Université Paris Dauphine - Master 1
Méthodes Monte-Carlo (2023-2024)

Projet final - Evaluation d'une option asiatique

- *A rendre : un rapport et un programme. Vous pourrez les archiver dans un fichier* `.zip`*. Le nom de fichier sera* `NOM1-NOM2.zip`.
- *Envoyer le rapport + le programme à l'adresse suivante :* `liu@ceremade.dauphine.fr` *avant le 22 Décembre 2023, 23 :59.*
- *N'oubliez pas d'inclure vos noms et prénoms dans le rapport.*
- *Vous pouvez utiliser* R *ou* Python *et rédiger le rapport en anglais ou en français. Il est important que le programme soit bien commenté (sinon, il est possible que je vous demande d'expliquer votre travail à l'oral).*

Supposons que l'on soit sur un marché financier avec un taux d'intérêt nul $r = 0$. Soit S un actif risqué défini par $S_0 = 1$ et

$$S_t := S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \tag{1}$$

où $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien. Considérons $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ avec $t_k := \frac{T}{n}k$, une grille de discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$. Notons

$$A_T^n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}.$$

On cherche à calculer le prix d'une option asiatique par la méthode de Monte-Carlo, i.e. calculer

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}\left[(A_T^n - K)^+\right],$$

où $G = (A_T^n - K)^+$. Supposons que $T = 1, K = 1, \sigma = 0.25$.

1. (6pts) Simuler les trajectoires de mouvement Brownien W sur la grille discrète, puis calculer le prix $\mathbb{E}[G]$ par la méthode de Monte-Carlo.

   Indication :

   ▷ *Définition du mouvement brownien :*
   Un processus stochastique à valeurs réelles $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard si
   (1) $W_0 = 0$ p.s. et pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p$, les variables $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq p$ sont indépendantes, la variable $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$;
   (2) W est à trajectoires continues, c'est-à-dire les applications $t \mapsto B_t(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$ sont toutes continues.

   ▷ *Simulation du mouvement brownien :*
   Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ avec $t_0 = 0$, et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit le processus $W = (W_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ par

   $$W_0 = 0 \quad \textit{et} \quad W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \sqrt{t_{n+1} - t_n}\, Z_{n+1}.$$

Alors $(W_{t_n})_{t\in\mathbb{N}}$ *est une réalisation de trajectoire du mouvement brownien aux instants* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▷ *Le prix* S_t *défini dans* (1) *peut être simulé par*

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_{i-1}} \exp\Big((r-\sigma^2/2)(t_{i+1}-t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}\, Z_{i+1}\Big)$$

sur la grille discrète.

2. (4pts) Proposer une méthode antithétique afin de réduire la variance.

3. (4pts) Proposer une méthode de variables de contrôle afin de réduire la variance.

   Indication : On pourra considérer la variable aléatoire $\big((\prod_{i=1}^n S_{t_i})^{1/n} - K\big)^+$.

4. (6pts) À l'aide de la référence [1], proposer une méthode d'échantillonnage préférentiel.

   Indication :

   (a) (2pts) *Écrire* G *comme une fonction de* Z, *i.e.* $G = g(Z)$, *où* $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ *est un vecteur gaussien standard de dimension* n.

   (b) (2pts) *Soit* $\mu \in \mathbb{R}^n$ *un vecteur déterministe, prouver que*

   $$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[g(Z)] = \mathbb{E}\Big[g(Z+\mu)e^{-\langle \mu, Z\rangle - \langle \mu,\mu\rangle/2}\Big].$$

   (c) (2pts) *Dans l'article [1], les auteurs suggèrent une méthode pour approximer le meilleur vecteur* μ *:*

   – *Pour chaque* $y \neq 0$, *on définit deux vecteurs* $z(y)$ *et* $S(y)$ *par*

   $$\begin{aligned} z_1(y) &\coloneqq \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}(y+K)}{y} \quad \text{avec} \quad \Delta t = \frac{T}{n} \\ S_j(y) &\coloneqq S_0 e^{-\sigma^2 t_j/2 + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{k=1}^j z_k(y)} \\ z_{j+1}(y) &\coloneqq z_j(y) - \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} S_j(y)}{ny}. \end{aligned}$$

   – *Par la méthode de bifurcation, trouver la solution de*

   $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n S_j(y) - K - y = 0.$$

   – *Soit* $\hat{y}$ *la solution trouvée, notons* $\hat{\mu} \coloneqq z(\hat{y})$. *Utiliser* $\hat{\mu}$ *pour la méthode d'échantillonnage préférentiel.*

5. (2pts, bonus) À l'aide de [1], proposer une méthode de stratification.

Références

[1] Glasserman, P., Heidelberger, P., & Shahabuddin, P. (1999). Asymptotically optimal importance sampling and stratification for pricing path-dependent options. Mathematical finance, 9(2), 117-152.