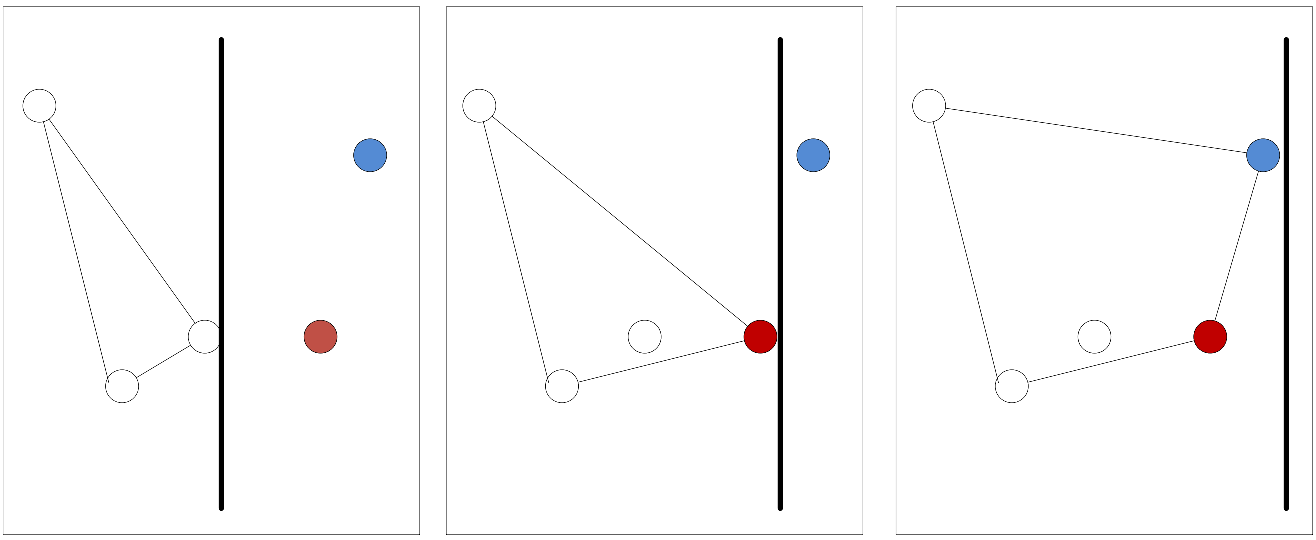
Geometrické algoritmy

Geometrické algoritmy umožňujú riešiť širokú škálu problémov, či už priestorového rozmiestnenia prvkov, rozpoznávania a analýzy obrazu, počítačovej grafiky.

Konvexný obal

Majme množinu *n* bodov v priestore, ktoré tvoria množinu *M*. Chceme ich všetky uzavrieť čo najkratšou krivkou. Je zrejmé, že táto krivka bude mať tvar konvexného mnohouholníka a tento budeme nazývať konvexným obalom. Body hľadaného mnohouholníka budú niektoré z bodov množiny *M*.

Existuje viacero algoritmov na jeho zostrojenie. Ukážeme si jeden, ktorý bude využívať princíp „zametacej“ priamky (sweep line). Algoritmus prechádza rovinu a postupne posúva „sweep line“. Napr. ideme zľava doprava (v princípe môžeme zvoliť ľubovoľný smer). Najskôr narazíme na prvý bod a ten bude zároveň predstavovať aj konvexný obal. Teraz posunieme „sweep line“ až po ďalší bod (najbližší v smere pohybu priamky). Tento bod pridáme do konvexného obalu. Ak jeho pridanie spôsobilo nekonvexnosť obalu, musíme ju opraviť. Postup aplikujeme až po prejdenie všetkých bodov. Takto sme dostali konvexný obal pre množinu prvkov *M*.

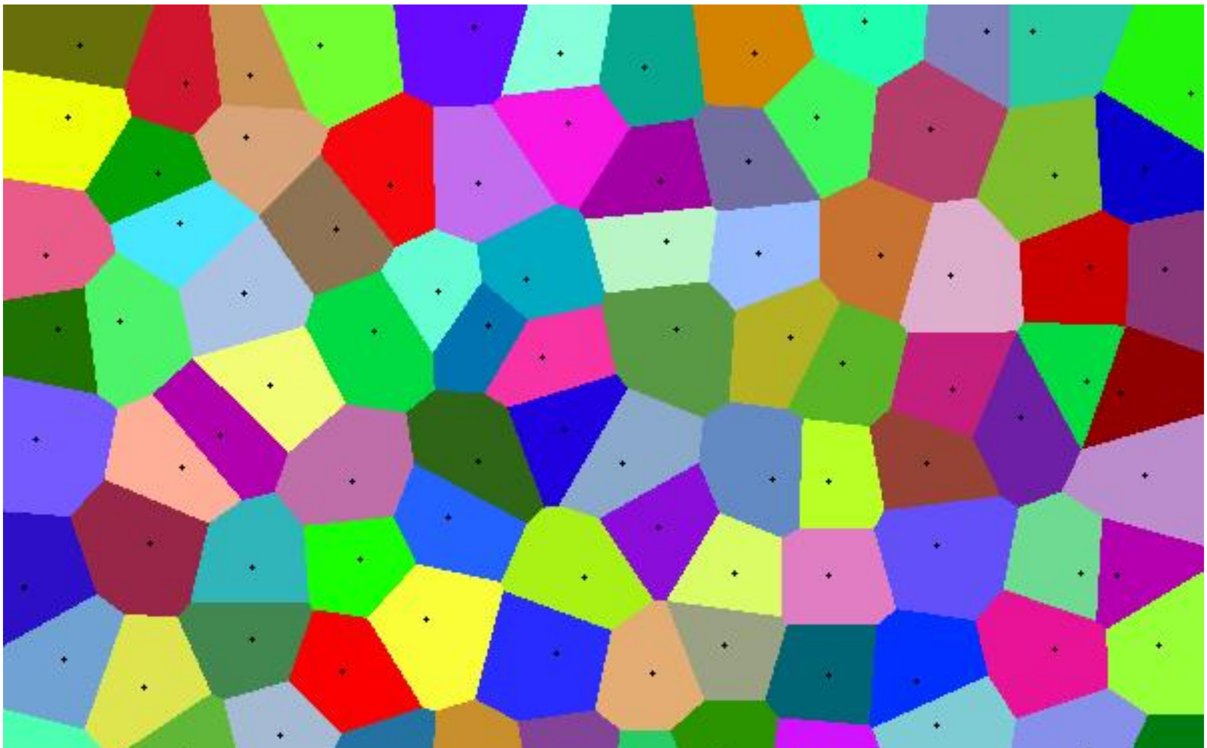


Na obrázku môžeme vidieť, ako by sa po pridaní červeného bodu po posune „sweep line“ narušila konvexnosť. Preto bol konvexný obal (obrázok uprostred) „upravený“ odstránením dvoch hrán a ich opätovným doplnením (pripojením k červenému bodu). Na poslednom obrázku sa „sweep line“ posunula k najpravejšiemu bodu a jeho zaradením do konvexného obalu práca algoritmu končí.

Vytvorenie konvexného obalu môžeme realizovať so zložitosťou O(n*log n).

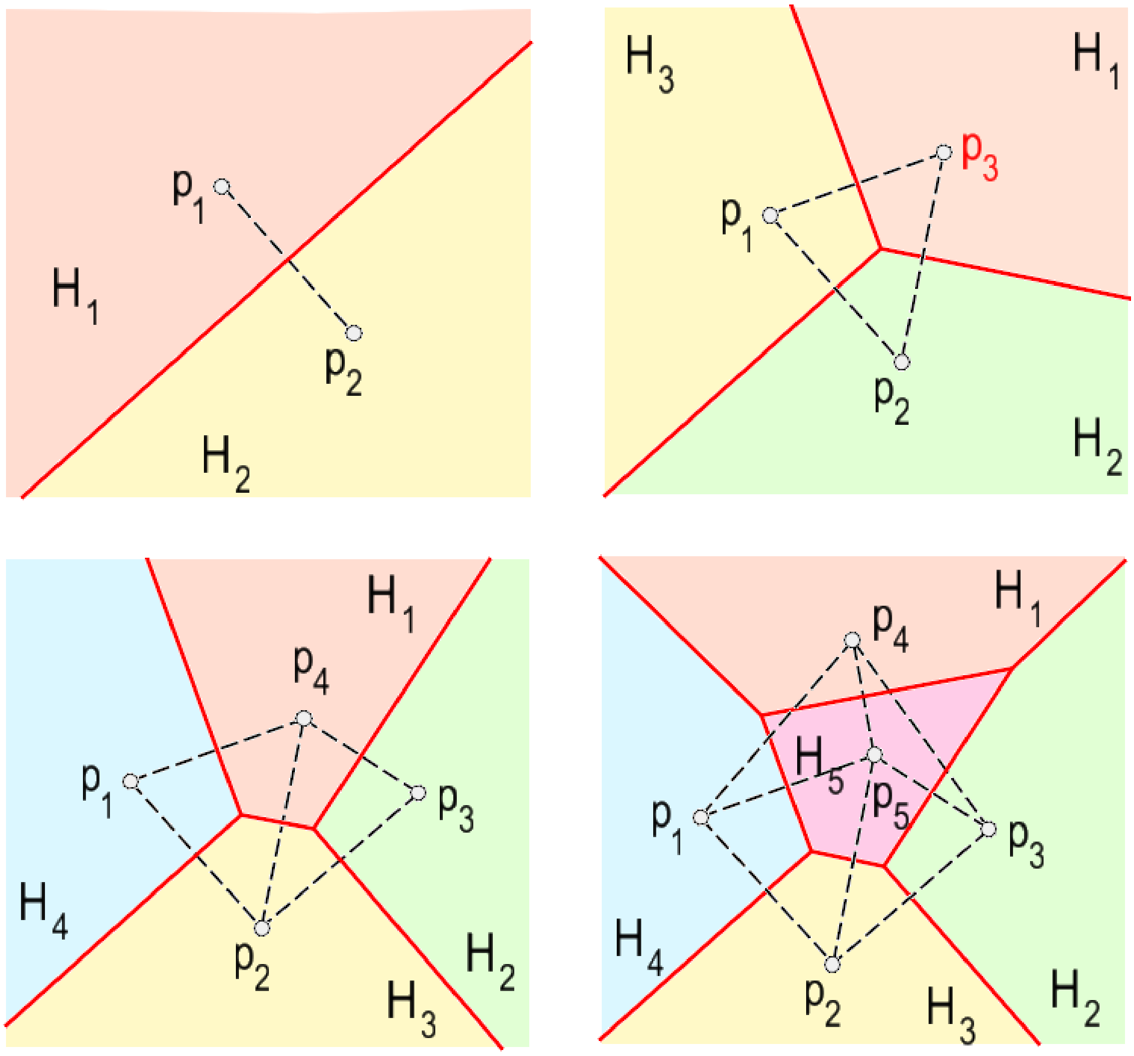
Voronoiové diagramy

Majme množinu *n* bodov v priestore, ktoré tvoria množinu *M*. Voronoiov diagram pre *M* je také rozdelenie roviny, ktoré každému bodu *b* z množiny *M* pridelí oblasť V(b) tak, aby všetky body oblasti V(b) boli bližšie k bodu *b* ako k akémukoľvek inému bodu z množiny *M*.



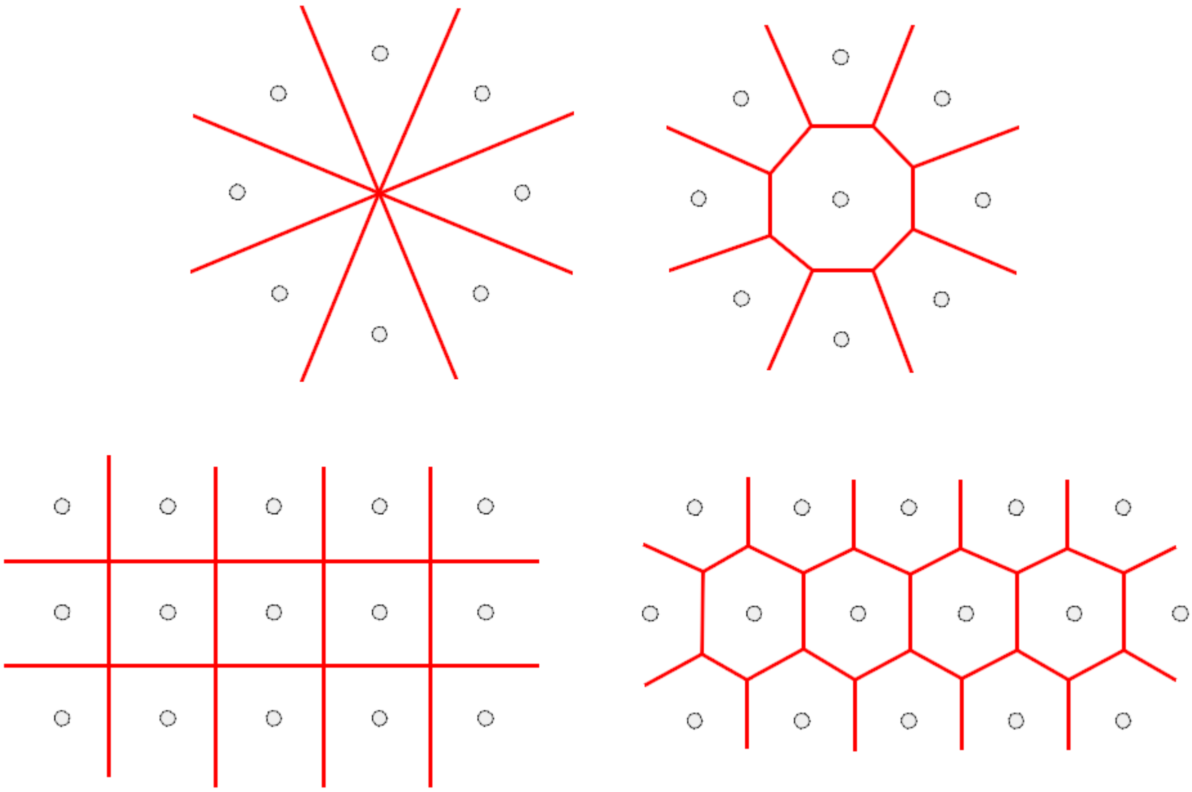
Obr. 1 – zdroj: https://www.codeproject.com/Articles/882739/Simple-approach-to-Voronoi-diagrams

Na obrázku 1. môžeme vidieť Voronoiov diagram aj s farebne vyznačenými oblasťami. Uprostred farebne vyznačenej oblasti sa nachádza bod z množiny *M* a všetky body, ktoré sú v tejto oblasti majú najbližšie práve tento bod.



Obr. 2 – zdroj: Tomáš Bayer - Voronoi diagram

Tu môžeme vidieť príklady Voronoiovho diagramu pre dva až päť vrcholov množiny *M*.



Obr. 3 – zdroj: Tomáš Bayer - Voronoi diagram

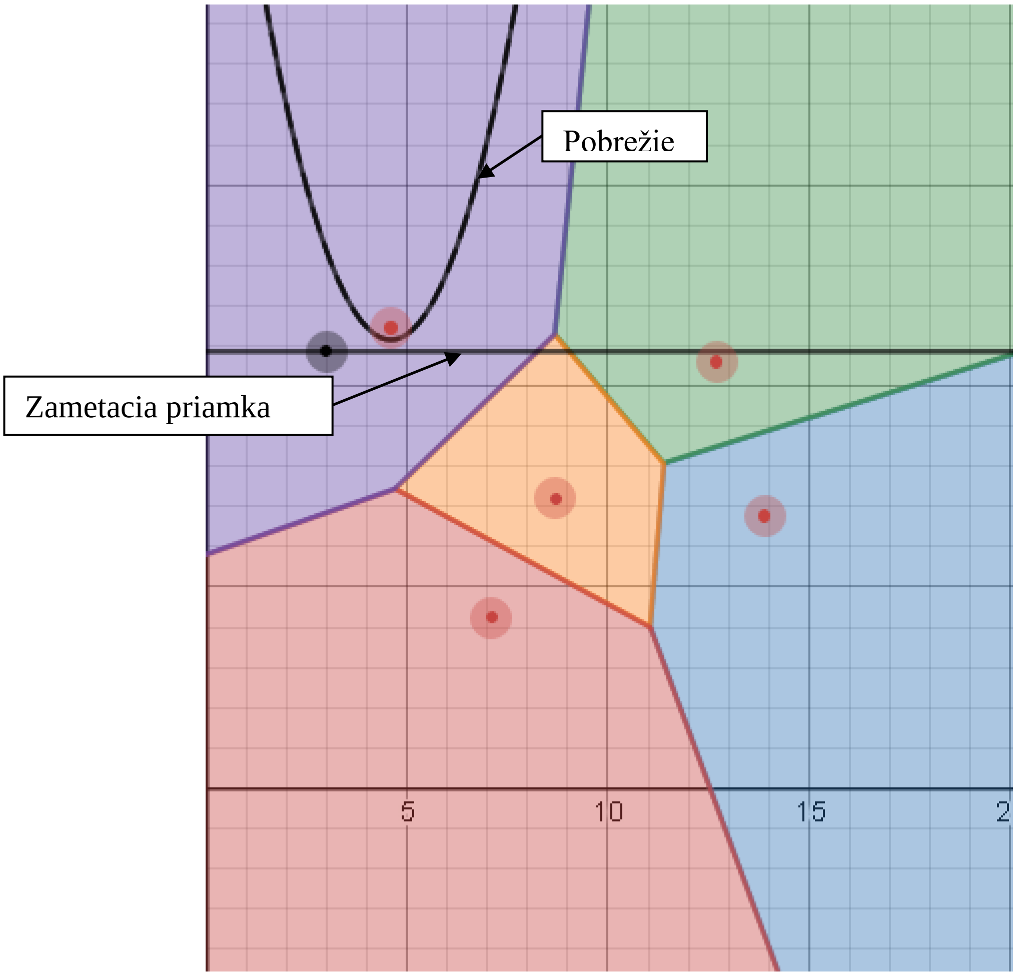
Na obrázku tri vidíme diagram pre pravidelné usporiadanie bodov.

Voronoiove diagramy majú veľmi široké využitie (biológia, ekológia, zdravotníctvo, geometria, informatika, stavebníctvo, plánovanie miest a mnoho ďalších možností).

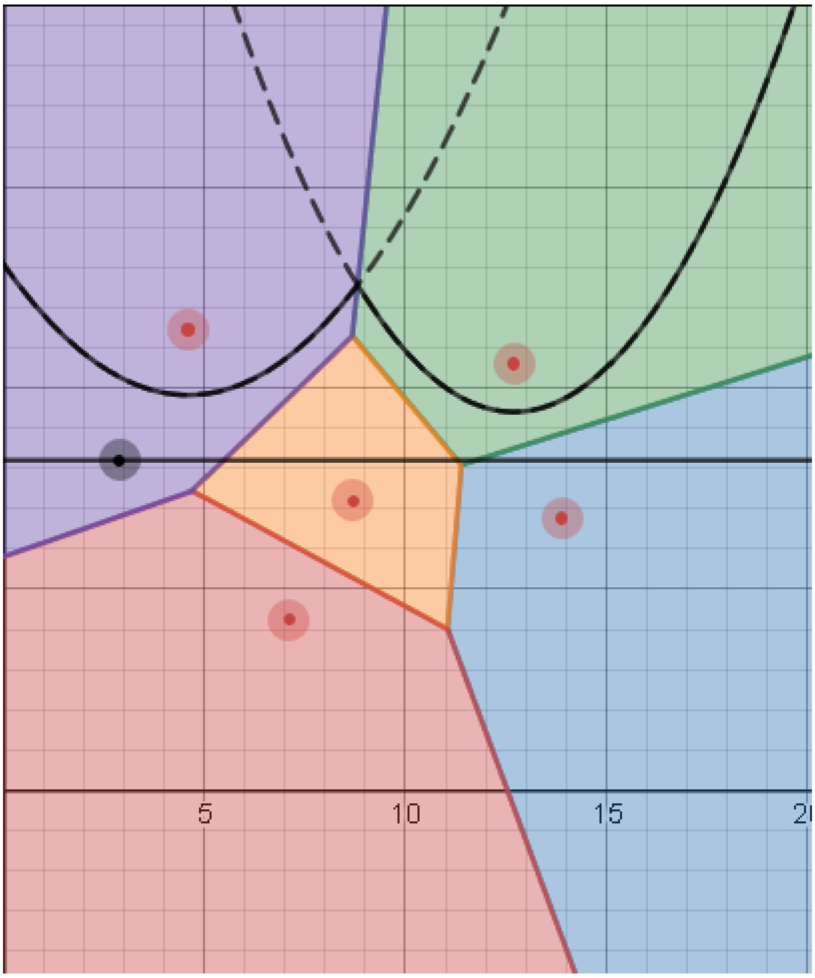
Vytvorenie Voronoiovho diagramu pomocou Fortunovho algoritmu

Autorom algoritmu je Steven Fortun, ktorý ho publikoval v roku 1986. Zásadnou výhodou je linearitmická časová zložitosť O(n) = n*log(n). Tento algoritmus je považovaný za jeden z najelegantnejších riešení pri hľadaní Voronoiovho diagramu. Základom celého algoritmu je prítomnosť "zametacej“ priamky (sweep-line), rovnako ako pri hľadaní konvexného obalu. Tá postupuje plochou v jednom smere (napr. zhora nadol) a vyhľadáva udalosti, ktoré do procesu tvorby diagramu zasiahnu. Druhou dôležitou krivkou je "pobrežie“ (beach-line). Táto krivka je tvorená parabolami a ich prípadnými priesečníkmi. Najkrajnejšie časti idú do nekonečna, vnútorné sú tie, ktoré sú najbližšie k

sweep-line. Jej úloha je podstatná z dôvodu, že v rovine jednoznačne oddeľuje priestor, v ktorom ešte môžu nastať zmeny od oblasti, v ktorej už akákoľvek budúca udalosť nič nezmení (pri tvorbe konvexného obalu už žiadne zmeny za sweep line nenastávali, tu tomu tak nie je). Pre správne pochopenie algoritmu si musíme uvedomiť, že množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené k bodu a aj úsečke tvorí vždy parabolu. Posúvame teda sweep line smerom zhora nadol a v okamžiku keď narazíme na bod *p* z množiny *M* vznikne nová parabola, tá predstavuje množinu bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu *p* a aj od sweep line. Situáciu môžeme vidieť na obrázku 4 (pobrežie tvorí jediná parabola).

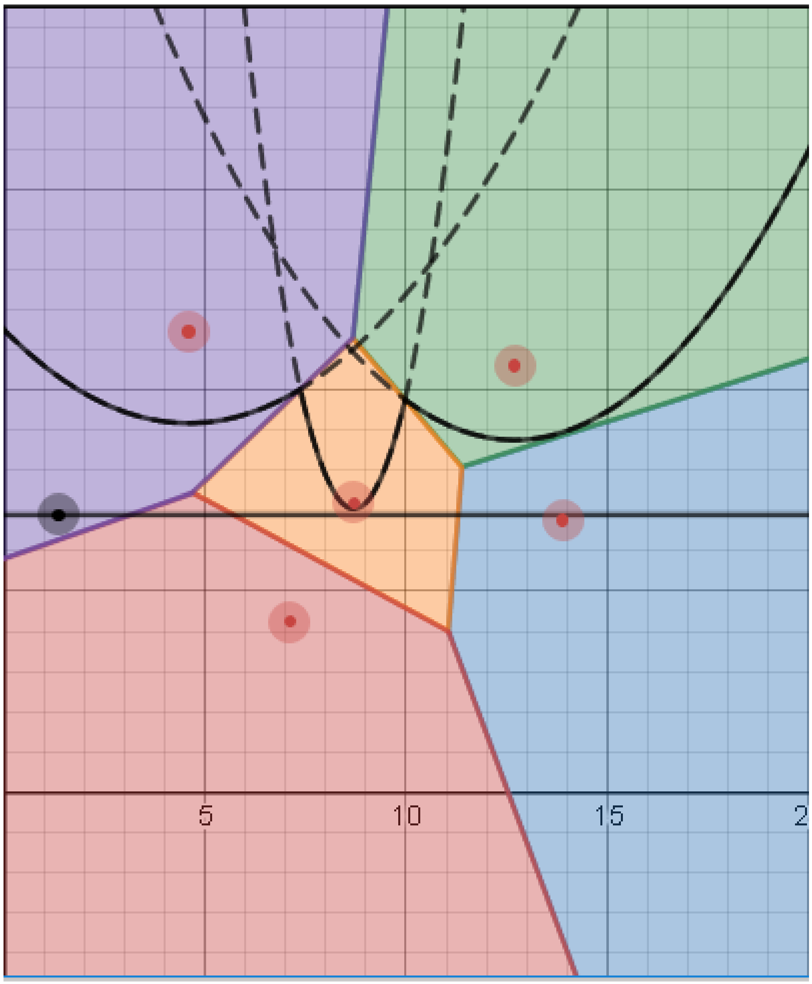


Obr. 4 – vytvorené na stránke https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4



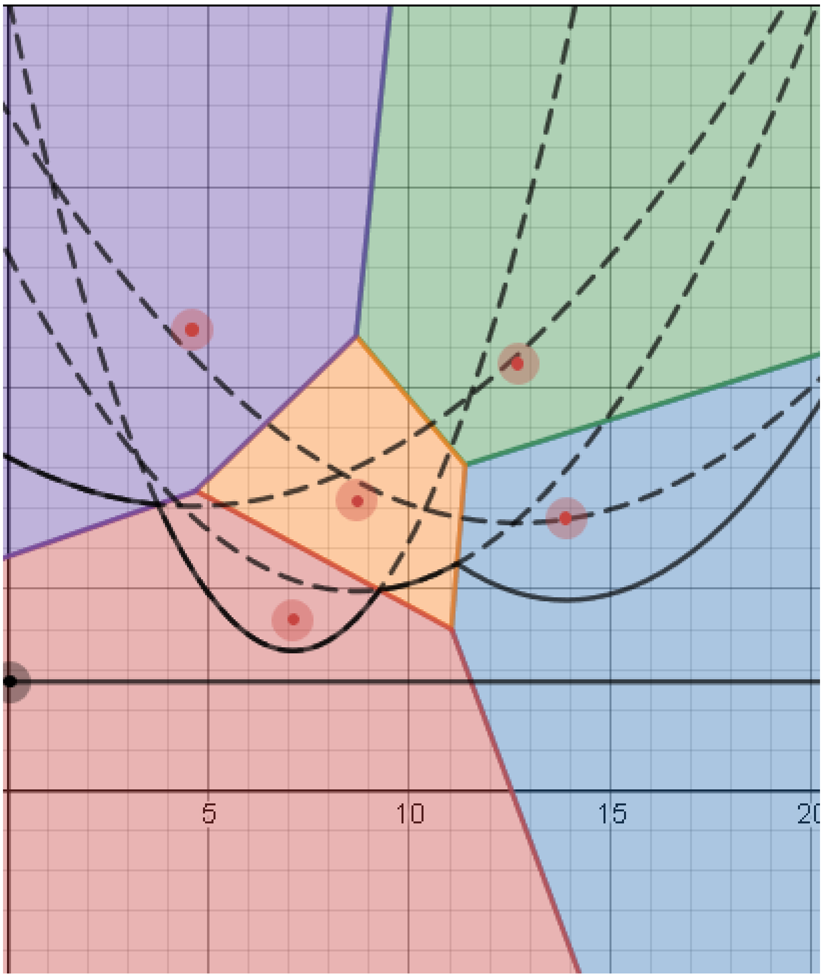
Obr. 5 – vytvorené na stránke https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4

Pri ďalšom posune zametacej priamky vznikne nová parabola. Na obrázku 5 je pobrežie už tvorené z dvoch parabol (neprerušovaná krivka). V mieste kde sa pri posune zametacej krivky stretávajú dve paraboly vzniká postupne hranica oddeľujúca dve oblasti Voronoiovho diagramu.



Obr. 6 – vytvorené na stránke https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4

Následne pri strete zametacej krivky s tretím bodov bude pobrežia tvorené už tromi parabolami a ako môžeme vidieť v miestach stretov parabol vznikajú priamky oddeľujúce body z rôznych oblastí (stret fialovej a oranžovej oblasti, stret zelenej a oranžovej oblasti). Situáciu môžeme vidieť na obrázku 6.



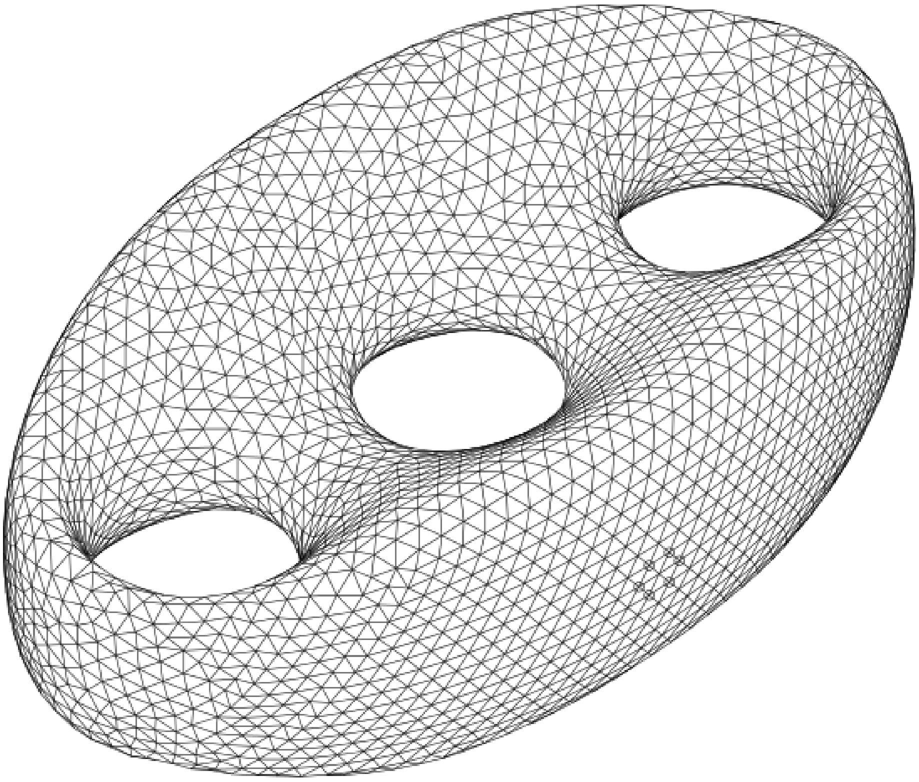
Obr. 7 – vytvorené na stránke https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4

Na obrázku 7 je pobrežie tvorené už 4 parabolami (neprerušovaná čiara).

Celý algoritmus je možné interaktívne (umožňuje posun zametacej krivky aj bodov množiny *M*) preskúšať na: https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4

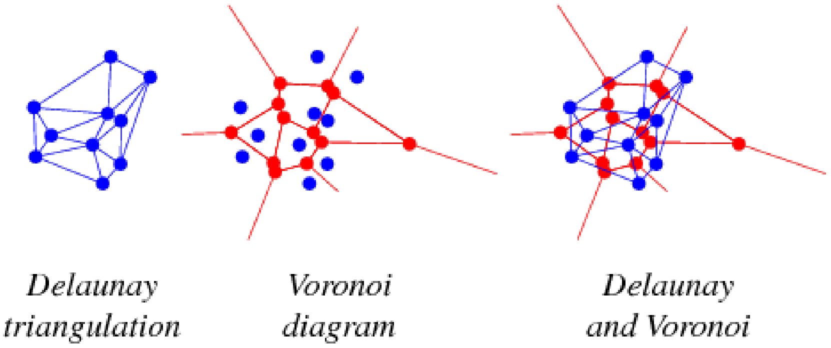
Delaunayová triangulácia

Delaunayová triangulácia je sieť trojuholníkov, v ktorej kružnica opísaná ľubovoľnému trojuholníku neobsahuje vo svojom vnútri žiaden vrchol iného trojuholníka. Táto vlastnosť nám zabezpečuje jednoznačnosť triangulácie. Významná je najmä v počítačov grafike, kde je potrebné jednotlivé povrchy pokryť trojuholníkmi (triangulovať), tak aby ich počet bol čo najmenší (veľký počet kladie zvýšené nároky na hardvér grafickej karty), ale výsledný povrch vyzeral „hladko“.

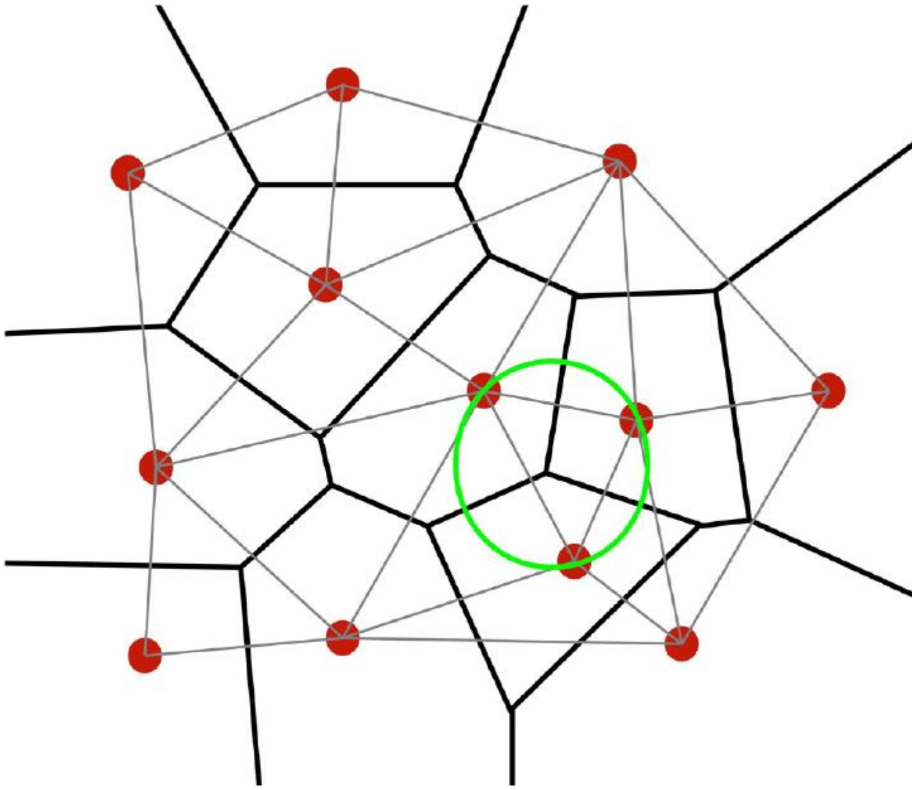


Obr. 8 – zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_triangulation

Na obrázku 8 môžeme vidieť príklad triangulácie telesa potrebný pre jeho vykreslenie. Pri triangulácií množiny bodov je žiaduce, aby vytvorené trojuholníky boli čo najviac rovnostranné. Dá sa dokázať, že práve Delaunayová triangulácia pokryje povrch efektívne. Platí totiž že Delaunayová triangulácia maximalizuje minimálny uhol a minimalizuje maximálny uhol, teda môžeme povedať, že sa snaží vytvoriť sieť trojuholníkov, ktorých vrcholy predstavujú zadané body systému a ktoré sa blížia svojim tvarom rovnostranným.
Vytvorenie Delaunayovej triangulácie je duálna úloha k vytvoreniu Voronoiovho diagramu. Ak máme Voronoiov diagram môžeme k nemu jednoducho a jednoznačne zostrojiť Delaunayovú trianguláciu a naopak.



Obr. 9 – zdroj: http://scenari.insa-rouen.fr/utop/table_matieres/old/version_2013-09-16/co/module__908.html


Obr. 10 – zdroj: https://i.stack.imgur.com/01H88.png

Obrázk 9 znázorňuje body z množiny *M* (modré body). Červené body a hrany vytvorili Voronoiov diagram. Na základe Voronoiovho diagramu mohli byť doplnené modré hrany predstavujúce Delaunayovu trianguláciu.