = (\tan \alpha) \cdot 2$

$$q_v = \frac{\pi}{4} (D_t^2 - D_f^2) C$$

$$q_v = \underbrace{[2Kh]}_1 + \underbrace{\frac{K^2 h^2}{D_f}}_2 \sqrt{\frac{gV\pi}{2C_x} \left( \frac{\rho_f}{\rho} - 1 \right)}$$

Constructivement  $1 \gg 2$ .

$$q_v \approx 2Kh \sqrt{\frac{gV\pi}{2C_x} \left( \frac{\rho_f}{\rho} - 1 \right)}$$

$$h = q_v \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{2C_x}{g\pi V} \frac{\rho}{\rho_f - \rho}}$$

$$h = S_v q_v$$

$$h = S_v q_v \quad S_v = \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{2C_x}{g\pi v} \frac{S}{(S_f - S)}}$$

$S_v$  = Sensibilité de l'indication au débit volumique.

$$S_v \left[ \frac{\frac{m}{m^3} \cdot s}{\frac{m^3}{m^3}} \right] = \left[ \frac{s}{m^2} \right]$$

$$q_m = q_v S$$

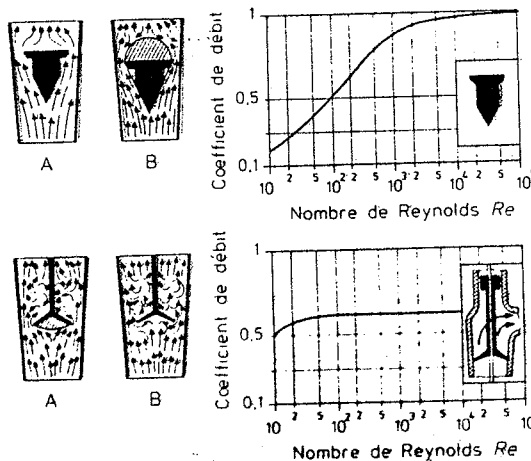
donne  $h = S_m q_m \quad S_m = \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{2C_x}{g\pi v (S_f - S) S}}$

$S_m$  = Sensibilité de l'indication au débit masse.

Conclusions:

$S_v$  affectée par

- Variations de  $S$  fluide  $S = f(p, t)$
- Variations de  $S_f$  flotteur  $S_f = f(t)$   
effet utile ! changement d'étendue.
- Variations de viscosité  $C_x = f(Re)$   
choix du flotteur !



## Facteurs de correction.

### Liquides

$$h_e = S_e q_{ve} \quad \text{Conditions d'étalonnage.}$$

$$h_r = S_r q_{vr} \quad \text{Conditions réelles d'utilisation.}$$

$$\text{Pour une indication identique } h_e = h_r = h$$

$$q_{vr} = q_{ve} \frac{S_e}{S_r} \quad q_{vr} = q_{ve} \cdot C_v$$

$$C_v = \sqrt{\frac{(S_p - S_e) S_r}{S_e (S_p - S_r)}}$$

### Choix du "bon" Flotteur

Dans le cas de mesure du débit MASSE.

$$S_m = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{2 C_x}{g \pi v (S_p - S) S}}$$

$$\frac{\partial S_m}{\partial S} = - S_m \frac{C_x (S_p - 2S)}{g \pi v}$$

s'annule pour  $S_p = 2S$ .

## Cas des gaz

Dans l'équilibre du flotteur, on néglige la poussée d'Archimède.

$$C = \sqrt{\frac{2 S_f g V}{C_x S_f S}}$$

$$h \approx q_v \frac{1}{2K} \sqrt{\frac{2 C_x S}{g V \pi S_f}}$$

$$h = S_{vg} q_v$$

$S_{vg}$  = Sensibilité de l'indication au débit volumique gaz.

### Facteurs de correction.

$$h_e = S_{vge} q_{ve} \quad \text{Conditions d'étalonnage.}$$

$$h_r = S_{vgr} q_{vr} \quad \text{Conditions réelles.}$$

$$h_r = h_e \quad \text{indications identiques.}$$

$$\frac{q_{vr}}{q_{ve}} = \sqrt{\frac{S_e}{S_r}} = C_{vg} = \frac{S_{vge}}{S_{vgr}}$$

$$S_e = f(p_e, t_e) \quad \text{Conditions d'étalonnage}$$

$$S_r = f(p_r, t_r) \quad \text{Conditions réelles.}$$

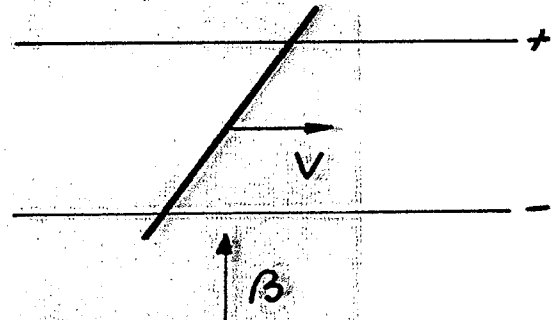
## Caractéristiques métrologiques.

- Linéaire.
- peu de longueurs droites.
- perte de charge faible.
- Calibration ou courbe d'étalonnage.
- Sensible aux variations de pression  
de température  
de viscosité.
- Section remplie.
- fluide non chargé.
- Sensible aux bulles de gaz.
- précision moyenne.
- Changement de gamme possible.
- bonne étendue de mesure.

# Débitmètre électromagnétique.

Un conducteur électrique de longueur  $L$ , animé d'une vitesse  $v$  et soumis à un champ d'induction électromagnétique  $B$  est le siège d'une f.e.m

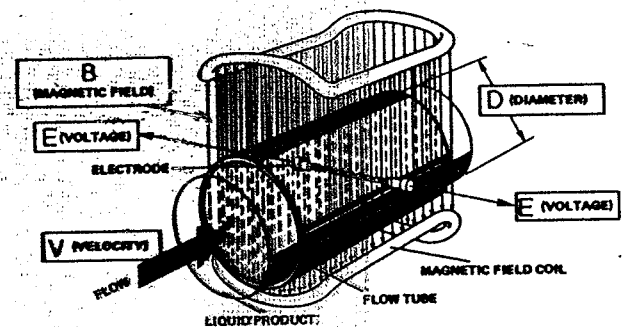
$$E = BLV.$$



## Cas du débitmètre.

Si  $B$  est uniforme dans tout l'espace

Si le profil de l'écoulement est axisymétrique



$$E = \frac{4B}{\pi D} Q = BDVm.$$

$Q$ : Débit volumique [ $m^3/s$ ].

$B$ : Induction électromagnétique [ $T$ ].

$D$ : diamètre du conduit [ $m$ ].

$$\beta \approx 0,02 \text{ T} \quad V_m = 1 \text{ m/s} \quad D = 0,2 \text{ m}$$

$$E = 0,004 \text{ V.}$$

## Evolution technologique.

### 1) Excitation en DC.

Problème: Polarisation des électrodes.

tension fonction

- de la nature de l'électrolyte.

- de la température.

- de la nature des électrodes

ordre de grandeur du volt

fluctue lentement.

### 2) Excitation en AC.

On peut facilement séparer la composante utile AC de la tension de polarisation DC.

Mais.

- Couplage inductif

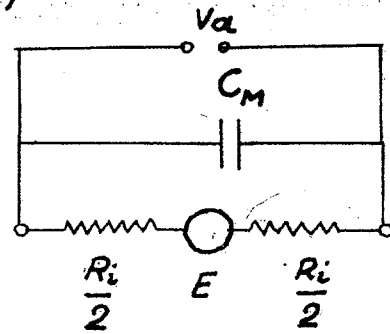
$$e_{pi} = n \frac{d\phi}{dt} = \text{en quadrature} \div \dot{\alpha} \omega_e.$$

$$\phi = \phi_M \sin \omega t \quad e_{pi} = k \phi_M \omega \cos \omega t$$

- Couplage capacitif.

$$e_{pe} \text{ aussi en quadrature.}$$

Shunt capacitif des câbles de liaison.



Solution, diminuer  $\omega$ .

A  $\omega$  donné, si  $R_i$  croît  $V_a \downarrow$ , même à impédance d'entrée de l'amplificateur infinie.

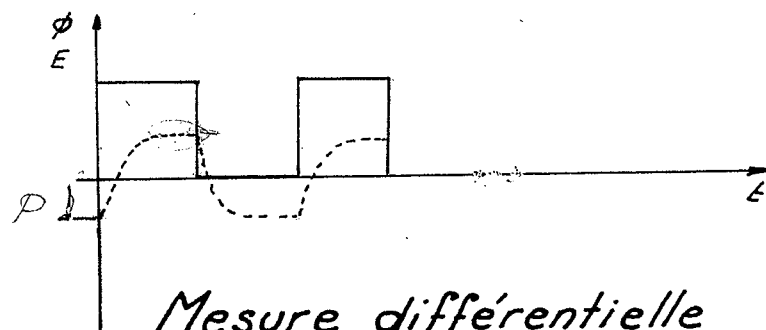
Problème de la salissure des électrodes.

impédance source-masse. (Mode commun).

Le taux de réjection du mode commun de l'ampli est conservé, si les impédances séries sont symétriques.

### 3) Excitation en DC pulsé

- unidirectionnel
- bidirectionnel.

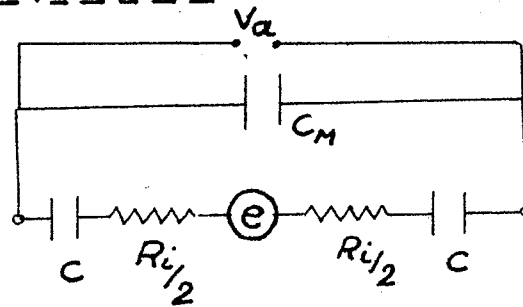


Mesure différentielle

quand  $\Phi = 0$ , on mesure la tension de polarisation qui permet de corriger la mesure à  $\Phi \neq 0$ .



#### 4) Capacitif.



*Permet d'éviter une trop forte dissymétrie des impédances séries et de conserver un très bon taux de réjection du mode commun malgré la salissure des électrodes.*

## Caractéristiques métrologiques.

- Mesure du débit volumique.
- Pas de perte de charge
- Convient pour fluide chargés.
- Exige une conductivité suffisante.
- Mesure indépendante de
  - pression
  - température
  - Viscosité.
- bonne précision 0,5... 1 % du débit.
- bonne étendue de mesure 1.. 10.
- faible longueur droite. (50).
- Limité en température.

## Débitmètres thermiques.

Servent à la mesure de débits de fluides.  
Généralement ils sont appliqués aux gaz.

Le débit est déduit de mesures

- de températures.
- de puissances thermiques.

Il en existe deux grandes classes.

1) A CAPACITE THERMIQUE.

2) A CONVECTION.

Dans le premier cas.

$$P = q_m c_p \Delta \theta.$$

Dans le deuxième cas

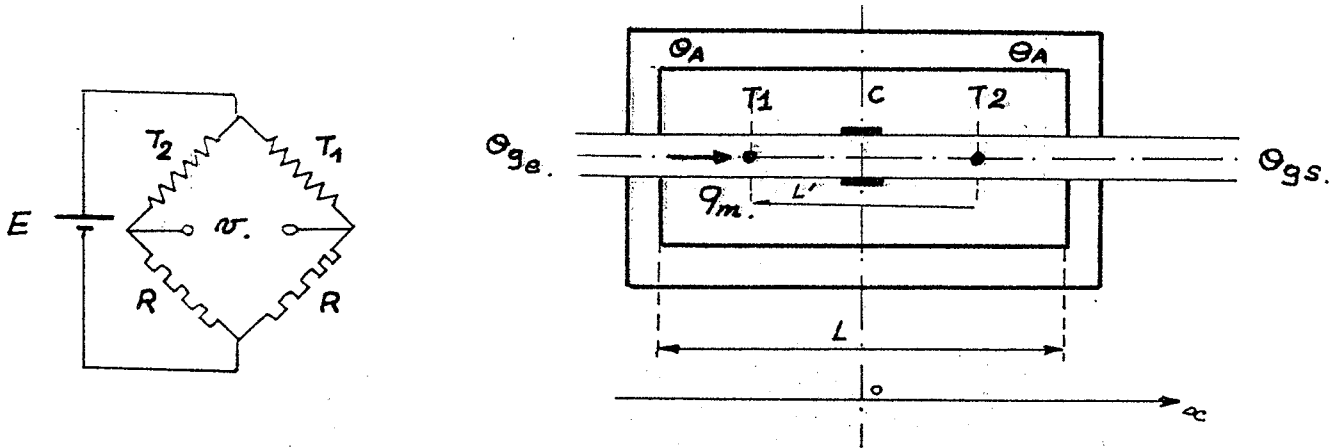
$$P = S \alpha \Delta \theta.$$

$$\alpha = f(Re).$$

$$P = K q_m^{0,8} \Delta \theta. \quad \text{si } Re > 5000.$$

# Débitmètre à capacité thermique

## Schéma de principe.



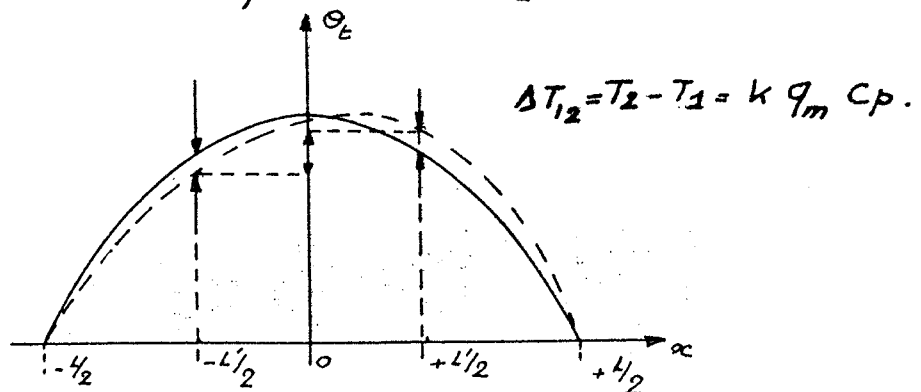
$C$ : élément chauffant, sur le tube.

$T_1, T_2$ : Capteurs de température sur le tube

Si  $q_m = 0$  la puissance de chauffe est dissipée vers l'ambiance de manière symétrique.

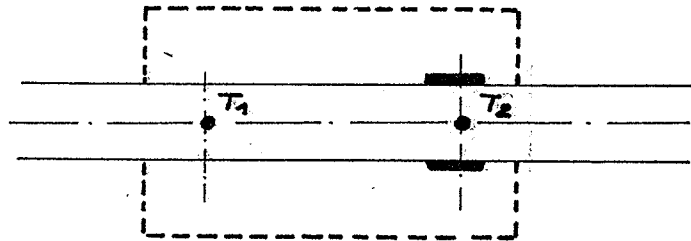
Le profil de température  $T(x)$  est symétrique.  $T_1 = T_2$

Si  $q_m \neq 0$ , le gaz se réchauffe pour  $x < 0$ ; et absorbe une énergie. qu'il restitue au tube en  $x > 0$ .  
Le profil de température se déforme.  $T_1 \downarrow$   $T_2 \uparrow$



# Débitmètre à convection

## Schéma de principe.



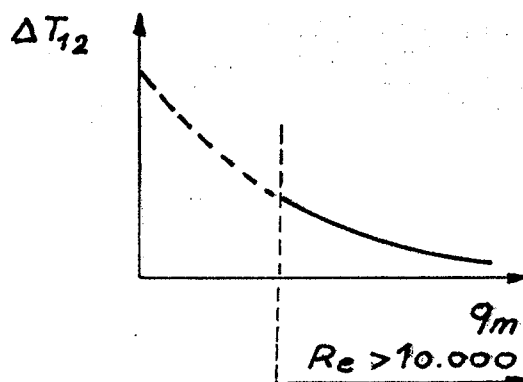
Ici l'enceinte a moins d'importance  
Seul l'échange convectif est pris en compte.

On en rencontre de deux types.

### - A Chauffe constante.

Si  $q_m$  est faible  $\Delta T_{12}$  est grand.

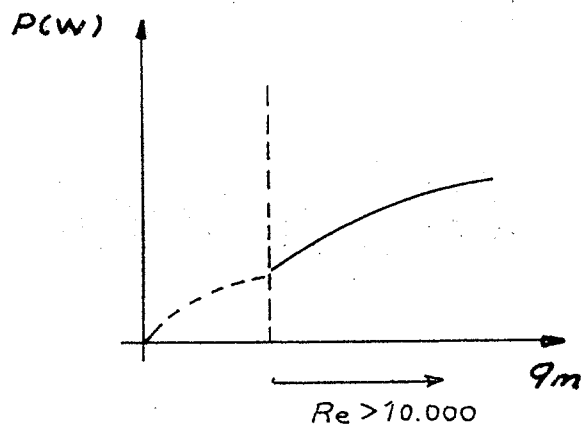
Si  $q_m$  est grand  $\Delta T_{12}$  est faible  
refroidissement par convection.



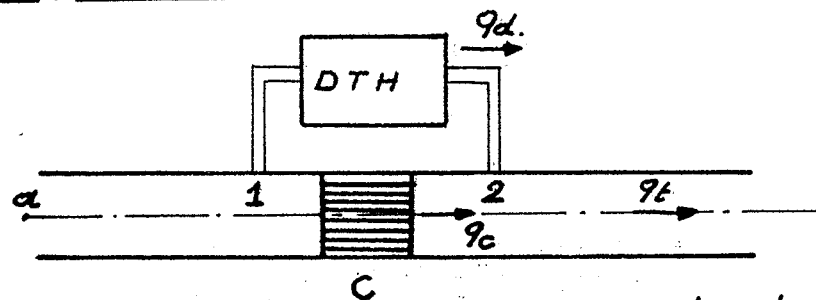
La réponse n'est pas linéaire.

## A chauffe asservie.

On impose une différence de température constante en agissant sur la puissance.



## Adaptateur de débit.



$c = \text{adaptateur.}$

Cas du débitmètre à capacité therm.

$$\Delta p_{12} = k_d q_d$$

$$\Delta p_{12} = k_c q_c$$

$$k_d q_d = k_c q_c$$

$$q_e = \left(1 + \frac{k_d}{k_c}\right) q_d$$

Le régime d'écoulement en  $a$  peut être turbulent.

## Caractéristiques métrologiques

Cas du débitmètre à capacité thermique.

- Mesure du débit masse ( $\dot{q}_m C_p$ )
- Mesure à partir de très faibles débits.
- Grande étendue de mesure (1..30)
- Perte de charge faible.
- Bonne précision.
- Constante de temps. (1...10 s).
- fluide propre et sec.
- Généralement appliqué aux gaz.
- facteur de correction à  $C_p$  indispensable.

# Débitmètre à effet de Coriolis

## Principe de fonctionnement

Le mouvement d'un point peut être décomposé en

- un mouvement d'entraînement.
- un mouvement relatif.

$$\vec{V}_t = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$$\vec{a}_t = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$a_c$  existe si le mouvement d'entraînement est une rotation

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$$

$$|\vec{a}_c| = 2 \omega_e V_r \sin(\omega_e, V_r).$$

orientation : règle du tire-bouchon  
faire tourner  $\vec{\omega}_e$  sur  $\vec{V}_r$  en fermant le plus petit angle.

$\omega_e = \text{Constante}$

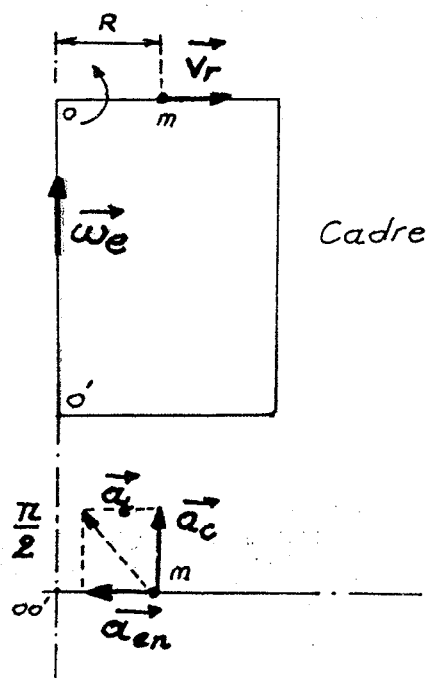
$V_r = \text{Constante}$

$$\vec{a}_{te} = 0.$$

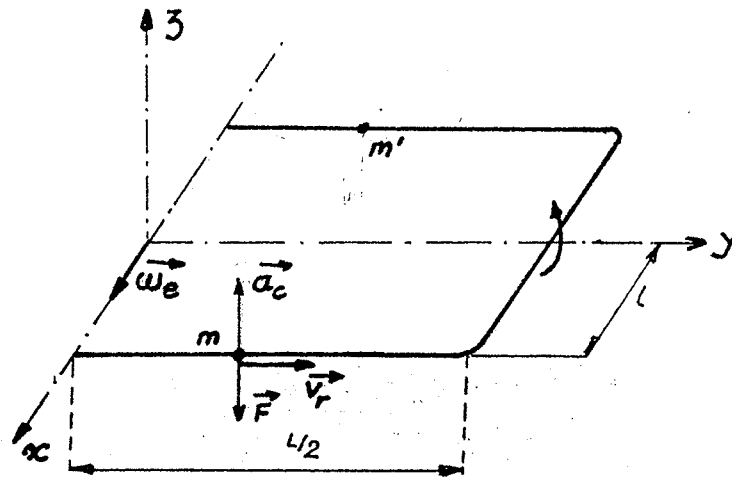
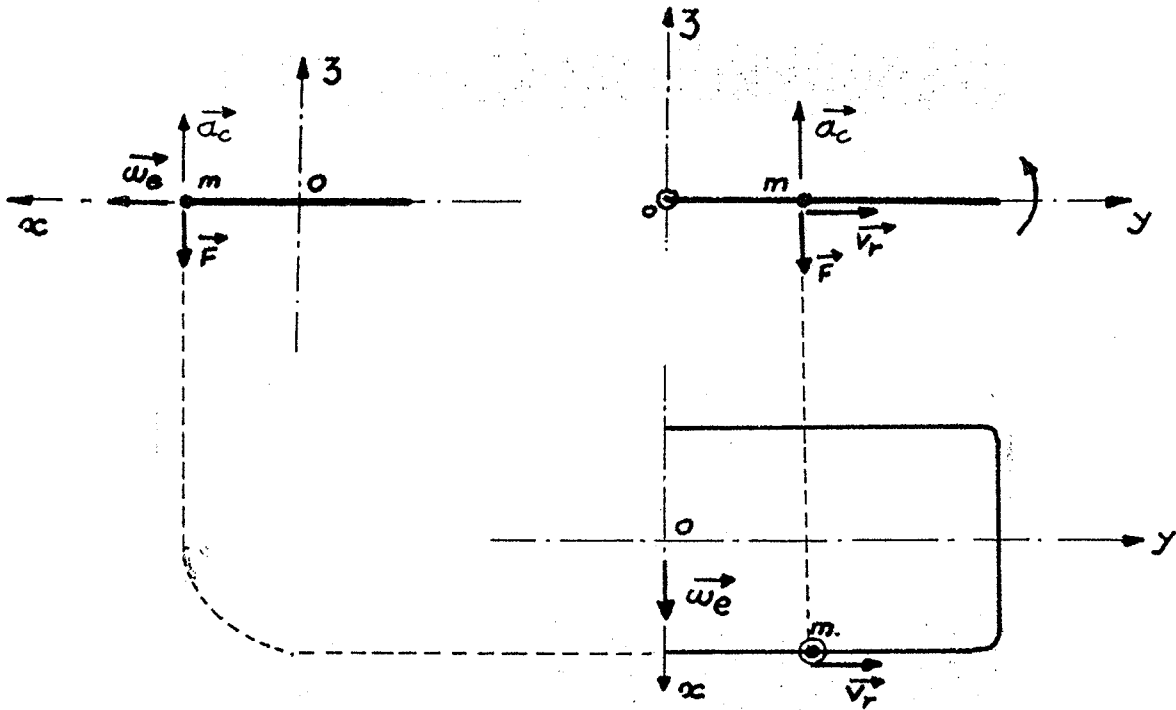
$$a_{ne} = \omega_e^2 R$$

$$\vec{a}_r = 0.$$

$$a_c = 2 \omega_e V_r \sin \frac{\pi}{2}$$







A l'instant considéré, l'extrémité du tube monte

$$z=0 \quad \frac{dz}{dt} \text{ est maximale car } z(t) = z_0 \sin \omega t$$

Si  $q_m$  est uniforme,  $\vec{a}_c$  est identique partout.

La Force  $\vec{F}$  est identique partout.

$$dF = -dm 2\omega_e v = -dy \rho_{xy} 2\omega_e v_{xy}$$

$$\frac{dF}{dy} = -\rho_{xy} 2\omega_e \frac{q_v}{\rho} = -2q_m \omega_e$$

### 3 Sensor Unit

Figure 4 shows the flow tube assembly inside the sensor unit. Within the sensor housing, the drive coil, a magnetic device, converts the signal from the electronics unit into a force to vibrate the flow tubes. The tubes vibrate at their natural frequency in the same manner as a tuning fork. The peak amplitude is less than one tenth of an inch, and they complete a full cycle about 80 times each second.

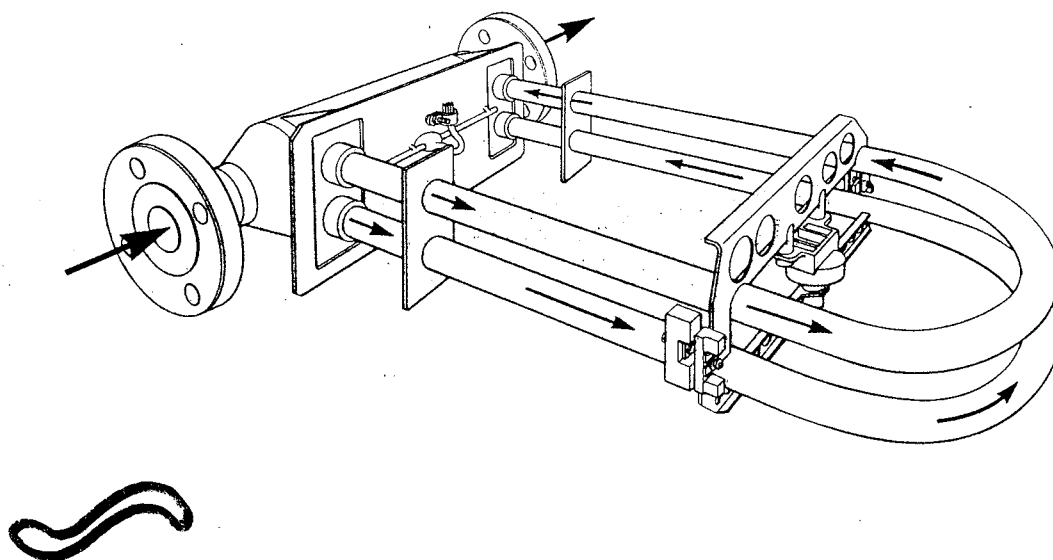
As fluid flows through the tubes, it is forced to take on the vertical movement of the vibrating tubes. The forces of the tube always oppose entering fluid and aid departing fluid. As the fluid accelerates on the inlet side and decelerates on the outlet side, it causes the tubes to twist.

The resisting fluid flow induces a Coriolis force on each side of the tubes. The twist caused by the Coriolis force is a form of gyroscopic precession. Appendix I provides mathematical explanations and detailed information on how the meter uses this Coriolis force to directly measure mass flow rate.

The amount of twist is directly proportional to the mass flow rate of the fluid flowing through the tubes. Position detectors located on each side of the flow tubes are the primary sensing elements for determining the tube twist angle as a function of time. The detectors send this information to the electronics unit, where it is processed and converted into a voltage proportional to mass flow rate.

In addition to the flow tubes, drive coil, and two position detectors, the sensor unit contains a non-intrusive temperature sensor. A resistance temperature detector (RTD) attached to the sensor tubes determines the temperature.

**Figure 4**  
**Flow Tube Assembly**



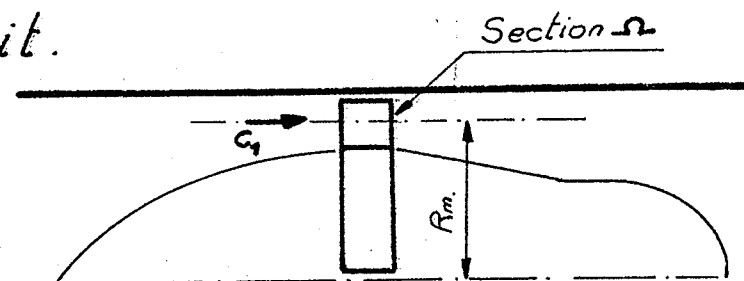
## Caractéristiques métrologiques.

- Débit massique. (Linéaire)
- bonne rangeabilité (-1..10).
- indépendance de la mesure.
  - à la viscosité.
  - à la température.
  - à la pression.
- Perte de charge moyenne.
- Pas de longueurs droites.
- Sensible à de fortes inhomogénéités de la masse volumique.
- Mesure de la masse volumique.
- pas de calibration sur place.
- Sensible aux champs magnétiques.
- Sensible aux vibrations.

# Débitmètre à turbine.

## Principe de la mesure

Moulinet placé dans l'axe d'un conduit.



$C_1$ : Vitesse absolue avant l'entrée dans l'aube.

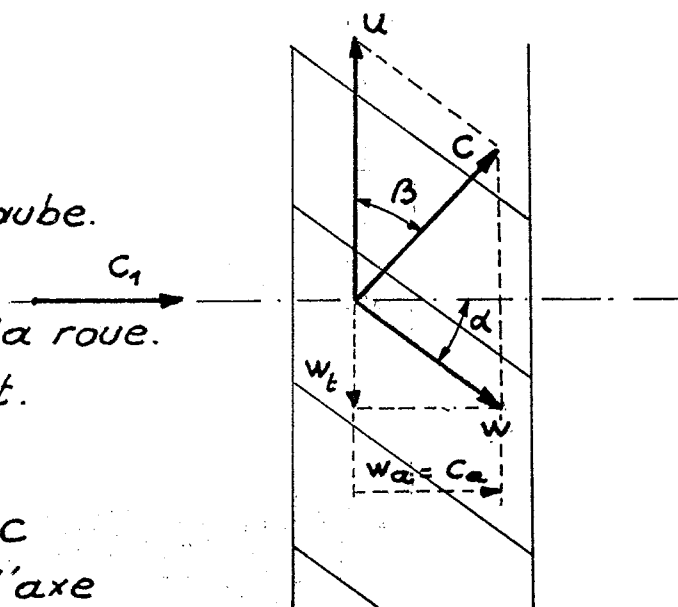
$C$ : Vitesse absolue dans l'aube.

$w$ : Vitesse relative du fluide par rapport à la roue.

$u$ : Vitesse d'entraînement du rayon moyen  $R_m$ .

$\beta$ : angle formé par  $u$  et  $C$

$\alpha$ : angle des ailettes par à l'axe du conduit.



Grille d'aube.

$\Omega$ : Section de passage de la roue.

$S$ : masse volumique du fluide.

$$-M dt = q_m dt R_m (C_t - C_{1t}) \quad C_{1t} = 0$$

$$-M = q_m R_m C_t = q_m R_m (u - w_t) = q_m R_m (\omega R_m - w_a \tan \alpha)$$

$$C_{1a} = C_a = w_a. \quad \text{Conservation du débit.}$$

$$C_a = q_v / \Omega$$

$$\omega = q_v \frac{\tan \alpha}{\Omega R_m} - \frac{M}{q_v S R_m^2}$$

Avec rotor libre

$$\omega = q_v \frac{tg \alpha}{\Omega R_m} - \frac{M}{q_v \Omega R_m^2} \quad (1)$$

Avec rotor bloqué

$$M = q_v^2 R_m \frac{\Omega}{\Omega} tg \alpha. \quad (2)$$

Conclusions et remarques.

- Couple accélérateur  $\div q_v^2 \div \frac{1}{\Omega} \div s$ .
- $\omega \div q_v$  si  $M=0$
- Turbines équilibrées axialement.  $\nabla M$
- Plus la viscosité croît, plus les  $\omega \uparrow$  (vitesse p/r au stator)
- Mouvement de l'indicateur.  $\uparrow M$ .

Transmetteur électrique.

Transmetteur électrique :

A variation de reluctance

- aimant fixe.

$$e = -n \frac{d\phi}{dt} \quad \phi = \frac{F}{\mathcal{R}}$$

fréquence  $\div$  Nombre de pales.

A induction électromagnétique

- aimant mobile

fréquence  $\div$  paires de pôles.  
 $\div$  à la vitesse.

## Caractéristiques métrologiques.

- Sensible aux longueurs droites
- Sensible aux bulles de gaz.
- Ne convient pas pour fluides chargés.
- très bonne précision.
- Perte de charge faible.
- Section remplie.
- Débit volumique.
- indépendance à la masse volumique.
- Linéaire.
- Sensible à la viscosité.
- Pas de calibration sur place.
-

# Débitmètre à ultrasons.

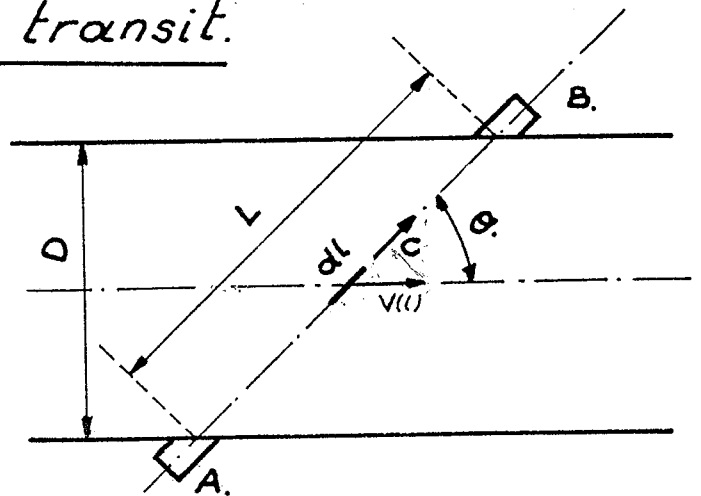
Ultrason = vibration mécanique de fréquence élevée qui se propage de molécule à molécule dans les milieux élastiques.

Production et réception par des éléments piézoélectriques.

## Temps de transit.

$C$ : Vitesse du son dans le milieu.

$V$ : Vitesse du fluide à l'abscisse  $L$ .



## Principe

A est émetteur

$$dt_{AB} = \frac{dl}{C + V(L) \cos \theta}$$

$$t_{AB} = \int_L \frac{dl}{C + V(L) \cos \theta}$$

B est émetteur

$$dt_{BA} = \frac{dl}{C - V(L) \cos \theta}$$

$$t_{BA} = \int_L \frac{dl}{C - V(L) \cos \theta}$$

$$\Delta T = t_{BA} - t_{AB} = \int_L \frac{2 V(L) \cos \theta}{C^2 - V(L)^2 \cos^2 \theta} dl$$

$$C \gg V \quad \Delta T = \int \frac{2 V(L) \cos \theta}{C^2} dl$$

$$V_m = \frac{1}{L} \int V(L) dl.$$

$$\Delta T = \frac{2 V_m L \cos \theta}{c^2} \quad (1)$$

$$C = f(\eta, \rho, T, p)$$

Liquides usuels

$$1000 < C < 1600 \text{ m/s}$$

$$0 < v < 10 \text{ m/s.}$$

$$t_{AB} + t_{BA} = \int_L \frac{2C}{C^2 - v^2(l) \cos^2 \theta} dl$$

$$t_{AB} + t_{BA} = \int_L \frac{2}{C} dl = \frac{2L}{C}$$

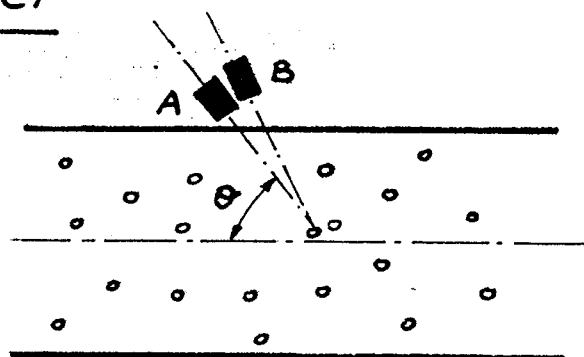
qui portée dans 1 donne.

$$V_m = \frac{2L (t_{BA} - t_{AB})}{\cos \theta (t_{BA} + t_{AB})^2}$$

## Effet Doppler

$f_0$  : fréquence du signal émis en continu par la sonde A.

$f_1$  : fréquence du signal reçu par la sonde B.



$$f_1 = f_0 + 2 \frac{V_m f_0 \cos \theta}{C}$$

$$\Delta f = \frac{2 V_m f_0 \cos \theta}{C} \quad \text{qui est mesurée par la méthode des battements.}$$

Sensibilité à C généralement non compensée.



## Caractéristiques métrologiques

- Mesure du débit volumique.
- Seul débitmètre portable
- Conduit de grand diamètre.
- Pas de perte de charge.
- Indépendance de la mesure à
  - la viscosité.
  - la température.
  - la pression.
- fluide homogène.
- bonne étendue de mesure (1..10)
- bonne précision (1 %).
- longueurs droites (faible).
- Influence du profil d'écoulement.
- Section remplie.

## Débitmètre à tourbillons: VORTEX.

Lorsqu'un fluide en mouvement rencontre un obstacle, il se forme à la surface de celui-ci une couche d'écoulement laminaire qui se décolle à l'arrière de l'obstacle et s'enroule en tourbillons.

La fréquence de décollement des tourbillons est proportionnelle à la vitesse d'approche.

$$f = \frac{S_t V}{D}$$

$D$ : diamètre de l'obstacle en mm.

$S_t$ : Nombre de Strouhal sans dimension.

$V$ : Vitesse d'approche en m/s.

$f$ : Fréquence de décollement en Hz.

$S_t = \text{Constante}$  pour  $3 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$ .

$$S_t = 0,185 = \frac{f D}{V}$$



Détection par - Thermistances.

- ultrasons.

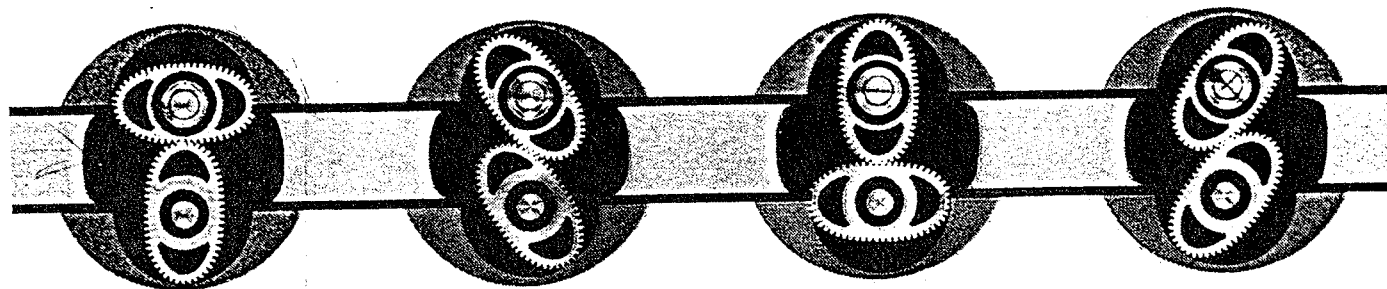
- Jauges de déformations.

- Capacité variable.

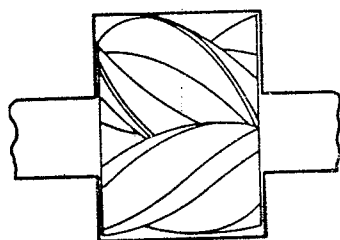
## Caractéristiques métrologiques.

- Accepte les fluides chargés.
- Accepte les surdébits.
- Information digitale à la source
- Pas de calibration sur place.
- Grande plage de mesure. (1..20)
- faible perte de charge.
- Sensible aux bulles de gaz.
- Section remplie.
- Inapplicable à des fluides très visqueux.  
à des petits débits ( $D > 25\text{mm}$ )
- Bonne précision.
- Réponse linéaire.
- débit volumique.

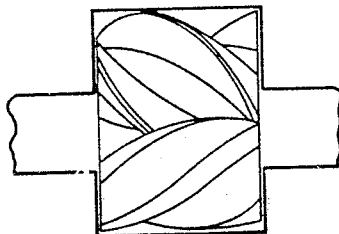
# OVAL GEAR



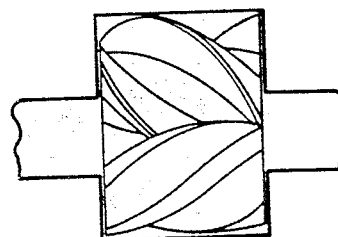
# BI-ROTOR



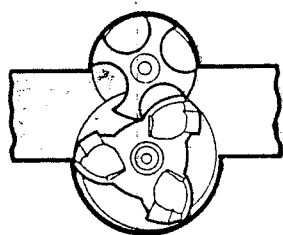
Liquid Intake



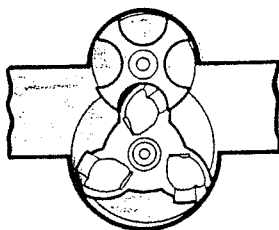
Liquid Transition



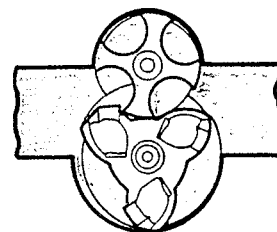
Liquid Outlet



Liquid Intake

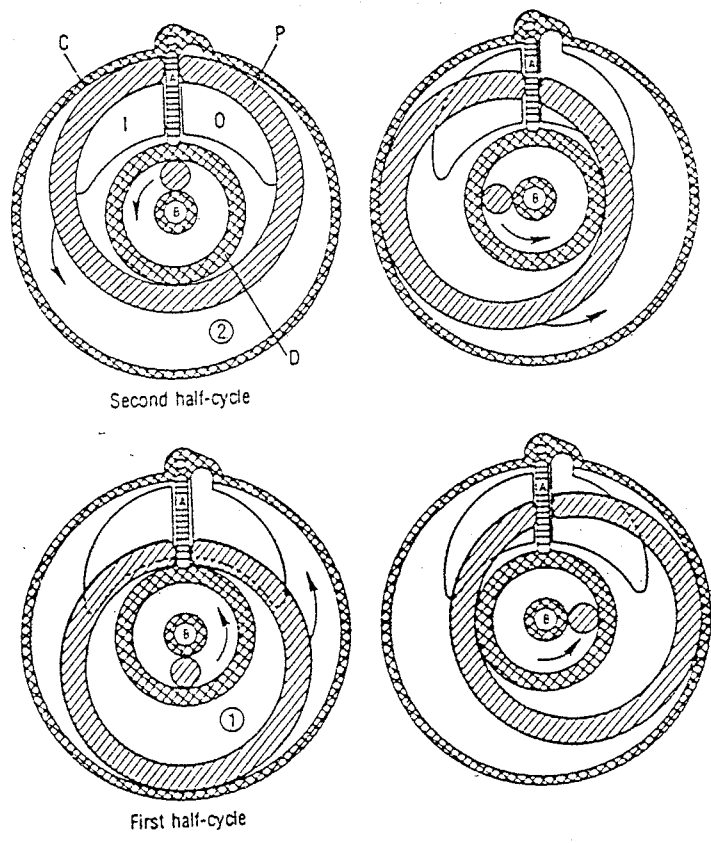


Liquid Transition

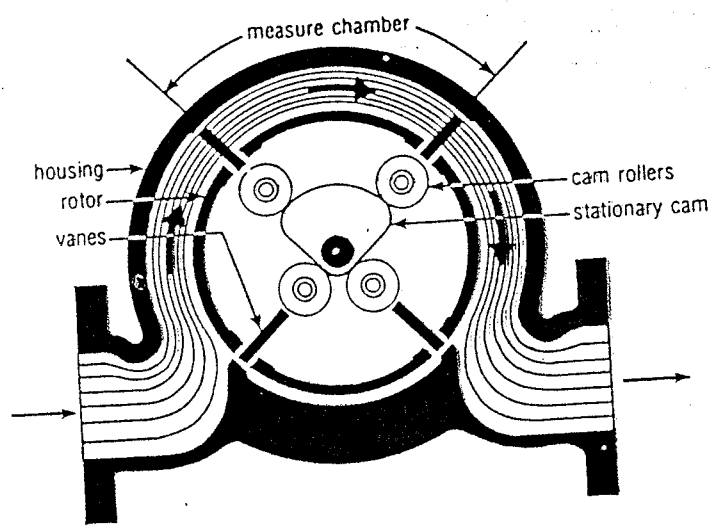


Liquid Outlet

# OSCILLATING PISTON



# SLIDING VANE



## Sélection des débitmètres.

	Liquides propres	Liquides Chargés	Liquides Visqueux	Gaz ou Vapeur	Vapeur d'eau	Temp Maxi (°C)	Pression Maxi (Bars)	Chute de Pression	Longueur Amont en $\Phi$	Rangeabilité	Etalonnage sur site	Précision typique en %
Compteurs						300	100	élevée	0	15:1	oui	0.5 D
diaphragme						300	trans	moyenne	10 à 30	4:1	trans	2 à 4 FE
venturi						300	trans	faible	5 à 30	4:1	trans	2 à 4 FE
Tuyère						300	trans	moyenne	10 à 30	4:1	trans	2 à 4 FE
Pitot						300	trans	très faible	20 à 30	3:1	trans	3 à 10 FE
Cible						400	600	moyenne	10 à 30	4:1	non	2 à 4 FE
Flotteur Métal						500	50	faible	5 à 10	10:1	non	2 à 10 FE
Turbine						400	200	élevée	5	10:1	non	0.1 à 1 D
Electro magnétique						180	100	nulle	5	30:1	variable	0.5 à 1 D
A Vortex						200	100	faible	10 à 20	15:1	non	1 D
A ultrasons transit						250	cond	nulle	5 à 30	10:1	variable	0.5 D
A ultrasons Doppler						150	cond	nulle	0	10:1	non	3 D
Massique Thermique						100	cond	faible	0	10:1	non	2 FE
Massique Coriolis						300	100	faible	0	10:1	non	< 0.5 D

**trans:** fonction du transmetteur de pression différentielle. **D:** de la valeur du débit.  
**cond:** fonction du conduit. **FE:** du fond d'échelle.

	Convient bien pour ce service
	Peut convenir pour ce service
	Ne convient pas pour ce service