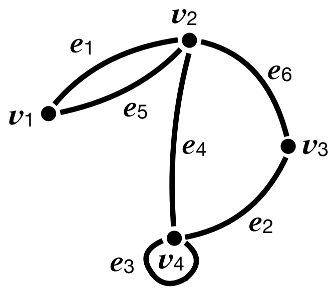
RO

Partie 1 : Eléments de théorie des graphes

Exemple de graphe non orienté :

$n = 4$, $m = 6$, V = { v_1, v_2, v_3, v_4 }, E = { $e_1, e_3, e_3, e_4, e_5, e_6$ }

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$\Psi(e)$	$\{ v_1, v_2 \}$	$\{ v_1, v_2 \}$	$\{ v_1, v_2 \}$	$\{ v_1, v_2 \}$	$\{ v_1, v_2 \}$	$\{ v_1, v_2 \}$



Définition 1 :

Un <u>graphe</u> **non orienté** (fini) est une structure G = (V, E, Ψ) où :

- V est un ensemble fini (de card noté n) dont les éléments sont appelés <u>sommets</u>,
- E est un ensemble fini (de cardinal noté m) dont les éléments sont appelés <u>arêtes</u>,
- Ψ est une fonction de E dans P_2(V)* dite fonction d'incidence.

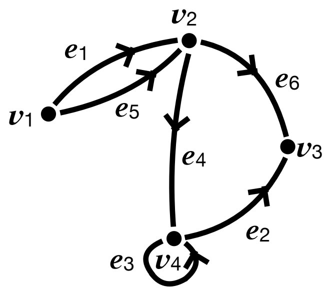
  A chaque arête $e \in$ E, Ψ(e) est l'ensemble des 2 extrémités de E.

*P_2(V) = ensemble des parties de V à 2 éléments.

Exemple de graphe orienté :

$n = 4$, $m = 6$, V = { v_1, v_2, v_3, v_4 }, E = { $e_1, e_3, e_3, e_4, e_5, e_6$ }

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$\Psi(e)$	(v_1, v_2)	(v_1, v_2)	(v_1, v_2)	(v_1, v_2)	(v_1, v_2)	(v_1, v_2)



➥ (x, y) signifie : x vers y (flèche orientée)

Définition 2 :

Un graphe **orienté** (fini) est une structure G = (V, E, Ψ) où :

- V est un ensemble fini (de card noté n) dont les éléments sont appelés sommets,
- E est un ensemble fini (de cardinal noté m) dont les éléments sont appelés arcs,
- Ψ est une fonction de E dans $P_2(V)$ dite fonction d'incidence.

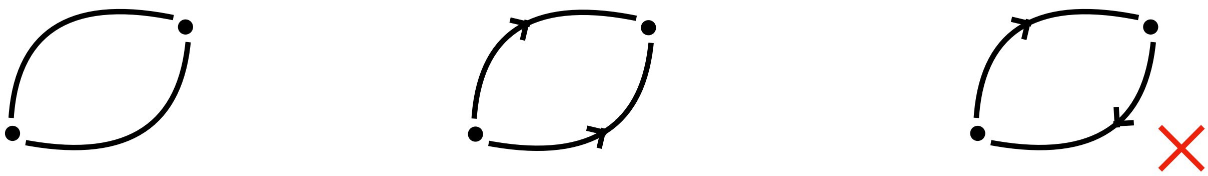
  A chaque arc $e \in E$, $\Psi(e)$ est une paire ordonnée de sommets.

Définition 3 :

Une boucle est une arête (ou un arc) dont les extrémités sont égales.

Exemple :

Un graphe présente des arêtes (ou arcs) multiples s'il possède au moins deux sommets reliés par plusieurs arêtes (ou arcs de même sens).



Définition 4 :

Un graphe **simple** est un graphe sans boucles ni arêtes (ou arcs) multiples.

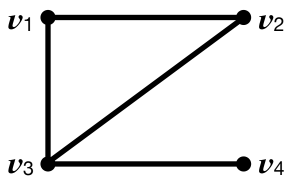
↳ On travaillera avec des graphes simples finis.

Dans un graphe simple, on peut identifier sans ambiguïté chaque arête (ou arc) avec la paire (ordonnée ou non) de ses extrémités.

Un graphe non-orienté simple est une paire G = (V, E) où :

- V est un ensemble fini (de card noté n) dont les éléments sont appelés sommets,
- $E \subseteq P_2(V)$

Exemple :

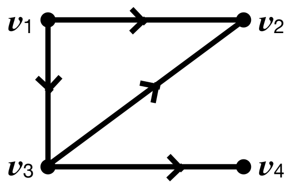


$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ $\qquad$ $E = \{ \{ v_1, v_2 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_2, v_3 \}, \{ v_3, v_4 \} \}$

Un graphe orienté simple est une paire G = (V, E) où :

- V est un ensemble fini de sommets,
- $E \subseteq V \times V$

Exemple :

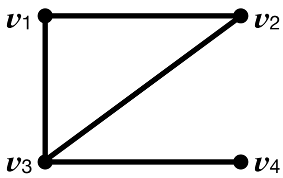


$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ $\qquad$ $E = \{ (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4) \}$

Notion de degré

Soit G un graphe.
Le degré d'un sommet v, noté deg(v), est le nombre d'arêtes, ou d'arcs, incidents à v.

Exemple :



deg(v_1) = 2

deg(v_2) = 2

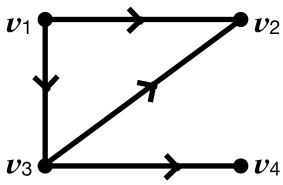
deg(v_3) = 3

deg(v_4) = 1

Soit G un graphe orienté.

- Le degré extérieur d'un sommet v noté $deg^+(v)$ est le nombre d'arcs issus de v,
- Le degré intérieur d'un sommet v noté $deg^-(v)$ est le nombre d'arcs terminant dans v.

Exemple :



$deg^+(v_1) = 2$ $deg^-(v_1) = 0$

$deg^+(v_2) = 0$ $deg^-(v_2) = 2$

$deg^+(v_3) = 2$ $deg^-(v_3) = 1$

$deg^+(v_4) = 0$ $deg^-(v_4) = 1$

Propriété 1 :

Dans tout graphe, la somme des degrés de tous les sommets est un nombre pair.

Matrices associées à un graphe simple non orienté

Soit G = (V, E) un graphe simple non orienté.

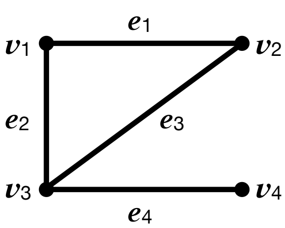
- Matrice d'adjacence sommets-sommets notée B de taille $n \times n$ est :

  $b_{ij} = \{ 1 \text{ si } \{ v_i, v_j \} \in E \mid 0 \text{ sinon } \}$

- Matrice d'incidence sommets-arêtes notée A de taille $n \times m$ est :

  $a_{ij} = \{ 1 \text{ si } v_i \text{ est une des 2 extrémités de } e_j \mid 0 \text{ sinon } \}$

Exemple :



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice associée à un graphe simple orienté

Soit G = (V, E) un graphe simple orienté.

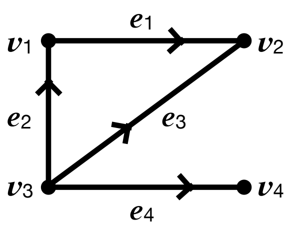
- Matrice d'adjacence sommets-sommets notée B de taille $n \times n$ est :

  $b_{ij} = \{ 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in E \mid 0 \text{ sinon } \}$

- Matrice d'incidence sommets-arêtes notée A de taille $n \times m$ est :

  $a_{ij} = \{ +1 \text{ si } v_i \text{ est l'extrémité finale de } e_j \mid -1 \text{ si } v_i \text{ est l'extrémité initiale de } e_j \mid 0 \text{ sinon } \}$

Exemple :



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

deg^+ : (2 0 2 0) $\qquad$ deg^- : (0 2 1 1)

Quelques propriétés des graphes

- Un graphe est **réflexif** si chaque sommet possède une boucle.
  i.e $\forall v \in V, \ (v, v) \in E$
  ↳ il n'y a que des 1 sur la diagonale de la matrice d'adjacence

- Un graphe est **symétrique** si sa matrice d'adjacence est symétrique.
  i.e $\forall v, w \in V, \ (v, w) \in E \Rightarrow (w, v) \in E$

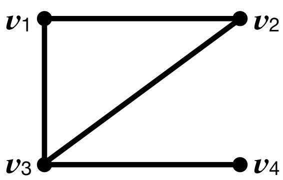
- Un graphe est **antisymétrique** si $\forall v, w \in V, \ (v, w) \in E \Rightarrow (w, v) \notin E$

- Un graphe est **transitif** si $\forall v, w, x \in V, \ (v, w) \in E$ et $(w, x) \in E \Rightarrow (v, x) \in E$

Sous graphes et graphes partiels

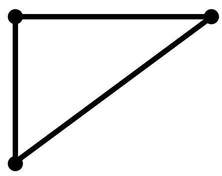
Soit G = (V, E) un graphe.

- G' est un graphe **partiel** de G si G' = (V, E') avec E' ⊆ E
- G' est un sous graphe de G **induit** par W si G' = (W, F) avec W ⊆ V et F l'ensemble de toutes les arêtes de G dont les 2 extrémités sont dans W
- G' est un sous graphe **partiel** de G si G' est graphe partiel d'un sous graphe de G



Graphe G

Graphe partiel



Sous graphe induit par W = { v_1, v_2, v_3 }

Sous graphe partiel

Chaînes et cycles

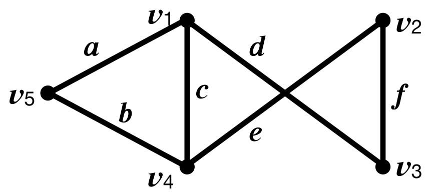
Soit G = (V, E) un graphe non-orienté.

Une **chaîne** est suite alternée de sommets de d'arêtes

$C = \{ u_0, f_1, u_1, \dots , u_{k-1}, f_k, u_k \}$ où $k \geq 1$ (i.e au moins une arête)

$u_i \in V$, $f_i \in E$ et $f_i = \{ u_{i-1}, u_i \}$

Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités sont égales.



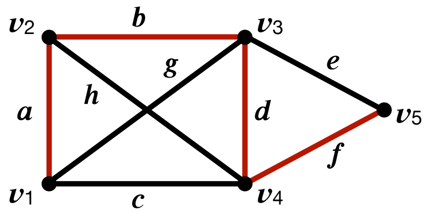
$C = \{ v_1, a, v_5, b, v_4, e, v_2 \}$

Une boucle est un cycle $C = \{ v, e, v \}$

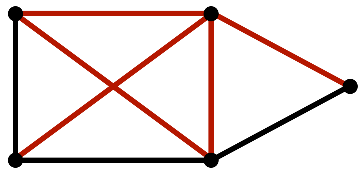
Si $C = \{ u_0, f_1, u_1, \dots , u_{k-1}, f_k, u_k \}$ est une chaîne alors $C' = \{ u_k, f_k, u_{k-1}, \dots , u_1, f_1, u_0 \}$ l'est aussi.

Une chaîne (ou cycle) est :
- **élémentaire** si chaque sommet apparaît au plus une fois
- **simple** si chaque arête apparaît au plus une fois

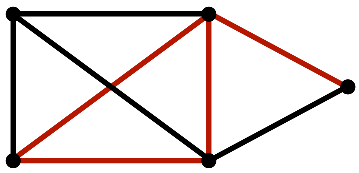
La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes y figurant.
Un graphe non-orienté est **acyclique** s'il ne possède pas de cycle simple.



Chaîne simple élémentaire
$C = \{ v_1, a, v_2, b, v_3, d, v_4, f, v_5 \}$



Chaîne simple non élémentaire
$C = \{ v_1, g, v_3, d, v_4, h, v_2, b, v_3, e, v_5 \}$



Chaîne non simple
$C = \{ v_1, g, v_3, d, v_4, c, v_1, g, v_3, e, v_5 \}$

Chemins et circuits

Un **chemin** est une suite alternée de sommets et d'arcs

$C = \{ u_0, f_1, u_1 , \dots , u_{k-1}, f_k, u_k \}$

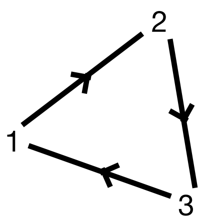
$k \geq 1$, $u_i \in V$, $f_i \in E$, $f_i = (u_{i-1}, u_i)$ $\forall\, i \in [1 .. k]$

Un **circuit** est un chemin dont les extrémités sont égales.

Chemins et circuits, simples et élémentaires → voir chaînes et cycles

Algorithme de détection de la présence de circuits dans un graphe

① Calcul de la matrice d'adjacence B
② Tester si B possède une ligne i ne contenant que des 0
   Oui : aller en ③
   Non : Terminer, le graphe possède au moins un circuit
③ Barrer dans B la i-ème ligne et la i-ème colonne
④ Tester si B ne possède que des 0
   Oui : Terminer. Pas de circuit.
   Non : aller en ②



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ possède au moins un circuit

Étapes préliminaires

Équivalence

X un ensemble
$\mathscr{R}$ une relation binaire sur X telle que :
   x $\mathscr{R}$ y

$\mathscr{R}$ est dite d'**équivalence** si elle est :

- réflexive : $\forall\, x \in X,\quad x \,\mathscr{R}\, x$
- symétrique : $\forall\, x, y \in X,\quad x \,\mathscr{R}\, y \Rightarrow y \,\mathscr{R}\, x$
- transitive : $\forall\, x, y, z \in X,\quad x \,\mathscr{R}\, y$ <u>et</u> $y \,\mathscr{R}\, z \Rightarrow x \,\mathscr{R}\, z$

Connexité

I. Soit G = (V, E) un graphe <u>non orienté</u>.
On définit une relation de **connexité** sur V par :
   $v \,\mathscr{C}\, w$ si { $v = w$ | il existe une chaîne entre v et w }

   C'est une relation d'équivalence.
   Les classes d'équivalence sont appelées **composantes connexes**.
   G est dit connexe s'il n'a qu'une seule composante connexe.

II. Soit G = (V, E) un graphe <u>orienté</u>.
On définit une relation de **connexité forte** sur V par :
   $v \,\mathscr{C}\, w$ si { $v = w$ | il existe une chemin de v à w <u>et</u> un chemin de w à v }

   C'est une relation d'équivalence.
   Les classes d'équivalence sont appelées **composantes fortement connexes**.
   G est dit connexe s'il n'a qu'une seule composante fortement connexe.

Algorithme de marquage

Un graphe orienté G
Sortie :

- nombre de composantes fortement connexes
- composantes fortement connexes

① Initialisation : $k = 0$ et W = V

② Tant que W ≠ ∅, choisir $v \in$ W et le marquer d'un + et -

②.1) Marquer tous les successeurs (directs ou indirects) d'un +

②.2) Marquer tous les prédécesseurs (directs ou indirects) d'un -

②.3) Poser $k = k+1$ et C_k = ensemble des sommets marqués + et -

②.4) Retirer tout C_k de W et effacer les marques

③ k = nb de composantes fortement connexes. C_1 , … , C_k : composantes fort. connexes

Nombre cyclomatique

Soit G un graphe non orienté

- n sommets
- m arêtes
- p composantes connexes

Le nombre **cyclomatique** de G est $v(G) = m - n + p$

Théorème 1 :

Pour tout graphe G non orienté, le nombre cyclomatique est positif :

$v(G) \geq 0$ et $v(G) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ G est acyclique

Preuve :

G = (V, E) avec E = { e_1 , … , e_m }

On pose G_k = (V, E_k) avec E_k = { e_1 , … , e_k }

On a donc G_m = G

On montre par récurrence sur k que $v(G_k) \geq 0$

- $k = 1$

$v(G_k) = 1 - n + n - 1 = 0$

On suppose que $v(G_k) \geq 0$

Cas 1 : e_{k+1} relie 2 composantes connexes de G_k

$v(G_{k+1}) = k + 1 - n + p(G_k) - 1 = k - n + p(G_k) = v(G_k) \geq 0$ → Hypothèse de récurrence

Cas 2 : e_{k+1} a ses 2 extrémités dans une même composante connexe de G_k

$v(G_{k+1}) = k + 1 - n + p(G_k) = v(G_k) \geq 0$