

Final Project - Evaluation of an Asian Option

Benjamin Krief, Clément Tisseau

Paris, December 2023

Dauphine | PSL 
UNIVERSITÉ PARIS



Contents

Introduction	2
Question 1 : Simulation du Mouvement Brownien et Estimation par Monte Carlo	3
Question 2 : Méthode des Variables Antithétiques	7
Question 3 : Variable de contrôle	9
Question 4 : Echantillonnage préférentiel	13
Conclusion	15

Introduction

Ce rapport présente une analyse détaillée de l'évaluation d'une option asiatique en utilisant des méthodes de Monte Carlo. Nous explorons diverses techniques telles que la simulation du mouvement brownien, les méthodes de variables antithétiques et de contrôle, ainsi que l'échantillonnage préférentiel. Notre objectif est de comprendre l'efficacité de ces méthodes dans la réduction de la variance et l'amélioration de l'exactitude des estimations de prix pour les options asiatiques.

Question 1 : Simulation du Mouvement Brownien et Estimation par Monte Carlo

Dans l'ensemble de ce projet, nous considérons la période $T = 1$. Cette hypothèse est en accord avec les consignes du sujet et simplifie les calculs.

Nous cherchons à montrer que $W_{t_{i+1}} = W_{t_i} + \sqrt{\frac{1}{n}}Z_{i+1}$ et $W_{t_0} = 0 \implies W_{t_i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i Z_k$, pour $1 \leq i, k \leq n$, étant donné que $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n}$ et que Z_k sont des variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Preuve :

En partant de $W_{t_0} = 0$, considérons la somme télescopique :

$$\begin{aligned} W_{t_i} &= W_{t_0} + \sum_{k=1}^i (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^i (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^i \left(W_{t_{k-1}} + \sqrt{\frac{1}{n}}Z_k - W_{t_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^i \sqrt{\frac{1}{n}}Z_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i Z_k \end{aligned}$$

□

Par conséquent, nous concluons
$$W_{t_i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i Z_k.$$

De ce fait, nous savons que :

$$\begin{aligned} S_{t_i} &= \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2}t_i + \sigma \cdot W_{t_i} \right) \\ &= \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{i}{n} + \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i Z_k \right) \end{aligned}$$

$$S_{t_i} = \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{i}{n} + \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i Z_k \right)$$

Nous posons l'estimateur classique de Monte-Carlo suivant :

$$\hat{I}_N^{(MC)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}^j - K \right)^+ \quad (\text{où } N \text{ le nombre de trajectoires})$$

Étant donné que $r = 0$, $S_0 = 1$, et $\sigma = \frac{1}{4}$, l'expression de $S_{t_i}^j$ se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} S_{t_i}^j &= S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{i}{n} + \sigma W_{t_i}^j \right) \\ &= \exp \left(\frac{i\sigma^2}{2n} + \sigma W_{t_i}^j \right) \end{aligned}$$

Ici, $S_{t_i}^j$ est le prix de l'actif au temps t_i pour la j -ème trajectoire, N est le nombre total de trajectoires simulées, n est le nombre d'étapes de discrétisation dans chaque trajectoire, K est le prix d'exercice de l'option, S_0 est le prix initial de l'actif, r est le taux d'intérêt sans risque, σ est la volatilité, et $W_{t_i}^j$ est le mouvement Brownien au temps t_i pour la j -ème trajectoire.

Expliquons le rôle des fonctions dans la simulation des trajectoires de nos Browniens :

simulate.brownian : Cette fonction simule une trajectoire du mouvement Brownien étant donné un vecteur de variables aléatoires gaussiennes. Elle calcule la somme cumulative de ces variables, la met à l'échelle par $1/\sqrt{n}$, et renvoie la trajectoire du mouvement Brownien.

simulate_trajectories : Cette fonction génère plusieurs trajectoires du mouvement Brownien. Elle crée une matrice de variables aléatoires gaussiennes et applique la fonction *simulate_brownian* à chaque colonne. Si *graph* est TRUE, elle trace également ces trajectoires.

Exemple de Simulation des Trajectoires du Mouvement Brownien

Le code R suivant illustre la simulation des trajectoires du mouvement Brownien :

```
# Définition des paramètres
n <- 10000
n_trajectories <- 100

# Mesure du temps de traitement
t <- proc.time()

# Simulation des trajectoires de mouvement Brownien
simulate_trajectories(n_trajectories, n, TRUE)

# Temps de traitement
proc.time() - t
```

Après exécution, le temps d'exécution du script est le suivant :

```
user  system elapsed
4.110   0.115   4.281
```

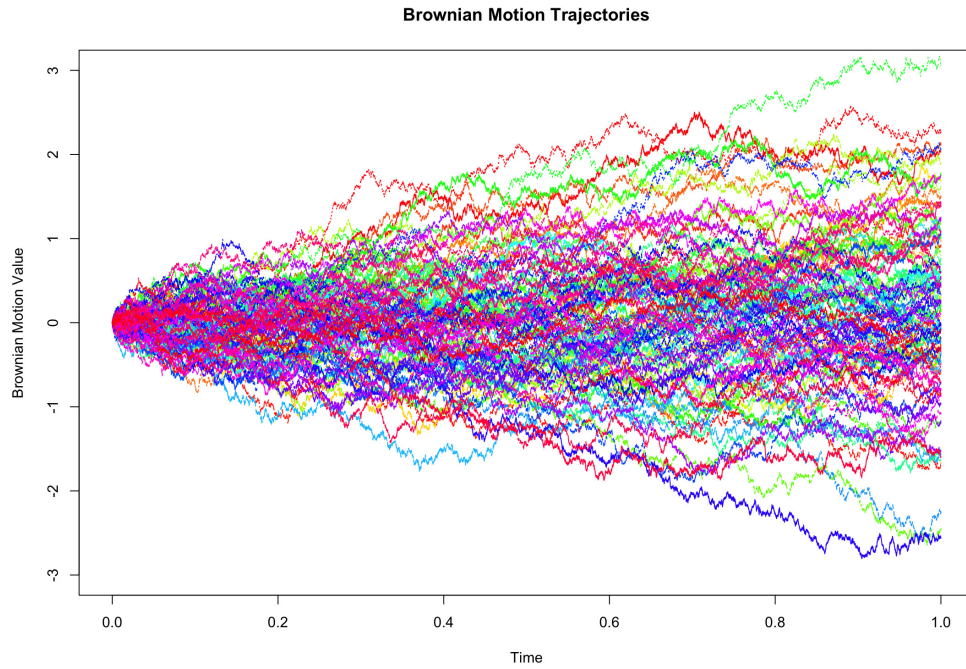


Figure 1: Visualisation de 100 trajectoires du mouvement Brownien, chacune avec 10000 itérations sur la grille normalisée.

Expliquons le rôle des fonctions dans la simulation de l'estimateur de Monte-Carlo:

simulate_risky_asset : Cette fonction simule la trajectoire d'un actif risqué en utilisant une trajectoire de mouvement Brownien. Elle utilise la formule $S_t = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t/n + \sigma W_t}$.

simulate_mutiple_risky_assets : Applique *simulate_risky_asset* à chaque colonne d'une matrice de mouvements Browniens pour simuler plusieurs trajectoires d'actifs risqués.

classic_MC_estimator : Estime le prix d'une option asiatique en utilisant la méthode classique de Monte Carlo. Cette fonction renvoie l'espérance et la variance de l'estimateur de Monte Carlo.

Exemple d'Implémentation de l'Estimateur de Monte Carlo

Le code R suivant montre comment mettre en œuvre l'estimateur de Monte Carlo pour calculer le prix d'une option asiatique :

```
# Définition des paramètres
r <- 0
sigma <- 1/4
K <- 1
n_trajectories <- 10000
n <- 100

# Mesure du temps de traitement
t <- proc.time()

# Simulation des trajectoires de mouvement Brownien
brownian_matrix <- simulate_trajectories(n_trajectories, n)

# Simulation des prix des actifs risqués
S <- simulate_mutiple_risky_assets(r, sigma, brownian_matrix)

# Calcul de l'estimation de Monte Carlo
G_estimate <- classic_MC_estimator(S, K)

# Affichage de l'estimation
print(G_estimate)

# Temps de traitement
proc.time() - t
```

Ce script illustre les étapes clés pour estimer le prix d'une option en utilisant la méthode de Monte Carlo.

- Initialisation des paramètres : Le taux d'intérêt sans risque r est fixé à 0, la volatilité σ à $\frac{1}{4}$, et le prix d'exercice K à 1.
- Simulation des trajectoires : On simule 10000 trajectoires du mouvement Brownien, avec 100 étapes de temps dans chaque trajectoire.
- Génération des prix des actifs risqués : Utilise la fonction *simulate_mutiple_risky_assets* pour simuler les prix des actifs pour chaque trajectoire brownienne.
- Calcul de l'estimateur : L'estimateur de Monte Carlo est calculé en utilisant la fonction *classic_MC_estimator*, qui prend les prix simulés S et le prix d'exercice K , et retourne l'estimation du prix de l'option.
- Affichage du résultat : Le prix estimé de l'option et sa variance sont affichés.

Résultats de l'Implémentation

Après l'exécution du script R, l'estimation du prix de l'option asiatique et la variance obtenues sont les suivantes :

```
Estimation du Prix : 5.802257e-02
Variance : 9.127780e-07
```

Le temps d'exécution du script est détaillé ci-dessous :

```
user  system elapsed
0.444   0.046   0.496
```

Question 2 : Méthode des Variables Antithétiques

antithetic_estimator : Cette fonction utilise la technique des variates antithétiques pour réduire la variance dans la simulation de Monte Carlo. La méthode exploite la symétrie de la distribution gaussienne, en particulier $N(0, 1)$, pour construire des chemins antithétiques. L'estimateur moyenne les résultats des deux chemins, original et antithétique. Cette approche tire parti du fait que W_{t_i} suit une distribution normale centrée (étant une somme de variables aléatoires gaussiennes centrées). Le chemin négatif $-W_{t_i}$ suit, par symétrie, la même distribution, offrant une réduction de variance en moyennant les résultats corrélés. Cette fonction renvoie l'espérance et la variance de l'estimateur des variables antithétiques.

L'estimateur antithétique est formulé comme suit :

Pour un mouvement brownien W et son mouvement antithétique $-W$, l'estimateur calcule :

$$\hat{I}_N^{(A)} = \frac{1}{2} \left(\hat{I}_N^{(MC)}(W) + \hat{I}_N^{(MC)}(-W) \right)$$

Où $\hat{I}_N^{(MC)}(\pm W)$ est l'estimateur standard de Monte Carlo auquel on applique le mouvement brownien $\pm W$.

Nous prouverons plus tard (Question 3), quelle distribution exacte suit W_{t_i}

Nous rappelons :

$$\hat{I}_n^{(MC)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}^j - K \right)^+$$

Exemple d'Implémentation avec l'Estimateur Antithétique

Le code R suivant montre la mise en œuvre de l'estimateur antithétique pour estimer le prix d'une option asiatique :

```
# Définition des paramètres
r <- 0
sigma <- 1/4
K <- 1
n_trajectories <- 10000
n <- 1000

# Mesure du temps de traitement
t <- proc.time()

# Simulation des trajectoires de mouvement Brownien
brownian_matrix <- simulate_trajectories(n_trajectories, n)

# Calcul de l'estimation antithétique
G_estimate_bis <- antithetic_estimator(brownian_matrix, K, r, sigma)

# Affichage de l'estimation
print(G_estimate_bis)

# Temps de traitement
proc.time() - t
```

Résultats obtenus :

```
Estimation du Prix : 5.837447e-02
Variance : 2.787341e-07
```

Temps d'exécution du script :

```
user  system elapsed
0.386   0.069   0.459
```

On constate que la variance a été réduite par 4 en comparaison avec l'estimateur classique de Monte Carlo.

Question 3 : Variable de contrôle

Calculons l'espérance de la variable de contrôle fournie en indication:

$$\begin{aligned}
 \left(\left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}} - K \right)^+ &= \left(\left(\prod_{i=1}^n \exp \left(\left(\frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{i}{n} + \sigma W_{t_i} \right) \right)^{\frac{1}{n}} - K \right)^+ \\
 &= \left(\exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{i}{n} + \sigma W_{t_i} \right] \right) - K \right)^+ \\
 &= \left(\exp \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma^2}{2n^2} \right) i + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma W_{t_i}}{n} \right) - K \right)^+ \\
 &= \left(\exp \left(\frac{\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n W_{t_i} \right) - K \right)^+ \\
 &= \left(\exp \left(\frac{\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i Z_k \right) - K \right)^+ \\
 &= \left(\exp \left(\frac{\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n i Z_i \right) - K \right)^+
 \end{aligned}$$

Pour ces calculs, on a utilisé les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
 W_{t_i} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i Z_k \quad (\text{cf question 1}) \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i Z_k &= \sum_{i=1}^n i Z_i \quad (\text{par récurrence directe})
 \end{aligned}$$

Trouvons la loi de $\sum_{i=1}^n i Z_i$:

$Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ donc $\sum_{i=1}^n i Z_i$ suit une loi normale également.

De plus, (Z_1, \dots, Z_n) sont des variables aléatoires iid.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n i Z_i \right) \right] &= \sum_{i=1}^n i \mathbb{E}[Z_i] \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \cdot 0 \quad (\text{puisque } \mathbb{E}[Z_i] = 0 \text{ pour tout } i) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n i Z_i \right) &= \sum_{i=1}^n i^2 \text{Var}(Z_i) \quad (\text{par propriété de la variance des variables iid}) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{car } \text{Var}(Z_i) = 1 \text{ pour tout } i)
 \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\sum_{i=1}^n iZ_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

Alors on a aussi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n iZ_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

Afin de simplifier les notations, on écrit : $\alpha^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ et $X = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n iZ_i$.
Ainsi,

$$X \sim \mathcal{N}(0, \alpha^2)$$

X a une fonction de densité f_X telle que :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Calculons maintenant l'espérance de la variable de contrôle. Posons :

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left(\exp\left(\frac{-\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma x}{n}\right) - K \right)^+$$

Puisque h est une transformation mesurable de X ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X)] &= \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left(\frac{-\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma x}{n}\right) - K \right) 1_{\left\{ \exp\left(\frac{-\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma x}{n}\right) - K \geq 0 \right\}} f_X(x) dx \end{aligned}$$

Puisque $K = 1$,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left(\frac{-\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma x}{n}\right) - K \right) 1_{\{x \geq \frac{\sigma(n+1)}{4}\}} f_X(x) dx \\ &= -K \cdot \mathbb{P}\left(X \geq \frac{\sigma(n+1)}{4}\right) + \int_{\frac{\sigma(n+1)}{4}}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma x}{n}\right) f_X(x) dx \end{aligned} \quad (*)$$

Posons : $\tilde{X} = \frac{1}{\alpha} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Concentrons nous maintenant sur l'intégrale de la ligne (*)

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\sigma(n+1)}{4}}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\sigma^2(n+1)}{4n} + \frac{\sigma x}{n}\right) f_X(x) dx \\ &= \exp\left(-\frac{\sigma^2(n+1)}{4n}\right) \int_{\frac{\sigma(n+1)}{4}}^{+\infty} \exp\left(\frac{\sigma x}{n}\right) f_X(x) dx \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $y = -x$:

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2(n+1)}{4n}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4}} \exp\left(-\frac{\sigma y}{n}\right) f_X(-y) (-dy)$$

La densité d'une loi normale étant paire :

$$= \exp\left(-\frac{\sigma^2(n+1)}{4n}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4}} \exp\left(-\frac{\sigma y}{n}\right) f_X(y) dy$$

Utilisons la forme canonique pour simplifier le calcul :

$$-\frac{1}{2\alpha^2} \left(y + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2n^2\alpha^2} = -\frac{y^2}{2\alpha^2} - \frac{\sigma y}{n}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4}} \exp\left(-\frac{\sigma y}{n}\right) f_X(y) dy &= \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{y^2}{2\alpha^2} - \frac{\sigma y}{n}\right) dy \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2\alpha^2}{2n^2}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left(y + \frac{\sigma\alpha^2}{n}\right)^2\right) dy \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $x = y + \frac{\sigma\alpha^2}{n}$:

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\frac{\sigma^2\alpha^2}{2n^2}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4} + \frac{\sigma\alpha^2}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2\alpha^2}{2n^2}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma(n+1)}{4} + \frac{\sigma\alpha^2}{n}} f_X(x) dx \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2\alpha^2}{2n^2}\right) \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leq -\frac{\sigma(n+1)}{4\alpha} + \frac{\sigma\alpha}{n}\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}} - K \right)^+ \right] &= -K \cdot \mathbb{P}\left(\tilde{X} \geq \frac{\sigma(n+1)}{4\alpha}\right) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{\sigma^2(n+1)}{4n}\right) \exp\left(\frac{\sigma^2\alpha^2}{2n^2}\right) \\ &\quad \times \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leq -\frac{\sigma(n+1)}{4\alpha} + \frac{\sigma\alpha}{n}\right) \end{aligned}$$

□

Commande R associée :

$$\begin{aligned} &\text{pnorm}\left(-\frac{\sigma \cdot (n+1)}{4 \cdot \alpha} + \frac{\sigma \cdot \alpha}{n}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{\sigma^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot n^2}\right) \\ &- K \cdot \left(1 - \text{pnorm}\left(\frac{\sigma \cdot (n+1)}{4 \cdot \alpha}\right)\right) \end{aligned}$$

L'estimateur de la variable de contrôle est formulé comme suit :

$$\hat{I}_N^{(C)} = \hat{I}_N^{(MC)} + \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \hat{b}_{n_0}(Y_j - \mathbb{E}[Y]) \right)$$

où

$$Y := \left(\left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}} - K \right)^+$$

Nota bene : \hat{b}_{n_0} est déterminé avec `estimate_bstar` empiriquement en n_0 itérations (cf. cours) avec $n_0 \ll N$

Expliquons le rôle des fonctions dans la simulation de l'estimateur de la variable de contrôle:

simulate_control_variables : Cette fonction applique *control_variable* à chaque trajectoire d'actifs risqués pour générer un ensemble de variables de contrôle.

remove_Inf_elements : Supprime les éléments infinis d'un vecteur. Cette étape est nécessaire pour éviter les problèmes numériques dans les calculs ultérieurs.

simulate_Gs : Génère les valeurs de G pour chaque trajectoire, utilisées dans l'estimation classique de Monte Carlo.

estimate_bstar : Calcule le coefficient optimal b^* pour la combinaison linéaire de G et de la variable de contrôle. Cette estimation est basée sur un sous-ensemble de données pour éviter le surajustement.

expectation_control_variable : Calcule l'espérance de la variable de contrôle. Cette valeur est essentielle pour ajuster correctement l'estimateur de Monte Carlo. (cf. Calcul précédent)

control_variable_estimator : Combine l'estimateur classique de Monte Carlo avec la variable de contrôle pour obtenir une estimation finale. Cela réduit la variance de l'estimateur tout en conservant un biais non biaisé.

Exemple d'Implémentation avec Variable de Contrôle

```
# Définition des paramètres
r <- 0
sigma <- 1/4
K <- 1
n_trajectories <- 10000
n <- 100
n_zero <- 200

# Mesure du temps de traitement
t <- proc.time()

# Simulation des trajectoires de mouvement Brownien
brownian_matrix <- simulate_trajectories(n_trajectories, n)

# Simulation des prix des actifs risqués
S <- simulate_mutiple_risky_assets(r, sigma, brownian_matrix)

# Calcul de l'estimation avec variable de contrôle
G_estimate_ter <- control_variable_estimator(S, K, n_zero, n)

# Affichage de l'estimation
print(G_estimate_ter)

# Temps de traitement
proc.time() - t
```

Résultats obtenus :

Estimation du Prix : 5.795646e-02

Variance : 1.070327e-09

Temps d'exécution du script :

user	system	elapsed
0.380	0.018	0.397

Question 4 : Echantillonnage préférentiel

a) Définition des fonctions g_1 et g_2

Nous savons que $S_0 = 1$ et nous considérons la grille discrète $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ avec $t_i := \frac{i}{n}$. On rappelle que le taux d'intérêt r vaut 0.

Définissons les fonctions g_1 et g_2 :

$$g_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{i}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^i x_k \right) \right)_{i=1, \dots, n}$$

$$g_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - K \right)^+$$

Maintenant, nous définissons la fonction g :

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \mapsto g_2 \circ g_1(\mathbf{x})$$

Pour $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, nous avons $g(Z_1, \dots, Z_n) = G$.

b) Calcul de l'espérance de G

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G] &= \mathbb{E}[g(Z)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{z}) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{z} + \mu) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2} \langle \mathbf{z} + \mu, \mathbf{z} + \mu \rangle} d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{z} + \mu) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} e^{-\langle \mu, \mathbf{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mu, \mu \rangle} d\mathbf{z} \\ &= \mathbb{E}[g(Z + \mu) e^{-\langle \mu, \mathbf{Z} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mu, \mu \rangle}] \end{aligned}$$

c) Méthode d'échantillonnage préférentiel

L'estimateur de l'échantillonnage préférentiel est formulé comme suit :

$$\hat{I}_n^{(\text{EP})} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[g(Z_j + \hat{\mu}) e^{-\langle \hat{\mu}, Z_j \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{\mu}, \hat{\mu} \rangle} \right]$$

On rappelle que $Z_j \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\mu}$ obtenu avec la méthode de bisection.

Expliquons le rôle des fonctions dans la simulation de l'estimateur de l'échantillonnage préférentiel:

bisection_method : Implémente la méthode de la bisection pour trouver la valeur de y qui satisfait l'équation non linéaire dérivée de la condition d'optimalité pour l'échantillonnage préférentiel.

custom_function : Calcule l'estimation de Monte Carlo pour une trajectoire donnée, ajustée par un facteur d'échantillonnage préférentiel basé sur μ .

IS_MC_estimator : Estime la valeur de G en utilisant la méthode d'échantillonnage préférentiel. Cette fonction génère des trajectoires modifiées, calcule les estimations de Monte Carlo pour chaque trajectoire et ajuste les résultats en fonction de la distribution modifiée. Ces fonctions ensemble forment un cadre pour appliquer l'échantillonnage préférentiel dans l'évaluation d'options asiatiques, permettant une estimation plus efficace en termes de variance pour un nombre donné de simulations.

Exemple d'Implémentation de l'Échantillonnage préférentiel

```
# Définition des paramètres
K <- 1
sigma <- 1/4
n <- 100
n_trajectories <- 10000

# Mesure du temps de traitement
t <- proc.time()

# Choix de l'intervalle pour la méthode de la bisection
y_values <- seq(-0.5, 0.5, length.out = 100)
z_values <- sapply(y_values, function(y) {
  zS_vectors(y, n = 100, sigma = 0.25, K = 1)[1] - y - 1
})
plot(y_values, z_values, type = "l", col = "blue", lwd = 2, xlab = "y", ylab = "zS_vectors(y)",
     main = "Plot of zS_vectors(y)")
abline(h = 0, col = "gray", lty = 2)

# Application de l'échantillonnage préférentiel
sol <- bisection_method(n, sigma, K = 1)
mu <- zS_vectors(sol, n, sigma, K)[2:(n+1)]

# Estimation de G avec l'échantillonnage préférentiel
G_estimate_IS <- IS_MC_estimator(n_trajectories, n, mu, K)
print(G_estimate_IS)

# Temps de traitement
proc.time() - t
```

Résultats obtenus :

Estimation du Prix : 5.737356e-02
Variance : 9.985480e-08

Temps d'exécution du script :

user	system	elapsed
0.581	0.055	0.680

Conclusion

Tableau Récapitulatif des Résultats

Voici un tableau récapitulatif des estimations des prix, des variances, et des temps d'exécution pour chaque méthode :

Méthode	Estimation du Prix	Variance	Temps d'exécution (s)
Monte Carlo Classique	5.802257e-02	9.127780e-07	0.496
Antithétique	5.837447e-02	2.787341e-07	0.459
Variable de Contrôle	5.795646e-02	1.070327e-09	0.397
Échantillonnage préférentiel	5.737356e-02	9.985480e-08	0.680

Table 1: Résumé des estimations des prix, des variances, et des temps d'exécution pour différentes méthodes ($n = 100$, $n_{\text{trajectoires}} = 10000$, $n_0 = 200$).

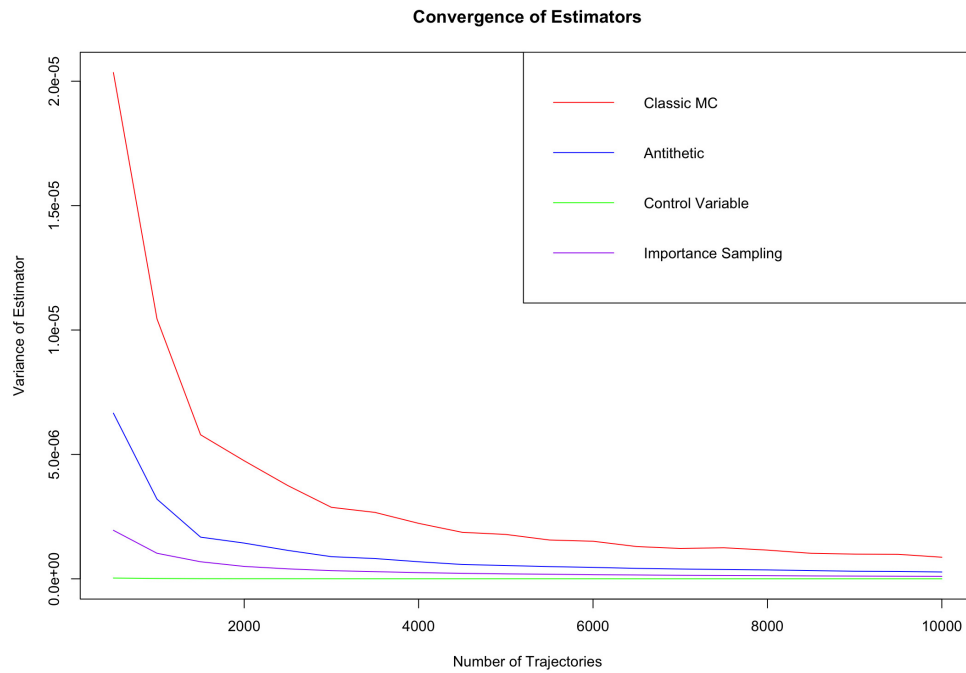


Figure 2: Visualisation de la vitesse de convergence des variances de nos estimateurs respectifs en fonction du nombre de trajectoires.

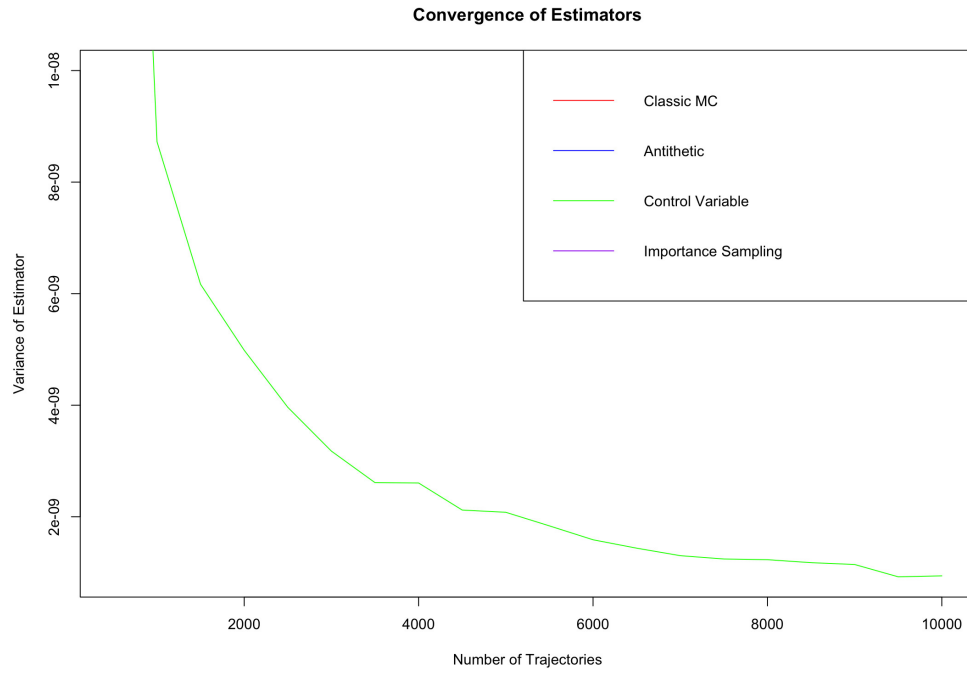


Figure 3: Visualisation de la vitesse de convergence de la variance de l'estimateur de la variable de contrôle en fonction du nombre de trajectoires.

En conclusion, ce projet a permis d'appliquer des méthodes de Monte Carlo avancées pour évaluer le prix des options asiatiques. Nous avons constaté que l'utilisation de techniques telles que les variables antithétiques et de contrôle ainsi que l'échantillonnage préférentiel peut significativement améliorer la précision des estimations en réduisant la variance. Parmi ces améliorations, l'estimateur de la variable de contrôle s'est avéré le plus efficace, en vertu de nos graphiques ci-dessus. Ces méthodes offrent des outils robustes et efficaces dans le domaine complexe de la tarification des options, démontrant leur valeur dans des applications financières pratiques.